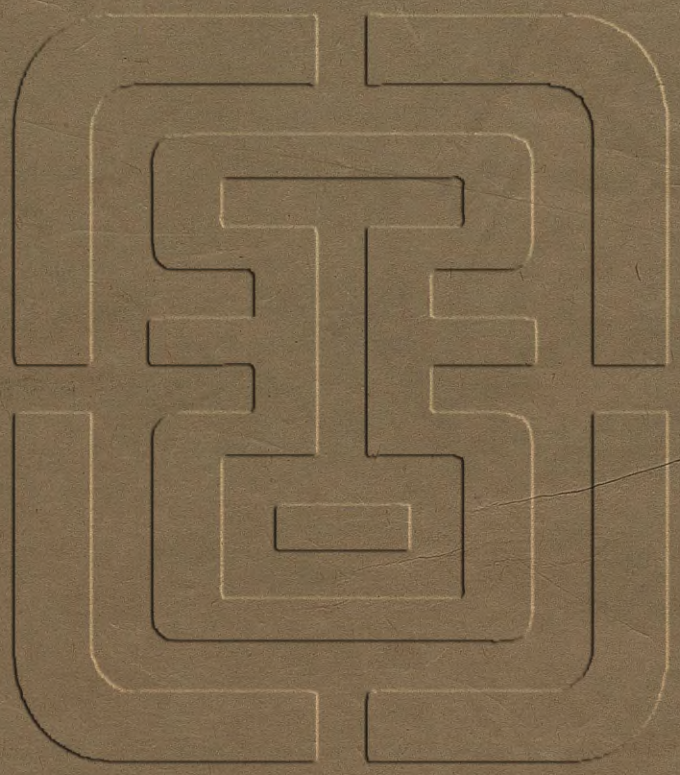
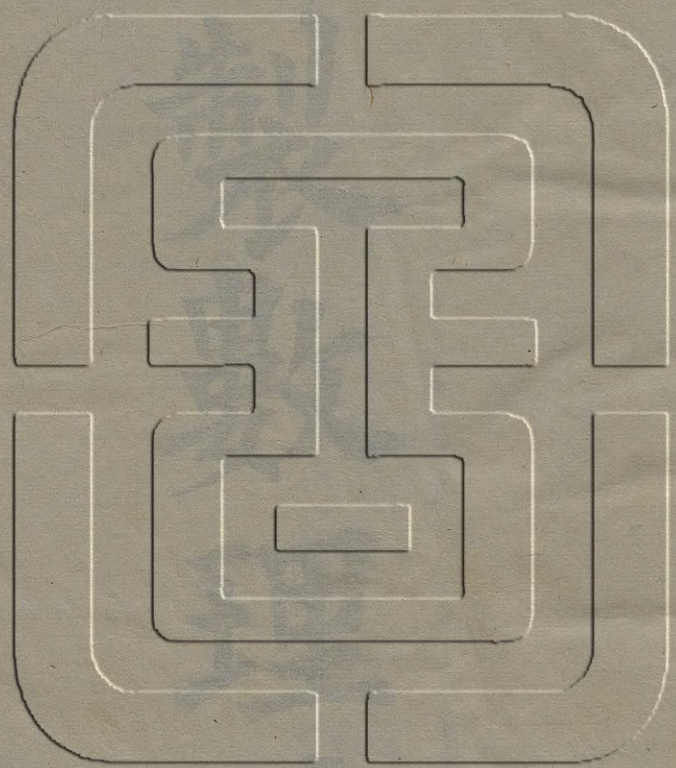


17
18
19
20
21
22
23
24
25
26
27
28
29
30
31
32
33
34
35
36
37
38
39
40
41
42
43
44
45

0064
1-1-84

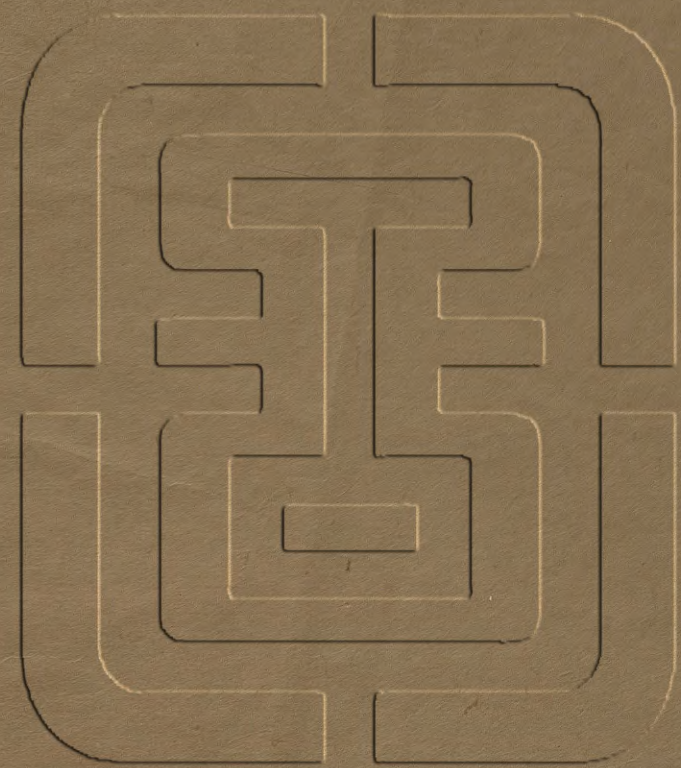
科100
847.2
21-40



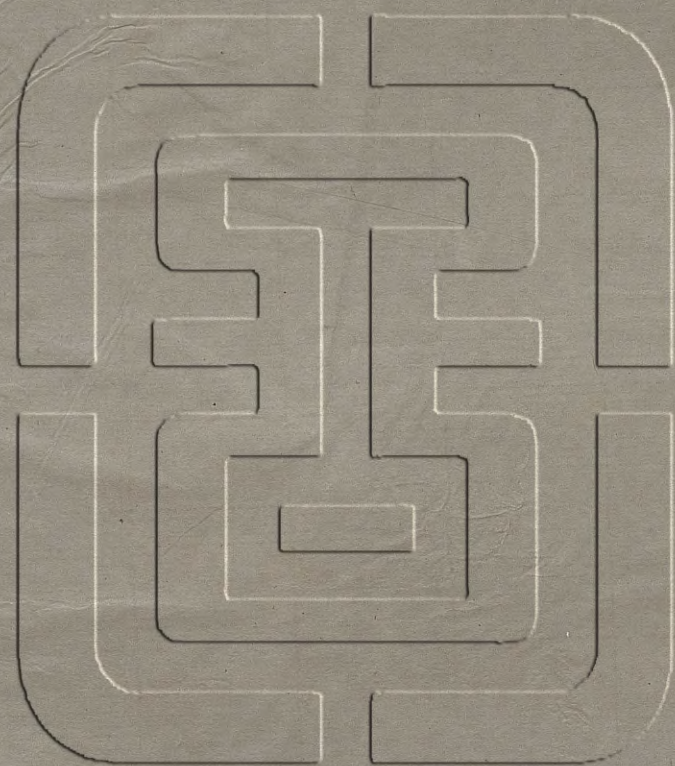


御

精
藏



御製數理精蘊



數理精蘊上下編

卷一
算學類
四七九
五十二
四十一
雜

光緒八年廣東
藩司敬謹摹刊

謹案

聖祖仁

皇帝御製數理精蘊統中西之奧窔集祿學之

大成薄海嶠人咸奉柯則欽惟

聖學淵

懿如日加年吾容贊述顯

殿本艱覲草野士

庶強鮮闕仰光緒十一年東開實學館求刻祿

法之書合肥盡尙書表百裕侍郎督撫此邦謂

宜敬刊是書以誌學耆屬觀元董其事觀元乃

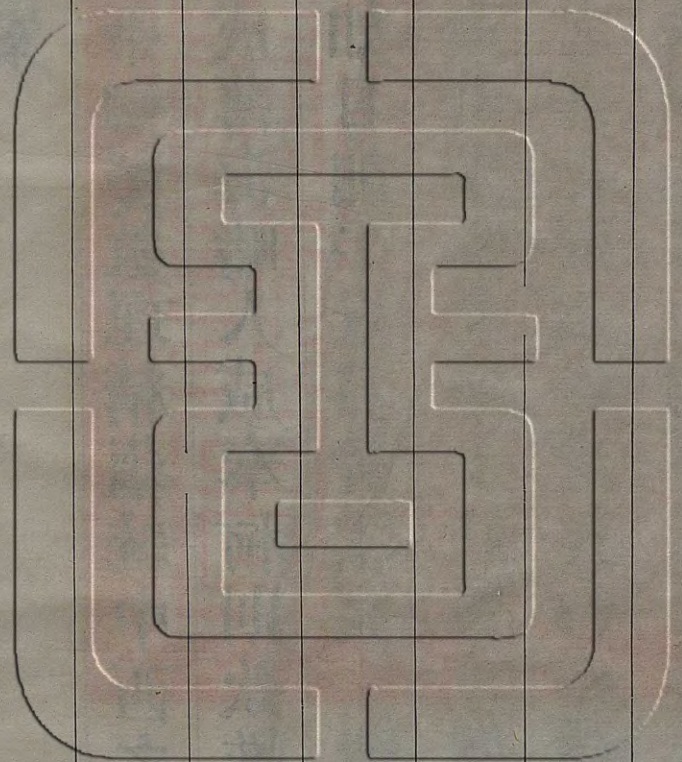
鳴正選材經始于是年四月至次年壬午十一

月糜白金五千餘奇工乃告畢刻既成謹識其



御製數理精蘊
緣起如此

二品頂帶廣東布政使司布政使臣姚覲元恭紀



重刊

御製數理精蘊在事諸臣職名

太子少保兵部尙書都察院右都御史調署直隸總督兩廣總督臣張樹聲

太子少保頭品頂帶兵部尙書都察院右都御史一等威毅伯署兩廣總督臣曾國荃

兵部侍郎都察院右副都御史廣東巡撫臣裕寬

二品頂帶廣東布政使司布政使臣姚覲元

前任廣東按察使司按察使今升廣西巡撫臣倪文蔚

二品頂帶布政使銜廣東按察使司按察使臣龔易圖

二品頂帶兩廣都轉鹽運使司鹽運使臣段起

二品頂帶兩廣都轉鹽運使司鹽運使臣周星譽

前任廣東督糧道今升安徽按察使司按察使臣孫鳳翔

按察使銜署廣東督糧道候補道臣周炳勳

鹽運使銜惠潮嘉兵備道調署廣東督糧道臣張聯桂

收掌

鹽提舉銜廣東候補通判臣王存善

總校

翰林院編修臣廖廷相

翰林院庶吉士臣于式枚

分校

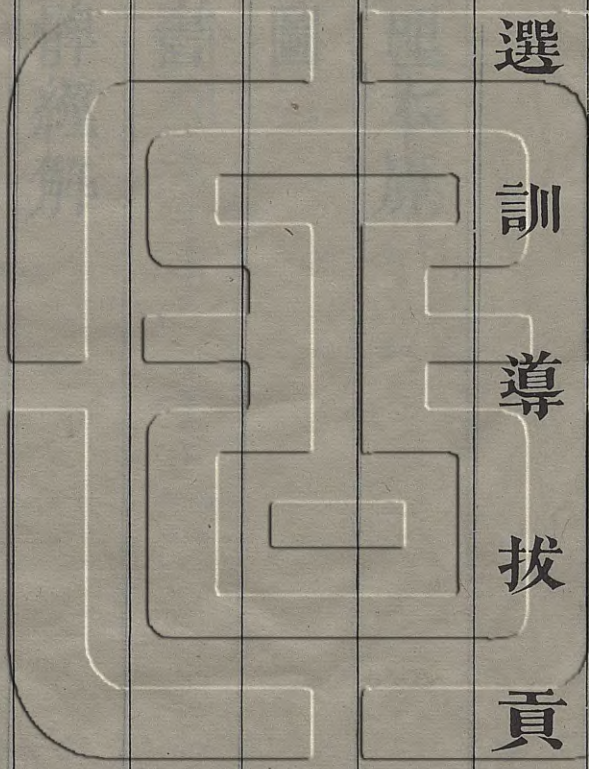
國子監典簿臣方楷

候選訓導拔貢生臣湯金銘

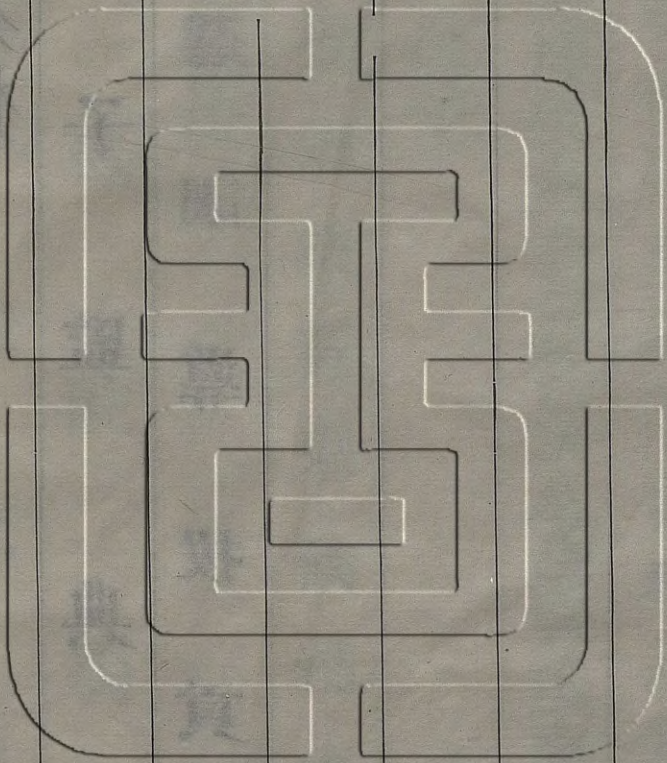
監生臣湯金鑄

生臣姚申錫

生臣余家蔭



御製數理精蘊



廣州府城西湖街
余氏富文齋印行

御製數理精蘊上編

立綱明體

卷一

數理本原

卷二

洛書

卷三

周髀經解

幾何原本一之五

御製數理精蘊上編

卷三

幾何原本六之十

卷四

幾何原本十一十二

卷五

算法原本一二

立餘四

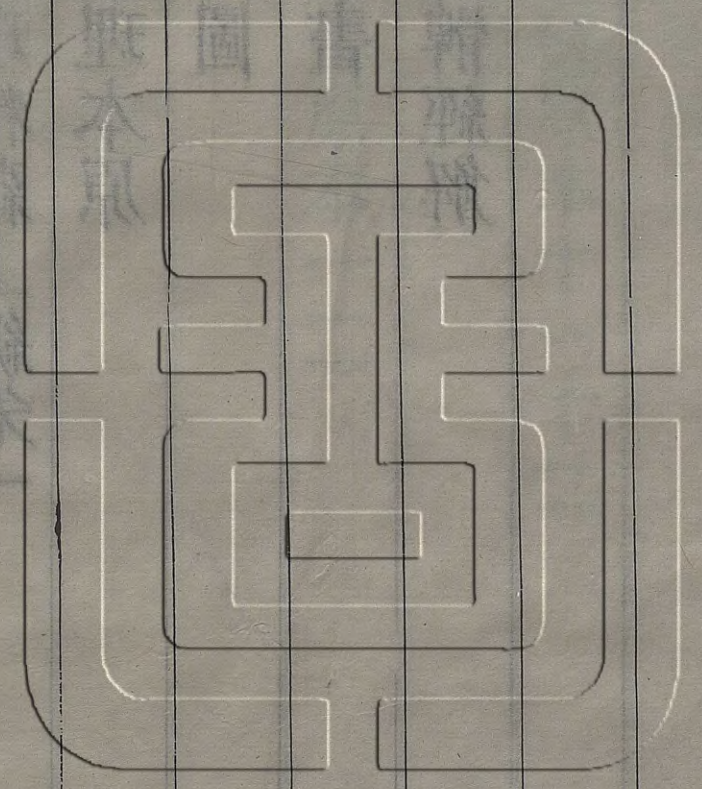
御製數理精蘊上編卷一

數理本原

河圖

洛書

周髀經解

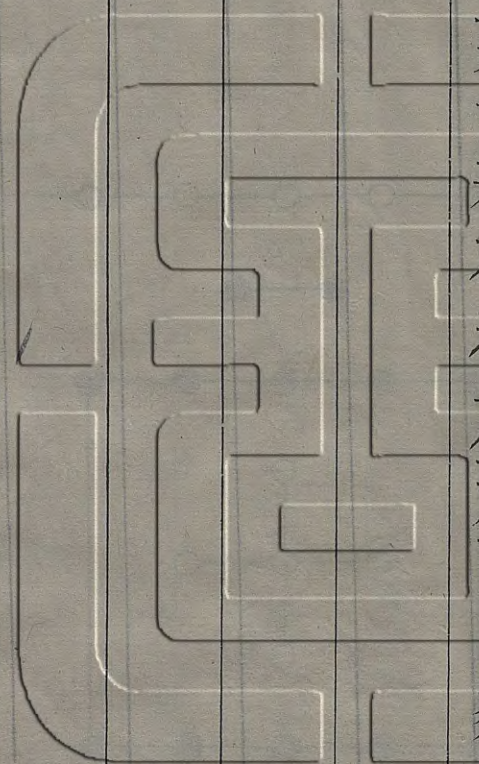


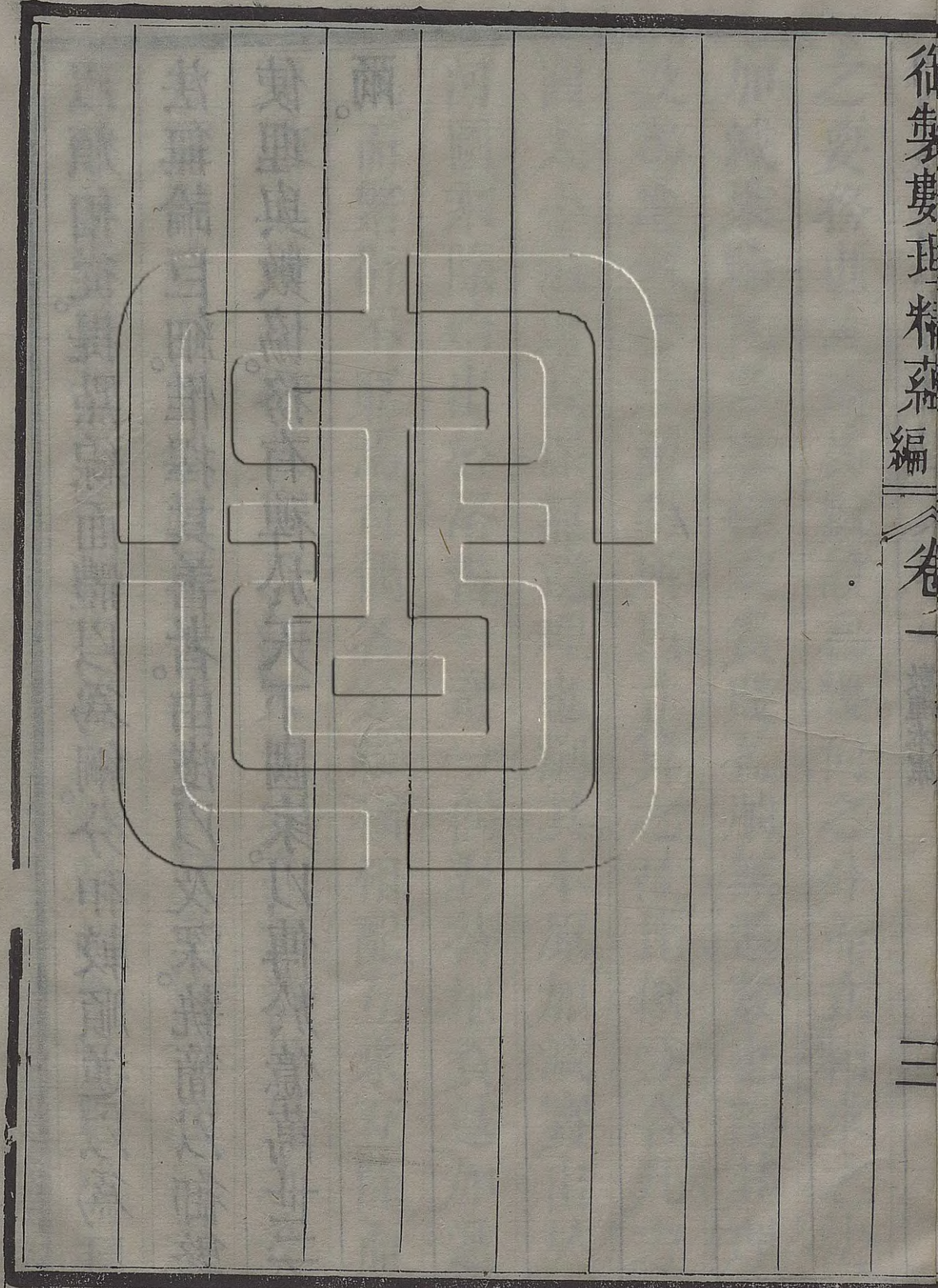
數理本原

粵稽上古。河出圖。洛出書。八卦是生。九疇是敘。數學亦於是乎肇焉。蓋圖書應天地之瑞。因聖人而始出。數學窮萬物之理。自聖人而得明也。昔黃帝命隸首作算。九章之義已啓。堯命羲和治曆。敬授人時。而歲功以成。周官以六藝教士。數居其一。周髀商高之說。可考也。秦漢而後。代不乏人。如洛下閎。張衡。劉焯。祖冲之之徒。各有著述。唐宋設明經算學科。其書頒在學宮。令博士弟子肄習。是知算數之學。實格物致知。

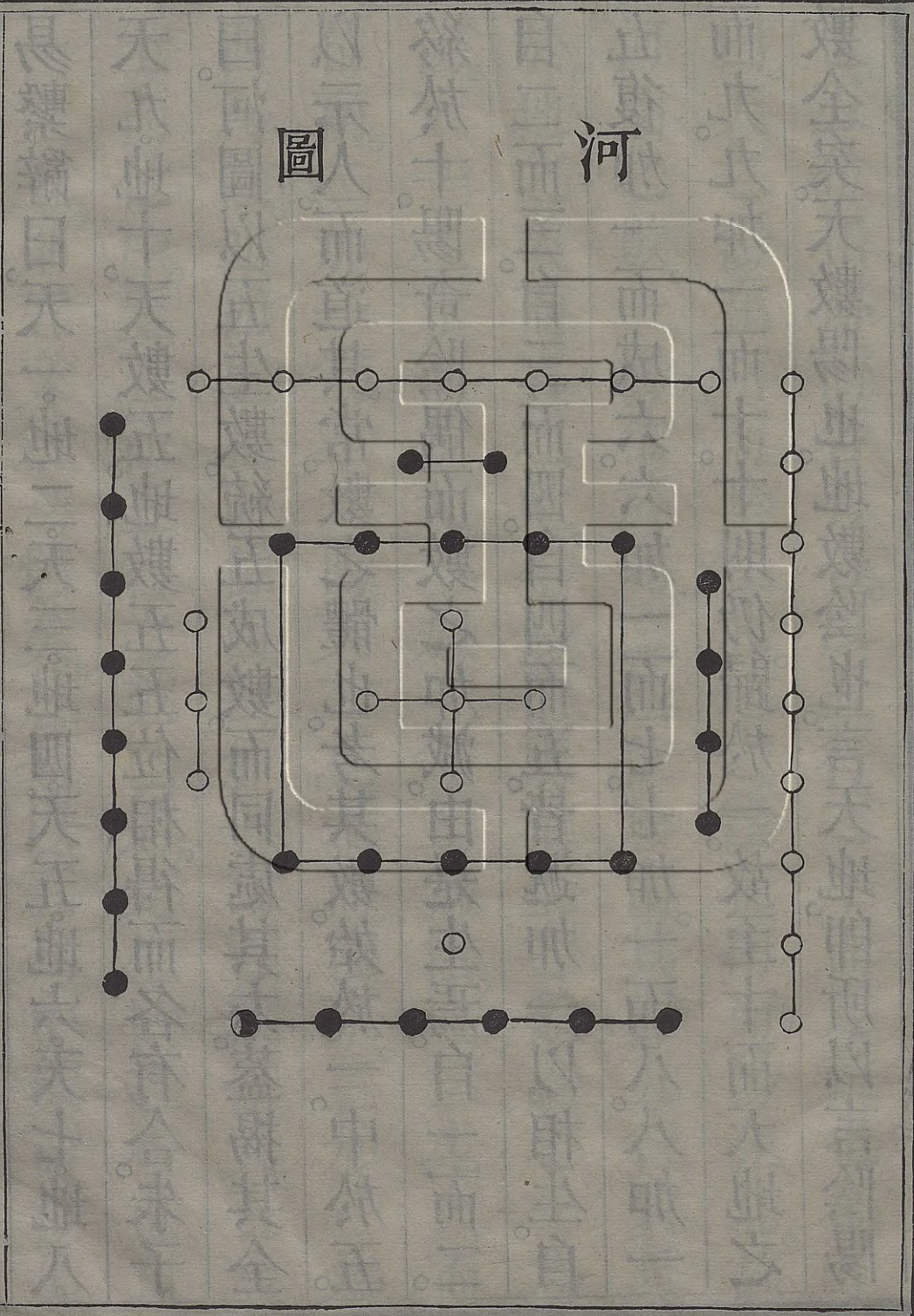
之要務也。故論其數。設爲幾何之分。而立相求之法。加減乘除。凡多寡輕重貴賤盈胸。無遺數也。論其理。設爲幾何之形。而明所以立算之故。比例分合。凡方圓大小遠近高深。無遺理也。溯其本原。加減實出於河圖。乘除始出於洛書。一奇一偶。對待相資。遞加遞減。而繁衍不窮焉。奇偶各分。縱橫相配。互乘互除。而變通不滯焉。徵其實用。測天地之高深。審日月之交會。察四時之節候。較晝夜之短長。以至協律度。同量衡。通食貨。便營作。皆賴之以爲統紀焉。今匯集成編。

以類相從。提點線面體以爲綱。分和較順逆以爲目。法無論巨細。惟擇其善者。由淺以及深。執簡以御繁。使理與數協。務有裨於天下國家。以傳於億萬世云爾。





河圖



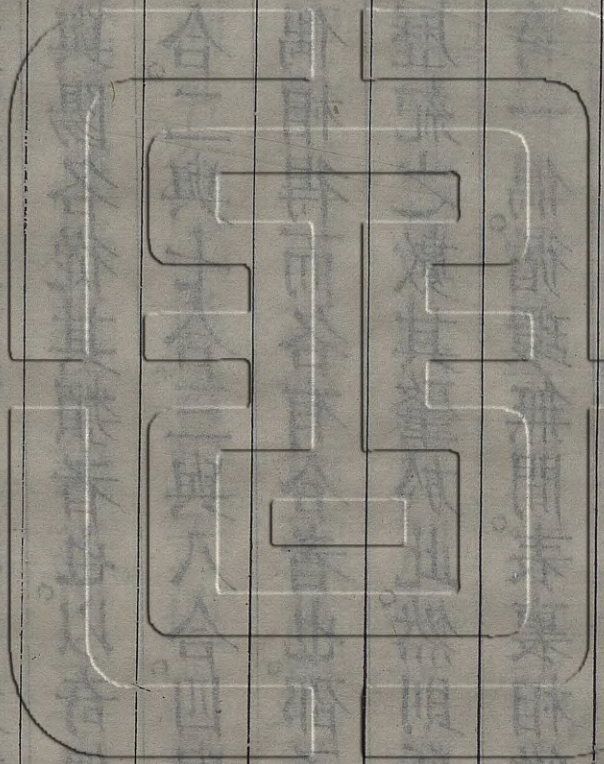
易繫辭曰。天一。地二。天三。地四。天五。地六。天七。地八。天九。地十。天數五。地數五。五位相得而各有合。朱子曰。河圖以五生數。統五成數。而同處其方。蓋揭其全。以示人。而道其常。數之體也。考其數。始於一。中於五。終於十。陽奇陰偶。而數之加減。由是生焉。自一而二。自二而三。自三而四。自四而五。皆遞加一。以相生。自五復加一而成六。六加一而七。七加一而八。八加一而九。九加一而十。十則仍歸於一。故至十而天地之數全矣。天數陽也。地數陰也。言天地。卽所以言陰陽。

也。五位相得而各有合。以五行之序而定位也。邵子曰。天之陽在南而陰在北。地之陰在南而陽在北。故河圖之數。一陽位於北。二陰位於南。其卽五行質具於地之義而言之歟。今以陰陽相生之數論之。一爲陽。天一生水而位北。一加一爲二爲陰。地二生火而位南。二加一爲三爲陽。天三生木而位東。三加一爲四爲陰。地四生金而位西。四加一爲五爲陽。天五生土而位中。至五而五行之數已周。此生數之極也。自一至五。則五又爲一體矣。於是以五爲中數。而復加

一。則爲六。六陰也。因五中數與一相加。故與一同位而屬之水焉。六加一爲七。以中數五計之。實加二。故與二同位而屬之火焉。七加一爲八。以中數五計之。實加三。故與三同位而屬之木焉。八加一爲九。以中數五計之。實加四。故與四同位而屬之金焉。九加一爲十。以中數五計之。復加五。故與五同位而屬之土焉。至十而五行之數再周。天地之數已備。此成數之極也。以陰陽運行之序論之。以五生數。統十成數位。居於中。而奇數則始於北一。次東三。次南七。次西九。

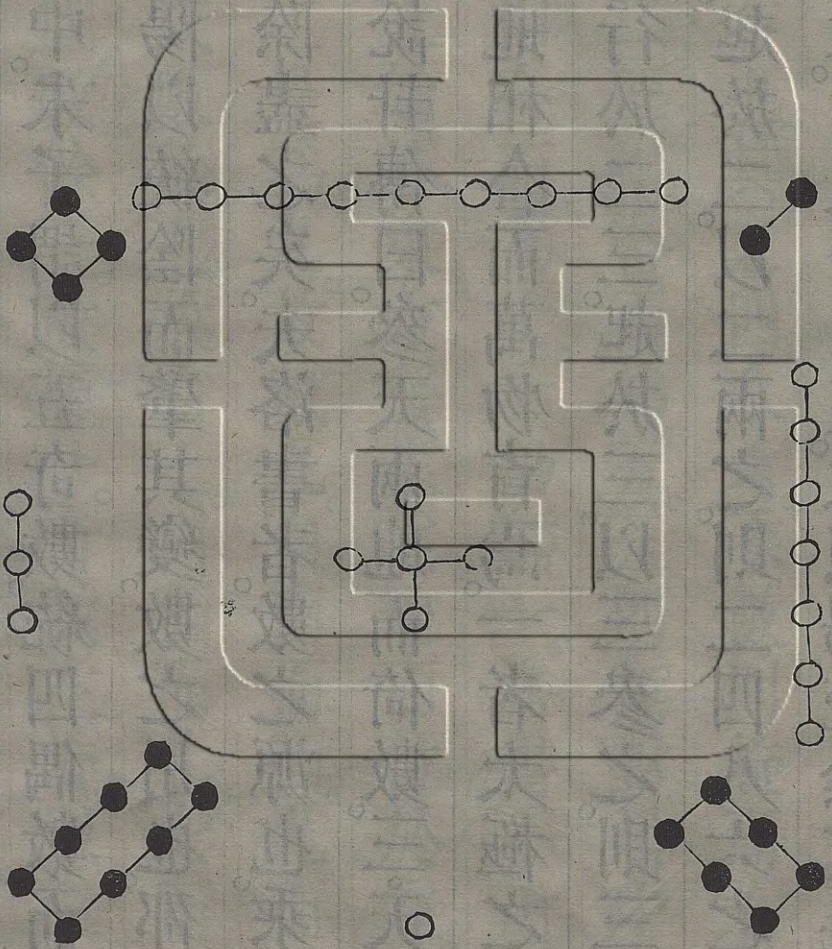
偶數則始於南二。次西四。次北六。次東八。此數之陰與陰陽與陽各從其類者也。以奇偶相得之數論之。一與六合。二與七合。三與八合。四與九合。五與十合。此又奇偶相得而各有合者也。邵子謂圓者河圖之數。又曰歷紀之數其肇於此。然則所謂數者。卽一陰一陽。一奇一偶。循環無間。表裏相維。百千萬億。總由此推之以成其變化。河圖者豈非天地自然生成之數也哉。

此卦之圖。其變少。而圖者。豈非天然。自然之
 一。變一。有一。卦。其變。非。用。亦。果。非。難。百。千。萬。變。然。由
 變。又。曰。祖。孫。之。變。其。變。如。此。然。則。其。變。皆。由。一。卦
 此。又。奇。卦。則。卦。可。合。不。合。皆。出。奇。七。階。圖。皆。四。圖。之
 一。與。六。合。二。與。十。合。三。與。八。合。四。與。六。合。五。與。十。合
 與。創。則。變。則。各。其。其。變。亦。以。奇。卦。則。奇。之。變。備。之
 奇。變。則。奇。卦。南。三。六。西。四。六。北。六。東。八。此。變。之。創



此。既。之。卦。則。天。卦。四。五。類。以。圖。絲。對。之。美。數。四。數
 變。生。無。變。一。二。兩。之。類。二。四。八。之。類。三。六。十。之。類
 此。對。變。行。公。三。六。外。三。四。三。六。之。類。三。六。十。之。類
 變。出。天。四。五。六。之。類。一。二。三。四。五。六。之。類。一。二。三。四。五。六。之。類
 坐。出。長。為。持。日。冬。天。四。五。六。之。類。一。二。三。四。五。六。之。類
 變。生。無。變。一。二。兩。之。類。二。四。八。之。類。三。六。十。之。類
 蓋。生。公。則。以。奇。卦。則。奇。之。變。備。之
 正。卦。其。中。未。有。以。奇。卦。則。奇。之。變。備。之
 奇。變。之。變。故。以。奇。卦。則。奇。之。變。備。之

洛書



洛書之數。戴九履一。左三右七。二四爲肩。八六爲足。五居其中。朱子謂以五奇數。統四偶數。而各居其所。蓋主於陽以統陰。而肇其變。數之用也。邵子曰。數學雖多。乘除盡之矣。夫洛書者。數之源也。乘除之所以生也。易說卦傳曰。參天兩地而倚數。三天數也。二地數也。天地相合而萬物育焉。一者太極之體。其數不行。故數行於二。三起於三。以三參之。則三九七一之數生焉。起於二。以二兩之。則二四八六之數生焉。其序列之位。則天居四正。取以陽統陰之義。地居四維。

取以陰從陽之義。其三九七一。乘數則旋而左。除數則返而右也。其二四八六。乘數則旋而右。除數則返而左也。二三相合而爲五。五則無對。居中者。立其體也。二五相合而爲十。十仍歸一。洛書不用者。藏其用也。是故三始於東方發生之地。而位於左。自東而南。三而三之。是爲九。故戴九。自南而西。九而三之。爲二十七。去成數餘七。故右七。自西而北。七而三之。爲二十一。去成數餘一。故履一。奇數左旋。以三參之。卽天道左行之說也。如轉而右行。以三除之。仍復其原數。

焉。二立於西南。二陰始生之地。而位於右肩。自西南而東南。二而二之。是爲四。位於左肩。自東南而東北。四而二之。爲八。位於左足。自東北而西北。八而二之。爲十六。去十餘六。位於右足。偶數右旋。以二兩之。卽地道右行之說也。如轉而左行。以二除之。仍復其原數焉。此乘除之數。見於運行者如此。若以對待者觀之。一與九對。一爲數之始。九爲數之終。互乘互除。其數不變也。二與八對。二八互乘。俱得十六。二除十六得八。八除十六仍得二。此二與八之相倚也。三與七

對。三七互乘。皆二十一。三除二十一得七。七除二十一仍得三。此三與七之相倚也。四與六對。四六互乘。皆二十四。四除二十四得六。六除二十四仍得四。此四與六之相倚也。至五爲二三之合。天地之交。陰陽之會。位於洛書之中。以建人極。配上下而爲三才。故斜直四圍。皆得十五。合之得四十。有五。爲九五之數。要之運行者其序也。對待者其位也。進退循環。縱橫交錯。總不外於乘除。故曰乘除之本原。自洛書生也。

交驗雖不似然乘創者曰乘創之本思自發書主也
 是之數分...
 四與六之...
 晉二千四四...
 二分...
 三創二十一...
 四六...

周髀經解

數學之失傳久矣。漢晉以來。所存幾如一綫。其後
 祖冲之郭守敬輩。殫心象數。立密率消長之法。以
 為習算入門之規。然其法以有盡度無盡。止言天
 行。未及地體。是以測之有變更。度之多盈縮。蓋有
 未盡之餘蘊也。明萬厯間。西洋人始入中土。其中
 一二習算數者。如利瑪竇穆尼閣等。著為幾何原
 本。同文算指諸書。大體雖具。實未闡明理數之精
 微。及我朝定鼎以來。遠人慕化。至者漸多。有湯若

望南懷仁安多閔明我相繼治理麻法間明算學而度數之理漸加詳備然詢其所自皆云本中土所流傳粵稽古聖堯之欽明舜之濬哲麻象授時閏餘定歲璿璣玉衡以齊七政推步之學孰大於是至於三代盛時聲教四訖重譯向風則書籍流傳於海外者殆不一矣周末疇人子弟失官分散嗣經秦火中原之典章既多缺佚而海外之支流反得真傳此西學之所以有本也古算書存者獨有周髀周公商高問答其本文也榮方陳子以下

所推衍也而漢張衡蔡邕以爲術數雖存考驗天狀多所違失按榮方陳子始言晷度衡邕所疑或在於是若周髀本文辭簡而意該理精而用博實言數者所不能外其圓方矩度之規推測分合之用莫不與西法相爲表裏然則商高一篇誠成周六藝之遺文而非後人所能假託也舊註義多舛訛今悉詳正弁於算書之首以明數學之宗使學者知中外本無二理焉爾

昔者周公問於商高曰竊聞乎大夫善數也請問古

者包犧立周天_曆度。

周天_曆度者。分周天三百六十度。為推求_曆日之用也。按通鑑載包犧作甲_曆。天干地支相配。六甲一轉。天度一周。年以是紀。而歲功成。月以是紀。而朔望定。晝夜以是紀。而時日分。易大傳言包犧仰以觀於天文。俯以察於地理。其觀察之時。必有度數。以紀其法象。則_曆度始於包犧無疑矣。

夫天不可階而升。地不可將尺寸而度。請問數從安出。

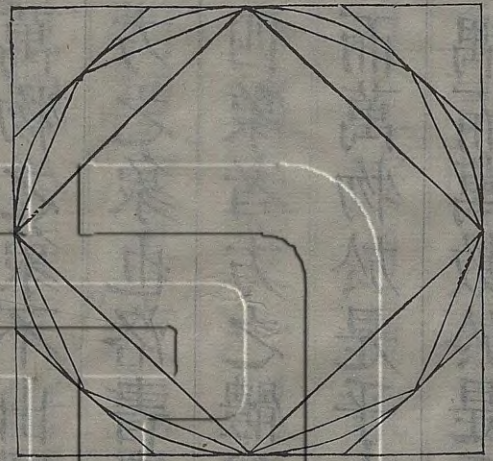
天之高明。地之博厚。非人力所能及。其曆度之數。不知從何而得也。

商高曰。數之法出於圓方。

萬物之象。不出圓方。萬象之數。不離圓方。河圖者。方之象也。洛書者。圓之象也。太極者。圓之體。奇也。四象者。方之體。偶也。奇數。天也。偶數。地也。有天地而萬物於是乎生。有圓方而萬象於是乎定。有奇偶而萬數於是乎立矣。

圓出於方。

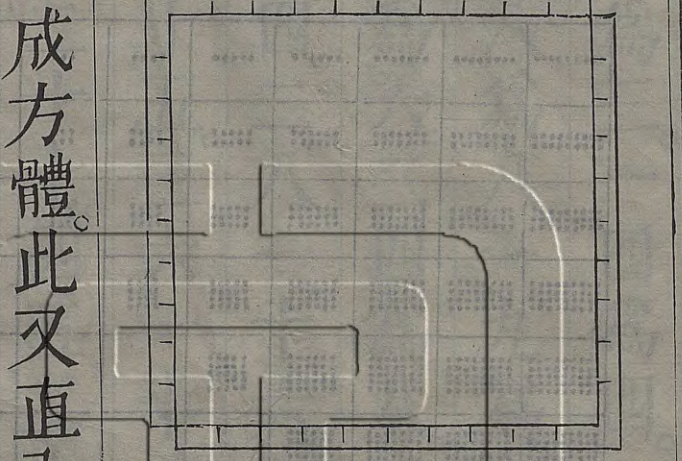
以數而論。出於圓方。以圓方而論。則圓出於方。蓋方易度而圓難測。方有盡而圓無盡。故推圓者以方度之。以有盡而度無盡也。是以圓周內弦外切。屢求勾股。為無數多邊形。以切近圓界。將合而為一。而圓



周始得。故曰圓出於方也。

方出於矩。

孟子曰。不以規矩。不能成方圓。夫規所以成圓。而



矩所以成方也。故凡方形必出於二矩相合。如矩之二股均者。合之即為正方。矩之二股一大一小者。合之則為長方。蓋因矩之為形。其角直。其線正。所以能成方體。此文直內方外之理。故曰方出於矩也。

矩出於九九八十一。

度圓方者。遞歸於矩。而矩之形。總不外乎二數相乘。九九者數之終。而一一乃數之始。言九九而不

及他數者。以九九之內。他數俱該也。是以一一為

一。二二為四。三三為

九。四四為一十六。五

五為二十五。六六為

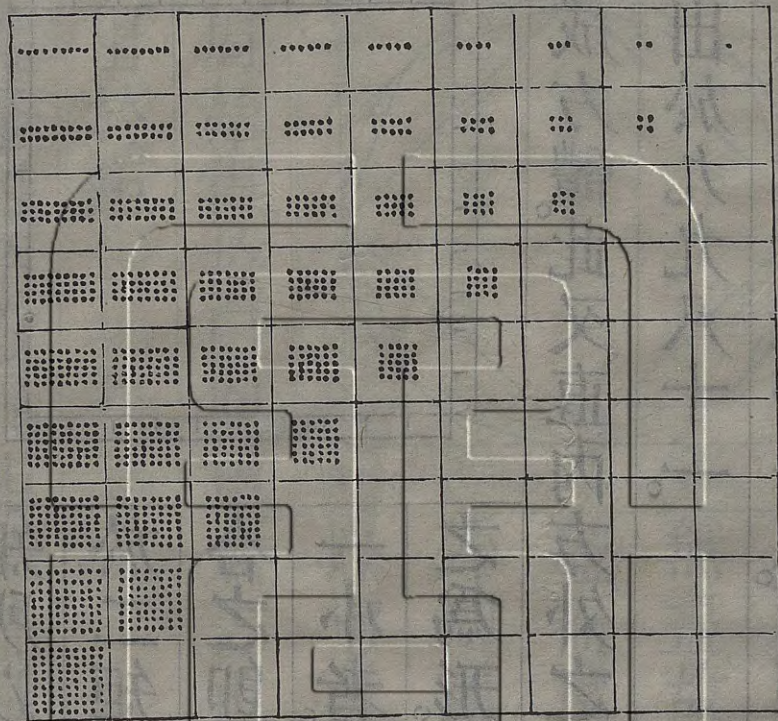
三十六。七七為四十

九。八八為六十四。九

九為八十一。乃矩之

二股均平所成之正

方也。一二為二。一三



為三。一四為四。一五為五。一六為六。一七為七。一

八為八。一九為九。形雖未方。而其理猶存也。二三

為六。二四為八。二五為十。二六為十二。二七為十

四。二八為十六。二九為十八。三四為十二。三五為

十五。三六為十八。三七為二十一。三八為二十四。三九

為二十七。四五為二十。四六為二十四。四七為二十八。四八

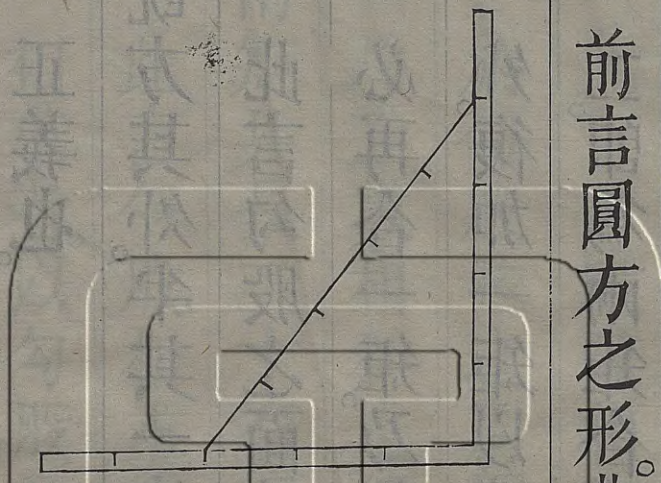
為三十二。四九為三十六。五六為三十。五七為三十五。五八

為四十。五九為四十五。六七為四十二。六八為四十八。六九

為五十四。七八為五十六。七九為六十三。八九為七十二。乃

行集數理精義編卷一
矩之一股小一股大所成之長方也。至於一百之類。雖為正方形。乃十之相乘。十則仍歸於一也。又如八十四。九十六之類。乃六七四十二。六八四十八之倍。不得自立為數之本。又或十一。十三。十七。十九之類。十一為二五十一之奇。十三為二六一十二之奇。十七為四四一十六之奇。不得成正方。亦不得成長方。故不入九九之數也。是以九九之數。為方之本。而方之形。必合以矩。故曰矩出於九九八十一也。

故折矩以為勾廣三股修四徑隅五。



前言圓方之形。此言勾股生成之正數也。以二矩合之。既為方形。今以一矩折之。則為一方之兩邊。是以折矩之橫者為勾之廣。折矩之縱者為股之長。於勾股之末。以斜弦連之。是為徑隅。徑直也。隅角也。言

自兩角相對直連之也。勾之廣必三。股之修必四。而徑隅始得五。此乃自然生成之正分也。易曰。參

天兩地而倚數。天數一。參之則爲三。地數二。兩之則爲四。三二合之則爲五。此又勾三股四弦五之正義也。

既方其外。半其一矩。

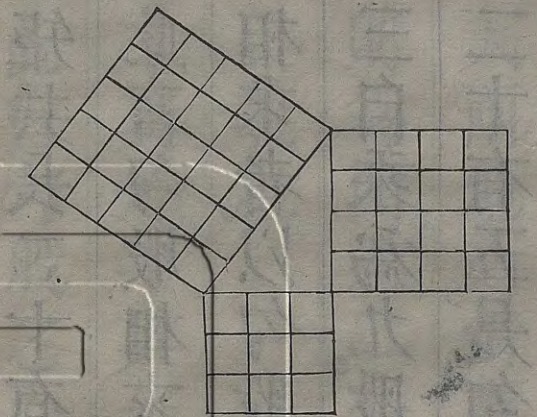
此言勾股之面積也。勾股以弦連之。不得爲方形。必再合一矩。乃爲一長方。所謂方其外者。言弦之外。復加一矩以成方也。勾三股四相乘。得一十有二。卽爲兩矩合成之數。半之得六。乃勾股之面積。所謂半其一矩者也。

環而共盤。得成三四五。

此言勾股弦相和之數也。環而共盤者。環繞盤旋於勾股弦之周圍。得成三四五。共之爲一十有二。乃三數相和之總數也。

兩矩共長二十有五。是爲積矩。

此言勾股相求之法也。兩矩者。勾與股也。其所以相求者。以勾股弦各面積。彼此加減以立法也。勾三自乘爲九。股四自乘爲一十六。合而計之。爲二十五。是勾股各自乘之積相併而與弦自乘



之積等。故曰積矩也。弦之自乘積內。減勾自乘之積。得股自乘之積。弦之自乘積內。減股自乘之積。得勾自乘之積。故為勾股弦相求之法也。

故禹之所以治天下者。此數之所由生也。

言禹之平成之功。昭垂萬古。揆厥所以奏績者。必

藉勾股以審高下。始得順水之性而告厥成功也。

然則禹之所以治水者。非此勾股之數所由生乎。

周公曰。大哉言數。請問用矩之道。

商高曰。平矩以正繩。

此言用矩立法。必以正且直也。平矩以正繩。有兩

義。平置其矩。使矩之角直。以此直角之一股。或橫

或平。橫以度遠。平以度高。復自一股引繩以度其分。則此分

為我所知。故以所知。推所不知。此繩引長時。必使

與直角對正。不論其分之幾何。引之又必令直。方

能得測度之準。故為平矩以正繩。又平者均平整

齊之謂。用矩之道。矩之角正。即直角之說也。然後二股得

直以之測高測遠。乃得度其大小之分。此矩既正。而所測之度亦正矣。孟子曰。規矩準繩。以為方圓平直。繩者即準之之意。規矩所以度圓方。而準繩所以考平直。故準之以平。繩之以直。始得立法之精微。故曰平矩以正繩也。

偃矩以望高。

此用矩測高之法也。偃者仰也。仰矩方可測高。矩之一股植立在前。一股定平在下。然後比例推之。蓋平股與立股之比。即所知之遠與所測之高之

比也。故仰測之而得高。

覆矩以測深。

此用矩測深之法也。覆者俯也。俯矩方可測深。矩之一股立者在前。一股平者在上。平股與立股之比。即所知之遠與所測之深之比也。故俯測之而得深。

臥矩以知遠。

此用矩測遠之法也。臥者平也。平矩方可測遠。以矩之一股為橫向內。一股為縱向前。是以橫與縱

之比。卽所知之度與所求之遠之比也。故平測之而得遠。

環矩以爲圓。

此用矩爲圓之法也。以矩之一端爲樞。一端旋轉爲圓。則成一圓。環矩者卽旋規之說也。

合矩以爲方。

此用矩爲方之法也。矩二股也。兩矩相合。乃成一。方。卽前方出於矩之說也。

方屬地。圓屬天。天圓地方。

前言用矩以測高深廣遠。復用矩以爲圓方。此以圓方屬之天地者。非以形體言。蓋以陰陽動靜之理言也。樂記云。著不息者天也。著不動者地也。不息故運而不積。圓之象也。不動故靜而有常。方之理也。且圓之數無盡。而方之數有盡。天不可階而升。測天者恆於地上度之。是仍以方度圓也。凡數之不盡者必奇。數之可盡者必偶。是以陽爲奇。陰爲偶。此方圓之理數。所以屬乎天地也。方數爲典。以方出圓。

典則也。言圓之數奇零不盡不可為則。故惟方數可為典則。以方出圓者。以方之形度圓之分。從方數中生出圓數。即前圓出於方之說也。如圓徑求積。則以徑自乘之。為正方形。而以方率圓率比例推之。即得圓積。是皆以方出圓之理也。不可謂而笠以寫天。天青黑。地黃赤。天數之為笠也。青黑為表。丹黃為裏。以象天地之位。

此即儀象以表天地之形色也。笠形圓。故以象天。寫象也。青黑天之色。黃赤地之色。天數之為笠形。

則以青黑為表。丹黃為裏。以象天地之位。蓋取天包地之象也。

是故知地者智。知天者聖。智出於勾。勾出於矩。夫矩之於數。其裁制萬物。惟所為耳。

天地之高深廣遠。非聖智不能知。然聖智非由理之自然。亦不能無所憑藉而知也。故明勾股之數。即可以知地而為智。知地之數。即可因地以知天而為聖矣。故曰智出於勾也。然勾股之形。又賴矩以成。故矩為勾股之本。而天地之高深廣遠。皆賴

矩以測。况萬物之大小巨細。豈能外於矩之度分乎。故矩之於數。其裁制萬物。惟其所為。而無不可也。

周公曰。善哉。

以周公之聖。而與之曰善哉。則其得數之本。立法之妙。可謂至矣。至是而周髀之義盡矣。

臣湯金銘湯金鑄恭校

御製數理精蘊上編卷二

幾何原本一

幾何原本二

幾何原本三

幾何原本四

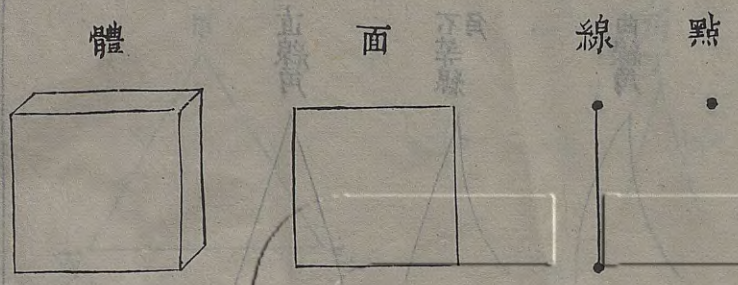
幾何原本五

幾何原本一	幾何原本二	幾何原本三	幾何原本四	幾何原本五	幾何原本六	幾何原本七	幾何原本八	幾何原本九	幾何原本十
-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------

幾何原本一

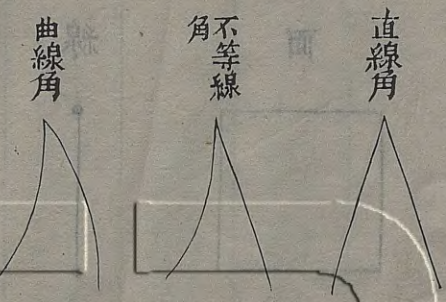
第一

凡論數度必始於一點。自點引之而為線。自線廣之而為面。自面積之而為體。是名三大綱。是以有長而無闊者謂之線。有長與闊而無厚者謂之面。長與闊厚俱全者謂之體。惟點無長闊厚薄。其間不能容分。不可以數度。然線之兩端即點。而線面體皆由此生。點雖不入於



數實為眾數之本。

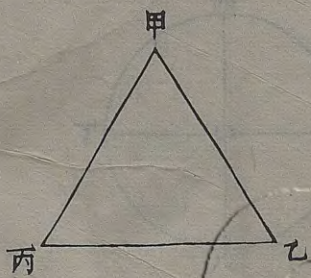
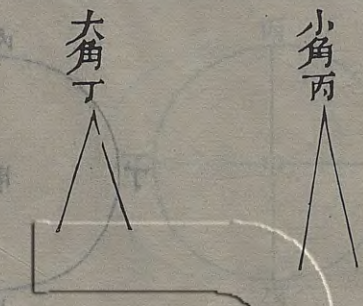
第二



線有直曲兩種。其二線之一端相合。一端漸離。必成一角。二線若俱直者。謂之直線角。一線直一線曲者。謂之不等線角。二線俱曲者。謂之曲線角。

第三

凡角之大小。皆在於角空之寬狹。出角之二線。即如規之兩股。漸漸張去。自然



開寬。是以命角不論線之長短。止看角之大小。如丙角兩線雖長。其開股之空狹。遂為小角。若丁角兩線雖短。其開股之空寬。遂成大角矣。

第四

凡命角必用三字為記。如甲乙丙三角。指甲角則云乙甲丙角。指乙角則云甲乙丙角。指丙角則云甲丙乙角。是也。亦有單舉一字者。則其所舉之一字。即

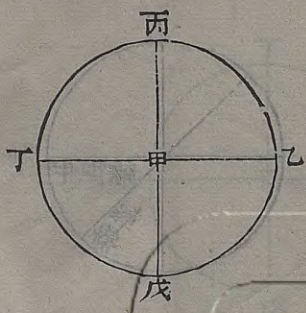
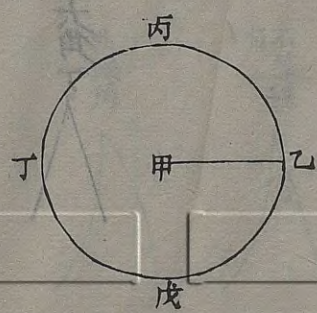
是所指之角也。

如單言甲角乙角丙角之類。

第五

凡有一線。以此線之一端為樞。復以此線之一端為界。旋轉一周。即成一圓。如甲乙一線。以甲端為樞。乙端為界。旋轉復至乙處。即成乙丙丁戊之圓。此圓線謂之圓界。圓界內所積之面度。謂之圓面。

第六



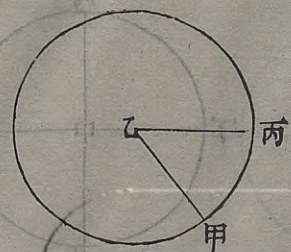
凡圓界不拘長短。其分界之所。即為弧線。如乙丙丁戊之圓。丙至丁。丁至戊。俱為弧線。因其形似弧。故名之。
第七
凡圓。自一界過圓心。至相對之界。畫一直線。將一圓為兩平分。則為圓徑。如乙丙丁戊之圓。以甲為心。自圓界乙處過甲心至丁。或自圓界丙處過甲心至戊。畫乙甲丁及丙甲戊線。皆為圓徑也。



第八 凡自圓心至圓界作幾何線皆謂之輻線其度俱相等因平分全徑之半故又謂之半徑線。

第九

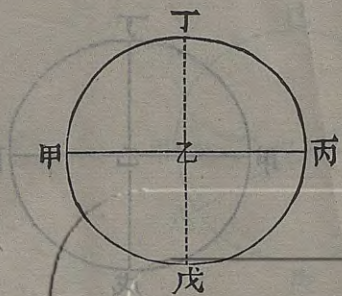
凡圓界皆以所對之角而命其弧而角又以所對之弧而命其度蓋角度俱在圓界而圓界為角度之規也如乙角為心甲丙為界則乙角相對之界即甲丙

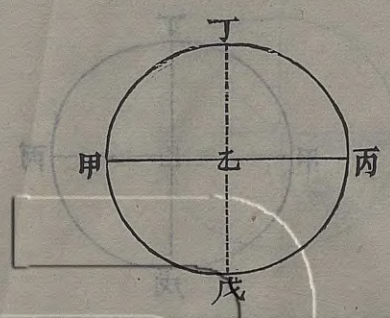


弧而甲丙弧即乙角之度也。

第十

凡角相對之弧得圓界四分之一者此角必直故謂之直角如甲丁丙戊之圓甲乙丙之徑自中心乙至圓界丁畫一半徑將半圓界又分為兩平分則成甲乙丁丙乙丁之二角此二角各得圓界四分之一則此二角為直角也若自丁界過乙心至圓界戊處畫一直線又成

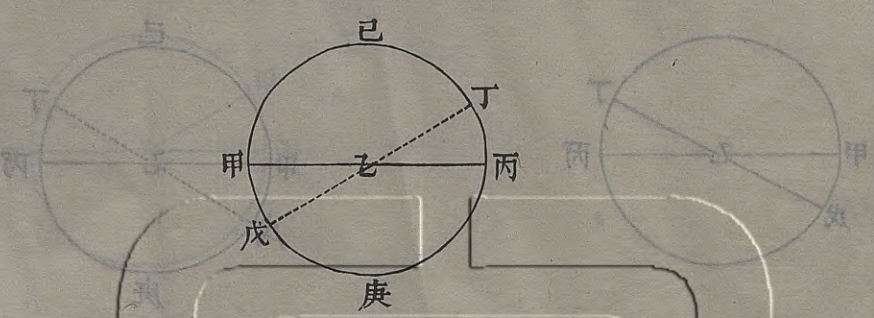




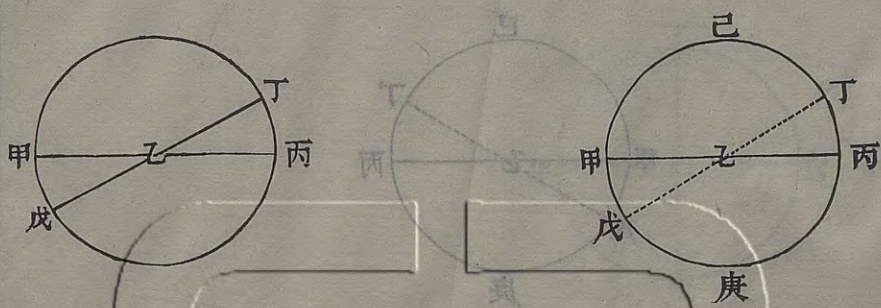
丁乙戊之徑。復得甲乙戊。丙乙戊。兩相等之直角矣。故凡畫一直線。交於別線。其所成之角若直。此線謂之垂線。蓋因平分圓界為四。其四弧相對之四角。必相等。而皆為直角。則其二徑相交。必互為垂線可知矣。

第十一

凡角相對之弧。不足圓界四分之一者。謂之銳角。若過四分之一者。謂之鈍角。



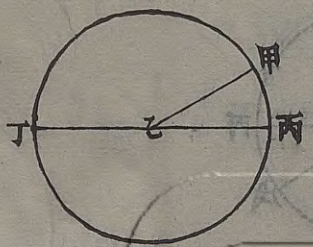
故自圓徑中心。復畫一輻線。而不平分半圓之界。則成一銳角。一鈍角。如甲己丙庚之圓。於甲乙丙之徑。自乙心至甲己丙之半圓界。不兩平分。於丁處畫一輻線。遂成丙乙丁一銳角。甲乙丁一鈍角。再將丁乙線引於相對圓界戊處。畫一丁乙戊徑線。復成甲乙戊一銳角。丙乙戊一鈍角。合前二角。總為四角矣。故凡二角兩尖相對。謂之對角。二角兩尖



相並。謂之並角。如甲乙戊丙乙丁二角之兩尖相對。即謂之對角。丙乙戊甲乙丁二角之兩尖亦相對。故亦謂之對角也。如丙乙戊甲乙戊之二角。兩尖相並。而同出一線。則謂之並角矣。

第十二

凡一圓內設兩角。此一角相對之弧。與彼一角相對之弧。其限若等。則此二角之度亦必相等。如甲丁丙戊之圓。丙乙



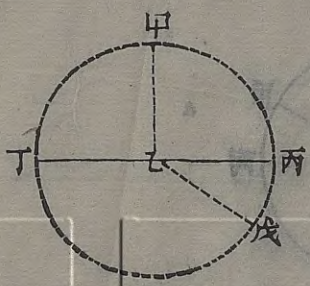
丁角相對之丙丁弧。甲乙戊角相對之甲戊弧。其限相等。故丙乙丁角。甲乙戊角。其度亦相等也。

第十三

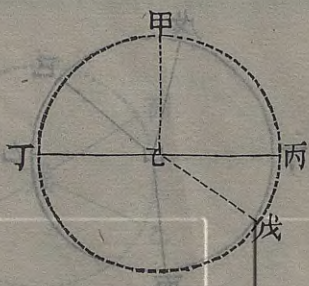
凡有一圓。其徑線之中心。作相並之二角。此二角之度。必與二直角等。如甲丙丁之圓。自丁乙丙徑線之中心。作甲乙丙甲乙丁之相並二角。此二角之度。必與二直角相等也。

第十四

凡一直線交於他直線其所成之二角或為二直角或與二直角等如丙乙丁直線上畫一甲乙直線至於乙處即成甲乙丙甲乙丁之二直角也又或於丙乙丁直線上畫一戊乙直線亦至乙處復成丙乙戊一銳角丁乙戊一鈍角此二角必與二直角相等也再申明之以乙為心丙為界旋轉畫一圓則丙乙丁

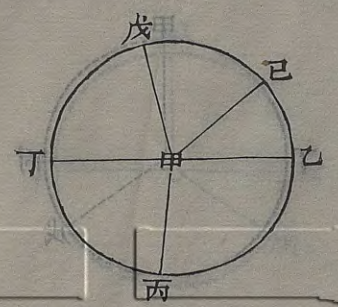


線為圓之徑線必將圓界平分為兩平分矣此丙乙丁徑線之中心所畫之甲乙線又將半圓界平分為兩平分則此二角各相對之弧皆為一圓界四分之一而各為一直角可知矣又如戊乙線將半圓界雖不兩平分而成一銳角一鈍角然所成二角仍在丙乙丁徑線所限半圓界度為全圓界四分之一故與二直角相等也



第十五

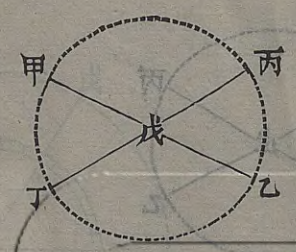
凡自一心畫為衆線其所成之角雖多止與四直角相等。如自甲心至乙至丙至丁至戊至己畫衆輻線雖成衆角其各角所函之度必與四直角等。蓋因甲點為心衆輻線皆立一圓之界故衆角所對之弧總不越一圓之全度。前言一圓之界僅有四直角之弧線茲角雖多亦未嘗出一圓之界。故曰衆角雖多止

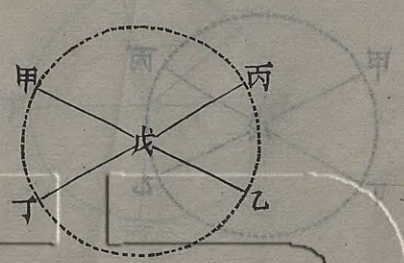


與四直角等也。

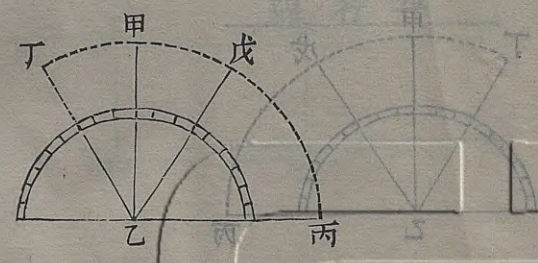
第十六

凡兩直線相交所成二對角之度必俱相等。如甲乙丙丁二線交於戊處成甲戊丁丙戊乙之二對角。斯二角之度必俱相等。今以二線相交之處為心旋轉畫一全圓則甲乙丙丁二線俱為此圓之徑線矣。惟其俱為徑線故將一圓為兩平分而甲戊乙之徑線為甲丙乙之





半圓界。丙戊丁之徑線。為丙甲丁之半圓界。因兩半圓界。俱係全圓徑線。故相交成對角。其度必等。茲將甲丙乙之半圓界。減去甲丙弧。即餘丙乙弧。丙甲丁之半圓界。亦減去丙甲弧。又餘甲丁弧。凡兩相等之弧。減去一段相等之弧。所餘之弧必相等。今甲丙乙。丙甲丁。二半圓之界內。減去甲丙。丙甲。同體之弧。則所餘丙乙。甲丁。相對之弧。亦必相等矣。



此二弧之度既俱相等。則所對之甲戊丁。丙戊乙。二角之度。亦必相等可知矣。其餘甲戊丙。丁戊乙。亦與甲戊丁。丙戊乙。同理。故其所對之角度。亦必相等也。

第十七

凡大小圓界。俱定為三百六十度。而一度定為六十分。一分定為六十秒。一秒定為六十微。一微定為六十纖。夫圓界定為三百六十度者。取其數無奇零。便

於布算。即徵之經傳。亦皆符合也。易曰。凡三百六十。

百有六十。當期之日。邵子曰。三百六十。中分之得一百八十。為二至二分相去

之數。度下皆以六十起數者。以三百六十

乃六六所成。以六十度之。可得整數也。

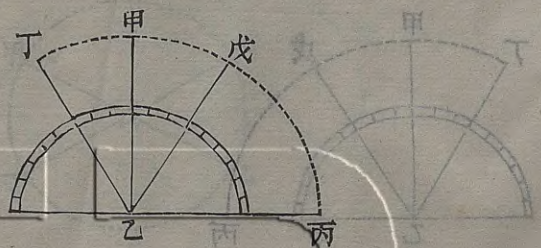
凡有度之圓界。可度角分之大小。如甲

乙丙角。欲求其度。則以有度之圓心。置

於乙角。察乙丙乙甲之相離。可以容圓

界之幾度。如容九十度。即是甲乙丙直

角。何以知為直角。因九十度為全圓三百六十度之四分之一。前言凡角得



平行線

圓界四分之一者為直角。故知其為直角也。若過九十度者。

為丁乙丙鈍角。不足九十度者。為丙乙

戊銳角。觀此三角之度。其餘可類推矣。

第十八

凡二線之間。寬狹相離之分俱等。則此

二線謂之平行線也。

第十九

欲求平行線之間。相距幾何。則自上二

線不拘何處至下一線。畫二縱線。則此

二線為相距度分也。如甲乙丙丁二線平行。自上線甲乙二處。至下線丙丁二處。畫二縱線。則此二線為相等線。其度必等。然則甲乙丙丁相對之間。其相距之遠近。不已見耶。

第二十

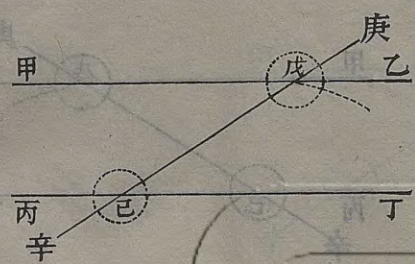
平行二線。雖引至於無窮。其端必不能相合。蓋二線相離之度。各處遠近俱為相等故也。如甲乙丙丁平行二線。隨意

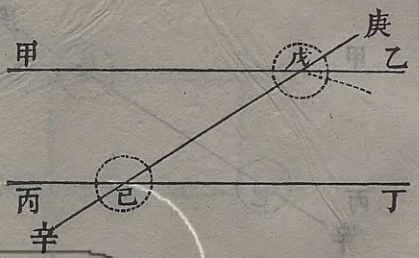


引於戊己。又自戊至己。畫一縱線。其度亦等於甲丙乙丁二縱線。故曰平行線。雖引至於無窮。其端終不能相合也。

第二十一

凡平行二線。或縱或斜。畫一直線。交加於上。則平行線上所成之二角。必俱相等。如甲乙丙丁二平行線上。畫一庚辛斜線。其甲乙線之庚戊乙角。丙丁線之戊己丁角。皆相等。假使庚戊乙角。大於

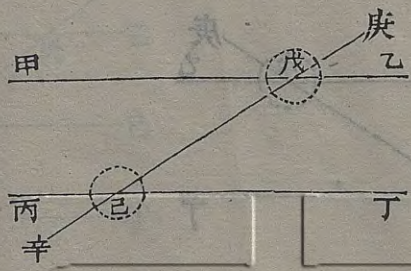




戊己丁角。則戊乙線必離於庚戊線而向丙丁線。甲乙丙丁二線不平行矣。若甲乙丙丁二線。豪無偏斜。又得庚辛直線。相變成二角。則此二角必然相等矣。

第二十二

凡平行二線上。畫一斜線。則成八角。此八角度有相等者。必是對角。或內外角。如庚戊乙甲戊己二角。其度相等。因其兩尖相對。謂之對角。庚戊乙戊己丁二

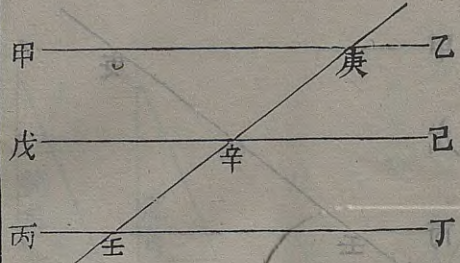
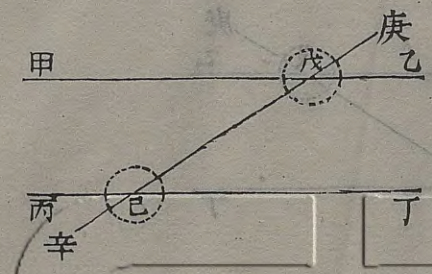


角。其度亦相等。因其在平行二線之內。故謂之內外角。甲戊己戊己丁二角。其度亦相等。因其俱在平行二線之內。而立斜線之左右。故又謂之相對錯角。又如甲戊庚庚戊乙二角。其度不等。因其立一線之界。謂之並角。庚戊甲丁己辛二角。其度亦相等。因其俱在平行二線之外。故謂之外角。乙戊己丙己戊二角。其度亦相等。因其又俱在平行二線

之內。故又謂之內角。總之二平行線上。交以斜線。所成八角。必兩兩相等也。

第二十三

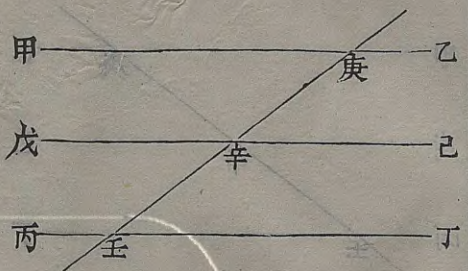
平行線上一邊之二內角。或一邊之二外角。與二直角相等。如丁己戊角。與丙己戊角為並角。則此二並角。與二直角等。前第十四節云。凡一直線。交於他直線。所成二角。必與二直角相等。則此二角同出於一直線。為並角。故亦與二直



角等矣。又如甲戊庚。庚戊乙。雖為外角。而亦為並角。此二並角。亦與二直角等也。他如甲戊己。乙戊己。二並角。丙己辛。丁己辛。二並角。亦與二直角等也。

第二十四

有平行二線。復與一線相平行者。此三線互相為平行線也。如甲乙。丙丁。二線之間。有戊己線與之平行。則甲乙。丙丁。戊己。三線互相為平行線也。照前第二



十一節。在此三線上。畫一庚辛壬斜線。則所成之庚辛二角必相等。而辛壬二角亦必等也。三線之與斜線相交所成之角。既各相等。則三線互為平行可知矣。

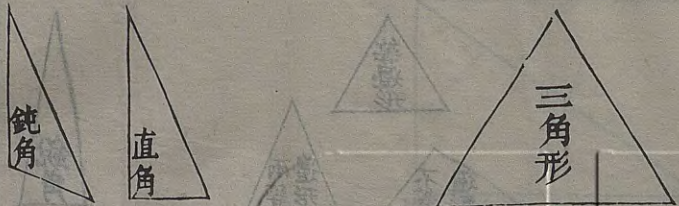
幾何原本二

第一

凡各種界所成。俱謂之形。其直界所成者為直界形。曲界所成者為曲界形。凡直界所成各形。未有少於三角形界者。故三角形為諸形之首。

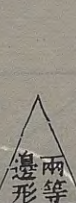
第二

凡三角形。一角直者為直角三角形。一角鈍者為鈍角三角形。三角俱銳者為



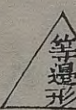


銳角三角形。



第三

凡三角形其三邊線度等者。為等邊三



角形。兩邊線度等者。為兩等邊三



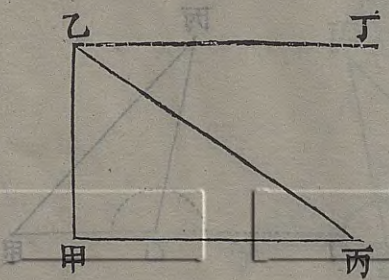
角形。三邊線度俱不等者。為不等邊三

第四

凡三角形之三角度相併。必與二直

角度等。如甲乙丙三角形。自乙角與甲丙

線平行。畫一乙丁線。則成丙乙丁角。與



丙角為二尖交錯之二角。其度必相等。

見首卷第二十二節。而甲角與甲乙丁角。為甲丙

乙丁二平行線內一邊之二內角。與二

直角等。見首卷第二十三節。今於甲乙丁直角內。

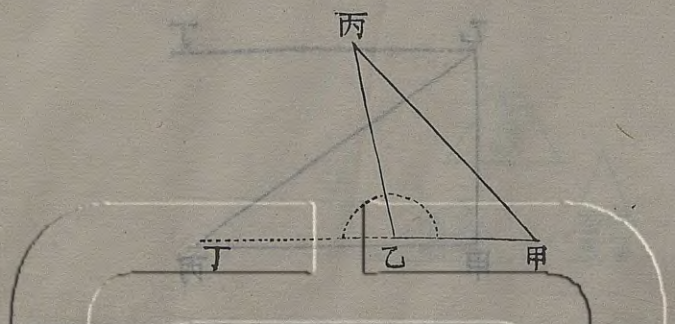
減丙乙丁角。所餘為甲乙丙角。丙乙丁

角。既與丙角度等。則甲乙丙。丙乙丁。合

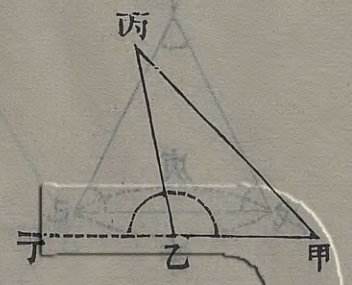
成之一直角。與甲角之一直角。非二直

角之度耶。

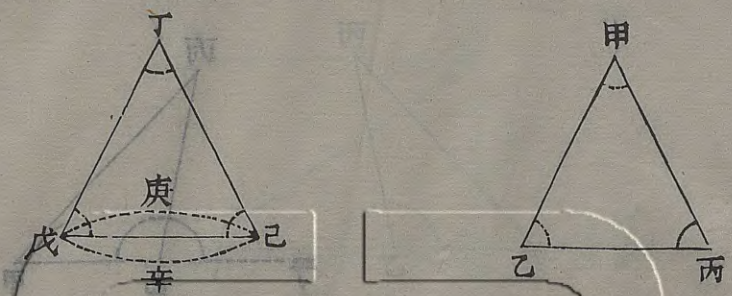
第五



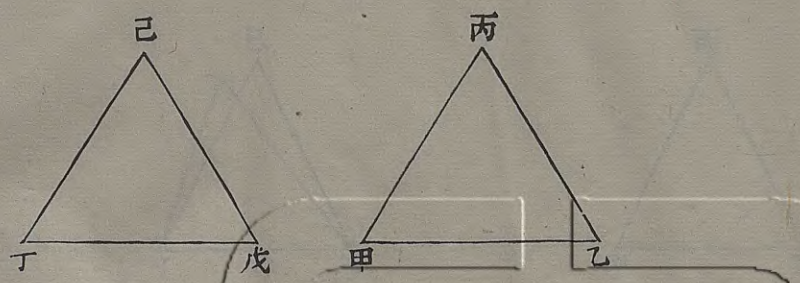
凡三角形。自一界線引長成一外角。此
 外角度。與三角形內所有之二銳角等。
 如甲乙丙三角形。自甲乙線引長至丁
 所成之丙乙丁角。即為外角。其度與三
 角形內甲丙二銳角之度等。蓋甲乙丙
 三角形之三角度。併之原與二直角等。
如本卷第
 四節云。而甲丁直線與丙乙直線相
 交所成之甲乙丙丁乙丙內外角。亦與
 二直角等。
如首卷第
 十四節云。則此內外二角所



併之度。與三角形內三角所併之度。亦
 必相等。今於內外角所併之二直角內。
 減去甲乙丙角。則所餘之丙乙丁一外
 角度。與甲角丙角所併之度。為相等可
 知矣。
 第六
 凡兩三角形。其兩邊線之度相等。二線
 所合之角又等。則二形底線之度必等。
 二形之式亦等。其底線之二角亦皆等



也。如甲乙丙一三角形。丁戊己一三角
 形。此二形之甲角丁角若等。甲丙丁戊
 二線。甲乙丁己二線。又互相等。則乙丙
 戊己之二底線必等。其二形之三角式
 亦必等。而乙角己角相等。丙角戊角亦
 相等。若將二形之甲角丁角相合。則甲
 丙丁戊二線。甲乙丁己二線。各度必等。
 因其俱等。故丙乙線之二角。與戊己線
 之二角。俱恰相符。而無偏側矣。若謂乙



丙底與戊己底不符。必是戊己線上斜
 於庚。或下斜於辛。不成直線形矣。

第七

兩三角形。其三邊線之度若等。則三角
 之度亦必相等。而此形內所函之分亦
 俱等也。如甲乙丙丁戊己兩三角形之
 甲乙線。丁戊線。甲丙線。丁己線。乙丙線。
 戊己線。兩兩相等。則甲角與丁角。乙角
 與戊角。丙角與己角。必各相等。而甲乙

丙三界所函之分。丁戊己三界所函之分。亦俱相等。蓋因此兩三角形之各線。俱恰相符。故所函之分。亦俱恰相符也。

第八

凡兩三角形。有一線相等。其相等線左右所生之二角又相等。則其他線他角俱相等。而二形之分亦相等也。如甲乙丙丁戊己兩三角形之甲乙線丁戊線若等。而此二線左邊所成之甲角丁角

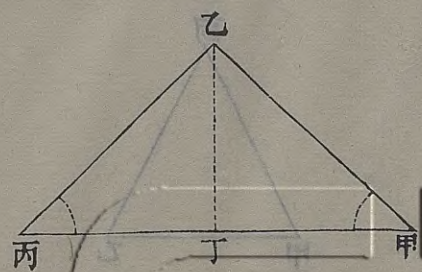


右邊所成之乙角戊角亦相等。則甲丙線度與丁己線度等。丙乙線度與己戊線度等。而丙角與己角亦等。甲丙乙形所函之分與丁己戊形所函之分。自然相等矣。若將甲乙線與丁戊線相較。再將甲角與丁角。乙角與戊角相較。此二線二角之度。必俱相符。此二線二角既俱相符。其他線他角亦必各相符矣。若謂一線不符。則相等之角。亦必不符。必

其一線斜出。或一線偏入。以致各角俱不相等。角既不相等。而形式亦必不同矣。

第九

三角形之兩邊線若等。其底線之兩角度亦必等。如甲乙丙三角形。其甲乙丙乙兩邊線之度等。則其甲丙底線之甲角丙角之度亦俱等也。若以甲丙底平分於丁處。自丁至乙角畫一直線。遂成



甲乙丁丙乙丁兩三角形。此兩形之甲

乙線與丙乙線既相等。而甲丙底線平

分之甲丁丙丁線度亦等。則乙丁為兩

三角形所共用之各一邊線。然則此兩

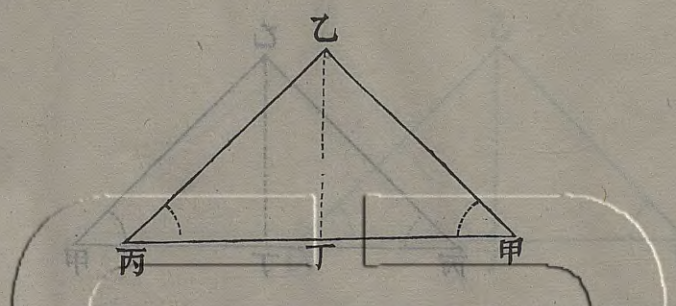
三角形之各三邊線度必俱相等。可知

矣。三角形之三線既各相等。則其各角

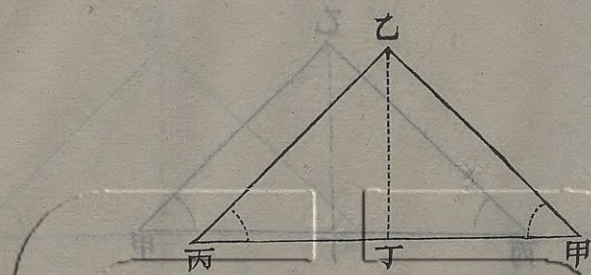
之度亦必相等。因其各角之度相等。故

甲角丙角之度亦必等也。

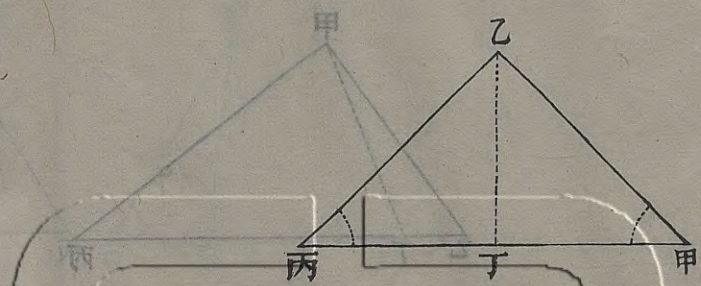
第十

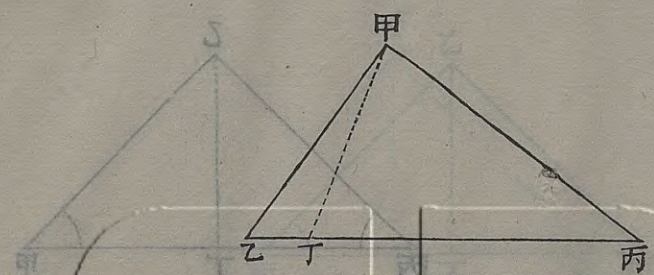


有兩邊相等之三角形。自上角至底線
 畫一直線。將底線為兩平分。則此線為
 上角之平分線。又為底線之垂線也。如
 甲乙丙乙。兩邊線度相等之甲乙丙三
 角形。自上角乙。至底線丁。畫一直線。將
 甲丙底線為兩平分。則為乙角之平分
 線。又為甲丙底線之垂線也。蓋乙丁線
 將乙甲丙三角形平分為甲乙丁丙乙
 丁兩三角形。此兩三角形之各界線度。

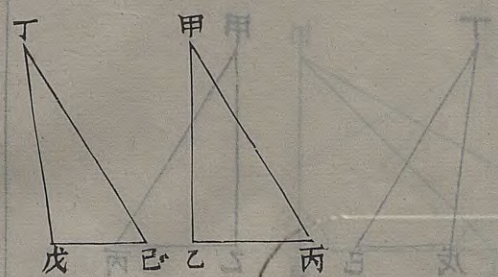


必各相等。而各角之度又俱相等。則甲
 乙丁角丙乙丁角。將乙角為兩平分矣。
 而甲丁乙角丙丁乙角。又為相等之兩
 直角。因其為兩直角。故乙丁線為平分
 甲丙底線之垂線也。
 第十七
 凡三角形內。長界所對之角必大。短界
 所對之角必小。如甲乙丙三角形之乙
 丙界長於甲丙界。故其相對之甲角大

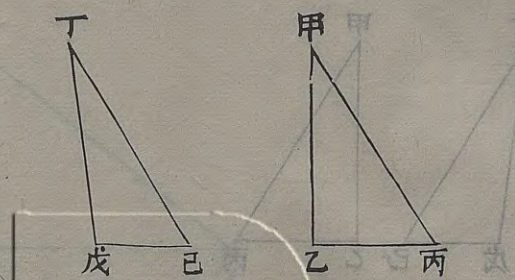




於乙角。而甲乙界短於甲丙界。故其所對之丙角。小於乙角也。試依甲丙界度。截乙丙於丁。復自甲至丁。作甲丁線。即成甲丙丁兩界相等之三角形。夫甲丙丁兩角亦相等。今甲丁丙角相等之丁甲丙角。原自乙甲丙角所分。則乙甲丙角。必大於甲丁丙角矣。然此甲丁丙角。為甲乙丁小三角形之外角。與小三角形



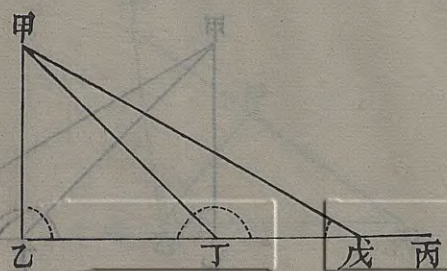
內之甲乙二角相併之度等。見本卷第五節既與甲乙二角之度等。則大於乙角可知矣。夫甲丁丙角。既大於乙角。則乙甲丙角。必更大於乙角矣。丙角之小於乙角。其理亦同。
第十七
凡三角形內。必有二銳角。蓋三角形之三角。併之與二直角等。見本卷第四節如甲乙丙三角形之乙角為直角。則所餘甲角



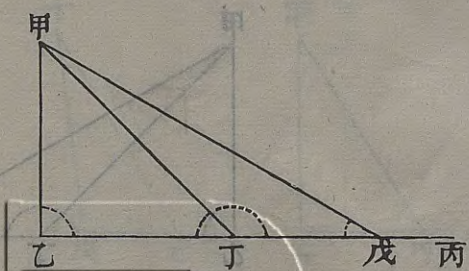
丙角併之始與乙角相等。二角併之僅與一直角等。則此二角獨較之。必小於直角矣。故此甲丙二角為銳角也。又如丁戊己三角形之戊角為鈍角。則所餘之丁角己角愈小於直角而為銳角矣。

第十三

凡自一點至一橫線畫眾線。而眾線內有一垂線。必短於他線。而他線與垂線相離愈遠則愈長也。如自甲點至乙丙



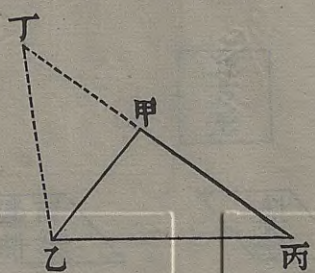
線。畫甲乙。甲丁。甲戊。幾線。此內甲乙為垂線。較之甲丁。甲戊線。則其度最短。而甲戊線與甲乙線相離。既遠於甲丁。故更長於甲丁線也。蓋甲乙為垂線。則乙角必為直角。見首卷第十節而甲乙丁三角形內。丁角。甲角。必俱為銳角。而小於乙角矣。因乙角大於丁角。故此乙角相對之甲丁線。必長於丁角相對之甲乙線。又甲丁戊外角。原與甲乙丁。乙甲丁。二丙



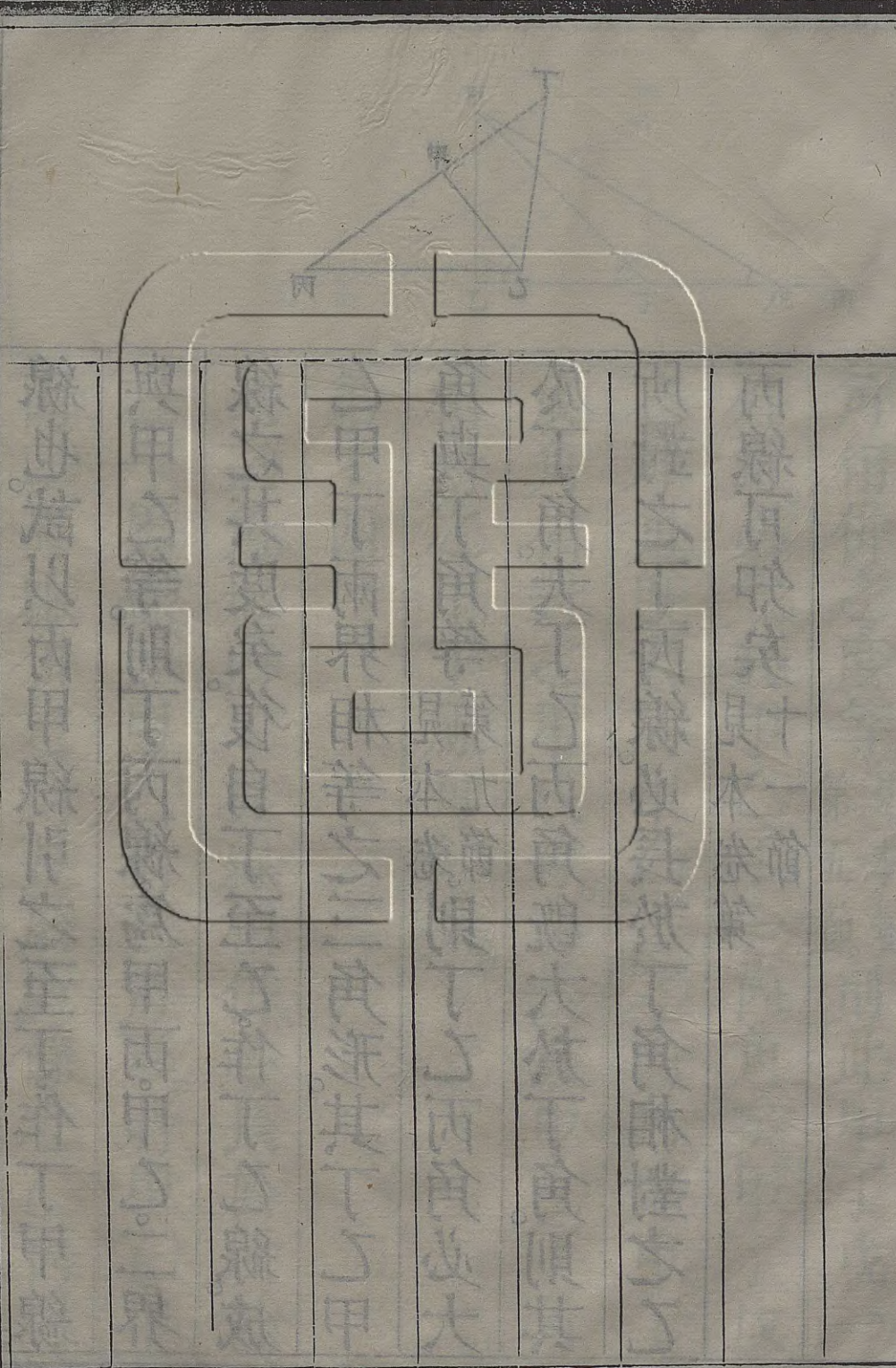
角相併之度等。見本卷第五節。則此甲丁戊一
 外角。必大於甲乙丁一內角矣。甲丁戊
 之外角。既大於甲乙丁之內角。則甲丁
 戊角相對之甲戊線。必長於甲乙丁角
 相對之甲丁線可知矣。

第十四

凡三角形。將二界線相併。必長於所餘
 之一界線。如甲乙丙三角形。將甲乙。甲
 丙。二界線併之。則長於所餘之乙丙界



線也。試以丙甲線引之。至丁。作丁甲線。
 與甲乙等。則丁丙線。為甲丙。甲乙。二界
 線之共度矣。復自丁至乙。作丁乙線。成
 乙甲丁兩界相等之三角形。其丁乙甲
 角與丁角等。見本卷第九節。則丁乙丙角必大
 於丁角。夫丁乙丙角既大於丁角。則其
 所對之丁丙線。必長於丁角相對之乙
 丙線可知矣。見本卷第十一節。



幾何原本三

第一

凡四邊線函四角者。其形有五。四邊線度等。而角度亦等者。為正方形。四角直。而兩邊線短。兩邊線長者。為長方形。四邊線度等。而角度不等者。為等邊斜方形。兩邊線長。兩邊線短。而角度又不等者。為兩等邊斜方形。以上四形。俱自平行線出。如四邊線不等。亦不平行。而四

形方長

正方形

邊不等形

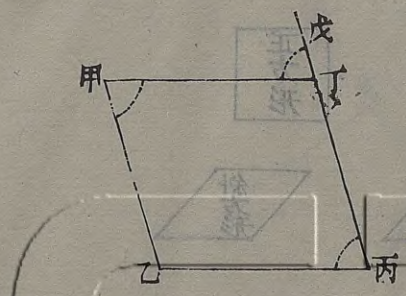
兩等邊斜方形

斜方形

角度又不等者。為不等邊斜方形。

第二

凡四平行線所成方形。其所函之角。成兩對角。必兩兩相等。如甲乙丙丁平行線方形。其甲角度丙角度等。而乙角度丁角度亦等。若以丙丁線引長至戊作一線。成一丁外角。與甲角為二尖交錯之角。其度相等。見首卷第二十二節而丁外角與丙角。又為一邊之內外角。其度亦等。見首

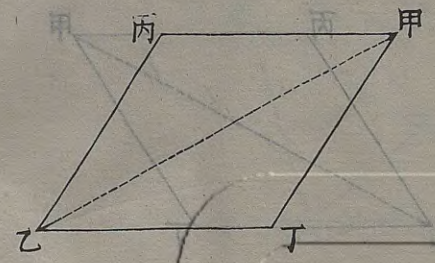


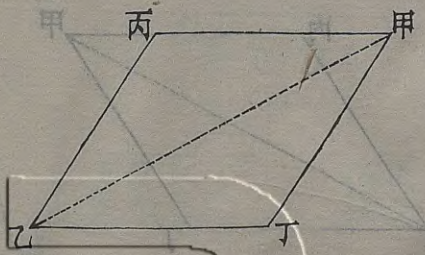
卷第二十二節。夫甲丁二角既等。丁丙二角又

等。則甲角與丙角。必自相等。而丁乙兩對角之相等。不言可知矣。

第三

凡平行四邊形。自一角至相對之角。作一對角線。必平分四邊形為兩三角形。如甲丙乙丁四邊形。作甲乙對角線。即成丙甲乙丁甲乙兩相等三角形。蓋此四邊形之丙丁二角為對角。其度必等。

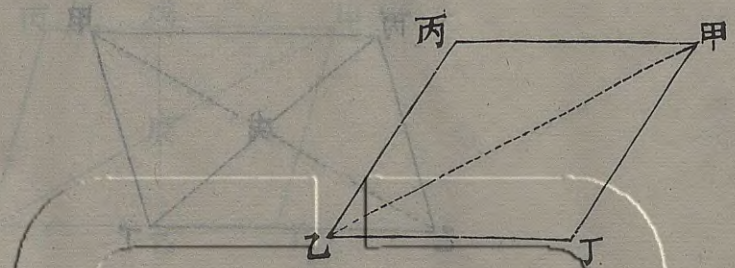




見本卷第二節。而對角線所分之丙甲乙丁乙甲二角。丙乙甲丁甲乙二角。俱為二尖交錯之角。其度又兩兩相等。見首卷第二十二節夫此兩三角形。原自一四邊形而分。各角又俱相等。則其所函之分必等。而四邊形平分為兩平分無疑矣。

第四

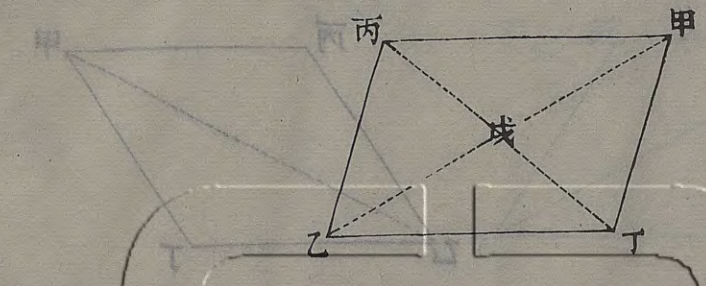
凡平行線所成方形。其兩兩平行線度俱相等。如甲丙乙丁四邊形之丙甲線。



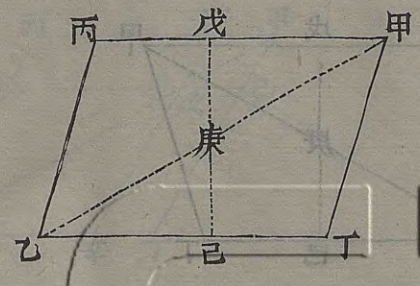
與乙丁線度等。丙乙線與甲丁線度等。此即如前節作一對角線。成兩三角形。而兩形之各角必俱相等。則丙甲乙丁二線。丙乙甲丁二線。俱為各相等角所對之線。其度亦必相等矣。見二卷第八節

第五

平行線方形內兩對角線。其相交處必平分二線之正中。如甲乙丙丁二線相交於戊。則所成甲戊戊乙二線。丙戊戊丁

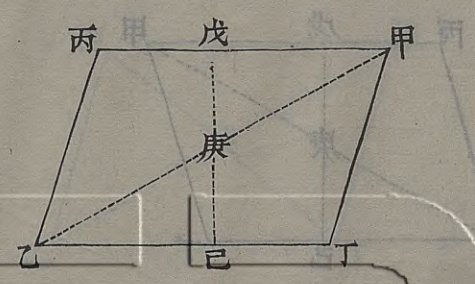


丁。二線俱等。蓋因丙戊乙甲戊丁。兩三
 角形之丙乙甲丁。二線為平行線。其度
 等。見本卷第四節而丙乙戊丁甲戊。二角。乙丙
 戊甲丁戊。二角。皆為平行線內相對之
 錯角。其度俱等。見首卷第二十二節夫丙乙甲丁
 二線既等。各相對之錯角又等。則丙乙
 戊丁甲戊。二等角相對之戊丙戊丁。二
 線度。與甲丁戊乙丙戊。二等角相對之
 戊甲戊乙。二線度。必皆相等可知矣。見二

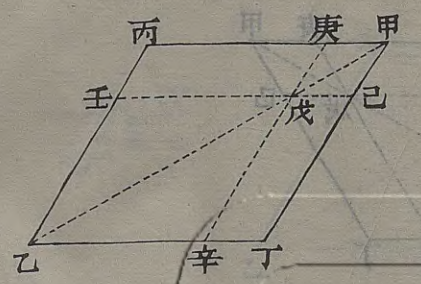


卷第八節 第六

凡平行線方形內。於對角線上。或縱或
 橫。正中截開。即將此形為兩平分。如甲
 丙乙丁之方形。其甲乙對角線上。畫一
 戊己線。於庚處截開。則平分甲丙乙丁
 方形為丙戊己乙一段。甲戊己丁一段。
 此二段內之戊甲庚己乙庚。兩三角形
 之甲庚乙庚。二線相等。而戊甲庚己乙



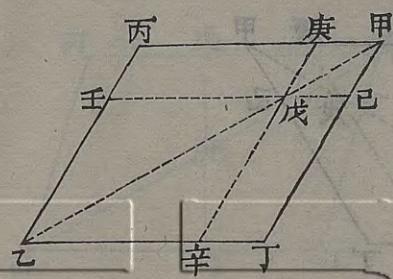
庚之兩角。又為平行線內二尖交錯之角。其度相等。而甲庚戊。乙庚己。二尖相對之角。其度又等。則此兩三角形度亦必相等。又如甲乙對角線。將甲丙乙丁方形為兩平分。則其甲丙乙甲丁乙兩三角形度必等。將此兩相等之三角形。以戊己線截開。於甲丙乙形內。減甲戊庚。於甲丁乙形內。減乙己庚。則所餘之甲庚己丁乙庚戊丙。二形度必等。今所



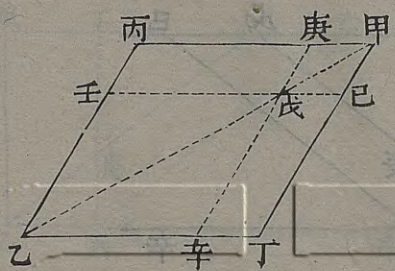
分各形。既俱兩兩相等。則甲丙乙丁之方形。為戊己線所截。自為兩平分可知矣。

第七

凡四邊形。於對角線不拘何處。復作相交二平行線。即成四四邊形。設如甲丙乙丁四邊形。於對角線之戊處。復作一壬戊己。一辛戊庚。相交之二平行線。即成甲戊戊乙丙戊戊丁。四四邊形。此四



形中之甲戊戊乙二形。為對角線上所
 成之形。丙戊戊丁二形。為對角線旁所
 成之形。此對角線旁所成兩形。必俱相
 等。如丙壬戊庚戊辛丁己。兩形之分是
 已。蓋甲丙乙丁之全形。因甲乙對角線
 平分為兩平分。所成之甲丙乙甲丁乙
 兩大三角形之分必等。其對角線上所
 成之一小方形。復為甲戊對角線平分
 為兩平分。成甲庚戊甲己戊。兩小三角

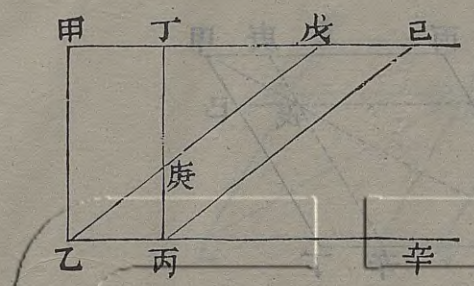


形。此兩小三角形之分亦必等。而對角
 線上所成之一大方形。又為戊乙對角
 線平分為兩平分。成戊壬乙戊辛乙。兩
 中三角形。此兩中三角形之分亦必等。
 今將甲丙乙甲丁乙。兩大三角形內。減
 去甲庚戊甲己戊之兩相等小三角形。
 再減去戊壬乙戊辛乙之兩相等中三
 角形。所餘對角線旁所成之丙壬戊庚
 戊辛丁己。兩四邊形。此兩四邊形。自然

相等矣。

第八

凡兩平行線內同底所成之四邊形。其面積必等。如甲己乙辛兩平行線內。於乙丙底作甲乙丙丁一長方四邊形。戊乙丙己一斜方四邊形。此兩形雖不同。而所容之分必相等。何也。試以兩三角形考之。如甲乙戊一三角形。丁丙己一三角形。此兩三角形之甲乙丁丙二線



等。甲戊丁己二線亦等。

甲丁戊己二線俱與乙丙平行。

而度分相等。若於甲丁戊己二線各加一丁戊線。即成甲戊丁己線。其度自然

相等。而戊甲乙己丁丙二角為甲乙丁丙

平行線一邊之內外角。其度又等。則此

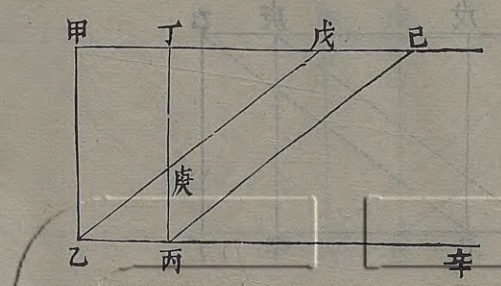
兩三角形自然相等可知矣。今於兩三

角形內各減去丁戊庚。則所餘之甲乙

庚丁戊庚丙己二形之分必等。復於此

二形內每加一庚乙丙形。則成甲乙丙

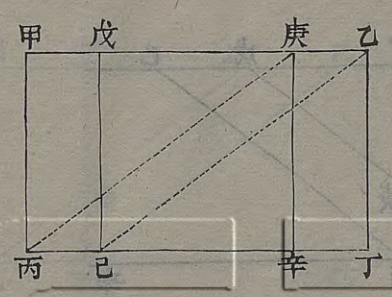
丁戊乙丙己之兩四邊形。其面積必然



相等也。

第九

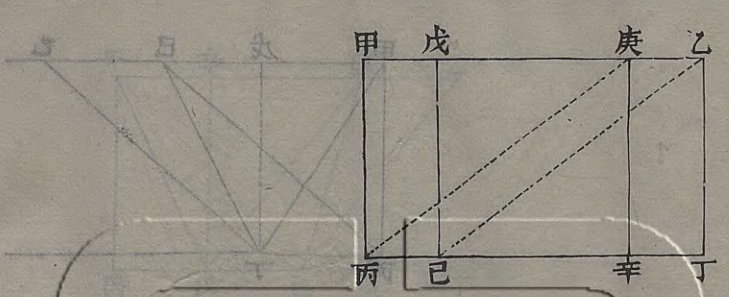
兩平行線內。無論作幾四邊形。其底度若等。則面積必俱等。如甲乙丙丁。二平行線內。作甲丙己戊庚辛丁乙。兩平行線四邊形。其丙己辛丁。兩底度相等。則其積亦等。試自丙己底至庚乙。畫二直線。即成一庚丙己乙斜四邊形。此斜四邊形。既與甲丙己戊四邊形。同出於丙

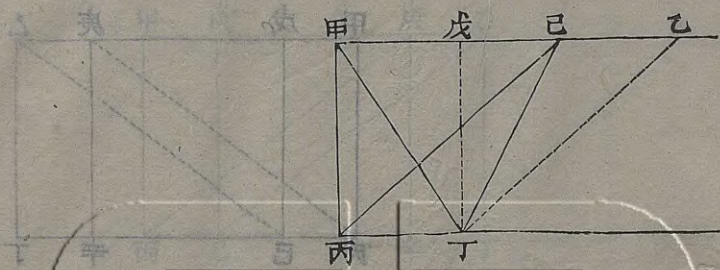


己之底。即同前節兩形面積俱等矣。至於庚辛丁乙。與庚丙己乙。又同出於庚乙之底。故此兩形面積亦俱等。觀此兩兩相等。則甲丙己戊庚辛丁乙。兩形之面積相等明矣。

第十

凡兩平行線內同底所成之各種三角形。其面積俱等。如甲乙丙丁。兩平行線內。於丙丁底。作甲丙丁一三角形。己丙

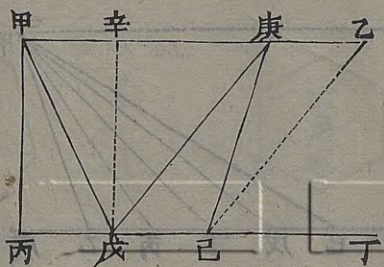




丁一三角形。此兩三角形之面積必等。何也。自丁至戊作一直線。與甲丙平行。再自丁至乙作一直線。與己丙平行。即成甲丙丁戊己丙丁乙兩四邊形。此二形既同出於丙丁底。其面積相等。而甲丙丁己丙丁兩三角形。為平分兩四邊形之一半。其面積亦必相等矣。

第十一

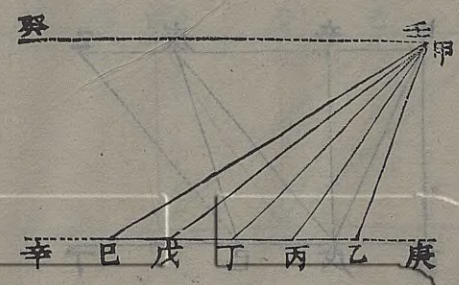
兩平行線內。無論作幾三角形。其底度



若等。其面積亦俱等。如甲乙丙丁二平行線內。作甲丙戊庚戊己兩三角形。其丙戊戊己兩底度相等。故其面積亦等。今自戊至辛作一直線。與甲丙平行。又自己至乙作一直線。與庚戊平行。即同前節成面積相等之兩四邊形。而此甲丙戊庚戊己兩三角形。為面積相等兩四邊形之各一半。則此兩三角形之面積必等可知矣。

第十二

凡有幾三角形。其底若俱在一直線。而各底相對之角。又共遇於一處。則其眾三角形。必在二平行線之間。如甲乙丙甲丙丁。甲丁戊。甲戊己。四三角形。其乙丙丙丁。丁戊。戊己。各底。俱在一庚辛直線上。而各底相對之角。又皆遇於甲處。則此四三角形。俱同在庚辛壬癸二平行線之間矣。

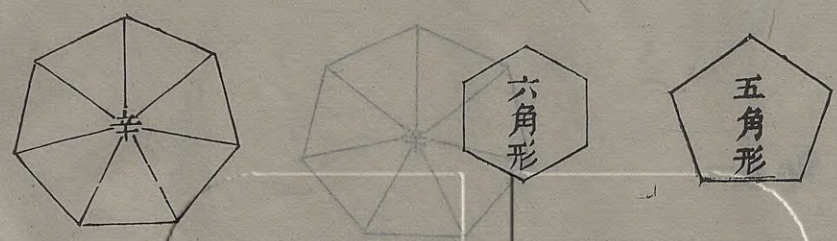


第十三

凡等邊等角各形內。五邊者為五角形。六邊者為六角形。邊愈多。角愈多者。俱隨其邊與角而名之焉。

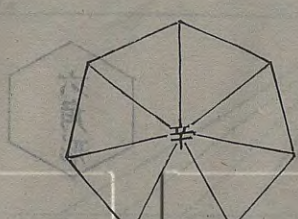
第十四

多邊多角形。自角至心作線。凡有幾界。即成幾三角形。設如辛七邊形。自心至邊七角作七線。即成七三角形。而此各三角形之分。俱相等也。

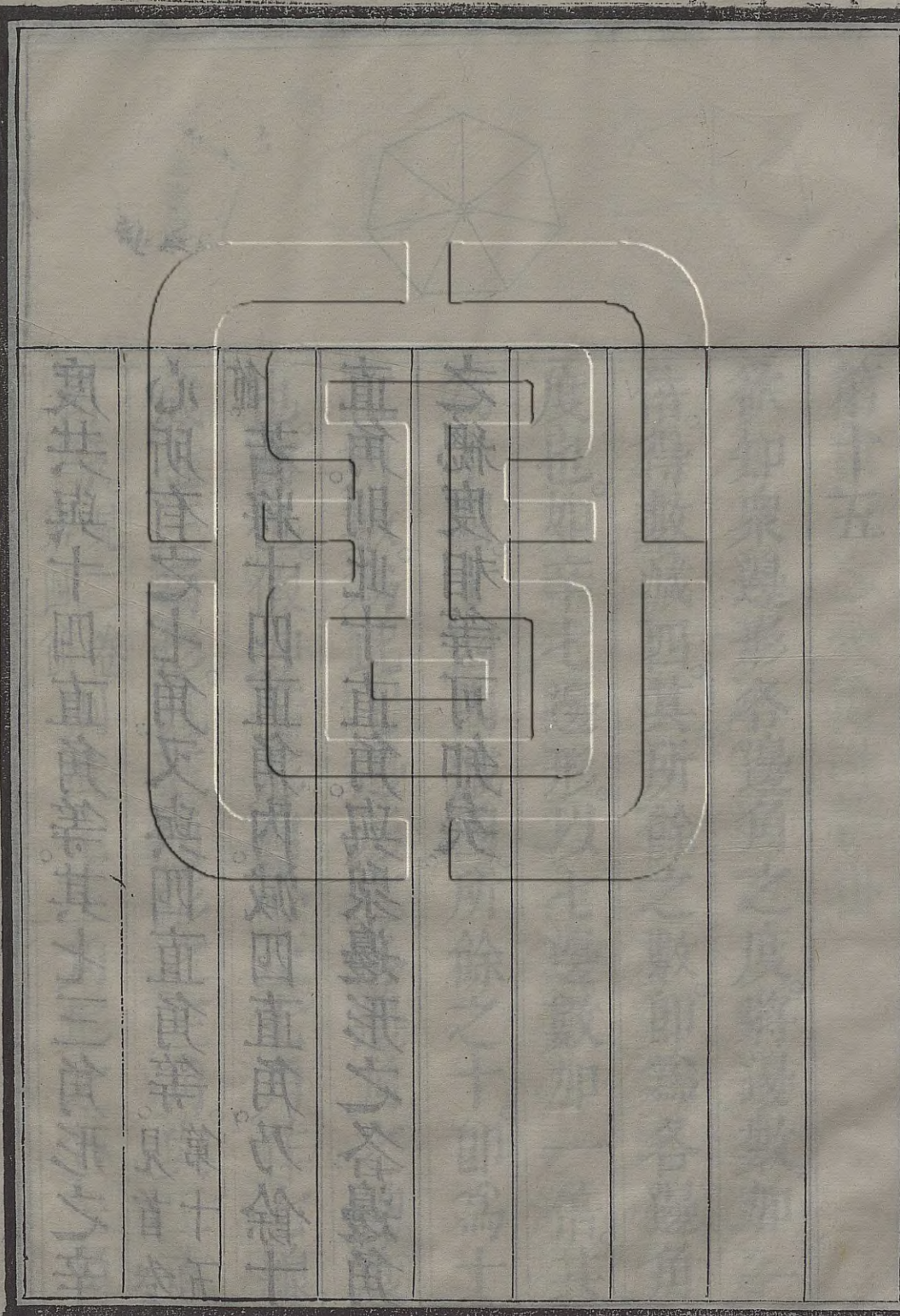


第十五

欲知衆邊形各邊角之度。將邊數加一倍。得數減四。其所餘之數。即為各邊角度也。如辛七邊形。以七邊數加一倍。共為十四。十四內減四。所餘之十。即為十直角數。為此七邊形之各邊角之總度也。何也。假如辛形自心至七角作七線。成七三角形。凡三角形之三角。與二直角等。見二卷第四節。則此七三角形之各三角

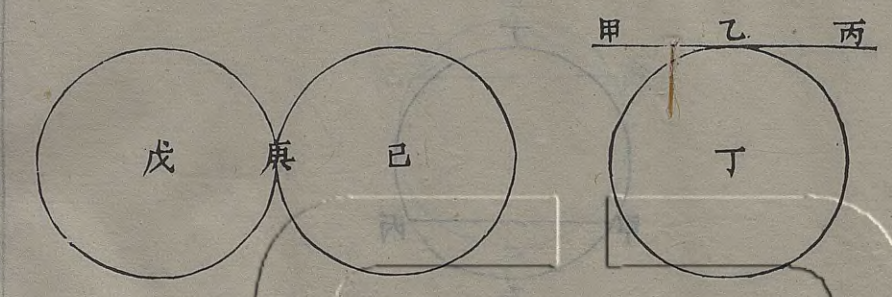


度共與十四直角等。其七三角形之辛心所有之七角。又與四直角等。見首卷第十五節。若將十四直角內減四直角。乃餘十直角。則此十直角。與衆邊形之各邊角之總度相等可知矣。



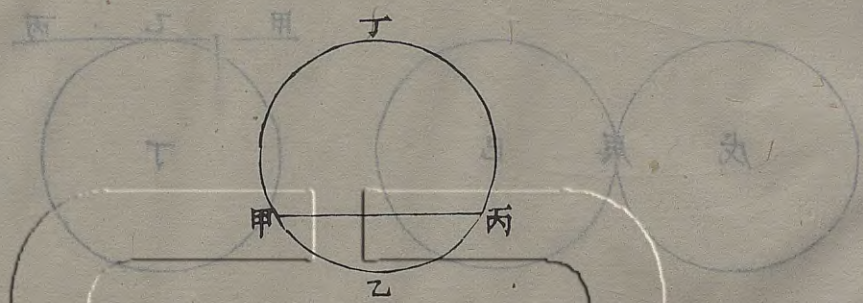
幾何原本四

第一



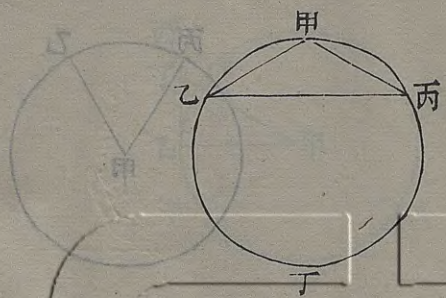
凡有直線切於圓界而不與圓界相交者。謂之切線。如甲乙丙線切於丁圓乙界。其線雖自甲過乙至丙。而與圓界不出入相交。此甲乙丙線。即為圓之切線也。又如一圓與一圓界相切而不相交。則謂之切圓。假如戊圓與己圓於庚界相切。二界總未相交。故又謂之切圓也。

第二 凡一直線橫分圓之兩界。謂之弦線。其所分圓界之一段。謂之弧。此弧與弦相交所成之二角。謂之弧分角。如甲丙線橫分甲乙丙丁圓界於甲丙。則甲丙線為弦。其所分之甲丁丙一段。甲乙丙一段。皆謂之弧。而甲丙弦與甲乙丙弧相交所成之甲丙乙丙甲乙二角。即謂之弧分之角焉。



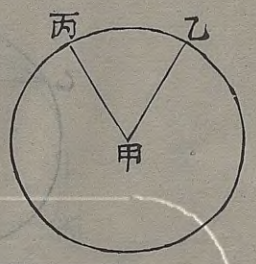
第三

凡自一圓弦線之兩頭。復作二直線。相遇於圓界之一處。其所成之角。謂之圓分內角。又謂之弧分相對之界角也。如甲乙丁丙圓之甲乙丙一段。自乙丙弦線之兩頭。各作一直線。於甲處相遇。其所成之乙甲丙角。即圓分內角。然此甲角與乙丁丙弧相對。故又為弧分相對之界角也。



第四

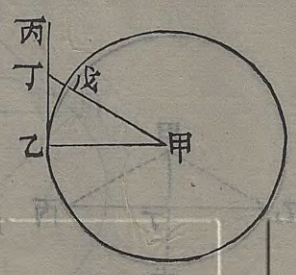
凡一圓有二輻線截弧之一段所成之三角形謂之分圓面形如甲圓自甲心至圓界乙丙二處作甲乙甲丙二輻線所成之甲丙乙三角形即為分圓面形也。



第五

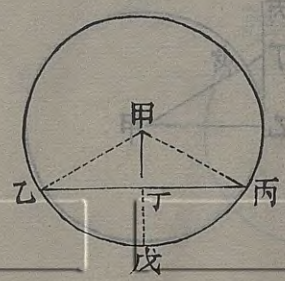
凡自圓之輻線之末與圓界相切作一垂線則此垂線與輻線之末在圓界僅

一點相切其他全在圓外即如甲圓之甲乙輻線於乙末作一丙乙垂線則此丙乙垂線與甲乙輻線俱在圓界乙處之一點相切而此垂線之丁等處俱在圓外也若自圓之甲心至丁作一甲戊丁線此線必長於甲乙輻線如二卷第十三節云因其長於輻線必出於圓界之外此甲戊丁線既出於圓界之外則丙乙線全在圓外可知矣。

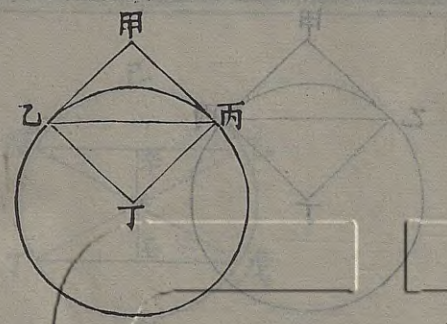


第六 作垂線

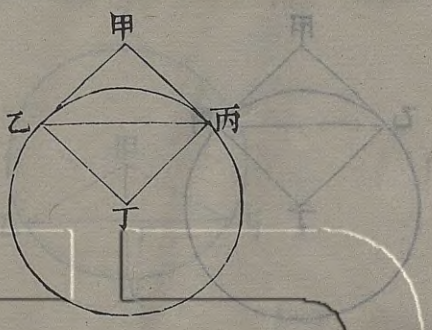
圓弦線上。自圓心作一垂線。則將弦線為兩平分。如乙丙弦。自圓心甲至弦線丁。作一垂線。必將乙丙弦為兩平分。成乙丁。丁丙二段。若自甲心至弦線乙丙二末。作二輻線。成一甲乙丙三角形。此三角形之甲乙。甲丙二線。為一圓之輻線。其度必等。此二輻線既等。則甲乙丙三角形內。甲丁垂線所分之乙丁。丁丙二段。亦必等矣。若將垂線引長至弧界戊作線。則又將乙丙弧界為兩平分矣。



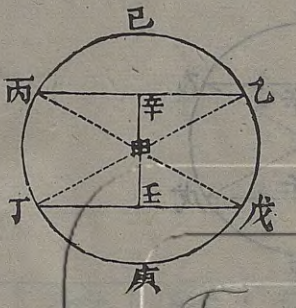
第七 作切線
凡自圓外一處。至圓界兩邊。作二切線。此二線之度必等。如自圓外甲至圓界乙丙兩邊。作甲乙。甲丙二切線。此二線之度相等。今於圓心丁至圓界乙丙二切線之末。作二輻線。則此二輻線為甲乙甲丙之垂線矣。



乙甲丙之垂線矣。因其為垂



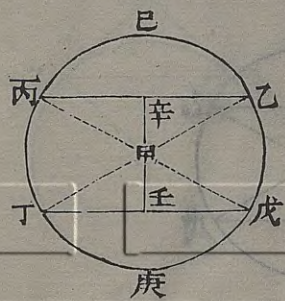
線。則甲乙丁。甲丙丁之二角。必同為直
 角。見首卷第十節。再自丙至乙。作一弦線。即成
 丁乙丙。甲乙丙。兩三角形。丁乙丙三角
 形之丁乙。丁丙。二線。同為圓之輻線。其
 度必等。因其相等。故丁乙丙。丁丙乙。二
 角亦必等。夫甲乙丁。甲丙丁。二角。原相
 等。此二角內減去丁乙丙。丁丙乙。二角。
 則所餘之甲乙丙。甲丙乙。二角。亦自相
 等。此二角既俱相等。則甲乙。甲丙。二切



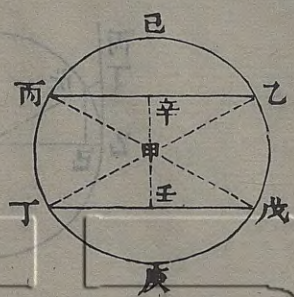
線。為等角傍之兩界線。自然相等無疑
 矣。

第八

凡圓內兩弦線若等。其分圓弧面之積
 必等。自心至兩弦所作垂線亦必等。如
 甲圓之丙乙。丁戊。二弦之度若等。則所
 分丙己乙辛。丁庚戊壬。二弧面積必等。
 自此圓之甲心至丙乙。丁戊。二弦。各作
 甲壬。甲辛。垂線。其度亦必等。何也。如自



甲心至丙乙丁戊二弦之末各作輻線。即成甲丙乙甲丁戊兩三角形。此兩三角形之各界線必兩兩相等。則此兩三角形內相等線所對之角亦必相等。見二卷第七節角既相等。則等角相對弧界之丙己乙丁庚戊二段亦必相等。見首卷第十二節丙己乙丁庚戊二弧線既等。丙乙丁戊二弦線又等。則丁庚戊壬之弧面積與丙己乙辛之弧面積自然相符矣。又甲

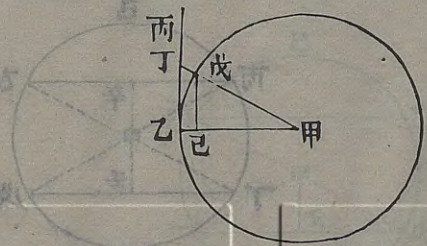


辛甲壬二垂線將丙乙丁戊二弦為兩平分。則丙辛乙辛丁壬戊壬之四線亦俱等。三角形之各界線既兩兩相等。而三角形內各角又兩兩相等。則平分丙乙丁戊二弦之甲辛甲壬之度自然相等矣。

第九

凡弦線之所屬有三種。一為弧之切線。一為弧之割線。一為弧之弦線。欲取弧

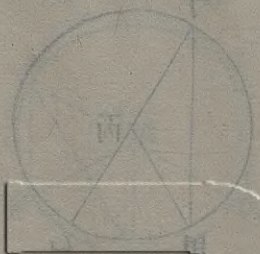
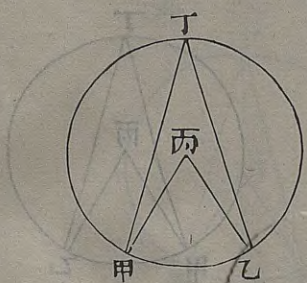
界各角之度。用此三線求之必得也。如
 甲圓之甲乙輻線。於乙末作丙乙垂線。
 復自圓心甲至圓界戊割出。至丙乙垂
 線丁分作甲丁線。又從圓界戊至甲乙
 輻線作戊己垂線。則成三種線。此三線
 丙丁乙線為乙戊弧之切線。甲丁線為
 乙戊弧之割線。戊己線為乙戊弧之正
 弦。凡欲得各角弧界之度。必於此三種
 線取之。如欲取乙甲戊角相對弧度則

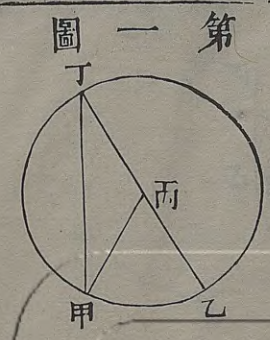
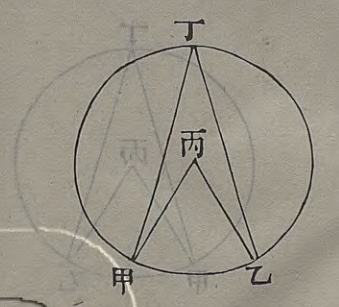


自與甲角相對乙戊弧之丁乙切線取
 之。或自乙戊弧之甲丁割線取之。或自
 乙戊弧之戊己正弦取之。皆得乙戊弧
 之度數焉。

第十

一圓界內。任於圓界一段至圓心作二
 線。至圓界作二線。即成二角。在圓心者
 為心角。在圓界者為界角。設如甲乙丁
 圓。自甲乙一段至丙心作甲丙乙丙二





線。仍自甲乙至丁界。作甲丁乙丁二線。成甲丙乙甲丁乙二角。其甲丙乙角為心角。甲丁乙角為界角也。

第十一

園內之心角界角。同立園界之一段。而各角之二線所成之式。又分為三種。有界角心角。同用一線者。有界角心角。不同用一線者。有界角二線。跨心角二線者。總之此三種心角。皆大於界角一倍。



如有三圖。園心之甲丙乙角。皆自園界甲乙一段。作甲丙乙丙二線。園界之甲

丁乙角。亦自園界甲乙一段。作甲丁乙

丁二線。則第一圖之甲丁乙界角之乙

丁線。同立於甲丙乙心角之乙丙線上。

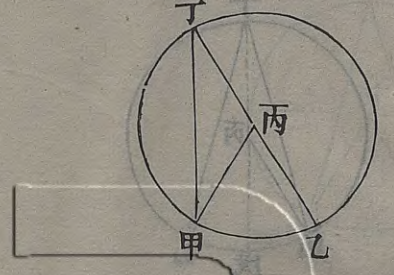
而甲丙乙心角。為甲丙丁三角形之外

角。與甲丁丙丙甲丁二內角等。見二卷第五節

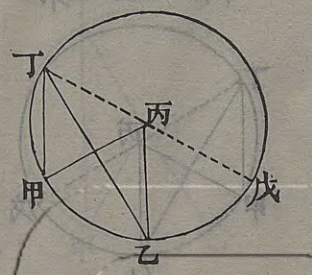
其甲丙丙丁二線。又為一園之輻線。其

度亦等。此二線既等。則甲丁丙丙甲丁

第一圖

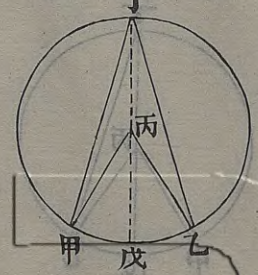


第二圖

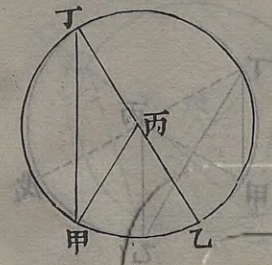


二角亦必等。見二卷第九節。今甲丙乙之外角。既與甲丁丙丙甲丁二內角等。則甲丙乙心角大於甲丁乙界角一倍可知矣。如第二圖甲丁乙界角之乙丁線不同立於甲丙乙心角之乙丙線上。而甲丙乙心角在甲丁乙界角甲丁丁乙二直線之外。則自丁角過圓之丙心至對界作一丁丙戊全徑線。即成甲丙戊一大心角。乙丙戊一小心角。甲丁戊一大界角。

第三圖

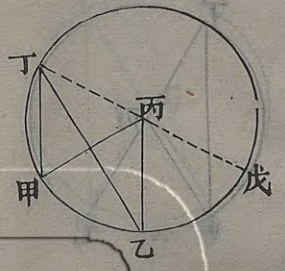


第一圖



角。乙丁戊一小界角。其甲丙戊大心角。即如第一圖必倍於甲丁戊大界角。而乙丙戊小心角亦必倍於乙丁戊小心角。於甲丙戊大心角內減去乙丙戊小心角。甲丁戊大界角內減去乙丁戊小心角。則所餘之甲丙乙心角必大於所餘之甲丁乙界角一倍矣。如第三圖甲丁乙界角之二線正跨於甲丙乙心角二線之上。而甲丙乙心角在甲丁乙界

圖二第



圖三第



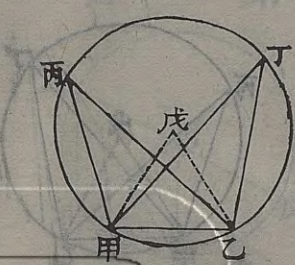
角甲丁丁乙二直線之間。則自丁角過
 圓之丙心至對界。作丁丙戊全徑線。即
 成甲丙戊乙丙戊二心角。甲丁戊乙丁
 戊二界角。此甲丙戊心角。必倍於甲丁
 戊界角。乙丙戊心角。亦必倍於乙丁戊
 界角。以甲丙戊乙丙戊二心角併之。乃
 甲丙乙一心角。以甲丁戊乙丁戊二界
 角併之。乃甲丁乙一界角。今所分之二
 心角。既各倍於所分之界角。則此所併

之甲丙乙心角。必倍於所併之甲丁乙
 界角矣。

第十二

凡自圓之弧線一段。任作相切界角幾
 何。其度必俱相等。如甲乙丁丙之圓。自
 甲乙弧線一段。至圓界丙丁。作相切之
 甲丙乙乙丁甲二界角。此二角之度必
 俱相等。試自圓之戊心至圓界甲乙。作
 二輻線。即成甲戊乙一心角。此甲戊乙

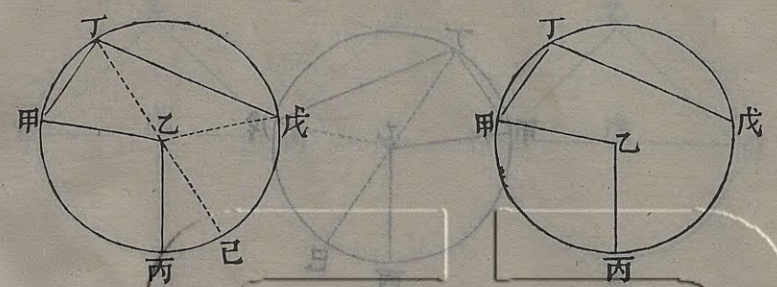




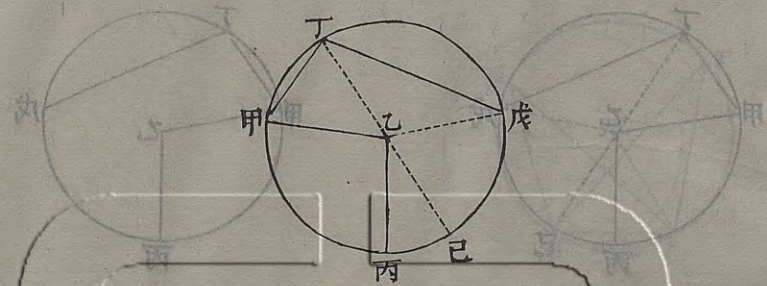
之心角。與甲丙乙乙丁甲界角。俱同一
 圓弧線之一段。則心角必倍於界角。然
 則甲丙乙乙丁甲二界角。既俱為甲戊
 乙心角之一半。則此二角之度必等可
 知矣。

第十三

凡圓內心角所對弧線之度。比界角所
 對弧線之度少一半。則二角之度必等。
 如甲丙戊丁圓內。有甲乙丙一心角。甲

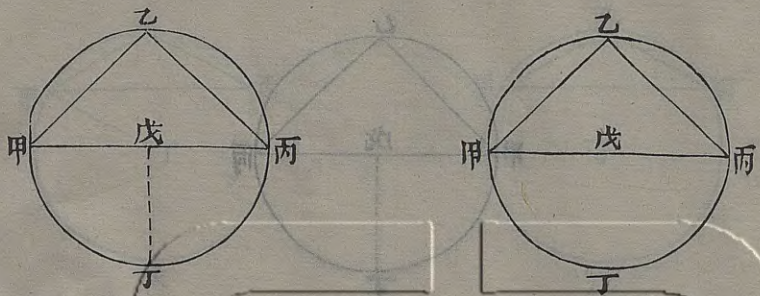


丁戊一界角。而甲乙丙心角相對甲丙
 弧線之度。比甲丁戊界角相對甲戊弧
 線之度少一半。則甲乙丙心角之度。必
 與甲丁戊界角之度相等。試自丁角過
 圓之乙心至對界。作丁乙己全徑線。復
 自乙心至戊界。作乙戊半徑線。即成甲
 乙己己乙戊二心角。甲丁己己丁戊二
 界角。其甲乙己心角。必倍於甲丁己界
 角。而已乙戊心角。亦必倍於己丁戊界

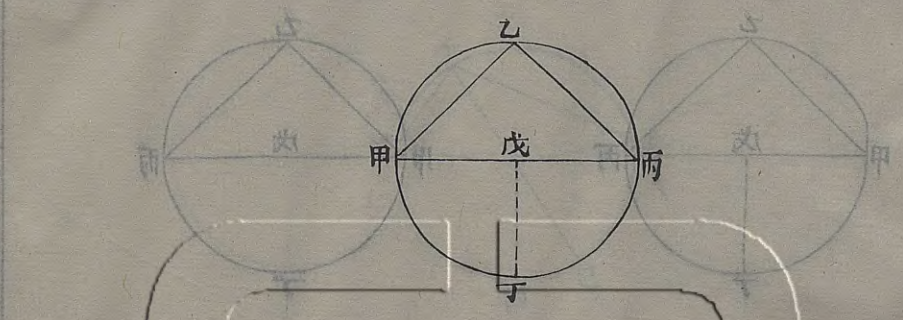


角。今以甲乙己己乙戊二心角相併。甲
 丁己己丁戊二界角亦相併。則甲乙己
 己乙戊二心角所併之度。必倍於甲丁
 己己丁戊二界角所併之度矣。是以甲
 丁戊一界角。必得甲乙己己乙戊二心
 角所併之一半。夫甲丙弧線。既為甲戊
 弧線之一半。而甲乙丙角。又為甲乙己
 己乙戊二心角所併之一半。則甲乙丙
 心角度。必與甲丁戊界角之度相等矣。

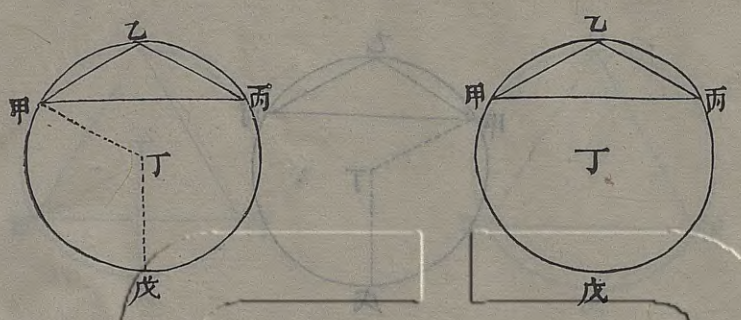
第十四



凡園內界角。立於園界之半者。必為直
 角。如甲乙丙丁園內之甲乙丙界角。立
 於甲丁丙園界之正一半。則此甲乙丙
 角。必然為直角也。自甲丁丙之半園。於
 丁界為兩平分。復自丁界至園心戊。作
 丁戊輻線。即成甲戊丁角。其相對之甲
 丁弧。為園界四分之一。既為園界四分
 之一。則必為直角。如首卷第十節云。夫心角相

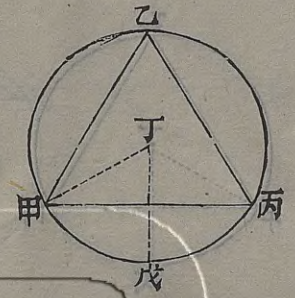


對弧線。若為界角相對弧線之一半。其
二角之度相等矣。如本卷第十三節云。今甲戊丁
心角相對之甲丁弧線。既為甲乙丙界
角相對之甲丁丙弧線之一半。則甲戊
丁心角度。必與甲乙丙界角度相等。且
甲丁弧線。既為圓界四分之一。而甲丁
丙弧線。又為圓界之正一半。則甲戊丁
心角為直角。而甲乙丙界角亦必為直
角矣。



第十五

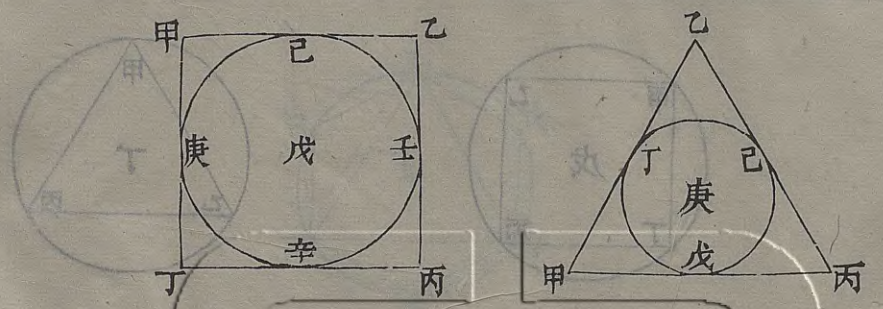
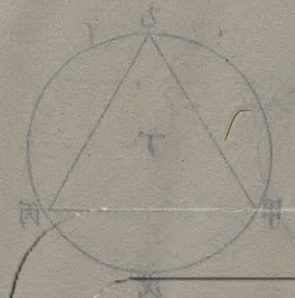
凡圓內界角。其所對之弧。過於圓界之
半者。必為鈍角。如甲乙丙戊圓內之甲
乙丙界角。其相對之甲戊丙弧。大於圓
界之一半。故其相對之甲乙丙角為鈍
角也。試將甲戊丙弧。平分於戊。為甲戊
戊丙兩段。復自圓心丁。至甲。戊。作二輻
線。即成甲丁戊一心角。其甲戊丙弧分
既大於半圓。則此甲戊弧線一段。亦大



甲丁戊心角。必為銳角矣。見首卷第十節。此
 甲丁戊心角所對之弧。比之甲乙丙界
 角所對之弧為一半。則此二角之度必
 等。夫甲丁戊心角。既為銳角。則甲乙丙
 界角。亦必為銳角矣。

第十七

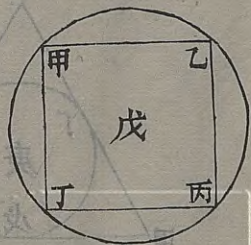
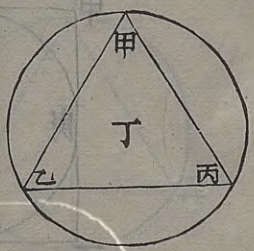
凡兩圓各界形之各線。與圓界相切而
 不相交。則謂之兩圓切界形。如甲乙丙
 三角形之甲乙乙丙丙甲。三界線。俱在



庚圓界之丁己戊三處相切而不相交。
 故謂之兩圓切界三角形。又若甲乙丙
 丁四方形之甲乙乙丙丙丁丁甲。四界
 線。俱在戊圓界之己庚辛壬四處相切
 而不相交。則謂之兩圓切界四邊形。觀
 此二圖。則知兩圓各界形。必大於所函
 圓界形之分矣。

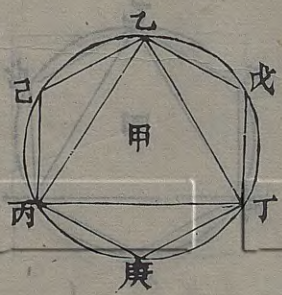
第十八

凡圓內直界形之各角。止抵圓界而不

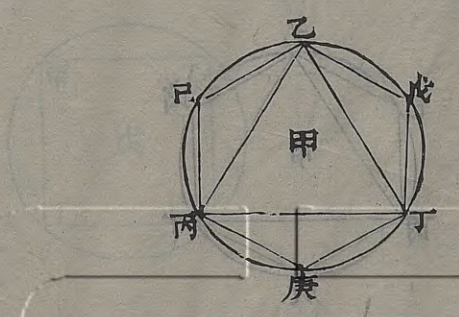


割出。則謂之圓內所函各邊形。如甲乙丙三角形之甲角乙角丙角。俱與丁圓界相抵。而不會割出。即謂之圓內所函三角形。又如甲乙丙丁四方形之甲角乙角丙角丁角。俱與戊圓界相抵。而不會割出。則謂之圓內所函四邊形。觀此二圖。則知函於圓界各界形。必小於圓界形之分矣。

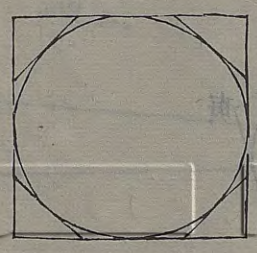
第十九



凡等邊眾界形。或函圓。或函於圓。其界數愈多。愈與圓界相近。如甲圓形。函乙丙丁等邊三角形。又函乙己丙庚丁戊等邊六角形。以三角形之三邊。比之六角形之六邊。則六角形之六邊。與圓界相近矣。設有十二角形之十二邊。比此六角形之六邊。則十二角之十二邊。又與圓界為近。若有二十四角之二十四邊。則又更近於十二角之十二邊矣。蓋



函眾界形之度必大於所函之眾界形
 度。見本卷第十今甲圓既函等邊六角
 形。自大於六角形。而此六角形。又函等
 邊三角形。亦必大於三角形。由此推之。
 十二角函六角。二十四角函十二角。其
 邊愈多者其度愈大。故與圓界愈近也。
 又如復有一函圓等邊四角形內。又作
 一函圓等邊八角形。此四角形既函八
 角形。必大於八角形可知矣。若於八角

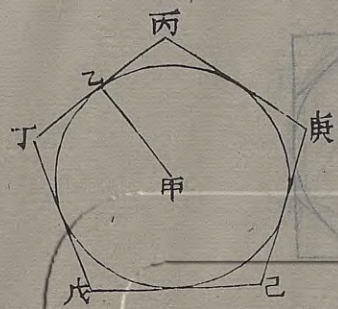


形內復作十六角形。十六角形內又作
 三十二角形。其所函形愈小。邊數愈多。
 則與所函之圓界度愈近矣。苟設一函
 於圓界之多邊形。為幾十萬邊。設函於
圓界之
 多邊形。一自六邊起。算。一自四邊起算。復設一函圓界之
 多邊形。亦為幾十萬邊。設函圓界之多
邊形。亦一自六
 邊起算。一自四邊起算。使此函圓之多邊形。自外
 與圓界相比。而函於圓界之多邊形。自
 內與圓界相比。則此二多邊形之每邊

直界線。將與圓界曲線合而為一。故圓界曲線。可得直線之度。而多邊形之直線。亦可得為圓界度也。

第三十

函圓切界等邊形。其所函圓之輻線度。與一直角三角形之小邊之度等。而等邊形之眾界共度。又與三角形之大邊之度等。則三角形之面積。與等邊形之面積等。如丙丁戊己庚等邊五角形。其



所函甲圓之甲乙輻線。與辛壬癸直角

三角形之辛壬小邊線度等。而五角形

之丙丁戊己庚五邊線共度。又與三角

形之壬癸大邊線度等。則此辛壬癸三

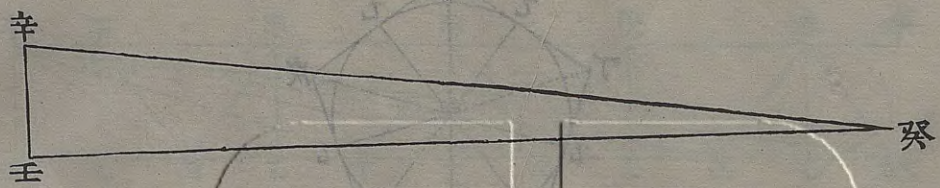
角形面積。必與丙丁戊己庚等邊五角

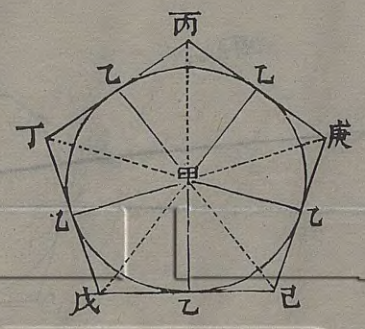
形面積等也。何以見之。若自五邊形之

甲心。至丙丁戊己庚之五角。作甲丙甲

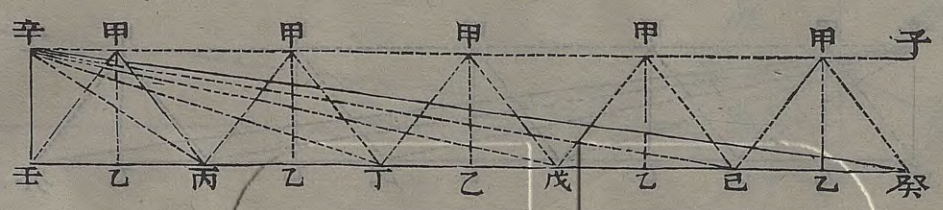
丁甲戊甲己甲庚五線。即分成甲丙丁

類五三角形。夫辛壬癸三角形之壬癸

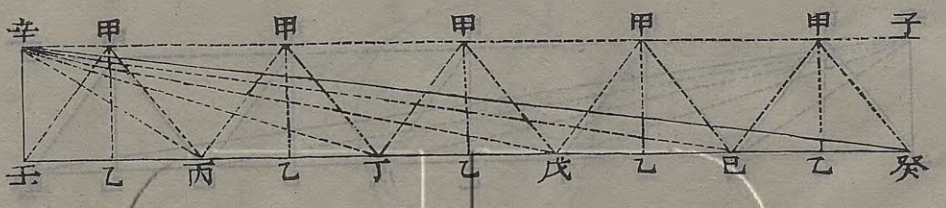




線度。既與五角形之五邊共度等。今將
 壬癸線平分五分。以所分之每分爲底。
 依前所分五三角形式。作甲壬丙類五
 正式三角形。復自所分丙丁戊己四處。
 俱至三角形之辛角。作丙辛丁辛。戊辛。
 己辛。四線。遂分辛壬癸一三角形。爲辛
 壬丙類五斜式三角形。再自甲壬丙類
 五三角形之甲角至底。各作一甲乙垂
 線。俱與圓之輻線等。則甲壬丙相等之



五三角形之高度。亦自相等矣。於是復
 自辛壬癸三角形之辛角。與五甲角相
 切。作一辛子線。與壬癸爲平行線。則此
 平行線內同底所成之各種三角形之
 面積。必俱相等矣。見三卷第十節蓋辛壬丙甲
 壬丙。兩三角形爲同底。辛丙丁甲丙丁。
 兩三角形爲同底。辛丁戊甲丁戊。兩三
 角形爲同底。辛戊己甲戊己。兩三角形
 爲同底。辛己癸甲己癸。兩三角形爲同

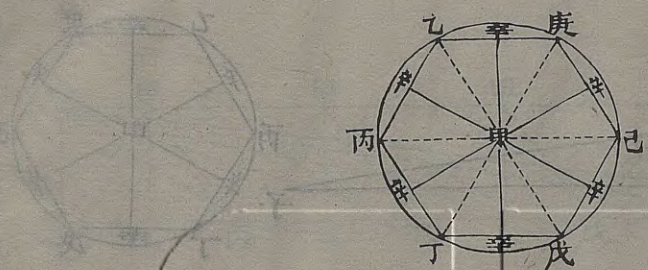


底。故其面積俱相等也。且辛壬丙三角
 形。與甲壬丙三角形。既俱相等。則辛壬
 丙之類。五斜式三角形之面積。即如甲
 壬丙之類。五正式三角形之面積矣。其
 所分各形之面積俱等。則其全形之面
 積。自然相等。此所以辛壬癸直角三角
 形之面積。與丙丁戊己庚等邊五角形
 之面積相等也。

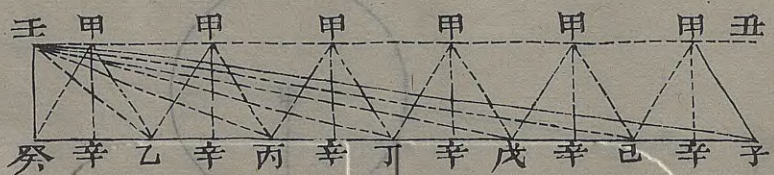
第二十一



圓界內函等邊眾界形。其圓心至眾界
 所作中垂線。與一直角三角形之小邊
 之度等。而等邊眾界形之眾界共度。又
 與直角三角形之大邊之度等。則此三
 角形之面積。與等邊眾界形之面積等。
 如甲圓所函乙丙丁戊己庚等邊六角
 形。其圓之甲心至眾界所作甲辛垂線。
 與壬癸子直角三角形之壬癸小邊線
 度等。而六角形之乙丙丁戊己庚六邊



線共度。又與三角形之癸子大邊線度等。則此壬子癸三角形面積。必與乙丙丁戊己庚等邊六角形面積等也。若依前節法。將六邊形。分爲六三角形。復以三角形之癸子界。照六邊形度。分爲六分。又照六邊形所分六三角形。作六正式三角形。復自壬子癸三角形之壬角。至乙丙丁戊己五處。作五斜線。成六斜式三角形。此兩式三角形同底。又同在



二平行線內。則其面積必兩兩相等。此兩式六三角形之垂線。既與壬癸子直角三角形之壬癸小邊線度等。而兩式六三角形之底線共度。又與壬子癸直角三角形之癸子大邊線度等。則壬癸子直角三角形之面積。必與乙丙丁戊己庚等邊六角形之面積相等矣。

第二十二

凡圓形之輻線。與一直角三角形之小

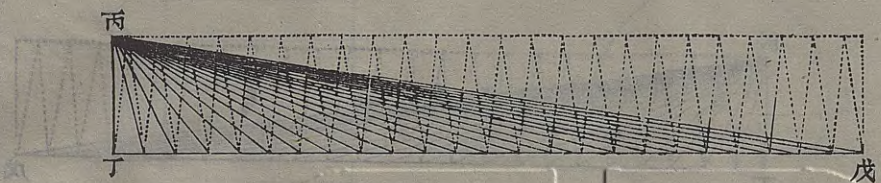
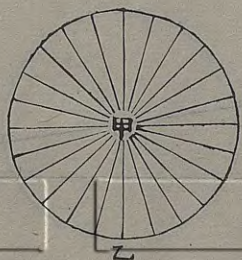
邊線度等。而圓之周界。與三角形之大
 邊線度等。則此直角三角形之面積。與
 圓形之面積相等。如有一甲圓形。其甲
 乙輻線。與丙丁戊直角三角形之丙丁
 小邊線度等。而甲圓形之乙周界。又與
 丙丁戊三角形之丁戊大邊線度等。則
 此丙丁戊三角形之面積。即與甲圓形
 之面積相等也。何以見之。甲圓之輻線。
 與三角形之小邊等者。即如等邊眾界



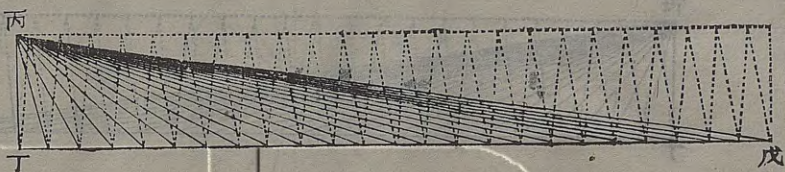
形之中垂線。與三角形之小邊等也。甲
 圓之周界。與三角形之大邊等者。即如
 等邊眾界形之各界共度。與三角形之
 大邊等也。若夫函圓眾界形相等之三
 角形。其小邊雖與圓之輻線等。其大邊
 則長於圓之周線。故其積分亦大於圓
 之積分。而函於圓眾界形相等之三角
 形。其小邊既短於圓之輻線。而大邊亦
 短於圓之周線。故其積分亦小於圓之



積分。今此甲圓形相等之丙丁戊三角
 形。其小邊既與圓之輻線等。而三角形
 之大邊。又與圓之周線等。則其積分。與
 圓形之積分相等無疑矣。然圓周界。曲
 線也。等邊眾界形之界度。直線也。觀之
 似難於相通者。如以圓之內外。各設多
 邊眾界形。分爲千萬邊。如本卷第
 十九節云。則逼
 圓界最近。將合而爲一。乃依所分之段
 爲千萬正式三角形。此千萬正式三角



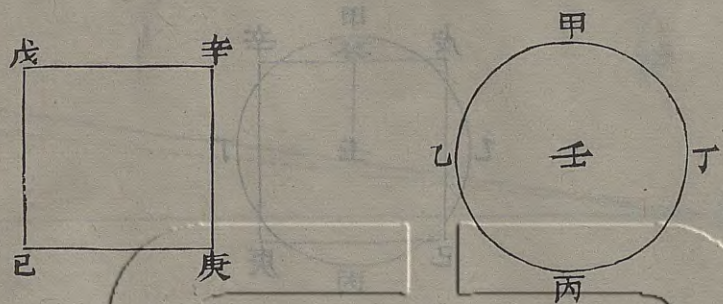
形之中垂線。亦將與圓之輻線合而爲
 一。而千萬邊共界度。既與圓周合而爲
 一。則圓周之曲線。亦變而爲直線矣。夫
 千萬邊正式三角形之中垂線。既成圓
 之輻線。則與丙丁戊三角形之小邊等。
 而千萬邊正式三角形之底界共度。又
 成圓之周度。則又與丙丁戊三角形之
 大邊度等矣。復自丙丁戊三角形之丙
 角。至千萬正式三角形之底界。各作千



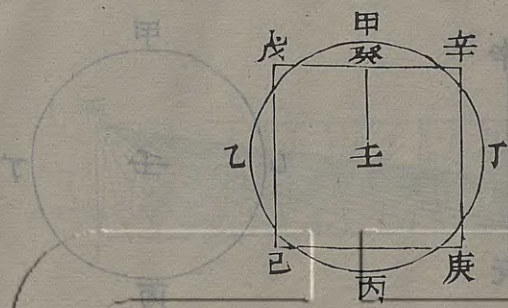
萬斜式三角形。以比正式三角形。因其底同。其分自相等。故千萬斜式三角形之共積。比之千萬正式三角形之共積。千萬正式三角形之共積。比之丙丁戊一直角三角形之面積。丙丁戊直角三角形之面積。比之甲圓形之面積。俱相等也。

第二十三

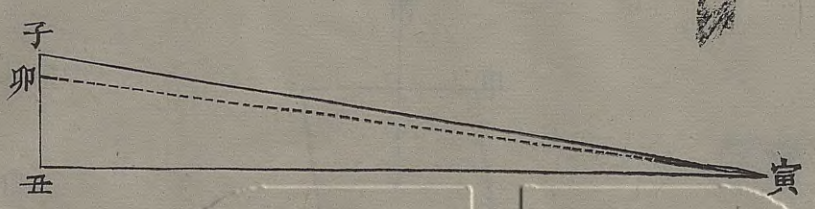
有一圓形。又一眾界形。此圓界度。若與



彼眾界總度等。則圓形之面積。必大於眾界形之面積也。如甲乙丙丁圓形之周界。與戊己庚辛等邊四角形之四邊總度等。則圓形之面積。必大於等邊四角形之面積矣。前言凡圓形之輻線。與一直角三角形之小邊線度等。而圓之周界。與三角形之大邊線度等。則三角形之面積。與圓形之面積相等矣。今試以甲乙丙丁圓形周界。為三角形之大

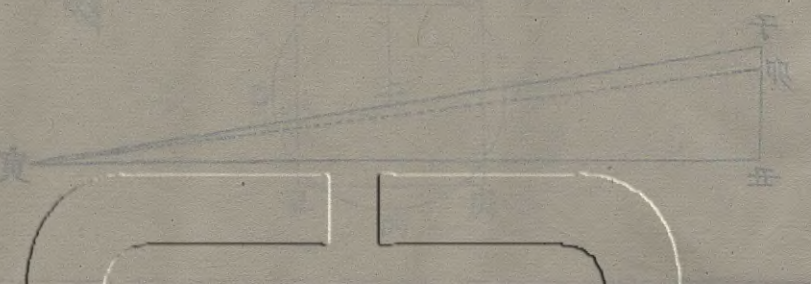


邊以甲乙丙丁圓形之甲壬輻線為三
 角形之小邊作一子丑寅直角三角形
 則三角形之丑寅大邊線度亦與戊己
 庚辛四角形之四邊總度等而三角形
 之子丑小邊線度雖與圓形甲壬輻線
 等却比四角形之自壬心至癸邊所作
 垂線為長若將三角形之子丑小邊線
 照四角形之壬癸垂線度截開則分子
 丑線於卯復自卯至寅作一斜弦即成



卯丑寅一直角三角形而此卯丑寅三
 角形之分與戊己庚辛四角形相等也
 此卯丑寅三角形自子丑寅三角形分
 之則卯丑寅形必小於子丑寅形今甲
 乙丙丁圓形之面積既與子丑寅三角
 形之面積等而戊己庚辛四角形之面
 積又與卯丑寅三角形之面積等則戊
 己庚辛四角形之面積必小於甲乙丙
 丁圓形之面積可知矣觀此凡界度相

等之形。圓界所函之分。比眾界所函之分必大。而眾界所函之分。與圓界所函之分同者。則眾界之總度。復比圓界度大也。



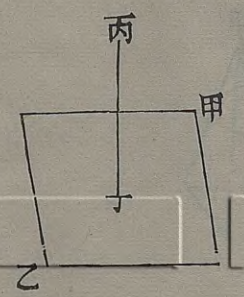
幾何原本五

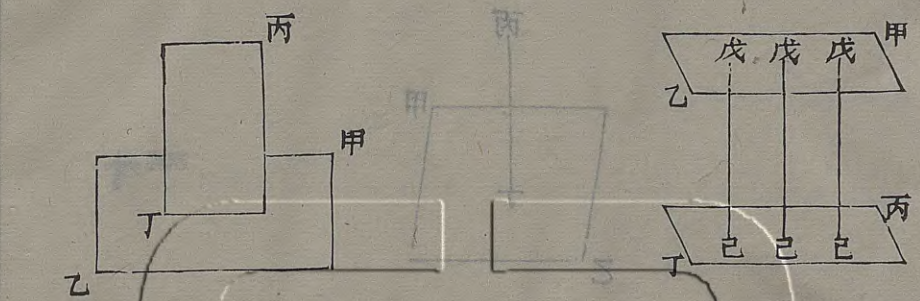
第一

平面之上。所立直線。無少偏倚。其各邊所生之角。必俱直。則謂之平面上所立垂線也。如甲乙之平面。正立一丙丁線。不偏不倚。此即為平面上所立之垂線矣。

第二

凡兩平面相對。其所立眾垂線度。俱各





相等。則此相對之平面。謂之平行面也。如甲乙丙丁。二平面間所有戊己衆垂線之度俱相等。此甲乙丙丁。二平面。卽爲平行面矣。

第三

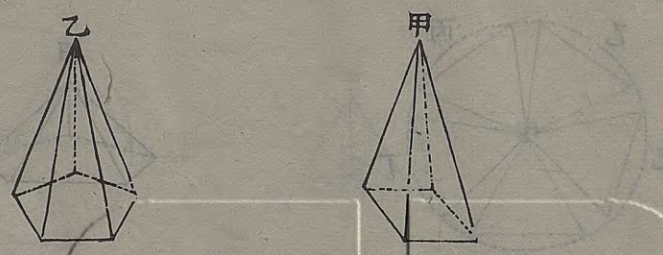
平面上復立一平面。無少偏倚。其兩邊所成之角。必皆爲直角。則謂之平面上所立直面也。如甲乙平面上所立之丙丁平面。無偏無倚。兩邊亦俱成直角。此

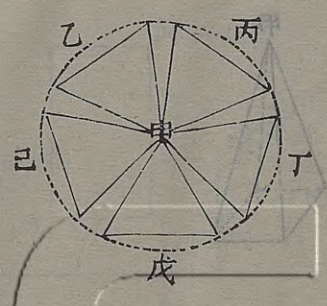
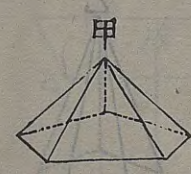
卽爲平面上所立之直面矣。

第四

凡各面相合。其每面之角所合處。復成一種體角。則謂之厚角。夫厚角必自三面合之乃成。其面多者。爲各瓣相併所成之厚角也。如甲圖四面。爲四瓣相併所生之厚角。乙圖五面。爲五瓣相併所生之厚角是已。

第五



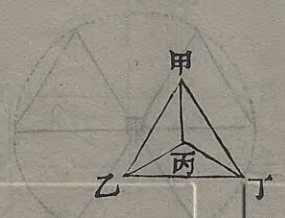
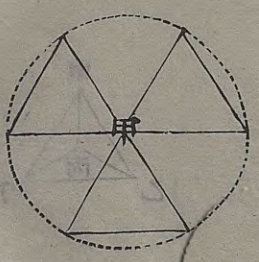


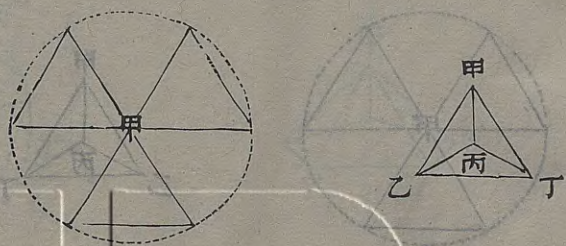
凡各面相併所成之厚角。如將各面計之。則其衆角所合之分。必不足於四直角度也。如甲圖五面合成之厚角。若將其五面展開使平。作乙丙丁戊己平面之五瓣。復以甲為心。作一甲圓。其乙丙丁戊己之五瓣相離處。不能滿甲圓之周界矣。因其不滿於圓之周界。故比四直角為不足也。或以四直角分。強欲作一厚角。則其瓣過於大。必不能成平面。

所合之厚角矣。

第六

凡等邊三面所合厚角。其三面內之兩面角。併之必大於一直角度也。如甲丙乙丁之等邊三面所合之甲厚角。將乙甲丙丙甲丁二面併之。必大於一直角度矣。依前節法將甲厚角展開使平。雖不足四直角之度。而乙甲丙丙甲丁之二面併之。則較之一直角度為大焉。何

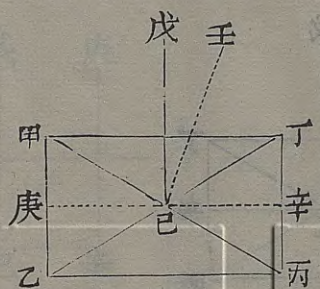




以見之。夫三面展開其所離之虛分。仍
 有三面之分。以三面之實分。合三面之
 虛分。則為六角之全形。此六角之全形。
 得四直角度矣。六角而得四直角。則三
 角必得二直角。三角既得二直角。則二
 角相併。必大於一直角可知矣。

第七

凡平面二線交處作一垂線。正立而無
 偏倚。此線任在平面各處。俱為垂線。如

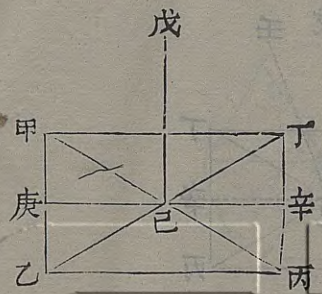


甲乙丙丁平面上。甲丙丁乙。二線相交
 己處。作一戊己垂線。正立而不偏倚。則
 此戊己線。任在甲乙丙丁平面上某一
 處。俱為垂線也。假使戊己垂線。不能正
 立而有所偏倚。則如壬己線。近於辛而
 離於庚矣。壬己線既近於辛而離於庚。
 則偏向於丁丙而遠於甲乙。而壬己丁
 壬己丙之二角為銳角。壬己甲壬己乙
 之二角為鈍角矣。戊己既如壬己。則不

得謂之甲丙丁乙二線相交處正立之垂線矣。

第八

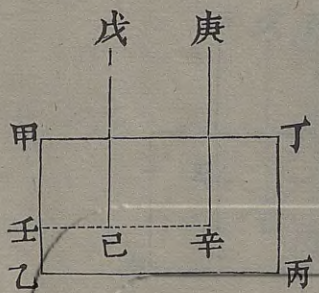
衆線交處立一垂線其各角若俱直此所交各線必在一平面也如甲丙乙丁庚辛之三線相交處立一戊己垂線其與衆線相接各角若俱直則此相交之三線必在一平面也夫衆線之相交固在平面而垂線之所立正所以考面或在



一角不直則不得謂之平面矣。

第九

平面上若立二垂線必互為平行線如甲乙丙丁之平面上立戊己庚辛二垂線則此二線互為平行線也試自辛過己至壬作一辛壬線則戊己庚辛二垂線所立之分必正其在甲乙丙丁平面上任指何處所生之角俱是直角故戊己壬庚辛己二角俱為直角而



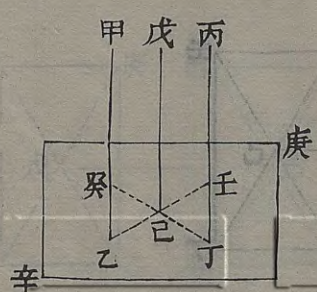
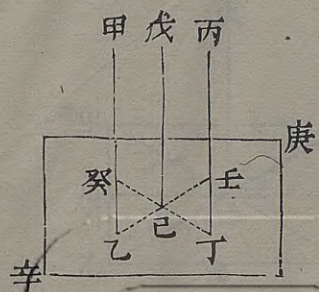
見本卷首

相等也。且此三角。又為二線與一線相交所成之內外角。其度既等。則戊己庚

辛。二線。必為平行線矣。如首卷第二十一節。

第十

有二線與一垂線平行。雖不在平面之一界。此三線亦互相為平行線也。如甲乙丙丁。二線。俱與戊己一垂線平行。不立於一直線上。雖不居平面之一界。此三線亦必互為平行線也。試於甲乙丙



丁。戊己。三線之末。作一庚辛平面。此平

面上之戊己線為垂線。其四圍平面所

生之各角。俱是直角矣。復自乙過己。自

丁過己。作相交二線。則成甲乙己。戊己

壬。二角。丙丁己。戊己癸。二角。此各二角。

俱為平行線一邊之內外角。俱為相等

角矣。見首卷第二十一節。而甲乙己。丙丁己。二角。

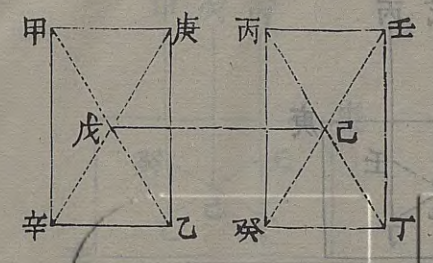
亦俱為直角。夫甲乙。丙丁。二線。在庚辛

平面上所生之角皆直。又皆與戊己垂

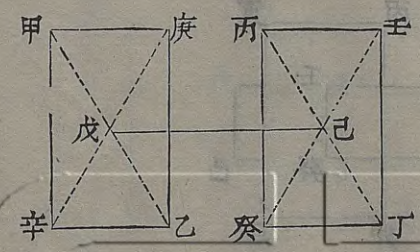
線所生之角等。則甲乙丙丁二線亦皆得為垂線。其與戊己線為互相平行之三線可知矣。

第十一

相對二平面之間橫一直線。此線在二平面上所生角若俱直。則此相對二面互相為平行面也。如甲辛乙庚丙癸丁壬二平面之間橫一戊己直線。此戊己線未所抵處。其四圍俱成直角。則此二



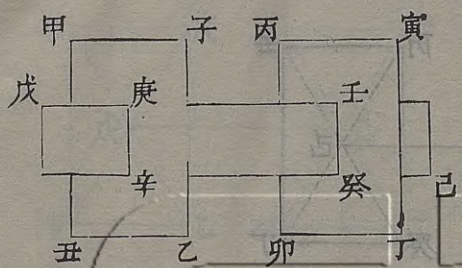
平面互相為平行面矣。試將此二平面之戊己橫線所抵之處。作甲乙庚辛相交二線。丙丁壬癸相交二線。則戊己橫線於二平面各界所生之角。俱為直角。如甲乙丙丁二線與戊己橫線相抵所生之甲戊己戊己癸二尖交錯之角相等。故甲乙丙丁相當之二線為平行矣。又如辛戊己戊己丙二尖交錯之角亦相等。故庚辛壬癸相當二線亦為平行



矣。相對二平面之上。所有之相當各二線。既俱同為平行線。則相對之二平面。自然互為平行面矣。

第十二

有二平行面橫交一面。其相交處所生二線必平行。如甲乙丙丁。平行二面上。橫交一戊己平面。其庚辛壬癸之相交處所生二線。亦俱平行也。何以言之。庚辛壬癸。平面相交處所生二縫。既在甲



乙丙丁二平面之上。自然與甲乙丙丁

二面之甲丑子乙丙卯寅丁之各線。同

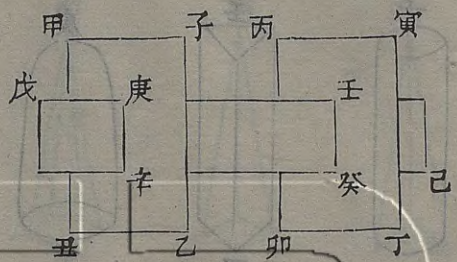
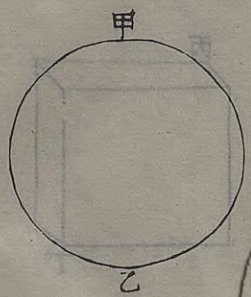
為平行線。且又在戊己一平面內。其分

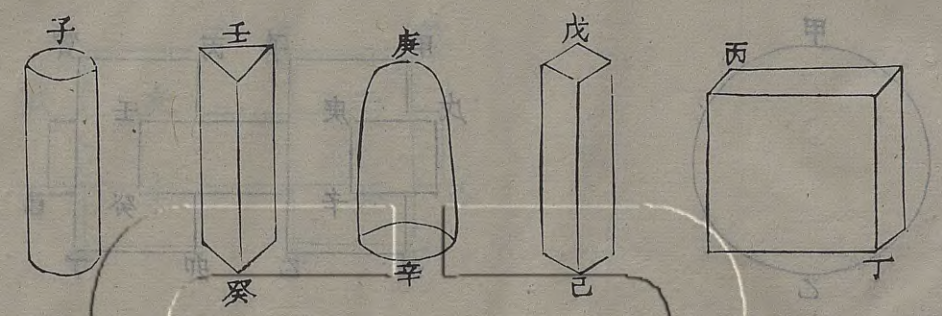
自然相對。故此二平面與一平面相交

之縫線。亦得為平行也。

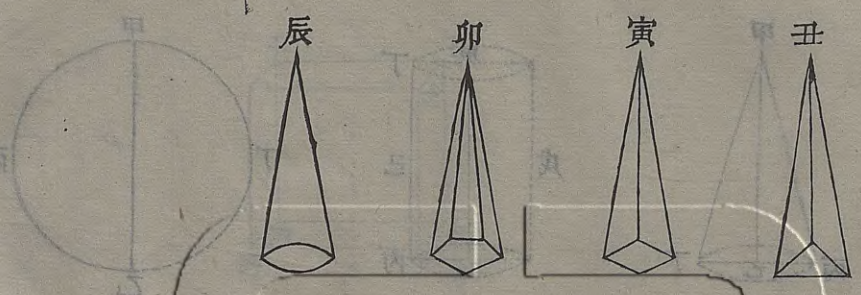
第十三

凡各種面內所積之實為體。而皆因其面以名之焉。如全體不成角度。止現圓之圓面。則謂之圓體。甲乙圖是也。全體





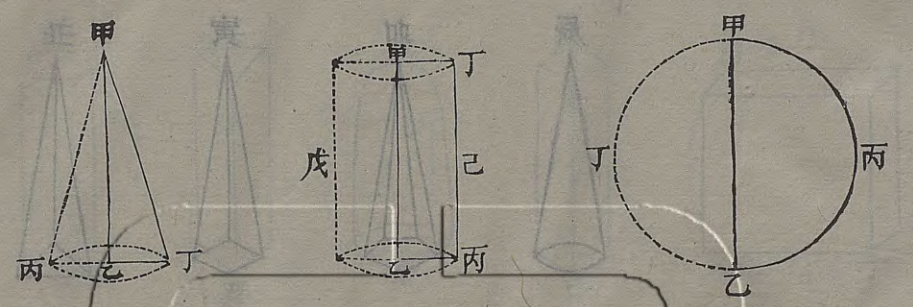
各面俱平。各邊相等。所成各角又等。則謂之平面正方體。丙丁圖是也。全體各面雖平。體長而面成兩式。其相對各面。仍兩兩相等。相對各邊。則又平行。角又相等。此謂之平行長方體。戊己圖是也。體有曲平兩面相雜。而不成等邊等面。則謂之底平半圓體。庚辛圖是也。全體相對之各面不平行。上下兩面平行。則謂之上下面平行體。壬癸圖是也。體圓



而上下面俱平。則謂之長圓體。子圖是也。底為平面。其各面俱合於一角而成厚角。則謂之尖瓣體。底三角者。謂之三瓣尖體。底四角者。謂之四瓣尖體。底衆角者。謂之衆瓣尖體。如丑寅卯三圖是也。又或底面圓而漸銳成形。則謂之尖圓體。辰圖是也。

第十四

凡圓體長圓體尖圓體。俱生於圓面。故



其外皮面積亦生於圓界一旋轉之度分耳。如取甲乙丙丁之圓形。則以甲乙徑線為樞心。將甲丙乙半圓作轉式。旋轉復還於原處。即成甲丙乙丁一圓形體。如取甲乙丙丁之長圓形。則以甲乙中線為樞心。將丙丁線界作轉式。旋轉復還於原處。即成甲乙丙丁一長圓體。如取甲丙丁平底尖圓形。則以甲乙中線為樞心。將甲丁邊線作轉式。

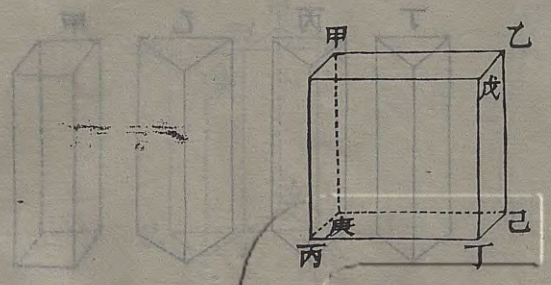
旋轉復還於原處。即成甲乙丙丁一尖圓體矣。

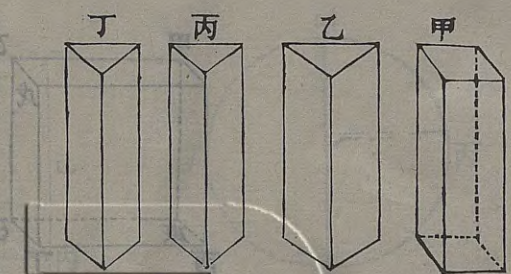
第十五

凡各體形。其各面平行相當。則相對兩邊面積俱相等。如甲乙丙丁之正方體。其甲戊庚丁。甲己。戊丙。甲丙。乙丁。六面俱各平行。故相對二面之積。自兩兩相等也。

第十六

凡各體形。其各面平行相當。則相對兩邊面積俱相等。如甲乙丙丁之正方體。其甲戊庚丁。甲己。戊丙。甲丙。乙丁。六面俱各平行。故相對二面之積。自兩兩相等也。

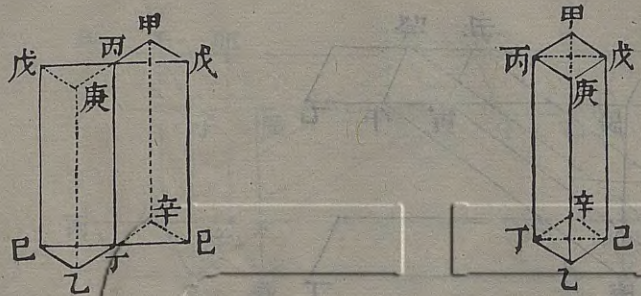




凡體面式不一而積等者。為積數相等之體。面式既同而體積又等者。為面式體積全等之體。如甲乙二體。為積數相等之體也。丙丁二體。為面式體積全等之體也。

第十七

凡平行面之長方體。自一面之對角線。平分為兩三稜體。此兩三稜體。必為面式體積全等之體矣。如甲乙平行面長

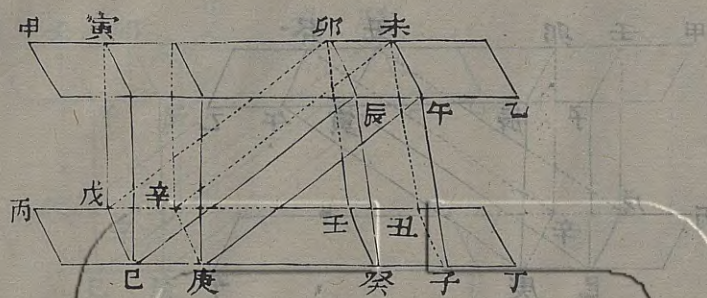


方體。自丙丁二角。至相對戊己二角。分為兩段。成戊丙乙丁己甲兩三稜體。為面式體積全等體也。試以甲丙庚戊辛丁乙己兩平面形。自戊丙丁己兩對角線。均分為兩三角形面。則所分之戊庚丙己乙丁丙甲戊丁辛己四三角形。面積俱相等。而丙乙甲己甲丁戊乙各面。又互為平行。必兩兩相等。再對角線分成之丙丁己戊戊己丁丙二面。原在一

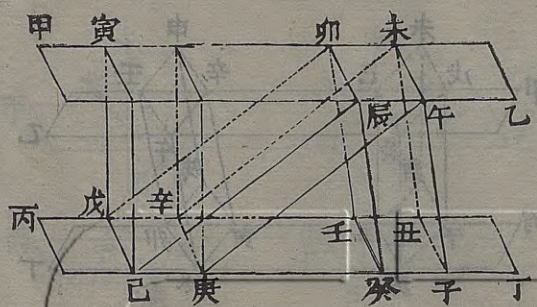
各面各邊度又俱等。則此壬庚癸巳二
平行體之積。必然相等也可知矣。

第十九

凡平行平面之間。所有立於等積底之
各平行體。其積必俱相等。設如甲乙丙
丁。平行二平面之間。有戊己庚辛壬癸
子丑。二等積之底。立一寅庚正面平行
體。一卯子斜面平行體。此二體之積必
相等。試自寅庚正面平行體之戊己庚

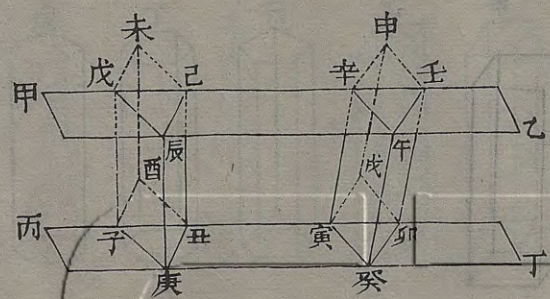
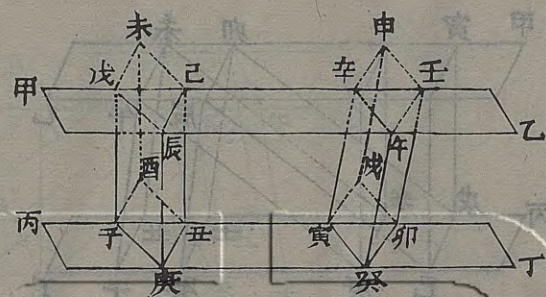


辛底。至卯子斜面平行體之卯辰午未
面。復作一卯庚斜面平行體。則寅庚卯
庚二體。立於戊己庚辛之一底。其積相
等矣。如前節所云。而卯子卯庚二體。又同立
於卯辰午未之面。其積亦必相等。是以
寅庚正面平行體。卯子斜面平行體。俱
與卯庚平行體相等。故云凡平行平面
之間。所有立於等積底之各平行體。其
積必俱相等也。



第二十

平行平面之間。有立於等積三角底之
 各三面體。其積必俱等。如甲乙丙丁平
 行二平面之間。有子庚丑寅癸卯等積
 三角底。立戊庚己辛癸壬之兩三面體。
 此二體積必相等。何以見之。若以此二
 體之上邊二面之戊辰辰己二界平行
 作戊未己未二線。辛午壬午二界平行
 作辛申壬申二線。又於此二體之下邊



二面之子庚庚丑二界平行作子酉酉
 丑二線寅癸癸卯二界平行作寅戌戌
 卯二線則二體所生酉子庚丑戌寅癸
 卯四邊平行二底俱在子丑寅卯二對
 角線其度相等。見三卷第三節其分比三角面
 各大一倍矣。復於所作二底邊酉戌二
 處作酉未一縱線戊申一縱線。即成未
 庚申癸平行面二方體矣。其酉子庚丑
 戌寅癸卯二底既俱相等。則所生之未

庚申癸平行面之三方體亦自相等。見本

卷第十此未庚申癸平行面三方體既

各相等則戊庚己辛癸壬之三面體為

未庚申癸三方體之正一半其積必等

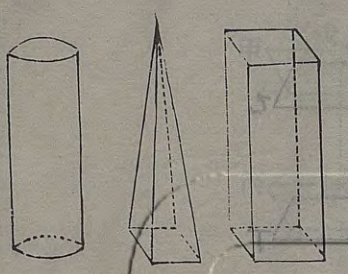
無疑矣。

第二十一

凡各種體形難以圖顯蓋以圖止一面

故也必用木石製之始能相肖况此各

種形體又或有外實而內空者必按其



形以求其理始可發明其精蘊矣。

第二十二

凡各面所成體形內其各面俱平行或

上下面為平行而立於等積之底其體

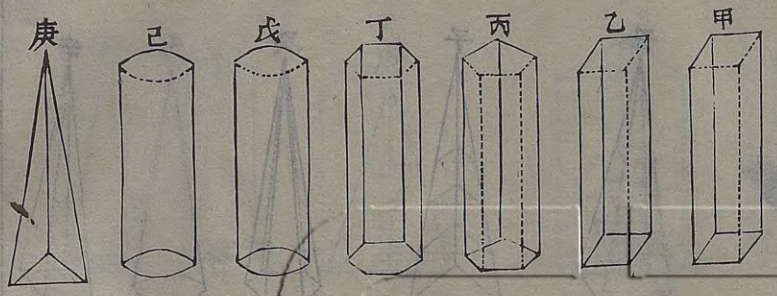
之高又等則其體之積亦相等如甲乙

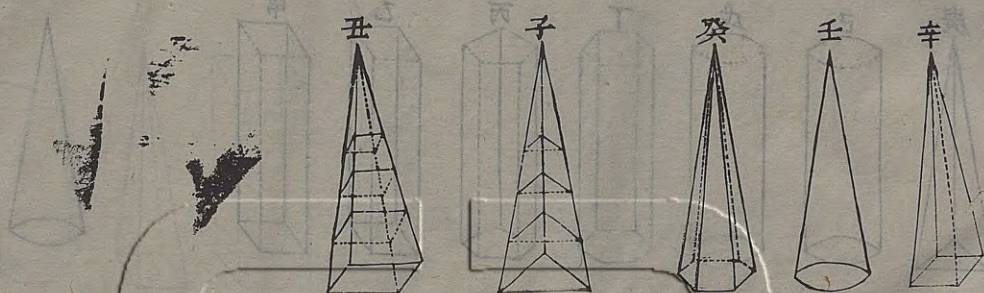
體其各面俱平行又如丙丁體其上下

面平行立於等積之底其高又等或又

如戊己體其上下面平行圓面積又等

高又等則其兩兩體積必相等矣又如

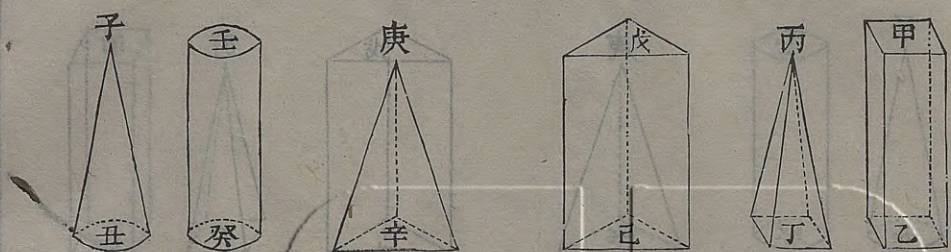




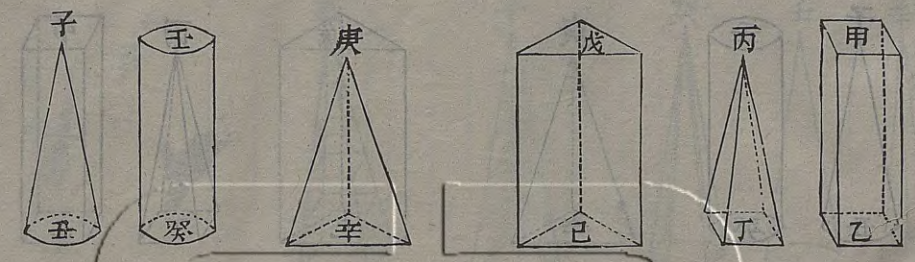
庚辛壬癸之類尖體形。苟立於等積之底。其體之高若等。則其體之積亦相等。何以見之。若將衆尖體。分爲平行底之衆小體。其所分衆小體之底度高度。必俱相等。如子丑圖。其所分小體之積俱等。故其全體之積亦相等也。

第二十三

凡上下面平行各體。與平底尖體同底同高者。不論平面圓面。其平底尖體皆



得上下面平行體三分之一。如甲乙上下面平行之長方體。與丙丁四瓣尖體。其乙丁兩底積等。甲乙丙丁兩高度又等。則甲乙長方體。與丙丁尖體三形等。如戊己上下面平行之三稜體。與庚辛三瓣尖體。其己辛兩底積等。戊己庚辛兩高度又等。則戊己三稜體。與庚辛尖體三形等。又如壬癸上下面平行之長圓體。與子丑尖圓體。其癸丑兩底積等。



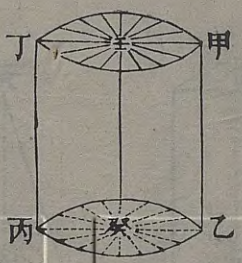
壬癸子丑兩高度又等。則壬癸長圓體與子丑尖圓體三形等。又如壬癸長圓體與甲乙戊己類體同底同高。則壬癸長圓體亦與丙丁庚辛類尖體三倍所合之數等。又或子丑尖圓體與丙丁庚辛類尖體同底同高。則子丑尖圓體三倍之。乃與甲乙一體等也。夫同底同高上下面平行體。既俱為尖體之三倍。則尖體為上下面平行體三分

之一可知矣。

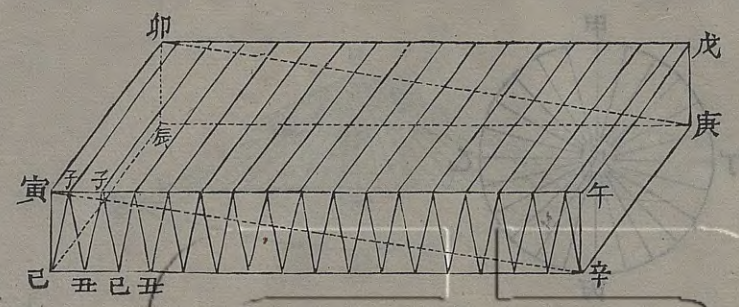
蓋甲乙戊己壬癸各體。其式雖不同。苟底積高度相等。其積必等。而丙丁庚辛子丑各體。式雖不同。苟底積高度相等。其積亦必等。故知丙丁庚辛子丑平底尖體。互為甲乙戊己壬癸上下面平行各體三分之一也。如將上下面平行各體。以木石為之。分條同底同高之各平底尖體。用權衡以較其分量。則各體之積分。自昭然可見矣。

第二十四

凡長圓體外周面積。與長方體底面積相等。而長圓體半徑。又與長方體高度相等。則長圓體積。必得長方體積之半。



也。如甲乙丙丁長圓體。其周圍外面積。與戊己長方體之庚己底面積等。而長圓體之壬丁半徑。又與長方體之戊庚高度等。則此甲乙丙丁長圓體積。必得戊己長方體積之一半也。試將甲乙丙丁長圓體。從壬癸中線。至周圍外面。分為千萬分。則成子丑己類千萬長尖體。此千萬長尖體之高。與長圓體之壬子半徑等。而千萬長尖體之共底。即長圓

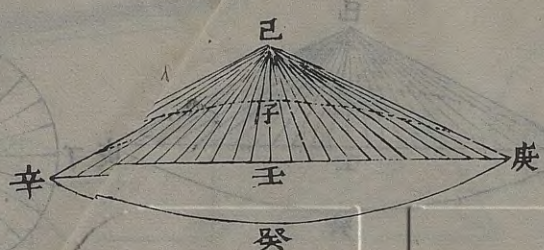
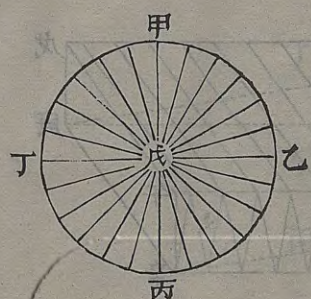


體之周圍外面積。則此千萬長尖體。必為戊己長方體之一半矣。蓋寅己辛三角面。為午己長方面之一半。見三卷第三節。而此子丑己類衆三角面。與寅己辛三角面等。見四卷第二十節。子丑己類衆三角面。既與寅己辛三角面等。則子丑己類衆長尖體。亦必與卯辰庚辛己寅三角體等。此卯辰庚辛己寅三角體。固為戊己長方體之一半。今長圓體所分之衆長尖

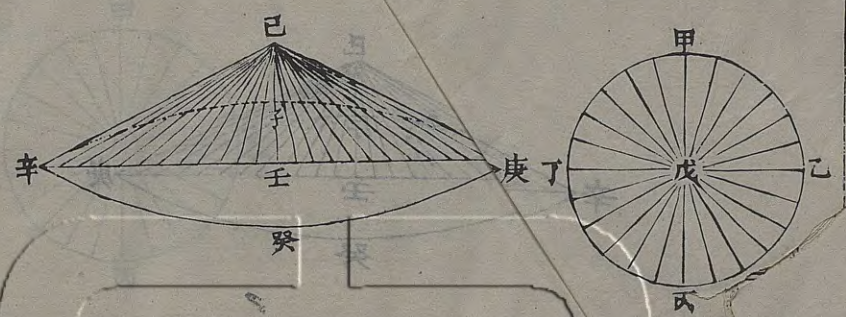
體既與卯辰庚辛己寅三角體等。則亦必為戊己長方體之一半。故甲乙丙丁長圓體為戊己長方體之一半也。

第二十五

凡球體外面積與尖圓體之底積等。而球體之半徑與尖圓體之高度等。則此球體之積與尖圓體之積等也。如甲乙丙丁球體之外面積與己庚辛尖圓體之庚子辛癸底積等。球體之甲戊半徑



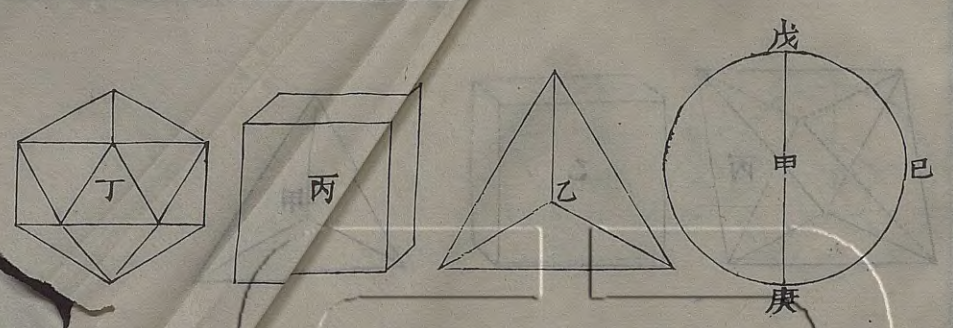
與尖圓體之己壬高度等。則此球體之積為與尖圓體之積等也。試將球體從中心分為千萬尖體。復將尖圓體亦分為千萬尖體。則球體所分尖體每一分必皆與尖圓體所分尖體一分等。何也。蓋球體所分尖體皆以球體之外面為底。而以球體之甲戊半徑為高。其尖圓體所分尖體皆以尖圓體之底為底。而以尖圓體之己壬高為高。夫尖圓體之



底積。原與球體之外面積等。而尖圓體之高度。又與球體甲戊半徑等。故此兩種千萬尖體。皆為同底同高。其積相等無疑矣。見本卷第十八節。然此兩種千萬尖體。即球體尖圓體之所分。其所分之體既等。則原體亦必相等可知。故曰球體與尖圓體俱相等也。

第二十六

凡各形外皮面積相等之體。惟圓體所

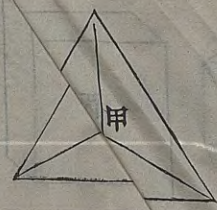
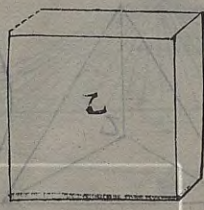
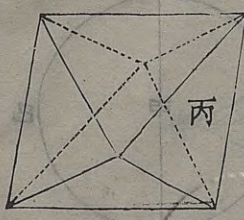


函之積數。大於他種各體所函之積。如甲乙丙丁。外皮面積相等各形內。甲圓體所函之積。必大於乙丙丁。直界體所函之積也。何也。大凡圓形。其半圓周一旋轉間。即成圓體。此戊己庚半圓周一旋轉。即成甲圓體。見本卷第十四節。又凡平面圓界所函之積。必大於等邊各形所函之積。見四卷第二十三節。平面圓界所函。猶大於各等邊所函之積。則圓體所函。必大

於各直界體所函之積可知矣。

第二十七

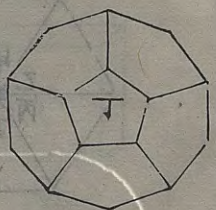
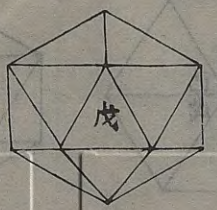
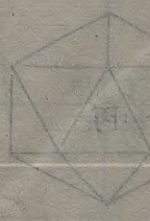
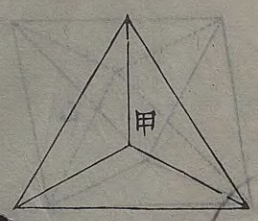
厚角所成等面體形有五種。各以面數而名之。其一為四面體。每面有三角。各三角之各三界度俱等。如甲圖是也。二為六面體。每面俱為正方。其方面之四角俱為直角。而各界互等。故又為正方形。如乙圖是也。三為八面體。每面有三角。各三角之各三界度俱等。如丙圖是也。

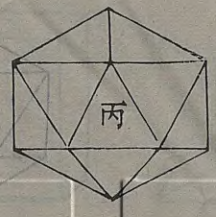
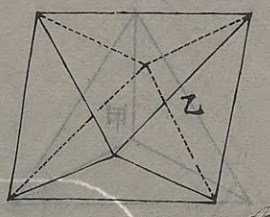


也。四為十二面體。每面有五角。各五角之五界度俱等。如丁圖是也。五為二十面體。每面有三角。各三角之各三界度俱等。如戊圖是也。

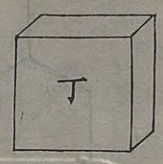
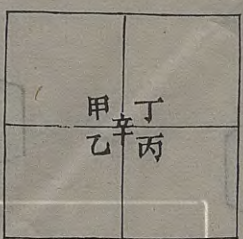
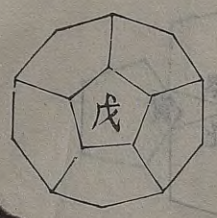
第二十八

前節所明五種厚角所成等面體形之外。皆合而生他形。蓋此五種厚角體。俱是四角形角四角五角之平面相合所成。自三界以下。不能成面。





於各直界。亦不能成角。
 如甲四面體。其四厚
 角。皆所成。其三角。形所合而成也。乙八
 面體。其四厚角。皆四平面三角形所合
 而成也。丙二十面體。其十二厚角。皆五
 平面三角形所合而成也。然平面三角
 形所合。過於五形。則不能成厚角。故平
 面六三角形。合於一處。即成庚形。其甲
 乙丙丁戊己六角相合。與四直角等。見首

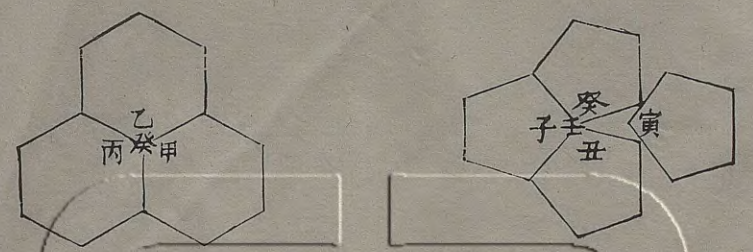


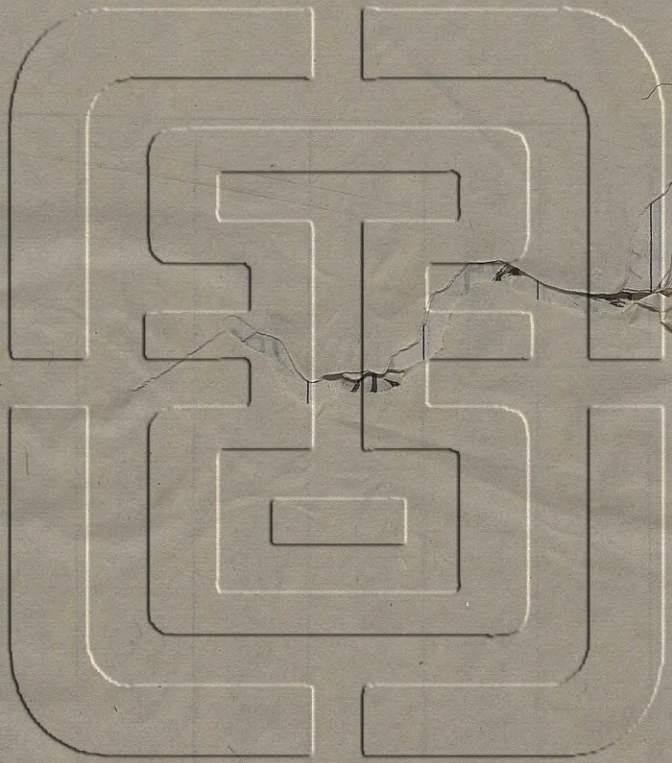
卷第十 五節 既與四直角等。則為平面。不成
 厚角矣。如本卷第五節六形相合。尚不能成厚
 角。况多形乎。是故平面三角形所生厚
 角體。僅得四面八面二十面三種而已。
 若夫平面正方形四角形所成厚角。如丁
 六面正方形。其八厚角。皆三平面四角
 形所合而成。此外更無他形。若將四平
 面四角形。合於一處。即成辛形。其甲乙
 丙丁四角。既俱為直角。必不能成厚角

四角形所生厚角。僅有一六面正
 方而已。至於平面五角形所成厚角。
 如戊十二面體。其二十厚角。皆三平面
 五角形所合而成。此外更無他形也。或
 將四平面五角形。如癸子丑寅之四角
 合於壬。此四角俱為鈍角。必大於四直
 角。既大於四直角。在平面尚不能相合。
 厚角豈能成耶。是以平面五角形所成
 之厚角。僅有一十二面體而已。或將平



面六角形之三形。合於一處為癸。其甲
 乙丙三角度。與四直角等。故不成厚角。
 六角平面相合。既不成厚角。其七角八
 角等形。愈不能成厚角矣。故曰四面六
 面八面十二面二十面五種體。只在三
 角四角五角三種平面形所生。此外不
 能復成他形也。





御製
卷二
全

