О дифференциальном уравнении $y'' = f(x, y, y')$.

Митио Нагумо.

(Прочитано 20 июля 1937.)

Главная цель данной работы — дать достаточное условие того, что в некоторой ограниченной области (x, y) существует интегральная кривая дифференциального уравнения

$$\frac{d^2y}{dx^2} = f(x, y, \frac{dy}{dx}),$$

проходящая через две данные точки. Условие существенно опирается на ограниченность кривой в области.

Мне кажется достаточно значительным также исследование возможности построения интегральной кривой в ограниченной области на плоскости (x, y), т. к. оно удаётся не всегда, а только если уравнение имеет очень простую форму.

§1. Возможность продолжения интегральной кривой.

Общим решением

$$\frac{d^2y}{dx^2} = 2\left(\frac{dy}{dx}\right)^3$$

является либо $y = \pm\sqrt{c - x} + c'(x < c)$, либо $y = c'$. Интегральная кривая, вообще говоря, продолжается только до $x = c$ — до тех пор, пока y наконец–то не достигнет границы $y = c'$. Т. о. для каждой точки плоскости имеется интегральная кривая, проходящая через эти точки, однако продолжается она не далеко. Есть также необходимое условие продолжения интегральной кривой.

Утв. 1. Пусть B — ограниченная замкнутая область на плоскости (x, y). Далее пусть B^* — трёхмерная область в (x, y, y') такая, что $(x, y) \in B$, а $-\infty < y' < +\infty$. Пусть функция $f(x, y, y')$ непрерывна в B^* и выполняется следующее достаточное условие

$$|f(x, y, y')| \leqslant \varphi(|y'|),$$

где $\varphi(u)$ — некоторая положительная непрерывная функция $u(\geqslant 0)$ такая, что

$$\int\limits_0^\infty \frac{udu}{\varphi(u)} = +\infty.$$

Тогда интегральная кривая (0) может быть продолжена в обе стороны до края B.

Зам. Условия (1) и (2) будут выполнены, если

$$|f(x,y,y')| \leqslant M(1+y'^2) \quad (M = const).$$

Прежде чем мы приступим к докозательству утверждения, сформулируем следующее всп. утв..

Всп. утв. 1. При предположениях утв.1 для любого положительного числа α и некоторого $\beta(\alpha)$ имеется следующее свойство: для любого интеграла $y = y(x)$ (1) с начальными условиями $y(x_0) = y_0$ и $|y'(x_0)| \leqslant \alpha$, где (x_0, y_0) любая точка B, всегда, до тех пор пока интегральная кривая лежит в B, выполняется неравенство

$$|y'(x)| < \beta(\alpha).$$

Док. Т. к. B ограничена, то имеется положительное число L такое, что для любых двух точек (x_1, y_1) и (x_2, y_2) из B

$$|y_1 - y_2| \leqslant L.$$

Тогда согласно (2) для любого положительного числа α имеется некоторое $\beta(\alpha)(> \alpha)$ такое, что

$$\int\limits_{\alpha}^{\beta(\alpha)} \frac{udu}{\varphi(u)} > L.$$

Теперь пусть $y = y(x)$ — любой интеграл (0) с начальными условиями $y(x_0) = y_0$ и $y'(x_0) \leqslant \alpha$, где (x_0, y_0) точка из B. Пусть $x_1 \leqslant x \leqslant x_2$ некоторый интервал такой, что интегральная кривая $y = y(x)$ лежит в B, а $x_1 \leqslant x_0 \leqslant x_2$. Тогда $y'(x) < \beta(\alpha)$ при $x_1 \leqslant x \leqslant x_2$.

Т. к. это ничему не противоречит, то на интервале $x_1 \leqslant x \leqslant x_2$ имеются две точки ξ_1 и ξ_2 такие, что $y'(\xi_1) = \alpha$, $y'(\xi_2) = \beta(\alpha)$ и $\alpha < y'(x) < \beta(\alpha)$ между ξ_1 и ξ_2. Можно положить $\xi_1 < \xi_2$, иначе необходимо двигаться в направлении $-x$ вместо x. Т. к. $y'(x) > 0$ при $\xi_1 \leqslant x \leqslant \xi_2$, то из (0) и (1) следует

$$\frac{y'y''}{\varphi(y')} \leqslant y' \text{ для } \xi_1 \leqslant x \leqslant \xi_2.$$

Итак

$$\int\limits_{\alpha}^{\beta(\alpha)} \frac{udu}{\varphi(u)} \leqslant y(\xi_2) - y(\xi_1) \leqslant L,$$

что противоречит (3). Поэтому для $x_1 \leqslant x \leqslant x_2$ должно быть $y' < \beta(\alpha)$.

Совершенно аналогично можно доказать, что $y'(x) > -\beta(\alpha)$ при $x_1 \leqslant x \leqslant x_2$, если $y'(x) > -\alpha$. чтд

Док. утв. 1. Пусть $y = y(x)$ — интегральная кривая, проходящая через некоторую точку из B. Пусть α некоторое положительное число такое, что $|y'(x_0)| \leqslant \alpha$. Тогда согласно всп. утв. 1 имеется некоторое положительное число $\beta(\alpha)(> \alpha)$ такое, что $|y'(x)| < \beta(\alpha)$ до тех пор, пока интегральная кривая лежит в B.

Теперь пусть B^*_β — замкнутая ограниченная область в (x, y, y') такая, что $(x, y) \in B$, а $|y'| \leqslant \beta(\alpha)$. Согласно утверждению Камке[1] каждая интегральная

[1]Crelles Journal 161 (1929), S.194 Auch von demselben Verfasser: Differentialgleichungen reeller Funktionen, S.135.

кривая системы

$$\begin{cases} \frac{dy'}{dx} = f(x,y,y') \\ \frac{dy}{dx} = y', \end{cases}$$

равноценной (0), продолжается до границы B^*_β. Т. к. равенство $|y'(x)| = \beta(\alpha)$ не достигается, то есть продолжение интегральной кривой до границы B. чтд

§2. Существование для краевой задачи.

В дальнейшем под B будем понимать замкнутую область на плоскости (x,y) ограниченную кривыми $x = a$, $x = b$, $(a < b)$, $y = \underline{w}(x)$ и $y = \overline{w}(x)$, где $\underline{w}(x)$ и $\overline{w}(x)$ непрерывны при $a \leqslant x \leqslant b$ и $\underline{w} < \overline{w}$ при $a < x < b$. B^* — трёхмерная область (x,y,y') такая, что $(x,y) \in B$, а $|y'| < \infty$.

Всп. утв. 2. Пусть $\underline{w}(x)$ и $\overline{w}(x)$ дифференцируемы при $x = a$ и $\underline{w}(a) < \overline{w}(a)$. Функция $f(x,y,y')$ удовлетворяет условиям утв.1. Тогда имеется некоторое положительное число γ, удовлетворяющее следующему свойству.

Каждая интегральная кривая (0) с начальными условиями $\underline{w}(a) \leqslant y(a) < \overline{w}(a)$ и $y'(a) \geqslant \gamma$ пересекает кривую $y = \overline{w}(x)$ при некотором x из $a < x < b$, а каждая интегральная кривая (0) с условиями $\underline{w}(a) < y(a) \leqslant \overline{w}(a)$ и $y'(a) \leqslant -\gamma$ пересекает кривую $y = \underline{w}(x)$ при некотором x из $a < x < b$.

Док. Возьмём $\gamma = \max\left[\beta(\frac{L}{b-a}), \underline{w}'(a) + \varepsilon, -\overline{w}'(a) + \varepsilon\right]$, где $\beta(\alpha)$ и L удовлетворяют условиям всп. утв. 1, а ε некоторое (произвольное) положительное число. Необходимо доказать только первую часть утверждения, т. к. вторая часть будет доказываться совершенно аналогично первой. Пусть $y = y(x)$ некоторая интегральная кривая с условиями $\underline{w}(a) \leqslant y(a) < \overline{w}(a)$ и $y'(a) \geqslant \gamma$. Тогда справедливо $y' > \frac{L}{b-a}$ до тех пор, пока интегральная кривая остаётся в B, т. к. иначе имеется некоторая точка (x_0, y_0) из B такая, что $|y'(x_0)| \leqslant \frac{L}{b-a}$. Тогда согласно всп. утв. 1 до тех пор, пока кривая остаётся в B должно выполняться неравенство $|y'(x)| < \beta(\frac{L}{b-a})$, что противоречит $y'(a) \geqslant \beta(\frac{L}{b-a})$. Отсюда легко следует доказательство утверждения. чтд

Всп. утв. 3. Пусть $\overline{w}(x)$ и $\underline{w}(x)$ дважды дифференцируемы при $x = a$, и либо $\overline{w}(a) > \underline{w}(a)$, либо $\overline{w}'(a) > \underline{w}'(a)$. Функция $f(x,y,y')$ удовлетворяет условиям утв.1. Далее имеет место неравенство

$$\overline{w}''(a) < f(a, \overline{w}(a), \overline{w}'(a)).$$

Тогда имеется некоторое вещественное число γ такое, что каждая интегральная кривая с начальными условиями $y(a) = \overline{w}(x), \gamma < y'(a) < \overline{w}'(a)$ пересекает кривую $y = \overline{w}(x)$ на интервале $a < x < b$.

Если заменить неравенство (4) на

$$\underline{w}''(a) > f(a, \underline{w}(a), \underline{w}'(a)),$$

то найдётся некоторое число γ' такое, что каждая интегральная кривая с условиями $y(a) = \underline{w}(a), \gamma' > y'(a) > \underline{w}'(a)$ пересекает кривую $y = \underline{w}(x)$ на интервале $a < x < b$.

Док. Предоставляется читателю.

Теперь мы подошли к главному утверждению.

Утв. 2. Пусть $\overline{w}(x)$ и $\underline{w}(x)$ дважды дифференцируемы справа и слева при $a \leqslant x \leqslant b$[2]. Функция $f(x,y,y')$ имеет непрерывные частные производные $\frac{\partial f}{\partial y}$ и $\frac{\partial f}{\partial y'}$ в B^* и удовлетворяет условию

$$|f(x,y,y')| \leqslant \varphi(|y'|),$$

где $\varphi(u)$ некоторая положительная непрерывная функция u и

$$\int_0^\infty \frac{udu}{\varphi(u)} = +\infty.$$

Далее для $\overline{w}(x)$ и $\underline{w}(x)$ справедливы неравенства

$$\underline{w}''(x) > f(x, \underline{w}(x), \underline{w}'(x)),$$
$$\overline{w}''(x) < f(x, \overline{w}(x), \overline{w}'(x))^3.$$

Тогда для любых двух точек (x_0, y_0) и (x_1, y_1), не лежащих на одной вертикальной прямой, имеется по крайней мере одна интегральная кривая (0), лежащая внутри B при $x_0 < x < x_1$.

Док. Можно положить $x_0 = a, x_1 = b$, т. к. иначе вместо B следует рассмотреть подобласть $x_0 \leqslant x \leqslant x_1$, $\underline{w}(x) \leqslant y \leqslant \overline{w}(x)$.

Интегральная кривая $y = y(x,\alpha)$ с начальными условиями $y(a) = y_0$ и $y'(a) = \alpha$ однозначно определена и непрерывно зависит от α. Согласно утв.1 эта интегральная кривая может быть продолжена до границы B. Пусть P_α — точка, где $y = y(x,\alpha)$ достигает границы B. Если P_α лежит на $x = b$, то зависит от α непрерывно. Если P_α лежит на $y = \underline{w}(x)$ или $y = \overline{w}(x)$, то согласно (5) интегральная кривая не может касаться их. Поэтому точка пересечения P_α также будет непрерывно зависеть от α.

Из (5) следует, что либо $\underline{w}(a) < \overline{w}(a)$, либо $\underline{w}'(a) < \overline{w}'(a)$. Согласно всп. утв. 2 или 3 имеются две константы α_1 и α_2 такие, что P_{α_1} лежит на $y = \underline{w}(x)$, а P_{α_2} на $\overline{w}(x)$. Т. к. P_α непрерывно зависит от α, совокупность кривых $y = \underline{w}(x)(a < x \leqslant b), x = b(\underline{w}(b) \leqslant y \leqslant \overline{w}(b))$ и $y = \overline{w}(x)(b \geqslant x > a)$ образует простую кривую, то найдётся некоторая константа $\alpha = \alpha^*$ такая, что P_{α^*} совпадает с точкой $(x = b, y = y_1)$. Т. о. интегральная кривая $y = y(x,\alpha^*)$ проходит через (x_0, y_0) и (x_1, y_1), и при $x_0 < x < x_1$ располагается внутри B. чтд

Зам. Утв.2 даёт только достаточное условие существования интеграла, проходящего через две точки. Однозначности решения оно, как показывает следующий пример, также не даёт.

$$\frac{d^2y}{dx^2} = f(y), \text{ где } f(y) = \begin{cases} \frac{1}{2}\{(y-2)^2 - 3\} & \text{при } y \geqslant 1 \\ -y & \text{при } |y| \leqslant 1 \\ \frac{1}{2}\{3 - (y+2)^2\} & \text{при } y \leqslant -1 \end{cases}$$

$f(y)$ непрерывно дифференцируема по y. В области B, $0 \leqslant x \leqslant \pi$, $\underline{w}(x) = -4 \leqslant y \leqslant 4 = \overline{w}(x)$, выполнены все условия утв.2. Т. о. в области B должна найтись по меньшей мере одна интегральная кривая, лежащая в B и проходящая через две не лежащие на одной вертикали точки. Имеется однако бесконечно много решений, проходящих через (0,0) и (π,0), а именно $y = c\sin x$, где $|c| \leqslant 1$.

(Получено 20 Августа 1937.)

[2]существуют левосторонняя и правосторонняя производные $\overline{w}'(x)$ и $\underline{w}'(x)$.