

國學小叢書

中國算學之特色

三上義夫著
林科棠譯



著者 三上義夫
譯者 林科棠
主編者 王雲五

國學
叢書

中國算學之特色

商務印書館發行

中華民國二十二年三月初版

(一〇二八七)

國學
小叢書
中國算學之特色一冊

每冊定價大洋貳角伍分

外埠酌加運費匯費

版 翻
權 印
所 必
有 究

原 著 者 三 上 義 夫

譯 述 者 林 科 棠

主 編 者 王 雲 五

發 行 人 王 雲 五
上海河南路

印 刷 者 商 務 印 書 館
上海河南路

發 行 所 商 務 印 書 館
上海及各埠

四〇〇五上橫

中國算學之特色

目次

一 緒論·····	一
二 中國算學上之時代區分·····	三
三 中國算學者與算學之進步·····	六
四 中國之古算書·····	十
五 古算書之著作年代·····	十四
六 古算書之內容——九章算術·····	二十三
七 古算書之內容——九章以外之書·····	三十
八 圓之算法·····	三十五
九 九九歌訣·····	三十九

十	算器算籌·····	四十三
十一	算籌排列法之變遷·····	四十七
十二	算器(續) 數術記遺·····	五十三
十三	宋元之算學·····	六十
十四	算籌與中國之代數學·····	六十四
十五	大衍求一術及招差與曆術·····	六十九
十六	律度量衡各種分配·····	七十一
十七	清代之算學·····	七十七
十八	中國算學之價值·····	八十一

中國算學之特色

第一章 緒論

中國之算學，其發達已有二三千年之歷史。以算學之發達，包含於如此之大文明中而有如此久長之歷史，世界諸國未嘗有也。就此點言之，印度或可與中國比較；然其他各國之算學史：在希臘則自紀元前六世紀至紀元後四世紀，不過有一千年之期；阿剌伯則僅限於自八世紀至十三世紀；日本之算學發達，係在德川時代；歐洲現在諸國，亦自十世紀時始有算學之歷史。然則中國之算學史，其有長期之發展，不能不謂爲世界中稀有之例也。此點中國與印度相同，所謂中國，所謂印度，於算學均有可觀，自不待言。然有如此久長之歷史，其造詣則不十分豐富。印度今姑舍而不論；中國之算書，其失傳不存者極多，因之，創發之妙術，亡失者亦不少，今日欲窺其全豹，則頗覺困難。故中國之算學，其實質不能謂爲貧弱，而就現所知者而言，亦不能謂爲豐富。雖然，有二千年或三千年歷史

之中國算學，爲何等形式而暗然無光，甚至不留其片影乎？原來算學之發達，泛言之，非僅舍舊法而新是謀，得所謂新陳代謝之進步，實則於古法上得新法，次第集積其智識而後得有發達。故傳統之繼承，若無阻礙，至少主要之部分必能留傳於後世。惟中國之算學，其傳統不能順調繼承，因之屢失其傳。如劉宋何承天之調日法，祖沖之之綴術，僅有零碎之記載，究爲如何之算法，惟有屬之推定而已。又，宋末元初發達之天元術，明代已失其理解，及清初與西洋之算學比較，始再明瞭其意義。蓋中國之歷史，雖有長期之年月，然其間治亂興廢，不能一定。算學殆亦與政治相同，時而興隆，時而衰亡，其間傳統或多中絕也。然以現存之算書及由其他片斷的史料所傳者觀之，則於量雖極少，而於質則不能謂爲不足。一觀中國算學之大體，或至中國發達之算學，其主要者，至少亦能知其大半也。夫中國算學，成自何人，如何發達，此等微妙之處，殆難輕下論斷，然主要部分之大體，恐不能悉數用何等之形式留於記錄。是則由此等材料所得之算法，必不甚多。此蓋明告吾儕：中國算學，由其長期歷史之比例言之，則不能謂爲十分發達也。然則，所謂中國人是否乏算學能力之疑問，豈無因而起哉？惟此問題，若未充分研究，實不能有所論斷。至於中國算學究爲如何，如何人以如何態度修學之，今

後向如何方向進行等問題，吾人實有考察之之必要。

鄙意如此云云，故以中國算學之實質不甚豐富，即謂中國之算學受外來之影響，實有所不能。蓋闡明中國之算學有何等特色，乃算學史研究上最重要之點。予之所研究者，即在斯焉。

第二章 中國算學之時代區分

中國古算書，現存者甚少。唐代所云古算書，不過十部，如近代刊行稱爲算經十書者即是。此外無遺留者。十書大概爲前漢末或後漢初至唐代之著作，大體上可以代表漢唐時代之算學。然算經十書之著作之前，亦不能謂算學不發達。以前之算學，雖無算書傳世，而其發達之狀態，尚不能謂爲不可知。如根據斷片史料之散見於各書者，其發達之狀態，不難想像得之。故古代算學發達之順序，今雖不能明瞭，然根據現存之材料，便宜上可以算經十書以前之時代爲第一期，則十書成立之時期，即屬第二期。此種區分，原屬不得已而爲之，蓋全爲人爲的假定，無精密之歷史的意味也。唐初十世中最後之一部出世以後，通唐代長期間，即無著述傳於後世。及宋末元初，始有幾許算書出而問

世，且傳之於現代。又唐宋長期間之算學發達，雖有一二事實不得宜明白，然此期中亦無甚大變化。及宋元之際，算學發達上，乃發生一大變化，構成前代未聞之新算學。若干人物與宋元新算學組織有關係者，其姓名可屈指而數，而其著書之傳於現在者，不過數人，如宋之秦九韶、楊輝、元之李冶、郭守敬、朱世傑等即是。彼等之算書，其著作年代，乃自紀元一二四七年至一三〇三年，即僅有五十七年之成績。元代以後，雖有一二算書，然云其主要者，則不外上述數種。在此極短期間，中國算學，別開新面最爲發達，乃一極顯著之現象也。蓋當時與西域交涉甚多，諸般事物，受西域影響者實不少，故算學之發達，與阿剌伯有多大關係，亦不難推知。然此時發達之算學，其實質如何，不能明確，因其影響之程度如何，亦不能決定。據予所見，中國算學與阿剌伯之算學異趣，其影響如何，實爲一問題也。

宋元之際，算學頗發達，歷學上亦作有授時曆，其後算學與曆學均衰敗不振。明代曆術，僅根據授時曆作大統曆，而不能有改曆頒發，此或限於算學之實力之故。明代之算書，亦有以年代不遠而得傳於現代者，然不足觀者頗多。唐順之、顧應祥等，乃明代算家中錚錚者，其著作在明代算書中，實

稱佳作，然不能完全傳授宋元之算學，甚至湮滅其真意義。蓋明代全爲算學衰退之時代，恐不能爲之特立一時期也。

中國算學發達之第四期，卽自明末以來繼續至現代爲止；至清末以來，則視爲形成第五期，亦無不可。如考察此期，則中國算學已採用西洋算學之研究法，步入世界一般之算學的生活中矣。中國算學者，在此期內，其態度比之前代，已大有變化：惟此時代爲日甚淺，猶在其過程中，故不能多論。

第五期之直前，卽在明末清初之第四期，乃古來算學受西洋之影響而復與西洋對立之時代；細別之亦得分爲數時期：初以西洋之曆算輸入而翻譯之；次則古來算學之探究，亦孳孳不倦。其後西洋算學之傳來，一旦中絕；關於古算書與西洋譯本之研究與解釋，一時盛行，亦有幾許可認爲創意者，出示於世。及十九世紀之中葉，西洋之微積分學者，翻譯已成，更進一步而研究之者，亦有之。斯時學者輩出，著作頗多，比之前代，其局面之新開，自不待言也。

中國算學之發達，大體上如上所述，然其間興隆衰亡，交互發現，則爲顯著之事矣。往古不可考矣，惟唐初則爲整頓算學之時代，惜自其後至宋，則與之相反，多無可觀者。宋之中葉，有沈括衛朴等

出，算學始稍稍進步，惜一旦衰沈，竟無後繼。及宋元交接之時代，算學大興，中國算學上之黃金時代，乃於此時出現焉。蓋斯時爲與西域有交涉之時，而後來清朝之算學，亦得西洋之曆算而始興隆；又以前古算書之著作時代，佛教已傳入中土，印度或西域之文化，已盛行輸入。由此言之，是算學之發達，僅在與外國關係交通之繁盛之時代。故中國之算學，古時即以西域之關係而構成，不僅宋元之際爲然也。某論者疑外來之關係，不能成立中國算學之大部分。此說亦有相當理由，不能一概抹殺。予之所承認者，或其某部分傳得西方之知識歟？雖然，中國之算學，欲斷爲悉受外來之影響，亦不易；蓋中國之算學，其固有之色彩，固甚濃厚也。予之所欲論者，乃指摘其特色，明其歷史上之進步耳。

第二章 中國算學者與算學之進步

中國之算學家，非僅僅研究算學，同時又爲曆學家，且往往爲高官顯者。如漢之張蒼及耿壽昌，皆爲算學史上之要人；張蒼則精律曆，而又長財政，十五年間居相位；耿壽昌則精於月行之研究，而又長於經濟，立常平倉，爲大司農中丞。

漢書藝文志，有許商算術二十六卷，而許商則四至九卿，著五行論曆，有功於塞河。
前漢末之劉歆，曾試作圓周率之推定，然又作三統曆，受詔校祕書，研究數術方技。

後漢之張衡（七八——一三九）爲有功算學之人，然又通天文陰陽曆算，善機巧；其所作之地動儀及激水而轉之渾天儀，甚有名。云其履歷，則爲河間相，又拜尙書。

劉宋之祖沖之（四二九——五〇〇），算學功績甚偉大，然又爲曆術大家，造自動船自動器械，研究指南車，爲有發明才之人；且著安邊論，說屯田農殖，注易、老莊論語等書。

唐初之王孝通，有算學著作而又爲曆官。李淳風爲太史令，曆術大家，精於天文星占。僧一行（六八三——七二七）爲知名之高僧，以造大衍曆有名，善算學。

宋末元初算學勃興時，有秦九韶，其傳記不見於宋史，然據癸辛雜識及其著書之序文觀之，知其少學於太史，是雖算學家，亦必以曆爲主。

與秦九韶同時之元李冶，初爲金進士，供職知州；州城陷後淪落民間；後受元世祖召，論時弊，爲翰林學士。

秦李二人之前，有宋之沈括，（十一世紀後半）其所著夢溪筆談中，有記算學者，在其時代，甚足珍貴。然據是書觀之，知括博學多識；據宋史，則括誠多藝多能，殆可謂中國算學者之模範的人物也。括進士出身，善文章，亦爲土木技師，及太史令。其爲太史令時，登用達算術，能改曆，製刻漏新制。其爲地方官，頗有治績，精戰術，爲築城術大家，且能實際築城。又括手腕力甚強，堪爲武將，善能鼓舞士氣；又長於音樂，自作曲，明醫藥。曾出使外國，往返時察其地理，作立體之模型圖。蓋括爲如此人物，而又兼學算學者也。

中國之算學者，如沈括之多藝多能，殆不多觀，然中國之算學者，概非僅以算學爲唯一能事，據其傳記觀之，多爲官吏、曆術家、經學家，非如此人物，則傳記不載。蓋惟如此人物始習算學，否則必不知加以研究也。

日本之算學者，實無堪與沈括相較之人物。中根元圭，醫家出身，富於思考，精音樂度量，以曆術見知將軍吉宗，然無沈括之經世才。本多利明（一八二〇年歿，年七十七），精航海術，長於經世才，然不能如沈括之多藝多能。若欲於他國求可敵沈括之算學者，則德國之來本之（Leibniz）及

法國革命時之卡羅 (Lazare Carnot)，在某點或可與沈括比較，然如一面遠勝沈括，同時又多藝多能，則不能如沈括也。惟希臘之 Archytas，其閱歷等，最可與沈括相比。蓋如沈括之人物，全世界算學史上多無之，惟中國產此人而已。予以沈括爲中國算學者之模範的人物或理想的人物，誠克當也。

中國之算學者，不見載於傳記者，亦有若干人：如三國時魏之劉徽，六朝時之張邱建及夏侯陽，年代不詳之孫子、宋末之楊輝皆是。彼等或爲算學專門，或有無地位皆不明瞭。如元之朱世傑，據其算書序文觀之，云周遊四方而爲教授，其殆算學專門家歟？就宋元之算書考之，則與曆有關之算學者與專門算學家，其間，不無多少相異之痕迹。故欲斷謂中國無算學專門家，僅有兼治算學之人，恐亦有所不能也。然事實上，算學者多非僅以算學爲職業，而有朱世傑等爲算學專門家，洵可異哉！

中國之算學，歷史甚長，且生於偉大文明系統中，然不能比較的豐富發達者，其主因蓋在中國算學家，多不以算學爲專業，此種意見，或亦非過言。然因何而至斯乎？其理由更有考究之之必要，今姑省之。

就如右判斷，則中國之算學，或宜與希臘算學發達一比較。希臘亦無專業算學者，與中國同。蓋希臘之算學者，皆為哲學者；而哲學者無不兼治算學。因為哲學者，故多長於文章。蓋希臘算學者之文章甚美，其中選為希臘文學之模範而亦無所愧者，亦有之。而希臘之算學，實為天才的，他國亦不能如其偉大。

第四章 中國之古算書

中國之古算書，屬於漢唐時代者，僅有十部，以算經十書之名刊行於世，即周髀算經、九章算術、孫子算經、五曹算經、海島算經、夏侯陽算經、張邱建算經、五經算術、數術記遺、緝古算經等。漢唐時代所著之書，因非限於十書；據歷代正史之藝文志或經籍志觀之，尚有若干算書存在，惟均失其傳，今所存者，不過此十書而已。夫欲以此十部之算書，窺漢唐時代之算學，自屬不甚滿足。然在某意味上，必疑及此十部是否為代表的著作；蓋作此種思想，於討論上極有便利也。

所謂便利者，非他，即上述十書，為唐時選舉中明算科之用書，在當時可視為代表的著作是也。

明算科之用書固非僅此十部，然其他算書亦不過綴術與三等數而已。是明算科之用書不外此十部耳。十二部之中，其現存者，惟有十部，其他算書悉失其傳。蓋十部所以能傳存者，其原因卽在於爲明算科之用書，而唐之明算科之用書，宋亦用之，因此乃得傳於今日焉。

如斯言之，現在之算經十書，是唐明算科用書十二部之十部。既爲明算科之用書，在當時，自可視爲代表的著作，且其在唐初定爲明算科之用書，視爲代表唐初之算學，亦無不可。如十二部完全存在，固屬美事，然十二部猶存十部，則當時之算學，究爲如何，大體上亦足以想見矣。

十二部中所失之二部，究爲如何之書，此吾人所欲知之者。其一名三等數者，據云爲董泉作，由其書名觀之，雖分二三種解釋，大概其中所論者，爲整數性質，或爲不定解析術，亦未可知。使所料非謬，則失一甚足珍貴之書矣。其他一書爲綴術，不知中記何事。據隋書律曆志、祖沖之之綴術，爲算定圓周率者，其文云：

「指要精密，算氏之最者也。所著之書，名爲綴術，學官莫能究其深奧，是故廢而不理……」
是綴術爲一甚美之算書，乃失而不傳，誠可惜哉！幸隋書記其事，雖極簡單，然亦足資參照矣。惟

隋書記事，明云綴術爲圓周率之算定，而後世學者，無論中國日本，多不以綴術爲算定圓周率之算法，亦不以爲記其法之算書，實一疑問也。

所謂綴術之名稱，在唐代與祖沖之之著作，當時尙無何等端緒，及宋乃有二說：一爲沈括之夢溪筆談，一爲秦九韶之數書九章。兩書均以曆術事項，記所謂綴術之名稱。沈括既言其曆術關係，又言祖亘有綴術二卷。祖亘者，卽祖沖之之子祖暅之，或有以暅之爲暅者。父子共有綴術之書，則據沈括記事言之，祖暅之之綴術，殆爲曆書。如使所料非謬，則祖沖之之綴術，或亦爲曆書。蓋曆術書中記算學之事，殆屬當然之事，不足怪也。

予以綴術視爲曆書者，卽在上述之理由，然另有一理由在。明算科用書之十二部中，如周髀算經爲曆書，五經算術中，亦記與曆有關之事。周髀持蓋天說，與渾天說。長相抗爭，惟在曆家間，則渾天說較蓋天說爲有勢力。但周髀雖爲曆書，而在唐代言之，則失之過略。故如採用此書，則必需他種稍優之曆術書。綴術既爲曆書，以補周髀之缺，實甚適切。著者祖沖之既爲曆術大家，則其著曆術書之綴術，實至適當也。

根據如斯理由言之，則綴術或爲曆術書，記載曆術上使用之種種算法。據南史七十二傳觀之，綴術造有數十篇，是必大部之書。又唐之明算科，對於用書十二部各各規定學習年限，如一觀之，則吾人亦必以爲大部之書。唐書選舉志云：

「孫子、五曹共限一歲；九章、海島共三歲；張邱建、夏侯陽共一歲；周髀、五經算術共一歲；綴術四歲；緝古三歲；記遺三等數皆兼習之。」

諸書中綴術四歲，年限最長。在現存十部中，九章算術爲最重要，又最大部，故加以海島算經，共學習三年。至緝古算經，現存本雖爲短篇，然甚難，宜學習三年。獨有綴術，須學習四年。現存諸書中最大部之九章算術，成自九卷；綴術既云有數十篇，則其爲大部而又甚難，殆可知矣。

明算科用書十二部，可分爲二通觀之，卽記遺與三等數，無年限之規定，僅兼習之。選舉志又云：「試之日，九章三條，海島等七部各一條，十通六；記遺三等數帖讀十得九爲第。綴術七條，緝古三條，十通六；記遺三等數，帖讀十得九爲第。落經者，雖通六不第。」

唐六典於綴術七條，則云六條；於緝古四條，則以爲三條。據此觀之，記遺與三等數，與用他十書

之意味，稍稍不同。此姑不論，即在其他十書，綴術、緝古二書與他八書，試驗時亦分爲二起辦理，蓋以綴術、緝古二書，爲較高等也。是則綴術爲最重要之算書，不難想像而知；而除此書外，僅由現存十部，或難窺唐初算學之全豹。然祖沖之之子暉之所使用之算法，其一部分見於九章注；如一觀之，對於綴術，亦得多少之推測。故綴術之書雖失，而唐初之算學究爲如何，大體上亦能考察也。

第五章 古算書之著作年代

唐明算科所使用之算書十二部，其在唐初已有之，明甚，然其著作年代，有明瞭者，亦有不明瞭者。十二部中其最新者，爲緝古算經，唐初王孝通作，卷首有上天子表，惟不記年歲。其表文云：

「臣今更作新術，於此附伸。臣長自閩閩，少小習算，鑄磨愚鈍，迄將皓首；鑽尋祕奧，曲盡無遺，代伏知音，終成寡和。伏蒙聖朝收拾，用臣爲太史令；比年以來，奉勅校勘傳仁均曆……」

觀此，緝古算經，殆著者老後之作。蓋王孝通之校傳仁均戊寅曆，在武德九年，其著緝古算經，自必在武德之後，或即太宗貞觀中事也。王孝通於其上表中，述前代諸算家不備之點，且言費苦心之

結果始能作此書云。

「臣晝思夜想，臨書浩歎，恐一旦瞑目，將來莫觀；遂於平地之餘，續狹斜之法，凡二十術，名曰緝古。請訪能算之人，考論得失；如有排其一字，臣欲謝以千金……」

觀此，是王孝通以本書之算法爲自己創意，且確信之者。卽吾人認其算法爲王孝通所創，亦無不可。蓋其注解，亦王孝通自作也。

綴術爲祖沖之所作。沖之雖沒於南齊永元二年（五〇〇），然其著作，或在劉宋時代。隋書律曆志記圓周率云：

「宋末南徐州從事祖沖之，更開密法……所著之書，名爲綴術。」

是綴術正可視爲宋末之作，而齊高帝之廢宋主自立在西曆四七九年，則綴術之作必在四七九年以前也。

祖沖之子暉之有作綴術二卷。王孝通上緝古算經表云：

「祖暉之之綴術，時人稱精妙。」

蓋作於父冲之之後也。據暄之之曆術司蹟觀之，綴術之作，在梁天監中，當於西曆五〇三年至五一〇年。

五經算術，北周甄鸞撰。數術記遺，漢徐岳撰，有甄鸞注本，又有甄鸞重述之本。其徐岳本文極短，甄鸞托徐岳名而偽造者。徐岳爲漢末人，其學得自乾象曆作者劉洪。書中有「刹那」等語，可見佛教傳入之關係，其甄鸞重述本，且明引用佛典。據佛祖歷代通載，甄鸞爲擁護佛教盡力之人。北周年代，在西曆五五七年至五八一年，則甄鸞重述本，殆爲此期間之作。或有以數術記遺爲偽書者，然卽爲偽書，爲稍後之作，終不失中國算學史上好資料也。

夏侯陽算經序又云：

「五曹孫子，述作滋多，甄鸞劉徽爲之詳釋。」

其上卷言解法不同云：

「……至宋元嘉二年，徐受重鑄，用二尺三寸九分；至大同元年甄鸞校之，用二尺九寸二分。然異時事變，斗斛不同。」

由此言之，是夏侯陽算經，必後於五曹算經及孫子算經，且後於劉徽及甄鸞，至少或與甄鸞同時；其云大同元年，則其作於斯年以後，亦必無疑矣。

張邱建算經有署名清河張邱建之序文，中有云：

「其夏侯陽之方倉，孫子之蕩杯，此等之術，皆未得其妙，故更造新術，推盡其理，附之於此。」

是又在孫子夏侯陽之後也。若夏侯陽與甄鸞同時或較後，則張邱建算經，必爲甄鸞以後之作。然是書有署爲甄鸞注經者，是甄鸞加以注解也。由此言之，夏侯陽張邱建與甄鸞爲同時代之人，其三人前後如何，或無關於著作之年代也。總之，此書尙有多少可疑者，然無論如何，視爲西曆六世紀中葉之作，或無不可也。

五曹算經及孫子算經在夏侯陽算經以前，觀於夏侯陽之序文即明。又其序文中有云：「五曹孫子，述作滋多，甄鸞劉徽爲之詳釋。」如信其說，以爲有甄鸞劉徽之注，則除甄鸞存而不論外，而劉徽爲三國時魏人，於三國末注九章算術，五曹孫子兩書，亦可視爲三國末已有之矣。兩書事蹟，所知者僅此，其他無所聞焉。

五曹算經，或亦爲古書，然其算法，多無可觀者，不能如古算書富於價值。孫子算經，有視爲卽作兵書之孫子所作，蓋以爲先秦之古書也。抱此見解者，始於清之朱彝尊，輒近往往亦有主張之者。清阮元（一七六四——一八四九）著疇人傳（一七九九）卷一云：

『朱竹垞以孫子算經爲孫武作；戴東原以長安洛陽相去，及佛書二十九章語，斷爲漢明帝以後人。余攷韋曜博奕論，枯棊三事注，引邯鄲淳藝經，謂：「棊局十七道，而孫子乃云。棊局十九道，」則其人當更在漢以後矣。』

其言誠足以博吾人之首肯也。然其中有後添加者，亦未可知，故有視爲古而又別持他說者。然孫子之名，不見漢書藝文志，或漢代無此書也。

周髀算經，始於周公與商高之問答，更附加以後人之問答。如周公之問答爲實話，亦一頗古之書也。然此書不見於藝文志，疑漢代亦無此書。飯島忠夫氏支那古代史論有云：「所謂周髀之稱，屢現於蓋天與渾天爭論中，或作於前漢末至後漢初之時。」此言，吾人當亦與以首肯也。

九章算術，爲中國古算書中最切要者，又甚古者。普通以此書爲六藝之一，信爲周公時之書。遠

藤利貞之日本數學史（一九一八年刊）云：

「九章有二：一名黃帝九章，一名周公九章。黃帝九章，乃中國上古所傳之算法，有熊氏命隸首作者。周公九章，乃周公旦撰定，爲六藝之一，用以教於國子，卽九數是也。」

然實際上，此書不能認爲有如斯之古。漢書藝文志既不載，前漢時代恐亦無此書。現在之九章算術，有魏劉徽注，唐李淳風注解。魏劉徽，西洋人以爲後魏之人，實則非後魏，乃三國之魏也。劉徽注之序，未紀年月；晉書律曆志云：

「魏陳留王景元四年，劉徽注九章。」

可知徽爲三國末之人，卽當於西曆二六三年。是書現雖有之，然亦宜再溯若干年數而考察之。劉徽注之序，言「徽幼習九章」，是劉徽幼時已有此書。再上溯之，則後漢末之鄭玄，漢序列傳中，云其通九章算術。又觀周禮注疏，其言六藝時所記之術名，與現存九章算術之章名略略一致。是鄭玄時已有其書可知矣。

劉徽序文云：

「按周公制禮而有九數；九數之流，則九章是矣。往者暴秦焚書，經術散壞。自時厥後，漢北平侯張蒼，大司農中丞耿壽昌，皆以善算命世。蒼等因舊文之遺殘，各稱刪補，故校其目，則與古或異，而所論者，多近語也。」

則九章算術之由來，亦得推測矣。此事可分三步論之：第一步，六藝中之數解爲九數之意，以九數與九章同視，而斷定九章爲六藝之一；鄭玄殆亦抱此見解。然此但逞連想，其根據何在，實不明瞭也。

第二步，以爲古九章遭秦火之害，張蒼及耿壽昌等求舊文之遺殘而添削之者。夫算學書亦受秦火之害，實一疑問，然秦末喪亂，算學書當然亦大受打擊。惟此，可存而不論；而張蒼及耿壽昌，必爲算學有造詣之人，其喜舊來算書而研究之，自屬當然之事。故九章算術或其前身，由張蒼等手中整頓一事，不能謂全然烏有也。

第三步，如此成立之九章算術，一觀其目次，則與古來之九章之名目，有多少不同。又書中多近語，不能以劉徽時之九章，認爲古書也。此或由較諸鄭玄所說名目有多少不同而言，亦未可知。然無

論如何，由其時見之，其內容包有近代之性質。故如以為雖為古書而非古書本來面目，乃適當之見解也。如斯言之，則第二步所謂張耿等之刪補，殆已查出矣。雖然，如其刪補為實際上有根據，則亦有考慮之之必要。蓋以藝文志不見九章書者，即以為漢代無此書，殆不免有多少勉強。據藝文志所載算書，有許商算術二十六卷及杜忠算術十六卷。然不能即謂通漢一代僅有此二部書也。且藝文志不立算術部類，兩書均見於曆譜項中，此乃吾人所宜注意者。或以此兩書雖有算術之名，實則記曆術之事，故不收錄於此部類中歟？若然，則以九章算術中，纖毫不記曆術，故無列入曆譜之性質，亦未可知。由是言之，則劉徽之所說，必不能排去；而九章算術，則不得不云：其前身至少在前漢時代已有之，而由張耿等手次第整理者矣。由曆術上觀之，後漢時代比前漢時代大加精細。故算學雖依舊相同，而九章算術之大整理，則非一朝一夕所能出，至少其內容之大半，必存立於前漢時代。吾人能確實言之者，九章算術在後漢末已有之，然如以為以前已有此書，恐亦非架空之想像也。

海島算經，魏劉徽撰，本稱重差，因開卷即言海島測量之問題，故唐時稱海島算經。其撰述之事，見劉徽九章注之序中。蓋此書與九章之注，於觀察三國末之算學的知識上極為重要也。

周髀算經之趙君卿注與劉徽之九章注，皆甚重要。疇人傳卷四，列趙爽傳於後漢，且云：

「今本周髀算經，題云漢趙君卿注，故系於漢代云。」

雖然，算經十書中之周髀算經本，單云趙君卿注，無漢字。宋李籍之周髀算經音義云：

「君卿，趙爽字也，不詳何代人。」

此殆至當之見解也。然趙君卿序文云：

「渾天有靈憲之文，蓋天有周髀之法，累代存之，官司是掌。」

可知其注乃作於靈憲及周髀累代之後也。靈憲爲後漢張衡作。張衡永和四年（一三九）歿，是其注至少可視爲張衡歿後一二代。又趙注中有九章云云，自又在九章以後。因此，後漢末之較前，尙無斯注。此蓋趙注年代上溯之界限也。至其下推之界限，有署爲趙君卿注甄鸞重述者，是不後於北周甄鸞之時代也。宋之鮑澣之言，君卿爲晉魏間人，似得之，然亦稍縮少年代之界限矣。要之，趙注與劉徽之九章注，雖不知其孰先孰後，然亦與劉注相呼應，於古代算法有所發明者也。

上述諸算書之注，有全不傳於世者，亦有甚錯亂者。如九章注，劉徽序文言用圖說明，而注中文

章，雖有圖解，然有幾處無一圖者，其中錯亂乃至殆不能讀。清李潢綿密研究九章算術之本文及注章，著九章算術細草圖說；然注中最要之部分，其說明有不穩當者，亦有全未着手者。而難解之部分，且時有更改文字，或變換而解釋之者；其李潢未着手之部分，予施以此同樣之方法，亦有居然可讀者。殆因不解意義，重複傳寫，乃至如此之不可解也。然本來有意義之文字，經多少之改竄，亦得還原於優美意義也。

古算書傳來之由來，茲姑略而不敘。

第六章 古算書之內容 九章算術

中國古算書中，其最整齊者，爲九章算術。以其著作年代較古，故先說此書之內容。然其中未說明加減乘除之算法，以此等法人多知之也。

九章算術成自九章，含問題二百四十六，分爲下列九章記之。

第一方田章，列舉矩形、二等邊三角形、梯形、圓、圓弧、環等之面積，記分類之加減乘除、通分、約分、

最大公約數之求法。劉徽注之圓之算法，古書中記載此種事者，惟此書而已。

第二粟米章，乃百分算及比例之算法；其術文云：

「術曰，以所有乘所求率爲實，以所有率爲法，實如法而一。」

此蓋比例之算法，已明解而使用之。由劉徽注觀之，則比例之算法，甚足珍貴也。

本章中最後之九問題，乃相當於不定方程式

$$x + y = 78, \quad xu + yv = 578$$

$$x + y = 2100, \quad \frac{x}{u} + \frac{y}{v} = 620$$

之問題，非比例之問題也。方程爲不定時，有求整數解之一例；孫子算經及張邱建算經等之不定解析關係之問題，均爲整數術之起源。

第三衰分章，相當於後之所謂差分。據其說明，云「以御貴賤粟稅」，乃關於設差等行分配者。據所云稟稅觀之，在相當分派租稅之賦課，殆亦必要也。此章之終，有僅爲比例之問題，恐粟米章末之不定解析問題，可與之交換。粟米章之末，雖無差分之問題，然有據物件之數目與價值，分爲貴賤

二種之算法，宜入於衰分中。此蓋錯簡之一適例也。

又，其他錯簡之適例，如宋楊輝算法之朝鮮版，在某部分之上下二卷中者，換入記事，遂至全無意味。惟日本寬文元年關孝和鈔本，無此錯簡，蓋中國無此書之完本也。

第四少廣章，乃知田之面積及一邊而求他一邊之算法，以及關於開平方開立方之算法。其一問題：

今有田，廣一步半、三分步之一、四分步之一、五分步之一、六分步之一，求田一畝，問從幾何？

卽表田之廣（田之橫長）者，爲

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \frac{1}{6}$$

之分子也。然以一爲分數之和，乃埃及之風習，希臘則甚後之時代始用之。埃及無適當言語表普通之分數，故如斯之單位分數，施用甚盛；中國表分數之法，雖甚簡單，不必使用何等單位分數，然僅在少廣章有此等單位分數，殆吾人所宜注意者也。

開平方開立方之算法，其方法亦說明，然據劉徽注，則由圖形而求出其原則。開平方之算法，又

見於孫子算經、夏侯陽算經、五曹算術及張邱建算經之唐劉孝孫之算草；將各書所言者，比較而研
究之，其算法之性質，即可顯然釋明。

就開立方而言，少廣章單說明其原則，未說明實地適用之處，惟張邱建算經之劉孝孫草說明
之。

劉徽注中，言及張衡之球之體積，有嚴厲批評以爲劉徽附會者，然在後漢中葉之張衡，其算學
上有如何學力，由此亦可窺見一斑，實不失爲貴重之史料也。

又，唐之李淳風注中，說及祖暅之球之體積算法，原則上雖套襲張衡以來之研究方法，然亦
不滿張衡劉徽之算法，而自立新法者。如所云：

「等數既密，心亦照晰。張衡放舊，貽陋於後；劉徽循故，未暇較新。夫豈難哉？抑未之思也！」

其算法成功時之得意形狀，不啻見之於眼前也。祖暅之之算法，雖不完全，然亦可視爲使用一
種積分方法者；雖未說明其詳細，然所云「以析微，所云「疊棊成立積」亦足以察其一斑。棊字，清
李璜以爲幕字之誤，實爲吾人所贊成。

今就球之體積言之，九章之本文及張衡之算法，劉徽已指摘其不當之處，是已進一步；祖暅之完成劉徽所謀之算法，是又更進一步。約言之，則張衡以爲

外接圓壙之積：球之體積 = 正方形之面積：圓面積。

然劉徽則改圓壙爲合蓋，以爲

合蓋之積：球之體積 = 正方形之面積：圓面積。

是卽示張衡所得之結果爲不正也。然劉徽亦不能算出合蓋之體積，惟稱「以俟能言者」，蓋希望有人完成此算法也。祖暅之研究合蓋體積之算法，使用劉徽之比例而得圓體積，其能成功，不外追得劉徽之先蹤耳。

此一事，可謂中國算學上幾何學之處理方法之最高發達；荷與希臘亞奇默德(Archimedes)之積分方法及其所言球與外接圓壙之關係，一比較研究之，亦一趣事也。

第五商功章，謂商其功，卽以「御功程積實」求城、垣、堤、溝、塹、渠等之體積，亦可視爲築造之工程。現中國於築城、河渠、治水等，早已費大努力，則中國之古算學上，合應九章中有商功章也。蓋築城

等事功，爲原因，因其必要，算學上乃有此種發達也。

本文中僅示關於體積之術文，劉徽注中有得其術之解義，欲知當時之算學的處理方法，此亦一貴重資料。蓋此種算法，乃造碁卽模型而加以考察者；其論究中，以代數言之，有相當於使用無窮級數之總和者，然亦恐不能卽認爲如斯之算法。蓋九章中，卽其他古算書之本文中，均無如斯之等級數也。然圓之算法等，已使用之，是劉徽時已知此法，恐亦不能否認。少廣章注中，已述及球之體積，蓋爲本章之算法作豫備知識也。

第六均輸章，其名稱乃由關於租稅徵收而來，與前項商功之名稱，因根據築城等事功而得者相同；故卽用「以御遠近勞費」說明其名稱。劉徽注云：

「按此均輸，猶均運也。令戶率出車，以行道日數爲均，發粟爲輸。」

又就其問題觀之，乃粟之賦課，比例戶數出之，由道程日數而取其平均，卽決定賦課多寡之算法也。其算法由數學的意義言之，乃合用差分與比例者。

第七盈不足章，後世稱爲盈朒，其解答問題，不用普通之算法，假定與以二值，由之見出真價之

算法也。以普通言語表之，即欲解 $f(x) = 0$ 之方程式，假定 x 之值爲 x_1 及 x_2 ，而得

$$x = \frac{x_1 f(x_2) - x_2 f(x_1)}{f(x_2) - f(x_1)}。$$

此算法，與印度之 *Regula Folsa* 相應，埃及亦行之頗古。劉徽注中，亦有關於等差級數之論究。

第八方程式，乃關於一次之聯立方程式者；正負之術語，已見於此章中，甚至大膽試用，列負算於式前。其解法，比之他國，與十八世紀法蘭西 *Berout* 研究者相同，已大有成功。蓋聯立方程式，在希臘，雖見之於比中國稍後之丟番都 (*Diophantos*) 書中，然終不及中國之整齊；在印度，亦無相當於聯立方程式之法。故方程式之成立，乃中國算學上一大矜驕也。

劉徽注中，有方程新術，與九章本文中試用之解法不同。九章之本術，由頭位次第消去，劉徽不用此法，即豫消去在等號一方之價值，以求諸物件之連比，由此以計算之。其法中連比一項，使用甚巧。惟劉徽之新術，文章多脫誤，不易索解，幸清之戴金溪李銳等補訂之，已得正當了解矣。

第九句股章，論關於句股弦之問題，其中已使用二次方程式。句股即以御高深廣遠，故應用於

測量，乃其本來之目的。劉徽九章序中，言作圖說明，註中亦有所謂朱方青方，是其使用圖也明甚。惟現存本中，圖形均失去矣。然由劉徽注觀之，則句股章均爲幾何學的算法，由二次方程式之問題及其方法，以得其一般解法之術文或公式。以此點言之，乃使人連想歐几里得 (Euclid) 之幾何學焉。又，其中亦有使用帶從開平方之例。其一問題中，可視爲句股弦之整數解法之萌芽者，亦見於注中。此或九章之作者所注意者。此種整數，在印度之算學上，嘗惹起深深之注意。

就句股而言，周髀算經之趙君卿注，所記載者與劉徽注頗有出入。合兩者考之，即得明瞭中國關於句股之知識。趙君卿之年代，雖不明白。然其注中有「術在九章」一語，是明爲九章著作以後之人。趙注蓋知九章之句股章而作者，然在九章之諸術中者，趙注皆總括記之。因此，九章以外別無附加者。使用帶從開平方之事，亦見於趙注中。其注中有附甄鸞之意者，其說明頗勉強，唐李淳風亦以甄注爲無理云。

第七章 古算書之內容——九章以外之書

九章算術，已稍說其內容；然是書不僅爲中國算學史上最緊要之書，即從其著作年代觀之，亦不失爲世界算書中甚貴重者。九章以外之古算書，多屬九章後之著作，與九章重複之部分亦甚多，故僅就九章所無者言之。

海島算經，魏劉徽撰。據劉之九章序，則劉注九章時，深憾九章無重差之法，故作一章以附九章之後。其算法之性質，已記於其序文中。重差者，卽重其差之意；其所謂差，有相似句股者，卽作二組之相似句股，由此立算法者。然相似句股，亦不限於二組，使用三組四組者，亦無不可，如序文中所言三望四望卽是也。據此序文，劉徽自身已加注解，然其注不傳。唐李淳風注雖在，然僅如術文敷衍之，無甚意義也。隋之唐書等目錄，有九章重差圖一卷，是亦一有圖解之書，然現今不傳。故僅據術文解釋之，不能確定其算法也。唯宋揚輝之著書中，言有海島小圖，且記載之，若其爲古來傳授者，於參考上亦有多少價值也。

要之，海島算經之算法，卽使用各組之相似句股，而行測量之算法也。其處理測望之結果，及試用代數，亦一趣事，然不知是否可行代數耳。九章注中句股之算法，大概屬於幾何學，故重差亦必用

幾何學之解釋。總之，海島算經中測量之方法，較之九章之句股章，已進一步。古算書中所言之測量法，舍此外他無所見；即使用角度，依賴三角法者，亦無其痕迹焉。

劉徽雖記述右之重差之算法，然此種算法以前已有之矣。如

周官大司徒職：「夏至日中，立八尺之表，其量尺有五寸，謂之地中。註云，南戴日下，萬五千里，夫云爾者，以術推之。」

此不知使用如何之術，殆當於說重差而言。重差之名稱前已有之，能加以考察，則知重差即所以解決如此問題者；蓋於地平說之假定上，由南北二處之景差，算出日高及日下之距離也。

劉徽由此見解以解釋周禮，其當否可作別論；惟天文之算定，則於重差算法之發達，大有關係，自不待言也。

周髀算經，爲古算書中唯一之曆書，與他書稍稍異趣。若據飯島忠夫氏之說，以其爲前漢末至後漢時之著作，則比之擬爲後漢末存在之九章算術，其年代自較古。惟趙君卿注作於九章以後，又在乾象曆之後，故雖比九章之劉徽注較古，然亦不甚古，或在其後，亦未可知。雖然，趙注與劉注，均足

發明古算法，亦有可供周髀本文參照者。

周髀之本文中，雖不記開平方之算法，然陳子之說中，言日中之距離，用開平方算出，且其中亦有可施開平方之數，故周髀之著者，其能知開平方之算法，而使用之，實無疑者。

又周髀書中，亦見分數之除法。其由景表言日高及日下之距離一條，即海島算經條所述之重差法，或謂之重矩。然其使用算法之事，不見趙注亦能明瞭。趙注之重矩測量法與海島算經，均爲此種事項上有益之史料。又其法即根據地平說算定日下之距離者，蓋即後來以極下之地視爲隆起者；然亦不能修正前得之結果。此在吾人，一見即知其不合理，不足注意，唐李淳風注已指摘之矣。

孫子算經，署李淳風等奉敕注釋，然李注亡失不傳，其現存本，出於宋元豐七年（一〇八四）京監本。孫子有乘法之解說，足補九章之缺。

孫子之方程之算法，與九章之算法及劉徽之新術稍稍異趣。其中有等差級數之問題，然不過器械數之而已。又有相當於不定方程式

$$1x + 2y + 4z = 1000$$

之問題，用某條件解決之。又有一問題，以三、五、七均分之，已知其剩數，而求其數，卽今有物不知其數，三三數之賸二，五五數之賸三，七七數之賸二，問物幾何？

乃此種問題之最初出現者，深予吾人以注意，卽在後世中國算學上留有甚大之關係也。

張邱建算經，有關於等差級數之問題，其所使用之公式，與見於劉徽注者不同。其百雞術，極有名，記此種問題，且比印度阿剌伯較古。然此卽

$$x + y + z = 100, \quad 5x + 3y + \frac{1}{3}z = 100$$

之不定方程式，而其整數解有一組以上，亦足注意也。與此類似之問題，亦見於數術記遺中。

唐王孝通之緝古算經，使用三次方程式以解各種問題。其方程式之作製與解法，均無說明，然觀其術文中之術語，是與開平方開立方之算法，同樣處理而解之者。三次方程式，在阿剌伯算學上，乃甚顯著之事，然中國成立三次方程式，乃在阿剌伯之前；而由術文推得之方程式解法，亦與發達於阿剌伯者全不同也。

第八章 圓之算法

圓周率，在九章周髀以及其他古算書中，皆用徑一周三之率，然漢唐算家，均不對之滿意。夫圓周率或圓周率之算定，希臘印度亦有之，蓋算學既發達後必有之問題也。中國則前漢以來，多有研究之者。隋書律歷志，舉與此問題有關係之人不少，然其人使用之算法，無知之者。

此問題，殆起於前漢末之劉歆，雖無記載歆之圓周率者，然從度量衡原器之事得推定之。

後漢之張衡使用相當於 $\frac{314}{10}$ 之率，已見於九章之劉徽注中。

魏劉徽載此問題於九章注中，其法先作六邊形於圓內，次第倍其邊數，爲十二邊形，爲二十四邊形，爲四十八邊形，爲九十六邊形，然後一一算出此等內接多角形之面積，且其算法亦顧及外接形之處，由此得周百五十七徑五十卽 $\frac{314}{10}$ 之率。

後，劉徽更進一步，求出一種之處理方法，得徑一千二百五十周三千九百二十七之率。

唐李淳風注云：

「祖沖之以其（即劉徽之術）不精，就中更推其數。今修撰攬撫諸家，考其最非，沖之爲密，故

顯之微術之下，冀學者之所裁焉。」

然未記祖沖之之算法。又，隋書律歷志中之祖沖之之圓周率，亦不見於李注中。若以律歷志爲李淳風等編纂，則李注中所云祖沖之之部分殆失傳矣。雖然，清李潢以爲續記劉徽得算法之後者，乃示李淳風等所追加之祖沖之算法（見九章算術細草圖說之圓周率條），其言亦有相當之理由也。惟上述之圓周率，較之隋書律歷志所記載者，雖複雜，而精密度則不及，由其誇爲甚精密之處觀之，殆非祖沖之之法也。此點姑存疑不論。

劉宋之祖沖之（五〇〇年卒，年七十二），著有綴術數十篇。此書今雖失傳不見，幸隋書律歷志，有簡單之記載，卽：

「古之九數，圓周率三，圓徑率一，其術疏舛。自劉歆、張衡、劉徽、王蕃、皮延宗之徒，各設新率，未臻折衷。宋末南徐州從事史祖沖之，更開密法，以圓徑一億爲一丈，圓周盈數三丈一尺四寸一分五釐九毫二秒七忽，臆數三丈一尺四寸一分五釐九毫二秒六忽，正數在盈臆二限之間，密率圓徑一百一十三，圓周三百五十五，約率圓徑七，周二十二。又設開差羈，開差立，兼以正圓參之，指要精

密，算氏之最著也。所著之書，名為綴術，學官莫能究其深奧，是故廢而不理。」

據此，則祖沖之在劉宋之末，已於其綴術中記載圓周率算定之事，即先求圓周率之小數值，定上下之界限，由此得

$$\pi = \frac{22}{7}, \quad \pi = \frac{355}{113}$$

之二值。前者雖已為希臘亞奇默德 (Archimedes) 所使用，後者則至一五二七年，荷蘭 Antoinsson, Father of Metius 始得之。

因此予在拙著中日算學發達史 (Development of Mathematics in China and Japan, Leipzig, 1912.) 中言此率稱祖率為適當，故科學雜誌第三卷第四期所載茅以昇氏「中國圓周率略史」中，乃云：

「按：沖之密率，千載以後，西洋始有發見。其時彼都，猶引為最精，則中國圓率，為世界之先，何有疑義？惜國學不振，此率已為西人剽竊；即近代學子，亦幾忘其所自，古人心血，逝等流水，為可慨已！日疇三上義夫，以此率源於中國，嘗有建議，擬命祖率，他日舉世景從，亦所以副先民之苦心者矣。」

吾國篤學君子，亦有聞風興起者乎？」

祖沖之不僅得此率，於圓弧之算法上，亦立極可注意之算法。其事亦見於隋書之右之記事，因其過於簡單，苦難捉其真意。然有開差羈開差立之術語，乃極佳之線索；清朝之學者視之爲無窮級數展開法，其見解殆非勉強，卽謂之如斯，亦無不可；或者以之爲算定級數之初二三項之方法，殆較適當也。蓋開差羈者，可視爲二次之項之意味；開差立者，可視爲三次之項之意味。羈在劉徽九章注中，用於面積之意味，亦言及差羈之事；差羈者，卽面積之差也。開差立與此同意味，卽體積之意味也。故開差羈開差立卽二次三次項之意味；惟吾人與其視爲有二次三次項而立一種算法，毋寧云適用後世之招差之爲愈。上記九章注之圓周率算定之第二段中，吾人得見一種形迹，卽由多角形之值試行修正，用順序之差，比之於等比級數，由此以立算法者。因有此種試行，自得招差法之算法。無論如何解釋，始必如斯也。

隋書中之簡單記事，及九章注之圓周率算定，予卽如斯解釋之；其詳論則屬之算學史專書，今茲僅舉其結論而已。

第九章 九九歌訣

中國古算書中無九九表。九九表之出，乃在宋、元以後之算書。雖然，漢唐時代，乘除等算法，已使用九九表及相當於九九表者，實已明甚。史記淮南子及其他古書中，有「四四十六」之句，是卽有九九之表，殆以其便利，喜而以表中之句插入文章中也。敦煌發掘物中，有九九表之斷簡，殆漢代之物歟？

古算書中無九九之表，惟孫子算經中，用問題之形式，以示九九表。謂之爲表，恐有語病，宋元以後云九九歌訣，較諸云九九之表者，更爲妥當。孫子算經之記事，必以其時有歌訣，故用之作問題。然其順序則始於九九八十一終於一一如一。因有此種順序之九九歌訣，故孫子算經卽如其順序而記之。敦煌斷簡，亦爲此種逆序。又，日本天祿元年（九七〇）源爲憲作之口遊中，亦有同樣逆序之歌訣，可知逆序歌訣，不僅行於中國，且傳於日本也。惟此在日本，後代猶用之，足利時代所作之拾芥抄，亦有此種歌訣。

然中國不用逆序歌訣，較早於日本，宋元時代算書中之九九歌訣，皆始於一一如一，終於九九八十一，逆序歌訣已不見矣。其變遷在何時代，雖無何等可據之史料，然必爲宋元以前之事。又，以如何理由而變更其順序，亦全不明白，惟下列二種推定，或屬可能。

第一，逆序不自然，既覺其不自然，必變爲順序者。

第二，因印度、阿剌伯算學傳來之故，亦未可知。

此二種理由中，何方爲是，今實不能決定。然自唐至宋元之間，中國與印度、阿剌伯已生關係，實爲不能否認者。唐開元六年（七一八）詔太史監瞿曇悉達譯西域之九執曆，此曆中所用之算法，不待言而知其爲印度風行之筆算。唐書律曆志記其事云：

「其算皆以字書，不用籌策。」

蓋印度此時之筆算，零之記號爲一點，猶未用丸形。瞿曇悉達撰之開元占經中，有九執曆一章，大概記九執曆之事，亦記元來九個數字之形狀。然其字形今失傳，已記爲一字二字……而於其橫記□形，因書數而表之，故於無數字處，則加以一點。此蓋八世紀時印度之紀數法也。其後宋元之

際，中國代數學最發達之時，已使用九形以表零。或云司馬光已先用之，殊不辨其真偽。總之，無論司馬光之十一世紀時，無論宋元交涉之十三世紀時，皆在印度、阿剌伯盛行九形之後。惟其九形，印度、阿剌伯有長形者，與中國所用之真九不同。要之，中國與印度、阿剌伯使用九形既相同，而零之記號與九形，本質上並無從屬關係，則兩者一致用九形，自不能謂其出於偶然。况中國用九形年代較後，由此觀察，則必謂傳自印度、阿剌伯。後世更有一事：即明末之算書算法統宗（一六三九）等，言及寫算，又記印度、阿剌伯式之筆算。何時傳入此種算法，吾人雖不知，然至少得知明末時已用之。夫印度、阿剌伯之筆算既傳來，則兩國所行之九九表，恐亦必傳入。因此，乃舍古來之逆序九九歌訣，而改用自然順序之歌訣。如此觀察，並無何等不宜之處，乃一極自然之推想也。

宋元時代，於乘算之九九歌訣外，除算歌訣，亦極發達，即除算之九九也。何時有之，雖不明白，然宋元以後之算書，始記之。大約有算盤之算法始使用之，故清之梅文鼎，即以此為理由，斷為初用算盤之時代，已有除算歌訣。此論近年猶有信者，即予亦肯從，然一熟考之，恐不能如斯斷定也。

中國至少自漢以來，喜用九九歌訣者，與漢字便於作歌訣大有關係。所謂九九八十一，即簡單

表明之，不必如西洋之九九表作器械的表以供記憶。故歌訣極爲發達。逆序歌訣雖受外國之影響而改爲順序歌訣，然仍不用九九表而用九九歌訣，且別用除算歌訣。

漢時之九九歌訣，逆序而不自然，然所以用之者，其中必有理由在。據上野清氏之研究。（見東北數學雜誌第二十一卷中中國九九表）則中國之九九與易之六十四卦之排列，大有關係。劉徽之九章算術序云：

「若在包犧氏，始畫八卦，以通神明之德，以類萬物之情；作九九之術，以合六爻之義。暨於黃帝，神而化之，引而伸之。」

此蓋言九九合於六爻之變之理由，卽示九九起原於易也。劉徽以八卦與九九歸之於庖犧，可暫置不言，其起原亦姑置之不論，惟九九與易之關係，吾人實不能否認。大概漢代以後，易與他事物多有牽合，九九或牽合於易，亦未可知。然九九而爲逆序者，無論如何，必謂出於易之關係。蓋易尊九之數，始於九九八十一之歌訣，或由此而生。此種解釋，乃屬最自然之推想也。

九九起原之年代不明。漢書梅福傳言以九九之術見齊桓公，其語之真僞，姑置而不論，然九九

必在與漢魏相當時代始有之。

第十章 算器 算籌

中國古算書中之方程，即聯立一次方程式之解法，其發達之可珍，爲他國所未見，即開平方開立方之算法，亦得可珍之整齊；不僅能開單之數，且帶從開平方帶從開立方（即二次三次之方程式），亦與開平方開立方之算法，同樣解決之；其成功不得不謂大也。夫此等算法而有如此成功，必非出於偶然，即其計算上使用算籌，且能自由運用之之故。中國之算學上，其計算及代數算法，所以有顯著進步者，謂悉由算籌之便利運用法而來，恐亦非過言也。

若然，則算籌之起原，有慎重研究之之必要。然除云起自極古時代以外，無他端緒可尋。古代有結繩之政，其真否如何，實難以確定，然不能謂無此事也。如琉球現猶通行之藁算，其來歷雖全然不明，然豈不能認爲中國結繩之遺物乎？日本亦有與此類似者，常通行於民間，惟今不用耳。若古之結繩，即爲琉球之藁算，則算籌視爲由結繩而出，亦無不可也……

算籌，日算家用算木名稱……蓋日算家所使用者，竹製者少，多用小木片作成，故宜用算木之名稱。然在中國，則爲竹製而非木製，故有種種名稱，如算、策、籌等即是。現其名稱有異同，或其形狀大小用法等亦有異同，惟吾人不甚明白耳。不過算、策、籌等皆用竹頭，則無論何種，皆爲竹製，自可無疑。由其字形推之，筭从竹从弄，則必爲玩弄竹製卽運算之義；策从竹从束，出於束而置之之義；籌，有壽字之意味，必與占筮有關係。此種解釋，如屬可行，則作此等文字時之算籌，其性質能大體推得。日算家間，有區別算木，以爲策長籌短者，恐非其本義也。大約策相當於易之筮竹，籌相當於八卦排列時所用之陰陽竹籌，惟不知其然否。所謂算，卽兼策與籌而算之。易用筮竹又用竹籌者，與籌策之用於計算大有關係，實爲明甚。惟何者在先，何者後出，則不能確定耳。雖然，計算之算籌，如爲來自古之結繩，則其起原認爲甚古，亦屬至當。計算已甚古，則必使用何等之手段，故與其謂由易而出計算用之籌策，不如謂由計算之用器而占筮方法始發達。卽謂計算用之籌策，由先使用於記數而發達，亦無不可。以此言之，禮記中之所謂算及琉球之藁算，從實際使用之例證推考之，或有深長之意義也。

算之古文爲「禠」，由字形觀之，有束之象；以琉球之實例言之，殆與結繩有關係也。

表數之文字，在有算籌時已早使用。一、二、三，卽算籌橫排之形。四字古書爲「二二」，卽重二之意，仍爲算籌橫排之形；卽謂四字由算籌重疊而來，亦無不可。十百千萬之字，皆橫用一畫，其十字千

字，縱用一豎，此或與算籌亦有關係。且二十、三十、四十等，可書爲卅、卅、卅，是仍由使用算籌而來也。此等文字，雖皆出於一時，然無論如何，可證有此等文字之時代，已有算籌。故算籌之使用，其起原必甚古也。

由是言之，算籌之使用，殆在書契以前歟。其有長短之別者，或因算法進步，布列複雜，長算籌似覺不便利，乃改爲短算籌歟？夫欲行複雜之計算，其使用之籌必短。若由其字形現察，斷爲本供占筮之用，則必在八卦六十四卦成立之後，根據卦上所用之算籌，然後作計算用之短算籌，用之以行複雜之計算。然則籌之用於計算，豈非來自易乎？此固有深遠之根據，毋庸多議也。

中國古算書所載之算法，乘除用長算籌亦無妨礙；惟開平方開立方，以及解方程等，長者必不便利，殆有用短者之必要也。

算籌之排列法，孫子算經中會載之，其上卷云：

「凡算之法，先識其位：一縱十橫，百立千僵，千十相望，萬百相當。」

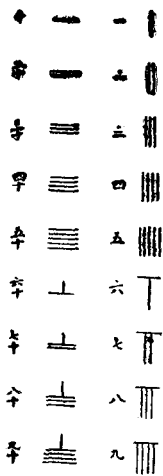
又掛算之說明中云：

「六不積，五不隻。」

夏侯陽算經上卷云：

「凡乘除之法，先明九九：一縱十橫，百立千僵，千十相望，萬百相當；滿六已上，五在上方，六不積算，五不單張；上下相乘。」

兩書所言，完全相同；宋元以後之算書及日算家始終用之之算籌排列法，亦與此相同，即：



右列個位與十位，有縱橫之別，所以避混同也。百位千位等，即以右之排列法，交互進行。

此種排列法，不知始於何時。左傳襄公三十年，絳縣老人言亥二首六身，卽亥之古字，爲算籌排列之形，表示二萬六千六百六十之數。右列之紀數，雖難於亥字形中完全表示，然無論如何，左傳已有此說，則著作左傳時，必行右列之紀數法矣。

據飯島氏之所說，左傳爲前漢末劉歆僞作，是前漢末已行此種排列法。據新城新藏博士之說，左傳爲戰國時代中期之著作，是此種排列法，亦得溯至戰國時代。夫右述之亥爲二首六身，其時代決定，由算學史觀之，乃一緊要之問題；然除曆術之關係以外，實無他種方法，可從算學史上論其時代。此問題如舊保留，不能決定，實一憾事也。

第十一章 算籌排列法之變遷

算籌之如右排列法，有宜深加注意者：數字一、二、三及十、卅、卅等，如爲根據算籌排列法而作，則上述之排列法中，個位與十位完全顛倒，其不一致，頗覺可異。然如斯之不一致，實爲事實，不能別生他議，惟因何而致此，則有說明之之必要。若數字與算籌排列法，各自發生，其間並無何等關係，別

此不一致，或起於偶然。然由數字之構造觀之，其根據算籌排列法而作，實爲無疑；即個位十位，有縱橫不同，其原則亦與算籌排列法一致。又就一、十、百、千、萬、億六字考察之，万字雖亦用萬，然萬字本爲蟲名，在數字原用万字，故即就万字之形言之。此六字之構造，個位十位縱橫不同，算籌排列法之原則，殆仍表現於字形之上。惟六字中前五字皆有橫之一畫，獨十字千字有縱之一豎。故必依縱豎之有無分別觀察之。茲先言一、百、万三字：百从一从白，白爲音標，惟橫之一畫有真意義。万字亦然。故個位百位万位，均爲以橫排爲原則而構成之文字。然十千二字，有橫畫，又有縱豎。若此縱豎含有意義，則其與前後中間三個位數所表示之數學，自有區別，且有縱排之數之意味。至億字，其所表之數，有十萬與万万二種，其造字時之意味，今無從明白。如以十萬爲原始之意義，則億字之作，亦與十千同意趣，不過億字从人从意，與十千構造不同耳。雖然，意爲音標，如以人旁爲有意味，爲千字除橫畫之形，則與人旁之字形不同，且其實非人旁，縱之一豎仍含有真意義。如斯，一十百千万億六字，其爲根據算籌縱橫排列法而成之文字，亦得以推測矣。

兆字之構造稍不同，然橫畫與縱豎之使用，已稍爲紛亂，或有非常大，不能數之意。此其構造所

以與他六字不同歟？

兆以上之大數數字，皆未用右述之原則構成。此或因根據原則作數字之事已忘卻，而造於後代者歟？

據如右解釋，則卅卅各字，亦當合於同原則，造爲卅、卅之形。然事不出此，殊不可解也。

由是言之，算籌之排列法，以每隔一行交互縱橫爲原則；數字之製作，即根據此原則；然漢代所行及後來繼承之算籌排列法，乃顛倒其個位與十位。蓋中國之算籌，在製作數字時，其排列法與現於數字者相同，自後在戰國時代乃至漢代，其排列法始有變遷。惟變遷之時代，不能推定耳。

此問題甚爲重要，又甚難解。幸而有一二着眼點。其一爲四字之形。若此字因表示 Ⅲ 而造爲「𠄎」或「𠄎」之形，則作此字之時，個位之數，謂用縱排之法，或無不可。由是言之，則調查此字始於何時代，即可知其以前已有變遷。但鼎銘古器中，早已有四字之古字，是其變遷亦頗古也。雖然，鼎銘不能如斯之古，非無反證之理由，不過吾人對於此種事項，如平素無研究，不能有確然之論據。蓋僅以一文字爲論據，未免甚薄弱也。

次有墨子之一節，亦爲一有力之論點，即：

「一少於二，而多於五，說在建。」

之一節。此本詭辯，不易解。墨子閒話云：

「張云，建一爲端，則一爲十，是多於五。貽讓按：說無建義，疑當作進，卽算位之二五進一十也。」蓋建字不通，故宜以建爲進，而解釋之也。如此，則其義易明，卽一之位進一行，成十，自大於五也。雖然，建字無進義，若能如建字解釋，則可活動而觀之。據子見解，卽爲建字，亦能得一善解焉。

一少於二，卽如其本文所言。一多於五，如本文解之，不成立，則此一非表十位之一不可。如斯解釋，予亦承認墨子閒話之說。雖然，建不能解爲進，亦不能以爲進之誤。若不明知古本爲進字，後誤爲建字，則以意改訂爲進字，予以爲斷乎不可。觀墨子閒話之著者，雖以建解爲進而又改建字，是歷來卽爲建字。然建字較諸進字，意味更深長。蓋進字，意頗平凡，大減少詭辯之價值。故欲如建字解釋之個位之一爲橫，建而縱豎之，則成十位之一，故有大於個之一之意味。照此種解釋，建字無奇義，乃立字豎字之義，其解釋自能明白。管子中亦有建旗之語。若云建橫之一成縱之一卽十，以建字作動

詞，則建字之意味，充分可通矣。予以算籌排列法置於眼中，故得如右之解釋，且確信並非勉強。北斗之柄所指之方向，云建子建丑，其建字之義，亦與此同也。

右之解釋，如果足憑信，則墨子所云，即根據算籌排列法（爲數字成立之條件者）而得，而與數字構成時相同之算籌排列法，或亦行於當時。故算籌排列法之變遷，可云在墨子以後。

雖然，四字見於鼎銘等，乃在墨子之前，實不能再得解釋。大約此變遷，或不能一時即了，如以爲變遷現於墨子以前，而在墨子時仍行舊法，如此解釋，亦屬可能。斯則左傳之本文，雖爲春秋時代之實話，然如以爲此變遷須年月甚長，亦非不合理。就此事而言，予未積確實之研究，今不能得如何之結論，惟主張墨子時亦行算籌之排列古法而已。

中國自書契以前，即用算籌計算，其算籌之排列法，中途發生變遷，乃一顯著之事矣。夫不採用別種之計算器及計算法，對於算器之算籌，使用之而不變，但變更其排列法，必大感不便。然中國之古代，竟實行之。其理由何在？大約必甚顯著，惟恨今無闡明之之端緒耳。

言及此，易中筮竹與八卦之配列，自呈於眼前。八卦橫排；筮竹用在手中時，亦可視爲縱排。八卦

出於算籌之橫布，其根據之原則與構成數字者同；筮竹所根據之原則，則與後代之算籌排列法相同。筮竹與八卦，何者先，何者後，不能容易決定，然筮竹單純，八卦則不然，其構成含有深意。由此事考察之，則必筮竹在先，八卦在後。若八卦出於筮竹，則八卦照筮竹之位置而爲縱排，豈非自然乎？乃實際不出此而爲橫排。此可謂模倣數字之橫排，亦可謂與數字同樣，根據於有排列算籌之風。雖然，另有一種妥當見解，卽八卦乃算籌個位未縱排以前之物，故爲橫排也。

筮竹由計算之算籌而來。算籌用在手中時，雖取縱之位置，然排列在盤上或席上計算時，則必如製作書契時，橫排計算，蓋在手中計算，僅限於簡單之時，殆非重要者也。然用之占筮，則附有重大之意義。筮竹既甚置重，則八卦或由之而生。如斯，竹筮既被重視，同時，其意味轉駕於計算之算籌上，而算籌之排列法乃生變遷。惟算籌之方法雖已變遷，然數字及八卦，一仍其舊，不加變更，遂至如後世所見之狀。易在中國思想上極重大，不能謂無此種事情也。此爲大膽之臆測，如屬可行，則由算籌排列法之有變遷，直至易之成立年代之上，亦得一種推測。此僅爲一計畫，恐無意義，今後擬更提出之以爲研究之問題。

第十一章 算器(續) 數術記遺

算籌之事，在中國算學上甚重要；其排列法之有變遷，乃予最近想到者，其事亦大體言之矣。茲以算籌以外之算器或表數之法，記載於此而觀察之。

二事均見於數術記遺。是書有偽作之說，實際上何時代有之，亦不能確斷，故不能作為史料，發揮其充分之價值。雖然，唐之明算科用書中，已有此書，乃一事實。且現存本乃宋鮑澣之得於道觀中，其時代亦較確實。鮑澣之數術記遺，嘉定五年，一二二二；即假定為鮑氏時之本，亦不失為貴重之珍本也。此書言表數有種種方法，極有趣味。

數術記遺之徐岳本文中，有徐岳師劉洪之說：

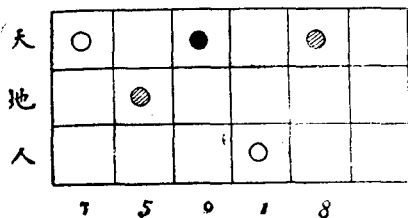
〔天目〕先生曰：隸首注術，乃有多種。及余遺忘，記憶數字而已。〕
其數事即：

「積算、太一、兩儀、三才、五行、八卦、九宮、運算、了知、成數、把頭、龜算、珠算、計算又計數。」

第二、太一算，如圖所示，一軸貫一珠，以一珠置盤上九道中之任何一道，即表示一至九之數。因僅有九道，不能表空位，然珠有不入九道內時，空位亦能表出也。

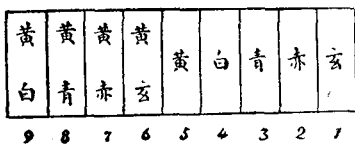
第三、兩儀算，一軸各備青黃二珠，盤上如圖所示設五道，黃珠表一二三四，青珠表五六七八九。

三才算



○ 七 四 一
 ● 八 五 二
 ● 九 六 三

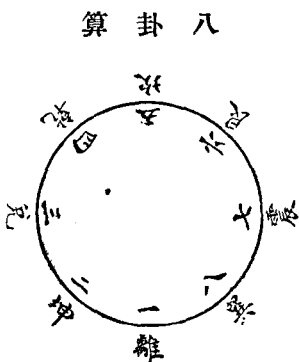
五行算



即用三道與三種珠以表數也。

第五、五行算，用五色珠，玄表一，赤表二，青表三，白表四，黃表五；如用黃玄二珠即表六，餘可類推。

第六、八卦算，如圖所示，以八卦配於圓周上，順次表一二三四五六七八，以中央爲九。用一針指其中任何一位置，即指定其數。此種法若多用之，雖幾行之數，亦能表之。



算 宮 九

四	九	二
三	五	七
八	一	六

第七、九宮算，如圖所示，以自一至九之數排之於方陣內，指定其中任何一格，即表相當此格之數。

第八、運籌算，取算籌一枚，依籌上之位，置表一至九之數，挾之於手指間用之。

第九、了知算，如圖所示，在了字各位置上表一至九之數。

了知算



第十、成數算，玄表一與六，赤表二與七，青表三與八，白表四與九，黃表五，以一至五爲生數，六至九爲成數。算首向東及南，爲生數，向西及北爲成數，由此以表一至九之數。

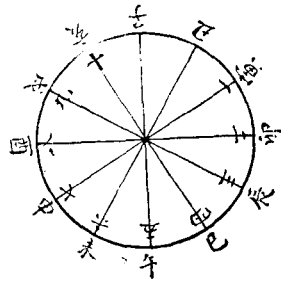
第十一、把頭數，四面刻一二三四；而其出面示各數，配之表五者，以表六至九之數，如斯乃能表數。

第十二、龜算，如圖所示，配十二支於圓形，自寅至戌爲一二三……八九，用之以表數。

第十三、珠算，殆卽後來算盤之起原，甚爲重要，因詳說而觀察之。徐岳之原文云：

「珠算，控帶四時，經緯三才。」

算 龜



寥寥兩語，自難索解。甄鸞重述之云：

「刻板爲三分，其上下二分以停游珠，中間一分以定算位。位各五珠，上一珠與下四珠色別。上別色之珠，當其下四珠，珠各當一。至下四珠所領，故云控帶四時；其珠遊於三方之中，故云經三才也。」

此文甚難解，疑有脫文。取幾種別本驗之，皆如此，無誤刻者。仍此不改，雖如何施以句讀，其意義終通。予以爲當字之下脫落一五字，卽：

其上別色之珠當五，其下四珠，珠各當一。

如此解釋之，則此種珠算之構造大約如次：

板上分刻爲上中下三段，其上下二段置游珠，中間一段記一十百千等位。此與現今算盤中所見之原則，不稍異同。然位各五珠云云，卽每行置五珠，此點與今日算盤不同。而上段之一珠，與下段之四珠，顏色各異，上段一珠表五，下段一珠表一。其上下段之珠，顏色不同，及下段有四珠，皆與現今算盤不同。然上段一珠表五，下段一珠表一，又與現今算盤完全相同者。

據右之記載中，當時之珠算，是否如今日算盤有軸貫珠，抑無軸而可旋轉各珠，全不明白。然無論有軸無軸，於原則均不改變，故有之可，無之亦可。且軸之有無，無言及者，恐爲無軸之意味。其面盤云刻板爲三分，若如其文字解釋之，刻板而分爲三段，則謂爲無軸，殆亦適當也。

第十四、計算又計數，亦名心算，「不用算籌，宜以心計之，」無表數之方法。

數術記遺中上述之表數方法，有種種不同之說，然皆爲理論，有裨於實用者少。觀於除普通之算籌及珠算外，一般皆不通行，其實際可知矣。此與中國之樂律論，云有三百六十律，但有理論上之

研究，不能施於實用者相同。

中國通行珠算，殆數術記遺以後之事；其年代雖不明白，或出於宋代。元明之算書中，有除算之九九歌訣，清之梅文鼎以爲其時已行珠算（古算器考中有其說），其說頗能博得吾人首肯。然算籌亦能使用除算之九九，用除算九九說明除法，或非珠算而爲算籌。是梅文鼎之說，僅爲理論，不能謂爲有所依據。不過他處亦有多少之證據，謂宋元時代已行珠算，實不能動搖之論也。

中國之算書中，載算盤之圖者，始於明末。普通以爲見於程大位之算法統宗（一五九三），然萬曆六年柯尙遷集成之算學通軌，出於算法統宗之前者，亦已載此圖……兩書中所言之算盤，皆梁上二珠梁下五珠，現今所用者，卽爲此狀。

此種算盤，或出於算術記遺之珠算，然梁上改一珠爲二珠，梁下改四珠爲五珠，與前者不同。數述記遺之珠算，與行於希臘、羅馬者同原則，殆由西方傳來歟？

第十三章 宋元之算學

古代之算學，尙有應論者，姑讓之於後篇，今僅述宋末至元代之算學大興一事。唐時王孝通李淳風僧一行等，已使算學發達，然其後曆術上出有諸大家，算學上則無知名之人。宋之中葉，其可舉爲算學家者，僅有沈括一人。沈括之事，前已述之，其關於算學事項，記於其所著夢溪筆談中，惟不甚多。蓋沈括出於宋儒勃興時，身雖爲儒者，而與其他諸儒色彩稍稍不同也。惟宋代之算學界，僅出一沈括，直至宋末元初，算學始振，其間五六十年，中國之算學有顯著之發展云。

現於宋元之際之算學者，固有幾多之人物，然其著書傳於今日者，僅有數人，如宋之秦九韶，於淳佑七年（一二四七）作數書九章，元之李冶於淳佑八年（一二四八）作測圓海鏡，後又作益古演段（一二五九）。

較秦、李稍後之宋之楊輝，作數書數部。朝鮮有宋楊輝算法翻刻本，中國已失傳，現日本有其書。元郭守敬之授時歷，在研究當時之算學上，亦甚貴重。

較各家稍後之元之朱世傑，著算學啓蒙（一二九九）及四元玉鑑（一三〇三）二書。其他亦有一二算家。

今通覽此等算書，其代數學之發達，爲古算書所未見，乃一顯著之特色。至幾何學之算法，則不能加於漢唐時代，如魏之劉徽、劉宋之祖冲之及其子暉之等，所得之圓之算法及球之求法等，宋元學者，多無力發展。惟關於代數學，則甚出色，如立天元一術（或略稱天元一術及天元術）之出現，用大衍求一術（卽不定方程式 $ax + by = 1$ ）解決他種問題，招差法之使用，以及四元術之成立等，皆此時代之主要成績也。

天元術及四元術之代數學，見於上記諸算家之著作中，據其序文及本文觀之，尙有種種研究其事之人，其發達想有來歷。四元術僅見於朱世傑之四元玉鑑，然二元三元，當別有論述之人，朱氏承其後乃有四元術。惟此等算家之著述，無一存者，僅在玉鑑序文中記其事而已。故其發達之事，儘今不能明也。

右之諸算家輩出，其著書之成立，先爲秦九韶著書之一二四七年，後爲朱氏著玉鑑之一三〇三年，其間不過五六十年而已。秦氏著書之前，必有準備時代，然極短之歲月間，乃有前代未見之新算學發生焉。

然宋末元初，乃中國與西域交涉頻繁之時代。元置回回天文臺，使回人主其事，西域之天文器械，亦多傳入。授時曆卽作於如斯事情之中，採用新方法，而與歷代之曆法不同。故授時曆可謂承受阿剌伯之曆法而後成。如授時曆中使用類似球面三角法，恐視爲傳阿剌伯之知識，亦無不可。蓋古算書中無其痕迹，古曆法中亦無其法，至是乃忽然使用，謂爲根據外來知識，原無不合也。故授時曆之受阿剌伯影響，必然無疑，惟其影響至如何程度，實一疑問也。

宋代代數發達之事，如漫然考察之，殆可視爲來自阿剌伯之關係。蓋阿剌伯乃算學進步之國，其代數學之發達，甚爲顯著。中國如受其影響而代數學得特別之進步，則必已立整齊之定理。雖然，阿剌伯之代數學與中國宋元之代數，大異其趣。若知宋代代數學之本質，則必以爲乃中國本來之發達，而非外來之知識。此實毫無可疑者也。

然中國之算學，自古算書作法之時代，經唐宋之長期年月，多無進步，及至宋末元初之半世紀間，乃有顯著之發達，其中當然有特別之原因在。不過其原因，今不能明瞭耳。考其時與金元醫學發達同時代，且在宋儒之哲學組織完成之後，疑與此等事或有關係。在曆法上，見於授時曆之改革，非

有授時曆而後企謀之，乃由前代以來，其準備漸漸而進者。如取曆元於近距，唐之漢譯九執曆已試行之，五代曹士鶯亦曾企謀之，宋沈括亦有希望採用太陽曆之事。此等事如見於九執曆者，殆根據西域之影響。而授時曆極重觀測，或可推定爲阿剌伯學風之影響。蓋阿剌伯學術史上之真功績，與其言爲各個之研究，各個之學說，毋寧謂在其重視實驗探究之精神。授時曆之製作，想亦受此學風之影響。由是言之，西域影響之多大，不必否定，蓋早已徐徐來也。然授時曆中，何者受西域之學問，何者據中國之研究，不能明白；且其中所使用之代數學，爲天元術，乃中國所固有者，非阿剌伯之代數學也。

然則就宋元算學之發達而言，曆法上既徐徐受西域之影響，而重視觀測之學風又開，其學業上所受之刺激，或能多大。然阿剌伯之代數學，不能照樣傳來，而古來之算學，不改其形式亦有發達進步。蓋中國之算學，長於使用算籌，更發揮其長處，而宋元之代數，乃得成立云。

第十四章 算籌與中國之代數學

見於古算書中聯立一次方程式之解法，及開平方開立方，帶從開平方立方法（即二次三次之數字方程解法）等，所以能整頓者，即由於使用算籌，前已述之。

宋元之際，天元術及四元術之成立，爲中國代數學最高之發達，此非傳阿剌伯之代數學，乃遂固有之發達，其所以致此，亦由於使用算籌也。是則算籌在中國算學上所盡之職務，不可不謂爲極大也。

中國漢時，佛教傳入，印度之文物，亦相偕而來，如天文曆術，從印度傳來者有之，算學亦有之。隋書經籍志有婆羅門算經書名。然印度之算學，不知是否勝於中國。據印度算學史專家之所說，則印度之算學發達，在古代者姑置而不論，在後代者，則爲西曆紀元四百年以來之事，較諸九章算術之著作，更在其後。又中國算法之發達，與印度不同。不獨此也，印度之算學，究如何傳入中國，亦頗可疑。觀察印度學術發達之跡，醫學與曆算，其中心地各不同；醫學以巴達立婆特拉爲中心，曆算則以烏加尼爲中心。蓋醫學自阿育王以來，信奉佛教之王侯，均獎勵保護之；曆算則在婆羅門手中，故其中心地乃至不同也。佛教至後代採原始的幼稚談如須彌山說等，對於曆算則頗冷淡。故漢譯經文

中，關於醫事者多，關於曆算者少，與算學有關係者，亦不他見。故中國之算學，其與印度算學之關係，不如印度文物影響之多且大也。

印度之算術，筆算特別發達。唐開元中漢譯九執曆，使用筆算，唐書中已明言之。後明末之算法統宗（一五九三），亦傳阿剌伯式之筆算，稱寫算。然中國無行筆算之痕迹。此雖因中國人有尚古傾向，然亦因已有算籌之算法，故無採用筆算之必要。是算籌之算法，就中國言之，實非常緊要也。

算籌便利於日用之算法，稍進爲開平方開立方及聯立方程式，亦可使用之。籌有赤黑二種，各表正負，能用之排列方程式。因此，可計算聯立方程式，亦可計算帶從開平方帶從開立方。且如此排列之式，亦能以算籌分解之而得其答數。如宋代數演算，如二次三次之方程式，唐初已成立，因使用正負之算木也。然若進一步言之，如高次方程，則唐代尙不能及此。及宋元時，天元術四元術成立，始得實現其演算。蓋天元四元，原則上，與唐代之代數學無別，惟二次三次方程較簡單，且易算，而高次方程，則錯亂過甚，難以演算。乃宋元之算家，打開其難點而能成功，是宋元之代數學，其使用算籌而排列之，實有重大意義在也。

天元術爲宋元代數學之根柢，秦、李、揚、朱書中始有之，授時曆亦使用之。天元一術一語，始於李治書中。秦九韶亦用其方法，然所謂天元一，乃關於不定方程式之解法，而後來之所謂天元術，不能言爲天元。又李治所著之兩書中，天元術之式之排列法，上下顛倒。由此等事觀察之，是秦、李二人著書時，天元術尚在發達初期；其前雖有與其術有關係之人，而其術猶未即行也。天元之術語，有如何之意義，又何以作此種之用語，吾人均不明白。唐王孝通之三次方程式，已用與天元術相同之方法。故所謂天元術，其形式上雖新，而在傳統上，則謂爲承繼古式，亦無不可也。

用天元術處決問題，其結果有爲二次三次之方程式者，亦有高次方程式者。其解高次方程式，即用算籌，蓋以古之開平方開立方之方法，照樣擴充之於高次方程式也。其解法，與英 Horner 之數字方程式近似解法同原則，然 Horner 於一八一九年，始公布其論文於世。意大利亦有先 Horner 得相同解法之人，比之 Horner 不過年數較先而已。惟中國則算法完善，先於西洋五六百年。且古之開平方開立方，亦根據同樣之原則，誠足誇也。

朱世傑之四元術，導源於天元術。天元術立一元（即一個未知數）而求其算式，四元術則能

立四元卽四個未知數，其中央列已知數，上下左右列四元。用此算法解決問題，於所求之未知數外，使用三個補助數，其四元間作四方程式，由其中消去三個補助數，卽得一元方程式。此法實際上甚煩雜，然在理論上言之，則頗有興味。因其用算籌排列於盤之四方，故四元以下之方程式，卽不適用。四元術在中國算學史上極緊要，四元玉鑑之序文，抄出可資參照。大德癸卯上元日臨川前進士莫若序云：

「燕山松庭朱先生，以淑後學，爲書三卷，名曰四元玉鑑。其法以元氣居中，立天元一於下，地元一於左，人元一於右，物元一於上；陰陽升降，進退左右，互通左右，錯綜無窮。」

又天德登科二月甲子溥納心齊祖頤季賢父序云：

「按天地人物四元，以元氣居中；立天句地股人弦物黃方，按圖明之，上升下降，左右進退，互通變化，乘除往來，用假象真，以虛問實，錯綜正負，分成四式，必以寄之剔之；餘籌易位，橫衝直撞，精而不雜，自然而然，消而和會，以成開方之式也。」

序中餘籌云云，是充分表示四元術用算籌演算也。

天元術四元術，如右所述，用算籌排列代數式，其位置有代數之意味。如斯器械的代數學，他國無其類例。此中國之器械的代數學之成立，所以於算學史上有深意義；而如斯之代數學，亦可視為因使用算籌而後發達也。

第十五章 大衍求一術及招差與曆術

秦九韶之書（一二四七），已說大衍求一術。其術乃關於不定方程式之算法，可用以解種種問題，然此術見於數書中，雖以秦書為始，實則唐大衍曆已使用之，而曆術家之間，亦早已通行也。

此算法發生於何時代，乃一重大之問題，然今不能容易斷定。算學書中最早發現者，即所謂孫子之問題，前已照原文載之。其術文中未言及使用求一術，然有用以解決之性質，而其術中所用之數，亦全為適用求一術之結果，故視為已知求一術，亦無不可也。

雖然，求一術元從曆法而來。中國之曆法中，用求一術之問題甚多，秦書亦與之相關連，多記曆術上之問題。新城博士曾立與古曆術有關係之算式，加以說明；飯島氏亦引用其說。若關於此點之

所說，可與以贊成，實際上亦使用如此算法，則於算法之起原，大可以參照也。

自曆術上起者，不僅此問題，尙有其他問題在。古算書中有速度不同之三物，互追逐於圓周上，之問題，即最小公倍數之問題，記載頗有興味。然此等問題，在曆術上爲實際問題，且甚多。惟在曆術之問題上，其數複雜，故必求最大公約數，且須試用規則。九章算術等中述其規則，而例示之問題，則簡單不必適用其規則，蓋爲算學之教科書，問題之作製甚貧弱也。然曆術上實際必要時亦有之，故由其必要所得之規則，記之於算學書中，亦當然之事也。

授時曆中有招差法之三差，此亦算學方法由曆術發達之一例。二差即唐邊岡之崇元曆中所使用之相減相乘法（見唐書律曆志），自後多用之於曆術上。關於圓之算法，如前所述，招差法，已見用於祖冲之等，然祖冲之爲曆術大家，招差法或與曆術有關連也。

祖冲之之前，何承天用強弱二法於調日法；因乏紀錄，不知其詳細，然亦可視爲在曆術上創算學之方法也。

更溯年代論之，重差即見於海島算經之算法，本使用於曆術上之測定方法，即周禮中所謂使

用表影之事，故重差法亦可謂由曆術上之必要而發達云。

如斯言之，中國之算學，因曆術之關係而發達者，甚多。以算家見稱之人，大概精於曆術；其所謂算學專門家者，如魏之劉徽，及古算書之著者孫子，張邱建，夏侯陽等，其履歷多不明白；其人之事，亦不能有所論斷；然曆術家即算學大家，其人物之多，亦決不能否認。由是言之，曆術上之事，其供給算學之問題，及爲算學方法之創業者，必多也。

此等算法，有在中國成立者，有本屬外來者，然無論其固有與外來，欲謂其非起於曆術上之關係，則有所不能也。

第十六章 律度量衡各種分配

中國之算學，與曆術關係甚深；即土木治水之事，由古算書中問題觀之，亦知其與算學有關係。律、度、量、衡亦然，在算學發達上皆有關係。

九章算術注中，有王莽銅斛之事。就其記事研究之，可推定王莽時制銅斛所使用之圓周率，然

其率似稍精密。後漢張衡所傳之率，或可視爲一種精密者，即與相當於十之平方根者略同。據隋書所記，劉歆已研究圓周率，含於銅斛制中之圓周率，殆由劉歆之研究而來。蓋關於度量衡之原器製作，其認研究圓周率爲必要，殆當然之事。而度量衡之制度，在研究算學史上，亦供給幾多之材料也。關於王莽時之原器律度量衡皆以相同者表之。此雖覺甚奇，然其制度殆甚古。書經言：「同律度量衡。」是書經著作時，或已有此制度也。

音律與算學深有關係。所謂三分損益法，亦由算學算出音律。其事初見於呂氏春秋音律篇，詳於淮南子天文訓、鄭玄周禮春官注、褚少孫補史記律書、漢書律歷志、管子等，恐起於戰國時，至漢代始完備。三分損益之法，其爲分數之使用也明甚。三百六十律，亦由三分損益法算出；然無實用，僅推算學上之理論而已。然論理上較希臘大進步，此亦捉得數之處理之結果。蓋捉得數之處理，乃中國之思想上極顯著之事。其弊害雖極多，然使用算籌，能得上述之算法，且能立如此之代數學者，殆即此性能之賜物也。

希臘有三分損益法，與中國同，然希臘用弦試之，中國則用管試之。弦比管大爲簡單；且中國自

古有琴瑟之絃樂器，何故不採用弦而採管乎？此亦不可思議者。然律、度、量、衡，欲以同一原器表之，舍用管外無他法。若絃則斷不能貫徹此目的。此殆其主要之理由歟？蓋畢竟由長於連想之處而來也。

三分損益法，希臘亦有之，疑由希臘傳來，應考慮之。若最簡單分之，可採二分之一，然音律上，二分之一不成意味，故二分外最簡單之分法，非三分法不可。既採最簡單者以定音律，自然想及三分法，不必視為出於外國之關係也。

關於音律，有所謂納音，算學書中往往有其問題。納音者即關於諸數之配列，在中國之數理思想上，其發現極適當也。

中國不僅同一律、度、量、衡，方位時刻季節干支等，亦互相分配之，蓋長於連想之中國，廣行此種分配，殆當然之事也。然此於天文上之測定方法，想亦深有關係。因漢字為記號，便於測定之記載，由此種種分配，此種關係，吾人亦能想得。予對此種關係，無充分之研究，不能多論，然以為其分配，不僅為思想上之產物，且其作製上亦含有算學上之深長意義。此種分配起自何時代，又其分配中根據如何之要素而始行，予亦不能一論，然以為可視為記於周髀算經中，且似以方位為根據。以方位

爲根據，或現於後來，亦未可知。要之，關於天文曆法，種種事情，皆各行分配。不知如此多樣之分配，果否行於他民族之間，竊以爲此亦重要問題也。然無論如何，中國之律、度、量、衡，以同一原器定標準，則其有此種種分配，決不謂其無理由也。

書經言：「在璿璣玉衡，以齊七政。」其意義古來各說不同，不易推斷。有以爲璿璣玉衡卽渾天儀，七政卽日月五星者，恐屬勉強。其解璿璣玉衡爲渾天儀者爲漢之落下閎，乃造渾天儀以後之事；以前各書，並無所謂渾天儀，而史記且解爲星座之意。其解七政爲日月五星，不知果有政字之意否？予擬以稍異之意味解釋之：璿璣玉衡，卽從天官所云，解爲星座之意味。左傳昭公七年：

何謂六物？對曰：歲時日月星辰之謂也。

予卽擬之爲七政。六物擬七政，雖少一物，然六物之中尙未加方位，如加以方位，則成七物，可用以當於所謂七政。此雖覺可異，然較之指日月五星，更多含人類作爲，且用政字亦較適切也。故所謂「在璿璣玉衡，以齊七政。」其文意，卽謂：由星座之運行——進一步言之，卽當大宇宙之運轉——此七物，亦適當分配，而此七物亦各自分配。

予如此解釋之，不可拘泥文句，宜視爲大體上如此云云；竊以爲較之用渾天儀觀測日月五星之說，且更穩妥。如斯觀察之，則所云在字齊字，亦活現紙上。以此，齊七政之齊，與同律度量衡之同，帶稍同之意味。而齊與同分用之，亦實有興味。律度量衡，用同一原器，故同字適當。七政乃在同一圖式內各自分配，不能云以同一者表七物，故不能用同字。其使用齊字，意味稍同而又各異，誠巧於用字也。如是，律、度、量、衡之用同一原器，天文曆法上之行各種分配，兩兩相需而成立。其所以然者，全出於以連想爲生命之思想體系，實同一精神之分出。然則各種分配之事，視爲相當有起原，亦無妨礙也。此固予一家之言，實不能言爲主張，然如斯解釋，亦屬可行也。

中國有以干支紀日紀年之習慣，惟其起原不明。據新城博士所說，春秋以干支數日，全屬當時之事，非後人加入；是則至少在春秋時代已有干支組織矣。據飯島氏所說，西曆紀元前三百年間，希臘巴比倫之曆法及星占傳來，干支記年法及干支紀日法，始得成立；是戰國時代有干支組織，不能上溯至春秋時代也。然兩者均以爲由春秋以前或戰國時代，則其非起於後世，明甚。希臘巴比倫及印度，均無與此相同或類似之紀年法、紀日法，是無論何人，不能不視爲中國特有之事也。若然，則其

中有重大意義，亦可見出矣。

干支之組織，以十干之循環與十二支之循環，照其進行之順序組織，作成別一循環系統。在此系統內，十干別成一循環系統，十二支亦然。如斯組織，不知其何以作成，然十干十二支，如確爲十日十二辰，殆構成十日與十二辰之輪迴者。此卽措而不論，然在行種種分配之國，其用此種組織，恐決非偶然也。

八卦以及六十四卦之配列，起於何時代，又在如何意味上發達，吾人如無易之知識，卽不明白；卽易中所說之意義，何以附以此等配列，吾人亦不能明白。然亦不能以爲一考察易之體系，卽爲了事，如哲學與卜占上之意義，及其算學的配列，亦當分別觀察之。就八卦之配列觀之，竊以爲有陰陽與三才之思想，其構成亦由陰陽與三才。蓋排列八卦六十四卦之算法，僅有陰與陽二種。如以「一」與「--」表陰陽，卽一與二，亦卽奇與偶。是可言其中有陰陽奇偶之思想也。

欲以如斯之陰陽算籌組織之，可成種種之方法，然每組有三行，無論如何，殆爲三才之思想。蓋陰陽與三才，其根本上，思想實相同。所謂天地人三才，卽天地交配而生人之意味，而陰陽亦卽男女

之意味。若然，則以男女之關係，使天地成人格化，於其處生三才之思想，即由實感的精神而出焉。

八卦之配列，出於如斯之精神，即用陰陽奇偶之竹籌以構成，各各賦之以意義，且由筮竹之處置，組成六十四卦，而易之占筮，乃得成立。然如斯之易之成立，至今日猶盛行者，因此種竹籌已使用於計算上，而見於數術記遺之表數方法，（時代可暫置不論，）已有種種構成也。且以用算籌之故，而計算大發達，其相互之間，恐不能無關係也。

在此等八卦筮竹算籌種種並行之國，其計算專用算籌，且以用算籌而算術及代數之方法發達，殆屬當然之事也。

第十七章 清代之算學

明末時西洋之曆算傳入，由此至清時，西洋算學與古來算法並行，成立幾多之創意的研究，此前已述之矣。

天元術爲宋元算學上之一種代數學，明代不甚注意。清初雖有天元術之書，然因西洋之代數

學已傳入。亦無暇重視代數術或代數學之名，後來譯書中始用之，當時則稱爲借根方。借根方者，與以已知數求未知數相同，借來而立之算法，蓋以代數之算法，巧爲表明之者也。既學此借根方，與昔日之天元術比較，乃知天元術之意義與借根方相同。其實借根以西方之言語稱爲 Algebra。據 Algebra 字義，有東來法之意。傳說西洋人律義堅以算法傳自東方之中國，乃以東來法名其術。此在考察當時中國算學之發達的歷史上，非常珍貴，因述其出處如下。

梅穀成著赤水遺珍云：

嘗讀授時歷草，求弦矢之法，先立天元一爲矢；而元學士李冶所著測圓海鏡，亦用天元一立算，傳寫魯魚，算式訛舛，殊不易讀。前明唐荆川顧筭溪兩公，互相推重，自謂得此中三昧。荆川之說曰：「藝士著書，往往以祕其機爲奇，所謂立天元一云爾，如積求之云爾，漫不省其爲何語。」而筭溪則言：「細考測圓海鏡，如求城徑，卽以二百四十爲天元，半徑卽以一百二十爲天元；既知其數，何用稱爲，似不必立可也。」二公之言如此，予於顧說頗不爲然而無以解也。後供奉內廷，蒙聖祖仁皇帝授以借根方法；且諭曰：「西洋人名此書爲阿爾熱八達，譯言東來法也。」敬授而讀之，其

法神妙，誠算法之指南；而竊疑天元一之術，頗與相似。復取授時曆草觀之，乃渙如冰解，殆名異而實同，非徒曰似之已也。夫元時著書，臺官治曆，莫非此物，不知何故遂失其傳。猶幸遠人募化，復得故物，東來之名，彼尙不能忘所自，而明人獨視爲贅疣而欲棄之。噫！好學深思如顧唐二公，猶不能知其意，而淺見寡聞者，又何足道哉！何足道哉！

梅穀成（一七六三年卒，年八十三）之赤水遺珍，於乾隆辛巳（一七六一）刊行，爲梅氏叢書輯要之附錄第一，其附錄第二中，有甲子（一六四四）春分識之跋語。梅穀成之供奉內庭，爲康熙五十一年（一七一二）（見李儼著梅文鼎年譜，及清華學報卷二），則其赤水遺珍中所云，乃康熙末年之事也。

秦九韶有大衍求一術（見其所作之數書九章），後來其法利用甚廣。清時論大衍求一術者，如焦循之天元一釋（一八〇〇）、張敦仁之求一算術（一八〇三）、駱騰鳳之藝遊錄（一八四三）、時日醇（道光中人）之求一術指、黃宗憲之求一術通解（一八七四）等，皆於此術有所發明。（欲知其詳，可觀畏友李儼君所作之「大衍求一術之過去與未來」一文，即載於學藝雜誌第

七卷第二號者。

招差法，根據元之授時曆，清之梅文鼎（一六三三——一七二一）著有解說，應用之而有瑛術，即求種種有限級數之總和之算法，已收優良之效果矣。

圓理發達爲最緊要之事件，可比西洋之定積分，其算法則始於所謂杜氏九術。考杜氏爲杜美德，即法人Pierre Jartoux；於康熙三十九年來華，五十九年（一七二〇）歿，年五十一；惟其傳九術之年代，則不明瞭。然雖云九術，實僅三術，梅穀成收之於赤水遺珍中，三術用無限級數，表三角函數，雖有相當於公式者，而解析之方法不備。及蒙古人欽天監監正明安圖，積三十餘年之辛勞，始考出解析方法，且別附以六術。明安圖又著有割圓密率捷法，未終稿而歿；其少子明新與門人陳際新續成之。

明安圖以後，學者輩出，此種算法，乃大爲進步；研究之者，有董祐誠（一七九一——一八二三）項名達（一七八九——一八五〇）戴煦（一八〇五——一八六〇）李善蘭（一八〇二——一八八二）夏鸞翔（一八二三——一八六四）徐有壬（一八六〇年卒）等。

第十八章 中國算學之價值

以上云云，卽就中國算學之種種觀察也。約言之，則中國行種種分配，又行易，又用數以律一切之思想亦極盛。與易用竹籌類似之籌，於計算，其結果，代數學上，乃實現其特殊之發達，適成爲中國之算學。雖然，算籌之算法，其初實立適當之方法，乃無阻礙的發展，成爲二三十年長期之產物，未免過於貧弱也。如出於河圖洛書之方陣，亦先他國而想得，然方陣之布列，其後多無進步。宋末揚輝書中，亦現別種方陣；然揚輝之前，蔡沈（一一六六）自易之研究；於方陣上已有多少之提議，揚輝之方陣，或爲蔡沈所誘起者也。然阿剌伯之算學，亦有方陣，揚輝想必受其影響。其後清之方中通（數度衍）關於方陣，亦有多少之研究云。

上野清之九九論文云：

占筮家用一至九之數，以代人世之禍福吉凶，構成八卦或九疇。是中國之易學者，與用文字以代數之西洋代數學，適取全反對之方向。故西洋算學與時俱進，中國從來不再進一步，其原

因，即在斯也。

換言之，即中國用數以爲他物記號，與使用他種記號。以表數之西洋代數學，其進行之方向，完全相反，故算學進步緩慢也。此事或亦有之。中國雖用算籌得組成一種之代數學，然用筆記述其算法時，記載上之記號，亦多少留有其痕迹；進一步言之，亦嘗以文字爲記號。惟爲算籌之算法所困，且後人不繼續努力，故未能登峯造極。蓋中國之器械的代數學，以表數之算籌爲記號，與易之以數表物，同出一轍。未能打破此種拘束，甚可惜也。

中國人以曆術上之觀測，巧爲構成種種分配，且由其分配之數，以律一切萬物，而大受其拘束；曆法上有許多甚無爲之附會，乃至消費其能力之大部分云。

因此，上野之觀察，予以爲亦有理由。雖然，中國之算學，幾何學方面何以不能發展，其理由殊不能說明。夫中國象形文字發達。都邑之構造，有整齊之街衢；所云鑑鏡鐘鼎，喜整齊之形體；如繪圖亦頗發達。由此等事觀之，中國人關於形體之感，不能謂爲薄弱。算學上，前則墨子中記載斷片的幾何學的關係事項，後則九章注中，亦有長於幾何學之論究，乃降及宋元代數學發達之時代，幾何學方

面，反不及於前時。至清代，則幾何學之研究，多無可觀者。明末雖譯有幾何原本，然其後之數理精蘊，反記載疎於證明之幾何學，與羅馬歐几里得（Euclid）之幾何學一對照，竟至不成意味。此與其謂為缺乏形體之感覺，毋寧謂基於論理思想之如何也。

中國先秦時代，名家者流，論理思想已有相當之發達。若其傾向連續而進，則論理學之成立，或能期待，亦未可知。然其傾向不能繼續。後雖傳入印度之因明，但僅止於傳入，不能更有發展。因此，中國之思想上，無所謂三段論法。常用之文句，多以連想為基礎，用連鎖的敘述。因此種論理法之結果，——實則盛行此種論理法之精神發現——不便於幾何學之成立之一理由，或即在此。觀史記漢書以及歷代正史皆有律曆志等，其重視曆法自不待言。然雖有其事，而中國曆術家終局之努力，乃在安排曆日，並未以幾何學整理天文體系。中國之算學於此有一缺陷，實吾人不能不承認者也。

又，中國之文明，為文物藝術之文明，非科學之文明，其算學所以不能較進步者，此即其理由之一。雅典為希臘文學、哲學、藝術之中心地極點處，其算學科學，反不及四周殖民地；觀此，則中國算學不發達之原因，思過半矣。或以為雅典如此情形，殆為時代之風潮，然其與四周殖民地之對照，則甚

顯著也。若然，則中國在算學方面，原非其長處，通如是長之歷史，無不如斯也。

言至此，遇一問題，即中國算學之將來如何乎？事實上，今日一切事情已大變更，所謂算學專家之學習態度，以及其修養，已非從來可比。若能察其缺陷，舍短用長，努力不已，則或有相當之轉變。予以清朝時代之算學與和算比較，覺中國算學並不劣於日本。中國人算學之能力，即其使用算籌而造出特殊之代數學者，將來亦必能發揮之也。

蓋予以此種論究，以為中國算學，受外國之影響，而其有特色之處，並不別行多變，不如因外國影響如何之問題而多多變更也。