中等算學月刊

第二卷第九期

贈閱

第二卷第九期目錄

現在的三角法似應加以改良

蘇 笠 夫

1. 三角函數用得着六個嗎？從前有一時期，三角法叫做八線學，其中包括八種函數，即：正弦，餘弦，正切，餘切，正割，餘割，正矢，餘矢。雖然不能說當時把這八種函數，看作同樣重要，但是每個函數，都有他的地位。後來因爲正矢餘矢太不常用，遂不爲人所重視，到現在不過是歷史的名詞，在三角法開始時提一下就算了。目下一般三角法中，只餘下六種函數，雖然對於他們並不同樣看待，往往注重正弦，餘弦及正切——有的書上稱他們爲主要函數，——但是正割餘割仍舊占有相當的地位，到處還要提到他們。然而關於這兩個的獨立公式，已不多見。至於餘切的地位，雖然不敢說與主要函數並駕齊驅，但較之正割餘割，已勝過一籌，有關於他的獨立公式，函數及對數表中都有他的存在。但是這六種函數，是否有同時存在的必要？是否還有縮減的餘地？我認爲尚有研究的價值。

我們知道這六個函數中，餘割，正割及餘切各爲正弦，餘弦及正切的倒數。因此如果已知後三者的數值，前三者的數值，便立即可以求出來。如果要求 $\cot(A+B)$，可先求 $\tan(A+B)$；如果要把 $\sec\frac{A}{2}$ 用 $\cos A$ 表出，可先把 $\cos\frac{A}{2}$ 用 $\cos A$ 表出來。總之前三種函數，可以主要函數來替代，他們的相互關係，可以用主要函數的關係來表出。所以這三種函數——正割，餘割及餘切——實無獨立存在的必要。我們對於這些不必要的東西，何必費許多精力和時間去記憶他們研究他們呢？一般三角法仍然保留着這些不必要的東西，便是不經濟的地方，我們似乎要加以改良纔是。

2. 三角法中所沿用的符號都適當嗎？無論中外的三角法教本，一般對於三角函數與反三角函數所採用的符號，大都如下：

x 角的三角函數：	sinx	cosx	tanx
	cscx	secx	cotx

x 的反三角函數：
$$\begin{array}{ccc} \sin^{-1}x & \cos^{-1}x & \tan^{-1}x \\ \csc^{-1}x & \sec^{-1}x & \cot^{-1}x \end{array}$$

也有用 arcsinx, arccosx 等等表反正弦函數，反餘弦函數的。又三角函數之乘冪，一般寫作

$$\sin^2x, \quad \cos^3x, \quad \tan^4x, \quad \text{等等。}$$

我們用慣了這些符號的人，或者感覺不出來蹩扭或奇特，但是對於初學的人，不但感覺蹩扭，而且常常發生誤解．據我所知道的，有好多學生誤認

$$\sin(A+B) = \sin A + \sin B$$

$$\cos(x-y) = \cos x - \cos y$$

等等。又有些學生在求解下列方程的時候，

$$\tan^{-1}2x + \tan^{-1}3x = \pi/4$$

常這樣說："兩邊各乘以 tan……"，這兩種錯誤怎樣會發生呢？因爲學生們很容易把 sin, cos, tan, ……，當作普通的算學量，好像對於

$$a(b+c) = ab+ac, \quad z(x-y) = zx-zy$$

一樣看法，可見這種符號，容易引起錯誤。

在算學中普通都把指數寫在右上方，而對於三角函數，却偏寫作 $\sin^3A$ 等等，同時反三角函數又寫作 $\sin^{-1}x$, $\cos^{-1}z$, ……，而此處之 -1 又不是指數。這些都是很易引起疑問發生誤會的事實，似乎也應加以改良。

3. 改良辦法：

(a) 應創用三個函數的三角法。"在歐洲各國中等學校裏，正割餘割已很少見，在高等算學教科書裏應用他們的地方不多，有些德國著作家，對於餘切也認爲無用。"(註) 我們今後的三角法，也應只注意關於正弦，餘弦及正切三者的研究。簡直在開始下定義時，便無所謂正割餘割等等，或是像現在對於正矢餘矢的辦法，只在講函數定義時提一下作爲歷史的紀念，以後便可拋開他們．

(註) 參考拙譯『中等學校算學教學法』第二十一章(商務出版)。

(b) 創用新符號。 爲避免誤會及糾紛起見，可創用以下符號：

$\sin A$ 可改爲 S_A, $\cos x$ 可改爲 C_x, $\tan 45^\circ$ 可改爲 T_{45°

$\cos(x+y)$ 可改爲 $C_{(x+y)}$, $\tan(\pi-A)$ 可改爲 $T_{(\pi-A)}$, 等等。

如在研究一種問題中，只涉及一種角的函數，則更可從簡．例如：

$\tan x=\dfrac{\sin x}{\cos x}$ 可改爲 $T=\dfrac{S}{C}$, $\sin^2x+\cos^2x=1$ 可改爲 $S^2+C^2=1$。

又如求証 $\cos^2A-\sin^2A=1-2\sin^2A$, 則可用新符號證明如下：

因 $C^2-S^2=C^2+S^2-2S^2$, 但 $C^2+S^2=1$, $\therefore$ $C^2-S^2=1-2S^2$。

至於反三角函數，則

$\sin^{-1}\frac{1}{2}$ 可改爲 $\angle S(\frac{1}{2})$, $\cos^{-1}0$ 可改爲 $\angle C(0)$, 餘類推。

這樣改良後的三角法，可有種種優點：

(i) 內容從此簡單化。 因三角函數既減爲三種，則基本關係式亦由五個減爲三個；恆等式與方程式中只包括三種函數，證明求解均較容易。 總之，一切關於餘切，正割及餘割的各部份，都歸消滅，對於學習和應用上，自較簡單。

(ii) 符號從此合理化。 應用這種符號，一望可知 T_A, S_{45°, ……, 是代表數值，$\angle T(\frac{1}{2})$, $\angle S(a)$, ……，是代表角度，並且這種符號有不可分性，不至再誤解 $T_{(x+y)}=T_x+T_y$ 了。同時關於指數及反函數不至再起糾紛，在運算上定感便利。至於形式簡單，寫記方便，猶其餘事。總之，改良的符號，較爲合理化。

這樣改良方法極爲簡單，收效不少，不知要省却多少初學所妄費的時間和精力。唯個人學識淺薄，不知如此改法有無妨礙，很希望海內賢達多多指正！

算學教科書改良意見

劉 宏 謨

一. 關於敎材之取捨.

（甲） 應加統計敎材. 近世社會事業及學術書報，均極重統計之研究。中學生求應社會之需要及便利學術之研究，對於統計的知識，似不宜缺少。故鄙意以爲應於算術中附加統計，以適應時代的需要。

（乙） 應加系統總括. 近來國內通行敎本，於每章之末，常不附加簡明之提要，其實此種提要，頗關重要，蓋既可使學者對於本章內容，有系統的認識，且易指導其記憶及複習也。例如代數四則章後，應附以如下之提要：

- 代數四則
  - 加法
    - 演算之定律
      - 交換律: $a+b=b+a$.
      - 結合律: $(a+b)+c=a+(b+c)$.
    - 演算之口訣
      - 同號相加，以原號爲號。
      - 異號相減，從大數之號。
  - 減法—演算之口訣: 變減數之號而加之。
  - 乘法
    - 演算之定律
      - 交換律: $a\times b=b\times a$.
      - 結合律: $(a\times b)\times c=a\times(b\times c)$.
      - 分配律: $a\times(b+c)=a\times b+a\times c$.
    - 演算之口訣
      - 同號相乘得正。
      - 異號相乘得負。
  - 除法—演算之口訣
    - 同號相除得正。
    - 異號相除得負。

（丙） 應加常見錯誤之特別指示. 關於每種演算所習見之錯誤，應分別舉例指示，并特附演習，以求深切其正確之訓練。例如：

$\sqrt{-1}\times\sqrt{-1}=\sqrt{(-1)\times(-1)}\neq\sqrt{1}=1$,

$2^n\neq n\times 2$,

$2^3\times 2^3\neq 2^{3^2}$,

$3(5-3)\neq 3\times 5-3$,

$\frac{6+3}{2}\neq\frac{\cancel{6}^3+3}{\cancel{2}}$,

$\frac{6+5}{7+5}\neq\frac{6}{7}+1$,

$2^{\frac{1}{n}}\neq 2^{-n}$,等等。

（丁） 應加復習及討論之問題。 常見學者只注意機械的算法，而不注意理解及意義，殊非習算之正旨。欲免此弊，宜於每章之末，附加復習及討論之問題。例如秦汾民國新代數學（商務出版）緒論章後，似應添入次列各問題：

何謂代數學？代數學之主要目的何在？何故代數學中用文字代數？如何用文字以代數？試將本書所用符號歸納分類。代數上所用符號共有幾種？何者爲算術所已用？何者爲代數所特用？何者已用於算術，但用於代數，已改變形式意義？代數記法與算術記法有何異點？代數記法之優於算術記法者何在？算術中能採用代數的記法否？何謂代數式？其與算術式之異點何在？代數式之效用有幾？何故能有此效用？試詳列各種代數式之名稱，且加以分別。等等。

此類問題，不僅使學者對於已得知識，能加以系統的整理，使觀念益形深切正確，且可於討論中暗示其比較歸納等研究之方法，以促發其研究討論之興趣。

（戊） 並行或相似方法應加比較說明。 例如一次聯立方程式之解法，有加減，等置，代入諸種，在各書中皆並行講授。授畢後似應加以如次之比較，使學者能明各法利弊宜忌之所在，便於應用時知所取捨，以免捨簡趨繁之弊，而得靈敏馭用之妙，

聯立一次方程式解法之比較

代入法： 兩式中有一未知數之係數爲1，或能除盡全式時，宜用之。

等置法： 兩式中同一未知數之係數相同，或各能除盡全式時，宜用之。

加減法： 上二法皆不便時可用此法。

（己） 代數中之對數，應歸入算術中；算術中之求積，應歸入幾何中。

二。 關於教材之編制。

（甲） 宜用分科編制而兼補以混合聯絡。 混合制與分科制各有其利弊，混合制之優點，在能使全部算學有內部之連絡，而獲互相發明印證之效。但其弊在將分科自有之體系，分離支割，使學者對一分科，難得整個的體會。且高等算學，皆係分科，若素不重分科之體系，則進修亦將失其聯絡。 分科制之利，在能保持體系之完整，但其弊在對於其他分科，容易失其聯絡，不能收印證之效。 故鄙意以爲中學教本，宜以分科編制爲綱，而輔以混合聯絡。例如：

(i) 算術中授減法時，可歸納被減數與減數之關係，成 $a-b=c$ 之公式。同時討論 $a>b$ 及 $a<b$ 對於 c 之影響，卽可引入負數之觀念，使加減法貫通。且可用直線上之點表數，以明正負數之關係。

(ii) 算術中演四則雜題時，卽宜引入一次方程式，但應聲明此法係屬於代數範圍者。 令學生比較算術演算與方程演算之孰爲簡易，以見代數學爲算術進化之學科。雜題宜大略分類，每類解法，可歸納成爲一個公式，使學生對於四則雜題，得以充分駕馭，同時又足見代數式效用之普遍。

（乙） 宜有補充教材之編制。普通教本之編制，皆假定學生程度，在一水平線上。按諸實際，一般學生算學之程度及所感之興趣，參差殊甚。 是以普通教材，優秀學生覺其淺鮮，遲鈍學生感其困難，彼此牽制，殊屬非是。 鄙意以爲於普通教材之外，宜有補充教材之編制，或以小字附於本文之下，或另編補充教本與原書並行。 此項補充教材，宜以啓發式的問題作前導，以引起其接受之興趣，而所補之教材，應適於個別的自修，以求與教授程序無礙。 若能就補充教材更詳爲分類，俾學

者得依其性之所近，作選習補充，則尤爲完備矣。

（丙） 習題之編制應分類分級。一般教本之習題，常取混合方式以爲編制，此殊不合習算者之心理。應按各種習題之性質，相似者歸爲一類，示以解法，使集中演習，加深經驗。每種分類之下，更宜按程度之深淺，分爲數級，令學生分級練習，逐次上升，以引發其理解之開展。同時普通教本，無復習之機會，分級練習，恰寓循環復習之意，故頗合於教育原理。

（丁） 注意啓發算學之見識及意味。普通教本大都只注意方法之傳授與技巧之練習。不知一種科學，自有其特別的意味，學者如不能領略，將永不得其眞諦，又焉得有貫澈之了悟與研究之興致？故鄙意以爲編教本者應於此特別注意，或插敍一法之史跡，或表彰發明者之研究經過，或於分節述論之先，作一概括的描述，或於既經討論之後，加以綜合的觀察，庶學者能深透其意義，增廣其見識。例如代數學之首章，應闡明算術與代數不同之所在，代數之內容包何項目，本書教材之綱系如何分配等等，先使學生對代數學，有一概括的認識，然後分章講習，便無凌亂不易體會之弊。以後每講一法，於可能範圍內，應說明此係何人所發明，此法在歷史上如何演進，最近此法之發展如何，此法之缺憾何在，等等。最後一章，應就全書所講作一總表解，使學生了然於全書之綱領。同時指出本書不及討論之點，須有待於高等算學之申論，以啓發學生進修之興趣。如是則綱系嚴整，意味盎然，斯爲完善之教本矣。

（戊） 書末應有索隱之編制，公式之集錄，用表之附設，參考書之列舉，以便教者及學者之檢查。

三. 關於教材之革新。現行之中等算學教材，未盡完善，鄙人不敏，曾作改良之企圖，近已獲得若干新材料及新方法，略舉於次，以備採擇：

1. 算術四則之改良。

2. 乘方法之捷算。

3. 檢驗因數捷法。

4. 連分數化式捷法。

5. 比例題列式簡法。

6. 括弧添去簡法。

7. 移項新律。

8. 基本運算律之擴充。

9. 負數觀念之說明。

10. 不盡除法就升冪演算與就降冪演算所得之商及餘完全不同之解釋。

11. 因式分括法之特別指導。

12. 聯立方程解法之特別指導。

13. 方程問題列式之特別指導。

14. 幾何證法體系之特別指導。

15. 代數幾何內容之系統提示。

唯以上教材，尚未見諸他書，欲一一解釋，頗費篇幅，茲不多贅，僅列舉各端，以見現有教材之應革新而已。

× × × × × ×

二卷五六兩期問題欄，因編者有事從闕，故本期及次期問題欄，祇有出題而無解題，祈閱者諒之。 編輯部白

從面積與體積說到行列式

樊 墭

一．“矢”的運算．

行列式和面積體積發生關係，看來似乎很怪。其實在解析幾何中，就可以遇着的；例如三角形之三頂點，若爲(x_1,y_1)，(x_2,y_2)與(x_3,y_3)，則其面積爲

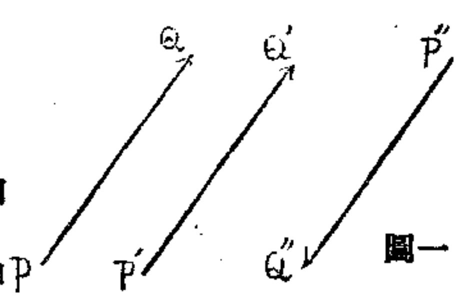
$$\frac{1}{2}\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix}.$$

不過本文的講法比較不同，要新穎些。

在未說正文以前，先要給諸位介紹一樣新鮮的東西——“矢”。

諸位當記得在初等幾何學中講線段的時候，只論長度，不論方向。我們如果要規定某線段PQ的方向，那自然有兩種辦法：或者自P點到Q點，或者自Q點到P點。譬如取P作起點，Q作終點，這樣，PQ線段的方向便確定了。這種有定長定向的線段，我們叫他作“矢”(vector)，用記號$\overrightarrow{PQ}$表示，其箭號是表示此矢的方向，由P到Q。兩矢若是等長同向，便稱爲相等。所以矢有定長定向，但是沒有一定的位置。諸位知道，兩線段等長時，便稱爲相等，所以線段祇有定長，沒有定向和定位。這是矢和線段所不同之點。

矢既沒有一定的位置，可以任意地平行移動。譬如圖一中$\overrightarrow{PQ}$和$\overrightarrow{P'Q'}$二矢既等長又同向，故相等。用式子表示，便是$\overrightarrow{PQ}=\overrightarrow{P'Q'}$。至於$\overrightarrow{PQ}$和



圖一

$\overrightarrow{P''Q''}$兩矢，雖則等長而且平行，可是方向不同，彼此相反，所以$\overrightarrow{PQ} \neq \overrightarrow{P''Q''}$。

線段只有長而無方向，所以是一種無向量(scalar quantity)；矢有長又有方向，所以又稱為有向量(vector quantity)。在物理學中，常將量分為有向量與無向量二種。例如力是有向量，因為說到某力的時候，不但要說明力之大小，還要說明力之方向；至如面積和體積等都是無向量，只要一個數值就可以決定的。

假設有一矢$\overrightarrow{PQ}$，起點 P 的座標是 (x_1, y_1)，終點 Q 的座標是 (x_2, y_2)，那末，矢$\overrightarrow{PQ}$可由 P 的座標 (x_1, y_1) 和 P，Q 二點之座標差 $a_1 = x_2 - x_1$，$a_2 = y_2 - y_1$ 而決定；因為由此可得 Q 的座標為 $x_2 = x_1 + a_1$，$y_2 = y_1 + a_2$。我們如果將$\overrightarrow{PQ}$平行移動到$\overrightarrow{P'Q'}$的位置，這樣起點和終點的座標當然改變，但是座標差却不變。這種座標差，稱為矢之"矢分"(components)．由上可知相等二矢的矢分，必定兩兩對應相等，反之，假若二矢的矢分兩兩對應相等，我們可以將一矢的起點移在他一矢的起點上，此時二矢的終點也必相重合，因之二矢便相等了。如此看來，矢和他的矢分，二者之中，若有一為已知，其餘一樣也隨着決定。設 a_1，a_2 為$\overrightarrow{PQ}$的矢分，則記為 $\overrightarrow{PQ} = \left\{a_1, a_2\right\}$。又$\overrightarrow{QP}$矢分的為 $x_1 - x_2 = -a_1$，$y_1 - y_2 = -a_2$，故 $\overrightarrow{QP} = \left\{-a_1, -a_2\right\}$。

以上所說的矢是在平面中的，當然我們也可以推廣到三度空間去。譬如空間一矢，其起點與終點之座標差若為 a_1, a_2, a_3，則其矢分即為 a_1, a_2, a_3，而此矢便可記如 $\left\{a_1, a_2, a_3\right\}$ 了。

為普遍起見，以後我們不指明二度平面或三度空間，我們只說 n 度空間，n 可為一切正整數；$n = 2$ 便是平面，$n = 3$ 便是我們所在的空間．現在先舉出幾條定義：

一組由 n 個實數按一定的次序排列而成的實數組，如 $\left\{a_1, a_2, \cdots, a_n\right\}$，我們稱他做 n 度空間的矢，實數 $a_1, \cdots, a_n$，稱為矢分。為簡便起見，凡矢都用粗體字母 **A**，**B**，**C**，…… 來表示，例如一矢 **A** 的矢分為 $a_1, a_2, \cdots, a_n$，則記如

$$\mathbf{A} = \left\{a_1, a_2, \cdots, a_n\right\}.$$

二矢的矢分，若兩兩對應相等，則此二矢謂之相等。

一矢的矢分，若皆爲零，則謂之"零矢"(zero vector)，以 O 表之：

$$O=\left\{0,0,\cdots,0\right\}.$$

一矢的第 i 個矢分爲 1，而其餘諸矢分皆爲 0 時，我們叫他做"第 i 個單位矢"(the i th unit vector)，記作 U_i. 例如在平面中第一個單位矢爲 $U_1=\left\{1,0\right\}$，第二個單位矢爲 $U_2=\left\{0,1\right\}$。

以上引了許多新的定義，下面要說一些矢的運算。設有 $A=\left\{a_1,a_2,\cdots,a_n\right\}$ 及 $B=\left\{b_1,b_2,\cdots,b_n\right\}$ 二矢，我們叫 $\left\{a_1+b_1,a_2+b_2,\cdots,a_n+b_n\right\}$ 一矢爲 A，B 二矢之和，記如次式：

$$A+B=\left\{a_1+b_1,a_2+b_2,\cdots,a_n+b_n\right\}.$$

這種加法是有幾何的意義的. 試在平面上取 $A=\left\{a_1\ a_2\right\}$，$B=\left\{b_1,b_2\right\}$ 兩矢(圖二)，將 A 的起點置於一點 $P(x_1,y_1)$ 上，則其終點必是 $Q(x_1+a_1,y_1+a_2)$。再將 B 的起點置於 Q 上，則其終點必是 $R(x_1+a_1+b_1,y_1+a_2+b_2)$。這樣，$\overrightarrow{PR}$ 的矢分，恰好是 a_1+b_1,a_2+b_2。此時 $\overrightarrow{PQ}$ 代表 A，$\overrightarrow{QR}$ 代表 B，而 $\overrightarrow{PR}$ 代表 A+B。由此可知二矢相加的法則，正如物理學中二力相加的三角形法則一般。

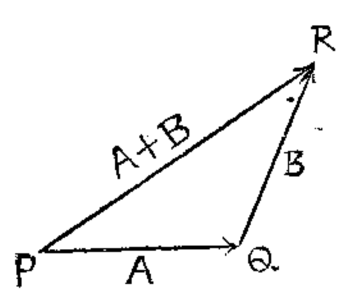


圖 二

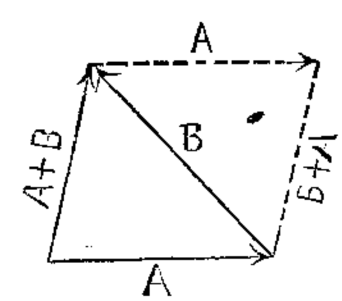


圖 三

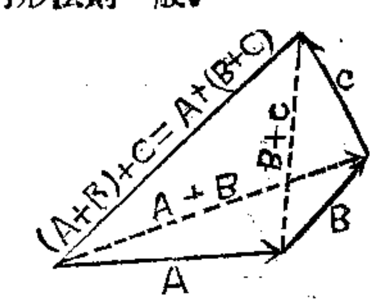


圖 四

由圖三我們可以看出來 A+B=B+A，這就是說矢的加法，遵守着實數加法的交換定律. 又由圖四，看見 (A+B)+C=A+(B+C)，所以實數加法的結合定律，對於矢的加法，也可以適用。

一矢若用一實數 λ 乘之，就是將這矢的矢分，各乘以 λ；

$$\lambda\cdot\left\{a_1, a_2, \cdots, a_n\right\}=\left\{\lambda a_1, \lambda a_2, \cdots, \lambda a_n\right\}=\left\{a_1, a_2, \cdots, a_n\right\}\cdot\lambda.$$

由這定義，易証

$$\lambda\cdot(\mu\cdot A)=(\lambda\cdot\mu)\cdot A=\mu\cdot(\lambda\cdot A);$$

$$(\lambda+\mu)\cdot A=\lambda\cdot A+\mu\cdot A\cdot$$

式中λ, μ都是實數，所以用實數乘矢時，均保留交換律縮合律及分配律的效用。

一矢乘以實數λ的幾何意義，在λ爲正數時，卽係將原矢放長（或縮短）λ倍而不改其方向。若λ爲負數，那末在放長（或縮短）後，再將方向反轉便得。下式所表的關係，很容易証明：

$$(-1)\cdot A=\left\{-a_1, -a_2, \cdots, -a_n\right\}\cdot$$

爲便利計，就用 $-A$ 代表 $(-1)\cdot A$。又若 $\lambda=0$，則 $\lambda\cdot A$ 顯然爲零矢，故

$$0\cdot A=O;\quad 或：若\ A=O，則\quad A=0\cdot A.$$

二・ 平行體與矢的關係・

試取一個平行四邊形(圖五)，設任一頂點爲 A，過 A 之兩邊爲 AB，AD・由此兩邊可以決定兩個以 A 爲起點的矢 A_1 及A_2. 反之，在平面中任取一點爲起點而

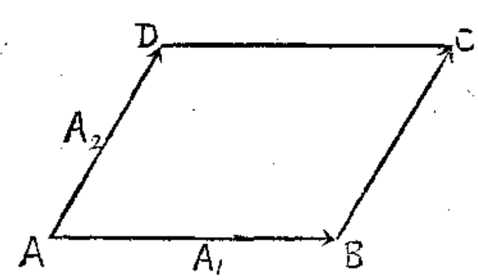


圖 五

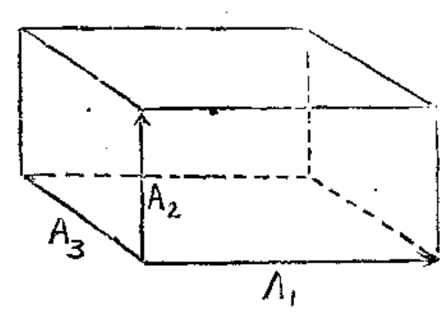


圖 六

畫這兩矢，也可決定一個平行四邊形，而且如此決定的平行四邊形，必和原形全等。A_1, A_2 二矢，稱爲平行四邊形的稜矢. 同理，過平行六面的任一頂點的三個稜矢，也可決定這個平行六面體(圖六).

這樣看來，平行四邊形和平行六面體，都可由他們的稜矢來決定，那末他們的

面積和體積，當然也可由他們的稜矢來決定。換句話說，平行四邊形的面積，是他的兩個稜矢的函數，平行六面體的體積，是他的三個稜矢的函數。此處用了"函數"一名詞，恐怕需要相當的說明。變數 $x_1, x_2, \cdots, x_n$ 若各各取一定值，變數 y 之值也隨之而確定，我們就說變數 y 是變數 $x_1, \cdots, x_n$ 的函數。記作 $y=F(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ 或 $\phi(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ 等等。

在二度空間中，平行四邊形的面積是他的兩個稜矢 A_1, A_2 的函數，此函數可以 $V(A_1, A_2)$ 記之。同樣在三度空間中，平行六面體的體積是他的三個稜矢 A_1, A_2, A_3 的函數．可記作 $V(A_1, A_2, A_3)$，

為普遍起見，我們仍舊推廣到 n 度空間內去。過 n 度空間內任一點的 n 個矢拿來當稜矢，可以決定一個圖形，我們叫他做"平行體"。二度空間的平行體就是平行四邊形，三度空間的平行體就是平行六面體。n 度空間的平行體，他的平行體積當然也可以由他的 n 個稜矢來決定，如前以

$$V(A_1, A_2, A_3, \cdots, A_n)$$

記之。現在要研究的，便是這個 V 函數的性質。

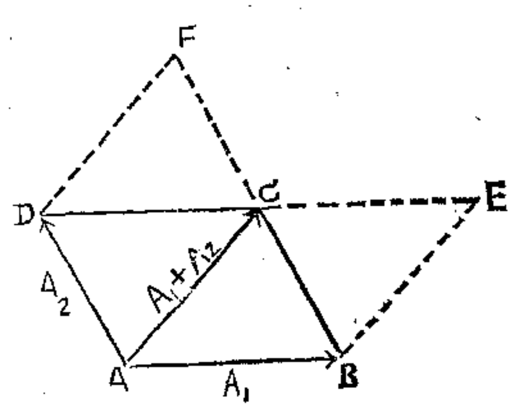


圖 七

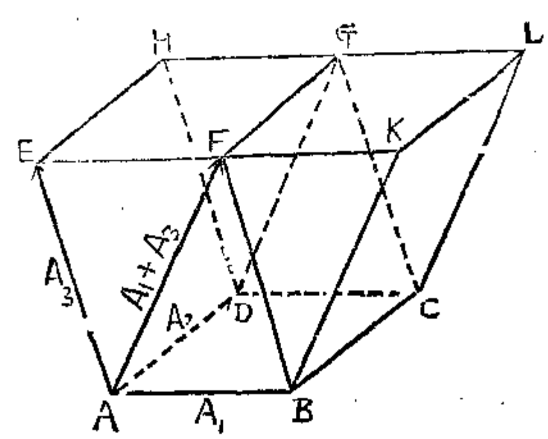


圖 八

圖七中是一個平行四邊形 ABCD，過 A 點的兩個稜矢，是 $A_1=\overrightarrow{AB}$，$A_2=\overrightarrow{AD}$。他的面積是 $V(A_1, A_2)$。如圖再作平行四邊形ABEC，此形之面積，由初等幾何定qq，是和 ABCD 相等的。但 ABEC 的兩個稜矢，為 A_1 及 A_1+A_2，他的面積當然是

$V(A_1, A_1+A_2)$，因得

$$V(A_1, A_2)=V(A_1, A_2+A_1).$$

又由 ACFD 與 ABCD 等積，可證

$$V(A_1, A_3)=V(A_1, A_3+A_1).$$

同樣由圖八中兩個同底同高的平行六面體 ABCDEFGH 和 ABCDFKLG，可証

$$V(A_1, A_2, A_3)=V(A_1, A_2, A_3+A_1).$$

若將圖形變動，我們一定可以証

$$V(A_1, A_2, A_3)=V(A_1+A_2, A_2, A_3)=V(A_1, A_2+A_3, A_3)$$

等等。 由這些事實，我們知道 V 函數的第一種性質，是

(I) $V(A_1, A_2, \cdots, A_i, \cdots, A_k, \cdots, A_n)=V(A_1, A_2, \cdots, A_i+A_k, \cdots, A_k, \cdots A_n).$

式中 $i \neq k$, $i, k=1, 2, \cdots$, 或 n。

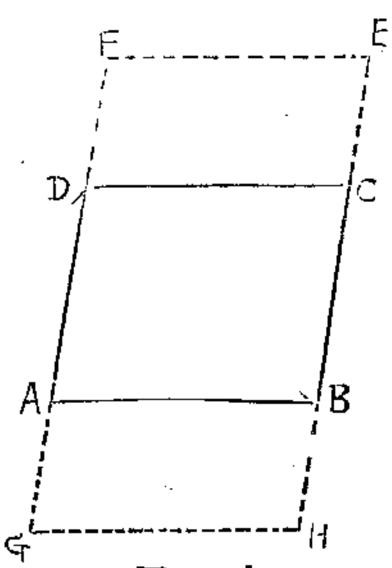


圖 九

我們再看圖九中的兩個平行四邊形 ABCD 和 ABEF。在 ABCD 中過 A 點的兩個稜矢是 $A_1=\overrightarrow{AB}$, $A_2=\overrightarrow{AD}$，他的面積是 $V(A_1, A_2)$. 在 ABEF 中過 A 點的兩個稜矢是 $A_1=\overrightarrow{AB}$ 和 $\overrightarrow{AF}$；但是 $\overrightarrow{AF}=\lambda\cdot\overrightarrow{AD}=\lambda\cdot A_2$，$\lambda$ 爲 AF 和 AD 之長之比值。 ABEF 的面積，由初等幾何定理，是ABCD面積的 λ 倍，所以

$$V(A_1, \lambda\cdot A_2)=\lambda\cdot V(A_1, A_2). \cdots\cdots (1)$$

現在讓我們把 DA 延長到 G，使 $DG=AF$，再看這以 DC, DG 爲二邊的平行四邊形的面積。 由初等幾何的定理，此面積該是 ABCD 面積的 λ 倍。 但在 CDGH 中，過 D 點的兩個稜矢是 $\overrightarrow{DC}=A_1$，$\overrightarrow{DG}=-\overrightarrow{AF}=-\lambda\cdot A_2$，於是

$$V(A_1, -\lambda\cdot A_2)=\lambda\cdot V(A_1, A_2).\cdots\cdots\cdots\cdots(2)$$

由(1)，(2)二式，我們得出下式：

$$V(A_1, \lambda\cdot A_2) = |\lambda|\cdot V(A_1, A_2),$$

式中 λ 可以是任何正負實數，|λ| 表示 λ 的絕對值。

由此很容易推出 V 函數的第二種性質，是

(II)　$V(A_1, A_2, \cdots, \lambda\cdot A_i, \cdots, A_n) = |\lambda|\cdot V(A_1, A_2, \cdots, A_i, \cdots, A_n)$,

式中 λ 爲何實數，$i=1, 2, \cdots$，或n。

在二度空間，設 $A_1 = U_1 = \{1, 0\}$，$A_2 = U_2 = \{0, 1\}$，則此兩矢決定之平行四邊形的面積，顯然爲單位面積。因此 $V(U_1, U_2) = 1$。又在三度空間以 $U_1 = \{1, 0, 0\}$，$U_2 = \{0, 1, 0\}$，$U_3 = \{0, 0, 1\}$ 三個單位矢爲稜矢所決定平行六面體的體積，也是單位體積，所以 $V(U_1, U_2, U_3) = 1$。從此極易推出 V 函數的第三種性質，是

(Ⅲ)　$V(U_1, U_2, \cdots U_n) = 1$。

三・ 行列式的新定義・

現在暫將 V 函數擱開，來講另一個有相似性質的 n 個矢的函數。我們先下次列定義：

一個 n 個矢的函數 $D(A_1, A_2, \cdots A_n)$，若能滿足下面三個條件：

(甲)　$D(A_1, \cdots, A_i, \cdots, A_k, \cdots, A_n) = D(A_1, \cdots, A_i + A_k, \cdots, A_k, \cdots, A_n)$,

式中 $i \neq k$；$i, k = 1, 2, 3, \cdots$, 或 n.

(乙)　$D(\cdots, \lambda\cdot A_i, \cdots) = \lambda\cdot D(\cdots, A_i, \cdots)$,

式中 λ 爲任何實數，$i=1, 2, \cdots$，或 n。

(丙)　$D(U_1, U_2, \cdots, U_n) = 1$.

我們就稱這函數爲"行列式"。(甲)，(乙)，(丙)三條中，(甲)，(丙)和(Ⅰ)，(Ⅲ)完全一樣，只是(乙)和(Ⅱ)稍有出入。

從此定義，可推出下面許多關於"行列式"的定理：

定理一。 $D(A_1, \cdots, A_i, \cdots, A_k, \cdots, A_n)=D(A_1, \cdots, A_i+\lambda\cdot A_k, \cdots, A_k, \cdots, A_n)$
式中 $i\neq k$, λ 爲任何實數。

（證） 若 $\lambda=0$，本定理當然成立。設 $\lambda\neq 0$，

$$D(A_1, \cdots, A_i+\lambda\cdot A_k, \cdots, \lambda\cdot A_k, \cdots, A_n)=D(A_1, \cdots, A_i, \cdots, \lambda\cdot A_k, \cdots, A_n) \quad (甲)$$

$$=\lambda\cdot D(A_1, \cdots, A_i, \cdots, A_k, \cdots, A_n)。 \quad (乙)$$

$$D(A_1, \cdots, A_i+\lambda\cdot A_k, \cdots, \lambda\cdot A_k, \cdots, A_n)=\lambda\cdot D(A_1, \cdots, A_i+\lambda\cdot A_k, \cdots, A_k, \cdots, A_n) \quad (乙)$$

上二式左端相同，故右端必相等．因 $\lambda\neq 0$，將 λ 約去，卽得本定理之證。

定理二。 若 n 個矢中有一矢爲零矢，則 D 函數之值爲零。

（證） 設 $A_k=O$，則 $A_k=0\cdot A_k$，故

$$D(A_1, \cdots, A_k, \cdots, A_n)=D(A_1, \cdots, 0\cdot A_k, \cdots, A_n)$$

$$=0\cdot D(A_1, \cdots, A_k, \cdots, A_n)=0。$$

定理三。 若 n 個矢中有二矢成比例（卽平行而不等長），則 D 函數之值爲零。

（證） 設 $A_i=\lambda\cdot A_k$，則 $A_i-\lambda\cdot A_k=O$，

$$D(A_1, \cdots, A_i, \cdots, A_k, \cdots, A_n)=D(A_1, \cdots, A_i-\lambda\cdot A_k, \cdots, A_k, \cdots, A_n) \quad (定理一)$$

$$=D(A_1, \cdots, O, \cdots, A_k, \cdots, A_n)$$

$$=0。 \quad (定理二)$$

定理四。 若 n 個矢中任取二矢而互換其位置，則 D 函數變號不變值；以式表之，卽 $D(A_1, \cdots, A_i, \cdots, A_k, \cdots, A_n)=-D(A_1, \cdots, A_k, \cdots, A_i, \cdots, A_n)$。

（證） $D(A_1, \cdots, A_i, \cdots, A_k, \cdots, A_n)=D(A_1, \cdots, A_i+A_k, \cdots, A_k, \cdots, A_n)$ （定理一）

$$=D(A_1, \cdots, A_i+A_k, \cdots, A_k-\overline{A_i+A_k}, \cdots, A_n) \quad (定理一)$$

$$=D(A_1, \cdots, A_i+A_k, \cdots, -A_i, \cdots, A_n)$$

$$=D(A_1, \cdots, A_i+A_k-A_i, \cdots, -A_i, \cdots, A_n) \quad (定理一)$$

$$=D(A_1, \cdots, A_k, \cdots, -A_i, \cdots, A_n)$$

$$=-D(A_1, \cdots, A_k, \cdots, A_i, \cdots, A_n)。 \quad (定理二)$$

行列式是 n 個矢的函數，而在 n 度空間中，每個矢可由 n 個矢分決定：

$$A_1=\{a_{11},\ a_{12},\ \cdots,\ a_{1n}\},$$
$$A_2=\{a_{21},\ a_{22},\ \cdots,\ a_{2n}\},$$
$$\cdots\ \cdots\ \cdots\ \cdots\ \cdots\ \cdots,$$
$$A_n=\{a_{n1},\ a_{n2},\ \cdots,\ a_{nn}\}.$$

所以行列式也可看作是 n^2 個實數的函數。因3這些緣故，行列式也寫作下面形狀：

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

用這樣記法，(甲)，(乙)，(丙)三條可用次式表之：

$$(\text{甲})\quad \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & \cdots & a_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & \cdots & a_{in} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{k1} & a_{k2} & \cdots & \cdots & a_{kn} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & \cdots & a_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{i1}+a_{k1} & a_{i2}+a_{k2} & \cdots & \cdots & a_{in}+a_{kn} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{k1} & a_{k2} & \cdots & \cdots & a_{kn} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \end{vmatrix}.$$

$$(\text{乙})\quad \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & \cdots & a_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \lambda a_{i1} & \lambda a_{i2} & \cdots & \cdots & \lambda a_{in} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \lambda\cdot \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & \cdots & a_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & \cdots & a_{in} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

$$(\text{丙})\qquad \begin{vmatrix} 1 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & \cdots & 1 \end{vmatrix} = 1.$$

定理一，二，三，四各條，也可用同樣記法寫出，恰和普通大代數課本內所講行列式的性質一般，茲不多贅。

四. 一個疑問.

從行列式的新定義，我們推出了上面四條定理。一個 n 個矢的函數，如果滿足(甲)，(乙)，(丙)三個條件，便能滿足定理一，二，三，四.不過現在有一個疑問：能滿足(甲)，(乙)，(丙)的函數，究竟有多少種存在？ 換一句話，便是：由這新定義所得的"行列式"，是否即是普通大代數裏所講的行列式？ 還有沒有別種函數，並非普通所謂行列式，也能適合這三個條件呢？ 這問題的答案是"沒有"，我們可以證明，能滿足(甲)，(乙)，(丙)三個條件的 n 個矢的函數，有一個而且祇有一個存在，便是普通所謂行列式。不過證明太複雜，此處不寫出來，諸位姑且相信這話就是。

不過我們却能證明另一事實，便是：能滿足(Ⅰ)，(Ⅱ)，(Ⅲ)三條的函數，確有一種而且祇有一種，這函數便是 $|D(A_1, A_2, \cdots, A_n)|$.

此函數能滿足(Ⅰ)，(Ⅲ)，是很明顯的事，又因

$$|D(A_1, A_2, \cdots, \lambda\cdot A_i, \cdots, A_n)| = |\lambda\cdot D(A_1, A_2, \cdots, A_i, \cdots, A_n)|$$
$$= |\lambda|\cdot|D(A_1, A_2, \cdots, A_i, \cdots, A_n)|$$

所以也能滿足(Ⅱ)。

反之，能滿足(Ⅰ)，(Ⅱ)，(Ⅲ)的祇有這一個函數．要證明這話，我們要用一個

新記號，signa．此記號的性質如次（a 爲實數）：

$$a>0,\qquad \operatorname{sign} a=+1,$$

$$a=0,\qquad \operatorname{sign} a=0,$$

$$a<0,\qquad \operatorname{sign} a=-1.$$

假定 $F(A_1, A_2, \cdots, A_n)$ 是一個能滿足（I），（II），（III）的函數，我們所要證的，便是 $F(A_1, A_2, \cdots, A_n)=\left|D(A_1, A_2, \cdots, A_n)\right|$.

我們且看函數 $F(A_1, A_2, \cdots, A_n)\cdot \operatorname{sign} D(A_1, A_2, \cdots, A_n)$.

第一，這函數能滿足（甲），因爲

$$F(A_1, \cdots, A_i+A_k, \cdots, A_k, \cdots, A_n)\cdot \operatorname{sign} D(A_1, \cdots, A_i+A_k, \cdots, A_k, \cdots, A_n)$$

$$=F(A_1, \cdots, A_i, \cdots, A_k, \cdots, A_n)\cdot \operatorname{sign} D(A_1, \cdots, A_i, \cdots, A_k, \cdots, A_n).$$

第二，這函數能滿足（乙）。因由 sign 的定義，有 $(\operatorname{sign} a)\cdot(\operatorname{sign} b)=\operatorname{sign}(a\cdot b)$；$|a|\cdot \operatorname{sign} a=a$ 的關係，所以

$$F(A_1, \cdots, \lambda\cdot A_i, \cdots, A_n)\cdot \operatorname{sign} D(A_1, \cdots, \lambda\cdot A_i, \cdots, A_n)$$

$$=|\lambda|\cdot F(A_1, \cdots, A_i, \cdots, A_n)\cdot \operatorname{sign}\left[\lambda\cdot D(A_1, \cdots, A_i, \cdots, A_n)\right]$$

$$=|\lambda|\cdot \operatorname{sign}\lambda\cdot F(A_1, \cdots, A_i, \cdots A_n)\cdot \operatorname{sign} D(A_1, \cdots, A_i, \cdots, A_n)$$

$$=\lambda\cdot F(A_1, \cdots, A_i, \cdots, A_n)\cdot \operatorname{sign} D(A_1, \cdots, A_i, \cdots, A_n).$$

第三，這函數也能滿足（丙），這是很明顯的事。總括起來，我們可以說

$$F(A_1, A_2, \cdots, A_n)\cdot \operatorname{sign} D(A_1, A_2, \cdots, A_n)=D(A_1, A_2, \cdots, A_n).$$

此式兩端各乘以 $\operatorname{sign} D(A_1, A_2, \cdots, A_n)$，則因 $\left[\operatorname{sign} D(A_1, A_2, \cdots, A_n)\right]^2=1$，得

$$F(A_1, A_2, \cdots, A_n)=D(A_1, A_2, \cdots, A_n)\cdot \operatorname{sign} D(A_1, A_2, \cdots, A_n).$$

但由 sign 的定義，$a\cdot \operatorname{sign} a=|a|$，於是

$$F(A_1, A_2, \cdots, A_n)=\left|D(A_1, A_2, \cdots, A_n)\right|.$$

諸位要注意，在 $D(A_1, A_2, \cdots, A_n)=0$ 時，上面的證法是不行的，因爲這個時

候 sign $D(A_1, A_2, \cdots, A_n)=0$，不能拿去乘式子的兩邊。不過在 $D(A_1, A_2, \cdots, A_n)=0$ 時，我們可以證明 $F(A_1, A_2, \cdots, A_n)=0$，這個證明太繁，暫且不表。所以最後的結果，還是對的。

我們以前說過，n度空間的平行體的平行體積，有(Ⅰ)，(Ⅱ)，(Ⅲ)三種性質，所以這體積是：

$$V(A_1, A_2, \cdots, A_n)=\left| D(A_1, A_2, \cdots, A_n)\right|.$$

在平面中，平行四邊形某頂點出發的稜矢，若是 $A_1=\{a_{11}, a_{12}\}$，$A_2=\{a_{21}, a_{22}\}$。他的面積為 $V(A_1, A_2)=\left| D(A_1, A_2)\right|$，就是行列式

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}.$$

的絕對值。同樣，在空間一個平行六面體中過某頂點的三個稜矢，如果他們的矢分是：$\{a_{11}, a_{12}, a_{13}\}$，$\{a_{21}, a_{22}, a_{23}\}$，$\{a_{31}, a_{32}, a_{33}\}$，這平面六面體的體積，就是行列式

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

的絕對值。

以上，我們先由面積體積引出了行列式，又由行列式回到面積和體積，本文也就到此結束了。

× × × × × × × ×

參考書：

O. Schreier und. E. Sperner, Einfuehrung in die analytische Geometrie und Algebra, I, 1931.

L. Bieberbach, Analytische Geometrie, 1932.

一九三四七月於北京大學。

驗算法

汪桂榮

1.驗算之重要　計算必期眞確。$2\times 3=5$ 原爲一時之錯誤，然設想身爲商人，則應收六元者，祇收五元可乎？ 美國有一次造一極大之橋，請一有名之工程師任其事，造成未久卽斷，損失生命財產無算。查其計劃並無錯誤。查之再查之，得類似$2\times 3=5$之錯誤一處。蓋應用6吋之鐵柱，改用5吋，則力量不支。一處斷折，全橋盡毀。由此可見計算眞確之重要。學者平時練習，須求極熟，使能快而不錯，更須注意驗算之法，務使自己做出得數，知其不錯.

2.驗算之心理　平常人對于驗算之法，在將自己之稿檢查一次，以求發見錯誤之處。但據現在心理學家之研究，檢查算稿往往不能發現錯誤所在；必另用他法檢查，或另用別法再做一遍，如得數相同，方可信其眞確。

3.乘除得數位數之界限　驗算得數當先視其位數多寡，是否無誤，故乘除得數位數之界限，乃驗算時最重要之問題。

(a)兩數相乘，其積之位數等于兩數之如或少1。

例：$375\times 85=31875$

$\because\ 1000>375>100,\quad 100>85>10,$

$\therefore\ 100000>375\times 85>1000.$

故375×85至少在四位以上，但在六位以下，因之至多爲五位。

積之位數較兩數位數之和少1與否，可以兩數首位相乘，行概算定之：首位相乘得二位者，則積之位數等于兩數位數之和；得一位者，則積之位數等于兩數位數之和少1，但有時因進位關係仍等於兩數位數之和。

(b)諸數連乘積之位數，必在各數位數之和及各數位數之和減各數個數少1之間。

例　$2516\times956\times28$

$\because 2516>1000$……四位，　$956>100$……三位，

$28>10$………二位，

$\therefore\quad 2516\times956\times28>1,000,000$

$[4+(3-1)+(2-1)]$位即$[4+3+2-(3-1)]$位。可見積之位數最小必大于三數位數之和減各數個數少1。

$\because\ 2516<10000$…5位，$956<1000$…4位，$28<100$……3位，

$\therefore\ 2515\times956\times28<1,000,000,000$………………$(4+3+2+1)$位。

可見積之位數，小于各位數和加1之數，即不能大于各位數之和也。

(c)兩數相除，商之位數，等于實數位數減法數位數或加一。

例　$5248\div98$

$\because\ 5248<1000,\quad 100>98$

$\therefore\ 5248\times100>98\times1000$

即　$5248\div98>10$………………$(4-2)$位

可見商之位數大于$(4-2)$位之最小數，即不能少于$(4-2)$位

$\because\ 5248<10000,\quad 10<98$

$\therefore\ 5248\times10<98\times10000$

即　$5248\div98<1000$………………$(4-2+2)$位

可見商數小于$(4-2+2)$位之最小數，即其位數不能在$(4-2+1)$位以上。

4.單位之注意

(a)同單位之名數可加減，其得數爲同單位之名數。

此理雖簡單，但計算時極宜注意。無論算術上，代數上，科學上，工程上，在同一式內，萬不能有不同單位之名數相加減。如遇同類名數而單位不同時，宜先設法將單位化同，然後加減。

(b)名數×不名數=同名數

被乘數爲名數時，乘數爲其倍數，故積爲與被乘數同單位之名數。例如 5 元之 3 倍爲 5 元×3＝15元。

(c)名數與名數相乘問題

例一 每人有 5 元，3 人共有幾元?

$$5^{元/1人}\times 3^{人}=15^{元}$$

例二 有 4 馬力之機器做 6 時工作，問所做工作若干?

4 馬力× 6 時＝24 馬力時。

例三 長方形之長寬爲 3 尺及 4 尺，求其面積。

3尺× 4 尺＝12 方尺。

照理名數乘名數爲不可能之問題，上列三例乃記載便利起見，並非名數與名數相乘，不可不辨．如例一每人 5 元，故 3 人爲 5 元×3＝15元。如例二 1 馬力之機器做 1 時之工作爲 1 馬力時，故 4 馬力機器做 6 時之工作爲 4×6×1 馬力時＝24 馬力時。 如例三每邊一尺正方形之面積爲 1 平方尺，故長 3 尺寬 4 尺長方形之面積爲 3×4×1方尺＝12 方尺。

(d)名數÷同名數＝不名數

除法有二意義，其一爲包含之意。如 15 尺長之桿爲 3 尺長桿之倍數，15 尺÷3尺＝5。

(e)名數÷不名數＝同名數

除法之第二意義爲等分之意，如20元分爲 4 份每份爲20元÷4＝5元

(f)名數與名數相除問題

例一 有火車于 3 時內行360里，求其速度。

速度＝390 里÷3 時＝120里/時

例二 4 尺布之價爲 8 角，求每尺布之價。

8 角÷4 尺＝ 2 角/尺

例三 柱體體積爲48立方寸，高爲 6 寸，求其底面積。

底面積＝48立方寸÷6寸＝8方寸。

照理異名數不能相除，但實用上以上記法已成習慣。其實如例一；3時行360里，故1時行360里÷3＝120里，3爲除數乃等分之意。例二亦然：4尺布價8角，故1尺布價8角÷4＝2角。例三，6寸高之柱體，其體積爲48立方寸，故1寸高之體積爲8立方寸，但每邊長1寸之立方體，其體積爲1立方寸，卽高1寸，底面積1方寸之立方體之體積爲1方寸，故高1寸，體積8立方寸之底面積爲8方寸。實際上認名數乘除可能，亦無大關係。物理上，工程上之公式關於名數乘除之例甚多，且用上說記法，則分式之錯誤與否，可檢其兩邊元數 Dimension是否相同，卽可知之。

5．用還原法驗算

例一　$1538-236=1302$。

$\because$ $1302+236=1538$，　故知無誤。

例二　$6510028\div325=20030$　餘 278。

$\because$ $20030\times325+278=6510028$，　故知無誤。

例三　216，396，1440 之最大公約數爲 36。

$\because$ $216\div36=6$，$396\div36=11$，$1440\div36=40$，

而6，11，40互爲質數，故知無誤。

例四　$\sqrt{7056}=84$

$\because$ $84^2=7056$，　故知無誤。

例五　年例15%，3年4月之利息爲150圓，求本金。答：本金＝300圓。

$\because$ $300\times\frac{15}{100}\times3\frac{4}{12}=140$，　故知無誤。

6．用代入法驗算

例一　依7：3：2分240元。答：a. 140元；b，90元；c，40元。

$\therefore$ $140+60+40=240$，　故知無誤。

例二　父42歲，子12歲，幾年前父年4倍于子？　答：2年前

$\because$ $42-2=40$, $12-2=10$, $40=10\times4$, 故知無誤。

7.棄九法用於驗算

(a)棄九法之原理 以 9 除任一數所得餘數等於以 9 除數字和之餘數。 試以 24573 爲例，証明此理如下。

$$
\begin{aligned}
24573 &= 20000+4000+500+70+3 \\
&= 2\times10000+4\times1000+5\times100+7\times10+3 \\
&= 2\times(9999+1)+4\times(999+1)+5\times(99+1)+7\times(9+1)+3 \\
&= 2\times9\text{之倍數}+4\times9\text{之倍數}+5\times9\text{之倍數}+7\times9\text{之倍數} \\
&\quad +2+4+5+7+3 \\
&= 9\text{之倍數}+(2+4+5+7+3) \\
&= 9\text{之倍數}+9\text{之倍數}+3 \\
&= 9\text{之倍數}+3
\end{aligned}
$$

故 24573 以 9 除之餘數爲3。

(b)加法驗算

例。 驗四數之和

$$
\begin{array}{r}
81364=9\text{之倍數}+4 \\
27632=9\text{之倍數}+2 \\
38597=9\text{之倍數}+5 \\
67549=9\text{之倍數}+4 \\
\hline
9\text{之倍數}+6=215052 \qquad 15=9\text{之倍數}+6
\end{array}
\; +
$$

故知大概無誤。

(c)減法驗算

例一

$$
\begin{array}{r}
176543=9\text{之倍數}+8 \\
85674=9\text{之倍數}+3 \\
\hline
9\text{之倍數}+5=90869 \qquad 5
\end{array}
\; -
$$

故知大概無誤。

(d)乘法驗算

例。

$$\left.\begin{array}{r}47=9\text{之倍數}+2\\61=9\text{之倍數}+7\end{array}\right]\times$$

$$9\text{之倍數}+5=2867 \qquad 14=9\text{之倍數}+5$$

故知大概無誤。

(e)除法驗算

例。驗 1348708÷498＝2708 餘 124。

$$\left.\begin{array}{r}498=9\text{之倍數}+3\\2708=9\text{之倍數}+8\end{array}\right]\times$$

$$\left.\begin{array}{r}24=9\text{之倍數}+6\\124=9\text{之倍數}+7\end{array}\right]+$$

$$13=9\text{之倍數}+4$$

$$1348708=9\text{之倍數}+4$$

故知大概無誤。

8.乘11法用於驗算

(a)乘 11 法之原理　以 11 除任一數，所得之餘數，等於奇位數字和減偶位數字和所得之差數。若奇位數字和小於偶位數字和時，則加11於奇位數字和然後減之。試以 789367 爲例証明此理如下：

$$\begin{aligned}789367&=7\times100000+8\times10000+9\times1000+3\times100+6\times10+7\\&=7\times(100001-1)+8\times(9999+1)+9\times(1001-1)\\&\qquad+3\times(99+1)+6\times(11-1)+7\\&=7\times(11\text{之倍數}-1)+8\times(11\text{之倍數}+1)+9\times(11\text{之倍數}-1)\\&\qquad+3\times(11\text{之倍數}+1)+6\times(11\text{之倍數}-1)+7\\&=11\text{之倍數}+(-7+8-9+3-6+7)\end{aligned}$$

$$=11\text{之倍數}+(8+3+7)-(7+9+6)$$

$$=11\text{之倍數}+18-22$$

$$=11\text{之倍數}+11+18-22$$

$$=11\text{之倍數}+7.$$

(b)乘法驗算

例　$67853\times2976=201930528$誤否?

$$\left.\begin{array}{r}67853=11\text{之倍數}+5\\ 2976=11\text{之倍數}+6\end{array}\right]\times$$

$$30=11\text{之倍數}+8$$

$$201930528=11\text{之倍數}+8$$

故知大概無誤.

以上各節每云大概無誤,因所用之法,不能全恃,斷言無誤也。於棄九法,如乘得積本爲1234,若次序紊亂爲4321,2134等等,則均驗不出。又一出一入若爲同數亦驗不出。於棄11法,凡偶位數次序紊亂,奇位數次序紊亂,或奇偶數出入相同,則亦驗不出。所可恃者,運算本極正確,如有錯誤,絕不至如前說之巧耳。

本刊啓事

本刊自第三卷一期起,歸南京總社方面發行。因易地發行,手續甚繁,以致本期出版愆期甚久,敬希　愛讀諸君原諒! 又第十期亦已付印,俟出版齊後,擬將第一第二兩卷合訂成帙. 創刊號再版已出書,第一卷二期亦在再版中。前承讀者不棄,屢次函詢創刊號之有無,以便補成完璧. 如有要者,請惠下郵票壹角伍分,便當照寄不誤.以後關於訂閱投稿事,希直接函南京鍾英中學敝刊總社爲荷!以前訂閱一律寄至應寄期數,決不使　愛讀者受絲毫損失也。

雅各柏努利

(*Jacob Bernoulli 1654—1705. A. D.*)

瘦桐

在本卷第七期尤拉傳內，曾經給讀者介紹過瑞士國柏努利一族，門第鼎盛，在算學史上留名的有十餘位之多，眞令後人景慕不已。這裏讓我來正式介紹他們一族中最長的一位，雅各柏努利。

雅各柏努利又名 Jacques, 英人稱他爲 James, 1654 年十二月廿七日生於巴塞(Basel)；1687 年任巴塞大學掌敎，終其身都在此處，卒於 1705 年八月十六日，享年纔五十有二歲。幼時他的父親原想使他和他的兄弟約翰柏努利 (John, 亦作 Johann 或 Jean, 1667-1748，其傳記將見於下期)，一個學神學，一個學商業，不過這兩位難兄難弟對於這些學問都不高興，天性生來就和天文，算學，物理特別相近，所以最後都走向研究算學的途徑上。

他曾經漫遊許多地方，如法國，荷蘭，比利時，英國，都曾到過。當他被任爲巴塞大學教授的那一年，曾寫過一封信給來布尼茲，請問新發明的微積分。事不凑巧，恰值來氏外出遊歷，經過三年之後，纔給他寫回信。可是在這三年之中，雅各柏努利已經自動的把這些方法發現了。他雖然沒有特別的新發明，但却知道微積分是解析方面最有力的工具，儘量地應用這方法去解決各種問題。來布尼茲固然是微積分的發明者，不過他的研究，是因題爲法的，並沒有立下普遍的法則。雅各柏努利於 1691 年所寫的微積課本，可稱爲關於此科之第一部著作，條理分明，足徵他能融會貫通。據說"積分"一名詞，是他首先創用的。

他生平在算學上的貢獻甚多，最著名的是他的大著 Ars Conjectandi. 此書出版於1713年，創用"排列"二字，巴斯喀的三角形亦列其中，而尤以"柏努利定理 (Bernoulli's Theorem)"及"柏努利數 (Bernoulli Numbers)"爲最有名。英人托

德罕忒(Todhunter)在所著概率論史(History of the Theory of Probability)中稱讚柏努利定理,說這定理足使他在概率論史上占永久的位置.

此外他的重要發明有等時曲線(isochronic curve)問題之解決;證明來布尼玆所舉之懸鏈線(caternary)作法是對的;等等. 1696年彼曾懸賞徵求等周圖形(isoperimetrical figures)問題之通解,這問題便是問周界相等的同類圖形,那一種所包的面積為最大. 至1701年他發表自己的答案,確乎不錯. 1698年又寫一文,論微分學及其在幾何上的應用. 在此文中,他發明許多等角螺線(equi-angular spiral,卽所謂亞幾默德螺線 Archimedas' spiral)的奇異性質,特別奇怪的是從此曲線所導出的曲線,例如縮閉線(evolute),垂足線(pedal curve),等等,仍舊是等角螺線. 因此他囑咐死後在他的墓碑上,學亞幾默德的樣,刻上一條等角螺線,並題 Eadem numero mutata resurgo 數字於其下. 這幾字的意思大概是:歷百鍊而不變. 現在在巴塞教堂內,還可以看到這粗笨的雕刻,這就是後人遵守他的遺言的紀念品呵!

他的高深的講演,大多部分是關於無窮級數論的,這些講稿後來由尼古拉柏努利(Nicholas Bernoulli)替他發表. 他有一首詩,是詠無窮級數的,原為拉丁文,後經人譯為英文,很有意思,讀者可查看1933年十月號之 Mathematics Teacher 雜誌,第383頁,此處恕不轉錄了.

科學之女王

E. T. Bell 原著　　乙閱譯

第九章　論解析

聞諸人言，非洲地方隨時有新奇事項發生，吾於解析亦云然。蓋解析之範圍綦廣，關於繼續變化的量之研究，概包含於其中。宇宙間事物，無時不在變化之中，此種繼續不斷的變化，非解析無由知其定律，解析之於自然科學，其爲重要，可不言而喻矣。

前世紀中解析方面之進展，較過去任何世紀中爲尤甚。今則範圍之廣，雖積學之士，亦不能備窺其堂奧，祇可取其一二部分作精深之研究而已。若將最近微分幾何之發展，亦劃入解析之版圖，則其疆域之遼闊，更屬不可思議。對於解析方面能窺其全豹之最後一人，厥唯舉世聞名之普恩加賚(Henri Poincaré 1854－1912)氏，其所以能如是之淵博，蓋因近代解析之重要文獻，皆出諸彼手之創作也。此絕世之天才，在算學各方面，幾皆留有深邃之印象，謂爲絕世，誰曰不宜。

在此種絕塵而馳之進步中，欲覓一二重要地點，以便綜觀全局，得一滿意的印象誠非易易。蓋其疆域之擴大，有如海潮之推進，其起伏之奇，變化之速，實非目力之所暇及也。然就過去一世紀中之大要趨勢觀之，亦有值得吾人注意之數點。其最重要之進展，可分爲三種，即各種新函數之發明及研究，其數量之多，幾於不可思議，再則各方面繼續不斷的推廣，以及關於解析基礎方面劇烈的批評是已。

所謂証明的嚴密，其標準繼續增高，在昔日認爲滿意之理論，今則細加推敲，常見其有不妥之點，於是重加論証，俾合乎現代之嚴密標準。即如是亦非最後之定讞，蓋所謂最後之定讞，顯然非一蹴所可及，吾人所敢言者，誠如當代有名之某解析學家所云，"能夠上現代標準，便是嚴密"而已。

尚有一端顯明的事實，在算學其他部分中，祇須稍有進展，解析立即進據其主

要地位，吞而食之。 例如羣論，不變式論，幾何學之大部分以及高等數論中之幾部分，先後皆爲解析所吞噬，雖其嗜好之程度，不免有高低，而爲其食餌，則殊無二致。另一方面言之，無論何時，在算學或科學中，若有應用解析的方法之可能，則一經採用，其進展必速且確，此則可以斷言者也。

馬克斯威爾與愛因斯坦

吾人在解析中感覺算學的論証之權威，較之在無論何方面爲尤甚。 此其故至少有一部分是由於算學中解決問題，并非因題爲法，法不相通，乃將各種複雜情形加以深思熟慮，千錘百鍊，始成一普遍的方法，有如全部之機械然，其運用之規律，恆簡代以一種記號，夫然後始應用之於當前的問題。 譬諸訓練有素之師，號令一發，立時動員，正不必分營傳令，便能各自爲戰。此片言之號令，其權威遠勝於分別命令，固不待言，而全體動員之所建樹，與零碎解決所得相較，大小懸殊，不成比例。不僅此也，一種方法發明後，立即應用於各方面，有時所得效果，遠出乎發明者意料之外。

此種情形，不勝枚舉，請略述二端以見一斑。 在此二例中，其成功並非專由於算學之力，蓋若無物理家之透徹觀察，則此等物理的問題，無由與算學發生聯絡也。但無論如何，設非算學解析，此二事之成功均爲不可能。 平情而論，將科學上的新問題，譯爲算學的符號，與夫發明算學以解決科學上的問題，斯皆世所罕覯之天才，正不可妄爲軒輊也。

第一例當迴溯1264年。是年馬克斯威爾 (James Clerk Maxwell, 1831—1879) 將法拉第(Michael Faraday)之電磁實驗的發明，譯爲一組微分方程式，將此等方程式推廣至能滿足彼自創之一種假設後，乃依照算學分析中之成法，進而加以研究。

在算理物理學中有一重要的方程式，據謂凡能適合此方程式之實例，在空間概取波浪的形式而傳播，且傳播之速率，亦包含於此方程式之中。

馬克斯威爾研究其電磁方程，從而導出算理物理中之波浪方程式。 此中所謂

速率，乃指光之速率而言。彼對於此等結果，是否驚疑，吾人不得而知，但此後彼對此發明，大加研究，則係事實。彼証明電磁變動，在空間之傳播呈波浪之形，又從速率在方程式中之情形，得知光之現象，亦爲一種電磁的變動。

此 1864 年間事也。馬氏卒於 1876 年，至1888 年赫慈 (Heinrich Hertz, 1857-1894) 感於馬氏"無線"電磁波之預言，更應用其算學，進一步由實驗產生波浪，而計算其速率。今日無線電業，胥由彼之成功而來，溯其起因，不過算學解析書中之數頁而已。唯吾人反覆言之，終以爲非馬克斯威爾之天才穎悟，創立方程式，算學之力決不至此，而赫慈或竟無由下手，亦未可知也。

吾人今所擬舉之第二例則爲 1854 年時事。其時黎曼 (Bernhard Riemann, 1826-1866) 正對算學鉅子高斯講述其"幾何基礎上之假設" (On the Hypotheses which lie at the Foundations of Geometry)。此文極爲高斯所稱許，因彼前此多年曾親自研究，而此文適足爲其終結也。黎曼所論中有關於任何有限度曲空間之計量之一事。在二度曲空間內，例如在圓球之上，日常計量距離所不可少之勾股公式，即不能用。黎氏以最普遍之一公式代之，在無論何種空間，曲度隨處變化者，均可適用。彼並希望世人對於彼所提出之新奇理論，公開研究，勿執管見，勿持偏論。

黎曼幾何，爲前世紀之一大發明。繼續研究之者大有人在，屈里斯托夫 (E. B. Christoffel, 1829-1900)亦其中之一，其所發明之符號，即所謂爲屈氏符號 (Christoffels symbols) 者，相對論之物理學家多沿用之。在此種工作中，不變式理論居其主要地位。

1880 年後數年間，幾何學家李奇 (Ricci) 又將黎曼幾何推而廣之，此其與不變的概念，關係非常密切。李奇又發明一種算法，凡黎曼空間中一切在最普遍的變換下保持不變之幾何性質，用以研究，極爲便利。此種算法，今稱張量分析 (tensor analysis)。

1906 至 1915 年間，愛因斯坦正從事其相對通論之創作，欲得一種算法，將算

理物理中之微分方程，改成不變形式。李奇之算法，恰合其需。愛因斯坦又欲得一種幾何，以描述其四度空時間。黎曼幾何，恰濟其用。相對通論之算學成分，如斯而已，此外概爲物理及作者之天才，人所共知，不必贅述。

當相對通論初創時，一般物理學家，見其中所用算學，爲素所未覩，莫不驚訝異常，其實算學專家，視若等閒，已半世紀有奇。今則專攻物理之學子，對於此等算法，皆視爲必修，屈氏符號殆不復用矣。法國有名之專門學校 l' École"Polytechnique 中，張量分析一科，已列入二年必修科內，與力學同時並授。其實用之價值，較之昔日之向量分析，殆遠過之。

相對理論在算學方面，固曾受幾何及解析之厚惠，然其所以報者，亦復不菲，蓋自有相對論，幾何之黃金時代又重新開展也。

複變數函數

過去一世紀中解析方面特殊進展之一頁，厥爲複變數函數論之長足進步。吾人前此曾言，若將普通代數之公設，盡數保留，則能適合此等公設之數系，最普遍者爲複素數系，再無推廣之餘地。複變數函數在解析中居如許重要之地位，良由此故。此方面之進展，在1830年時已肇其端，其時柯西已有極大之貢獻，彼蓋此科之首創人也。

複變數函數論之講法，分爲兩派，約同於此時發生。一爲外爾司托拉斯Weierstrass 派，一卽黎曼派。

外氏之講法，係以冪級數(power series)爲其工具，可稱爲算術化 (arithmetize 的講法. 一切函數，在彼心目中，均可用如 $a_0+a_1z+a_2z^2+\cdots+a_nz^n+\cdots$ 之收歛級數表之，就中變數 Z 所取之值，當然與所表函數 $f(z)$ 有相當之關係。

黎氏之講法，可稱爲幾何化(geometrize)的講法。應用其巧心設計的一種模型，卽所謂黎曼曲面(Riemann surfaces)者，許多極其重要複函數之性質，概可形諸圖示，尤以多值函數爲然。此種方法對於位相學(analysis situs)大有貢獻。所

謂位相學者，乃一種幾何學，研究一切在連續變換羣下不變之幾何性質者也。

位相學之範圍綦廣，即其綱要亦非數言所可盡，姑置勿論。但此中有一未經解決之初等問題，可不用專門術語而陳述之。無論如何複雜之地圖，祗須用四種顏料，便可着色，使相鄰任何二區域不同色，此實際製圖家所共知之事實也。此事實之證明，似頗簡易，將來或有極簡單的答案，但目下尚無法解決。此一問題與其他數種問題，有極重要之關係云。

特別函數

自 1830 年至 1900 年間爲人所努力研究之許多有趣的函數，其發明乃在 1800 年至 1830 年之間。此其領域之廣，非片言所可盡。玆僅就 1880 年以後解析學家所專心致意之一種函數而言之。

先就任何一種有週期之現象考之，例如時計分針之經過鐘面任一記號。每經一小時後，輒重臨舊地。吾人於此稱針尖之位置，爲時間之週期函數（periodic function），其週期爲一小時。此種週期現象，科學中隨處皆是，波浪運動，卽其一例。過去世紀中，週期函數之所以爲解析學家極力研究者，率由此故。

上例若以代數式表之，可書爲 $f(t+1)=f(t)$。此中所宜注意者，卽函數之値，當變數 t 變爲 t +1時，保持不變。t 變爲 t +1，乃一種特別的一次變換 (linear transformation)，故此函數之値，在此種特別變換之下，具不變性。

一千八百八十餘年間普恩加賚氏更進一步，研究在一般一次變換羣下具不變性之函數，結果於解析學中又另闢天地。一般 n 次方程式之解法，附帶產生，蓋其 n 個根可由普氏所創造之幾種函數表而出之也。

上述函數，祗有一個週期，然亦有具數種不同週期之函數。此等函數，今日研究之者大有人在。僅此一端，已夠畢生之研究資料，其範圍可謂大矣。

各方面的推廣

言及各方面的推廣，其最著者當推渥特拉(Vito Volterra, 1862-)及其生徒在前世紀末十餘年間之工作。 彼等所研究之函數，其變數之個數，爲不可數的無限多。不可數的無限多，其爲數有若一直線上之點然。 通常對於一曲線，視爲在其上各點坐標間之一種關係，一動點依此關係變動其位置，便產生此曲線，但現在看法，却不如此。 此曲線之本身，卽視作一種變動的事物，因而研究其變動時之現象。 然另一方面言之，此曲線可視爲一組之點，而此組之點數，爲不可數無限多。

在物理方面，對於一種事物，欲預言其將來，必備悉其過去，自有此無限多變數的函數而後，此等物理的問題，均可以算學的方法處理之。 例如一條鋼鐵，先賦以磁，再奪其磁，如此一賦一奪後，其內部多少起有變化，研究此種變化，今亦爲算學解析之事。 過去三十年間所發明之積分方程式論(theory of integral equations)及其最近之發展，卽研究此等問題之工具。首創斯學者爲亞伯爾及墨飛(Murphy)就中墨氏乃一牧師云。

此種方程式與舊物理學上方程式不同。 後者爲微分方程式，所論多爲變化之率，積分方程中所含者却爲積分式，此爲其不同之點。微分方程統治物理學者二百餘年，據批評家言，此種新方程式，其在科學上之重要，將來定不遜於微分方程。然過去八十年間，微分方程式之發明，亦極偉大，不可忽視也。

此外 1906 年勒柏斯幾(Henri Lebesgue)又發明積分新論，亦爲重要事實之一。

吾人於首章中，偶言及周境値問題一事，請略加以解釋。假設吾人已知電氣在某種媒體(例如銅片)中傳導之定律，以方程式表之。今將電流放於銅片上之一點，欲求在此片上各處電氣分佈之量，則可將由上述方程式所得之通解，令其合乎試驗時之情形(initial conditions)，如是則任何部分之電量，均可求出。此種算法，卽謂之周境値問題算法。

此種研究，範圍亦日見廣大，許多前此發明之特別函數，均於此中得致其用焉。

(本章完，全書下期續畢)

教科書難題解答

甲.范氏高等代數學 (Fine: Collge Algebra)

肇　　父

64. 展開下之行列式(497面4題)：

$$\begin{vmatrix} o & -q & -r \\ q & o & -s \\ r & s & o \end{vmatrix}.$$

[解] 此題雖甚簡單，然而可以代表一種特別的行列式，叫做反稱行列式(skew symmetric determinant). 此種行列式中第 i 行第 j 列的元，恰和第 j 行第 i 列的元同值而異號，所以主對角線上一切的元都是零，因爲他們自己是自己的負數。本例是三級反稱行列式，其值爲零，極易證明，其實反稱行列式之級爲單數時，值皆爲零，證法同本例如下：

因行列互易，不變行列式之值，故

$$\begin{vmatrix} o & -q & -r \\ q & o & -s \\ r & s & o \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} o & q & r \\ -q & o & s \\ -r & -s & o \end{vmatrix}$$

但後式恰爲前式之負數，因前式每行用 -1 乘之，恰變爲後式也。 由是原行列式爲其本身之負數，故其值爲零。

反稱行列式之級爲偶數時，其值不等於零，但爲一完全平方數，今姑不贅.

65. 試證(502面5題)

$$\begin{vmatrix} (b+c)^2 & ab & ac \\ ab & (c+a)^2 & bc \\ ac & bc & (a+b)^2 \end{vmatrix} = 2abc(a+b+c)^3$$

[証] 此行列式顯然爲 a, b, c 三文字之對稱式，依908節之法，當 $a=o$ 時，此式化爲

$$(b+c)^2 \begin{vmatrix} c^2 & bc \\ bc & b^2 \end{vmatrix} = 0,$$

故 a 爲其一因數。同理 b, c 亦然，故原式含 abc 爲因子。若令 $b+c=-a$ 代入，原式三行皆成比例，其值復爲零，因之 $b+c+a$ 又爲一因子。同理 $c+a+b$ 及 $a+b+c$ 亦爲因子，合前觀之，知原式之值爲 $kabc(a+b+c)^3$，k 爲 a, b, c 之對稱式或常數，因原式爲六次式，$abc(a+b+c)^3$ 亦爲六次，故 k 僅爲常數。 比較 a^4bc 項之係數，知 $k=2$.

66. 試證(508面9題)

$$\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} A_1 & A_2 & A_3 \\ B_1 & B_2 & B_3 \\ C_1 & C_2 & C_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}^3,$$

[證] 以Δ代左方第一行列式,則

$$\Delta = a_1A_1 + a_2A_2 + a_3A_3$$
$$= b_1B_1 + b_2B_2 + b_3B_3$$
$$= c_1C_1 + c_2C_2 + c_3C_3.$$

依行列式乘法將左方兩行列式乘之,則見其積之主對角線上三元,恰依次爲上列三式,但其餘各元依914節之理,值皆爲零,故所求之積爲

$$\begin{vmatrix} \Delta & 0 & 0 \\ 0 & \Delta & 0 \\ 0 & 0 & \Delta \end{vmatrix} = \Delta^3 = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}^3.$$

由此可得

$$\begin{vmatrix} A_1 & A_2 & A_3 \\ B_1 & B_2 & B_3 \\ C_1 & C_2 & C_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}^2;$$

左式謂之爲右式之附屬行列式(adjoint determinant)。若Δ爲n級行列式,Δ'爲其附屬行列式,依上法可證

$$\Delta' = \Delta^{n-1}.$$

67. 求証下列方程系爲相容,且解出$x:y:z$之比值(511面6題):

$$\begin{cases} a_1x + b_1y + (ka_1 + lb_1)z = 0, \\ a_2x + b_2y + (ka_2 + lb_2)z = 0, \\ a_3x + b_3y + (ka_3 + lb_3)z = 0. \end{cases}$$

[証]

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & ka_1 + lb_1 \\ a_2 & b_2 & ka_2 + lb_2 \\ a_3 & b_3 & ka_3 + lb_3 \end{vmatrix} = 0,$$

故此爲相容系。

又
$$A_1 = \begin{vmatrix} b_2 & ka_2 + lb_2 \\ b_3 & ka_3 + lb_3 \end{vmatrix}$$
$$= k\begin{vmatrix} b_2 & a_2 \\ b_3 & a_3 \end{vmatrix} + l\begin{vmatrix} b_2 & b_2 \\ b_3 & b_3 \end{vmatrix}$$
$$= k\begin{vmatrix} b_2 & a_2 \\ b_3 & a_3 \end{vmatrix};$$

$$A_2 = -\begin{vmatrix} a_2 & ka_2 + lb_2 \\ a_3 & ka_3 + lb_3 \end{vmatrix}$$
$$= -k\begin{vmatrix} a_2 & a_2 \\ a_3 & a_3 \end{vmatrix} - l\begin{vmatrix} a_2 & b_2 \\ a_3 & b_3 \end{vmatrix}$$
$$= l\begin{vmatrix} b_2 & a_2 \\ b_3 & a_3 \end{vmatrix};$$

$$A_3 = \begin{vmatrix} a_2 & b_2 \\ a_3 & b_3 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} b_2 & a_2 \\ b_3 & a_3 \end{vmatrix}.$$

若 $\begin{vmatrix} b_2 & a_2 \\ b_3 & a_3 \end{vmatrix} \neq 0$,則

$$x : y : z = k : l : -1.$$

68. λ 取何值時，則下列方程系爲相容(511面7題)?

$$\begin{cases} 4x+3y+z=\lambda x, \\ 3x-4y+7z=\lambda y, \\ x+7y-6z=\lambda z. \end{cases}$$

〔解〕 此處

$$\Delta=\begin{vmatrix} 4-\lambda & 3 & 1 \\ 3 & -4-\lambda & 7 \\ 1 & 7 & -6-\lambda \end{vmatrix}.$$

若$\Delta=0$，則此方程系爲相容，展開此式，得一λ之三次方程，解之卽得λ所應取之值矣。此式之展開，本非難事，不過恰有一特別方法，不妨順便談談。設

$$\Delta=\begin{vmatrix} a_1-\lambda & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2-\lambda & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3-\lambda \end{vmatrix}$$

$$=\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}+\begin{vmatrix} -\lambda & b_1 & c_1 \\ 0 & b_2 & c_2 \\ 0 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$$

$$+\begin{vmatrix} a_1 & 0 & c_1 \\ a_2 & -\lambda & c_2 \\ a_3 & 0 & c_3 \end{vmatrix}+\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & 0 \\ a_2 & b_2 & 0 \\ a_3 & b_3 & -\lambda \end{vmatrix}$$

$$+\begin{vmatrix} a_1 & 0 & 0 \\ a_2 & -\lambda & 0 \\ a_3 & 0 & -\lambda \end{vmatrix}+\begin{vmatrix} -\lambda & b_1 & 0 \\ 0 & b_2 & 0 \\ 0 & b_3 & -\lambda \end{vmatrix}$$

$$+\begin{vmatrix} -\lambda & 0 & c_1 \\ 0 & -\lambda & c_2 \\ 0 & 0 & c_3 \end{vmatrix}+\begin{vmatrix} -\lambda & 0 & 0 \\ 0 & -\lambda & 0 \\ 0 & 0 & -\lambda \end{vmatrix}$$

$$=|a_1\ b_2\ c_3|+(-\lambda)\Big\{|b_2\ c_3|+|a_1\ c_3|$$

$$+|a_1\ b_2|\Big\}+(-\lambda)^2(a_1+b_2+c_3)+(-\lambda)^3.$$

卽常數項爲$|a_1\ b_2\ c_3|$；λ之係數爲由序列$a_1\ b_2\ c_3$中順次去a_1, b_2, c_3，後所得三個二級行列式之和變號；λ^2之係數則爲a_1, b_2, c_3之和；λ^3之係數顯然爲-1。上列

$$\Delta=\begin{vmatrix} 4 & 3 & 1 \\ 3 & -4 & 7 \\ 1 & 7 & -6 \end{vmatrix}-\left\{\begin{vmatrix} -4 & 7 \\ 7 & -6 \end{vmatrix}+\begin{vmatrix} 4 & 1 \\ 1 & -6 \end{vmatrix}\right.$$

$$\left.+\begin{vmatrix} 4 & 3 \\ 3 & -4 \end{vmatrix}\right\}\lambda+(4-4-6)\lambda^2-\lambda^3=0,$$

卽 $\quad 0+75\lambda+6\lambda^2-\lambda^3=0;$

解之得 $\lambda=0$，或$-3\pm2\sqrt{21}$.

此法較之直接展開爲便，故附述之；一般法則，不難推出，例如Δ爲四級時，則

$$\Delta=|a_1\ b_2\ c_3\ d_4|-\Big\{|b_2\ c_3\ d_4|$$

$$+|a_1\ c_3\ d_4|+|a_1\ b_2\ d_4|+|a_1\ b_2\ c_3|\Big\}\lambda$$

$$+\Big\{|b_2\ c_3|+|a_1\ d_4|+|a_1\ c_3|$$

$$+|b_2\ d_4|+|a_1\ b_2|+|c_3\ d_4|\Big\}\lambda^2$$

$$-(a_1+b_2+c_3+d_4)\lambda^3+\lambda^4.$$

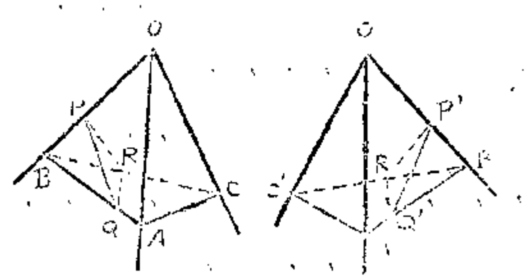
讀者細加思索可也。

乙.　吳在淵編: 高級幾何學

(迺　樾)

45.二個三面角中面角各相等,則此二個三面角爲合同形或爲對稱形.

(P.357.Ex.3.)



解: 在三面角O-ABC,O′-A′B′C′中

若　$\angle AOB=\angle A'O'B'$,

　　$\angle BOC=\angle B'O'C'$,

及　$\angle COA=\angle C'O'A'$,

則此兩三面角爲(1)全等形,或(2)對稱形.

證:自兩三面角頂順各稜截取等長,令$OA=OB=OC=O'A'=O'B'=O'C'$.

順聯A,B,C及A′,B′,C′.

則因　$\triangle AOB\equiv\triangle A'O'B'$,

∴　$\angle ABO=\angle A'B'O'$.

同理,$\angle CBO=\angle C'B'O'$.

次,於稜OB,O′B′上各取點P及P′,令$BP=B'P'$.

在平面AOB中,作$PQ\perp OB$;

在平面BOC中,作$PR\perp OB$;

PQ,PR各交AB,BC於Q,R.

同樣在A′B′,B′C′上作Q′,R′二點.

∵　$\triangle PBQ\equiv\triangle P'B'Q'$,

而　$PQ=P'Q'$, $BQ=B'Q'$.

同理,$PR=P'R'$, $BR=B'R'$.

聯QR及Q′R′,

又∵　$\triangle ABC\equiv\triangle A'B'C'$,

∴　$\triangle RBQ\equiv\triangle R'B'Q'$,

而　$\triangle RPQ\equiv\triangle R'P'Q'$,

　　$\angle RPQ=\angle R'P'Q'$;

即兩二面角OB,O′B′之二平面角相等.

同理可証相應各稜之平面角均相等.

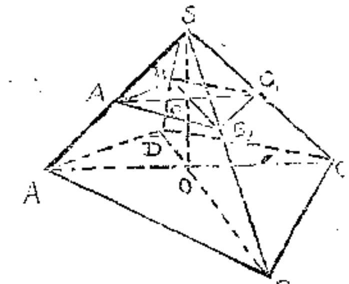
故若(1)兩形中相應諸面角同序,

則O-ABC及O′-A′B′C′爲全等形;

或(2)兩形中相應諸面角逆序,

則O-ABC及O′-A′B′C′爲對稱形.

46.以平面截四面角,令其截面爲一平行四邊形.(P.357.Ex.4.)



解：S－ABCD 為所設之一四面角，求作平面截此面角，令截口為平行四邊形。

作法Ⅰ：過對稜 SA，SC 及 SB，SD 作二平面 SAC 及 SBD 其交線為 SO。

於 SO 上任取一點 O_1。

在 SAC 中引直線 $A_1O_1C_1$，交 SA,SC 於 A_1 及 C_1，令 $A_1O_1=O_1C_1$；

在 SBD 中引直線 $B_1O_1D_1$，交 SB,SD 於 B_1 及 D_1，令 $B_1O_1=O_1D_1$。

則平行於四邊形 $A_1B_1C_1D_1$ 所作之諸截面，均合於所求。

證Ⅰ：∵ A_1C_1，B_1D_1 互相等分於 O_1。

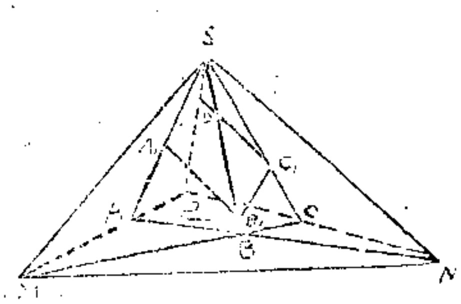
∴ $A_1B_1C_1D_1$ 為一平行四邊形。

設所作平行於 $A_1B_1C_1D_1$ 之截面截此四面角之各稜於 $A'BC'D'$，

則∵ $A'B' \parallel A_1B_1$，　$C'D' \parallel C_1D_1$，

∴ $A'B' \parallel C'D'$。同理 $B'C' \parallel D'A'$。

由是知 $A'B'C'D'$ 亦為一平行四邊形。



作法Ⅱ：延長一雙對面 SAB，SCD，其交線設為 SM。

次，延長他雙對面 SBC，SDA，其交線設為 SN。

則平行於 △SMN 所作之諸截面，均合於所求。

証Ⅱ：設平面 $A'B'C'D'$ 為平行於 SMN 所作之一截面，順截各稜於 A'，B'，C' 及 D'

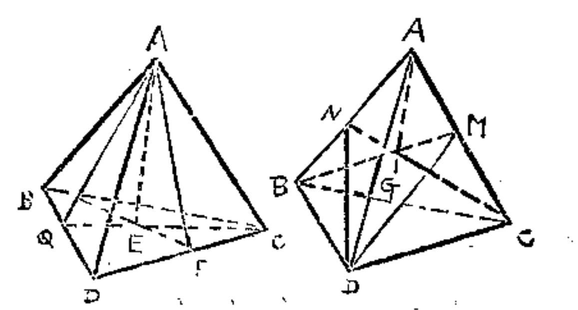
∵ $SM \parallel A'B'C'D'$，

則平面 SAM，SDM 與 $A'B'C'D'$ 之交線 $A'B'$，$C'D' \parallel SM$，而 $A'B' \parallel C'D'$。

同理可證 $B'C' \parallel D'A'$。

由是知 $A'B'C'D'$ 為一平行四邊形。

47. 等分四面體中各二面角之六個平面會於一點。(P.364. Ex.2.)



解：ABCD 為一四面體，

六平面 P, Q, R, L, M, N 各平分 AB, AC, AD, BC, BD, CD 諸二面角，

則 P, Q, R, … 等六平面會於一點。

證：∵平面 P 與 ABC，ABD 二面有等距離；平面 Q 與 ACB，ACD 二面有等距離，

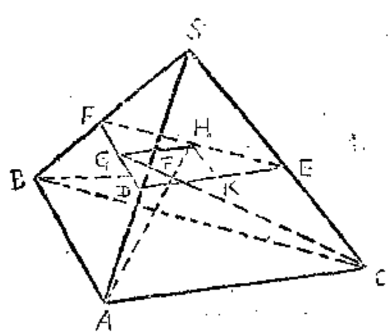
則P, Q之交線AE與ABC, ABD, ACD三面等距，而AE在R平面上。

次，設AE交平面N於G點。

又因G與ACD, BCD二面等距，卽G與ABC, ABD, ACD, BCD四面等距，故G又應在L, M兩平面上。

換言之：P, Q,…等六平分面同過G點。

48. 在四面體S－ABC中，作其底面ABC之平行截面DEF，則連結此截面三邊DE, EF, FD中點G, H, K，與底面中對角頂C, A, B之三直線GC, HA, KB會於一點。(P. 362. Ex. 3)



證：聯GH，則GH∥DE∥AC，而G, H, C, A四點在同一平面上。

設AH, CG之交點爲P。

因　$\triangle PGH \sim \triangle PCA$，

$\therefore$　$PC : PG = AC : \frac{1}{2}DE$ ⋯ (1)

同理聯GK，命CG, BK之交點爲P′

則　$P'C : P'G = BC : \frac{1}{2}EF$ ⋯ (2)

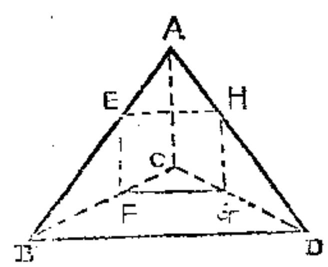
但　$\triangle ABC \sim \triangle DEF$

$\therefore$　$AC : \frac{1}{2}DE = BC : \frac{1}{2}EF$ ⋯ (3)

比較(1),(2),(3)知P′點合於P點。

是卽證得AH, BK, CG會於一點。

49. 四面體中相對二稜相等，則此四面體以平行於此二稜之平面截之，所得之截面，爲周圍一定之平行四邊形。(Ex.4.)



解：四面體ABCD中，稜AC＝BD，以平行此二稜之平面P截此四面體，其截口爲EFGH，求證

EFGH爲一平行四邊形，且周長一定。

證：∵平面P∥AC, BD,

∴ EF∥AC∥GH, EH∥BD∥FG,

而EFGH爲一平行四邊形。

次，∵ $EH : BD = AE : AB$,

$EF : AC = BE : AB$,

又　$AD = BD$,

$\therefore EH + EF : AC = AE + BE : AB$,

卽　$EH + EF = AC$ 定長。

旣EH＋EF爲截口周長之半，故截口全周亦爲定長。　Q. E. D.

丙. 趙修乾編:新學制高級中學教科書三角術

潛 淵

48. 解 $2\sin^2\varphi=3\cos\varphi$.

(157面習題3)

解 各項俱以 $\cos\varphi$ 表之,則爲

$$2(1-\cos^2\varphi)=3\cos\varphi.$$

視 $\cos\varphi$ 爲未知數,命之爲C,則有

$$2C^2+3C-2=0.$$

解之得 $C=-2$ 或 $\frac{1}{2}$,

即 $\cos\varphi=-2$ 或 $\frac{1}{2}$.

但餘弦之絕對值不能大於1,故前一根不合理,由後一根得 φ 之主值爲

$$\varphi=\frac{\pi}{3},$$

其一切值爲

$$\varphi=2n\pi\pm\frac{\pi}{3},$$

驗算. $\cos\varphi=\frac{1}{2}$, $\sin^2\varphi=\frac{3}{4}$,

$$2\sin^2\varphi-3\cos\varphi=2\cdot\tfrac{3}{4}-3\cdot\tfrac{1}{2}=0.$$

試求下列各題之角在360°以內者.

49. $\sin\Theta+\cos\Theta=1$ (157面習題6)

解. 以$\sqrt{2}$除全式得

$$\frac{1}{\sqrt{2}}\sin\Theta+\frac{1}{\sqrt{2}}\cos\Theta=\frac{1}{\sqrt{2}}.$$

但 $\sin 45^\circ=\frac{1}{\sqrt{2}}$, $\cos 45^\circ=\frac{1}{\sqrt{2}}$;

故上式即爲

$$\sin 45^\circ\sin\Theta+\cos 45^\circ\cos\Theta=\frac{1}{\sqrt{2}},$$

即 $$\cos(45^\circ-\Theta)=\frac{1}{\sqrt{2}}.$$

故 Θ 之主值爲

$$\Theta=0^\circ.$$

其在 360° 以內者爲

$$\Theta=\frac{\pi}{2}.$$

驗算. $\sin\Theta+\cos\Theta=1+0=1$.

50. $3\tan^2x-4\sin^2x=1$.

(157面習題14)

解. $3\frac{\sin^2x}{\cos^2x}-4\sin^2x=1$.

$$3\sin^2x-4\sin^2x\cos^2x=\cos^2x.$$

$$3(1-\cos^2x)-4(1-\cos^2x)\cos^2x=\cos^2x.$$

即 $$4\cos^4x-8\cos^2x+3=0.$$

$$(2\cos^2x-1)(2\cos^2x-3)=0.$$

故 $$\cos x=\pm\frac{1}{\sqrt{2}}\text{或}\pm\sqrt{\frac{3}{2}}.$$

但後者之值大於1故不合理.

是故 x 之值,其在 360° 以內者爲

$$x=\frac{\pi}{4},\ \frac{3\pi}{4},\ \frac{5\pi}{4},\ \frac{7\pi}{4}.$$

驗算. $\cos^2x=\frac{1}{2}$, $\sin^2x=\frac{1}{2}$, $\tan^2x=1$,

$3\tan^2x-4\sin^2x=3\cdot1-4\cdot\frac{1}{2}=3-2=1$。

51. 若 $a\sin x+b\cos x=c$, 証

$$\sin x=\frac{ac\pm b\sqrt{a^2+b^2-c^2}}{a^2+b^2}.$$

(157面習題16)

証: $a\sin x+b\cos x=c$.

$a\sin x+b\sqrt{1-\sin^2x}=c$.

移項而平方之得

$b^2(1-\sin^2x)=a^2\sin^2x-2ac\sin x+c^2$,

即 $(a^2+b^2)\sin^2x-2ac\sin x+c^2-b^2=0$。

將此式視爲 $\sin x$ 之二次方程式而解之得

$$\sin x=\frac{ac\pm\sqrt{a^2c^2-(a^2+b^2)(c^2-b^2)}}{a^2+b^2}$$

$$=\frac{ac\pm\sqrt{a^2b^2-b^2c^2+b^4}}{a^2+b^2}$$

$$=\frac{ac\pm b\sqrt{a^2+b^2-c^2}}{a^2+b^2}.$$

52. 若 $\sin(a+x)=m\sin x$, 証

$$\sin x=\frac{\pm\sin a}{\sqrt{m^2-2m\cos a+1}}.$$

又 $\cot x=\frac{m-\cos a}{\sin a}$.

(157面習題17)

證: $\sin(a+x)=\sin a\cos x+\cos a\sin x$,

故 $\sin a\cos x+\cos a\sin x=m\sin x$ (1)

移項得

$(m-\cos a)\sin x=\sin a\sqrt{1-\sin^2x}$.

平方之得

$$(m-\cos a)^2\sin^2x=\sin^2a(1-\sin^2x),$$

即 $\left\{(m-\cos a)^2+\sin^2a\right\}\sin^2x=\sin^2a$.

故 $\sin x=\dfrac{\pm\sin a}{\sqrt{m^2+\cos^2a-2m\cos a+\sin^2a}}$

$$=\frac{\pm\sin a}{\sqrt{m^2-2m\cos a+1}}.$$

以 $\sin x$ 除 (1) 式得

$$\sin a\cot x+\cos a=m,$$

故 $$\cot x=\frac{m-\cos a}{\sin a}.$$

53. 若 $\sin(a\pm x)\cos x=m$,

證 $\sin(a\pm2x)=2m-\sin a$.

(157面習題20)

證. 命 $X=a\pm2x$, $Y=a$. 則

$$\frac{X+Y}{2}=a\pm x,\ \frac{X-Y}{2}=\pm x.$$

以此代入 142 面之第一式得

$2\sin(a\pm x)\cos(\pm x)=\sin(a\pm2x)+\sin a$.

但依題設 $\sin(a\pm x)\cos(\pm x)=m$,

$\therefore$ $2m=\sin(a\pm2x)+\sin a$,

即 $\sin(a\pm2x)=2m-\sin a$.

54. 解 $\cot\varphi=\tan k\varphi$，其 k 爲已知數。(162面習題12)

解。 $\cot\varphi=\tan\left(\frac{\pi}{2}-\varphi\right)=\tan k\varphi$，

故 $\frac{\pi}{2}-\varphi=k\varphi-n\pi$，

$$(k+1)\varphi=n\pi+\frac{\pi}{2}=\frac{2n+1}{2}\pi,$$

即 $\varphi=\frac{2n+1}{2(k+1)}\pi$。

55. 方程式 $\tan(x+y)=a$,

$\tan x\tan y=b$,

宜如何解之？(163面習題24)

解 $\because$ $\tan(x+y)=\frac{\tan x+\tan y}{1-\tan x\tan y}=a$,

故 $\tan x+\tan y=a(1-b)$,

而 $(\tan x+\tan y)^2=a^2(1-b)^2$；

即 $(\tan x-\tan y)^2=a^2(1-b)^2-4b$.

故 $\tan x-\tan y=\sqrt{a^2(1-b)^2-4b}$。

由此即得

$$\tan x=\tfrac{1}{2}\left\{a(1-b)+\sqrt{a^2(1-b)^2-4b}\right\},$$

$$\tan y=\tfrac{1}{2}\left\{a(1-b)-\sqrt{a^2(1-b)^2-4b}\right\}.$$

故 x，y 之値即可得也。

56. 求下列方程式之 r 與 x:

$$r\sin(a+x)=m,\ r\sin(b+x)=n.$$

(169面習題8)

解。 $\frac{\sin(a+x)}{\sin(b+x)}=\frac{m}{n}$

$$\frac{\sin(a+x)+\sin(b+x)}{\sin(b+x)}=\frac{m+n}{n},$$

$$\frac{\sin(a+x)-\sin(b+x)}{\sin(b+x)}=\frac{m-n}{n},$$

故 $\frac{\sin(a+x)+\sin(b+x)}{\sin(a+x)-\sin(b+x)}=\frac{m+n}{m-n}$.

即 $\frac{2\sin\left(x+\frac{a+b}{2}\right)\cos\left(\frac{a-b}{2}\right)}{2\cos\left(x+\frac{a+b}{2}\right)\sin\left(\frac{a-b}{2}\right)}=\frac{m+n}{m-n}$,

$$\tan\left(x+\frac{a+b}{2}\right)\cot\left(\frac{a-b}{2}\right)=\frac{m+n}{m-n},$$

$$\therefore\ \tan\left(x+\frac{a+b}{2}\right)=\frac{m+n}{m-n}\tan\left(\frac{a-b}{2}\right).$$

由此可求出 $x+\frac{a+b}{2}$，於是得 x,既得 x 即以其値代入原式則可求出 r,

又法：由題設得

$$n\sin(a+x)=m\sin(b+x),$$

即 $n\sin a\cos x+n\cos a\sin x$

$$=m\sin b\cos x+m\cos b\sin x.$$

兩邊以除 cos x 之，得

$n\sin a+n\cos a\tan x$

$$=m\sin b+m\cos b\tan x.$$

$$\therefore\ \tan x=\frac{m\sin b-n\sin a}{n\cos a-m\cos b}.$$

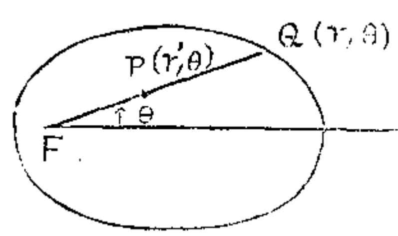
由是亦可求 x。

丁. 斯盖倪三氏解析幾何學

泉　生

44. 在橢圓 $r=\frac{6}{2-\cos\Theta}$ 之焦幅 FQ 上自 Q 向 F 取 QP=4，求 P 之軌跡(164面習題 16)。

解。命 P 之幅距為 r'，則因



$$PQ=FQ-FP=4,$$

故 $$r-r'=4.$$

∴ $$r'=r-4=\frac{6}{2-\cos\Theta}-4$$

$$=\frac{4\cos\Theta-2}{2-\cos\Theta}.$$

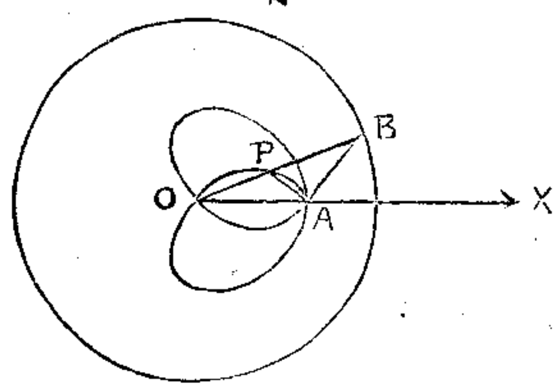
由是 P 之軌跡為 $r=\frac{4\cos\Theta-2}{2-\cos\Theta}$.

45. 設 O 為定圓之心，A 為圓內一定點。作任意半徑 OB，聯 AB 並作 AP 垂直於 AB 而交 OB 於 P；求 P 之軌跡。(164面17題)

解。取 OA 為極軸，幷設定圓之方程式為 r=a，則可設 B 之坐標為 (a, Θ)，A 之坐標為 (e, o)。於是

$$OP=r=OB-PB$$

$$=a-\sqrt{AP^2+AB^2}$$



但 $AP^2=OP^2+OA^2-2OP\cdot OA\cos\Theta$

$$=r^2+e^2-2re\cos\Theta,$$

$$AB^2=OB^2+OA^2-2OB\cdot OA\cos\Theta$$

$$=a^2+e^2-2ae\cos\Theta.$$

代入(1)式，得

$$r-a=\sqrt{r^2+a^2+2e^2-2e(r+a)\cos\Theta}.$$

兩邊平方而化簡之，得所求軌跡為

$$r=e\frac{e-a\cos\Theta}{e\cos\Theta-a}.$$

46. 設 x 軸交圓 $x^2+y^2=a^2$ 於 A。於圓上截取弧AB，使弧長等於 $y^2=4cx$ 上一點 (x_0, y_0) 之横坐標 x_0，再作半徑 OB，且延長之至 P，令 $BP=y_0$. 求証 P 之軌跡為拋物螺旋線 $(r-a)^2=4ac\Theta$(164面習題18)。

證。命 P 之極坐標爲(r,Θ)，則

$$OP=r=OB+BP=a+y_0$$

$$弧\ AB=a\Theta=x_0$$

故　$y_0=r-a$，　$x_0=a\Theta$。

但(x_0,y_0) 在 $y^2=4cx$ 上，故

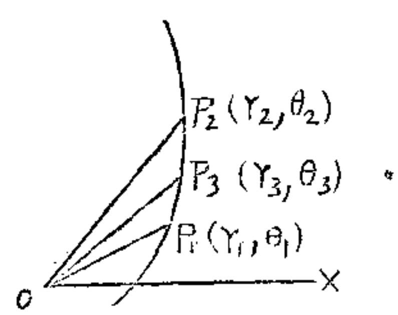
$$y^2_0=4cx_0,$$

即　$(r-a)^2=4ac\Theta$。

47。設 P_1 與 P_2 爲對數螺旋線上兩點，則其餘各點可依次之定理，用幾何作圖法作出之：—

定理。於 P_2OP_1 角之平分線上取 OP_3 使其等於 OP_1 與 OP_2 之比例中項，則 P_3 亦在此對數螺旋線上。

求証(161面智題20)。



証。設P_1,P_2,P_3之極坐標各爲(r_1,Θ_1)，(r_2,Θ_2)，(r_3,Θ_3)，則因 $OP_3=\sqrt{OP_1\cdot OP_2}$，

即　$r_3=\sqrt{r_1\cdot r_2}$，

$\therefore\ \log r_3=\frac{1}{2}(\log r_1+\log r_2)$。　(1)

但 P_1,P_2 均設爲對數螺旋線 $\log r=a\Theta$ 上之點，故

$$\log r_1=a\Theta_1,\qquad \log r_2=a\Theta_2.$$

又 OP_3 爲 P_2OP_1 角之平分線，故又有

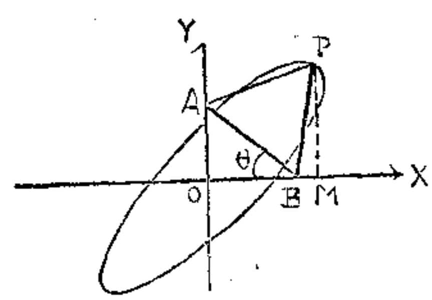
$$\Theta_1+\Theta_2=2\Theta_3.$$

代入 (1) 式，得

$$\log r_3=\tfrac{1}{2}(a\Theta_1+a\Theta_2)=a\Theta_3,$$

故知 P_3 亦在對數螺旋綫上，

48。設 ABP 爲一等邊三角形，A 在 y 軸上移動，B 在 x 軸上移動，求 P 之軌跡(194面習題2)。



解。設 P 之坐標爲(x,y)，$AB=a$，則

$$x=OB+BM=a\cos\Theta+a\cos\angle MBP.$$

但$\angle MBP=180^\circ-60^\circ-\Theta=120^\circ-\Theta$，

$$\therefore\ x=a\cos\Theta+a\cos(120^\circ-\Theta).$$

又　$y=MP=a\sin\angle MBP$

$$=a\sin(120^\circ-\Theta).$$

將上式右端展開之，得

$$x=\frac{a}{2}\cos\Theta+\frac{a\sqrt{3}}{2}\sin\Theta,$$

$$y=\frac{a\sqrt{3}}{2}\cos\Theta+\frac{a}{2}\sin\Theta.$$

是爲所求軌跡之參數方程式，由是得

$$\cos\Theta=\frac{y\sqrt{3}-x}{a},\ \sin\Theta=\frac{x\sqrt{3}-y}{a},$$

$$\therefore\ \left(\frac{y\sqrt{3}-x}{a}\right)^2+\left(\frac{x\sqrt{3}-y}{a}\right)^2=1.$$

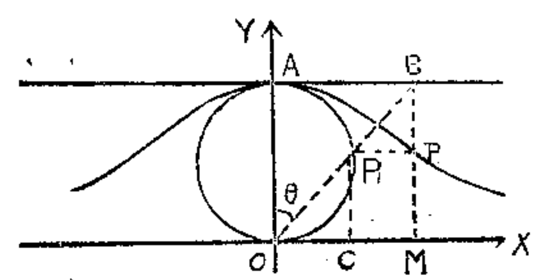
簡之得　$x^2-\sqrt{3}\,xy+y^2=a\frac{a^2}{4}$.

此方程之判別式為

$$B^2-4AC=3-4=-1<0,$$

故所求之軌跡為一橢圓。

49。設 OA 為一圓之直徑，過 O 任作一線 OB 交圓於 P_1 而交過 A 之切線於 B。作 $BP \parallel OA$，$P_1P \perp OA$，求 P 之軌跡 (194面習題5)。



解。設 P 之坐標為 (x,y)，則

$$x=OM=AB=OB\sin\Theta.$$

但　$OB^2=OM^2+MB^2=x^2+4a^2$,

$\therefore$　$x=\sqrt{x^2+4a^2}\sin\Theta$;

即　$x=2a\tan\Theta$.　(1)

又　$y=MP=CP_1=OP_1\cos\Theta$,

但　$OP_1=OA\cos\Theta=2a\cos\Theta$,

$\therefore$　$y=2a\cos^2\Theta$.　(2)

(1),(2)兩式為所求軌跡之參數方程式。

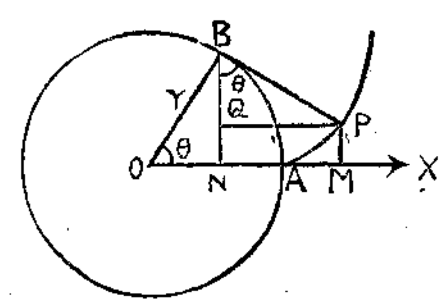
由此消去Θ，得直角坐標方程式為

$$y=\frac{8a^3}{x^2+4a^2}.$$

此曲線名為 witch of Agnesi.

50。有一弦線圍於圓周之上，今將此弦線放開，求其端點之軌跡。此名圓之伸開線(involute)(195面習題7)。

解。設放開部分為自 A 至 B 之一段，則弦端最始在 A 者，此時至 P 點處，而切線 BP 之長與 BA 弧相等。如圖取坐標，并設半徑為 r，$\angle AOB=\Theta$，則弧 BA $=r\Theta=BP$。



設 (x,y) 為 P 之坐標，則

$$\begin{aligned}x=OM&=ON+QP\\&=OB\cos\Theta+BP\sin\Theta\\&=r\cos\Theta+r\Theta\sin\Theta,\\y=MP&=NB-QB\\&=OB\sin\Theta-BP\cos\Theta\\&=r\sin\Theta-r\Theta\cos\Theta.\end{aligned}$$

此為所求伸開線之參數方程式，因 Θ 不便消去，故仍以參數表示為宜。

問　題　欄

本欄之目的，在徵集關於中等算學範圍內之種種問題，不拘科目，不限難易，以供讀者之研究，藉收觀摩之效。凡本刊讀者，皆可提出問題，及解決本欄內所提出之問題。無論出題或解題，概依收到之先後，次第編號發表，而出題者及解題者之姓名及所在學校或住址，均隨題披露。數人同解一題，解法同時則擇尤發表，解法異時則分段刊登。來稿務祈繕寫清楚，姓名住址尤須明晰。至解題時所用圖形，務請用黑色墨水精確作好，連帶寄下。　　編者謹啓。

提出之問題

29.1. 設$\triangle ABC$之內切圓切各邊於 X, Y, Z 三點，P 爲內切圓上任一點。由 P 至 $\triangle ABC$ 各邊之距離爲 α, β, γ; 由 P 至 $\triangle XYZ$ 各邊之距離爲 α', β', γ'，則 $\alpha\beta\gamma=\alpha'\beta'\gamma'$（武漢大學李思源提）。

29.2. 設 A, B, C, D 在同一直線上，且順次排成調和列點。試求一點 P，使 $\triangle PAC$ 之內切圓切 AC 於 B，且其九點圓與內切圓之公切線，通過 D 點。若 P 不限定在一平面上，試求其軌跡（前人提）。

29.3. 由次方程式消去 x，并將結果化爲極簡：

$$\frac{2m\tan A}{\tan B+\tan C}=\frac{m\tan^2 A-x}{\tan B\tan C}=m-x.$$

（廣州豪賢路五十八號龍柏齡提）。

29.4. 從多角形之各邊至一點之距離，其代數和恆爲常數時，則此一點之軌跡爲一直綫，求証（香港鐸聲書院何季隆提）。

29.5. 設三角形 ABC 之三邊爲 a, b, c，若 $\tan\varphi=\frac{a-b}{a+b}\cot\frac{C}{2}$，試証 $c=(a+b)\sec\varphi\sin\frac{C}{2}$　（編者提）。