ACTA
ACADEMIAE SCIENTIARVM
IMPERIALIS
PETROPOLITANAE

pro Anno MDCCLXXVIII.

PARS POSTERIOR.

PETROPOLI
TYPIS ACADEMIAE SCIENTIARVM
MDCCLXXXI.

16.70290 aprile 28

TABLE.

HISTOIRE DE L'ACADÉMIE IMPÉRIALE DES SCIENCES.

MDCCLXXVIII. Juillet —— Décembre.

avec trois planches.

ACTA

ACTA ACADEMIAE SCIENTIARUM IMPERIALIS PETROPOLITANAE

pro Anno MDCCLXXVIII. Pars posterior

cum tabulis XI aeri incisis.

MATHEMATICA

I. LE-

ASTRONOMICA

Corri-

Corrigenda.

p. p. 137, 138, 139 l. 237, 238, 239.

HISTOIRE.

HISTOIRE
DE
L'ACADÉMIE IMPÉRIALE
DES
SCIENCES.

HISTOIRE
DE L'ACADÉMIE.

MDCCLXXVIII.

Juillet —— Décembre.

ASSEMBLÉE PUBLIQUE.

L'Aſſemblée annuelle & publique s'eſt tenue le Samedi 13 Octobre. Elle a été honorée de la préſence de pluſieurs perſonnes de diſtinction, des Miniſtres des Cours étrangeres & des Honoraires: elle a commencé une demie heure avant midi.

Le Secrétaire de Conférences *Jean Albert Euler* en a fait l'ouverture par un expoſé des lectures & publications qui alloient occuper cette Séance ſolemnelle.

Mr. le Profeſſeur *Lexell* lut enſuite des *Recherches ſur le temps périodique des cometes en général & particulierement ſur celui de la comete de l'année* 1770.

Mr. l'Adjoint *Fuſs* le réleva et lut des *Obſervations & expériences ſur les aimans artificiels & ſur les meilleures manieres de les faire.* Tout l'appareil des barres & autres pieces magnétiques, qui avoient fourni l'occaſion de faire ces obſervations, étoit rangé ſur la table & expoſé aux yeux de l'Aſſemblée.

S. E. Mr. *de Domaſchnef*, Directeur préſidant à l'Aſſemblée, publia avec des regrets dus à leurs mérites les noms de Académiciens honoraires & externes morts pendant le cours des deux derniers années. Il proclama enſuite ſix nouveaux membres, que l'Académie pour réparer la perte des premiers, avoit élus dans ſa Séance du 28 Septembre. S. E. Mr. *d'Adadourof*, Conſeiller privé actuel et Sénateur, qui étoit du nombre, fut introduit par le Secrétaire, & après avoir pris place parmi les Honoraires, il adreſſa à l'Académie un diſcours de remerciment en ruſſe, auquel Mr. *de Domaſchnef* répondit dans la même langue.

Le Directeur rendit compte de ce qui regardoit le Prix à diſtribuer, & la novelle Queſtion à propoſer. Le Prix ſur la queſtion d'acouſtique, qui devoit être adjugé cette année, & qui déja avoit été renvoyé une fois, le fut encore pour la ſeconde, ſans cependant fixer de terme pour le concours des Pieces. La nouvelle queſtion que l'Académie propoſa pour l'année 1781 concerne l'Aſtronomie ſpéculative. *Voyez le Programme ſuivant.*

Le

Le Secrétaire termina la Séance en rapportant que le modele d'une échelle de nouvelle conſtruction pour les incendies inventée par le Sr. *Dahlgréen* Maître forgeron en cette ville, ayant été executé en grand, Meſſieurs les Académiciens nommés pour l'examiner avoient trouvé qu'elle répondoit parfaitement au jugement favorable qui en a été porte (*), que l'Académie par conſéquent voulant encourager le talent de cet Artiſte ingénieux, lui avoit décerné la Médaille académique en argent.

Le Directeur fit entrer le *Sr. Dahlgréen* & lui donna publiquement cette marque de généroſité académique.

MORT.

L'Académie a perdu le plus ancien de ſes Aſſociés libres par la mort de Mr. *François Arouet de Voltaire* arrivée à Paris le 30 Mai n. ſt. Il avoit été reçu au nombre des Membres externes le 24 Décembre 1746.

ASSOCIÉS NOUVEAUX.

proclamés le 13 Octobre dans l'Aſſemblée publique,

HONORAIRES.

S. E. Mr. *Waſile Eudoximovitſch Adadurof*, Conſeiller Privé actuel, Sénateur, et Curateur de l'Univerſi-

a 3 té

(*) Hiſtoire de 1777. P. I. pag. 67. ſeq.

té Impériale de Moſcou: Chevalier des Ordres de St. Alexandre Nevski & de Ste. Anne.

S. E. Mr. le Prince *Dimitri Alexievitſch de Gallitzin*, Chambellan actuel & Envoyé extraordinaire de la Cour Impériale auprés de Leurs Hautes Puiſſances les États Généraux des Provinces Unies à la Haye.

EXTERNES.

M. *Tronchin* Docteur en Médecine & Médecin du Corps de S. A. Msgr. le Duc d'Orleans, premier Prince du Sang: de l'Académie Royale des Sciences & Belles-Lettres de Pruſſe, & de celle des Sciences de Paris, *à Paris.*

Mr. *Pierre Camper*, Profeſſeur en Médecine à Gröningue: de la Société Royale des Sciences de Londres, de l'Académie Royale des Sciences & belles-lettres de Pruſſe, de la Société de Harlem & Correſpondant de l'Académie Royale des Sciences de Paris, *à Gröningen.*

Mr. l'Abbé *Boſſut*, Honoraire-Aſſocié-libre de l'Académie Royale d'Architecture, Examinateur des Eleves du Corps de Génie, Inſpecteur Général des Machines & Ouvrages hydrauliques des Bâtimens du Roi de France: de l'Académie Royale des Sciences de Paris, de celle des Sciences & belles-lettres de Pruſſe, de l'Inſtitut de Bologne &c. *à Paris.*

M. *Jean Hyacinthe de Magellan*, Gentil-homme Portugais: de la Société Royale des Sciences de Londres & Correſpondant de l'Académie Royale des Sciences de Paris, *à Londres.*

PRIX.

PRIX.

proposés par l'Académie Impériale des Sciences pour l'Année 1781.

L'Académie Impériale des Sciences devoit adjuger, dans son Assemblée du 13 Octobre 1778, le Prix de Physique qui concernoit la Question suivante:

Expliquer quel est le caractere des Sons que produisent des tubes cilindriques d'un diametre égal, qui étant construits à l'un des bouts comme les flutes à bec, sont percés le long de leur coté d'une ouverture circulaire: qu'elle est la variété des ces sons par rapport à la qualité grave & aigue selon la différente position & grandeur de ce trou lateral?

Quoique ce Prix eut déja été renvoyé une fois, & que l'Académie jusqu'au nouveau terme eut reçu diverses pieces, aucune d'elles n'a rempli le but principal de la Question, qui ne consiste pas seulement à occasionner des expériences nouvelles mais à les appliquer aux formules que donne la Théorie. Cependant l'importance du sujet ayant paru à l'Académie assés grande pour ne pas l'abandonner entierement, elle redouble son invitation à tous les Physiciens pour travailler sur cette question & pour tâcher de la resoudre au moins en partie: & afin qu'ils ne puissent point se plaindre d'un délai trop court ni de la gêne en général que cause chaque terme limité, elle remet ce Prix pour la seconde fois sans prescrire de terme

terme pour le concours des Pieces, s'engageant à donner la ſomme ſtipulée de cent Ducats d'hollande au premier bon mémoire qui lui ſera addreſſé ſur cette queſtion, dans quelque temps qu'il lui parvienne.

Comme toutes les meſures du temps ſe rapportent finalement au mouvement diurne de la Terre, qu'on a regardé de tout temps comme uniforme et inaltérable, par la réſiſtance de l'Atmoſphere ou de l'éther, par les forces du Soleil & de la Lune ſur le ſphéroïde applati, par la marée qui change la figure de ce ſphéroïde, & conſéquemment auſſi ſes axes principaux, ou enfin par d'autres forces quelconques, entant que leur moyenne direction ne paſſe pas par le centre de gravité de notre Globe, ſans que perſonne n'ait jusqu'ici démontré que cette ſuppoſition ſoit conforme à la vérité:

On demande,

Si l'on peut produire des preuves convainquantes de cette égalité de rotation de la Terre?

Ou bien, au cas que ce mouvement diurne ne ſoit pas uniforme & qu'il ait ſouffert réellement quelques légeres altérations par la réſiſtance de l'air & de l'éther, ou par quelque autre force qui puiſſe agir ſur la Terre;

On

On demande encore,

1°. *Par quels phénomenes on peut connoitre les altérations produites dans le mouvement diurne?*

2°. *Par quels moyens on peut rectifier la mesure du temps, afin d'en tirer une comparaison exacte entre la mesure du temps des Siecles passés et celle de nos jours?*

Le prix qui est une Médaille d'or du poids de cent ducats sera donné à celui qui, au jugement de l'Académie, aura le mieux réussi.

On invite les Savans de tout païs, excepté les Membres ordinaires de l'Academie, à travailler sur cette question, & à envoyer leurs recherches avant le 1 Janvier de cette année 1781, à Mr. *Jean Albert Euler* Secrétaire des Conferences de l'Académie Impériale des Sciences. Celles qui arriveront après ce terme ne seront point admises au concours. D'ailleurs les Auteurs sont pries d'avoir soin que leurs mémoires soient écrits distinctement en langue ou russe, ou latine, ou allemande, ou françoise. Ils éviteront aussi que leurs noms ne paroissent point dans les Dissertations qu'ils enverront; mais chacun d'eux y mettra une sentence, & en la consignant au Secretaire il recevra de lui un récépissé où sera marqué le numero de la déposition de sa piece, pourvù qu'il ait indiqué le lieu où le billet lui doit etre adressé. Chaque Auteur joindra en même temps à sa piece un billet cacheté, qui contiendra son nom & son adresse, & qui ne sera point ouvert à moins que la Dissertation y jointe n'ait remporté le Prix: & dans ce cas la médaille ſera délivrée, ou l'argent payé du tréſor de l'Académie à l'Auteur, lorsqu'il aura renvoyé la reconnoiſſance qu'il aura reçue du Secrétaire. Le jugement de l'Académie ſera declaré dans l'Aſſemblée publique & annuelle de 1781.

L'Académie attend encore des réponſes aux queſtions ſuivantes, annoncées dans les Programmes précédens.

Pour l'Année 1779.

Indiquer les meilleurs moyens, prouvés par la Théorie & par des Expériences ſuffiſantes, de rendre durables le bois de Chéne & les autres bois de conſtruction pour les navires, ſoit par la culture, ſoit à l'aide de certains mordans d'un bas prix, qui en pénétrant ces bois ſans nuire à leur ſolidité, empêchent la corruption des navires dans les ports, où l'eau douce ſe mêle à l'eau de mer.

Pour l'Année 1780.

Quelle eſt la nature & le caractère des ſons voyelles ſi eſſentiellement différens entr'eux?

Et comme les facteurs d'Orgues ont taché depuis longtemps d'imiter dans les jeux de l'Orgue, quoiqu'avec un ſuccès fort douteux, la voix humaine, en employant certains tuyaux qui prononcent presque généralement la voyelle composée *ai*, l'Académie demande en ſecond lieu:

Si

Si l'on ne pourroit pas construire des instrumens semblables aux tuyaux de ce jeu d'Anche connu sous le nom de voix humaine, qui imitassent parfaitement les différentes voyelles a, e, i, o, u, *moyennant quelques changemens apportes à la figure du tuyau, du noyau, de l'echalotte, ou de quelque autre partie essentielle, qui influe sur le genre & la qualité du son, & donne au jeu mentionné cette harmonie si agréable & si différente de celle des autres jeux?*

Chaque Prix est de cent ducats ou d'une médaille d'or du même poids, & les Pieces seront reçues au concours jusqu'au 1 Janvier de la dite année.

RÉFLEXIONS
Sur le temps périodique des Comètes en général, & principalement ſur celui de la Comète obſervée en 1770.

Par Mr. A. J. Lexell.

Lues dans l'Aſſemblée publique le 13 Octobre 1778.

Depuis que les Aſtronomes ont commencé à calculer les orbites des Comètes, d'après les vraies loix du mouvement des corps céleſtes, on a pourtant très peu d'exemples, qu'ils ayent pouſſé ces calculs jusqu'à la recherche du temps que les Comètes employent à faire leurs révolutions autour du Soleil; au moins on n'a pas encore réuſſi à déterminer, au moyen du calcul, le vrai temps périodique d'aucun de ces Aſtres, avec une exactitude tant ſoit peu préciſe; ſi ce n'eſt que Monſieur *de la Lande* prétend avoir vérifié le temps de la révolution pour la fameuſe Comète de *Halley*, à trois ans près, en employant dans ſon calcul des obſervations de cette Comète, faites lors de ſa derniere apparition en 1759. Lors donc que par mes recherches ſur la Comète de l'An 1770, je croyois être venu à bout d'en fixer le temps de la révolution, la nou-

nouvelle de cette découverte devoit ſans doute paroitre bien ſinguliere aux Aſtronomes; mais ce qui devoit leur cauſer la plus grande ſurpriſe, c'etoit l'extrême brieveté du Période trouvé pour cette Comète, qui ſurpaſſoit à peine cinq ans & demi, en ſorte que la Comète ſuivant cette détermination feroit ſes révolutions autour du Soleil, encore en moins de temps, que deux Planétes, ſavoir Jupiter & Saturne. Auſſi n'a-t-on pas manqué par tout où la nouvelle de mes recherches s'eſt répandue, de regarder cette concluſion comme très hazardée & même incroyable. Le réſultat de mes calculs ayant donc l'apparence d'une ſingularité très marquée, j'ai cru qu'il étoit de mon devoir de ne me pas trop hâter, en préſentant au Public le précis de mes réflexions, ſur un ſujet ſi nouveau & ſi extraordinaire: & j'eſpere qu'on ſera d'autant plus content de ce retard, qu'avant de vouloir perſuader aux autres, que les concluſions trouvées par mes calculs fuſſent juſtes & raiſonables, je me ſuis donné toute la peine poſſible pour m'en convaincre moi-même, en les ſoumettant à l'examen le plus rigoureux. Ayant donc achevé cet examen, qui m'a fourni, j'oſe le dire, une conviction auſſi ſûre, que celle qu'on a raiſon d'attendre d'une démonſtration Géometrique, il me ſera à préſent permis de rendre compte devant cette *Illuſtre Aſſemblée*, des recherches par les quelles j'ai tâché de determiner le temps de la révolution pour cette remarquable Comète de 1770. Mais avant que d'entrer en matiere, il ne ſera pas tout à fait hors de propos, de préſenter quelques réflexions ſur les conditions qui doivent avoir lieu, pour qu'il devienne poſſible de déterminer la révolution de quelque Comète que ce ſoit au moyen du calcul.

Les Aſtronomes en calculant le mouvement des Comètes ſont accoutumés à ſuppoſer dans leurs calculs, que les Comètes décrivent des orbites Paraboliques; non qu'ils ſoient perſuadés que ce mouvement ſe faſſe en effet dans de telles lignes, mais pour faciliter leur travail, qui devient aſſés long & compliqué, lorſque dans ces recherches on ſe croit obligé de tenir compte de l'excentricité des orbites Elliptiques; & même quand il ne s'agit que de connoitre à peu près le mouvement de quelque Comète, cette ſuppoſition eſt dans les cas les plus fréquens très admiſſible, vû que des lignes Paraboliques ſe confondent ſenſiblement avec de petites portions d'Ellipſes très allongées. Il paroit néanmoins très vraiſemblable que toutes les Comètes ſans exception ont certains Périodes de révolution, quoiqu'à cauſe de la grande excentricité de leurs orbites, auſſi bien que du peu de temps qu'il eſt permis de les obſerver, il devient le plus ſouvent presque impoſſible de fixer la durée de ces Périodes par des obſervations faites pendant une ſeule apparition. Il eſt aiſé de concevoir, que pour le plus grand nombre des Comètes, le temps périodique doit être extrêmement grand, & ainſi d'autant plus difficile à déterminer par le calcul; puisque parmi un nombre aſſés conſidérable de Comètes obſervées jusqu'ici, il n'y en a que trois, qui paroiſſent avoir eu des retours périodiques. Car outre la fameuſe Comète de 1682, dont le célebre *Halley* prédit le retour vers l'an 1759, prédiction dont l'evenement a très bien vérifié la juſteſſe, on a ſeulement deux autres Comètes, qui vraiſemblablement paroiſſent avoir un retour régulier; ce ſont celles de 1532 & 1264, dont la premiere a reparu l'An 1661 & qu'on a raiſon d'attendre

dre de nouveau l'An 1789; mais la feconde a eu fon retour l'An 1556 & deviendra peut être vifible l'An 1848.

Quelques défectueufes que les Méthodes dont on fait ufage pour calculer le mouvement des Comètes puiffent être, il eft très fûr que ce n'eft pas à cette imperfection de l'Analyfe, qu'on doit attribuer la difficulté qui fe préfente, lorsqu'il s'agit de déterminer le temps du retour des Comètes; mais qu'elle dépend principalement de la figure de leurs orbites, qui eft celle d'une Ellipfe très allongée. Pour s'en former une idée bien précife, il eft bon de fe rappeller, quels font les caractères diftinctifs, par lesquels on eft en état de répréfenter le vrai mouvement d'une Planète ou d'une Comète, en forte qu'on puiffe la reconnoitre parmi tous les autres corps céleftes, qui appartiennent à notre Syftème Planétaire. Entre ces élémens, deux fervent à déterminer la fituation du plan, dans le quel l'aftre fe meut: ce font, la pofition de la ligne felon laquelle ce plan coupe celui de l'Ecliptique & l'angle que ces deux plans font entr'eux, ou ce qu'on nomme en Aftronomie la longitude du noeud & l'inclinaifon de l'orbite. Les autres élémens font rélatifs à l'orbite même parcourue dans le plan dont la fituation eft fuppofée établie, & fe reduifent aux points fuivans. 1°. Le lieu de l'aftre dans fa plus proche diftance du Soleil, qui eft déterminé, tant par cette diftance elle-même, que par l'angle que cette ligne fait avec la ligne du noeud. 2°. Le temps lorsque l'aftre eft le plus près du Soleil & enfin 3°. l'excentricité de l'orbite elliptique, que l'aftre décrit autour du Soleil.

En

En faifant tant foit peu attention à ces élémens, il devient aifé de concevoir, que les Aftronomes s'etant occupés de la recherche du mouvement des Planètes, ont trouvé plufieurs moyens pour faciliter ce travail, dont il n'eft pas permis de faire ufage, lorsqu'il s'agit du mouvement des Comètes. Les Planètes décrivant dans leur mouvement des orbites presque circulaires ou très peu excentriques, ne s'éloignent jamais affés de la terre, pour qu'il ne foit pas poffible de les obferver dans tous les points de leurs trajectoires, & par cette raifon il a été permis de faire fur les Planètes des obfervations fi variées, qu'on a réuffi à déterminer chacun des élémens de leurs orbites, indépendamment de tous les autres. C'eft donc auffi immédiatement par les obfervations, qu'on a pu déterminer la durée de la révolution des Planètes, en remarquant combien de temps elles employoient à retourner vers les mêmes étoiles fixes, par rapport à un fpectateur qu'on fuppofe placé dans le Soleil. Or ce moyen de fixer le temps de la révolution ne peut pas être employé lorsqu'il eft queftion du mouvement des Comètes, à caufe de la longue durée de leur Période, qui certainement pour la plus grande partie de ces aftres, furpaffe des fiecles entiers: & en effet de toutes les Comètes, dont le mouvement eft conftaté par des obfervations Aftronomiques, il n'y en a que trois, comme je viens de le remarquer, dont le rétour a été obfervé. A caufe de la grande excentricité des trajectoires des Comètes, auffi bien que de la foibleffe de leur lumiere, ces aftres ne deviennent vifibles, que lorsqu'ils approchent de leur Périhélie, & par cette raifon, les portions des trajectoires, qu'ils décrivent pendant leur apparition, ne font que très petites. En s'oc-s'occupant donc de la détermination des élémens d'une Comète, au moyen des observations faites pendant le temps qu'elle est approchée de son *Péribélie*, on est obligé de chercher tous ces élémens à la fois, & par conséquent la détermination du temps périodique devient à l'ordinaire si compliquée qu'elle ne sçauroit mener à des résultats tant soit peu exacts. Au reste plus l'excentricité des orbites elliptiques est considérable, plus il devient difficile d'en trouver la valeur exactement, d'où il suit que la détermination du temps périodique pour des corps qui se meuvent dans de telles orbites, sera d'autant plus incertaine. Enfin comme l'exactitude de cette détermination dépend de la bonté des observations, par lesquelles on a établi les lieux de la Comète vus de la terre; même à cet égard, on n'a pas raison de s'attendre à la plus grande précision, vû que les Comètes ont ordinairement trop peu de lumiere & sont trop mal terminées, pour qu'on puisse estimer leur position, par rapport à des etoiles fixes, avec la plus grande justesse: Cependant quelque difficile que soit la recherche du temps périodique des Comètes, il ne faut pas désespérer de la réussite dans tous les cas, au moins il vaut bien la peine d'examiner dans quelles circonstances une Comète doit se trouver, afin qu'on puisse former quelque presomption vraisemblable sur le temps de son retour. En général il est évident, que l'apparence de trouver ce temps périodique est d'autant plus grande, que la portion de l'orbite parcourue par la Comète, pendant le temps de son apparition, a été considérable. Or pour juger lesquelles des Comètes parcourent, lors de leur apparition, des portions très grandes de leurs trajectoires, il faut principalement faire attention aux valeurs de leurs diſtances Périhélies du Soleil. Par rapport à cette circonſtance, il ſera donc permis de partager toutes les Comètes en trois claſſes, dont la premiere contient celles, qui ont la diſtance Périhélie conſidérablement plus grande que la diſtance du Soleil à la Terre; dans la ſeconde ſeront compriſes celles, dont la diſtance Périhélie n'eſt ni beaucoup plus grande que le demi-axe de l'Ecliptique, ni plus petite que la troiſieme ou quatrieme partie de ce demi-axe. Enfin la troiſieme claſſe contiendra les Comètes, qui ont la diſtance Périhélie encore plus petite que cette troiſieme ou quatrieme partie de la diſtance du Soleil à la Terre. Parmi toutes les Comètes obſervées, il n'y en a que deux, ſavoir celles de 1729 & 1747, qui appartiennent à la premiere claſſe. Toutes deux ont été obſervées pluſieurs mois de ſuite, mais les portions des orbites parcourues autour du Soleil, pendant leur apparition, étoient néanmoins trop petites, pour en tirer quelque éclairciſſement ſur la durée de leur révolution & il eſt même très probable, que toutes les Comètes de cette claſſe, qui pourroient paroitre à l'avenir, ſe trouveront dans le même cas. La troiſieme claſſe des Comètes eſt auſſi fort peu nombreuſe. Les plus remarquables de celles qui doivent être rangées dans cette claſſification, ſont les Comètes de 1680, 1744 & 1769, qui ſe ſont diſtinguées par l'éclat de leur lumiere & par la longueur de leurs queues. Comme elles approchoient très près du Soleil, elles ont décrit, pendant leur apparition, des angles aſſés conſidérables autour de cet Aſtre; mais à cauſe de l'excentricité de leurs orbites, qui doit être extrêmement grande, il n'eſt pas probable, qu'on puiſſe prononcer quelque choſe ſur le temps de leurs Périodes. En ſuppoſant,

par

par exemple, que la Comète de l'An 1680 ait ſeulement un temps périodique de cent ans, ſon excentricité devroit ſurpaſſer ſa diſtance Périhélie presque quatre mille fois, d'où il eſt ſûr que la moindre erreur commiſe dans la détermination de l'excentricité, produiroit des changemens très conſidérables par rapport au temps périodique. Ce ne ſont donc que les Comètes de la ſeconde claſſe, desquelles on peut ſe flatter de fixer le retour, en cas qu'elles ayent décrit des portions conſidérables de leurs orbites durant le temps de leur apparition. Cependant quelque nombreuſe que ſoit cette claſſe, on ne trouve entre les Comètes qui y ſont compriſes, qu'un très petit nombre de celles qui ont été obſervées aſſés long tems, & même de ce nombre, il faudra donner l'excluſion à toutes celles dont les obſervations pourroient être douteuſes. En examinant donc les Comètes de cette claſſe qui ont été obſervées depuis le commencement de ce Siecle, on n'en trouve que quatre, dont le temps de l'apparition ait été un peu conſidérable, ce ſont celles qui ont paru en 1739, 1759, 1770 & 1773. Entre celles-ci la Comète de 1759 eſt très certainement la même, qui avoit paru en 1456, 1531, 1607, & 1682: ſon temps de révolution étant donc très bien conſtaté, il n'étoit pas néceſſaire d'entreprendre la recherche de ce Période par les obſervations de la derniere apparition. On a pourtant bien de l'obligation à Monſieur *de la Lande* de s'être occupé d'une telle recherche, puisque cet exemple devoit encourager les Aſtronomes à en entreprendre de ſemblables par rapport à d'autres Comètes.

La Comète de 1770 étoit certainement une des plus ſingulieres de celles qu'on a obſervées, & meritoit à plus d'un égard l'attention des Aſtronomes; mais ce qui la rendoit principalement remarquable, c'étoit que les obſervations faites ſur ſon mouvement, ne pouvoient cadrer avec l'hypothèſe d'une orbite Parabolique. Monſieur *Meſſier* célèbre Aſtronome de Paris & Membre de cette Illuſtre Société, dont l'aſſiduité & le zèle infatigable pour l'Aſtronomie méritent les plus grands éloges, ayant depuis une vingtaine d'années enrichi le Syſtème Planétaire de la découverte de pluſieurs Comètes, eſt auſſi celui qui découvrit la Comète de 1770 & qui en a fait une très belle ſuite d'obſervations, on ne peut pas plus exactes. Elle fut obſervée par lui à deux differentes repriſes. Pour la premiere fois Monſieur *Meſſier* la remarqua le 14 de Juin, dans la conſtellation du Sagittaire; ſon mouvement apperçu de la terre, étoit au commencement aſſés lent, mais il s'accéléra enſuite, & devint vers la fin du mois de Juin d'une rapidité étonnante, ce qui donnoit une preuve très ſûre, que la Comète s'approchoit alors très près de la terre. Le 3 de Juillet, Monſieur *Meſſier* la perdit de vue, parcequ'elle venoit alors de ſe plonger dans les rayons du Soleil. Enſuite après s'être dégagée des rayons du Soleil, elle commença a être viſible pour la ſeconde fois le 2 d'Août, & après ce temps Monſieur *Meſſier* continua de l'obſerver jusqu'au 2 d'Octobre. Il eſt prouvé par le calcul, que l'angle décrit par la Comète autour du Soleil, pendant ſa premiere apparition, eſt environ de 12°, & pendant la ſeconde apparition de 107°; de même que l'angle d'Anomalie, entre le lieu de la Comète le 14 de Juin & celui du 2 d'Octobre, ſe trouve un peu plus grand que

172°;

172°; on a donc la plus grande raiſon de préſumer, que la recherche du temps périodique ne ſera pas pour cette Comète tout à fait infructueuſe.

Monſieur *Pingré* ayant fait uſage des obſervations de Monſieur *Meſſier* faites dans le mois de Juin, pour calculer le mouvement de la Comète dans une orbite Parabolique, trouva pour cette orbite des élémens, qui ſatisfaiſoient aſſés bien aux obſervations faites depuis le 14 jusqu'au 29 de Juin, mais qui ne pouvoient, en aucune façon, être miſes d'accord avec les obſervations faites pendant la ſeconde apparition. Or comme on avoit quelque raiſon de ſoupçonner, que la Comète en s'approchant de la terre, les derniers jours du mois de Juin, auroit pû ſubir quelque dérangement dans ſon orbite, par l'action de notre Globe; il reſtoit encore à examiner, ſi l'on ne viendroit pas à bout de ſatisfaire au moins à toutes les obſervations de la ſeconde apparition, par une orbite Parabolique. Pour cet effet Monſieur *Proſperin* célebre Aſtronome d'Upſal, entreprit de calculer le mouvement de la Comète, d'après les obſervations de la ſeconde apparition; mais le réſultat de ſes calculs montra, que ces obſervations ne pouvoient être miſes d'accord entre elles, tant qu'on ſuppoſe, que le mouvement de la Comète s'eſt fait dans une orbite Parabolique: car ayant cherché une ligne Parabolique, qui ſatisfit aux obſervations faites depuis le 2 jusqu'au 19 d'Août, Monſieur *Proſperin* trouva qu'elle différoit beaucoup des obſervations faites depuis la fin d'Août jusqu'au commencement d'Octobre; & au contraire l'orbite Parabolique, qui étoit d'accord avec ces dernieres obſervations, s'éloignoit d'autant

tant plus des premieres. Le résultat des calculs de Monsieur *Prosperin* ayant excité ma curiosité, je me suis proposé d'entreprendre le calcul du mouvement de la Comète, dans l'hypothèse d'une orbite Elliptique; mais avant que de commencer cette recherche, j'ai voulu essayer moi même, s'il ne seroit pas possible de trouver une orbite Parabolique, qui satisfit à toutes les observations; or les premiers essais entrepris à ce dessein, m'en ayant donné une conviction suffisante, je pouvois sans aucun scrupule fixer mes recherches au calcul de l'orbite Elliptique. Or comme l'exactitude d'un tel calcul dépend principalement de la grandeur de l'angle que la Comète décrit autour du Soleil, pendant le temps écoulé entre les observations employées dans le calcul; j'ai commencé par faire usage de trois observations dont deux étoient de part & d'autre autant éloignées du Périhélie de la Comète, qu'il étoit permis de les trouver, & dont la troisieme étant au milieu des deux autres, approchoit très près du Périhélie. Ayant fait dix combinaisons, de trois à trois semblables observations, je trouvai des résultats pour les élémens de la Comète dont l'accord surpassoit toute mon attente & particulierement par rapport au temps périodique: la plus grande différence des différentes valeurs ne surpassoit pas de beaucoup une demie année, la moyenne valeur étant cinq ans & demi. Cette conclusion m'ayant paru très singuliere & même incroyable, j'ai cru qu'il valoit la peine de l'examiner encore plus scrupuleusement, en essayant si, au moyen des seules observations faites pendant la seconde apparition, cette valeur du temps périodique se trouveroit confirmée; la premiere recherche étant assujettie à quelque doute, en cas que l'action de la terre eût

eût été capable de produire quelque changement dans le mouvement de la Comète. Ayant donc fait dix nouvelles combinaiſons de trois obſervations de la ſeconde apparition, j'ai été bien ſurpris de voir, que la moyenne valeur pour le temps périodique trouvée par ces calculs, s'accordoit encore à fort peu près, avec celle que les prémiers calculs avoit fournie. Malgré cet accord ſingulier de tant de différentes recherches, ne me croyant pas encore aſſés convaincu de l'exactitude par rapport à cette valeur du Période de la Comète, j'ai taché de la vérifier de pluſieurs manieres, dont le détail deviendroit à préſent trop long & trop ennuyant; il ſuffira donc de préſenter une esquiſſe des élémens de cette remarquable Comète, tels qu'ils m'ont parus le mieux s'accorder avec les obſervations.

I. La longitude du Nœud aſcendant de la Comète, où elle commence à s'élever au deſſus de l'Ecliptique, paſſe par $4^{s}.\ 12^{\circ}$, c'eſt à dire par le douzieme degré dans le ſigne du Lion.

II. L'inclinaiſon de l'orbite de la Comète avec le plan de l'Ecliptique, n'eſt que de $1^{d.}\ 33'\ 40''$, & par conſéquent moindre que l'inclinaiſon des orbites de toutes les Planètes, excepté celle de Jupiter; & même entre toutes les Comètes obſervées jusqu'ici, celle-ci a l'inclinaiſon de l'orbite la plus petite.

III. L'angle, qui marque l'élongation du Nœud deſcendant de l'axe de l'orbite, eſt de $44^{\circ},\ 17'$, conſéquemment

ment le lieu du Périhélie de la Comète se trouvera dans $11^s. 26°. 17'$, c'est à dire dans le signe des Poissons au 26^e degré.

IV. Le temps, lorsque la Comète a passé par son Périhélie, ou lorsqu'elle a été dans sa plus proche distance du Soleil, est arrivé l'An 1770, le 13 d'Août à $13^h. 5'$ à peu près. Il est en effet bien surprenant, que ce passage par le Périhélie se soit fait précisement dans ce temps, pour que la Comète ait du s'approcher le 1 de Juillet, si près de la terre, qu'elle n'en étoit éloignée que de la 70^{me} partie de la distance moyenne du Soleil à la Terre, c'est à dire presque si près qu'il est possible qu'elle puisse jamais s'approcher de l'orbite de la terre.

V. La distance Périhélie de la Comète, ou son plus petit éloignement du Soleil est égal à 0, 6743815, ou un peu plus grand que $\frac{2}{3}$ de la distance moyenne du Soleil à la Terre: ainsi cette Comète étant dans son Périhélie, passe plus près du Soleil, que toutes les Planètes, Mercure excepté.

VI. Le demi-axe de l'Ellipse décrite par cette Comète est égal à 3, 1478606, ou un peu plus grand que le triple du demi-axe de l'Ecliptique, & la distance Aphélie de la Comète se trouve 5, 6213391, ou à peu près $5\frac{1}{2}$ fois plus grande que la distance du Soleil à la terre; de sorte que Jupiter & cette Comète sont dans leurs Aphélies presque également éloignés du Soleil; d'où il s'ensuit, que l'orbite de cette Comète traversera les orbites

orbites de Jupiter, de Mars, de Vénus & celle de la Terre, mais qu'elle eſt toujours plus proche du Soleil que l'orbite de Saturne, & plus éloignée que celle de Mercure.

VII. Enfin la concluſion la plus inopinée & en même temps la plus intéreſſante, par rapport au mouvement de cette Comète, c'eſt que ſon temps de révolution eſt environ de cinq ans & ſept mois; d'où il ſuit, qu'elle a du retourner à ſon Périhélie l'An 1776 & qu'on a raiſon de l'attendre encore dans le Périhélie, l'An 1781 dans le mois d'Octobre, ſi d'autres circonſtances ne font pas changer le mouvement de la Comète avant cette époque. Quelque ſingulière que cette concluſion puiſſe paroitre, il me ſemble que l'argument le plus fort pour ſon exactitude, c'eſt que les élémens que je viens de rapporter, ſatisfont ſi bien aux obſervations, que pour la plûpart, les erreurs tant en Longitude, qu'en Latitude ne ſurpaſſent pas une minute, & qu'il n'y a qu'une ſeule obſervation, pour laquelle cette erreur va au delà de deux minutes, cette obſervation étant au reſte très douteuſe. On a donc la plus grande raiſon de préſumer, qu'une orbite par laquelle les obſervations ſe trouvent ſi exactement remplies, doit être la vraie, & qu'en augmentant le temps périodique, on ne ſçauroit ſe flatter, de ſatisfaire également bien aux obſervations. Pour en être parfaitement aſſuré, j'ai ſuppoſé que le temps périodique de la Comète fût un peu plus grand, que celui dont je viens de parler, & alors en tâchant de ſatisfaire aux obſervations du 15 & 29 de Juin, j'ai examiné,

 quelles

quelles erreurs devroient en résulter pour les observations du 2 & 29 d'Août, aussi bien que pour celle du 1 d'Octobre. Ayant donc supposé premierement que le temps periodique fût de 6 ans & posant la distance Périhélie = 0, 6719267, j'ai trouvé qu'en satisfaisant aux observations du 15 & 29 de Juin, celles du 2 d'Août & du 1 d'Octobre étoient aussi remplies; mais que pour l'observation du 29 d'Août l'erreur en Longitude montoit jusqu'à cinq minutes: & même j'ai remarqué, que si au moyen de quelque changement dans la distance Périhélie, on vouloit diminuer l'erreur de l'observation du 29 d'Août, celle qui en résulteroit pour l'observation du 1 d'Octobre, en deviendroit d'autant plus considérable. Ensuite ayant supposé le temps périodique de 7 ans & la distance Périhélie = 0, 6670785, j'ai trouvé, qu'en satisfaisant aux observations du 15 & 29 de Juin, il devoit y avoir pour l'observation du 2 d'Août une correction de 3 minutes en Longitude à ajouter, pour celle du 29 d'Août aussi une correction de 16 minutes additive, & enfin pour l'observation du 1 d'Octobre, la correction étoit de 3 minutes à soustraire; d'où j'ai dû conclure que si l'on changeoit la distance Périhélie, ensorte que l'observation du 2 d'Août s'accordat avec le calcul, celle du 1 d'Octobre en deviendroit d'autánt plus fautive. Par ce raisonement, il est, ce me semble, exactement démontré, que plus on s'éloigne du temps périodique employé ci-dessus, plus grandes deviendront les erreurs qu'il faudra admettre dans les observations: & si l'on aime à croire, que les erreurs qui résultent, en supposant le temps périodique de 6 ans, soient assés vraisemblables, il est au moins certain que le temps périodique ne sçauroit être augmenté jusqu'à sept ans,

ans, ſans qu'on ſoit obligé de ſuppoſer dans les obſervations des fautes, qui choqueroient toute vraiſemblance. Au reſte parceque dans ce raiſonnement, il s'agiſſoit de rendre les obſervations faites dans le mois de Juin, d'accord avec celles qui ont été faites pendant la ſeconde apparition, dans le cas où quelqu'un ſe perſuaderoit que l'orbite de la Comète ait été changée par l'action de la terre; je me ſuis encore donné la peine d'examiner, ſi l'on ne trouveroit pas moyen de ſatisfaire exactement à toutes les obſervations de la ſeconde apparition, en augmentant le temps périodique de la Comète. Suppoſant donc le temps périodique de ſept ans, j'ai trouvé, que lorsqu'on ſatisfait aux obſervations du 2 & 29 d'Août & du 1 d'Octobre, l'obſervation faite le 12 d'Août devient fautive de 7 minutes; & même j'ai été convaincu par quelques calculs, que ſatisfaiſant aux deux obſervations du 2 d'Août & du 1 d'Octobre, il n'eſt pas poſſible de remplir l'obſervation du 12 d'Août, qu'à 7 Minutes près, quelque erreur qu'on veuille admettre dans l'obſervation du 29 d'Août. Enſuite en employant le même temps périodique, les élémens qui ſatisfont aux obſervations du 12 & 29 d'Août & du 1 d'Octobre, produiſent une erreur de 13 Minutes pour l'obſervation du 2 d'Août & enfin tâchant de ſatisfaire aux obſervations du 2, 12 & 29 d'Août, on trouve pour l'obſervation du 1 d'Octobre une erreur de 36 Minutes. Il eſt donc évidemment prouvé, qu'il n'y a pas moyen de ſatisfaire aux obſervations de la ſeconde apparition, en ſuppoſant le temps périodide de ſept ans & qu'il faut au moins admettre dans quelques unes de ces obſervations, des erreurs de ſept minutes, ce qui paroit aſſés incroyable. Il auroit été ſuperflu

perflu de pourſuivre cette recherche plus loin, puisqu'on conçoit très aiſément qu'en augmentant encore plus le temps périodique, en le ſuppoſant, par exemple, de huit ans, les erreurs des obſervations devroient devenir d'autant plus conſidérables. Quelque peu vraiſemblable que notre détermination du temps périodique puiſſe paroitre au premier abrod, vû qu'il n'eſt pas concevable, qu'un Aſtre dont le retour ſe fait tous les cinq ans & demi, ait échappé tant de fois à l'attention des Aſtronomes; il eſt cependant très ſûr par le raiſonnement que je viens de propoſer, que toutes les obſervations faites ſur cette Comète en 1770, s'accordent à prouver, que le temps employé par cet Aſtre à faire ſa révolution, ne ſauroit beaucoup ſurpaſſer la valeur que nous lui avons aſſignée. Quoique je ne m'engage pas à réſoudre parfaitemeut le doute propoſé contre le temps périodique trouvé, il me ſera permis de préſenter quelques réflexions, qui ſerviront à expliquer comment il a pu arriver que cette Cométe n'ait jamais été obſervée qu'en 1770. Lorsque Monſieur Meſſier ceſſa de voir cette Comète au commencement du mois d'Octobre, ſa diſtance tant du Soleil, que de la terre, égaloit à peu près la diſtance du Soleil à la terre, ce qui fait connoitre que la Comère n'eſt douée que d'une lumiere très foible, en ſorte que ſi le paſſage par le Périhélie arrive dans un temps, où la diſtance entre la Comète & la terre ſurpaſſe celle du Soleil à la terre, il peut bien ſe faire que cet Aſtre échappe alors tout à fait à notre vue. En partant donc de ce principe, que la Comète, pour être vue, ne doit pas être plus éloignée de notre Globe, que le Soleil, on trouve par le calcul, que ſi le temps du Périhélie arrive dans

dans les ſix derniers mois de l'Année, on a lieu d'eſperer que la Comète ſera viſible; mais au contraire ſi ce temps de Périhélie tombe dans les ſix premiers mois de l'Année, il peut être très douteux que l'on s'en apperçoive. Si le temps du Périhélie étoit donc arrivé pluſieurs fois de ſuite, dans les ſix premiers mois de l'Année; il eſt très aiſé à concevoir, que la Comète a du dans de tels cas, échapper à l'attention des Aſtronomes: Et même lorque le paſſage par le Périhélie ſe fait dans les ſix derniers mois de l'Année, il ne peut arriver, que très rarement, que la Comète ſe préſente dans des circonſtances auſſi favorables, pour être obſervée, qu'elle l'étoit lors de ſon apparition en 1770; car par un évenement très ſingulier, elle paſſoit alors le 13 d'Août par ſon Périhélie, enſorte qu'elle devoit néceſſairement s'approcher presque ſi près de la terre, qu'elle n'en peut jamais devenir plus voiſine. Or ſi la Comète avoit paſſé par le Périhélie ſeulement huit jours plus tôt, ou plus tard, elle auroit été dans ſa plus proche diſtance de la terre, au moins deux fois plus éloignée, qu'elle ne l'etoit en 1770.

Enfin puisque, comme je l'ai déja remarqué, notre Comète dans ſon Aphélie eſt presque également éloignée du Soleil, que Jupiter lorsqu'il paſſe par ſon Aphélie & que même la Longitude des deux Aphélies ne diffère que de 14 degrés, on a quelque raiſon de ſoupçonner, que le mouvement de la Comète a bien pû ſouffrir quelque changement à cauſe de l'action de Jupiter, s'il eſt jamais arrivé, que Jupiter ſe ſoit approché très près de la Comète, lorsque ces deux Aſtres étoint en conjonction dans le voiſinage de leurs Aphélies. On trouve en effet que la Comète ayant paſſé par ſon Aphélie l'An 1767 le 28 d'Octobre, elle a dû être en conjonction avec Jupiter le 27 de May de la même année, leur Longitude commune étant alors $5^s. 20^\circ. 57'$; à peu près. Or comme la Longitude de l'interſection des orbites de Jupiter & de la Comète, eſt $6^s. 9^\circ. 39'$ & que l'inclinaiſon entre ces deux orbites n'eſt que $51'. 15''$, il en réſulte que la diſtance de Jupiter à la Comète, au temps de leur conjonction, égaloit à peu près la dixieme partie de la diſtance moyenne du Soleil à la Terre, & la 58^{me}. partie de la diſtance entre la Comète & le Soleil; la quantité de matiere du Soleil ſurpaſſant donc celle de Jupiter environ mille fois, l'action de Jupiter ſur la Comète, lorsque ces Aſtres étoient en conjonction, a du ſurpaſſer celle du Soleil, trois fois; ce qui vraiſemblablement a pu produire des changemens aſſés ſenſibles, par rapport à l'orbite de la Comète; puisque le mouvement de cet Aſtre dans ſon Aphélie eſt très lent, d'où il devoit reſter aſſés longtemps exposé à l'action de Jupiter. Au reſte, quoique je n'oſe pas aſſurer que l'action de Jupiter, telle que je viens de la trouver, ſoit très exacte, parceque la moindre altération dans les elémens de la Comète & ſurtout dans le temps de ſa révolution, pourroit en donner une valeur aſſés différente; il ſuffit que par ce raiſonnement il ſoit démontré, que le mouvement de la Comète a pu ſouffrir des changemens très ſenſibles par l'action de Jupiter, & qu'il n'eſt pas contre la vraiſemblance de préſumer, que cet Aſtre a eu auparavant un période de révolution beaucoup plus conſidérable.

A cauſe

A cause de l'action de Jupiter, il pourra même devenir douteux, si, à l'avenir, on aura la satisfaction d'observer la Comète dans la même orbite qu'elle parcouroit en 1770; car si les élémens que nous venons d'établir étoient tout à fait exacts, la prochaine conjonction de Jupiter avec la Comète se feroit l'An 1779 le 23 d'Août à 12 heures à peu près, la Longitude de ces Astres étant alors $6^s. 3^\circ. 34'$. Or le calcul prouve, que pour cette Longitude, la distance de la Comète à Jupiter est à peu près la 491^{me}. partie de sa distance au Soleil, d'où il s'en suit que l'action de Jupiter surpassera celle du Soleil 224 fois, ce qui ne manqueroit pas de produire un changement total dans le mouvement de la Comète. Quoiqu'on ne puisse pas compter sur la plus scrupuleuse exactitude de cette conclusion, vu que des petites variations dans les élémens peuvent donner des résultats très différents; néanmoins toutes les circonstances bien considérées, on peut soutenir, qu'au moins dans l'une ou l'autre des conjonctions de Jupiter avec la Comète de 1767 ou 1779, l'orbite de la Comète a du souffrir des changemens sensibles, par l'action de Jupiter.

Pour ce qui regarde les deux autres Planètes, Mars & Venus, dont la Comète traverse les orbites, il est sûr qu'elles ne produiront jamais des changemens tant soit peu considérables dans le mouvement de la Comète, tant à cause du peu de matiere dont ces Planètes sont douées, que parceque la Comète n'approche pas assés près de leurs orbites. Nous avons déja remarqué que lorsque la Comète en 1770 le 1 Juillet passoit le plus près de la terre, elle en étoit 70 fois plus proche que le Soleil dans

dans ſa moyenne diſtance de la terre; la diſtance de la Comète à notre Globe égaloit donc à peu près 2 millions 120 mille Verſtes de Ruſſie & elle n'étoit pas même ſix fois plus éloignée de nous que la Lune dans ſa moyenne diſtance. Quelque peu conſidérable que fût cette diſtance, il eſt difficile de prononcer, ſi la terre alors a eu quelque influence pour changer le mouvement de la Comète. Un Mathématicien très célébre a prétendu prouver que la ſphére de l'attraction de notre Globe, ne peut s'étendre beaucoup au delà de 125 demi-diamètres de la terre; ſi cette ſuppoſition étoit bien fondée, la terre n'auroit certainement produit aucun changement dans le mouvement de la Comète, la diſtance de ces corps étant dans leur plus grande proximité, égale à 357 demi-diamètres de la terre. Et même parcequ'on eſt venu à bout de trouver des élémens pour le mouvement de la Comète, qui ſatisfont à toutes les obſervations faites tant avant, qu'après la plus grande proximité de cet Aſtre de la terre, il eſt bien vraiſemblable que l'action de la terre ſur la Comète, a été de peu de conſéquence.

Parmi toutes les Comètes, dont le mouvement eſt conſtaté par les obſervations, il n'y en a aucune, qui ſe ſoit approchée plus près de la terre, que celle de l'an 1770; malgré cette proximité on n'a pas trouvé le moindre indice, que cette Comète ait eu quelque influence, pour changer la conſtitution de notre Globe, entant qu'elle peut ſouffrir quelque altération par l'action des autres corps céleſtes; ceci devroit donc, peut-être plus que d'autres raiſons, ſervir à tranquiliſer nos eſprits par

par rapport aux effets terribles, par lesquels il a plu à l'imagination de quelques Philosophes de rendre l'approche des Comètes redoutable. On ne sauroit assûrer à la vérité, qu'il soit tout-a-fait impossible, qu'une Comète ne puisse jamais rencontrer notre terre de si près, qu'il en résulte un choc; mais il est au moins certain, que la probabilité d'un tel évenement est presque infinement petite. Car afin qu'une telle rencontre puisse arriver, il faut non seulement que la Comète en passant par son nœud, se trouve sur l'orbite de la terre, mais encore que la terre soit en même temps précisement dans ce point de son orbite: Entre toutes les Comètes, dont on connoit les élémens, il n'y en a que trois ou quatre, pour lesquelles la distance du nœud au Soleil est presque égale au demi-diamètre de l'Ecliptique & quoique la position du nœud des dites Comètes puisse changer avec le temps, ensorte que quelqu'une d'elles traverse l'orbite de la terre; ce seroit pourtant l' évenement le moins attendu, si la terre se trouvoit précisément dans ce point de son orbite, lorsque la Comète vient y passer.

Pour les cas où la Comète ne peut pas rencontrer la terre, mais pourtant s'en approcher fort près, ce qui peut arriver, même lorsque la Comète est assés éloignée de son nœud; il est difficile de déterminer en général, quels effets elle aura par rapport à la constitution de notre Globe. La grande vitesse du mouvement de ces corps, lorsqu'ils approchent de leurs Perihélies, aussi bien que le peu de matiere qu'ils semblent avoir, font présumer que les effets qu'ils produisent sur la terre, ne peuvent pas être d'une consequence dangereuse; & parce que la Comète de l'An 1770, qui passoit si près de nous, n'a causé aucun dérangement, ce dont on se seroit apperçu, il est raisonable, qu'on se mette au dessus de toute crainte par rapport aux Comètes, qui à l'avenir s'approcheront de la terre, d'autant plus qu'un tel événement, s'il arrive jamais, ne peut être ni prévû, ni évité.

OBSER-

OBSERVATIONS ET EXPÉRIENCES

Sur les aimans artificiels, principalement ſur la meilleure manière de les faire.

Par Mr. N. Fuſs.

Lues dans l'Aſſemblée publique le 13 Octobre 1778.

De tous les différens objets de Phyſique, qui par leurs merveilleux effets ſont en droit de nous intéreſſer, l'aiman eſt peut-être celui qui a occupé le plus les Philoſophes tant anciens que modernes. Connu à ceux de l'antiquité, il a toujours été un ſujet de leur admiration & de leurs recherches, tant par la ſingularité des Phénomènes qu'il a offerts à leurs regards, que par le profond ſecret, dont la nature en paroit avoir voilé la ſource.

La découverte de ſa vertu *attractive* qui naturellement a du être la première à fixer l'attention des hommes, ſe perd dans l'obſcurité des temps les plus reculés de l'enfance de la Philoſophie. Elle a ſans doute exercé, jusqu'au temps de *Defcartes*, la fagacité de bien des Philofophes, fans que leurs recherches, fi l'on peut donner ce nom aux fimples conjectures qui nous font parvenues, ayent transmis autre chofe à la poftérité, qu'un nouveau monument des égaremens attachés à toute recherche phyfique, qui n'eft pas accompagnée du flambeau de l'expérience & d'une connoiffance fuffifante des loix générales de la Mécanique, à laquelle nous devons la diffipation de bien des erreurs & tous les progrès qu'on a faits depuis le dernier Siècle dans l'étude de la Phyfique.

Les découvertes qu'on fit par degrés des autres propriétés de l'aiman — c'eft de fa vertu *communicative* & *directive* que je parle — eurent le même fort: on en retira des avantages pour la fociété, qui par leur importance ne pouvoient qu'augmenter l'ardeur des favans à en découvrir la caufe & à en augmenter les effets. Mais tous les efforts de ceux, qui avant *Defcartes* (*) avoient taché d'approfondir ces myftères, auffi bien que ceux de fes fucceffeurs qui ont voulu réformer fes idées, n'ont abouti qu'à embrouiller la queftion, & à détruire tous les moyens raifonnables de parvenir à une explication fatisfaifante de la nature de l'aiman.

De-

(*) Ce fut ce reftaurateur de la faine Philofophie, qui, guidé par l'arrangement des limailles de fer à l'entour d'un aiman, introduifit le premier pour caufe efficiente & matérielle des fes Phénomènes un fluide fubtil, qu'il fuppofa parcourir des conduits imperceptibles, & qui par fon mouvement produifoit les jeux différens du magnétisme.

Depuis la fondation des Académies — époque de la diſſipation des tenèbres, qui environnerent l'eſprit humain avant le rétabliſſement des ſciences & ſurtout de la Phyſique expérimentale, qui contribua le plus à le retirer du ſommeil léthargique, où il avoit été plongé pendant des Siècles, — depuis la fondation des Académies on n'a jamais perdu de vue cet intéreſſant objet. Au contraire, à meſure que ſe multiplioient les découvertes, qui commencerent à ſe ſuccéder alors auſſi rapidement que la liaiſon entre elles l'exigeoit; & à meſure que ſe préſentoient de nouveaux phénomènes, on s'efforça de plus en plus d'en rendre raiſon. Ces ſociétés littéraires, non contentes de renfermer en elles mêmes des membres éclairés, qui ſe hazardoient tantôt avec plus tantôt avec moins de ſuccès ſur cette gliſſante carrière, n'épargnerent ni honneurs ni récompenſes, pour engager d'autres ſavans à joindre tous les efforts poſſibles aux leurs, pour percer à forces communes à travers le voile myſtérieux de la nature.

C'eſt dans cette vue par exemple, que l'Académie Royale de Paris, dont les ouvrages ſont remplis des recherches les plus importantes ſur l'aiman & ſes propriétés, par des prix conſidérables propoſés autre fois ſur des queſtions rélatives à ce ſujet, a donné naiſſance à pluſieurs excellens mémoires qui, en diſſipant les anciennes erreurs, en proſcrivant les qualités occultes, les forces attractives & répulſives, les cauſes non-mécaniques & immatérielles & d'autres explications qui n'expliquoient rien, ont établi une Théorie ſaine & conforme à tous les differens Phénomènes de l'aiman, qui a été adoptée enſuite par tous les Philoſophes non prévenus & Amis de la verité, incorruptibles par des hypothèses moins vrayes que brillantes, que le goût de la nouveauté avoit fait eclorre.

Car quelques différentes que paroissent au premier coup d'oeil les nouvelles Théories du magnétisme qui parurent à cette occasion, elles s'accordent pourtant merveilleusement en ce que pour expliquer les mystères de l'aiman elles ont toutes également recours à un fluide infiniment délié & élastique, dont on a taché, si non de démontrer rigoureusement l'existence, du moins de la rendre aussi vraisemblable, qu'on peut l'exiger dans des choses qui, échappant à la foiblesse de nos organes, ne tombent sous aucun de nos sens. Le mouvement de ce fluide dans les pores de l'aiman & des autres corps magnétiques, qu'on conçoit unanimement former des tuyaux contigus, parallèles & hérissés, comme les veines & les vaisseaux lymphatiques & d'autres conduits destinés pour la circulation des humeurs dans l'économie animale, de petits poils ou des soupapes qui, couchées dans le même sens, donnent un libre passage au fluide, qui s'insinue dans les pores suivant la même direction & se refusent au contraire à tout mouvement en direction opposée — ce mouvement, dis-je, explique ensuite avec un merveilleux accord tous les jeux différens du magnétisme. (*) Les Auteurs illu-

(*) Quoiqu'en disent plusieurs Physiciens, qui, sans nier ni l'espèce d'Atmosphère qui environne les aimans, ni l'existence de la matière extrèmement déliée, que nous appelons magnétique, lui ont refusé tout mouvement progressif: croyant non seulement superflu de le supposer, mais même contraire au mécanisme général de la Nature, lequel n'a pourtant jamais été mieux confirmé, que par la illuſtres de ces ingénieuſes Théories ne different donc eſſentiellement entre-eux, que dans l'explication de la manière, dont ſe perpètue ce mouvement.

Mon deſſein n'eſt pas de décider ici, ſi c'eſt par un mouvement interne des parties de l'aiman, ou par une dilatation & conſtriction alternative de ſes pores, ou par un mouvement d'ondulation de ſes fibres tendues en harmonie avec le mouvement du fluide, ou enfin par la ſeule force élaſtique de l'éther, que ſe perpetue ce mouvement. Je ne prononcerai pas non plus ſur le mérite de ces différentes hypothèſes, les bornes de mon diſcours ne me permettent pas de le faire. Mais je ne ſaurois m'empêcher d'obſerver, qu'avec quelque art que pluſieures explications de cette perpétuité des tourbillons magnétiques ſoyent établies & quelque peu qu'on puiſſe proférer avec fondement contre leur verité, celle de Mr. *Euler* (*) propoſée

---

la Théorie de Mr. *Euler*. Cette Théorie loin de faire violence aux loix générales de la Mécanique, réduit au contraire tous les différens phénomènes à peu de principes. Son Auteur ne forge pas des explications particulières pour chaque phénomène particulier, comme ſe voient obligés de faire la plupart de ceux, qui nient en mouvement.

(*) Comme toutes les explications des Phénomènes, qui ſe ſont préſentés pendant le cours du travail que je vais détailler, ſont fondées ſur l'excellente Théorie de Mr. *Euler*, qu'il me ſoit permis d'en donner ici un petit précis. — La Théorie dans une note — j'en ſens moi même l'inconvénient; mais je crois devoir cette attention à pluſieures perſonnes que j'eſtime & qui, après avoir entendu la lecture de ce Diſcours, avoient déſiré que j'ajoutaſſe l'eſſentiel de la Théorie, ſur la quelle j'ai inſiſté dans l'explication de ces phénomènes.

Mr.

posée autre fois à l'occasion du Prix mentionné me paroit préférable à tous égards à ses rivales, surtout par sa sim-

---

Mr. *Euler*, en partant de l'idée heureuse de *Descartes*, fait d'abord voir, qu'il y a deux causes principales qui concourent à produire les merveilles de l'aiman: La premiere est une structure particulière des parties internes de l'aiman & des corps magnétiques, que personne ne pourra nier sérieusement, par la raison même que ces corps sont doués de propriétés, qui les distinguent si essentiellement de tous les autres L'autre cause est une matière externe qui, en agissant sur les pores des corps magnétiques & les traversant, produit les phénomènes de l'aiman. Cette matière, sans être créée arbitrairement pour expliquer uniquement les merveilles de l'aiman, ce qui sans doute seroit faire violence à la nature, fait partie de l'atmosphère solaire, ou de ce fluide extrèmement délié que nous nommons matière étherée, qui remplit tout nôtre Système & qui pourra renfermer ce fluide plus subtil encore de la même manière qu'il est renfermé lui même dans l'air & l'air dans l'eau — mélange & gradation qui est si peu contraire au loix de la nature, qu'on l'observe même dans tous ce qui nous environne.

Ce fluide qui, comme on peut voir dans une infinité de phénomènes, traverse librement & en tout sens tous les corps non-magnétiques, doit parcourir l'aiman en vertu de sa force directive dans la direction des poles. Mais comme outre cette direction les poles ont encore la propriété d'affecter toujours la même position, il faut non seulement que le fluide ne traverse l'aiman que dans une direction constante, mais que ce cours ne puisse se faire que dans un seul sens & que la matière qui coule de *A* en *B*, ne puisse replier de *B* en *A*. Pour produire cet effet il est plus que probable, que la nature ait employé le même artifice qu'on a observé dans l'économie animale, où les veines & les vaisseaux lymphatiques, déstinés à conduire des humeurs sans leur permettre un mouvement rétrograde, sont garnis dans leur intérieur de petits poils ou valvules, qui cèdent à l'action du fluide dans un seul sens & se ferment à chaque effort, qu'il pour-simplicité, la quelle, de l'aveu de tous les Philosophes, répond si bien à la sage économie de la nature, qui affecte toujours dans ses ouvrages cette même simplicité. Sans s'éloigner des suppositions préalables de ce fluide & de la disposition sus-dite des pores de l'aiman, que Mr. *Euler* adopte avec les autres Physiciens, il ne lui faut que l'éla-

---

pourroit faire pour reculer Nous concevons donc que les pores de l'aiman forment plusieurs tuyaux *A B* (Fig. 1.), contigus, parallèles & si étroits, qu'ils ne laissent passer que la partie la plus pure & la plus déliée de l'éther, qui, environnant l'aiman de toute part, sera poussée par l'élasticité de l'éther dans ces conduits vuides en *A*, & les traversera avec un mouvement libre de tout obstacle jusqu'en *B*, où, ne pouvant reculer à cause des arrêts *a a b b*, elle vaincra la résistance de l'éther, qui crée ce mouvement & le perpétue. Car supposant le pole *A* d'un aiman (Fig 2.) couvert de plusieures embouchures de tuyaux semblables, le fluide magnétique, pressé par la partie la plus grossière de l'éther, s'y plongera continuellement avec une vitesse inconcevable & proportionnée à la force élastique connue de ce fluide & continuera son mouvement jusqu'en *B* avec la même rapidité. Arrivée en *B* la matière, séparée jusqu'ici de cette partie plus grossière pendant son cours par les canaux de l'aiman, la rencontrera de nouveau à sa sortie & en soufrira un ralentissement dans sa vitesse & en même temps un changement de direction. Le courant, réfléchi pour ainsi dire par l'éther, avec lequel il ne peut pas se méler d'abord, se repliera des deux côtés vers *C* & *D* & décrira avec un mouvement ralenti des courbes *D E d* & *C F c* &c. Il s'approche enfin de l'entrée en *A*, s'y replonge par des tours en *d* & *c* avec la matière affluente *m m*, & forme par là ce tourbillon remarquable, qui est visible dans l'arrangement de la limaille de fer semée sur un papier placé sur l'aiman, & qui à l'aide du tourbillon universel, produit par un mouvement semblable d'un pole magnétique de la Terre à l'autre, explique tous les différens phénomènes de l'aiman.

l'élaſticité, cette autre propriété reconnue de l'éther, pour expliquer de la manière la plus aiſée cette conſervation du mouvement, ſans recourir à un mouvement interne des corps ſolides qui, quelque probable qu'il ſoit en lui même, eſt pourtant tout auſſi difficile à concevoir que celui dont il doit expliquer la perpétuïté. — Au reſte il ſuffit d'accorder la dernière, pour expliquer tous les différens phénomènes tant de l'aiman que de l'acier chargé de la vertu magnétique (*).

On connoiſſoit depuis long-temps la propriété de l'acier, de ſe charger de cette vertu, à laquelle nous ſommes redevables de tous les avantages que l'aiguille aimantée a procurés à la ſociété. Cette connoiſſance dirigea enfin la vue des Phyſiciens du côté des aimans artificiels qui, par les ſecours qu'ils prétoient à la comparaiſon de la Théorie avec les Phénomènes, & par les Phénomènes qu'ils fourniſſoient eux mêmes, méritèrent d'autant plus d'at-

(*) De ce que le fer & l'acier ſont ſuſceptibles de la vertu magnétique, on doit conclure que ſes pores admettent par l'art une diſpoſition ſemblable à celle que le nature a produite elle même dans l'aiman. Ils ſeront d'abord confuſément diſperſés par toute la maſſe de l'acier & n'attendront que cet arrangement artificiel, qui en faſſe des conduits parallèles & contigus; pour lui faire acquerir les mêmes propriétés Le fer les acquiert avec la plus grande facilité; mais ſes pores trop mobiles ne ſont pas propres à les lui faire garder long-temps. On n'a qu'à enviſager les figures 3, 4 5, deſſinées d'après la diſpoſition des limailles de fer, pour concevoir, combien les fers moux *A*, *A*, *A*, offrent de tout côté un paſſage libre au fluide qui s'y inſinue des barreaux d'acier *B*, *B*, *B*. L'acier plus dur ſe refuſe plus longtemps à la diſpoſition régulière de ces conduits, & il faut bien plus de peine pour y exciter des tourbillons ſemblables à ceux qui environnent les aimans naturels.

d'attention, qu'ils paroiſſoient conduire à la voie unique de conſtater ou de perfectionner une Théorie, qui n'étoit encore qu'hypothétiquement vraie. D'ailleurs la facilité de ſe procurer des aimans, dont la force étoit ſouvent ſupérieure à celle des meilleurs aimans naturels, & le beſoin même de s'en ſervir dans la fabrique des aiguilles de bouſſole, en avoit rendu précieuſe la découverte auſſi bien que les efforts de quelques Phyſiciens modernes, qui travaillèrent avec ſuccès à rendre la méthode de les préparer moins pénible & plus efficace.

Les prérogatives des aimans artificiels par rapport aux naturels, & la diverſité des méthodes propoſées autrefois par MM. *Knight*, *Michell*, *le Maire*, *Canton* & d'autres, engagèrent l'Académie de St. Pétersbourg à propoſer en 1758 un prix ſu la meilleure manière de faire ces aimans artificiels. La pièce couronnée à cette occaſion eſt remplie de remarques intéreſſantes ſur ce ſujet. Mr. *d'Antheaulme*, qui en eſt l'Auteur, y propoſa un nouveau procédé qui, à ſon avis, l'emportoit de beaucoup ſur tous ceux qu'on avoit connus jusqu'alors.

Nouvellement l'Académie a eu l'avantage de recevoir de la part de S. E. Mr. le Conſeiller d'État actuel *de Krouſe* une collection complette de pièces d'acier des plus exquiſes par rapport à la grandeur de quelques barres & à leur gradation, qui monte depuis 6 pouces jusqu'à $2\frac{1}{2}$ pieds de longueur. Cette collection fut remiſe à Mr. *Euler*, à qui elle a donné l'occaſion de faire pluſieures expériences d'autant plus intéreſſantes, qu'outre les éclairciſſemens que la Théorie du magnétiſme peut s'en promettre dans la ſuite, la variation des procédés employés pour aimanter toutes ces piéces (*) & les phénomènes qui ſe ſont préſentés pendant ce travail, nous ont mis en état d'aprécier l'efficacité de chacune; d'en tirer des préceptes & des précautions à prendre pour en accélérer l'effet; d'éviter des fautes, où d'autres ont pu être conduits par des concluſions générales, tirées d'effets qui tenoient ouvertement à des cauſes fortuites & particulières, & de propoſer enfin de nouvelles méthodes, dont le ſuccès avoit été plus heureux & la manœuvre plus aiſée.

C'eſt de ces expériences que j'ai détaché une partie, pour en entretenir cette illuſtre Aſſemblée ſuivant l'intention de S. E. Monſieur le Chambellan actuel *de* *Do-*

(*) La collection, qui fut expoſée le jour de l'Aſſemblée dans la Salle de Conférence, conſiſte en

10	Lames de	6 Pouces de longueur.	½ P. de largeur.	⅛ P. d'épaiſſeur
12	- -	12 - - - - -	1 - - - -	¼ - - -
9	- -	18 - - - - -	1½ - - - -	⅜ - - -
8	- -	24 - - - - -	2 - - - -	½ - - -
9	- -	30 - - - - -	2½ - - - -	⅝ - - -

avec leurs contacts de fer doux de même largeur & épaiſſeur; enſuite en

5	Barres de	6 Pouces de longueur	½ P. de largeur & épaiſſeur
4	- - -	12 - - - - - - - -	1 - - - - - - -
4	- - -	18 - - - - - - - -	1½ - - - - - - -
2	- - -	24 - - - - - - - -	2 - - - - - - -
2	- - -	30 - - - - - - - -	2½ - - - - - - -

avec leurs contacts de même largeur & épaiſſeur. Enfin en 9 fers à cheval chacun d'une ſeule lame, de quatre différentes grandeurs, avec leurs ſupports, & pluſieurs demi-cercles auſſi de grandeur différente.

Domaschnef, notre digne Directeur, qui a bien voulu assister à plusieures d'entre-elles & les honorer de cette attention, qu'inspire l'amour des Sciences & l'étendue des connoissances que S. E. s'est acquises. Mais pour éviter la trop grande prolixité, où un sujet aussi fécond qu'important auroit pu me conduire, je me vois obligé de me borner uniquement à celles de ces expériences qui concernent les meilleurs moyens de rendre l'acier magnétique, comme les premières que nous a pu fournir le travail de communiquer le magnétisme à cette collection.

Avant que d'entrer en matière il sera bon de remarquer encore par rapport à cette collection, que la différente grandeur de ses pièces, dont les dimensions croissent dans la même proportion, lui donne un plus grand prix, par la facilité qu'elle fournit de commencer d'abord à aimanter, sans le secours d'aucun aiman ni artificiel ni naturel, les petites lames de 6 pouces, moyennant lesquelles on peut passer ensuite à celles de 12 pouces, dont on peut se servir pour frotter celles de 18 & ainsi de suite; procédé qui dans les méthodes ordinaires accélère extrêmement l'effet des opérations, & qui est d'un grand secours, toutes les fois qu'il faut réparer l'affoiblissement inséparablement attaché à tous les aimans artificiels, surtout pendant qu'on en fait usage, pour communiquer le magnétisme à d'autres. Car on conçoit aisément, qu'une excessive disproportion entre les pièces à frotter & celles dont on se sert pour cet effet, doit ralentir sensiblement le succès de ce travail; quoique, contre l'opinion vulgaire, elle n'en anéantit pas l'effet au point, qu'il soit impossible d'aimanter des pièces de grandeur considérable moyennant d'autres beaucoup plus plus petites; car j'aurai l'occasion de faire voir dans la suite, qu'il y a des moyens de rendre ce travail très efficace, non-obstant la disproportion des barres.

Pour aimanter cette collection, tout revenoit donc à donner aux petites lames de six pouces un degré de force suffisant, pour pouvoir en faire usage ensuite à frotter suivant la méthode de Mr. *Michell* (*) celles de 12 pouces & monter de celles-ci successivement aux plus grandes & aux barres mêmes jusqu'à celles de 30 pouces de longueur. Le commencement pouvoit même se faire, comme j'ai déja remarqué, sans le secours d'aucun aiman ni naturel ni artificiel, en faisant usage de l'une ou de l'autre des méthodes, proposées par différens Physiciens, qui furent conduits successivement à cette découverte ou par des accidens ou par l'observation du Pere *Grimaldi*, qui remarqua le premier vers le milieu du seizieme siècle, qu'il suffisoit de tenir verticalement une barre de fer, pour lui communiquer un degré de vertu magnétique tel, que son extrémité inférieure attire, ou que son extrémité supérieure repousse le pole austral de l'aiguille aimantée, & qu'on puisse même changer les poles de cette barre, aussi-tôt qu'on la retourne.

Les mémoires de l'Académie Royale des Sciences de Paris contiennent un grand nombre d'expériences & d'observations pareilles, également intéressantes & propres à mettre hors de doute la propriété du fer de se charger de

(*) Treatise of Artificial Magnets.

de la vertu magnétique, ſans l'attouchement d'aucun aiman. Le hazard avoit offert à MM. *Gaſſendi* & *de la Hire* des Phénomènes tout à fait ſemblables. Mr. *Rohault* trouva qu'un morceau d'acier rougi au feu & ſuſpendu verticalement attiroit des limailles de fer, & Mr. *du Fay* ajouta à cette expérience un autre fait très remarquable, ſavoir: qu'en ſuſpendant verticalement une barre & la frappant à coups de marteau à l'une ou l'autre extrémité, le bout frappé acquerroit toujours la vertu du pole boreal & attiroit le ſud de l'aiguille, pendant que le bout oppoſé le répouſſoit; propriété qui, à ce qu'il aſſure, ſubſiſta encore dans toute autre ſituation de la barre —. Je paſſe ſur pluſieures autres obſervations pareilles, qui toutes ſervirent également à conſtater l'eſpèce d'analogie, connue depuis longtemps entre l'aiman & le fer; mais qui ne pouvoient être d'un grand ſecours dans la fabrique des aimans artificiels. — M. *Michell* & *Canton* avoient trouvé des moyens plus efficaces pour communiquer par le frottement un commencement ſenſible de force magnétique à des barreaux d'acier.

Le premier plaça entre deux barres de fer dirigées ſuivant la direction du méridien magnétique une petite lame d'acier, à la quelle il communiqua dans cette poſition un force conſidérable, en gliſſant ſur ſes faces une troiſième barre tenue verticalement & inclinée un peu vers le nord. L'autre attacha au bout ſupérieur d'un fourgeon de fer, placé verticalement, une petite lame d'acier ſuivant la longueur, qu'il frotta enſuite de bas en haut avec le bout inférieur d'une pincette de cheminée, tenue à peu près en ſituation verticale; de cette facon

la

la lame acquit un commencement de vertu magnétique très sensible.

Mais de toutes les méthodes d'aimanter l'acier sans autre aiman, celle que Mr. *d'Antheaulme* a proposée dans le mémoire couronné par l'Académie, est sans doute la plus efficace. Il plaça de file deux barres de fer de 4 à 5 pieds de longueur sur 15 lignes d'épaisseur, disposées dans la direction du tourbillon général, ou du méridien magnétique, inclinées vers le nord de 70 degrés & séparées par un intervalle de six lignes. Il appliqua aux deux bouts qui se regardoient une espèce d'armure de 14 à 15 lignes de largeur, sur une ligne d'épaisseur, dont le côté appliqué à la barre étoit entièrement plat; trois des bords de l'autre face taillés en biseau & le quatrième, excédant d'une ligne l'épaisseur de la barre, limé quarrément. Sur cette espèce de talons il promena lentement la barre à aimanter d'un bout à l'autre, ce qui lui communiqua un degré très éminent de force. Mr. *d'Antheaulme* ajoute, qu'en faisant usage dans ce procédé de barres de 10 pieds de longueur, on seroit en état d'aimanter des barres d'acier d'un pied de longueur, avec un succès égal à celui qu'on pourroit attendre de l'usage du meilleur aiman. Et Mr. *de la Lande*, qui avoit vu repéter la plûpart des expériences de Mr. *d'Antheaulme*, parle dans ses observations sur les aimans artificiels (*) d'une autre expérience plus récente de cet habile expérimentateur, faite sur deux barres de 15 pieds de longueur. Ces procédés, quelque embarrassans qu'ils soyent par

(*) Histoire de l'Académie Royale des Sciences de Paris Année 1761.

par la néceſſité de ſe ſervir de barres rangées en file de 10, 20 & 30 pieds de longueur, ſont tout-à-fait remarquables par le merveilleux effet qu'ils produiſent & par des marques auſſi ſenſibles de magnétisme, que de barres de fer tout brut peuvent donner, ſans aucune des préparations qu'on avoit crû eſſentiellement néceſſaires avant Mr. *d'Antheaulme*; d'autant plus que le ſeul tourbillon général, dont la matière eſt infiniment moins raſſemblée que celle des tourbillons particuliers des aimans, ne parût jamais promettre que des effets très médiocres —.

Après cette digreſſion ſur les différentes manières de communiquer le magnétisme ſans aimans, je vais détailler celles dont nous avons fait uſage pour aimanter les pièces d'acier de la préſente collection.

Opération. I.

Lames de 12 pouces. Double touche inclinée.

Mr. *Euler* poſſédoit encore quatre lames d'acier de 15 pouces de longueur, fabriquées à Bâle par feu M. *Dieterich*, celèbre Artiſte en aimans artificiels, qui, quoique privées de leurs contacts & négligées depuis bien d'années, avoient conſervé encore quelque peu de vertu magnétique. Nous nous en ſervîmes d'abord pour frotter les lames de 12 pouces, dont nous plaçames deux *AB* & *CD* (Fig. 6.) parallèlement ſur une table, en les réuniſſant aux quatre extrémités par des contacts de fer doux *E*, *F*, afin de conſerver pendant l'opération le tourbillon magnétique

 qu'elle

qu'elle y devoit former (*). Les ayant donc placées ensorte que le bout marqué A de l'une regardoit le bout non-marqué C de l'autre (précaution qu'on a coûtume de prendre, pour pouvoir distinguer ensuite entre-eux les poles attractifs & répulsifs (**)), nous prîmes les lames

(*) Lors qu'il y a deux barres *A B*, *a b*, ainsi disposées & aimantées, le tourbillon de l'une se réunit à celui de l'autre. Le fluide, sortant par exemple du pole *A* (Fig. 7.) qui se détournoit autrefois des deux côtés également, se replie maintenant vers le pole ami *b* de l'autre barre, où il s'unit à la matiére affluente vers ce pole & y entre avec elle pour parcourir toute la barre de *b* jusqu'en *a*, où il se détourne de nouveau pour rentrer dans la premiére par *B*. Mais comme il s'en perd toujours une quantité considérable à la sortie & à l'entrée des conduits, on les garnit de morceaux de fer doux qui, comme nous avons vu dans la note quatrième, le transmet librement & empêche que rien ne puisse se perdre pendant le trajet d'un pole à l'autre, par la tendence du fluide à se jetter partout dans des pores vuides, plutôt que de traverser l'air qui résiste à son mouvement.

(**) En conséquence de ce que j'ai dit de la Théorie de Mr. *Euler* dans la note 3^{me.} on concevra facilement ce que c'est que les poles attractifs & répulsifs, & de quelle maniére se fait cette attraction & répulsion mutuelle. Deux lames aimantées *A B* & *a b* (Fig. 8.) étant disposées ensorte que les arrêts des pores de toutes les deux soyent couchés dans le même sens p. e. de *A* vers *B* & de *a* vers *b*, le fluide traversant la première suivant *A B* trouve d'abord les pores du pole *a* de l'autre ouverts pour le recevoir. Il traversera donc aussi celle-ci & en sortant par *b* il se détournera d'abord vers *A* pour continuer son courant par les deux barres & ne formera par conséquent qu'un seul tourbillon qui, pressé de toute part par le force élastique de l'éther poussera les deux aimans l'un vers l'autre. Si au contraire les deux poles *B* & *b* (Fig. 9.) se regardent, ou que les poils des pores de la barre *b a* sont couchés en sens contraire, le fluide sortant par *B* ne trouvera mes de 15 pouces G H, I K, dont nous mîmes les poles attractifs G & I sur le milieu des lames à aimanter, en les relevant par les bouts opposés H & K, ensorte que les extrémités, appliquées à la lame, & distantes entre-elles de 3 à 4 lignes à peu près, faisoient un angle obtus de 100 à 120 degrés. Dans cette position nous les promenâmes doucement sur la lame A B d'un bout à l'autre, en allant & revenant une quinzaine de fois. Après avoir fait la même manœuvre, les poles tournés (*), sur l'autre lame C D & ensuite sur les faces posées, les deux pièces, à en juger par l'adhérence des contacts, avoient reçu un dégré de force sensiblement supérieur à celui des lames frottantes de 15 pouces, & suffisant pour notre dessein, qui n'étoit que de leur donner un commencement de vertu magnétique que nous pouvions augmenter ensuite facilement de la manière que je vais indiquer.

Après avoir aimanté de la même manière & au même dégré dix de ces lames, que je fortifiai d'abord, une paire avec l'autre, en suivant le même procédé, jusqu'à ce que l'adhérence des contacts parût me prouver qu'il n'y avoit plus d'augmentation à attendre de cette

 méthode

---

vera pas des pores disposés à le recevoir dans l'autre. Les deux barres auront donc leurs tourbillons particuliers *A E B F* & *a e b f* qui, ne pouvant se continuer librement dans leur voisinage, se repoussent mutuellement en *d* & *c*, & cet effet réjaillit sur les barres mêmes, avec d'autant plus de force que le courant est plus vif & plus fourni.

(*) C'est à dire que le bout marqué de l'une regardoit toujours le bout non-marqué de l'autre & réciproquement.

méthode; j'en formai deux faifceaux AB & CD (Fig. 10.) chacun de 5 lames, arrangées en forte, que les bouts marqués de l'un & l'autre étoient enfemble. Je difpofai parallèlement ces deux faifceaux, féparés par un morceau de bois *m n* de trois lignes d'épaiffeur, & après les avoir liés enfemble & réunis par les bouts, dont les marqués B de l'un regardoient les non-marqués D de l'autre, par des contacts de fer E, F, afin d'y conferver la circulation, je m'en fervis de la manière fuivante:

Opération II.

Lames de 18 pouces. Double touche verticale.

Je difpofai, comme dans l'opération précédente, deux des lames de 18 pouces en fituation parallèle, avec la précaution de les tenir fermes pendant le frottement entre leurs contacts, afin d'empêcher tout mouvement de côté & toute altération de la figure rectangulaire nuifible à l'effet de la manœuvre. Je gliffai fur l'une de ces lames une vingtaine de fois le faifceau préparé de celles de 12 pouces & après en avoir tourné, fur le contact de fer, les poles, dont les attractifs, comme on fçait, doivent toujours regarder les poles attractifs des lames à aimanter & réciproquement. Je les promenai autant de fois fur l'autre lame & enfuite fur les faces oppofées, avec la précaution de réunir les bouts frottans du faifceau par fon contact, avant que de le retirer de la lame, afin d'éviter la perte infaillible des forces qu'on ne fçauroit affés ménager, furtout au commencement, lorfque les pièces font encore plus fenfibles à la moindre altération du tourbillon.

Après

Après avoir aimanté de cette façon trois paires des lames de 18 pouces, je les diſtribuai en faiſceaux ſemblables à ceux des lames de 12 pouces, pour fortifier à leur aide celles-ci, ſenſiblement affoiblies par les opérations précédentes. Cette touche leur communiqua un dégré de force magnétique très éminent. L'adhérence des contacts fut telle, que les lames ſe tinrent deux à deux en ſituation verticale comme ſuſpendues au contact relevé, malgré les mouvemens inévitables d'oſcillation & de l'altération de l'équilibre, troublé par le moindre gliſſement.

Le ſuccès de cette opération m'engagea à renforcer encore de le même manière les lames de 18 pouces, moyennant un faiſceau de celles de 12, afin de paſſer enſuite avec plus de ſuccès aux plus grandes lames & aux barres mêmes. Je formai en conſéquence un faiſceau de 4 paires, dont je fis uſage pour fortifier les trois paires de 18 pouces; mais ne prenant point garde à la ſeconde paire aux marques du faiſceau, j'en plaçai les bouts marqués vis-à-vis du bout marqué de la lame que j'aimantois, & je lui donnai par conſéquent une contre-touche, qui eût naturellement l'effet de la priver d'abord, ainſi que ſa compagne, de toute la force qu'elles avoient eue auparavant, & de leur en communiquer enſuite de nouvelles en ſens contraire; c'eſt à dire qu'après avoir détruit la circulation du fluide magnétique & excité par la continuation du frottement un nouveau courant qui tourbillonnoit en direction oppoſée, le pole qui auparavant avoit attiré le Nord de l'aiguille le repouſſoit maintenant, & réciproquement de l'autre. Mais un autre effet plus inattendu, & dont l'obſervation me paroît très importante dans cette pratique, c'eſt qu'après avoir redreſſé la mépriſe & recommencé à gliſſer le faiſceau avec les égards convenables par rapport aux poles, les lames reprîrent non ſeulement en peu d'inſtans des forces en ſens contraire, mais je leur en communiquai même, par ce changement des poles, à un degré ſenſiblement ſupérieur à celui des autres lames, qui n'avoient pas reçu de contre-touche.

Soit que l'ancien cours du fluide magnétique, troublé par ce changement ſucceſſif des poles & même repouſſé en vertu de la direction oppoſée & de la ſupériorité des forces du courant qui s'élançoit du faiſceau, acquiere par là plus de viteſſe, à meſure qu'il s'unit au nouveau tourbillon, diſpoſe les pores de la lame à le conduire & à le propager dans ce ſens, & en débouche enfin des nouveaux; ſoit que les poils, ou ſoupapes, dont nous ſuppoſons garnis les canaux magnétiques, deviennent plus flexibles par le changement ſucceſſif de direction qui les ferme & r'ouvre alternativement: il n'y a, ni dans le prompt effet de l'opération, ni dans le dégré ſupérieur de forces qui en réſulte, la moindre choſe qui ne ſoit conforme aux loix de la Théorie adoptée.

Engagé par cette obſervation, que je dois à un pur hazard, à répéter ce travail, j'ai taché d'en conſtater la vérité & de m'aſſurer de ſon effet par pluſieures expériences avec un ſuccès également heureux. C'eſt pourquoi je crois pouvoir propoſer ce procédé comme très utile dans le maniement des pièces d'acier de fine trem-

trempe, qui ordinairement oppofent le plus de réfiftance à l'entrée & à la circulation de la matière magnétique & retardent beaucoup l'effet du frottement. Je craignois à la vérité que ce procédé, quelque recommendable qu'il paroiffe par la promptitude de l'effet, n'eût le défaut, que par la mobilité augmentée des arrêts les conduits fuffent moins propres à conferver la circulation dans le même fens; mais comme les affoibliffemens tiennent beaucoup plus à un dérangement total des conduits magnétiques qu'à un relachement de leurs poils, je ne me fuis jamais apperçu de la moindre différence entre les pièces foumifes à ces expériences & celles qui n'avoient pas reçu de contre-touche: le décroiffement des forces étoit conftamment le même aux unes & aux autres.

Opération III.

Barres de 12 pouces. Double touche verticale.

Ayant aimanté fix lames de 18 pouces de la manière que je viens de rapporter, je les diftribuai, trois à trois à marques égales, en deux faifceaux écartés par un morceau de bois de 4 lignes d'épaiffeur, & après les avoir ferrés & réunis aux bouts fupérieurs par un contact de fer, je gliffai les inférieurs fur la face d'une barre de 12 pouces: car j'en avois placé deux de cette longueur parallèlement avec leurs contacts, comme dans les opérations précédentes. Celle-ci, continuée fur l'autre barre, à la quelle je paffois toujours par les contacts, fans détacher le faifceau, & enfuite fur les trois autres faces, douze traits

traits ſur chacune, fut ſuffiſante pour les rendre magnétiques au point de pouvoir être relevées par les contacts (*).

Je me ſervis enſuite avec un aſſés bon ſuccès du même faiſceau, pour aimanter les barres de 18 pouces; mais à cauſe de la groſſeur de ces barres & de l'affoibliſſement que le faiſceau avoit ſubi pendant l'opération précédente, elles ont demandé plus de temps, pour recevoir aſſés de force pour pouvoir être trainées par les contacts.

Opération IV.

Barres de 18 pouces. Double touche à compas.

Pour augmenter le magnétiſme de ces mêmes barres Mr. *Euler* ſe ſervit de deux barres de 12 pouces, AB & CD (Fig. 11.) douées du plus haut dégré de force qu'il avoit été capable de leur communiquer en fortifiant une paire par l'autre. Il en preſſa les bouts ſupérieurs B, D l'un contre l'autre, pendant que les inférieurs A, C,

---

(*) Je dois remarquer ici qu'il auroit été inutile de déterminer plus exactement le degré de force produit par chaque opération. Il ne s'agiſſoit que de pouvoir juger en gros de l'effet des différens procédés, pour être en état de remarquer le plus ou le moins d'efficacité de chacun; & pour cet effet les concluſions tirées de l'adhérence des contacts, qui facilitèrent outre cela la comparaiſon des pièces de maſſe différente, étoient douées d'un degré ſuffiſant de préciſion. D'ailleurs les préparatifs attachés à l'appréciation exacte des poids portés par toutes ces barres après les réiterations continuelles des forces uſées, auroient trop arrêté le cours de mon travail.

A, C, séparés par un morceau de bois *e* de 5 lignes d'épaisseur, glissoient sur la face de l'une de ces barres *a b*, dont il y en avoit toujours deux *a b* & *c d*, placées parallèlement avec leurs contacts *f* & *g*. Ce procédé en augmenta la force au point qu'on pouvoit les relever par les contacts.

Opération V.

Lames de 24 pouces. Quadruple touche verticale.

Après avoir renforcé trois paires des lames de 18 pouces & cinq de douze, réunies ensuite en faisceaux, nous en fimes usage pour aimanter à la fois à quadruple touche deux lames de 2 pieds, en les glissant à traits égaux & uniformes sur leurs faces. L'effet de cette manoeuvre, proposée il y a long-temps par Mr. *Euler*, fut aussi efficace que rapide; car de cette manière les conduits magnétiques, débouchés en même temps dans les deux lames, donnent d'abord passage au fluide, qui s'y élance avec impétuosité des deux faisceaux, & qui, ne rencontrant nullepart des obstacles sur son chemin, peut librement tourbillonner d'une lame à l'autre à travers les contacts qui en réunissent les extrémités, au lieu que dans la double touche les premiers traits appliqués à la première lame restent toujours sans effet, puisque le fluide qui s'y décharge, trouvant bouchés les conduits de l'autre lame, ne peut continuer sa route, s'arrête & se disperse pour la plûpart à leur entrée, surtout si l'acier est d'une trempe très dure. La circulation ne commence à se former en liberté, que lorsque les deux lames sont aimantées égale-

 ment;

ment; vérité dont on peut se convaincre facilement par l'adhérence des contacts.

Avant cette opération j'avois déjà essayé la double touche pour aimanter ces lames, mais avec très peu de succès, ce que j'ai lieu d'attribuer à l'huile, dont j'avois frotté la surface, rongée en plusieurs endroits par la rouille. Dès que je les eus nettoyées de l'un & de l'autre, l'effet en fut bien plus sensible, quoique toujours très inférieur à celui de la quadruple touche.

Nous fimes usage du même procédé & des mêmes faisceaux pour aimanter à diverses reprises les barres de deux pieds, qui malgré leur masse & la perte continuelle que les faisceaux avoient soufferts pendant les opérations précédentes, grace à la supériorité de cette méthode, reçurent bientôt assés de force pour pouvoir être trainées de tout côté par leurs contacts: vertu très remarquable, en considérant le grand poids d'une double masse d'acier trempé de 2 pieds de longueur sur deux pouces d'épaisseur & que j'estime équivaloir à un poids avantageusement suspendu de 300 livres au moins (*); & cette force a été considé-

(*) Si l'adhérence des contacts, qu'on peut regarder comme pressés par la force magnétique vers les barres, est telle qu'elle résiste aux mouvemens de côté, & que la masse de 70 livres de poids suive celui des contacts, ce ne sera pas trop que de lui supposer assés de forces pour soutenir un poids de 300 livres & au delà appliqué perpendiculairement; car regardant la force attractive comme pression & le poids des barres comme la résistance de la friction, qui dans les corps polis est tout au plus la cinquième ou sixième partie de la pression, cette estimation, toute indéterminée qu'elle est, ne paroîtra point exagérée.

ſidérablement augmentée dans la ſuite, moyennant deux faiſceaux de 4 lames de deux pieds appliqués de même façon.

On conçoit facilement que l'uſage continuel des lames & barres de moindre grandeur pour aimanter les plus groſſes pièces de cette collection, n'étoit pas propre à leur faire conſerver long-temps le même dégré de force, & qu'il a falu paſſer bien de fois par les mêmes opérations, avant que de leur avoir communiqué un magnétiſme plus conſtant. Il y avoit ſurtout pluſieures pièces, dont l'inégalité de l'acier & principalement celle des poles ſe refuſoit long-temps à une diſpoſition régulière des conduits magnétiques; mais il ſeroit ſuperflu de détailler tous les différens procédés. Les méthodes que je viens de rapporter & celles que je propoſerai dans la ſuite, renferment les moyens les plus efficaces, & j'ai cru devoir les ſéparer d'un grand nombre d'autres, dont l'effet avoit été plus lent & la manipulation plus embarraſſante.

Je viens aux grandes barres. — Mr. *Euler* s'étoit amuſé pendant les opérations que je viens de détailler, à les frotter à double touche à compas avec une ſeule paire des lames de deux pieds & contre toute attente avec un ſuccès tout à fait ſurprennant. Après 80 traits ſur chaque face l'adhérence des contacts à ces lourdes maſſes commencoit à devenir très ſenſible, bien plus qu'on n'auroit dû ſe promettre de l'uſage de deux lames ſi peu proportionnées à la maſſe des barres, & cette adhérence s'augmentoit ſenſiblement à chaque nouvel effort. Cependant, comme l'effet étoit trop tardif nous paſſames à la quadruple touche en promenant fur deux faces à la fois quatre paires des lames de 2 pieds, diftribuées en deux faifceaux & douées du plus haut dégré de magnétisme que j'avois été capable de leur communiquer. Le maniement de ces faifceaux fur toutes les quatre faces de ces barres les renforça jusqu'à pouvoir être trainées, même chargées du poids des barres de 18 pouces; mais en ligne droite, par les contacts.

Ayant jugé ce dégré de force fuffifant, pour être employé avec fuccès à aimanter les grands fers à cheval, nous y appliquames de la manière connue une pièce de la première grandeur, avec les précautions néceffaires à la confervation des forces, & nous la frottames à quadruple touche, moyennant deux faifceaux des lames de 2 pieds, que nous promenames une trentaine de fois fur chaque face, ce qui lui donna d'abord affés de force pour porter un poids de 40 livres; c'eft à dire quelques livres au de là de fon propre poids.

Pour augmenter ce commencement de forces, il falut repaffer par les mêmes opérations, ce qui me donna lieu de remarquer, que non-obftant les précautions les plus foigneufes que j'obfervois en appliquant & en détachant la piéce, chacune de ces opérations affoibliffoit fenfiblement les barres, quoique les faifceaux dont nous les frottames, ne fubiffent que des diminutions très légères Avant que d'affigner les moyens par lesquels j'ai taché d'éviter le mauvais effet de cet affoibliffement, je crois devoir ajouter quelques mots fur fon origine. Pour cet effet je remarque, qu'indépendamment de la différente trempe, qui dans

dans les barres n'avoit pas même assés pénétré, & de l'inégalité des poles, qui avoit déjà été nuisible à la perfection de leur magnétisme, il est d'autres défauts dans la méthode même. Car le fluide magnétique, qui tourbillonnoit avec la plus grande rapidité dans les deux barres & leurs contacts, trouvant tout d'un coup au lieu du dernier, qui lui avoit offert un passage libre, une masse d'acier plus dure & dont les pores n'avoient pas encore été disposés à le recevoir, doit être arrêté & dispersé pour la plus grande partie à l'entrée du fer à cheval, & le reste ne pourra le traverser librement que lorsque les canaux en auront été débouchés par l'activité de la matière qui sort des faisceaux frottans. Dès que la circulation est rétablie les derniers ne déchargent plus rien, ne faisant que conduire la portion qui s'élance d'une barre pour entrer dans l'autre par le fer à cheval; & dès que celui-ci est détaché des barres, il emporte la portion qui y circuloit lors de la séparation & qui forme ensuite le tourbillon particulier de la pièce détachée. L'affoiblissement qui découle de toutes ces sources différentes doit être redressé ensuite à chaque nouvelle opération.

Pour éviter tant soit peu la perte des forces qui résultoit de ces procédés, je ne détachai le contact entièrement des barres, qu'après avoir disposé par quelques traits les conduits du fer à cheval à recevoir le fluide qui devoit les traverser; & pour en augmenter l'affluence, je plaçai sur les grandes barres A B & C D une autre paire de celles de 18 pouces, *a b* & *c d* (Fig. 12.), dont je dirigeai le courant dans les inférieures moyennant des morceaux de fer doux *m*, *n*, inclinés sur leurs faces. Par cette précaution j'obtins 1°.) que toute la portion du fluide magnétique, qui, ne trouvant pas d'abord entrée dans le fer à cheval F, se dispersoit auparavant ou s'arrêtoit du moins à l'embouchure de ses pores, pouvoit traverser maintenant le contact couché sur les faces des barres & continuer l'ancien cours, jusqu'à ce que je pusse le diriger sans crainte dans le fer à cheval; 2°.) que la diminution qui se faisoit encore malgré ces précautions, se réparoit par le tourbillon des barres supérieures. De cette façon j'augmentai la vertu magnétique de la pièce jusqu'à lui faire porter 80 livres.

Pendant que je travaillois ainsi à aimanter cette pièce & quelques autres de moindre masse, Mr. *Euler* étoit parvenu à communiquer à un autre fer à cheval de la même grandeur un dégré de magnétisme supérieur à celui que j'avois été en état de produire, & d'autant plus remarquable, que la méthode dont il s'etoit servi sembloit avoir tout au plus le mérite de l'aisance & ne promettre qu'un succès très médiocre. Il le mit simplement sur une table couverte de feutre pour éviter tout ébranlement nuisible, & le frotta, garni de son support, avec une paire des barreaux de 12 pouces, de la manière que j'ai appellée ci-dessus double touche à compas. Par cette opération, continuée sur l'autre face & réiterée ensuite à diverses reprises, la pièce acquit une force magnétique telle, qu'ayant été suspendue quelques jours & chargée de quelques autres pièces d'acier, dont le poids pouvoit monter à 110 livres, elle les a portées sans la moindre altération. Je ne doute pas, que si j'avois eu la facilité de la tenir suspendue plus long-temps & d'augmenter peu à peu le ſe poids qu'elle à porté d'abord après le frottement, le tourbillon ne s'en fût affermi de plus en plus & qu'elle n'eût été en état de porter le double de celui que je viens d'aſſigner, & peut-être le triple, après l'avoir retouchée aſſés ſouvent pour pénétrer ſuffiſamment toute ſon épaiſſeur & diſpoſer tous ſes pores également en conformité du magnétiſme. — Quel que ſoit d'ailleurs le poids que des pièces de cette maſſe auroient du ſoutenir & auroient ſoutenu ſans doute après quelques corrections dans leur figure & dans la forme & la juſteſſe de leurs poles: ce qu'il y a de ſûr c'eſt que cette méthode d'aimanter les fers à cheval, que nous avons toujours employée depuis avec un ſuccès également décidé, eſt tout au moins auſſi efficace que l'autre, où l'on applique la pièce à des barres de grandeur proportionnée. Outre cela elle à l'avantage d'être plus ſimple & moins pénible; car elle n'exige que le maniement d'une paire de barres de 12 à 15 pouces, douées d'un principe de vertu magnétique, qu'on peut mener facilement au plus haut dégré de force poſſible, en renforçant une paire par l'autre, ſi l'on veut s'en procurer quatre de même grandeur. Il eſt vrai qu'il faut répéter ſouvent ce travail dans la ſuite, pour réparer les pertes continuelles qui réſultent du fréquent uſage de ces barres, tant pour les mettre en état de pénétrer bien avant dans la pièce à aimanter & d'y ranger une plus grande quantité de pores conformement au magnétiſme; auſſi bien que pour augmenter de plus en plus la quantité du fluide qui doit les parcourir. Mais de l'autre côté il n'y a pas moins de fatigue à renforcer les grandes barres où l'on a appliqué la pièce, lesquelles, ſujettes comme j'ai fait voir, à des affoibliſſemens conſidérables,

rables, doivent pourtant être entretenues dans un degré éminent de force, ainſi que les lames ou faiſceaux, dont on fait uſage pour faciliter le paſſage au courant magnétique. Si l'on ajoute à tout cela, l'embarras de retourner les barres auſſi ſouvent qu'on doit préſenter une autre face au frottement, le détachement de la pièce, & les altérations du tourbillon, qu'il eſt impoſſible d'éluder entièrement, malgré toutes les précautions imaginables, on ſentira tout le prix de cette autre méthode qui, exempte de tous ces inconveniens, n'eſt ni moins expéditive ni moins efficace.

*** *** ***

Après le détail des principaux moyens employés pour communiquer la vertu magnétique à cette collection de pièces d'acier, moyennant une paire de petites lames extrêmement affoiblies par le temps & le peu de ſoin qu'on avoit pris d'y entretenir le tourbillon magnétique, au point qu'elles n'étoient pas même capables de porter le poids de trois onces: je vais ajouter encore quelques remarques & précautions générales, déduites d'un grand nombre d'expériences. Elles pourront intéreſſer ceux qui voudront s'occuper à faire des aimans artificiels, & elles ſont d'autant plus importantes, que de leur obſervation plus ou moins ſoigneuſe dépend ſouvent le bon ou le mauvais ſuccès d'un travail long & pénible. Au reſte, en raſſemblant ici ces règles générales, j'aurai l'occaſion d'ajouter encore l'explication de pluſieurs phénomènes & d'éclaircir pluſieurs faits propres à en faire voir l'importance.

I. Com-

I. Comme dans la manoeuvre de rendre l'acier magnétique tout revient à diſpoſer ſes pores enſorte qu'ils forment des tuyaux contigus, parallèles & capables de recevoir le fluide magnétique, de le propager & d'en perpétuer le mouvement, il faut apporter la dernière attention dans le choix de l'acier qu'on veut aimanter. Il doit être d'un grain égal & petit, homogène & ſans noeuds, pour préſenter au fluide beaucoup de conduits égaux & non-interrompus d'un bout de la pièce jusqu'à l'autre. Il doit être d'une bonne trempe, pour que ſes pores conſervent plus long-temps la diſpoſition une fois reçue, & puiſſent mieux réſiſter au changement de direction, auquel eſt expoſé le fer & l'acier plus mou. On n'a qu'à aimanter avec le même aiman & de la même manière deux pièces de maſſe & volume égal pour ſe convaincre combien, toutes choſes d'ailleurs égales, la différence de l'acier influe ſur la ſuſceptibilité de la vertu magnétique.

II. Les pièces ne doivent être ni trop longues ni trop courtes par rapport à leur épaiſſeur. Si elles ſont trop longues, la route que la matière magnétique, ſortant d'un pole pour rentrer dans l'autre, doit ſuivre, & qui eſt chargée de l'éther mélé avec l'air groſſier, oppoſe plus d'obſtacles à la continuation de ſon mouvement; le courant en ſera trop répandu, moins fourni & ſa viteſſe extrèmement ralentie. Si elles ſont trop courtes, le fluide *m m* (Fig. 13.), s'inſinuant en A dans les conduits de la barre & ſortant en B, où il rencontre la partie plus groſſière de l'éther, qui le repouſſe & réfléchit pour ainſi dire, en ſera jetté trop loin au de là du pole A, pour s'unir facilement à la matière affluente & pour re-

 tour-

tourner vers les orifices des conduits, ce qui empêche la perpétuité du mouvement & la formation du tourbillon. Si elles ſont trop minces, le nombre des conduits eſt trop petit pour recevoir un courant capable de réſiſter aux obſtacles, qui s'oppoſent à ſon mouvement dans l'eſpace externe qu'il doit balayer; & trop d'épaiſſeur nuit à la direction droite, par la difficulté d'en arranger les conduits les plus intimes, ce qui donne lieu à des détours incompatibles avec la formation des tourbillons (*).

III. Toutes les pièces doivent être polies ſoigneuſement; & il eſt ſurtout de la dernière importance de les faire travailler exactement aux extrémités, enſorte que les bouts touchent, en autant de points qu'il eſt poſſible, les contacts ou ſupports de fer doux, qu'on y applique pour entretenir le tourbillon. Des inégalités conſidérables tant ſur les faces que principalement aux poles peuvent non ſeulement occaſionner des détours très nuiſibles à la circulation; mais encore le fluide, étant obligé alors de traverſer en partie des interſtices remplis d'éther & d'air groſſier, en ſera diſperſé & ſenſiblement ralenti dans ſon mouvement, dont la viteſſe paroît être une des principales ſources de la vertu magnétique. — Pour pouvoir ajuſter plus aiſément ces poles, il ſeroit bon de les faire conſtamment de fer doux, en ſoudant aux extrémités de chaque pièce des morceaux de fer de 4 à 6 lignes de longueur. On obtiendroit par là un autre avantage: celui de pouvoir gliſſer les barres, dont on ſe ſert

(*) J'ai fait faire des barres quarrées ſuivant des dimenſions différentes, & je crois avoir obſervé que le meilleur rapport de la longueur à l'épaiſſeur eſt comme 15 ou 16 à 1.

ſert pour aimanter, le long de l'acier d'un bout à l'autre; au lieu que dans les pièces de pur acier, obligé comme on eſt de s'arrêter à quelque diſtance des poles, de crainte de heurter les contacts, on laiſſe à l'activité du fluide le ſoin de ſe frayer un paſſage par ce petit eſpace pour entrer dans le ſupport, ce qu'il ſera plus aiſément par les pores plus ſouples du fer.

IV. Il faut avoir ſoin que pendant toute l'opération les contacts ou ſupports ne ſe détachent jamais des poles de la pièce: un inſtant de ſéparation eſt capable d'anéantir tout l'effet du travail précédent. Une grande partie du fluide magnétique allant ſe diſperſer alors dans l'air avec cette activité qu'on lui connoit, il eſt naturel, que la circulation troublée par cette interruption, ne puiſſe ſe remettre que par une opération réitirée, ou bien par le concours du tourbillon général, ſi on en veut attendre l'effet toujours lent & tardif. Pour éviter une telle ſéparation & en général toute altération de la figure rectangulaire des barres, ou de la diſpoſition primitive de quelque autre pièce que ce ſoit, il ſera bon de la fixer avec ſes contacts par des clous ou par des crampons de bois. — On croira que je m'arrète à des minucies; mais, ne pouvant mettre une infinité d'opérations inutiles, qui retardèrent au commencement l'effet de mon travail, que ſur le compte de ces petits dérangemens que je négligeois alors, je crois devoir inſiſter ſur l'importance de ces précautions.

V. Il ne faut s'arrêter ſur la première barre qu'on veut aimanter, qu'autant qu'il eſt néceſſaire pour en ouvrir les pores par quelques traits & les arranger conformement au magnétiſme, paſſant tout de ſuite ſur l'autre, pour donner iſſue au fluide qui vient s'y décharger de la première. Un ſéjour trop long ſur celle-ci affoibliroit le faiſceau ſans être utile à la barre, qui, toute ſurchargée qu'elle en ſeroit, ne ſauroit conduire la matière que juſqu'à l'entrée des pores de l'autre barre, où les canaux, n'étant pas encore débouchés, lui refuſeront le paſſage & l'obligeront ou à ſe frayer une autre route ou à ſe diſperſer dans l'air.

VI. Il ſera bon de tourner d'abord la barre qu'on a quittée pour paſſer ſur l'autre; de cette façon le courant qu'on y va exciter diſpoſera les conduits de la première en ſorte que l'effet, quand on y reviendra pour frotter la face tournée, ſera plus efficace. Un autre avantage qui réſulte de ce procédé, c'eſt que n'ayant à retourner qu'une ſeule barre à la fois, on peut le faire ſans ôter le faiſceau pendant toute l'opération; circonſtance qui eſt très favorable à la conſervation des forces; car on ſentira bien que les faiſceaux, par le déplacement continuel de leurs poles aux barres & des barres aux contacts, doivent perdre à la fin conſidérablement de leur magnétiſme, quelque ſoin qu'on donne d'ailleurs à ſa conſervation.

VII. Pour mieux éviter cette perte & en général toute altération des tourbillons, tant dans les pièces qu'on a aimantées que dans celles dont on s'eſt ſervi pour cet effet, il y a encore deux autres précautions à prendre, ſavoir: 1° de ne détacher les dernières que ſur l'équateur

teur de la barre, où l'attraction eſt toujours moindre que vers les poles, & 2° de ne jamais faire cette ſéparation qu'après avoir remis le contact.

VIII. Il ne faut jamais précipiter le mouvement des faiſceaux ſur les barres, pour donner le temps à la matière magnétique, qui ſort des premiers, de diſpoſer aſſés de conduits dans celle-ci pour la recevoir. Car j'ai conſtamment obſervé, qu'un mouvement trop vif étoit également préjudiciable tant aux pièces frottées qu'aux faiſceaux frottans & que trop de violence retardoit beaucoup l'effet des opérations.

IX. C'eſt une erreur aſſés commune, de croire qu'avec des barres de maſſe & de force conſidérable on puiſſe facilement communiquer à de petites pièces le plus haut dégré de magnétiſme dont elles ſont ſuſceptibles, pendant qu'il ſeroit impoſſible de ſe ſervir de lames ou barreaux de moindre force, pour aimanter avec ſuccès des pièces de maſſe conſidérable. J'ai trouvé ce ſentiment dans pluſieurs Auteurs, qui ont écrit ſur les aimans artificiels & il paroît aſſés fondé au prémier coup d'œil; cependant je doute qu'ils s'en ſoyent aſſurés par des expériences, vu qu'un grand nombre de celles que nous avons été à portée de faire, nous a fait voir tout le contraire.

Nous avons conſtamment bien réuſſi à aimanter & même à renforcer à un dégré très éminent les plus grandes pièces moyennant des lames ou barreaux de force & de maſſe très médiocre. Témoin la méthode de Mr. *Euler*, employée pour aimanter les grands fers à cheval &

 même

même des barres de 24 & 30 pouces de longueur, pendant qu'il m'a été impoſſible de renforcer, moyennant des pièces douées d'un haut dégré de magnétiſme, de petites lames au même point de force que j'avois été capable de produire, en faiſant uſage de leurs compagnes ou de plus petites encore en maſſe & en vertu. J'ai ſouvent eſſayé par exemple de renforcer les lames de 12 pouces moyennant les barres de même longueur; or quoiqu'il n'y eût pas là une extrême diſproportion, le ſuccès n'a jamais égalé celui que produiſirent des pièces de moindre force. Souvent même, au lieu de recevoir de l'augmentation, elles s'affoiblirent à vue d'œuil, & cela d'autant plus que les barres étoient douées d'un dégré éminent de magnétiſme.

Mais comment expliquer ce Paradoxe apparent? Je crois qu'en bien reflêchiſſant ſur la nature de l'aiman & en comparant ce phénomène avec pluſieurs autres dont on a donné des explications, qui par leur merveilleux accord n'admettent presque plus de doute, on ne ſera pas long-temps à en déviner la cauſe. Je conçois une lame A B (Fig. 14.) déjà douée d'un principe de magnétiſme, qu'on veut augmenter moyennant d'autres lames ou barres conſidérablement plus grandes C D & E F aimantées au plus haut dégré. Dès qu'elles ſeront appliquées ſur la lame à frotter, le fluide, s'élancant avec impétuoſité & en grande abondance dans celle-ci, la traverſera dans toute ſon épaiſſeur; le courant qui la parcourt étant trop foible pour l'entrainer avec lui & pour en changer ſubitement la direction. Par là l'ancienne circulation ſe trouble & ne peut ſe remettre qu'après la

ceſſation

ceſſation entière ou l'affoibliſſement de cette violente efſuſion, par l'activité du tourbillon général, ou enfin par une nouvelle opération, moyennant des faiſceaux de moindre force. Si la lame à aimanter eſt entièrement deſtituée de forces, on ne lui en communiquera pas de conſidérables & proportionnées à ſa figure en ſe ſervant de faiſceaux puiſſamment aimantés; car le courant qui en ſort, trouvera les mêmes difficultés à ſe tourner d'abord après ſon entrée pour parcourir de toute ſa longueur la lame ſoumiſe à ſon action, & par conſéquent il ne pourra en diſpoſer les pores conformément au magnétisme, qu'après s'être affoibli au point de réſiſter moins à cette direction, ce qui dans cette manœuvre ne tardera pas d'arriver en peu d'inſtans.

Il y a au contraire dans l'uſage des petites barres & des faiſceaux, même foiblement aimantés, un afflux continuel, quoique moins fourni, de fluide magnétique, qui s'unit facilement au tourbillon des plus grandes barres, ſuit avec facilité ſa direction & l'augmente, lentement à la vérité, mais avec un ſuccès indubitable. Mr. *Euler*, dont l'activité & l'application continuelle doit étonner tous ceux, qui ont l'occaſion d'en être comme moi témoins oculaires, s'eſt ſouvent amuſé, lorsqu'il a voulu ſe délaſſer de ſes profondes méditations, à renforcer de cette manière des barres de 18, de 24 & même de 30 pouces de longueur, moyennant des barreaux de 12 pouces, dont il continua de les frotter avec ſuccès jusqu'au dernier dégré d'affoibliſſement: elles en reprennoient leur ancienne vigueur. Mais ici il faut avoir ſoin de promener les barreaux frottans ſur toute la largeur de la pièce

à

à aimanter, afin de diſpoſer par-tout les conduits également en conformité du magnétiſme & d'éviter qu'il ne ſe puiſſe faire nulle-part des détours nuiſibles à la viteſſe & à la direction du courant.

X. Enſuite en aimantant des pièces d'acier de maſſe conſidérable moyennant des faiſceaux de groſſeur & de force médiocre, nous avons ſouvent rencontré des endroits, où le faiſceau gliſſoit avec plus de facilité que ſur les autres; phénomène qui n'aura pas lieu ſi l'acier eſt d'un grain uni & d'une trempe égale, mais qui fait voir qu'on doit ſoigneuſement corriger ce défaut partout, où il ſe trouve. Pour cet effet il faut ſéjourner plus longtemps ſur ces endroits que partout ailleurs, & y promener les faiſceaux, jusqu'à ce que l'adhérence en ſoit la même ſur toute la ſurface. Par ce moyen, malgré les pailles ou les nœuds de l'acier, on diſpoſera les conduits magnétiques ſuivant des directions parallèles le long de la pièce. Le fluide, toujours enclin à quitter la direction là où il rencontre des obſtacles, & à ſe frayer ſon chemin par les pores les plus aiſés à déboucher, ne ſera pas obligé à faire des détours, qui retardent non ſeulement l'effet du travail, mais qui ſouvent encore ſont la ſeule ſource d'un affoibliſſement qu'on aime à attribuer à une perte du fluide même, plutôt qu'à cette altération de ſon cours & à la rétardation de ſon mouvement qui en eſt la ſuite. J'ai renforcé des pièces conſidérablement affoiblies, en ne gliſſant les faiſceaux que ſur des endroits ſemblables, où j'avois remarqué l'attraction moindre que ſur le reſte de la ſurface, & elles en reprirent leur force primi-

primitive, qui après quelques réitérations du même procéde devint de plus en plus inaltérable.

XI. A l'égard des fers à cheval & de la manière de leur communiquer la vertu magnétique, il n'y a pas de préceptes particuliers qui ne ſoyent renfermés dans ceux que je viens de rapporter ici. J'obſerve ſeulement, rélativement à leur figure, qu'il ſera bon de les faire d'une ſeule lame d'épaiſſeur convenable, fabriquée au reſte ſuivant les mêmes dimenſions qu'on a coutume d'obſerver pour les lames droites, & dont j'ai parlé dans la ſeconde remarque, à cette différence près: qu'il faut leur donner plus de largeur & d'épaiſſeur vers le milieu, les atténuer inſenſiblement vers les poles & appointir enfin ceux-ci juſqu'à une ligne ou deux d'épaiſſeur, pour obliger le fluide à ſe comprimer en paſſant par cette petite ſurface, & à ſe répandre enſuite avec plus d'activité dans le ſupport, ce qui en augmente conſidérablement la force. Car on ſait par la diſpoſition de la limaille de fer autour d'un aiman, que la matière magnétique eſt extrêmement ramaſſée & preſſée de toutes parts à ſon entrée & à ſa ſortie d'un aiman. La limaille qui s'arrange aux deux poles en une infinité de filets, qui s'écartent & ſe déſuniſſent également à l'un & l'autre, nous fait voir que cet état comprimé ſubſiſte dans tout l'intérieur de l'aiman, & qu'il ceſſe d'abord au dehors par les obſtacles qui s'oppoſent au mouvement du fluide, lorsqu'il traverſe l'eſpace extérieur rempli d'air. On voit de plus que ces filets ſont plus ramaſſés, ſelon que l'aiman eſt plus fort, & plus répandus ſelon qu'il eſt plus foible. On peut donc regarder ce reſſerrement de la matière comme une des principales ſources de la vertu magnétique & on s'appercevra mieux encore de ſon influence en comparant les tourbillons particuliers avec le tourbillon général, dont les effets ſont infiniment moins ſenſibles, par la ſeule raiſon, que ſa matière, ayant à traverſer un eſpace trop étendu & à vaincre trop d'obſtacles pour arriver d'un pole à l'autre, eſt beaucoup plus raréfiée & moins abondante que celle des tourbillons particuliers des aimans. Plus donc que par l'aiguiſement des poles on a augmenté ce reſerrement, plus ſera ſenſible la force attractive & portative de la pièce (*), & cette même concentration des forces doit avoir un ſuccès également heureux aux barres mêmes.

J'ai fait faire ſuivant ces idées deux pièces, dont l'une n'avoit que 11 onces & l'autre deux livres de poids, qui d'abord après la première opération ont porté l'une dix livres & l'autre 25 livres de poids, pendant que les autres pièces de largeur & épaiſſeur d'égale n'ont jamais été capables de ſoûtenir au delà de 6 fois leur propre poids. D'ailleurs les deux fers à cheval, dont je viens de parler, pourront facilement être renforcés: car je n'ai fait uſage pour les aimanter l'un & l'autre que d'une paire de mes barres de 11 pouces affoiblies de propos déliberé

(*) Cependant il n'y a point de doute que cet aiguiſement n'ait auſſi ſes bornes, au delà deſquelles, loin d'être avantageux, il pouroit devenir nuiſible. Mais comme je n'ai par encore raſſemblé aſſés de faits pour déterminer la forme de la taille & celle des ſupports, qui eſt également eſſentielle, je me contente d'avoir vu la validité de cette ancienne obſervation ſe confirmer par mes expériences.

délibéré, ſans les appliquer à aucune barre; & quoique l'acier du dernier ne ſoit pas de la meilleure eſpèce, malgré ſes fentes & crevaſſes j'en ai pu augmenter le poids jusqu'a 33 livres; & l'autre en porte encore 16 actuellement, c'eſt à dire 23 fois ſon propre poids. Au reſte je ſuis perſuadé qu'en les retouchant l'un & l'autre avec les mêmes précautions que je viens de rapporter, moyennant des barres tant ſoit peu plus fortes & en augmentant enſuite inſenſiblement le poids, je pourrai les amener juſqu'à porter l'un au delà de 20 & l'autre au delà de 40 livres; & ils conſerveront cette force beaucoup mieux, que s'ils étoient composés de pluſieures lames, comme on les fait ordinairement, en les reuniſſant par une armure particulière; & alors ces pièces ſurpaſſeront en force, rélativement à leur maſſe, tout ce qu'on a vu juſqu'à préſent de plus exquis en aimans artificiels.

PHYSIQUE EXPÉRIMENTALE.

Obſervations ſur l'Electricité naturelle par le moyen d'un Cerf-volant: adreſſées à l'Académie, par S. E. Mr. le Prince *Dimitri de Gallitzin*, Envoyé extraordinaire auprès de Leurs Hautes Puiſſances à la Haye.

MESSIEURS!

Les Phyſiciens n'ont gueres été d'accord jusqu'ici ſur les effets du *Cerf-volant* électrique. Des hommes très célébres & très ingénieux, avoient tenté vainement d'eſſayer cette voye pour en tirer de l'électricité, & ils en avoient conclu que cet Inſtrument n'y étoit pas propre. D'autres plus heureux, varioient ſur la nature de l'électricité qu'il donnoit: les uns la croyoient toujours *poſitive*, les autres toujours *négative*.

Pour concilier ces différens avis, j'ai entrepris de vérifier ce qui pouvoit y avoir donné lieu, & de ſavoir ce qui en eſt. J'y ai été plus heureux que je n'aurois oſé l'eſperer.

Une ſeule perſonne a bien de la peine à manier cet Inſtrument. D'ailleurs il y a dans ces ſortes d'expérienriences, des momens, des inſtans même à ſaiſir, qui une fois échappés, ne ſe retrouvent plus ſi-tôt. Il me falloit donc un Compagnon, & je le trouvai dans Mr. *Dentan*, qui joint à une paſſion vive pour les Sciences, une ſagacité, une adreſſe & une intelligence extrêmes dans les expériences & les obſervations. Il ne m'a donc pas ſeulement ſecondé, mais il a vérifié & continué la plûpart des obſervations dont je vais avoir l'honneur, Meſſieurs, de vous rendre compte ici. Je ſaiſis au reſte avec plaiſir cette occaſion de rendre juſtice à ſes mérites & de lui témoigner publiquement le cas infini que j'en fais.

Quelque connu que vous ſoit, Meſſieurs, un Cerf-volant électrique, la commodité de celui qui nous a ſervi, m'engage à vous donner ici, & avant tout, la deſcription & le deſſein du mien dans l'inſtant de ſon élévation & de nos expériences. Vous jugerez par là, que s'il a manqué entre des mains bien plus habiles que les miennes, la faute n'en étoit aſſûrément qu'à la conſtruction de l'Inſtrument. Il y falloit indiſpenſablement une communication non-interrompue, par le moyen des fils-d'archal entre les Pointes qui ſont au dos du Cerf-volant, ſa corde & le Conducteur iſolé auquel on charge les Bouteilles. Mais il n'exige pas moins eſſentiellement d'être parfaitement iſolé. Nous avons rigoureuſement obſervé ces loix, & l'effet a toujours répondu à notre attente.

Description
du Cerf-volant électrique élevé.

A. Le dessus du *Cerf-volant* élevé.

2. Pointes métalliques.

3. Fil-d'archal qui établit une communication suivie entre les pointes, la queue & la corde du Cerf-volant.

B. La queue du Cerf-volant.

C. La corde, tramée sur du fil-d'archal.

D. Dévidoir pour la corde.

E. Pieds du dévidoir, dont une partie

5. est de bois sec pour isoler le Cerf-volant.

4. Couvercles de cuivre, pour empêcher le bois sec des pieds *E* d'être mouillé par la pluye.

6. Espece d'Électromètre (comme celui de *Lane*) qu'on visse à un des pieds, afin de recevoir la surcharge de l'électricité, qui par le moyen du fil-d'archal

7. s'en iroit dans le Canal *N*.

NB. On voit par cette précaution, que mon Cerf-volant est construit de façon, qu'il n'y a aucun danger à le manier, dût-il recevoir du nuage une dose prodigieuse d'électricité; la surcharge s'en va dans l'eau & ne peut jamais parvenir jusqu'à l'observateur.

K. Cabinet ou Belvedere où se font les expériences.

H. Table sur laquelle on tient l'appareil électrique.

G. Con-

G. Conducteur isolé, auquel, (lorsqu'on *y* attache un fil-d'archal 8. dont l'autre bout est joint en *u* à la corde *C*) on peut charger les bouteilles & faire toutes sortes d'expériences.

O. Fenêtre au travers de laquelle on fait passer le même fil-d'archal 8.

P. Terrasse, où sont affermis les pieds des dévidoirs.

x. Manivelle du dévidoir *D.*

L. Autre dévidoir à corde de soye. Lorsqu'on veut ramasser le Cerf-volant, & qu'on n'ose pas le toucher, de crainte que l'électricité ne fasse du mal, on le fait par le moyen de ce second dévidoir. Sa corde de soye *M* est attachée au premier dévidoir *D.* En tournant la manivelle *y* on fait tourner le dévidoir *D* à contre-sens de ce qu'on a fait pour l'élévation du Cerf-volant.

NB. Cette seconde précaution met le comble à la sûreté qu'il y a à manier mon Cerf-volant.

Expériences.

Nous avons élevé notre Cerf-volant d'un des lieux les plus élevés de ce Pays, d'une petite maisonnette située au sommet d'une Dune & apartenante à Mr. le Greffier *Fagel.* Ce digne Ministre, dont l'amour pour les Arts & les Sciences est connu de toute l'Europe, a volontiers consenti de changer ce Belvedere en un Observatoire de Physique. C'est le 4. Juin, 1775 que nous avons commencé nos expériences: nous les avons continuées jusqu'au commencement de cette année-ci. (1778.)

En

En élevant le Cerf-volant par toutes ſortes de vents, en differentes ſaiſons & à différentes heures; jamais nous n'avons pu achever notre expérience ſans trouver des ſignes évidens d'électricité, tantôt forte, tantôt foible, mais toujours ſenſible; dans les tems ſecs & chauds, comme dans les tems humides. De nuit comme de jour, nous avons vu briller l'étincelle électrique, nous avons chargé la bouteille. Voici les remarques principales qui réſultent de cette ſuite d'expériences.

1°. Par la quantité de corde lachée & l'inclinaiſon qu'elle prenoit en s'élevant, nous avons connu, à peu-près, la hauteur à la quelle l'électricité commençoit à être ſenſible. Je dis à peu-près; car dans les grandes élevations, la corde fait une courbe dont il eſt difficile de tenir compte. Cette hauteur eſt très indéterminée, & nous a paru dépendre de la plus ou moins grande ſechereſſe de l'Air inférieur. Dans les tems humides, quand le bas de l'Atmosphère étoit rempli de vapeurs, il falloit élever le Cerf-volant plus haut pour obtenir des ſignes électriques. Nous en avons rarement obtenu à moins de l'avoir élevé de 150 à 200 pieds au-deſſus de la Dune, qui l'eſt elle même de 70 à 80 au-deſſus du niveau de la Mer.

2°. La nature de l'électricité varie auſſi. Cependant elle eſt d'ordinaire *poſitive*. Si l'on pouvoit hazarder quelque regle à cet égard, il ſemble qu'elle eſt *poſitive* dans les tems calmes, & qu'elle ſe trouve plus ſouvent *négative* à l'approche des orages. A cet

cet égard nous devons avouer que pendant longtems nous n'avons employé qu'une méthode incertaine pour déterminer la nature de l'électricité. Il importe beaucoup, pour s'en assûrer, de faire attention aux premiers mouvemens des balles de l'Electrometre, & à la distance à la quelle on les aproche du Conducteur. La Lanterne de Beccaria dont nous avons essayé de faire usage, nous a peu servi, & servira peu, j'imagine, excepté dans les tems d'orage. L'Electrometre le plus simple est le meilleur: Celui que Mr. *Cavallo* a tout nouvellement imaginé, est excellent pour ces expériences. Ce sont deux trés petites balles de liege, attachées, par le moyen des Fils-d'archal à une plaque d'ivoire qui passe dans le goulot d'une petite phiole de verre, dont le dessus est un couvercle de métal. Il est de la plus grande sensibilité, & prend aisément l'électricité dès qu'il est à portée d'elle. En en aprochant ensuite un morceau de cire d'Espagne frottée contre du drap, on reconnoit sans difficulté l'espece d'électricité dont les balles se seront impregnées.

3°. Nous croyons que l'analogie qu'on imagine entre les Aurores boréales & l'electricité, n'est pas encore aussi assurée qu'on le croit: nos expériences ne nous ont rien donné de régulier à cet égard. Nous savons que les Aurores boréales affolent l'Aiguille magnetique; mais nous n'avons pas remarqué qu'elles influassent sur les signes d'electricité que nous donnoit la Machine.

4°. Le Cerf-volant, qui nous a ſervi à nous aſſûrer de cette permanence dans l'état électrique de l'Atmoſphere, eſt préférable par cette raiſon aux autres Inſtrumens employés à cet effet: c'eſt qu'il va plus haut que les Conducteurs pour ſoutirer le fluide électrique. Mais il a les inconveniens ſuivans. 1°. Qu'il ne peut être élevé que rarement & avec des vents un peu forts. Quoique dans un Païs où les vents regnent & ſoufflent forcément & fréquemment, nous avons fait un grand nombre d'eſſais inutiles pour l'élever. 2°. Que par la même cauſe il ne ſert pas dans les cas les plus intéreſſans. Nous l'avions élevé, p. e., à l'aproche des orages: ce calme qui les précede immédiatement, l'abbattoit, & il y avoit enſuite trop de danger, ou il étoit trop tard pour l'élever de nouveau. 3°. Il manque auſſi ſouvent par une raiſon contraire. Les vents violens viennent d'ordinaire par bouffées, tiraillent la corde & la caſſent, à moins qu'on ne veuille la faire d'une groſſeur embaraſſante, & qui par ſa péſanteur aporteroit un obſtacle à l'élevation du Cerf-volant.

5°. J'avois dit, que dans tout tems nous avons trouvé des ſignes d'électricité. Voici les modifications. 1°. Si la pluie venoit à tomber pendant que le Cerf-volant étoit élevé, l'électricité ceſſoit & ne ſe remontroit enſuite qu'au bout de quelques minutes aprés la ceſſation de la pluie. 2°. Si les nuages étoient répandus ça & là dans l'Atmoſphere, l'électricité augmentoit ſenſiblement dès que l'un l'un d'eux venoit à passer au dessus du Cerf-volant, & diminuoit après son passage. 3°. Les accès du vent élevent & abaissent alternativement le Cerf-volant. L'électricité cessoit quelquefois dans les abaissemens; toujours elle devenoit plus foible, & se remontroit ou augmentoit dans les élevations Le carillon électrique, l'electrometre, la sensation des étincelles & leur vivacité, constatoient ces états d'augmentation ou de diminution de l'électricité.

6°. La sensation que produit une étincelle électrique obtenue par le Cerf-volant, merite d'être observée. Cette étincelle est petite dans les tems ordinaires; mais n'eut-elle qu'une ligne de longueur, elle fait une impression semblable à celle d'une commotion & pique la main. Ce phenomene, dont nous nous sommes assurés cent fois sur nous mêmes & sur d'autres, joint à ce que je viens de dire des oscillations électriques, correspondantes à l'elevation ou la sécheresse, confirment l'explication que j'ai donnée de l'electricite naturelle; en la considérant comme une commotion électrique produite à l'aide d'une couche d'air intermediaire & isolante.

7°. Nous avons essayé de charger une batterie de 34. bouteilles avec le Cerf-volant. Mais dans les tems ordinaires on réussit très difficilement, à cause des ces oscillations ou variations électriques· la batterie se trouvant tantôt chargée, tantôt presque

 dechardéchargée. Et dans le tems d'orage, elle eſt au moins inutile.

8°. Pour conclure, je dois vous faire remarquer, Meſſieurs, que le Païs où nous avons fait ces expériences, eſt un païs bas, toujours humide; dont l'air eſt ſans ceſſe rempli de vapeurs, & qui au coucher du Soleil (tems au quel tombent quelques-unes de nos expériences) l'eſt d'ordinaire d'un brouillard épais. Dans des païs très élevés, on doit vraiſemblablement s'attendre à des phénomenes bien plus intéréſſants.

J'ai l'honneur d'être avec l'attachement le plus vrai, l'eſtime la plus parfaite & la conſidération la plus diſtinguée,

MESSIEURS,

Votre très humble & très obeiſſant Serviteur. *Dimitri Prince de Gallitzin.*

A la Haye ce 25 Sept. 1778.

MECHA-

MECHANIQUE.

Jugement de Meſſieurs les Commiſſaires nommés par l'Académie pour examiner le modele d'un pont de bois à conſtruire ſur la Néva, préſenté à l'Aſſemblée le 3 Décembre, par Mr. *Nordſtern*, Horloger de l'Académie Impériale des Beaux-Arts.

Deſcription.

Le pont que ce modele repréſente ſera porté ſur un radeau flottant enfoncé dans l'eau d'une ſagene & demie: il aura neuf arches chacune de neuf ſagenes, ou 63 pieds anglois de largeur: celle du milieu s'ouvrira en deux parties pour le paſſage des vaiſſeaux.

Le radeau ſera formé de poutres enclavées les unes dans les autres & aſſûrées par des chevilles de fer. Il portera des batteaux conſtruits en forme de piles comme celles des ponts de pierre, ſur lesquels ſera aſſis le plancher du pont: toute cette maſſe flottante & ſolide eſt conſtruite de maniere à ſe prêter facilement au gonflement de la rivière & à la violence des vents, ayant toute la ſoupleſſe néceſſaire pour n'éprouver aucun dérangement dans l'aſſemblage de ſes parties.

Ces piles ou batteaux auront par en bas la figure d'un angle aigu, & elles seront revêtues de griffes de fer pour s'opposer à l'effet du courant & affoiblir le choc des glaçons. A chacun de ces angles, il y aura une caisse de pierres suspendue à une chaine de fer, que par le moyen d'un moulinet pratiqué dans le corps de la pile, l'on descendra jusqu'au fond de la riviere. Ces caisses serviront à affermir le pont contre la force du vent & la crue des eaux: & dans les cas où un ouragan obligeroit à replier le pont contre les parapets, l'on pourra lâcher ces chaines à discretion, & les remonter à leur tension nécessaire avec la plus grande facilité: un homme à chaque moulines suffiroit pour cette opération.

Ce pont arrêté aux deux extrémités de son massif par de fortes clavettes, aura deux chaines composées de poutres, de chaque côté, lesquelles nageant sur la surface de l'eau seront attachées par un bout à la partie du milieu du pont, & de l'autre au parapet par un cabestan, pour prevenir toute variation: ensorte qu'il sera facile de le replier à droite & à gauche dans les cas extraordinaires mentionnés ci-dessus.

Il a été dit que l'arche du milieu s'ouvrira en deux parties pour le passage des vaisseaux. Ces deux trapes se lèveront par le moyen de quatre chaines & de quatre moulinets placés dans quatre guérites sur le milieu du pont: & pour empêcher les deux parties de se separer, il y aura sous cette arche quatre chaines de fer savoir, qu'on peut avec le secours des tourniquets faire descendre jusqu'au fond de la riviere pour le pasſage des vaiſſeaux. Il eſt à propos de faire obſerver que cette arche du milieu eſt abſolument libre, & que le radeau s'y termine des deux cotés.

Jugement.

I. Un pont conſtruit d'après ce modele, conſidéré en lui-même & ſans avoir égard à la force des glaces, auroit ſans doute quelques prérogatives ſur le pont ordinaire. La forme en eſt plus belle, plus réguliere, plus reſſemblante à celle d'un pont de pierre; les dépenſes en ſeroient moins conſidérables, vu que le nombre des barques, & celui des gens employés journellement à la conſervation du pont, ſeroient reduits à la moitié: quand les eaux ſont hautes, le pont ſeroit moins escarpé & plus facile à monter, les vaiſſeaux paſſeroient plus aiſément & tout le pont ſe laiſſeroit ôter & ſéparer avec bien moins de peines, & plus de promptitude. Il ſemble à la vérité qu'il ſeroit d'autant plus pénible de remettre le pont dans ſa premiere ſituation, après qu'il auroit éte ôté; mais cette difficulté s'evanouit, par l'exemple que nous avons vu en 1775 du transport d'un Temple de la Paix conſtruit par l'Académie des Beaux-Arts ſur la Néva & réposant ſur cinq grandes barques liées fortement enſemble, que des batteliers ont fait remonter la riviere de quelques verſtes: à quoi il faut ajouter qu'il ne ſeroit pas néceſſaire chaque année de déranger le pont, comme il paroit par les details ſuivans.

II. Pour ce qui regarde la ſolidité de ce pont pour réſiſter à la violence des glaces, nous croyons pouvoir aſſurer qu'on y a ménagé tous les moyens connus pour

pour produire cet effet, au moins tous ceux qui peuvent être employés à un pont de bois & flottant. Ces moyens ſont:

1.) l'élargiſſement des eſpaces entre chaque paire de barques.
2.) la forte liaiſon des quatre barques apartenantes à chaque moitié du pont.
3.) la forme d'un coin qu'on a donnée à la partie de chaque barque oppoſée à la glace, & le tranchant de fer dont elles ſont armées.
4.) des cordes ou des chaines qui ſont à l'épreuve du frottement & du choc des glaces.

Il eſt probable que dans les années où à la débacle de la riviere les glaces ne ſont ni trop fortes ni trop rapides, comme il arrive quelque fois, ces moyens pourroient ſuffire pour les arrêter, ſans qu'il fût néceſſaire de ſéparer les deux parties du pont. Mais on ne ſauroit affirmer qu'ils puiſſent réſiſter à toute débacle, quelque violente qu'elle ſoit: auſſi les vues de l'Auteur même ne vont elles pas ſi loin.

Le modele eſt fait très proprement & avec beaucoup d'art: il mérité d'être conſervé.

Signé *Simon Kotelnikof.*
à St. Pétersbourg, *W. L. Krafft.*
le 10. Décembre 1778. *A. J. Lexell.*
Pierre Inohodſof.
Nicolas Fuſs.
Michel Gollovin.

Jean Albert Euler, Secrétaire & Académicien.

MÉTÉO-

METÉOROLOGIE

Eté de 1778.

Suivant le nouveau Stile.

1.

Il neigea pour la derniere fois le 19 Avril: il recommença à neiger le 10 Octobre. L'Intervalle entre ces deux termes est de 174 jours.

2. Il géla pour la derniere fois le 7 Mai, Therm. $152^{d.}$. Il recommença à géler le 11 Octobre, Therm. $151^{d.}$. Cet intervalle est de 157 jours.

3. La Néva débacla le 18 Avril au soir par une température de $149^{d.}$. Les glaces du Ladoga parurent le 29 Avril, & la riviere les charia jusqu'au 2 de Mai: elle resta ensuite libre & navigable pendant 189 jours, jusqu'au 7 Novembre, au quel jour les glaces commencerent à reparoître par un froid de $167^{d.}$. Enfin elle fut reprise le 13 Novembre par un froid de $162^{d.}$

4. La plus grande chaleur a été de 107 degrés le 20 Juillet à 2 heures après midi. Barom. 28. 26, c'est à dire $28\frac{26}{100}$ pouces de Paris. Ciel entierement serein, vent d'Est.

5. La chaleur moyenne à midi a été trouvée:
depuis le 1er Mai jusqu'au 1er Novembre 128 degrés
depuis le 1er Juin jusqu'au 1er Octobre 123 ——

La chaleur moyenne au matin & au ſoir:
depuis le 1er Mai jusqu'au 1er Novembre 138 degrés
depuis le 1er Juin jusqu'au 1er Octobre 134 ——

6. La chaleur à midi a été depuis le 1er Mai jusqu'au 1er Novembre, ce qui comprend un intervalle de 184 jours.

7 jours au deſſus de 110 en Juin & Juillet. (*)
25 jours entre 120 & 110 en Juin, Juillet & Août. (**)
88 jours entre 130 & 120 en Mai —— Septembre.
36 jours entre 140 & 130 en Mai, Juillet —— Octobre.
22 jours entre 150 & 140 en Mai, Septembre, Octobre.
6 jours entre 160 & 150 en Octobre.

7. La chaleur au matin & au ſoir a été pendant ce même intervalle de ſix mois:

24 jours au deſſous de 150 en Mai & Octobre.
34 jours entre 140 & 150 en Mai. Septembre & Octobre.
86 jours entre 130 & 140 en Mai —— Septembre.
40 jours entre 120 & 130 en Juin, Juillet, Août. (***)

8.

(*) le 16. 21 Juin & le 19. 20—23 Juillet.

(**) le 8 9. 10. 14. 15 17. 18. 20 Juin, le 1. 5. 14. 15. 17. 18. 24. 26. 28—31 Juillet & le 2. 4 6. 8 21 Août.

(***) le 9. 10. 16. 17 18. 21 Juin, le 1—5. 10—31 Juillet & le 1. 5—8. 16. 21. Août.

8. L'Etat du Barometre depuis le 1 Mai jusqu'au 1 Novembre:

ſa plus grande élévation 28. 47 le 14 Juin au matin. (*)
ſa plus petite élévation 26. 86 le 26 Octobre au matin. (**)
la variation totale - - 1. 61.
le milieu - - - 27. 66.
la hauteur moyenne 27. 92. c. à d. $27\frac{92}{100}$ pouces de Paris.

Le Barometre s'eſt trouvé 99 jours au deſſus de $27\frac{9}{10}$, 67 jours au deſſus de 28, & $38\frac{1}{2}$ jours au deſſus de $28\frac{1}{10}$ pouces de Paris.

9. Les vents forts, toujours pendant ce même intervalle de ſix mois ou 184 jours d'eté ſoufflerent:

2. jours du Nord le 7 Mai, & le 30 Septembre.
8. jours du N-E le 3, 6. Mai, 6. 7. 8 Juil. 24 Août, & le 5. 10. Octobre.
6. jours de l'Eſt le 28. Mai, 12. 13. Juin, & le 25. 26. 27. Août.
3. jours du S-E le 4. Juin, & le 21. 22. Juillet.
8. jours du Sud le 2. 23. Juin, 1 Juil. 4. 12. 27. Sept. & le 6. 23. Octobre.
14. jours du S-Ou. le 20. 21. 30. Mai, 15. 16. 24. 27. Juil. 6. 21. Août, 5. 14. 15. Sept. & le 20. 26. Octobre.
14. jours de l'Oueſt, le 22. Mai, 5. 7. 17. 18. 29. Juin, 26. 28. 31. Juil. 12. 15. 29. Août, 25. Sept. & le 16 Octobre.

(*) Therm. 135, ciel entierement ſerein, vent de l'Eſt.
(**) Therm. 149, ciel couvert, vent fort du S-Ou.

11. jours du N-Ou. le 12. 24. 25. 26. 27. Mai, 30. Juin, 4. Juil. 2. 22. Août, 20. Sept. & le 24. Octobre.

10. Les vents très forts régnerent:

4 jours du N-E le 4. 5. Mai, 5 Juillet, & le 11 Octobre.
1 jour de l'Est le 10 Septembre.
1 jour du S-E le 13 Septembre.
4 jours du Sud le 23 Juil. 11. 28. Sept. & le 25 Oct.
7 jours du S-Ou. le 29 Mai, 3. 6. Juin, 23 Juil. 13 Août, 29 Sept. & le 21 Octobre.
4 jours de l'Ouest le 1. 28 Juin, 25 Juil. & le 14 Août.
2 jours du N-Ou. le 22. 27 Juin.

11. Les autres variations de l'Atmosphere depuis le 1 Mai jusqu'au 1 Novembre sont annotées dans la table suivante:

Atmosphere.	Mai	Juin	Juil.	Août	Sept.	Oct.	Somme
Jours entierem. sereins	10	12	9	6	4	1	42
Jours entierem. converts	5	2	7	5	8	20	47
Brouillards - - -	3	0	0	1	1	1	6
Pluie { médiocre -	9	5	8	7	12	9	50
Pluie { abondante -	6	4	5	10	7	4	36
Neige { médiocre -	0	0	0	0	0	12	12
Neige { abondante -	0	0	0	0	0	2	2
Grèle - - - - -	0	0	0	0	1	0	1
Orages - - - -	2	2	2	2	0	0	8
Aurores boréales - -	0	0	0	1	8	0	9

OU-

OUVRAGES, MACHINES ET INVENTIONS

présentées ou communiquées à l'Académie pendant le cours du dernier semestre de l'année 1778.

Le vendredi 6 Juillet. Le Secrétaire de Conférences a présenté de la part des Messieurs de l'Observatoire royal à Cadix, l'ouvrage intitulé: *Observationes astronomicas hechas en Cadiz en el Observatorio real de la compannia de cavalleros guardias-marinas. Por el capitan de navio graduado D. Vicente Tofinno de S. Miguel &c. y por D. Joseph Varela, Capitan de Fregata de la real armado &c.* 4to 1777.

Et de la part de M. le Conseiller de Cour & Professeur *Karsten* à Halle: *Lehrbegriff der gesammten Mathematic* u. s. w. *zweyte Auflage I. Theil. I, Band.*

Le 9 Juillet. Le Secrétaire a communiqué une lettre de M. *Basile Zouyef* élève de l'Académie étudiant à Strasbourg, qui soumet au Jugement de l'Académie une

Dissertation *De balaenarum aquae projectione per spiracula verticalia.*

Le 13 Août. Le Secrétaire a présenté de la part de l'Académie royale des Sciences de Paris, les deux derniers volumes de l'*Histoire de cette Académie avec les Mémoires de Mathématiques & de Physique présentés & lus en* 1773 & 1774: ensuite *Connoissance des temps pour l'année bissextile* 1780.

Et de la part de la Societé royale des Sciences de Londres: *Transactions philosophiques Vol.* 67. *Partie* 1. & 2. de même *Discourse on the invention and improvements of the reflecting telescope, by Sir John Pringle.*

Le 17 Août. Le Secrétaire a remis une brochure de M. *G. A de Lorthe* de Bourdeaux intitulée: *Pour les incrédules, nouvelles preuves sur la proportion du coté d'un quarré parfait avec sa diagonale.* Cet imprimé qui ne mérite aucune attention a été mis au rebut.

Le 20 Août. S. E. M. le Directeur a remis les derniers cahiers des *Observations sur la Physique par M. l'Abbé Rozier*, que ce savant Auteur a envoyées à l'Académie avec une lettre circulaire imprimée, contenant une invitation aux Académiciens de lui envoyer des mémoires & la maniere de les lui adresser.

Le 24 Août. Le Secrétaire a remis un Projet manuscrit de M. *Le Roy*, Academicien de Paris, pour envoyer dans la partie septentrionale de la Sibérie, des Physi-

Phyſiciens qui y faſſent des obſervations et expériences ſur les Aurores boréales. M. le Prof. *Krafft* a été chargé d'examiner ce projet & d'en faire rapport à l'Académie.

Le 27 Août. Le Secrétaire a lu une lettre adreſſée à Meſſieurs de l'Académie par M. *le Robberg-herr de Vauſenville*, accompagnée d'un programme imprimé concernant un ouvrage qui aura pour titre. *Eſſai phyſico-géométrique contenant*, 1° *la détermination du centre de gravité des ſecteurs de cercle*: 2° *la réſolution géométrique du problême de la quadrature de cercle* &c. Les Académies ont déclaré qu'il eſt inutile de leur envoyer de ces prétendues ſolutions de la quadrature de cercle: l'arrêt a été prononcé & l'écrit de M. *de Vauſenville* rebuté.

Le 3 Septembre. M. le Prof. *Lexell* a préſenté de la part de l'Académie royale des Sciences de Stockholm.

1) *Kongl. Vetenskaps Academiens Handlingar for Ar* 1777. *Vol.* XXXVIII.

2) *Chirurgiska Händelſer, af Olof Acrel.*

3) *Akerbrukets Chemiska Grunder utgifne af Joh. Gottsch. Wallerius.*

Le 10 Septembre. M. le Prof. *Pallas* a remis le Catalogue de la Bibliotheque & du Cabinet d'Hiſtoire naturelle de feu M. *Gronovius* que les héritiers offrent en vente.

Le 17 Septembre. Le Secrétaire a communiqué le Catalogue d'une très belle collection d'objets des trois regnes

regnes de la Nature contenant paſſé 9000 pieces recueillies par feu M. *Pierre Pasquay* Doct. en Méd. & Conſeiller de la Cour d'Anhalt-Deſſau.

—— il a lu un rapport daté de la ville d'Oural & adreſſé à l'Académie par M. *Hildtebrandt*, Chirurgien du Bataillon de Swiäs, qui envoie une collection de ſemences, de pétrifications, & de quelques autres curioſités qu'il a ramaſſées aux environs du Lac ſalé d'Indersk.

Le 21 Septembre. M le Conſeiller d'État actuel *de Stehlin* a lu une lettre de M. *Forſter* le pere & préſenté de ſa part: *Obſervation made during a voyage round the World on phyſical Geography, Natural Hiſtory and Ethic philoſophy.*

Le 24 Septembre. Le Secrétaire a préſenté de la part de M. *de Born* Conſeiller de Cour actuel des mines & monnoyes de L. L. M. I. & R. *Joſeph Müller's K. K. Bergweſens-Directorats-Rath, Nachricht von den in Tyrol entdeckten Turmalinen oder Aſchenziehern an Hr. Ignaz Edeln von Born.*

Le 5 Octobre. Le Sr. *Dahlgren* Suédois & maître Forgeron en cette ville ayant executé en grand l'echelle à feu de nouvelle conſtruction, dont il avoit préſenté le modele à l'Académie au commencement de l'année paſſée, Meſſieurs les Académiciens *Krafft* & *Lexell*, M. l'Adjoint *Fuſs* & le Secrétaire ont été nommés pour exami-

examiner cette échelle chez le susdit forgeron & d'en faire rapport à la huitaine (*).

Le 8 Octobre. M. le Prof. *Pallas* a présenté de la part de M. *de Born*: *Index rerum naturalium Musei Caesarei Vindobonensis Pars 1^ma^ Testacea.*

Le 12 Octobre. Le Secrétaire a présenté de la part de M. le Colonel *Lorgna* de Verone, un imprimé latin: *De casu irreductibili tertii gradus & seriebus infinitis exercitatio analytica.*

Le 13 Octobre. Assemblée publique: voyez en le récit ci-dessus.

Le 22 Octobre. Le Secrétaire a présenté un écrit de M. le Conseiller d'Etat *Müller* à Moscou: *Nachrichten von der Bucharey.* (**).

Le 5 Novembre. M. le Prof. *Güldenstädt* a remis de la part de M. *Hablitz'l* Correspondant de l'Académie à Astracan une Collection d'insectes, diverses semences, des echantillons de cotton & des fleurs du saffran bâtard crû, cultivé à Astracan.

Le

(*) Acta Acad. Sc. Imp. Petrop. pro Anno 1777. P. I. Partie historique pag. 67. & ci-dessus Assemblée publique de 1778. pag 4.

(**) Ces Notices ont été inséré dans le Calendrier historique & géographique pour l'année 1779.

Le 16 Novembre. Le même Académicien, M. *Güldenſtädt* a préſenté *Geographiſche, hiſtoriſche und ſtatiſtiſche Nachrichten von der neuen Gränz-Linie des Ruſſiſchen Reichs zwiſchen dem Terec-Fluſs und dem Aſowiſchen Meer.* (*).

—— M. le Prof. *Krafft* a préſenté de la part de S. E. M. le Prince *Dimitri de Gallitzin*, Envoyé extraordinaire de la Cour Impériale à la Haye & Honoraire de l'Académie *Obſervations ſur l'Electricité naturelle par le moyen d'un Cerf-volant.* (**).

Le 23 Novembre. M. le Prof. *Pallas* a remis un exemplaire complet du *Catalogue de la Bibliotheque & du Cabinet du Prof. Gronovius.*

Le 3 Décembre. Le Secrétaire a préſenté de la part de M. M. *Angelo de Caeſaris* et *Franc. Reggio*: *Ephemerides aſtronomicae anni* 1779 *ad meridianum mediolanenſem ſupputatae.*

—— de la part de M. de *Magellan*, Gentilhomme Portugais, à Londres: *Rélation ou Notice des derniers jours de M.* Jean-Jacques Rouſſeau; *circonſtances de ſa mort, & quels ſont les ouvrages poſthumes qu'on peut attendre de lui: par M.* le Begue du Presle, *Docteur en Médecine &c. avec une addition relative au même ſujet: par*

(*) Elles ſe trouvent de même dans le Calendrier hiſtorique & géographique pour l'année 1779.

(**) Voyez ci-deſſus pag. 76.

par M. Jean-Hyacinthe de Magellan, *Gentil-homme Portugais.*

—— M. *Nordstern*, Horloger au service de l'Académie Impériale des Beaux-Arts, ayant avec la permission de S. E. M. le Directeur, fait exposer dans la sale d'Assemblée un modele d'un Pont de navires de son invention, le Secrétaire a lu l'écrit dans lequel le dit Artiste soumet son modele au jugement de l'Académie. L'Assemblée nomma Messieurs *Kotelnikof*, *Krafft*, *Lexell*, *Inohodsof*, *Fuss* & *Golovin* pour examiner l'ouvrage & en donner leur jugement à une des Séances prochaines. (*)

—— M. le Prof. *Lexell* a lu une lettre de M. l'Abbé *Korvin Kassakovski* qui annonce, que M. *Poczobut* Astronome de S. M. le Roi de Pologne a formé, en rassemblant plusieurs étoiles éparses entre *l'Aigle* & le *Serpentaire*, une nouvelle constellation, qu'il a nommée à la gloire de son Souverain *le Taureau royal de Poniatovsky*: il invite Messieurs les Astronomes & Géographes de Russie d'adopter cette constellation dans leurs Globes, Plani-phères & Cartes céléstes, comme l'ont déja fait ceux de France & d'Angleterre. L'Académie s'y prêta avec le plus grand plaisir & se joignit avec empressement à ces autres Compagnies de Savans, pour donner au Monarque éclairé, qu'elle se glorifie de compter au nombre de ses Associés Honoraires cette foible marque de son hommage & admiration.

(*) Voyez ce jugement. pag. 85.

Le 14 Décembre. Le Secrétaire a préſenté de la part de M. le Conſeiller d'État Baron *d'Aſch* les deſſins de ſept monſtres d'une ſingularité rare que le College de Médecine poſſede dans ſon Cabinet à Moſcou.

Le 21 Décembre. Le Secrétaire a préſenté de la part de M. *Jean Bernoulli* Académicien de Berlin la Ire Partie du IVme Cahier de ſes *Nouvelles littéraires de divers païs.*

—— M. le Prof. *Pallas* a lu une lettre de M. le Prof. *Camper* contenant des additions à ſes obſervations ſur les crânes des Rhinoceros avec diverſes autres remarques & découvertes importantes en Phyſique & Médecine.

Les Obſervations météorologiques de Berlin ont été préſentées tous les mois par le Secrétaire, qui a eu ſoin d'envoyer en échange à Berlin celles qu'il a faites à St. Pétersbourg.

MATHE-

MATHEMATICA.

DE
CVRVIS TRIANGVLARIBVS.

Auctore
L. EVLER.

§. 1.

Curuas triangulares voco, quae tribus arcubus A B, A C et B C intus inflexis constant, qui in angulis A, B et C coeant, praeterea autem nullos alios ramos contineant. Huiusmodi ergo curuae vt sint continuae, siue quapiam aequatione, vel algebraica, vel etiam transcendente, exprimi queant, necesse est, vt in angulis A, B et C habeant cuspides acutissimas, vbi bini arcus coeuntes communi tangente sint praediti. Tales autem curuas innumerabiles exhiberi posse, tam algebraicas, quam transcendentes, iam olim ostendi, cum Problema de eiusmodi curuis, circa datum punctum lucidum describendis, proposuissem, ita vt omnes radii, a curua bis reflexi, iterum in ipsum punctum lucidum reuertantur, quod Problema variis solutionibus in Actis Lipsiensibus pro Annis 1746 et 1748 solutum reperitur. Hic enim tota Tab. I. Fig. 1.

 solutio

ſolutio ad inuentionem huiusmodi curuarum triangularium reducitur, quippe quibus cauſticae radiorum reflexorum formantur.

Tab. I. Fig. 2. §. 2. Praeter eum vſum autem, quem iſtiusmodi curuae triangulares in commemorato problemate catoptrico praeſtant, imprimis conſiderari merentur curuae, quae ex euolutione talis curuae triangularis A B C naſcuntur. Hunc in finem vocemus longitudinem arcus $AB = c$, arcus $AC = b$ et arcus $BC = a$. Iam arcui A B concipiatur filum applicatum, quod extra A prolongetur vsque in F, ita vt ſit $AF = f$, et ſtilus in F inſertus promoveatur, donec arcus A B fuerit euolutus, et filum perueniat in ſitum Bg, eritque $Bg = AF +$ arcu $AB = f + c$; tum motus ſtili continuetur et filum Bg ſucceſſiue applicetur arcui $BC = a$, donec perueniat in H, eritque

$$BC + CH = Bg = f + c, \text{ vnde fit } CH = f + c - a;$$

quo cum fuerit peruentum, filum applicetur arcui C A; vbi notari conuenit, perinde eſſe, ſiue arcus C A maior ſit, ſiue minor arcu C B; ſemper enim filum totum arcum C A occupare debet. Iam motus ſtili ex H continuetur in f, donec filum fA cuſpidem A tangat, tum igitur erit

$$Af = CH + AC = f + c - a + b;$$

Nunc igitur filum motum Af ſucceſſiue arcum A B inuoluet, donec perueniat in G, eritque

$$BG = Af - AB = f - a + b.$$

Iam filum ab arcu B A transferatur in arcum B C et euoluatur, donec perueniat in ſitum Ch, vbi erit

$$Ch = BG + BC = f + b.$$

Denique ſtilus ab h promoueatur inuoluendo arcum C A, hoc-

hocque modo reuertetur in ipſum punctum F, vbi motus eſt inceptus: erit enim $AF = Cb - CA$, ideoque $AF = f$; erat autem vtique $AF = f$.

§. 3. Hinc igitur patet, curuam, ex euolutione curvae triangularis A B C natam, eſſe curuam in ſe redeuntem, et tractu vniformi praeditam, ſcilicet $F g H f G b F$, ſi modo puncta F, H, G extra curuam A B C cadant. Atque hic iſta inſignis proprietas ante omnia ſe offert: quod rectae FAf, HCb et GBg non ſolum vtrinque ad curuam ſint normales, vti ex natura euolutionis manifeſtum eſt, ſed etiam, quod inter ſe ſint aequales; eſt enim

$$FAf = AF + Af = 2f + c - a + b,$$

tum vero

$$ACb = CH + Cb = 2f + c - a + b,$$

ſimili modo

$$GBg = BG + Bg = 2f + c - a + b.$$

Verum haec proprietas multo latius patet. Si enim per quoduis punctum S noſtrae curuae triangularis producatur vtrinque tangens XSx, ea etiam ex natura euolutionis vtrinque ad curuam deſcriptam erit normalis; tum vero erit

$$SX = CS + CH = f + c - a = CS,$$

deinde vero etiam erit

$$Sx = FA + AS = f + AS$$

hinc tota recta

$Xx = 2f + c - a + CS + AS = 2f + c - a + b$, ob $AS + CS = AC = b$, quocirca curua, ex euolutione curuae triangularis A B C nata, hac eximia gaudet proprietate: vt ſi ad eius punctum quodcunque X ducatur normalis, donec curuae iterum occurrat in x, ea etiam in hoc puncto ad curuam ſit normalis, ac praeterea tota hac recta Xx vbique eandem habeat longitudinem $= 2f + c - a + b$, quae proprietas vulgo circulo tam propria eſſe videtur, vt vix in alias lineas curuas competere poſſe videatur.

§. 4. Mirum hic ſine dubio videbitur, quod terna latera figurae triangularis a, b et c non aequaliter in formulas inuentas ingrediantur Ratio autem huius diſparitatis in eo eſt ſita, quod interuallum A F potius quam C H vel B G ſimplici litera f deſignauimus. Quo igitur hanc inaequalitatem euitemus, et vniformitatem in calculum introducamus, vocemus interuallum $AF = k + a$, ita vt ſit $f = k + a$, atque omnes rectae ſupra exhibitae iam ſequenti modo concinne exprimentur:

$$AF = k + a;\quad BG = k + b;\quad CH = k + c$$
$$Af = k + b + c;\ Bg = k + a + c;\ Ch = k + a + b$$

tum vero nunc longitudo omnium rectarum, per curuam deſcriptam normaliter ductarum, erit $= 2k + a + b + c$. Hic autem quantitatem k pro lubitu accipere licet, ita vt ex eadem figura triangulari innumerae curuae iſtius indolis deſcribi poſſint. Quin etiam quantitas k adeo negatiue accipi poterit, dummodo formulae $k + a$; $k + b$ et $k + c$ poſitiuos obtineant valores; ſi enim haec interualla fierent negatiua, curua deſcripta non amplius prodiret circuli-formis, ſed intra curuam A B C caderet, atque etiam tres
Tab. I. Fig. 3. cuſpides g, f, h eſſet habitura, quemadmodum ex natura euolutionis facile colligere licet.

§. 5. Huiusmodi autem curuas, ex euolutione curuarum triangularium natas, quatenus cum circulo tam egregie

gregie conueniunt, breuitatis gratia *Orbiformes* nominemus, hicque ante omnia obferuaffe iuuabit, ex qualibet curua orbiformi problema catoptricum fupra memoratum infinitis modis facillime refolui poffe. Sit enim F G H talis curua orbiformis quaecunque, intra qua punctum lucidum X pro lubitu conftituatur; tum ducta recta quacunque X *x*, ad curuam vtrinque normali, quae ergo conftantem habebit magnitudinem, iungantur rectae L X et L *x*, eaeque bifecentur in punctis O et *o*, vnde ad eas normaliter educantur rectae O Z et *o z*, rectae X *x* occurréntes in punctis Z et z; haecque duo puncta fita erunt in curua quaefita. Radius enim L Z, primo reflexus, fiet Z *z*, qui, denuo reflexus in *z*, in ipfum punctum lucidum L remittetur, quemadmodum ex natura reflexionis haud difficulter demonftrare liceret, nifi hoc argumentum iam vberrime effet pertractatum. Tab. I. Fig. 4.

§. *6*. Ob hunc infignem vfum curuarum triangularium vtique optandum effet, vt methodus certa pateret, cuius ope huiusmodi curuas triangulares, quotquot libuerit, inueftigare liceret, id quod primo intuitu nimis difficile videri poteft. Verum hanc inueftigationem inuertamus, ac primo quaeramus curuas orbiformes, quales hactenus defcripfimus; tum enim certi effe poterimus, earum euolutas huiusmodi fore curuas triangulares quales defideramus, Praeterea vero etiam hoc modo iftud commodum affequemur: vt, quoties curua orbiformis fuerit algebraica, toties quoque curua triangularis non folum fiat algebraica, fed infuper etiam rectificabilis, quandoquidem euolutae omnium curuarum algebraicarum fimul rectificationem admittunt.

§. 7.

Tab. I. Fig. 5. §. 7. Sit igitur $FMfm$ talis curua orbiformis, qualem inuestigare nobis est propositum, in qua sumamus rectam Ff pro axe fixo, qui vtrinque ad curuam sit normalis, cuius longitudinem ponamus $Ff = 2f$. Tum ex puncto quocunque M ad curuam ducatur normalis Mm, quae ergo etiam in m ad curuam debet esse normalis, eiusque longitudo Mm itidem sit $= 2f$. Iam ex punctis M et m ad axem Ff demittantur perpendicula PM et pm, ac pro puncto M vocentur coordinatae $FP = X$ et $PM = Y$; at pro puncto m sit $Fp = x$ et $pm = -y$, quia haec applicata in partem contrariam cadit. His positis talis aequatio inter X et Y desideratur, vt, si loco X scribatur x, valor ipsius Y sponte prodeat $= -y$. Nisi enim hoc fieret, tota curua $FMfm$ non esset continua. Sequenti autem modo hae quatuor quantitates a se inuicem pendent: Cum interuallum PN sit subnormalis respectu puncti M, posito $dY = PdX$, erit haec subnormalis $PN = PY$, hincque normalis $MN = Y\sqrt{1+PP}$. Simili modo pro altero puncto m erit pN subnormalis retro posita; vnde sumto $dy = pdx$ erit $pN = -py$; hinc normalis $mN = -y\sqrt{1+pp}$. Quia igitur triangula PMN et pmN sunt similia, erit $P = p$. Porro quia nouimus esse $Mm = 2f$; ex m agatur axi parallela mS, ipsi MP productae occurrens in S, et similitudo triangulorum MNP et MmS dabit $MS = \frac{2f}{\sqrt{(1+pp)}}$ et $mS = \frac{2fp}{\sqrt{(1+pp)}}$. Cum igitur sit

$$MS = MP + mp = Y - y \quad \text{et} \quad mS = Fp - FP = x - X$$

hinc colligitur

$$Y - y = \frac{2f}{\sqrt{(1+pp)}} \quad \text{et} \quad x - X = \frac{2fp}{\sqrt{(1+pp)}},$$

prae-

praeterea vero, vti iam notauimus, debet esse

$$\frac{dY}{dX} = P = p \text{ et } \frac{dy}{dx} = p.$$

§. 8. Cum igitur inuenerimus differentias coordinatarum $Y - y$ et $x - X$, statuamus earum summas $X + x = 2Q$ et $Y + y = 2R$, hincque singulas coordinatas adipiscemur ita expressas:

$$X = Q - \frac{fp}{\sqrt{(1+pp)}}; \quad Y = R + \frac{f}{\sqrt{(1+pp)}};$$

$$x = Q + \frac{fp}{\sqrt{(1+pp)}}; \quad y = R - \frac{f}{\sqrt{(1+pp)}}.$$

Hinc igitur differentiando erit

$$dX = dQ - \frac{f\,dp}{(1+pp)^{\frac{3}{2}}};$$

$$dY = dR - \frac{fp\,dp}{(1+pp)^{\frac{3}{2}}};$$

$$dx = dQ + \frac{f\,dp}{(1+pp)^{\frac{3}{2}}};$$

$$dy = dR + \frac{fp\,dp}{(1+pp)^{\frac{3}{2}}}.$$

Cum igitur esse debeat $dY = p\,dX$ et $dy = p\,dx$, fiet

$$dR - \frac{fp\,dp}{(1+pp)^{\frac{3}{2}}} = p\,dQ - \frac{fp\,dp}{(1+pp)^{\frac{3}{2}}} \text{ et}$$

$$dR + \frac{fp\,dp}{(1+pp)^{\frac{3}{2}}} = p\,dQ + \frac{fp\,dp}{(1+pp)^{\frac{3}{2}}}.$$

Ex vtraque harum aequationum sequitur fore $dR = p\,dQ$, ideoque $R = \int p\,dQ$.

§. 9. Cum igitur omnibus conditionibus satisfecerimus, quantitas Q arbitrio nostro permittitur, eiusque ergo loco functio quaecunque ipsius p accipi poterit, quae autem ita debet esse comparata, vt formula $p\,d\,Q$ integrationem admittat, siquidem curuas algebraicas desideremus. Quoniam igitur pro coordinatis x et y inuenimus:

$$x = Q + \frac{fp}{\surd(1+pp)} \text{ et } y = R - \frac{f}{\surd(1+pp)}$$

existente $R = \int p\,d\,Q$; pro alteris vero coordinatis X et Y fit

$$X = Q - \frac{fp}{\surd(1+pp)} \text{ et } Y = R + \frac{f}{\surd(1+pp)},$$

manifestum est, has ex illis nasci, si modo formulae radicalis $\surd(1+pp)$ signum immutetur. Quare cum haec formula per suam naturam sit ambigua, priores formulae, pro x et y inuentae, posteriores pro X et Y iam sponte inuoluunt, ita vt eadem aequatio rationalis tam pro x et y quam pro X et Y necessario sit proditura. Ad hoc autem necesse est, vt neque Q neque R eandem formulam $\surd(1+pp)$ inuoluant, quia alioquin etiam signum harum litterarum mutari oporteret. Hinc igitur ista regula statui potest: vt pro Q functio rationalis ipsius p accipi debeat.

§. 10. Vt autem curuas algebraicas obtineamus, quia esse debet $R = \int p\,d\,Q = p\,Q - \int Q\,d\,p$, statuamus $\int Q\,d\,p = S$, denotante S functionem quamcunque rationalem ipsius p, eritque $Q = \frac{dS}{dp}$, hincque porro $R = \frac{p\,dS}{dp} - S$. Nunc igitur pro curuis orbiformibus sequentes determinationes ambarum coordinatarum x et y exhibere possumus:

$$x = \frac{dS}{dp} + \frac{fp}{\surd(1+pp)}; \quad y = \frac{p\,dS}{dp} - S - \frac{f}{\surd(1+pp)};$$

vbi pro S functionem quamcunque rationalem ipsius p, vel saltem talem, accipere possumus, quae, dum formula $\surd(1+pp)$ est ambigua, eundem valorem retineat.

§. 11. Quia natura orbis, qualem conſideramus, poſtulat, vt curua ſit in ſe rediens, et nusquam in infinitum porrigatur, functio S ita comparata eſſe debet, vt neque abſciſſa x neque applicata y vnquam fieri poſſit infinita, quem in finem hanc functionem S tali fractioni:

$$\frac{\alpha + \beta p + \gamma p p + \delta p^3 + etc.}{A + B p + C p p + D p^3 + etc.}$$

aequari opportet, cuius denominator nullum habeat factorem ſimplicem realem; ſi enim factorem talem haberet, puta $p - n$, tum, ſumto $p = n$, valor ipſius S fieret infinitus. Deinde ſumma poteſtas ipſius p in numeratore haud debet eſſe maior quam in denominatore; aliter enim, caſu $p = \infty$, valor ipſius S iterum in infinitum excreſceret. Praeterea vero etiam exponentes fracti ipſius p admitti quidem poſſent, ita tamen, vt nullum membrum ambiguum obtineat valorem, quia alioquin eidem valori ipſius p plures tam abſciſſae quam applicatae conuenire poſſent; hoc enim caſu curua non poſt vnam reuolutionem, ſed demum poſt duas pluresue in ſe rediret; tum autem eius euoluta non amplius foret curua triangularis, ſed vel pentagona, vel heptagona, vel enneagona vel etc. id quod inſtituto noſtro aduerſatur.

§. 12. Ex hac conſtructione generali, in qua continentur omnes curuae orbiformes, et quidem ſimplices, quae poſt vnam reuolutionem in ſe redeunt, facile erit formulas elicere pro deſcriptione curuarum triangularium; cum enim euolutae harum curuarum orbiformium certe ſint figurae triangulares, tantum opus eſt, vt in euolutas iſtarum curuarum inquiramus. Quia autem omnes illae curuae, pro quouis valore litterae f, ex euolutione eiusdem curuae triangula-

 ris

ris nafcuntur, littera f non in determinationem euolutae ingreditur; vnde in formulis noftris, pro x et y inuentis, partes, hanc litteram f inuoluentes, tuto omittere licebit; ficque pro hac inueftigatione habebimus tantum

$$x = \frac{dS}{dp} \text{ et } y = \frac{p\,dS}{dp} - S,$$

quam ob rem naturam euolutae, ex his valoribus oriundae, inueftigaffe fufficiet.

Tab. I. Fig. 6. §. 13. Sit igitur $FMfm$ talis curua, in qua fit abfciffa $FP = x = \frac{dS}{dp}$, applicata $PM = y = \frac{p\,dS}{dp} - S$, et ducta normali Mm erit fubnormalis

$$PN = py = \frac{pp\,dS}{dp} - pS$$

vnde fit recta

$$FN = \frac{dS}{dp}(1 + pp) - pS.$$

Ponamus nunc angulum $FNM = \Phi$, erit tang. $\Phi = \frac{1}{p}$, ideoque $p = \cot.\Phi = \frac{\cos.\Phi}{\sin.\Phi}$, vnde fit

$$\sin.\Phi = \frac{1}{\surd(1+pp)} \text{ et } \cos.\Phi = \frac{p}{\surd(1+pp)},$$

tum vero etiam $d\Phi = -\frac{dp}{1+pp}$. Quod fi iam breuitatis gratia ponamus $FN = v$, notum eft, centrum circuli, curuam in M ofculantis, fore in puncto U, ita vt fit

$$NU = \frac{dv \sin.\Phi}{d\Phi};$$

Cum autem, fumto elemento dp conftante, fit

$$dv = \frac{ddS}{dp}(1+pp) + p\,dS - S\,dp \text{ et}$$

$$\frac{\sin.\Phi}{d\Phi} = -\frac{\surd(1+pp)}{dp}$$

erit recta

$$NU = -\frac{ddS}{dp^2}(1+pp)^{\frac{3}{2}} - \frac{p\,dS}{dp}\surd(1+pp) + S\surd(1+pp)$$

pro qua formula breuitatis ergo fcribamus r, ita vt fit $NU = r$.

§. 14.

§. 14. Inuento puncto U, quod erit in euoluta, quam quaerimus, inde ad axem ducamus perpendiculum UT, ac pro euoluta vocemus abſciſſam $FT = t$ et applicatam $TU = u$; erit autem:

$$NT = NU \operatorname{cof.} \Phi = \frac{pr}{\sqrt{(1+pp)}} \text{ et}$$

$$TU = NU \operatorname{fin.} \Phi = \frac{r}{\sqrt{(1+pp)}}$$

vnde, loco r valorem aſſumtum ſubſtituendo, conſequemur abſciſſam

$$t = FN + NT = \frac{dS}{dp} - \frac{p\,ddS}{dp^2}(1+pp),$$

tum vero applicatam

$$u = S - \frac{p\,dS}{dp} - \frac{ddS}{dp^2}(1+pp);$$

vnde colligimus

$$t - pu = \frac{dS}{dp}(1+pp) - pS.$$

Ope igitur harum formularum, quaecunque functio idonea ipſius p pro S accipiatur, tam abſciſſam $FT = t$ quam applicatam $TU = u$ aſſignare poterimus, quibus curua triangularis determinatur. Valores autem idoneos, pro S accipiendos, ſupra indicauimus.

§. 15. Quo hanc inueſtigationem exemplo illuſtremus, ſumamus

$$S = \frac{ap}{1+pp}, \text{ eritque}$$

$$\frac{dS}{dp} = \frac{a(1-pp)}{(1+pp)^2} \text{ et } \frac{ddS}{dp^2} = \frac{2ap^3 - 6ap}{(1+pp)^3}$$

vnde colligimus

$$t = \frac{a + 5app - 2ap^4}{(1+pp)^2} \quad \text{et} \quad u = \frac{6ap}{(1+pp)^2}.$$

Hinc primo patet, ſiue p ſumatur poſitiue ſiue negatiue, abſciſſam t eandem manere, applicatam vero u hoc caſu in partem contrariam cadere, vnde axis noſter F T huius curuae erit diameter. Deinde, ſumto $p = 0$ fiet $t = a$ et $u = 0$; at ſi capiatur p infinite paruum, fiet

$$t = a + 3app \text{ et } u = 6ap.$$

Porro, ſumto $p = \frac{1}{2}$, erit $t = \frac{34}{25}a$ et $u = \frac{48}{25}a$; ſin autem $p = 1$ erit $t = a$ et $u = \frac{3}{2}a$. Sit denique $p = \infty$, eritque $t = -2a$ et $u = 0$. Hinc patet, curuam huiusmodi figuram eſſe habituram, qualem in figura ei dedimus, ternas
Tab. I. Fig. 7. cuſpides habentem, B, C, D, exiſtente $FD = 2a$ et $FA = a$. Pro alteris cuſpidibus B et C quaeratur locus, vbi applicata u fit maxima, et cum ſit

$$d.\frac{p}{(1+pp)^2} = \frac{dp(1-3pp)}{(1+pp)^3}$$

hoc eueniet, vbi $3pp = 1$, ſiue $p = \frac{1}{\sqrt{3}}$; tum autem fiet abſciſſa $t = \frac{11}{8}a$ et $u = \frac{9\sqrt{3}}{8}a$. Ergo ducta chorda B C, axem ſecante in E, erit $FE = \frac{11}{8}a$ et $EB = EC = \frac{9\sqrt{3}}{8}a$. Quod ſi iam quoque ducantur chordae B D et C D, ob $DE = \frac{27}{8}a$ erit $BD^2 = \frac{972}{64}aa$, vnde fit $BD = CD = \frac{9\sqrt{3}}{8}a$; ex quo patet, chordas omnes B D, C D et B C eſſe inter ſe aequales. Referet ergo haec curua triangularis triangulum aequilaterum.

Tab. I. Fig. 6. §. 16. Accuratius autem in ſymptomata noſtrae curuae triangularis inquiramus, et quoniam pro coordinatis $FT = t$ et $TU = u$ has inuenimus formulas:

$$t = \frac{dS}{dp} - \frac{p\,ddS}{dp^2}(1+pp) \text{ et}$$

$$u = S - \frac{p\,dS}{dp} - \frac{ddS}{dp^2}(1+pp)$$

primum obſeruo, rectam N U eſſe tangentem curuae in puncto U, quae cum ad axem ſit inclinata angulo $TNU = \Phi$, cuius cotangens eſt p, neceſſe eſt vt ſit $\frac{du}{dt} = \text{tag.}\,\Phi = \frac{1}{p}$, vnde fit

$dt =$

$dt = p\,du$. Eſt vero per formulas

$$dt = -\frac{3\,p\,p\,d\,dS}{dp} - \frac{p(1+pp)\,d^3S}{dp^2} \text{ et}$$

$$p\,du = -\frac{3\,p\,p\,d\,dS}{dp} - \frac{p(1+pp)\,d^3S}{dp^2}.$$

ideoque reuera $dt = p\,du$.

§. 17. Quia igitur eſt $dt = p\,du$, iisdem caſibus, quibus fit $\frac{dt}{dp} = 0$, etiam fiet $\frac{du}{dp} = 0$; vnde patet, vbicunque abſciſſa t fuerit vel maxima vel minima, ibidem quoque fore applicatam maximam vel minimam, quae proprietas vtique in cuſpides conuenit. Ex quo colligimus, vbicunque ambae coordinatae p et q ſimul fiunt vel maximae vel minimae, ibi quoque exiſtere cuſpides noſtrae curuae; quare cum curua habeat tres cuſpides, in tribus quoque locis tam t quam u maximum fieri neceſſe eſt.

§. 18. Imprimis autem hic notatu dignum occurrit, noſtram curuam triangularem eſſe rectificabilem, quippe cuius arcus aequalis eſt radio oſculi M U curuae orbiformis, vnde eſt nata. Vidimus autem eſſe Tab. I. Fig. 6.

$$NU = r = -\frac{ddS}{dp^2}(1+pp)^{\frac{3}{2}} - \frac{p\,dS}{dp}\sqrt{1+pp}$$
$$+ S\sqrt{1+pp}; \text{ at } MN = y\sqrt{1+pp}$$
$$= \frac{p\,dS\sqrt{1+pp}}{dp} - S\sqrt{1+pp},$$

vnde fit radius oſculi

$$MU = -\frac{ddS}{dp^2}(1+pp)^{\frac{3}{2}},$$

qui ergo longitudinem noſtrae curuae triangularis exprimit; id quod etiam patet ex proprietate ſupra obſeruata, quod ſit $dt = p\,du$, vnde fit elementum curuae

$\sqrt{dt^2}$

$$\sqrt{dt^2 + du^2} = du\sqrt{1+pp} =$$

$$-\frac{3p\,dd\,S}{dp}\sqrt{1+pp} - \frac{d^3 S}{dp^3}(1+pp)^{\frac{3}{2}}$$

cuius integrale manifesto est

$$-\frac{dd\,S}{dp^2}(1+pp)^{\frac{3}{2}}.$$

§. 19. Quoniam hic tantum curuas triangulares inuestigare instituimus, parum solliciti, vtrum sint rectificabiles nec ne, dummodo fuerint algebraicae: hac conditione omissa simpliciores formulas pro coordinatis t et u exhibere, atque adeo, sine vllo respectu ad curuas orbiformes habito, directe ex ipsa indole harum curuarum elicere poterimus. Cum enim esse debeat $dt = p\,du$, erit $t = \int p\,du = pu - \int u\,dp$. Iam statuamus $\int u\,dp = \Pi$, ita vt sit $u = \frac{d\Pi}{dp}$, vnde fit $t = \frac{p\,d\Pi}{dp} - \Pi$; vbi pro Π eiusmodi functiones ipsius p accipi debent, quae nullo casu fiant infinitae, quicunque valores literae t tribuantur, cuiusmodi functiones iam supra descripsimus; tum vero etiam hae functiones Π nulla signa radicalia, quae ambiguitatem inuoluant, inuoluere debent. Imprimis autem necesse est, vt ambae coordinatae t et u tribus casibus fiant maximae vel minimae, id quod eueniet, si, ob $u = \frac{d\Pi}{dp}$, haec aequatio: $\frac{dd\Pi}{dp^2} = 0$, tres habeat radices reales, neque vero plures.

§. 20. Sumamus exempli gratia $\Pi = \frac{a+bp}{1+fp+gpp}$, quae nullo casu fit infinita, si modo fuerit $ff < 4g$, tum autem erit

$$\frac{d\Pi}{dp} = \frac{b - af - 2agp - bgpp}{(1+fp+gpp)^2} = u$$

hincque

$t = -$

$$t = \frac{-a - 2afp - 3agp^2 - 2bgp^3}{(1 + fp + gpp)^2}.$$

Vt iam ternas cuſpides definiamus, conſideremus aequationem $\frac{du}{dp} = 0$, quod quo facilius fieri poſſit ponamus

$$u = \frac{A + Bp + Cpp}{(1 + fp + gpp)^2},$$

ita vt ſit $A = b - af$; $B = -2ag$; $C = -bg$; tunc vero hinc reperitur ſequens aequatio:

$$B - 2Af + (2C - Bf - 4Ag)p - 3Bgpp - 2Cgp^3 = 0$$

cuius tres radices nobis ternas cuſpides monſtrabunt.

§. 21. Ponamus iam huius aequationis radices eſſe: I°. $p = \alpha$, II°. $p = \beta$ ac III°. $p = \gamma$, ſiue aequemus formulam inuentum huic producto:

$$2Cg(\alpha - p)(\beta - p)(\gamma - p)$$

quod euolutum praebet

$$2Cg\alpha\beta\gamma - 2Cg(\alpha\gamma + \alpha\gamma + \beta\gamma)p + 2Cg(\alpha + \beta + \gamma)pp - 2Cgp^3$$

quae forma, inuentae aequata, ſequentes tres producit determinationes:

I°. $B - 2Af = 2Cg\alpha\beta\gamma$;

II°. $2C - Bf - 4Ag = -2Cg(\alpha\beta + \alpha\gamma + \beta\gamma)$;

III°. $-3Bg; = 2Cg(\alpha + \beta + \gamma)$;

ex quarum tertia fit $B = -\frac{2}{3}C(\alpha + \beta + \gamma)$; ex prima vero

$$A = -\frac{1}{3f}C(\alpha + \beta + \gamma) - \frac{1}{f}Cg\alpha\beta\gamma,$$

qui valores in ſecunda ſubſtituti praebent

$$2C + \frac{(2ff + 4g)}{3f}C(\alpha + \beta + \gamma) + \frac{4g}{f}Cg\alpha\beta\gamma = -2Cg(\alpha\beta + \alpha\gamma + \beta\gamma)$$

quae aequatio, per $\frac{3f}{2C}$ multiplicata, abit in hanc:

$$3f + (ff + 2g)(\alpha + \beta + \gamma) + 6gg\alpha\beta\gamma = -3fg(\alpha\beta + \alpha\gamma + \beta\gamma)$$

haecque aequationes omnes continent determinationes, quibus noſtro propoſito ſatisfit.

§. 22. Antequam hanc determinationem in genere vlterius prosequamur, euoluamus casum specialem; quo

$\gamma = 0$ et $\beta = -\alpha$, vnde fit $\alpha\beta\gamma = 0$;

$\alpha\beta + \alpha\gamma + \beta\gamma = -\alpha^2$ et $\alpha + \beta + \gamma = 0$,

eritque postrema aequatio $3f = 3\alpha\alpha fg$, siue $f = \alpha\alpha fg$; vnde sequitur vel $f = 0$, vel $g = \frac{1}{\alpha\alpha}$. Consideremus primo casum $f = 0$, fietque $A = -\frac{0}{0}$, vnde littera A non determinatur, vel potius fit $A = 0$, porroque $B = 0$, vnde colligitur $b = 0$, siue etiam b non determinatur; tum vero erit $a = 0$. Quia autem aequationem postremam per f multiplicauimus, hic valor $f = 0$ lubricus est habendus. Sumamus igitur alterum valorem $g = \frac{1}{\alpha\alpha}$, et quia debet esse $ff < 4g$, sequitur esse debere $f < \frac{2}{\alpha}$; hinc vero fiet $A = 0$ et $B = 0$, ideoque $b - af = 0$, et $-2ag = 0$, vnde fit $a = 0$.

§. 23. Sufficiat autem haec in genere indicasse, et consideremus potius casum magis determinatum, sumendo

$$\Pi = \frac{bp}{\alpha\alpha + pp}, \text{ vnde fit } \frac{d\Pi}{dp} = u = \frac{b(\alpha\alpha - pp)}{(\alpha\alpha + pp)^2} \text{ et}$$

$$t = \frac{2bp^3}{(\alpha\alpha + pp)^2}.$$

Quod si iam pro cuspidibus faciamus $\frac{du}{dp} = 0$, nascitur haec aequatio: $p^3 - 3\alpha\alpha p = 0$, cuius ternae radices sunt

I°. $p = 0$; II°. $p = +\alpha\sqrt{3}$; III°. $p = -\alpha\sqrt{3}$;

pro quarum prima habebimus $t = 0$ et $u = \frac{b}{\alpha\alpha}$;

pro secunda:

$$t = \frac{3b\sqrt{3}}{8\alpha} \text{ et } u = -\frac{b}{8\alpha\alpha};$$

pro tertia vero:

$$t = -\frac{3b\sqrt{3}}{8\alpha} \text{ et } u = -\frac{b}{8\alpha\alpha},$$

vnde

vnde curua habebit formam in figura 8 delineatam, vbi eſt Tab. I. Fig. 8.

$$FB = \frac{b}{\alpha\alpha},\ FG = FH = \frac{3b\sqrt{3}}{8\alpha} \text{ ac}$$

$$GC = HD = \frac{+b}{8\alpha\alpha},$$

ſicque ternae cuſpides erunt in punctis B, C, D, ac ductis chordis erit

$$BC = BD = \frac{3b\sqrt{3}(1+\alpha\alpha)}{8\alpha\alpha} \text{ et } CD = \frac{3b\sqrt{3}}{4\alpha},$$

ita vt haec figura triangularis triangulum iſoſceles exhibeat.

§. 24. Euoluamus ſimili modo caſum $\Pi = \frac{a}{\alpha\alpha+pp}$, vnde fit

$$\frac{d\Pi}{dp} = u = -\frac{2ap}{(\alpha\alpha+pp)^2}, \text{ hincque } t = -\frac{a(\alpha\alpha+3pp)}{(\alpha\alpha+pp)^2}.$$

Nunc pro cuſpidibus fiat

$$\frac{du}{dp} = -\frac{2a(\alpha\alpha-3pp)}{(\alpha\alpha+pp)^3} = 0,$$

quae aequatio tantum duas praebet radices

$$p = +\frac{\alpha}{\sqrt{3}} \text{ et } p = -\frac{\alpha}{\sqrt{3}};$$

tertia autem radix eſt $p = \infty$. Hinc igitur pro prima cuſpide, quae fit vbi $p = \infty$, fit $t = 0$ et $u = 0$, ſicque haec cuſpis B cadit in ipſum punctum F. Pro ſecunda cuſpide ſumatur Fig. 9.

$$p = \frac{\alpha}{\sqrt{3}}, \text{ eritque } t = -\frac{9a}{8\alpha\alpha} \text{ et } u = -\frac{3a\sqrt{3}}{8\alpha^3}.$$

Pro tertia cuſpide ſit

$$p = -\frac{\alpha}{\sqrt{3}}, \text{ erit } t = -\frac{9a}{8\alpha\alpha} \text{ et } u = +\frac{3a\sqrt{3}}{8\alpha^3}.$$

Sumto igitur $FG = \frac{9a}{8\alpha\alpha}$ binae reliquae cuſpides erunt in C et D, ita vt ſit $GC = GD = \frac{3a\sqrt{3}}{8\alpha^3}$, ideoque earum diſtantia

$$CD = \frac{3a\sqrt{3}}{4\alpha^3}, \text{ vnde colligitur}$$

$$BC = BD = \frac{3a\sqrt{9\alpha\alpha+3}}{8\alpha^3}$$

sicque erit

$$CD : BC = 2 : \sqrt{3\alpha\alpha + 1}$$

ex quo patet, casu $\alpha = 1$ triangulum fore aequilaterum.

§. 25. Quod si ergo ambo casus praecedentes combinentur, ita vt statuatur $\Pi = \frac{a + bp}{\alpha\alpha + pp}$, tum tam abscissa t quam applicata u aequabitur summae ambarum praecedentium formularum, ita vt sit

$$t = \frac{2bp^3 - a(\alpha\alpha + 3pp)}{(\alpha\alpha + pp)^2} \text{ et } u = \frac{b(\alpha\alpha - pp) - 2ap}{(\alpha\alpha + pp)^2};$$

vnde si pro cuspidibus inueniendis ponamus $\frac{du}{dp} = 0$, habebimus hanc aequationem:

$$2bp^3 - 6b\alpha\alpha p - 2a\alpha\alpha + 6app = 0, \text{ siue } bp^3 + 3app - 3b\alpha\alpha p - a\alpha\alpha = 0,$$

cuius ergo ternas radices quaeri oportet, quod cum per regulam *Cardani* difficulter praestetur, trisectione anguli vtamur, quem in finem fingamus esse $p = r + s\ \text{cos.}\ \Phi$, eritque

$$pp = rr + \tfrac{1}{2}ss + 2rs\ \text{cos.}\ \Phi + \tfrac{1}{2}ss\ \text{cos.}\ 2\Phi \text{ et}$$
$$p^3 = r^3 + \tfrac{3}{2}rss + (3rrs + \tfrac{3}{4}s^3)\ \text{cos.}\ \Phi + \tfrac{3}{2}rss\ \text{cos.}\ 2\Phi + \tfrac{1}{4}s^3\ \text{cos.}\ 3\Phi$$

quibus valoribus substitutis aequatio nostra transmutabitur in sequentem:

$$\begin{aligned}
&+ br^3 + 3brrs\ \text{cos.}\ \Phi + \tfrac{3}{2}brss\ \text{cos.}\ 2\Phi + \tfrac{1}{4}bs^3\ \text{cos.}\ 3\Phi \\
&+ \tfrac{3}{2}brss + \tfrac{3}{4}bs^3\ \text{cos.}\ \Phi + \tfrac{3}{2}ass\ \text{cos.}\ 2\Phi \\
&+ 3arr + 6ars\ \text{cos.}\ \Phi \\
&+ \tfrac{3}{2}ass - 3b\alpha\alpha s\ \text{cos.}\ \Phi \\
&- 3b\alpha\alpha r \\
&- a\alpha\alpha.
\end{aligned}$$

Nunc definiantur litterae r et s ita, vt membra intermedia,

dia, tam cos. Φ quam cos. $2\,\Phi$ inuoluentia, seorsim euanescant, vnde hae duae aequationes oriuntur:

$$\text{I}^a.\ 3\,b\,r\,r\,s + \tfrac{3}{4}\,b\,s^3 + 6\,a\,r\,s - 3\,b\,\alpha\,\alpha\,s = 0;$$

$$\text{II}^a.\ \tfrac{3}{2}\,b\,r\,s\,s + \tfrac{3}{2}\,a\,s\,s = 0;$$

ex quarum posteriore fit $r = -\frac{a}{b}$, qui valor in priore substitutus dat

$$\frac{3\,a\,a\,s}{b} + \tfrac{3}{4}\,b\,s^3 - \frac{6\,a\,a\,s}{b} - 3\,b\,\alpha\,\alpha\,s = 0, \text{ vnde fit}$$

$$s\,s = \frac{4\,(b\,b\,\alpha\,\alpha + a\,a)}{b\,b}, \text{ ideoque } s = \frac{2\sqrt{(b\,b\,\alpha\,\alpha + a\,a)}}{b}.$$

Hi iam valores in nostra aequatione substituantur, fietque

$$\frac{2\,a^3}{b\,b} + 2\,a\,\alpha\,\alpha + \tfrac{1}{4}\,b\,s^3 \operatorname{cos.} 3\,\Phi = 0,$$

vnde fit

$$\operatorname{cos.} 3\,\Phi = -\frac{8\,a\,(a\,a + b\,b\,\alpha\,\alpha)}{b^3\,s^3} = -\frac{a}{\sqrt{(a\,a + b\,b\,\alpha\,\alpha)}}.$$

Quaeratur igitur angulus ω, cuius Cosinus sit

$$= -\frac{a}{\sqrt{(a\,a + b\,b\,\alpha\,\alpha)}},$$

qui Cosinus cum etiam conueniat angulis $-\omega$; $2\,\pi - \omega$; item $2\,\pi + \omega$, habebimus sequentes valores:

$$\text{I}^\circ.\ 3\,\Phi = \omega,\ \text{II}^\circ.\ 3\,\Phi = -\omega,\ \text{III}^\circ.\ 3\,\Phi = 2\,\pi - \omega,$$
$$\text{IV. et } 3\,\Phi = 2\,\pi + \omega;$$

vnde omisso secundo valore, quippe qui a primo non discrepat, tres valores pro angulo Φ erunt

$$\text{I}^\circ.\ \Phi = \tfrac{1}{3}\,\omega,\ \text{II}^\circ.\ \Phi = 120^\circ - \tfrac{1}{3}\,\omega \text{ et III}^\circ.\ \Phi = 120^\circ + \tfrac{1}{3}\,\omega,$$

quibus inuentis terni valores litterae p erunt

$$\text{I}^{us}.\ p = -\frac{a}{b} + \frac{2\sqrt{(b\,b\,\alpha\,\alpha + a\,a)}}{b} \operatorname{cos.} \tfrac{1}{3}\,\omega,$$

$$\text{II}^{us}.\ p = -\frac{a}{b} + \frac{2\sqrt{(b\,b\,\alpha\,\alpha + a\,a)}}{b} \operatorname{cos.} (120^\circ - \tfrac{1}{3}\,\omega),$$

$$\text{III}^{us}.\ p = -\frac{a}{b} + \frac{2\sqrt{(b\,b\,\alpha\,\alpha + a\,a)}}{b} \operatorname{cos.} (120^\circ + \tfrac{1}{3}\,\omega).$$

§. 26. His casibus euolutis reuertamur ad quaestionem nostram generalem, qua eiusmodi curuae triangulares quaeruntur, in quibus pro cuspidibus littera p ternos datos obtineat valores, scilicet: $p = \alpha$, $p = \beta$ et $p = \gamma$. Nunc autem primo ponamus breuitatis gratia $\alpha + \beta + \gamma = \zeta$; $\alpha\beta + \alpha\gamma + \beta\gamma = \eta$ et $\alpha\beta\gamma = \theta$, et tres aequationes adimplendae erunt

$$\text{I}^\circ.\ B - 2Af = 2Cg\theta.$$
$$\text{II}^\circ.\ 2C - Bf - 4Ag = -2Cg\eta.$$
$$\text{III}^\circ.\ -3Bg = 2Cg\zeta.$$

Cum igitur esset

$$A = b = af,\ B = -2ag \text{ et } C = -bg,$$

hinc ternae nostrae aequationes erunt

$$\text{I}^a.\ -ag - bf + aff = -bgg\theta$$
$$\text{II}^a.\ -3b + 3af = bg\eta$$
$$\text{III}^a.\ 3a = -b\zeta;$$

ex quibus statim ternos valores pro fractione $\frac{a}{b}$ nanciscimur, qui sunt:

$$\text{I}^\circ.\ \frac{a}{b} = \frac{f - gg\theta}{ff - g};\ \text{II}^\circ.\ \frac{a}{b} = \frac{g\eta + 3}{3f} \text{ et III}^\circ.\ \frac{a}{b} = -\frac{\zeta}{3}.$$

§. 27. Quod si iam horum valorum secundus et tertius inter se aequentur, prodibit $f = -\frac{g\eta + 3}{\zeta}$. Aequetur nunc primus valor etiam tertio, et erit

$$3f - 3gg\theta = -ff\zeta + g\zeta,$$

vbi, si loco f valor modo inuentus substituatur, prodibit

$$3g\eta - 3gg\zeta\theta = g\zeta\zeta - gg\eta\eta$$

quae aequatio per g diuisa dat

$$3\eta - 3g\zeta\theta = \zeta\zeta - g\eta\eta, \text{ vnde concluditur}$$

$g =$

$g = \frac{3\eta - \zeta\zeta}{3\zeta\theta - \eta\eta}$, hincque porro $f = \frac{\zeta\eta - 9\theta}{3\zeta\theta - \eta\eta}$.

§. 28. His valoribus inuentis denominator supra assumtus $1 + fp + gpp$ hanc induet formam:

$$\frac{3\zeta\theta - \eta\eta + (\zeta\eta - 9\theta)p + (3\eta - \zeta\zeta)pp}{3\zeta\theta - \eta\eta},$$

in quo esse debet $ff < 4g$. Est vero

$$ff = \frac{\zeta\zeta\eta\eta - 18\zeta\eta\theta + 81\theta\theta}{(3\zeta\theta - \eta\eta)^2} \text{ et}$$

$$4g = \frac{12\eta - 4\zeta\zeta}{3\zeta\theta - \eta\eta} = \frac{36\zeta\eta\theta - 12\zeta^3\theta - 12\eta^3 + 4\zeta\zeta\eta\eta}{(3\zeta\theta - \eta\eta)^2}$$

Necesse igitur est vt sit

$$\zeta\zeta\eta\eta - 18\zeta\eta\theta + 81\theta\theta < 36\zeta\eta\theta - 12\zeta^3\theta - 12\eta^3 + 4\zeta\zeta\eta\eta$$

quod sine dubio sponte euenit. Pro numeratore sumamus

$$a = -\frac{\zeta c}{3\zeta\theta - \eta\eta} \text{ et } b = \frac{3c}{3\zeta\theta - \eta\eta},$$

ita vt fractio pro Π assumenda sit

$$\Pi = \frac{-\zeta c + 3cp}{3\zeta\theta - \eta\eta + (\zeta\eta - 9\theta)p + (3\eta - \zeta\zeta)pp}.$$

Cum autem semper sit $\zeta\zeta > 3\eta$ et $\eta\eta > 3\zeta\theta$, concinnius hic valor ita exprimetur:

$$\Pi = \frac{\zeta c - 3cp}{\eta\eta - 3\zeta\theta + (9\theta - \zeta\eta)p + (\zeta\zeta - 3\eta)pp}.$$

§. 29. Quia positio axis penitus arbitrio nostro relinquitur, eum semper ita assumere licet, vt vnam cuspidem tangat, tum vero ibi fiet $p = \infty$, vnde solutio nostra non minus late patebit, etiamsi ponamus $\alpha = \infty$; tum vero erit

$$\zeta = \alpha,\ \eta = \alpha(\beta + \gamma) \text{ et } \theta = \alpha\beta\gamma;$$

hincque propterea

$$\eta\eta - 3\zeta\theta = \alpha\alpha(\beta\beta - \beta\gamma + \gamma\gamma);$$
$$9\theta - \zeta\eta = 9\alpha\beta\gamma - \alpha\alpha(\beta + \gamma) = -\alpha\alpha(\beta + \gamma) \text{ et}$$
$$(\zeta\zeta - 3\eta) = \alpha\alpha - 3\alpha(\beta + \gamma) = \alpha\alpha.$$

Suma-

Sumatur igitur $c = \alpha a$, vt numerator etiam per $\alpha\alpha$ fiat diuiſibilis, eritque formula noſtra

$$\Pi = \frac{a}{\beta\beta - \beta\gamma + \gamma\gamma - (\beta+\gamma)p + pp},$$

cuius denominator certe nullum habet factorem realem, niſi ſit $\beta = \gamma$, quem caſum autem ipſa rei natura reſpuit. Hoc autem valore pro Π aſſumto conſequimur ſtatim

$$u = \frac{d\Pi}{dp} = \frac{a(\beta+\gamma) - 2ap}{(\beta\beta - \beta\gamma + \gamma\gamma - (\beta+\gamma)p + pp)^2} \text{ et}$$

$$t = pu - \Pi = \frac{-a(\beta\beta - \beta\gamma - \gamma\gamma) + 2a(\beta+\gamma)p - 3app}{(\beta\beta - \beta\gamma + \gamma\gamma - (\beta+\gamma)p + pp)^2}.$$

§. 30. Vt iam hinc cuſpides definiamus, pro prima cuſpide ponamus $p = \infty$, eritque tam $t = 0$, quam $u = 0$. Pro ſecunda cuſpide ſumamus $p = \beta$, eritque abſciſſa

$$t = -\frac{a(2\beta - \gamma)}{(\beta - \gamma)^3} \text{ et } u = -\frac{a}{(\beta - \gamma)^3}.$$

Pro tertia vero cuſpide fiat $p = \gamma$, et erit

$$t = -\frac{a(\beta - 2\gamma)}{(\beta - \gamma)^3} \text{ et } u = +\frac{a}{(\beta - \gamma)^3}.$$

Tab. II. Fig. 10. Hinc in figura erit $GB = \frac{a}{(\beta - \gamma)^3}$,

$$AH = \frac{a(\beta - 2\gamma)}{(\beta - \gamma)^3} \text{ et } HC = \frac{a}{(\beta - \gamma)^3}.$$

§. 31. Ductis iam chordis AB, AC et BC erit

$$AB = \frac{a}{(\beta - \gamma)^3}\sqrt{(2\beta - \gamma)^2 + 1} \text{ et}$$

$$AC = \frac{a}{(\beta - \gamma)^3}\sqrt{(\beta - 2\gamma)^2 + 1}.$$

Pro tertia chorda BC cum ſit

$$BC^2 = (BG + HC)^2 + GH^2 = \frac{4aa + aa(\beta+\gamma)^2}{(\beta - \gamma)^6}$$

hinc erit

$$BC = \frac{a}{(\beta - \gamma)^3}\sqrt{4 + (\beta + \gamma)^2},$$

ſicque tres iſtae chordae AB, AC et BC eandem inter

ſe

se tenebunt rationem, quam habent hae tres formulae radicales:

$$\sqrt{(2\beta-\gamma)^2+1};\ \sqrt{(\beta-2\gamma)^2+1};\ \sqrt{4+(\beta+\gamma)^2}.$$

Pro positione autem harum chordarum notetur esse tangens ang. $BAG = \frac{1}{2\beta-\gamma}$ et tang. ang. $CAH = \frac{1}{\beta-2\gamma}$; vnde colligitur tangens anguli BAC

$$= \frac{3\beta-2\gamma}{2\beta\beta-5\beta\gamma+2\gamma\gamma-1}.$$

Pro tertia chorda erit tang. anguli $AOC =$

$$\text{tang. } BOG = \frac{BG+CH}{GH} = \frac{2}{\beta+\gamma}.$$

Cum igitur sit $ABC = GOB - GAB$ erit

$$\text{tang. } ABC = \frac{3\beta+\gamma}{(\beta+\gamma)(2\beta-\gamma)}.$$ Denique, ob anguli COG tang. $= -$ tang. ang. $BOG = -\frac{2}{\beta+\gamma}$; quia est ang. $ACB = COG - CAO$, erit tang. $ACB = \frac{2\gamma-3\beta}{(\beta-\gamma)(\beta-2\gamma)-2}.$

§. 32. Statuamus exempli gratia $\beta = 2$ et $\gamma = 1$ eritque $AG = 3a$, et $AH = 0$, tum vero $GB = a$ et $HC = a$, vnde curua figuram habebit, qualis fig. 11. repraesentatur, in qua ergo si capiatur punctum quodcunque u, cuius coordinatae sunt AT et TU, erit Tab. II. Fig. 11.

$$t = \frac{3a-6ap+3app}{(3-3p+pp)^2} \text{ et } u = \frac{3a-2ap}{(3-3p+pp)}.$$

Hic in ramo AUC id punctum notatu est dignum, quod a recta AC maxime distat; hoc igitur manifesto ibi erit, vbi eius tangens ad axem est normalis, ideoque hoc loco erit $p = 0$, vnde fit $AT = \frac{1}{3}a$, quae est distantia maxima quaesita US; tum vero erit $TU = u = \frac{1}{3}a$. Quia porro tang. angul. $GAB = \frac{1}{3}$, in arcu AB id punctum a chorda AB maxime erit remotum, cuius tangens chordae AB est parallela; pro eo ergo reperitur $p = 3$, vnde de fit $AT = t = \frac{4}{3}a$ et $TU = u = -\frac{1}{3}a$. Ex hoc exemplo autem luculenter patet, quemadmodum omnes casus euolui conueniat; neque vero difficile erit, hinc eiusmodi curuas triangulares inuenire, quae dato triangulo ABC sint inscriptibiles, quandoquidem ex ratione laterum trianguli innotescit ratio harum formularum:

$$\sqrt{(2\beta-\gamma)^2+1};\ \sqrt{(\beta-2\gamma)^2+1};\ \sqrt{4+(\beta+\gamma)^2}.$$

§. 33. Sint terna latera AB, AC et BC inter se vt numeri A, B, C, ac ponatur

$$\sqrt{(2\beta-\gamma)^2+1} = nA,\ \sqrt{(\beta-2\gamma)^2+1} = nB \text{ et}$$
$$\sqrt{4+(\beta+\gamma)^2} = nC;$$

vnde sumtis quadratis fit

$$(2\beta-\gamma)^2 = nnAA-1;\ (\beta-2\gamma)^2 = nnBB-1 \text{ et}$$
$$(\beta+\gamma)^2 = nnCC-4,$$

vnde fit

$$1^\circ.\ 2\beta-\gamma = \sqrt{nnAA-1};\quad 2^\circ.\ \beta-2\gamma = \sqrt{nnBB-1} \text{ et}$$
$$\beta+\gamma = \sqrt{nnCC-4},$$

quarum prima dempta secunda praebet

$$\sqrt{nnAA-1}-\sqrt{nnBB-1} = \sqrt{nnCC-4},$$

ex qua aequatione quantitatem n definire oportet, qua inuenta reperietur

$$3\beta = \sqrt{nnAA-1}+\sqrt{nnCC-4} \text{ et}$$
$$3\gamma = \sqrt{nnCC-4}-\sqrt{nnBB-1};$$

quibus inuentis curua triangularis satisfaciens per formulas superiores facile determinatur; ex illa autem aequatione elicitur

$$nn = \frac{4(2AA + 2BB - CC)}{2AABB + 2AACC + 2BBCC - A^4 - B^4 - C^4}.$$

Vnde ſi trianguli, cuius latera ſunt A, B et C, area vocetur Δ, hic denominator erit $= 16\Delta\Delta$, ita vt ſit

$$nn = \frac{2AA + 2BB - CC}{4\Delta\Delta}.$$

Hoc autem valore inuento erit

$$\text{I. } \sqrt{nnAA - 1} = \frac{3AA + BB - CC}{4\Delta};$$

$$\text{II. } \sqrt{nnBB - 1} = \frac{3BB + AA - CC}{4\Delta} \text{ et}$$

$$\text{III. } \sqrt{nnCC - 4} = \frac{2AA - 2BB}{4\Delta};$$

ex his vero denique elicitur

$$3b = \frac{5AA - BB - CC}{4\Delta} \text{ et } 3\gamma = \frac{AA - 5BB + CC}{4\Delta},$$

ita vt iam omnia ſint determinata, quae ad ſolutionem huius problematis ſpectant. Propoſito ſcilicet quocunque triangulo rectilineo, ſemper curua triangularis deſcribi poteſt, cuius cuſpides in eius angulos incidant, et latera trianguli ſimul ſint chordae arcuum, quibus figura triangularis conſtat.

§. 34. Ecce igitur, Problematis, cui tota haec inueſtigatio erat deſtinata, concinnam ſolutionem ſubiungamus.

Problema.

Intra datum triangulum A B C curuam triangularem continuam et algebraicam inſcribere, cuius ſingulae cuſpides in ipſos angulos trianguli A, B et C incidant. Tab. II. Fig. 12.

Solu-

Solutio.

1°. Vocentur latera trianguli dati

$$BC = a,\ AC = c \text{ et } AB = b,$$

ſitque area huius trianguli $= \Delta$, ita vt ſit

$$16\Delta\Delta = 2aabb + 2aacc + 2bbcc - a^4 - b^4 - c^4,$$

ſiue

$$16\Delta\Delta = (a+b+c)(a+b-c)(a+c-b)(b+c-a);$$

tum ſingula latera trianguli biſecentur in punctis a, b et c et rectae Aa, Bb, Cc, quae ſe mutuo in centro grauitatis trianguli O interſecabunt, erunt tangentes curuae triangularis in ſuis cuſpidibus A, B et C. Iam, ſumta recta Aa pro axe, ponatur anguli BOa cotangens $= \beta$ et anguli COa cotangens $= -\gamma$, atque ex formulis ante inuentis, ſcribendo loco litterarum A, B et C has minuſculas b, c et a, colligitur

$$\beta = \frac{5bb - aa - cc}{12\Delta} \text{ et } \gamma = \frac{aa + bb - 5cc}{12\Delta},$$

ita vt ſit

$$\beta + \gamma = \frac{bb - cc}{2\Delta}.$$

II°. Nunc capiatur

$$\Pi = \frac{k}{\beta\beta - \beta\gamma + \gamma\gamma - (\beta+\gamma)p + pp},$$

vnde fiet

$$u = \frac{k(\beta+\gamma) - 2kp}{(\beta\beta - \beta\gamma + \gamma\gamma - (\beta+\gamma)p + pp)^2};$$

tum vero

$$t = pu - \Pi = \frac{-k(\beta\beta - \beta\gamma + \gamma\gamma) + k(\beta+\gamma)p - kpp}{(\beta\beta - \beta\gamma + \gamma\gamma) - (\beta+\gamma)p + pp)^2},$$

vbi t et u ſunt coordinatae pro curua triangulari quaeſita. Sumto enim eius puncto quocunque U, indeque demiſſo in in axem Aa perpendiculo UT, erit $AT = t$ et $TU = u$. Tantum igitur superest, vt quantitas k ita determinetur, vt curua triangularis tota intra triangulum ABC cadat, simulque eius cuspides in angulos ipsos A, B et C incidant; sponte autem prima cuspis in punctum A incidit, quia sumto $p = \infty$ fit tam $t = 0$ quam $u = 0$.

III°. Pro secunda igitur cuspide, quae in punctum B cadere debet, assumamus $p = \beta$, quo facto fiet

$t = \frac{-k(\beta-\gamma)(2\beta-\gamma)}{(\beta-\gamma)^4} = \frac{k(2\beta-\gamma)}{(\beta-\gamma)^3}$ et

$u = \frac{-k}{(\beta-\gamma)^3}$. Necesse igitur est vt fiat

$tt + uu = bb$, vnde fit

$\frac{kk(2\beta-\gamma)^2 - kk}{(\beta-\gamma)^6} = bb$, ideoque $k = \frac{b(\beta-\gamma)^3}{\sqrt{((2\beta-\gamma)^2+1)}}$.

IV°. Est vero

$$\beta - \gamma = \frac{2(bb+cc) - aa}{6\Delta} \text{ et } 2\beta - \gamma = \frac{5bb + cc - aa}{4\Delta},$$

hinc igitur erit

$$(2\beta - \gamma)^2 + 1 = \frac{2b^4 + 2bbcc - aabb}{4\Delta\Delta},$$

hinc

$$\sqrt{(2\beta - \gamma)^2 + 1} = \frac{b\sqrt{(2bb + 2cc - aa)}}{2\Delta},$$

quibus valoribus substitutis reperitur

$$k = \frac{(2bb + 2cc - aa)^{\frac{5}{2}}}{108\Delta\Delta},$$

qua quantitate cognita adepti sumus aequationem algebraicam pro curua triangulari, inscribenda triangulo ABC, quam desideramus.

Corollarium.

Ex tali autem curua triangulari facillime innumerabiles curuae orbiformes formari possunt. Positis enim coordinatis curuae orbiformis x et y, sumi poterit

$$x = u + \frac{ep}{\sqrt{(1+pp)}} \text{ et } y = t - \frac{e}{\sqrt{(1+pp)}},$$

quae ergo etiam erit algebraica; neque vero illa curua triangularis huius erit euoluta, sed potius cum omnibus his curuis orbiformibus communem habebit euolutam, quae itidem erit curua triangularis, simulque rectificabilis.

DE

DE MENSURA ANGULORUM SOLIDORUM.

Auctore

L. EULER.

§. 1.

Quemadmodum anguli plani menſurantur per arcus circulares eos ſubtendentes, ſi ſcilicet vertex anguli in centro circuli collocatur: ita naturae rei conſentaneum videtur, angulos ſolidos per portiones ſuperficiei ſphaericae metiri, quae eos quaſi ſubtendant, ſi vertex anguli in centro ſphaerae collocatur. Ita ſi angulus ſolidus ex tribus angulis, qui ſint a, b, c, fuerit formatus, et circa verticem ſphaera deſcribatur, cuius radius vnitate exprimatur, menſura huius anguli ſolidi rite ſtatuetur areae trianguli ſphaerici aequalis, cuius latera ſint illis angulis a, b et c aequalia; quandoquidem haec latera ſunt menſurae iſtorum angulorum planorum. Eodem modo ſi angulus ſolidus ex quatuor vel pluribus angulis planis fuerit formatus, eius menſura erit area quadrilateri ſphaerici, vel polygoni plurium laterum, cuius ſcilicet ſingula latera aequentur angulis planis, quibus angulus ſolidus componitur. Hac igitur ratione dimenſio angulorum ſolidorum reducitur ad inueſtigationem areae trianguli ſphaerici, vel polygoni plurium late-

laterum, cuius latera fuerint data. Cum igitur area cuiusque trianguli sphaerici facillime ex eius angulis cognoscatur, quemadmodum iam dudum ab acutissimo Geometra *Alberto Girardo* est demonstratum, hanc ipsam demonstrationem, quoniam non inuulgus satis nota videtur, hic apponam.

Lemma.

Tab. II. Fig. 13. §. 2. *Area portionis sphaericae, inter duos meridianos, angulo α inuicem inclinatos, contenta, se habet ad superficiem totius sphaerae, vt angulus α ad $360°$.* Sint A C B et A D B duo semicirculi maximi in superficie sphaerica, se mutuo in polis oppositis A et B secantes, et inuicem inclinati angulo C A D vel C B D $= \alpha$, et euidens est, aream huius sectoris sphaerici A C B D A toties contineri in superficie sphaerae tota, quoties angulus α continetur in 360 gradibus.

§. 3. Quod si ergo radius sphaerae ponatur $= r$, quia superficies totius sphaerae est $= 4\pi r r$, denotante π peripheriam circuli, cuius diameter $= 1$, erit area nostri sectoris sphaerici $= 4 \pi r r . \frac{\alpha}{360°}$, si quidem angulus α in gradibus exprimatur; at si α detur in partibus radii, qui semper vnitate exprimatur, ob $360° = 2\pi$ erit area sectoris sphaerici $= 2 \alpha r r$; vnde si radius sphaerae pariter vnitati aequalis statuatur, ista area erit $= 2 \alpha$. Hoc igitur modo area istius sectoris per simplicem angulum repraesentari poterit, dum tota superficies est $= 4\pi$.

Theo-

Theorema
Alberti Girardi.

§. 4. *Area trianguli ſphaerici ſemper aequalis eſt angulo, quo ſumma omnium trium angulorum trianguli ſphaerici excedit duos angulos rectos.*

Demonſtratio.

Sit A B C triangulum ſphaericum propoſitum, cuius area quaeritur, eiusque anguli denotentur literis α, β, γ. Iam primo latera A B et A C in ſuperficie ſphaerica producantur, donec ſibi mutuo iterum occurrant in polo a, ipſi angulo A oppoſito, et quia hi arcus A B a et A C a tanquam duo meridiani ſpectari poſſunt, a ſe inuicem angulo α diſtantes, erit area iſtius ſectoris A C a B $= 2\,\alpha$. Deinde eodem modo bina latera B A et B C continuentur vsque in b, quod punctum itidem erit polus, ipſi B oppoſitus, huiusque ſectoris B A b C area erit $= 2\,\beta$ Denique producantur etiam latera C A et C B vsque in polum ipſi C oppoſitum in c, eritque iſtius ſectoris C B c A area $= 2\,\gamma$. Hinc igitur ſi area trianguli A B C quaeſita vocetur $= S$, innoteſcent areae ſequentium triangulorum: Tab. II. Fig. 14.

I°. $a\,\mathrm{B\,C} = 2\,\alpha - S$
II°. $b\,\mathrm{A\,C} = 2\,\beta - S$
III°. $c\,\mathrm{A\,B} = 2\,\gamma - S.$

§. 4. Quia nunc puncta a, b, c in ſuperficie ſphaerae punctis A, B et C e diametro ſunt oppoſita, inter ſe etiam easdem tenebunt diſtantias, etiamſi in figura longe aliter videatur. Hinc ductis arcubus $a\,b$, $b\,c$, ca, erit

$ab = AB$, $ac = AC$ et $bc = BC$; vnde et huius trianguli abc, in regione ſphaerae poſteriore ſiti, area quoque erit $= S$; ita vt iam tota ſuperficies ſphaerae contineat 1°. triangula $ABC = S$ et $abc = S$; 2°. triangula $aBC = 2\alpha - S$, $bAC = 2\beta - S$ et $cAB = 2\gamma - S$. Praeterea vero figura continet triangula abC, acB et bcA, quorum poſteriorum areae ex ſuperioribus innoteſcunt; namque pro triangulo abC primo eſt latus $ab = AB$, latus $aC = Ac$ et $bC = Bc$; vnde manifeſto hoc triangulum $abC = ABc = 2\gamma - S$. Eodem modo intelligitur fore triangulum $acB = ACb = 2\beta - S$; ac denique $bcA = BCa = 2\alpha - S$.

§. 5. Quare cum tota ſphaerae ſuperficies hic diſſecta ſit in octo triangula, quorum ſingulorum areas hic exhibuimus, earum ſumma aequalis eſſe debet toti ſuperficiei ſphaerae $= 4\pi$; ex qua aequalitate area quaeſita S definiri poterit. Singula igitur haec triangula cum ſuis areis conſpectui exponamus:

I. $ABC = S$	III. $aBC = 2\alpha - S$	VI. $Abc = 2\alpha - S$
II. $abc = S$	IV. $bAC = 2\beta - S$	VII. $Bac = 2\beta - S$
	V. $cAB = 2\gamma - S$	VIII. $Cab = 2\gamma - S$

$$\text{Summa} = 2S + 2(\alpha + \beta + \gamma) - 3S + 2(\alpha + \beta + \gamma) - 3S$$

vnde omnium octo triangulorum ſumma colligitur $= 4(\alpha + \beta + \gamma) - 4S$, quae ergo aequalis eſſe debet 4π, vnde per quatuor diuidendo oritur $\alpha + \beta + \gamma - S = \pi$, ideoque $S = \alpha + \beta + \gamma - \pi$, vbi $\alpha + \beta + \gamma$ eſt ſumma omnium angulorum trianguli propoſiti, et π eſt menſura duorum rectorum, ſiue 180°, ſicque area trianguli ſphaeri-

ci

ci propoſiti reperitur, ſi a ſumma omnium angulorum $\alpha + \beta + \gamma$ duo recti ſeu $180°$. ſubtrahantur, prorſus vti Theorema declarat.

§. 6. Totum ergo negotium pro menſura angulorum ſolidorum huc reducitur: vt ex datis ternis lateribus trianguli ſphaerici eius area definiatur; quamobrem ſequens Problema reſoluendum ſuſcipiamus.

Problema generale.

Datis in triangulo ſphaerico ternis lateribus $AB = c$, $AC = b$ *et* $BC = a$, *inuestigare aream huius trianguli ſphaerici.* Tab. II. Fig. 15.

Solutio.

§. 7. Denotent literae A, B, C angulos huius trianguli, ponaturque eius area quam quaerimus $= S$, ac modo vidimus fore $S = A + B + C - 180°$. Hinc ergo erit $\text{ſin.}\, S = -\,\text{ſin.}\,(A + B + C)$ et $\text{coſ.}\, S = -\,\text{coſ.}\,(A + B + C)$, hincque $\text{tang.}\, S = +\,\text{tang.}\,(A + B + C)$; ſicque tantum opus eſt, vt loco angulorum A, B, C latera a, b, c in calculum introducantur. At vero per praecepta trigonometriae ſphaericae anguli ex datis lateribus ita definiuntur, vt ſit:

$$\text{coſ.}\, A = \frac{\text{coſ.}\, a - \text{coſ.}\, b\ \text{coſ.}\, c}{\text{ſin.}\, b\ \text{ſin.}\, c}; \quad \text{coſ.}\, B = \frac{\text{coſ.}\, b - \text{coſ.}\, a\ \text{coſ.}\, c}{\text{ſin.}\, a\ \text{ſin.}\, c};$$

$$\text{coſ.}\, C = \frac{\text{coſ.}\, c - \text{coſ.}\, a\ \text{coſ.}\, b}{\text{ſin.}\, a\ \text{ſin.}\, b};$$

vnde porro deducuntur ſinus eorundem angulorum

$$\text{ſin.}\, A = \frac{\sqrt{(1 - \text{coſ.}\, a^2 - \text{coſ.}\, b^2 - \text{coſ.}\, c^2 + 2\, \text{coſ.}\, a\ \text{coſ.}\, b\ \text{coſ.}\, c)}}{\text{ſin.}\, b\ \text{ſin.}\, c};$$

$$\text{ſin.}\, B = \frac{\sqrt{(1 - \text{coſ.}\, a^2 - \text{coſ.}\, b^2 - \text{coſ.}\, c^2 + 2\, \text{coſ.}\, a\ \text{coſ.}\, b\ \text{coſ.}\, c)}}{\text{ſin.}\, a\ \text{ſin.}\, c};$$

 ſin. C

$$\text{ſin. } C = \frac{\sqrt{(1 - \text{coſ. } a^2 - \text{coſ. } b^2 - \text{coſ. } c^2 + 2\,\text{coſ. } a\,\text{coſ. } b\,\text{coſ. } c)}}{\text{ſin. } a\,\text{ſin. } b};$$

vbi loco radicalis ponamus

$$\sqrt{(1 - \text{coſ. } a^2 - \text{coſ. } b^2 - \text{coſ. } c^2 + 2\,\text{coſ. } a\,\text{coſ. } b\,\text{coſ. } c)} = k$$

et ad calculum contrahendum pro numeratoribus ſtatuamus

$$\text{coſ. } a = \alpha,\ \text{coſ. } b = \beta \text{ et coſ. } c = \gamma,$$

vt ſit

$$kk = 1 - \alpha\alpha - \beta\beta - \gamma\gamma + 2\,\alpha\beta\gamma.$$

Hoc facto erit

$$\text{coſ. } A = \frac{\alpha - \beta\gamma}{\text{ſin. } b\,\text{ſin. } c};\ \text{coſ. } B = \frac{\beta - \alpha\gamma}{\text{ſin. } a\,\text{ſin. } c};\ \text{coſ. } C = \frac{\gamma - \alpha\beta}{\text{ſin. } a\,\text{ſin. } b};$$

$$\text{ſin. } A = \frac{k}{\text{ſin. } b\,\text{ſin. } c};\ \text{ſin. } B = \frac{k}{\text{ſin. } a\,\text{ſin. } c};\ \text{ſin. } C = \frac{k}{\text{ſin. } a\,\text{ſin. } b}.$$

§. 8. Coniungamus nunc primo angulos A et B ac reperiemus

$$\text{ſin. } (A+B) = \text{ſin. } A\,\text{coſ. } B + \text{coſ. } A\,\text{ſin. } B = \frac{k(1-\gamma)(\alpha+\beta)}{\text{ſin. } a\,\text{ſin. } b\,\text{ſin. } c^2};$$

$$\text{coſ. } (A+B) = \text{coſ. } A\,\text{coſ. } B - \text{ſin. } A\,\text{ſin. } B = \frac{(\alpha-\beta\gamma)(\beta-\alpha\gamma) - kk}{\text{ſin. } a\,\text{ſin. } b\,\text{ſin. } c^2}.$$

Quod ſi nunc tertium angulum C coniungamus, erit

$$\text{ſin. } (A+B+C) = \text{ſin. } A\,\text{coſ. } B\,\text{coſ. } C + \text{ſin. } B\,\text{coſ. } A\,\text{coſ. } C + \text{ſin. } C\,\text{coſ. } A\,\text{coſ. } B - \text{ſin. } A\,\text{ſin. } B\,\text{ſin. } C;$$

$$\text{coſ. } (A+B+C) = \text{coſ. } A\,\text{coſ. } B\,\text{coſ. } C - \text{coſ. } A\,\text{ſin. } B\,\text{ſin. } C - \text{coſ. } B\,\text{ſin. } A\,\text{ſin. } C - \text{coſ. } C\,\text{ſin. } A\,\text{ſin. } B.$$

Tantum igitur ſupereſt, vt in his formulis loco literarum maiuscularum A, B, C, valores modo aſſignati ſubſtituantur.

Prima Inueſtigatio,
pro ſin. S.

§. 9. Cum ſit ſin. S $= -$ ſin. (A + B + C), erit

$$\text{ſin. } S = \text{ſin. } A\,\text{ſin. } B\,\text{ſin. } C - \text{ſin. } A\,\text{coſ. } B\,\text{coſ. } C - \text{ſin. } B\,\text{coſ. } A\,\text{coſ. } C - \text{ſin. } C\,\text{coſ. } A\,\text{coſ. } B,$$

quae

quae expressio cum constet quatuor membris, singula seorsim euoluamus. Erit igitur:

I. $\sin. A \sin. B \sin. C = \frac{k^3}{\sin. a^2 \sin. b^2 \sin. c^2} = \frac{k(1-\alpha\alpha-\beta\beta-\gamma\gamma+2\alpha\beta\gamma)}{\sin. a^2 \sin. b^2 \sin. c^2}$;

II. $\sin. A \cos. B \cos. C = \frac{k(\beta-\alpha\gamma)(\gamma-\alpha\beta)}{\sin. a^2 \sin. b^2 \sin. c^2} = \frac{k(\beta\gamma-\alpha\beta\beta-\alpha\gamma\gamma+\alpha\alpha\beta\gamma)}{\sin. a^2 \sin. b^2 \sin. c^2}$;

III. $\sin. B \cos. A \cos. C = \frac{k(\alpha-\beta\gamma)(\gamma-\alpha\beta)}{\sin. a^2 \sin. b^2 \sin. c^2} = \frac{k(\alpha\gamma-\beta\alpha\alpha-\beta\gamma\gamma+\beta\beta\alpha\gamma)}{\sin. a^2 \sin. b^2 \sin. c^2}$;

IV. $\sin. C \cos. A \cos. B = \frac{k(\alpha-\beta\gamma)(\beta-\alpha\gamma)}{\sin. a^2 \sin. b^2 \sin. c^2} = \frac{k(\alpha\beta-\gamma\alpha\alpha-\gamma\beta\beta+\gamma\gamma\alpha\beta)}{\sin. a^2 \sin. b^2 \sin. c^2}$.

Quia ergo vbique idem habetur denominator

$$\sin. a^2 \sin. b^2 \sin. c^2 = (1-\alpha\alpha)(1-\beta\beta)(1-\gamma\gamma),$$

tria membra posteriora, in vnam summam collecta, dabunt

$$\frac{k(\alpha\beta+\alpha\gamma+\beta\gamma-\alpha\beta\beta-\alpha\gamma\gamma-\beta\gamma\gamma-\alpha\alpha\beta-\alpha\alpha\gamma-\beta\beta\gamma+\alpha\beta\gamma(\alpha+\beta+\gamma))}{(1-\alpha\alpha)(1-\beta\beta)(1-\gamma\gamma)}$$

§. 10. Ad has formulas tractabiliores reddendas ponamus breuitatis gratia:

$$\alpha+\beta+\gamma=p;\ \alpha\beta+\alpha\gamma+\beta\gamma=q \text{ et } \alpha\beta\gamma=r,$$

hincque erit

$$\alpha\alpha+\beta\beta+\gamma\gamma=pp-2q,$$

vnde fit

$$kk=1-pp+2q+2r.$$

Deinde cum sit

$$pq=\alpha\alpha\beta+\alpha\alpha\gamma+\beta\beta\alpha+\beta\beta\gamma+\gamma\gamma\alpha+\gamma\gamma\beta+3\alpha\beta\gamma,$$

erit

$$\alpha\alpha(\beta+\gamma)+\beta\beta(\alpha+\gamma)+\gamma\gamma(\alpha+\beta)=pq-3r,$$

quibus valoribus substitutis terna posteriora membra iunctim praebent $\frac{k(q-pq+3r+pr)}{(1-\alpha\alpha)(1-\beta\beta)(1-\gamma\gamma)}$, quae summa, a primo membro $= \frac{k(1-pp+2q+2r)}{(1-\alpha\alpha)(1-\beta\beta)(1-\gamma\gamma)}$ subtracta, relinquit id quod quaerimus, scilicet:

$$\sin. S = \frac{k(1+q-r-pp+pq-pr)}{(1-\alpha\alpha)(1-\beta\beta)(1-\gamma\gamma)};$$

 vbi

vbi obseruasse iuuabit, quia, posito $\alpha = 1$, denominator euanescit, eodem casu quoque numeratorem euanescere debere, quod idem quoque euenire debet casibus $\beta = 1$ et $\gamma = 1$, ita vt numerator necessario habeat factores $1-\alpha$; $1-\beta$; $1-\gamma$, quorum productum cum sit $1-p+q-r$, per hoc simul numerator erit diuisibilis, et diuisione facta quotus reperitur $= 1+p$; denominator vero, per eundem diuisorem diuisus, fit

$$(1+\alpha)(1+\beta)(1+\gamma) = 1+p+q+r,$$

sicque resultat ista formula:

$$\text{sin. } S = \frac{k(1+p)}{1+p+q+r},$$

siue valoribus restitutis

$$\text{sin. } S = \frac{(1+\alpha+\beta+\gamma)\sqrt{(1-\alpha\alpha-\beta\beta-\gamma\gamma+2\alpha\beta\gamma)}}{(1+\alpha)(1+\beta)(1+\gamma)},$$

vbi denotat α, cos. a; β, cos. b; γ, cos. c. Hancque formulam operae pretium erit aliquot exemplis illustrare.

§. 11. *Exemplum primum.* Sint latera b et c quadrantes, ita vt sit $\beta = 0$ et $\gamma = 0$, eritque sin. $S = \sqrt{(1-\alpha\alpha)}$, ideoque sin. $S =$ sin. a, consequenter ipsa area $S = a$. Quando autem ambo latera A B et A C sunt quadrantes et latus B C $= a$, tum ambo anguli B et C erunt recti, et ob cos. A $= \alpha =$ cos. a, erit angulus A $= a$, hincque summa omnium angulorum $= 180° + a$, ideoque area quaesita S $= a$.

§. 12. *Exemplum secundum.* Sit triangulum sphaericum A B C ad A rectangulum, et cum ex sphaericis sit cos. B C $=$ cos. A B cos. A C, erit cos. $a =$ cos. b cos. c, ideoque $\alpha = \beta\gamma$; quo valore substituto prodibit:

sin. S

$$\text{ſin. } S = \frac{(1+\beta+\gamma+\beta\gamma)\sqrt{(1-\beta\beta-\gamma\gamma+\beta\beta\gamma\gamma)}}{(1+\beta)(1+\gamma)(1+\beta\gamma)} = \frac{\sqrt{(1-\beta\beta)(1-\gamma\gamma)}}{1+\beta\gamma}.$$

Cum igitur ſit $\sqrt{(1-\beta\beta)} = \text{ſin. } b$, et $\sqrt{(1-\gamma\gamma)} = \text{ſin. } c$, erit pro area trianguli rectanguli

$$\text{ſin. } S = \frac{\text{ſin. } b \text{ ſin. } c}{1+\text{coſ. } b \text{ coſ. } c} = \frac{\text{ſin. } b \text{ ſin. } c}{1+\text{coſ. } a}.$$

§. 13. *Exemplum tertium.* Si triangulum fuerit aequilaterum, ſeu $\alpha = \beta = \gamma$, eius area ita exprimetur vt ſit $\text{ſin. } S = \frac{(1+3\alpha)\sqrt{(1-3\alpha^2+2\alpha^3)}}{(1+\alpha)^3}$, vbi formula radicalis factores habet $(1-\alpha)^2(1+2\alpha)$, vnde ergo fiet

$$\text{ſin. } S = \frac{(1+3\alpha)(1-\alpha)\sqrt{(1+2\alpha)}}{1+\alpha^3}.$$

Hinc ſi terna latera fuerint quadrantes, ideoque $\alpha = 0$, erit $\text{ſin. } S = 1$, ideoque $S = \frac{\pi}{2}$.

§. 14. *Exemplum quartum.* Sint omnia latera trianguli, a, b, c quam minima, quo caſu triangulum ſphaericum abit in triangulum planum, et cum ſit

$$\alpha = \text{coſ. } a = 1 - \tfrac{1}{2} a a + \tfrac{1}{24} a^4 - \text{etc.},$$

ſimilique modo

$$\beta = 1 - \tfrac{1}{2} b b + \tfrac{1}{24} b^4 - \text{etc. et } \gamma = 1 - \tfrac{1}{2} c c + \tfrac{1}{24} c^4 - \text{etc.},$$

factor rationalis noſtrae formulae fiet $= \frac{4}{2^3} = \frac{1}{2}$, neglectis ſcilicet partibus minimis. At in formula irrationali non ſolum partes finitae ſe mutuo deſtruunt, ſed etiam termini, vbi a, b, c habent duas dimenſiones; quamobrem ſingulas partes vsque ad quatuor dimenſiones euolui oportet. Habebimus ergo vt ſequitur:

$$\begin{array}{l|l}
\alpha\alpha = 1 - aa + \frac{1}{3} a^4 & \alpha\beta = 1 - \frac{1}{2} aa - \frac{1}{2} bb + \frac{1}{24} a^4 + \frac{1}{24} b^4 + \frac{1}{4} aabb, \text{ ideoque} \\
\beta\beta = 1 - bb + \frac{1}{3} b^4 & \alpha\beta\gamma = 1 - \frac{1}{2} aa - \frac{1}{2} bb - \frac{1}{2} cc + \frac{1}{24} a^4 + \frac{1}{24} b^4 + \frac{1}{24} c^4 \\
\gamma\gamma = 1 - cc + \frac{1}{3} c^4 & \qquad + \frac{1}{4} aabb + \frac{1}{4} aacc + \frac{1}{4} bbcc.
\end{array}$$

Hinc

Hinc igitur colligitur quantitas post signum radicale vt sequitur

$$-2+aa+bb+cc-\tfrac{1}{3}a^4-\tfrac{1}{3}b^4-\tfrac{1}{3}c^4$$
$$+2-aa-bb-cc+\tfrac{1}{12}a^4+\tfrac{1}{12}b^4+\tfrac{1}{12}c^4$$
$$+\tfrac{1}{2}aabb+\tfrac{1}{2}aacc+\tfrac{1}{2}bbcc,$$

quae, deletis terminis se destruentibus, reducitur ad hanc:

$$\tfrac{1}{2}aabb+\tfrac{1}{2}aacc+\tfrac{1}{2}bbcc-\tfrac{1}{4}a^4-\tfrac{1}{4}b^4-\tfrac{1}{4}c^4.$$

Quare cum etiam area S sit quam minima, ideoque sin. S = S, habebimus aream quaesitam:

$$S=\tfrac{1}{2}\sqrt{(\tfrac{1}{2}aabb+\tfrac{1}{2}aacc+\tfrac{1}{2}bbcc-\tfrac{1}{4}a^4-\tfrac{1}{4}b^4-\tfrac{1}{4}c^4)},$$

siue

$$S=\tfrac{1}{4}\sqrt{(2aabb+2aacc+2bbcc-a^4-b^4-c^4)},$$

quae est formula notissima pro area trianguli plani.

Inuestigatio secunda,
pro cosinu S.

§. 15. Cum sit cos. S = − cos. (A + B + C), erit

$$\text{cos. S} = \text{cos. A sin. B sin. C} + \text{cos. B sin. A sin. C}$$
$$+ \text{cos. C sin. A sin. B} - \text{cos. A cos. B cos. C},$$

quae quatuor membra seorsim euoluta dabunt:

I. $\text{cos. A sin. B sin. C} = \frac{kk(\alpha-\beta\gamma)}{\text{sin. }a^2\,\text{sin. }b^2\,\text{sin. }c^2}$;

II. $\text{cos. B sin. A sin. C} = \frac{kk(\beta-\alpha\gamma)}{\text{sin. }a^2\,\text{sin. }b^2\,\text{sin. }c^2}$;

III. $\text{cos. C sin. A sin. B} = \frac{kk(\gamma-\alpha\beta)}{\text{sin. }a^2\,\text{sin. }b^2\,\text{sin. }c^2}$.

Pro termino postremo erit primo

$$\text{cos. A cos. B} = \frac{(\alpha-\beta\gamma)(\beta-\alpha\gamma)}{\text{sin. }a\,\text{sin. }b\,\text{sin. }c^2} = \frac{\alpha\beta-\alpha\alpha\gamma-\beta\beta\gamma+\alpha\beta\gamma\gamma}{\text{sin. }a\,\text{sin. }b\,\text{sin. }c^2},$$

hincque

$$\text{cos. A cos. B cos. C} = \frac{\alpha\beta\gamma-\alpha\alpha\beta\beta-\alpha\alpha\gamma\gamma-\beta\beta\gamma\gamma+\alpha\beta\gamma^3+\alpha\gamma\beta^3+\beta\gamma\alpha^3-\alpha^2\beta^2\gamma^2}{\text{sin. }a^2\,\text{sin. }b^2\,\text{sin. }c^2}.$$

§. 16. Quod si iam iterum ponamus $\alpha+\beta+\gamma=p$; $\alpha\beta+\alpha\gamma+\beta\gamma=q$ et $\alpha\beta\gamma=r$, tria membra priora, in vnam summam collecta, dabunt $\frac{kk(p-q)}{\sin.a^2\sin.b^2\sin.c^2}$; vltimum autem membrum, si hoc modo repraesentetur:

$$\frac{\alpha\beta\gamma-\alpha\alpha\beta\beta-\alpha\alpha\gamma\gamma-\beta\beta\gamma\gamma+\alpha\beta\gamma(\alpha\alpha+\beta\beta+\gamma\gamma)-\alpha\alpha\beta\beta\gamma\gamma}{\sin.a^2\sin.b^2\sin.c^2},$$

ob $\alpha\alpha+\beta\beta+\gamma\gamma=pp-2q$ et

$$\alpha\alpha\beta\beta+\alpha\alpha\gamma\gamma+\beta\beta\gamma\gamma=qq-2pr,$$

induet hanc formam:

$$\frac{r-qq+2pr+ppr-2qr-rr}{\sin.a^2\sin.b^2\sin.c^2}.$$

Quare cum sit $kk=1-pp+2q+2r$, omnibus membris collectis habebimus:

$$\cos.S=\frac{(p-q)(1-pp+2q+2r)-r+qq-2pr-ppr+2qr+rr}{\sin.a^2\sin.b^2\sin.c^2},$$

quae formula euoluta fit

$$\cos.S=\frac{p-q-r+2pq+ppq-ppr-qq+rr-p^3}{\sin.a^2\sin.b^2\sin.c^2}.$$

§. 17. Quia hic iterum denominator euanescit casibus quibus $\alpha=1$, $\beta=1$ et $\gamma=1$, necesse est vt iisdem casibus etiam numerator euanescat, ideoque istum factorem habeat:

$$(1-\alpha)(1-\beta)(1-\gamma)=1-p+q-r.$$

Facta igitur hac diuisione pro numeratore nanciscemur hunc quotum: $p-q-r+pp$; pro denominatore autem quotus erit:

$$(1+\alpha)(1+\beta)(1+\gamma)=1+p+q+r,$$

sicque nacti sumus istam expressionem:

$$\cos.S=\frac{p(1+p)-q-r}{1+p+q+r};$$

ac, pro literis p, q et r restitutis valoribus, erit

$$\operatorname{cof.} S = \frac{(\alpha+\beta+\gamma)(1+\alpha+\beta+\gamma)-\alpha\beta-\alpha\gamma-\beta\gamma-\alpha\beta\gamma}{(1+\alpha)(1+\beta)(1+\gamma)};$$

fiue etiam

$$\operatorname{cof.} S = \frac{\alpha+\beta+\gamma+\alpha\alpha+\beta\beta+\gamma\gamma+\alpha\beta+\alpha\gamma+\beta\gamma-\alpha\beta\gamma}{(1+\alpha)(1+\beta)(1+\gamma)}.$$

§. 18. *Exemplum primum.* Sint duo latera b et c quadrantes, ideoque $\beta = 0$ et $\gamma = 0$, quo ergo cafu prodibit $\operatorname{cof.} S = \frac{\alpha(1+\alpha)}{1+\alpha} = \alpha = \operatorname{cof.} a$; confequenter erit iterum vt fupra $S = a$.

§. 19. *Exemplum fecundum.* Sit triangulum fphaericum rectangulum, exiftente angulo A recto, eritque, vti fupra vidimus, $\operatorname{cof.} a = \operatorname{cof.} b \operatorname{cof.} c$, fiue $\alpha = \beta\gamma$, quo valore fubftituto reperitur:

$$\operatorname{cof.} S = \frac{\beta+\gamma+2\beta\gamma+\beta\beta+\gamma\gamma+\beta\beta\gamma+\beta\gamma\gamma}{(1+\beta)(1+\gamma)(1+\beta\gamma)}, \text{ fiue}$$

$$\operatorname{cof.} S = \frac{\beta+\gamma(1+\beta+\gamma+\beta\gamma)}{(1+\beta)(1+\gamma)(1+\beta\gamma)} = \frac{\beta+\gamma}{1+\beta\gamma}.$$

Pro eodem vero cafu fupra inuenimus $S = \frac{\sqrt{(1-\beta\beta)(1-\gamma\gamma)}}{1+\beta\gamma}$, quod egregie congruit, cum hinc fiat

$$\operatorname{fin.} S^2 + \operatorname{cof.} S^2 = \frac{1+2\beta\gamma+\beta\beta\gamma\gamma}{(1+\beta\gamma)^2} = 1.$$

§. 20. *Exemplum tertium.* Sit triangulum aequilaterum, fiue $\alpha = \beta = \gamma$, eritque $\operatorname{cof.} S = \frac{3\alpha+6\alpha\alpha-\alpha^3}{(1+\alpha)^3}$. Supra autem inuenimus pro hoc cafu

$$\operatorname{fin.} S = \frac{(1+3\alpha)(1-\alpha)\sqrt{(1+2\alpha)}}{1+\alpha^3};$$

ad quarum expreffionum confenfum oftendendum fumamus vtriusque formulae quadratum, ac prodibit:

$$\operatorname{cof.} S^2 = \frac{9\alpha\alpha+36\alpha^3+30\alpha^4-12\alpha^5+\alpha^6}{(1+\alpha^6)} \text{ et}$$

$$\operatorname{fin.} S^2 = \frac{(1+6\alpha+9\alpha\alpha)(1-3\alpha\alpha+2\alpha^3)}{(1+\alpha)^6} = \frac{1+6\alpha+6\alpha\alpha-16\alpha^3-15\alpha^4+18\alpha^5}{(1+\alpha)^6};$$

qua-

quarum fractionum summa praebet

$$\frac{1+6\alpha+15\alpha\alpha+20\alpha^3+15\alpha^4+6\alpha^5+\alpha^6}{(1+\alpha)^6}=1.$$

§. 21. *Exemplum quartum.* Sint latera trianguli quam minima, et quia etiam area quasi fit euanescens, erit $\cos. S = 1 - \frac{1}{2} S S$; hinc ex formula, per literas p, q, r expressa, erit $1 - \frac{1}{2} S S = \frac{p(1+p)-q-r}{1+p+q+r}$, vnde colligitur.

$$S S = \frac{2+4q+4r-2pp}{1+p+q+r}.$$

et restitutis pro p, q, r valoribus fiet

$$S S = \frac{2kk}{(1+\alpha)(1+\beta)(1+\gamma)};$$

vbi in denominatore pro literis α, β, γ sufficit scribere vnitatem, quo facto denominator erit 8. Supra vero vidimus, pro numeratore fieri $k = \sqrt{(1-\alpha\alpha-\beta\beta-\gamma\gamma+2\alpha\beta\gamma)}$

$$= \sqrt{(\tfrac{1}{2}aabb+\tfrac{1}{2}aacc+\tfrac{1}{2}bbcc-\tfrac{1}{4}a^4-\tfrac{1}{4}b^4-\tfrac{1}{4}c^4)},$$

quo valore posito reperitur

$$S S = \frac{2aabb+2aacc+2bbcc-a^4-b^4-c^4}{16},$$

vnde fit vtique

$$S = \tfrac{1}{4}\sqrt{(2aabb+2aacc+2bbcc-a^4-b^4-c^4.)}$$

Tertia inuestigatio,

pro tang. S et tang. $\frac{1}{2}$ S.

§. 22. Postquam pro area nostri trianguli sphaerici tam sin. S quam cos. S inuenimus, sponte se prodit tangens istius areae, scilicet:

$$\text{tang. } S = \frac{(1+\alpha+\beta+\gamma)\sqrt{(1-\alpha\alpha-\beta\beta-\gamma\gamma+2\alpha\beta\gamma)}}{\alpha+\beta+\gamma+\alpha\alpha+\beta\beta+\gamma\gamma+\alpha\beta+\alpha\gamma+\beta\gamma-\alpha\beta\gamma},$$

quam formulam succinctius in genere exprimere non licet.

§. 23.

§. 23. Verum tangens dimidiae areae, fiue tang. $\frac{1}{2}$ S, multo concinnius exprimi poterit. Cum enim fit

$$\text{tang. } \tfrac{1}{2} S = \frac{\text{fin. } S}{1 + \text{cof. } S},$$

retineamus initio literas p, q et r, ita vt pro numeratore habeamus

$$\text{fin. } S = \frac{(1+p)\surd(1 - pp + 2q + 2r)}{(1 + p + q + r)},$$

at vero pro denominatore, ob

$$\text{cof. } S = \frac{p(1+p) - q - r}{1 + p + q + r}, \text{ erit}$$

$$1 + \text{cof. } S = \frac{(1+p)^2}{1 + p + q + a};$$

quare his valoribus fubftitutis reperitur

$$\text{tang. } \tfrac{1}{2} S = \frac{\surd(1 - pp + 2q + 2r)}{1 + p},$$

et reftitutis valoribus,

$$\text{tang. } \tfrac{1}{2} S = \frac{\surd(1 - \alpha\alpha - \beta\beta - \gamma\gamma + 2\alpha\beta\gamma)}{1 + \alpha + \beta + \gamma};$$

quae formula ad vfum vtique eft aptiffima.

§. 24. *Exemplum primum.* Si bina latera b et c fuerint quadrantes, ideoque $\beta = 0$ et $\gamma = 0$, erit

$$\text{tang. } \tfrac{1}{2} S = \frac{\surd(1 - \alpha\alpha)}{1 + \alpha} = \frac{\text{fin. } a}{1 + \text{cof. } a};$$

vnde manifeftum eft fore tang. $\frac{1}{2}$ S $=$ tang. $\frac{1}{2}\, a$, ideoque $S = a$, vti iam fupra inuenimus.

§. 25. *Exemplum fecundum.* Sit triangulum fphaericum ad A rectangulum, ideoque cof. $a =$ cof. b cof. c et $\alpha = \beta\gamma$; hoc autem valore fubftituto reperitur

$$\text{tang. } \tfrac{1}{2} S = \frac{\surd(1 - \beta\beta - \gamma\gamma + \beta\beta\gamma\gamma)}{1 + \beta + \gamma + \beta\gamma} = \frac{\surd((1 - \beta\beta)(1 - \gamma\gamma))}{(1 + \beta)(1 + \gamma)},$$

quae fractio, fupra et infra diuidendo per $\surd(1 + \beta)(1 + \gamma)$, reducitur ad hanc:

tang.

$$\text{tang.} \tfrac{1}{2} S = \sqrt{\frac{(1-\beta)(1-\gamma)}{(1+\beta)(1+\gamma)}}.$$

Eſt vero

$$\sqrt{\frac{1-\beta}{1+\beta}} = \sqrt{\frac{1-\text{coſ.} b}{1+\text{coſ.} b}} = \text{tang.} \tfrac{1}{2} b,$$

ſimilique modo $\sqrt{\frac{1-\gamma}{1+\gamma}} = \text{tang.} \tfrac{1}{2} c$; quocirca reſultat ſequens formula maxime memorabilis:

$$\text{tang.} \tfrac{1}{2} S = \text{tang.} \tfrac{1}{2} b. \ \text{tang.} \tfrac{1}{2} c,$$

cuius conſenſus cum ſupra inuentis haud difficulter oſtenditur.

§. 26. *Exemplum tertium.* Si triangulum fuerit aequilaterum, ſiue $\alpha = \beta = \gamma$, erit

$$\text{tang.} \tfrac{1}{2} S = \frac{\sqrt{(1 - 3\alpha\alpha + 2\alpha^3)}}{1 + 3\alpha} = \frac{(1-\alpha)\sqrt{(1+2\alpha)}}{1+3\alpha};$$

vnde caſu, quo ſingula latera ſunt quadrantes, ideoque $\alpha = 0$, erit tang. $\tfrac{1}{2} S = 1$, ideoque $\tfrac{1}{2} S = 45°$ et $S = \frac{\pi}{2}$.

§. 27. *Exemplum quartum.* Sint denique tria latera a, b, c, quam minima, et quia

tang. $\tfrac{1}{2} S = \tfrac{1}{2} S$, erit $S = \frac{2\sqrt{(1 - \alpha^2 - \beta^2 - \gamma^2 + 2\alpha\beta\gamma)}}{1 + \alpha + \beta + \gamma}$.

Nunc igitur pro denominatore ſufficit ſumi $\alpha = 1$, $\beta = 1$, $\gamma = 1$, ita vt Coefficiens formulae radicalis ſit $= \tfrac{1}{2}$; ipſam autem formulam radicalem iam ſupra aliquoties vidimus eſſe

$$\sqrt{(\tfrac{1}{2} aabb + \tfrac{1}{2} aacc + \tfrac{1}{2} bbcc - \tfrac{1}{4} a^4 - \tfrac{1}{4} b^4 - \tfrac{1}{4} c^4)},$$

vnde area prorſus vt ante exprimitur.

Problema.

§. 28. *Propoſito angulo ſolido $AOBC$, ex tribus angulis planis $BOC = a$, $AOC = b$ et $AOB = c$ formatum, eius veram menſuram aſſignare.* Tab. II. Fig. 16.

 Solutio

Solutio.

Quoniam huius anguli ſolidi menſura ſtatui poteſt aequalis areae trianguli ſphaerici, cuius latera ſint a, b, c, radio ſpaerae exiſtente $= 1$, ex praecedentibus intelligitur, angulos ſolidos, perinde ac planos, ſiue per gradus et minuta, ſiue per arcus circulares exprimi poſſe. Ponamus igitur S exprimi menſuram anguli ſolidi propoſiti, ac poſito breuitatis gratia.

$$\text{coſ.}\, a = \alpha,\ \text{coſ.}\, b = \beta,\ \text{coſ.}\, c = \gamma,$$

triplici modo iſta menſura S aſſignari poterit; primo enim erit per ſinus:

$$\text{ſin.}\, S = \frac{1+\alpha+\beta+\gamma}{(1+\alpha)(1+\beta)(1+\gamma)} \sqrt{(1-\alpha\alpha-\beta\beta-\gamma\gamma+2\alpha\beta\gamma)};$$

deinde per coſinus:

$$\text{coſ.}\, S = \frac{\alpha+\beta+\gamma+\alpha\alpha+\beta\beta+\gamma\gamma+\alpha\beta+\alpha\gamma+\beta\gamma-\alpha\beta\gamma}{(1+\alpha)(1+\beta)(1+\gamma)};$$

tertio vero commodiſſime per tangentem ſemiſſis:

$$\text{tang.}\, \tfrac{1}{2} S = \frac{\sqrt{(1-\alpha\alpha-\beta\beta-\gamma\gamma+2\alpha\beta\gamma)}}{1+\alpha+\beta+\gamma}.$$

Vbi imprimis notaſſe iuuabit, ſi omnes tres anguli a, b, c fuerint recti, tum menſura anguli ſolidi prodire $= 90°$; id quod mirifice conuenit cum communi loquendi more, dum huiusmodi anguli ſolidi etiam ab opificibus anguli recti vocari ſolent; ex quo ſimul intelligere licet, quinam anguli ſiue maiores ſiue minores angulo recto ſint reputandi.

Scholion I.

§. 29. Egregium foret, ſi iſta angulorum ſolidorum menſura etiam ad eiusmodi eximias proprietates perduceret, quales pro figuris planis locum habent; veluti: quod ſumma angulorum planorum aequalis eſt duobus rectis.

ctis. Interim tamen talis proprietas in figuris solidis neutiquam occurrit, ratione nostrae mensurae. Neque enim in omnibus Tetraëdis, quae quatuor constant angulis solidis, summa omnium angulorum solidorum eandem quantitatem constituit, sed prouti Tetraëdra magis minusue obliqua construuntur, summa quatuor angulorum solidorum modo maior modo minor fieri potest. Si enim Tetraëdron regulare examini subiiciamus, cuius singuli anguli solidi ex ternis angulis planis sexaginta graduum formantur, habebimus $\alpha = \beta = \gamma = \frac{1}{3}$; vnde cuiusque anguli solidi mensura ita reperitur, vt sit tang. $\frac{1}{2} S = \frac{\sqrt{2}}{5}$, vnde ex tabulis colligitur

$$\tfrac{1}{2} S = 15^\circ.\ 48', \text{ siue } S = 31^\circ.\ 36',$$

ideoque summa omnium quatuor angulorum huius Tetraëdri erit $126^\circ.\ 24'$. Nunc consideremus Pyramidem triangularem, cuius basis itidem sit triangulum aequilaterum, vertex autem desinat in cuspidem acutissimam, cuius itaque mensura euanescat; pro ternis autem angulis solidis ad basin vnus angulus erit $a = 60^\circ$, bini vero reliqui $b = c = 90^\circ$, ita vt sit

$$\alpha = \tfrac{1}{3} \text{ et } \beta = \gamma = 0; \text{ vnde prodit}$$

$$\text{tang. } \tfrac{1}{2} S = \tfrac{1}{\sqrt{3}} = \text{tang. } 30^\circ, \text{ ita vt sit } S = 60;$$

vnde huius Pyramidis summa omnium angulorum solidorum erit 180°, cum ante pro Tetraëdro fuisset tantum 126°. Quanquam autem in summa angulorum solidorum cuiusque solidi nulla insignis proprietas elucet, in aliis fortasse relationibus ista mensura proprietates haud contemnendas patefacere poterit.

Scholion II.

§. 30. Quae hactenus sunt tradita ad mensuram eorum angulorum solidorum spectant, qui ex tribus tantum

tum angulis planis ſunt compoſiti. At ſi angulus ſolidus ex quatuor pluribusue angulis planis fuerit formatus, eius menſura erit area quadrilateri ſphaerici, vel polygoni plurium laterum, cuius ſingula latera aequentur angulis planis ſolidum conſtituentibus. Tum igitur nihil aliud opus eſt, niſi vt tale Polygonum in triangula ſphaerica reſoluatur, et ſingulorum areae inueſtigentur, quippe quorum ſumma dabit menſuram anguli ſolidi. His autem caſibus non ſufficit ſingulos angulos planos tantum noſſe, ſed inſuper neceſſe eſt, vt inclinatio mutua binorum pluriumue ſit cognita. Haec cum ſatis ſint manifeſta, hic tantum adiungam dimenſionem angulorum ſolidorum regularium, qui ex quotcunque angulis, planis inter ſe aequalibus et pariter inclinatis, formentur.

Problema.

§. 31. *Si angulus ſolidus componatur ex* n *angulis planis inter ſe aequalibus, qui ſinguli ſint* $=$ a, *et aequaliter inter ſe inclinentur, inuenire menſuram huius anguli ſolidi.*

Solutio.

Si huic angulo ſolido ſphaera concipiatur circumſcripta, cuius radius $= 1$, eius menſura erit Polygonum regulare ſphaericum, cuius omnia latera erunt $= a$, eorumque numerus $= n$; et quia etiam omnes anguli inter ſe erunt aequales, Polygonum erit regulare, ideoque in eius medio dabitur eius centrum, quod ſit in O; vnum vero
Tab. II. Fig. 17. quodque latus Poligoni ſit latus A B $= a$, ex cuius terminis ad O ducantur arcus A O et B O, qui erunt inter ſe aequales, vt habeatur triangulum A O B. Quia igitur nume-

numerus talium triangulorum eſt $= n$, erit

$$\text{angulus } AOB = \frac{2\pi}{n};$$

at ſi area totius Polygoni ſtatuatur $= S$, quae ſimul erit menſura anguli propoſiti, area iſtius trianguli AOB erit $= \frac{S}{n}$. Iam ex O in latus AB ducatur normalis OP, latus AB biſceans, eritque $AP = \frac{1}{2}a$, et

$$\text{angulus } AOP = \frac{\pi}{n}.$$

Vocetur iam angulus $OAB = \Phi$, eritque ex ſphaericis

$$\text{ſin.}\, \Phi = \frac{\text{coſ.}\, \frac{\pi}{n}}{\text{coſ.}\, \frac{1}{2}a}.$$

Quia igitur huic angulo Φ etiam aequalis eſt angulus OBA, ſumma angulorum trianguli AOB erit $= 2\Phi + \frac{2\pi}{n}$, vnde ablatis duobus rectis obtinebitur area trianguli AOB

$$\frac{S}{n} = 2\Phi + \frac{2\pi}{n} - \pi,$$

hincque area totius Polygoni

$$S = 2n\Phi + 2\pi - n\pi = 2n\Phi - (n-2)\pi,$$

quae ergo erit menſura anguli ſolidi regularis propoſiti.

Corollarium I.

§. 32. Si igitur angulus ſolidus conſtet ex tribus angulis planis aequalibus $= a$, ob $n = 3$, erit

$$\text{ſin.}\, \Phi = \frac{\text{coſ.}\, 60^\circ}{\text{coſ.}\, \frac{1}{2}a};$$

quo angulo inuento erit menſura anguli ſolidi

$$S = 6\Phi - \pi = 6\Phi - 180^\circ.$$

Corollarium II.

§. 33. Si angulus ſolidus ex quatuor conſtet angulis planis inter ſe aequalibus $= a$, ob $n = 4$ quaeratur angulus Φ, vt ſit ſin. $\Phi = \frac{\text{coſ. } 45^\circ}{\text{coſ. } \frac{1}{2} a}$; atque hinc reperietur menſura anguli ſolidi $S = 8\,\Phi - 2\,\pi = 8\,\Phi - 360^\circ$.

Corollarium III.

§. 34. Si angulus ſolidus conſtet ex quinque angulis planis inter ſe aequalibus $= a$, ob $n = 5$ quaeratur angulus Φ, vt ſit ſin. $\Phi = \frac{\text{coſ. } 36^\circ}{\text{coſ. } \frac{1}{2} a}$; hinc vero menſura iſtius anguli ſolidi erit $S = 10\,\Phi - 3\,\pi = 10\,\Phi - 540^\circ$.

Corollarium IV.

§. 35. Si angulus ſolidus ex ſex conſtet angulis planis inter ſe aequalibus $= a$, ob $n = 6$ quaeratur angulus Φ, vt ſit ſin. $\Phi = \frac{\text{coſ. } 30^\circ}{\text{coſ. } \frac{1}{2} a}$; tum vero menſura huius anguli ſolidi erit $S = 12\,\Phi - 4\,\pi = 12\,\Phi - 720^\circ$.

Scholion.

§. 36. Secundum haec praecepta computemus angulos ſolidos quinque corporum regularium, quo facilius eos cum angulo recto, qui in ſolidis pariter eſt 90 graduum, comparare valeamus; vbi quidem conueniet angulos ſolidos minores quam 90° nomine acutorum, qui autem excedunt 90° nomine obtuſorum inſignire.

Menſura angulorum ſolidorum Tetraëdri.

§. 37. Cum hic terni anguli plani 60 graduum concurrant ad angulos ſolidos conſtituendos, erit $\frac{1}{2} a = 30^\circ$, et

$n = 3$;

$n = 3$; vnde ſecundum corrollarium I. calculus per logarithmos ita inſtituetur:

$$
\begin{array}{l}
l\,\text{coſ.}\ 60^\circ = 9,6989700 \\
l\,\text{coſ.}\ 30^\circ = 9,9375306 \\
\hline
l\,\text{ſin.}\ \Phi = 9,7614394
\end{array}
$$

hincque $\Phi = 35^\circ.\ 15'.\ 52''$

ergo $6\ \Phi = 211^\circ.\ 35'.\ 12''$

vnde quisque angulus ſolidus Tetraëdri reperietur

$S = 31^\circ.\ 35'.\ 12''$;

ſicque hic angulus vix ſuperat trientem anguli recti.

Menſura angulorum ſolidorum Octaëdri.

§. 38. Cum quilibet angulus componatur ex quaternis angulis planis 60 graduum, erit $\frac{1}{2}a = 30^\circ$, et $n = 4$; vnde ſecundum praecepta corollarii II calculus per logarithmos inſtituatur, vti ſequitur:

$$
\begin{array}{l}
l\,\text{coſ.}\,45^\circ = 9,8494850 \\
l\,\text{coſ.}\,30^\circ = 9,9375306 \\
\hline
l\,\text{ſin.}\ \Phi = 9,9119544
\end{array}
$$

hincque erit $\Phi = 54^\circ.\ 44'.\ 8''$, ergo $8\ \Phi = 437^\circ.\ 53'.\ 4''$; vnde anguli ſolidi Octaëdri menſura erit $S = 77^\circ.\ 53'.\ 4''$, qui ergo angulus non multum a recto deficit. Caeterum hic angulus Φ eſt complementum praecedentis ad 90°.

Menſura angulorum ſolidorum
Icoſaëdri.

§. 39. Cum hic angulus ſolidus ex quinis angulis planis $a = 60^\circ$ componatur, erit $\frac{1}{2}a = 30^\circ$ et $n = 5$; vnde ex coroll. 3 calculum ita inſtitui opportet:

$$\begin{array}{l} l\,\text{coſ. } 36^\circ = 9{,}9079576 \\ l\,\text{coſ. } 30 = \underline{9{,}9375306} \\ l\,\text{ſin. } \Phi = 9{,}9704270 \end{array}$$

vnde colligitur $\Phi = 69^\circ.\,5'.\,41\frac{1}{2}''$, ergo $10\,\Phi = 690^\circ.\,56'.\,55''$; hinc anguli ſolidi Icoſaëdri menſura erit $S = 150^\circ.\,56'.\,55''$, qui ergo angulus iam valde eſt obtuſus.

Menſura angulorum ſolidorum
Hexaëdri.

§. 40. Cum hic ſinguli anguli ſolidi conſteut ternis angulis planis rectis, erit $a = 90^\circ$, $\frac{1}{2}a = 45^\circ$, et $n = 3$; hinc ex Coroll. 1. calculus iſta inſtituatur:

$$\begin{array}{l} l\,\text{coſ. } 60^\circ = 9{,}6989700 \\ l\,\text{coſ. } 45^\circ = \underline{9{,}8494850} \\ l\,\text{ſin. } \Phi = 9{,}8494850 \end{array}$$

ideoque fit $\Phi = 45^\circ$, ergo $6\,\Phi = 270^\circ$; vnde menſura anguli ſolidi Hexaëdri erit 90°, ſcilicet hic angulus ipſe eſt rectus.

Menſura angulorum ſolidorum
Dodecaëdri.

§. 41. Cum hic quilibet angulus conſtet ex ternis

nis planis, quorum singuli continent 108°, erit $\frac{1}{2}a = 54°$, et $n = 3$; vnde calculus secundum coroll. 1. ita institui debet:

$$l\,\text{cos}.\,60° = 9{,}6989700$$
$$l\,\text{cos}.\,54° = 9{,}7692187$$
$$l\,\text{sin}.\,\Phi = 9{,}9297513$$

hincque erit ipse angulus

$$\Phi = 58°.\,16'.\,57'', \text{ ergo } 6\,\Phi = 349°.\,41'.\,42''.$$

Mensura igitur anguli solidi Dodecaëdri erit 169°. 41'. 42''; sicque hic angulus Dodecaëdri inter omnia corpora regularia est maximus.

Scholion.

§. 42. Quodsi angulus solidus formetur ex sex angulis planis $a = 60°$, vt sit $\frac{1}{2}a = 30°$ et $n = 6$, corpus regulare inde ortum est ipsa sphaera, in cuius superficie omnes anguli solidi in planum sunt depressi, sicque aequivalebunt quatuor angulis rectis; id quod etiam calculus secundum Coroll. 4. institutus declarat:

$$l\,\text{cos}.\,30° = 9{,}9375306$$
$$l\,\text{cos}.\,30 = 9{,}9375306$$
$$l\,\text{sin}.\,\Phi = 10{,}000000$$

hincque angulus

$$\Phi = 90° \text{ et } 12\,\Phi = 1080°,$$

vnde fit angulus solidus $S = 360°$. Idem euenit si angulus solidus ex quatuor planis rectis componatur, vt sit $\frac{1}{2}a = 45$ et $n = 4$; tum enim erit

$$\text{fin. } \Phi = \frac{\cos. 45^\circ}{\cos. 45^\circ} = 1, \text{ ideoque } \Phi = 90^\circ,$$

et angulus folidus $S = (8 - 4)\ 90 = 360^\circ$. Denique fi angulus folidus conftet ex tribus planis, ita vt fit

$$a = 120^\circ, \text{ erit } \tfrac{1}{2} a = 60^\circ \text{ et } n = 3;$$

vnde iterum fit

$$\text{fin. } \Phi = \frac{\cos. 60^\circ}{\cos. 60^\circ} = 1, \text{ ideoque } \Phi = 90^\circ,$$

et angulus folidus $S = (6 - 2)\ 90 = 360^\circ$.

AD DISSERTATIONEM DE REDVCTIONE FORMVLARVM INTEGRALIVM AD RECTIFICATIONEM ELLIPSEOS ET HYPERBOLAE, ADDITAMENTVM.

Auctore
A. I. LEXELL.

§. 1.

In priori de hoc argumento Dissertatione in id praecipue intenti fuimus, vt ostenderemus qua ratione formularum differentialium

$$dz\sqrt{\frac{1+mzz}{1+nzz}}, \text{ siue } dz\sqrt{\frac{1+mzz}{nzz-1}}$$

integralia per rectificationem Sectionum Conicarum, Ellipseos nimirum et Hyperbolae, expediri queant; ea autem occasione nobis non licuit eas formulas differentiales contemplari, quae per idoneas substitutiones ad formulas modo commemoratas reduci possunt, quarum igitur nunc mentionem injicere constituimus. Priusquam autem id negotium adgrediamur Theorematibus nostris, §§ 7 et 8. Dissertationis commemoratae allatis, nonnullas quoque alias memoratu admodum dignas et ex prioribus facili opera deducendas, adiiciamus.

§. 2.

§. 2. Theorema (V.)

$$\int \frac{d\Phi \sqrt{(1+2e\cos.\Phi+e^2)}}{(1+e\cos.\Phi)^2} + \int \frac{d\Phi \sqrt{(1+2e\cos.\Phi+e^2)}}{(e+\cos.\Phi)^2}$$
$$= \frac{\sin.\Phi \sqrt{(1+2e\cos.\Phi+e^2)}}{(1+e\cos.\Phi)(e+\cos.\Phi)} + \int \frac{d\Phi}{\sqrt{(1+2e\cos.\Phi+e^2)}}.$$

Nam per Theorema (II.) eſt:

$$\int d\Phi \frac{\sqrt{(1+2e'\cos.\Phi+e'^2)}}{(1+e'\cos.\Phi)^2} = \frac{(e'+\cos.\Phi)\sqrt{(1+2e'\cos.\Phi+e'^2)}}{(e'^2-1)\sin.\Phi(1+e'\cos.\Phi)}$$
$$+ \frac{1}{e'^2-1} \cdot \int \frac{d\Phi (e'+\cos.\Phi)^2}{\sin.\Phi^2 \sqrt{(1+2e'\cos.\Phi+e'^2)}},$$

hinc ſi ponatur $e' = \frac{1}{e}$, fiet:

$$\int d\Phi \frac{\sqrt{(1+2e\cos.\Phi+e^2)}}{(e+\cos.\Phi)^2} = \frac{(1+e\cos.\Phi)\sqrt{(1+2e\cos.\Phi+e^2)}}{(1-e^2)\sin.\Phi(e+\cos.\Phi)}$$
$$+ \frac{1}{1-e^2} \cdot \int \frac{d\Phi (1+e\cos.\Phi)^2}{\sin.\Phi^2 \sqrt{(1+2e\cos.\Phi+e^2)}};$$

deinde ſi ſtatuatur $e' = e$ et ſumma ambarum aequationum ſumatur, prodibit omnino:

$$\int d\Phi \frac{\sqrt{(1+2e\cos.\Phi+e^2)}}{(1+e\cos.\Phi)^2} + \int d\Phi \frac{\sqrt{(1+2e\cos.\Phi+e^2)}}{(e+\cos.\Phi)^2}$$
$$= \frac{\sin.\Phi \sqrt{(1+2e\cos.\Phi+e^2)}}{(1+e\cos.\Phi)(e+\cos.\Phi)} + \int \frac{d\Phi}{\sqrt{(1+2e\cos.\Phi+e^2)}}.$$

Idem autem ſic ſatis expedite demonſtratur:

$$d.\frac{\sin.\Phi \sqrt{(1+2e\cos.\Phi+e^2)}}{(1+e\cos.\Phi)(e+\cos.\Phi)} = \frac{\sqrt{(1+2e\cos.\Phi+e^2)}}{e+\cos.\Phi} d.\frac{\sin.\Phi}{1+e\cos.\Phi}$$
$$+ \frac{\sin.\Phi}{1+e\cos.\Phi} d.\frac{\sqrt{(1+2e\cos.\Phi+e^2)}}{e+\cos.\Phi}$$
$$= d\Phi \frac{\sqrt{(1+2e\cos.\Phi+e^2)}}{(1+e\cos.\Phi)^2} + \frac{d\Phi \sin.\Phi^2}{(e+\cos.\Phi)^2 \sqrt{(1+2e\cos.\Phi+e^2)}}$$
$$= d\Phi \frac{\sqrt{(1+2e\cos.\Phi+e^2)}}{(1+e\cos.\Phi)^2} + d\Phi \frac{(1+2e\cos.\Phi+e^2-(e+\cos.\Phi)^2)}{(e+\cos.\Phi)^2 \sqrt{(1+2e\cos.\Phi+e^2)}}$$
$$= d\Phi \frac{\sqrt{(1+2e\cos.\Phi+e^2)}}{(1+e\cos.\Phi)^2} + d\Phi \frac{\sqrt{(1+2e\cos.\Phi+e^2)}}{(e+\cos.\Phi)^2} - \frac{d\Phi}{\sqrt{(1+2e\cos.\Phi+e^2)}},$$

vnde conſtat propoſitum.

§. 3. Theorema (VI)

$$e^2 \int d\Phi \frac{\sqrt{(1+2e\cos.\Phi+e^2)}}{(1+e\cos.\Phi)^2} + \int d\Phi \frac{\sqrt{(1+2e\cos.\Phi+e^2)}}{(e+\cos.\Phi)^2}$$

$$= \frac{(1+2e\cos.\Phi+e^2)^{\frac{3}{2}}}{\sin.\Phi(1+e\cos.\Phi)(e+\cos.\Phi)} + \int d\Phi \frac{\sqrt{(1+2e\cos.\Phi+e^2)}}{\sin.\Phi^2}.$$

Nam

Nam si ad aequationem Theoremate (II) expressam et per e^2 multiplicatam, addatur illa, quam §. praecedenti exposuimus:

$$\int d\Phi \frac{\sqrt{(1+2e\,\text{cof.}\,\Phi+e^2)}}{(e+\text{cof.}\,\Phi)^2} = \frac{(1+e\,\text{cof.}\,\Phi)\sqrt{(1+2e\,\text{cof.}\,\Phi+e^2)}}{(1-e^2)(e+\text{cof.}\,\Phi)\,\text{fin.}\,\Phi}$$

$$+\frac{1}{1-e^2}\cdot\int \frac{a\Phi(1+e\,\text{cof.}\,\Phi)^2}{\text{fin.}\,\Phi^2\sqrt{(1+2e\,\text{cof.}\,\Phi+e^2)}}$$

prodibit aequalitas Theoremate hoc (VI) exposita. Deinde quia per Theorema (III) est

$$\int d\Phi \frac{\sqrt{(1+2e'\,\text{cof.}\,\Phi+e'^2)}}{(1+e'\,\text{cof.}\,\Phi)^3} = \frac{e'^2}{e'^2-1}\cdot\frac{\text{fin.}\,\Phi\,(e'+\text{cof.}\,\Phi)}{(1+e'\,\text{cof.}\,\Phi)\sqrt{(1+2e'\,\text{cof.}\,\Phi+e'^2)}}$$

$$-\frac{1}{e'^2-1}\int\frac{d\Phi\,(1+e'\,\text{cof.}\,\Phi)^2}{(1+2e'\,\text{cof.}\,\Phi+e'^2)^{\frac{3}{2}}},$$

si statuatur $e'=\frac{1}{e}$, fiet

$$\int d\Phi \frac{\sqrt{(1+2e\,\text{cof.}\,\Phi+e^2)}}{(e+\text{cof.}\,\Phi)^3} = \frac{1}{1-e^2}\cdot\frac{\text{fin.}\,\Phi\,(1+e\,\text{cof.}\,\Phi)}{(e+\text{cof.}\,\Phi)\sqrt{(1+2e\,\text{cof.}\,\Phi+e^2)}}$$

$$-\frac{e^2}{1-e^2}\int\frac{d\Phi\,(e+\text{cof.}\,\Phi)^2}{(1+2e\,\text{cof.}\,\Phi+e^3)^{\frac{3}{2}}},$$

ad quam si addatur

$$e^2\int d\Phi \frac{\sqrt{(1+2e\,\text{cof.}\,\Phi+e^2)}}{(1+e\,\text{cof.}\,\Phi)^2} = -\frac{e^4}{1-e^2}\cdot\frac{\text{fin.}\,\Phi\,(e+\text{cof.}\,\Phi)}{(1+e\,\text{cof.}\,\Phi)\sqrt{(1+2e\,\text{cof.}\,\Phi+e^2)}}$$

$$+\frac{e^2}{1-e^2}\int\frac{d\Phi\,(1+e\,\text{cof.}\,\Phi)^2}{(1+2e\,\text{cof.}\,\Phi+e^2)^{\frac{3}{2}}},$$

prodibit:

$$e^2\int d\Phi \frac{\sqrt{(1+2e\,\text{cof.}\,\Phi+e^2)}}{(1+e\,\text{cof.}\,\Phi)^2} + \int d\Phi \frac{\sqrt{(1+2e\,\text{cof.}\,\Phi+e^2)}}{(e+\text{cof.}\,\Phi)^3}$$

$$= \frac{\text{fin.}\,\Phi}{(1+e\,\text{cof.}\,\Phi)(e+\text{cof.}\,\Phi)}\cdot\frac{((1+e\,\text{cof.}\,\Phi)^2-e^4(e+\text{cof.}\,\Phi)^2)}{(1-e^2)\sqrt{(1+2e\,\text{cof.}\,\Phi+e^2)}}$$

$$+e^2\int\frac{d\Phi\,\text{fin.}\,\Phi^2}{(1+2e\,\text{cof.}\,\Phi+e^2)^{\frac{3}{2}}}$$

$$= \frac{(1+e^2)\,\text{fin.}\,\Phi\,(e+\text{cof.}\,\Phi)}{(1+e\,\text{cof.}\,\Phi)\sqrt{(1+2\,e\,\text{cof.}\,\Phi+e^2)}} + \frac{\text{fin.}\,\Phi^5}{(1+e\,\text{cof.}\,\Phi)(e+\text{cof.}\,\Phi)\sqrt{(1+2\,e\,\text{cof.}\,\Phi+e^2)}}$$

$$+ e^2 \int \frac{d\Phi\,\text{fin}\,\Phi^2}{(1+2\,e\,\text{cof.}\,\Phi+e^2)^{\frac{3}{2}}},$$

fiue etiam

$$e^2 \int d\Phi \frac{\sqrt{(1+2\,e\,\text{cof.}\,\Phi+e^2)}}{(1+e\,\text{cof.}\,\Phi)^2} + \int d\Phi \frac{\sqrt{(1+2\,e\,\text{cof.}\,\Phi+e^2)}}{(e+\text{cof.}\,\Phi)^2}$$

$$= \frac{e^2\,\text{fin.}\,\Phi\,(e+\text{cof.}\,\Phi)}{(1+e\,\text{cof.}\,\Phi)\sqrt{(1+2\,e\,\text{cof.}\,\Phi+e^2)}} + \frac{\text{fin.}\,\Phi\sqrt{(1+2\ \text{cof.}\,\Phi+e^2)}}{(1+e\,\text{cof.}\,\Phi)(e+\text{cof.}\,\Phi)}$$

$$+ e^2 \int \frac{d\Phi\,\text{fin.}\,\Phi^2}{(1+2\,e\,\text{cof.}\,\Phi+e^2)^{\frac{3}{2}}},$$

qua aequalitate Theorema noftrum (VII) continetur.

§. 4. Nunc vero facile perfpicitur, cafus differentialis noftri I, III, IX et X, etiam ope Theorematum (VI) et (VII) ad rectificationem Ellipfeos et Hyperbolae reduci poffe. Et quidem fi quaeratur, quomodo formulam $dz\,\frac{Z}{Z'}$ comparatam effe oportet, vt fit $= d\Phi\,\frac{\sqrt{1+2\,e\,\text{cof.}\,\Phi+e^2)}}{\text{fin.}\,\Phi^2}$, primum fubftitutione vtamur $z = \frac{\lambda(1+e\,\text{cof.}\,\Phi)}{\text{fin.}\,\Phi}$, ita vt effe debeat

$$Z = \mu\,\frac{\sqrt{(1+2\,e\,\text{cof.}\,\Phi+e^2)}}{\text{fin.}\,\Phi} \text{ et } Z' = \mu'\,\frac{(e+\text{cof.}\,\Phi)}{\text{fin.}\,\Phi};$$

erit vero tum

$$dz = -\lambda\,d\Phi\,\frac{(e+\text{cof.}\,\Phi)}{\text{fin.}\,\Phi} \text{ et}$$

$$Z = \sqrt{(1+mzz)} = \frac{\sqrt{(1+2\,e\,\text{cof.}\,\Phi+e^2)}}{\text{fin.}\,\Phi},$$

exiftente $\lambda = \frac{1}{\sqrt{m}}$, nec non

$$Z' = \sqrt{(nzz+1)} = \frac{e+\text{cof.}\,\Phi}{\text{fin.}\,\Phi\sqrt{(1-e^2)}},$$

pofito $e = \sqrt{\left(\frac{n-m}{n}\right)}$, fiue

$$Z = \sqrt{(nzz-1)} = \frac{e+\text{cof.}\,\Phi}{\text{fin.}\,\Phi\sqrt{(e^2-1)}},$$

pofito

posito $e = \sqrt{\left(\frac{n+m}{m}\right)}$, siue in genere

$$Z' = \sqrt{(nzz \pm 1)} = \sqrt{\tfrac{n}{m}} \cdot \frac{(e + \operatorname{cos}. \Phi)}{\operatorname{sin}. \Phi}, \text{ hinc}$$

$$dz \frac{Z}{Z'} = - \frac{d\Phi \sqrt{(1 + 2e \operatorname{cos}. \Phi + e^2)}}{\sqrt{n} \operatorname{sin}. \Phi^2}.$$

Casus igitur I et IX formulae nostrae per hanc reductionem expedientur. Deinde si adhibeatur substitutio

$$z = \lambda \frac{(e + \operatorname{cos}. \Phi)}{\operatorname{sin}. \Phi}, \text{ vt sit}$$

$$dz = - d\Phi \frac{(1 + e \operatorname{cos}. \Phi)}{\operatorname{sin}. \Phi^2}, \text{ erit}$$

$$Z = \mu \frac{\sqrt{(1 + 2e \operatorname{cos}. \Phi + e^2)}}{\operatorname{sin}. \Phi} \text{ et } Z' = \mu' \frac{(1 + e \operatorname{cos}. \Phi)}{\operatorname{sin}. \Phi},$$

ideoque pro Z non nisi haec forma: $\sqrt{(1 + mzz)}$ adhiberi potest, ita vt haec substitutio nouam reductionem non suppeditet, id quod etiam inde euadit manifestum, si loco e introducatur $e' = \frac{1}{e}$; tum enim fiet $z = \lambda e \frac{(1 + e' \operatorname{cos}. \Phi)}{\operatorname{sin}. \Phi}$, quae substitutio cum priori congruit.

§. 5. Igitur iam disquiramus, quomodo formula $dz \frac{Z}{Z'}$ sit comparata, quando ad hanc expressionem:

$$\frac{d\Phi \operatorname{sin}. \Phi^2}{(1 + 2e \operatorname{cos}. \Phi + e^2)^{\frac{5}{2}}}$$

reducenda est. Binae autem substitutiones, quae heic in vsum vocari possunt, sunt

$$z = \frac{\lambda (1 + e \operatorname{cos}. \Phi)}{\sqrt{(1 + 2e \operatorname{cos}. \Phi + e^2)}}, \text{ vel } z = \frac{\lambda (e + \operatorname{cos}. \Phi)}{\sqrt{(1 + 2e \operatorname{cos}. \Phi + e^2)}},$$

quas autem nullo negotio patescit plane inter se congruere. Sit igitur $z = \frac{\lambda (1 + e \operatorname{cos}. \Phi)}{\sqrt{(1 + 2e \operatorname{cos}. \Phi + e^2)}}$, hinc erit

$$dz = - \frac{\lambda \, d\Phi \operatorname{sin}. \Phi (e + \operatorname{cos}. \Phi)}{(1 + 2e \operatorname{cos}. \Phi + e^2)^{\frac{3}{2}}},$$

 ideo-

ideoque erit:

$$Z = \frac{\mu \sin.\Phi}{\sqrt{(1+2e\cos.\Phi+e^2)}} \text{ et } Z' = \frac{\mu'(e+\cos.\Phi)}{\sqrt{(1+2e\cos.\Phi+e^2)}},$$

vnde mox perſpicitur neceſſum eſſe, vt ſtatuatur

$$Z = \sqrt{(1-mzz)} = \frac{e\sin.\Phi}{\sqrt{(1+2e\cos.\Phi+e^2)}},$$

poſito $\lambda = \frac{1}{\sqrt{m}}$. Tum vero fiet

$$Z' = \sqrt{(nzz \pm 1)} = \sqrt{\frac{n \pm m}{m}} \cdot \frac{e+\cos.\Phi}{\sqrt{(1+2e\cos.\Phi+e^2)}},$$

poſito $e = \sqrt{\frac{n \pm m}{n}}$, hincque

$$\sqrt{(nzz \pm 1)} = e\sqrt{\frac{n}{m}} \cdot \frac{e+\cos.\Phi}{\sqrt{(1+2e\cos.\Phi+e^2)}},$$

quare habebimus

$$dz\frac{Z}{Z'} = -\frac{d\Phi.\sin.\Phi^2}{\sqrt{n}(1+2e\cos.\Phi+e^2)^{\frac{3}{2}}},$$

ſicque Caſus formulae noſtrae III et X per hanc reductionem expediuntur. Et hae quidem reductiones illae ipſae ſunt, per quas integrationes formularum

$$\frac{dz\sqrt{(1+mzz)}}{z} \text{ et } \frac{dz}{z}\sqrt{(1-mzz)}$$

in §§ 30 et 31 Diſſertationis praecedentis elicuimus.

§. 6. Inter formulas differentiales, quae ad formam iſtam a nobis propoſitam ſubſtitutione quadam ſe reduci patiuntur, primum occurrit iſthaec: $\frac{dx\sqrt{(1+mxx)}}{xx\sqrt{(1+nxx)}}$, pro qua ponere licebit, aut $z = \frac{1}{x}$, aut $z = \frac{\sqrt{(1+nxx)}}{x}$. Priori adhibita ſubſtitutione eſt

$$\frac{dx}{x^2} = -dz;\ \sqrt{(1+mxx)} = \frac{\sqrt{(zz+m)}}{z};$$

$$\sqrt{(1+nxx)} = \frac{\sqrt{(zz+n)}}{z}, \text{ hincque}$$

$$\frac{dx\sqrt{(1+mxx)}}{x^2\sqrt{(1+nxx)}} = -\frac{dz\sqrt{(zz+m)}}{\sqrt{(zz+n)}},$$

quae poſterior forma omnino cum illa a nobis propoſita con-

congruit. Nec signorum mutatio heic vllam alterationem producit, quum perinde sit quo signo quantitates m et n afficiantur. Altera substitutio, qua hic vti licebit, est

$$z = \frac{\sqrt{(1+nxx)}}{x}, \text{ vnde colligitur } z^2 x^2 = 1 + nxx,$$

hincque

$$x = \frac{1}{\sqrt{(zz-n)}} \text{ et } \frac{dx}{x^2} = -\frac{z\,dz}{\sqrt{(zz-n)}},$$

tum vero erit

$$1 + mxx = \frac{zz+m-n}{zz-n} \text{ et}$$

$$\sqrt{(1+mxx)} = \frac{\sqrt{(zz+m-n)}}{\sqrt{(zz-n)}}, \text{ nec non}$$

$$\sqrt{(1+nxx)} = zx = \frac{z}{\sqrt{(zz-n)}},$$

quapropter denique fiet

$$\frac{dx}{xx} \frac{\sqrt{(1+mxx)}}{\sqrt{(1+nxx)}} = -\frac{dz\sqrt{(zz+m-n)}}{\sqrt{(zz-n)}}.$$

Vbi quidem perinde est, quo signo m et n afficiuntur, quin etiam, si formula differentialis ita sit expressa:

$$\frac{dx}{xx} \frac{\sqrt{(1 \pm mxx)}}{\sqrt{(nxx-1)}},$$

facile perspiciatur, pro z adhibendam esse substitutionem,

$$z = \frac{\sqrt{(nxx-1)}}{x}, \text{ vnde fiet } x = \frac{1}{\sqrt{(n-zz)}} \text{ et}$$

$$\sqrt{(1 \pm mxx)} = \frac{\sqrt{(n \pm m - zz)}}{\sqrt{(n-zz)}}$$

eritque

$$\frac{dx}{xx} \frac{\sqrt{(1 \pm mxx)}}{\sqrt{(nxx-1)}} = \frac{dz\sqrt{(n \pm m - zz)}}{\sqrt{(n-zz)}}.$$

§. 7. Secunda formula, quae heic in censum venit, est

$$\frac{xx\,dx}{\sqrt{(1+mxx)(1+nxx)}}, \text{ siue etiam } \frac{xx\,dx}{\sqrt{(1+mxx)(nxx-1)}},$$

pro qua substitutione ista vtamur: $z = \sqrt{(1+nxx)}$, hincque fiet

 $x\,dx =$

$$x\,dx = \frac{z\,dz}{n};\; x = \frac{\sqrt{(zz-1)}}{\sqrt{n}};\; 1 - mxx = \frac{n-m+mzz}{n}\text{ et}$$

$$\sqrt{(1+mxx)} = \frac{\sqrt{(n-m+mzz)}}{\sqrt{n}},$$

quare erit

$$\frac{xx\,dx}{\sqrt{(1+mxx)(1+nxx)}} = \frac{dz\sqrt{(zz-1)}}{n\sqrt{(n-m+mzz)}}.$$

Tertia formula, quae substitutione ad formam propositam reducitur, est

$$\frac{dx}{x^2\sqrt{(1+mxx)(1+nxx)}},\text{ siue }\frac{dx}{xx\sqrt{(1+mxx)(nxx-1)}}.$$

Sufficiet autem priorem illarum considerasse, pro qua ponatur $z = \frac{\sqrt{(1+nxx)}}{x}$, eritque $x^2z^2 = 1 + nxx$, hinc

$$x = \frac{1}{\sqrt{(zz-n)}};\; \frac{dx}{x^2} = -\frac{z\,dz}{\sqrt{(zz-n)}};$$

$$\sqrt{(1+mxx)} = \frac{\sqrt{(zz+m-n)}}{\sqrt{(zz-n)}};\; \sqrt{(1+nxx)} = zx = \frac{z}{\sqrt{(zz-n)}},$$

quamobrem obtinebimus

$$\frac{dx}{x^2\sqrt{(1+mxx)(1+nxx)}} = -\frac{dz\sqrt{(zz-n)}}{\sqrt{(zz+m-n)}}.$$

Pro hac formula substitutione quoque vti licebit

$$z = \frac{\sqrt{(1+mzz)}}{x},$$

verum hinc consimilis plane formula oritur, ac supra.

§. 8. Quarta formula, substitutione ad istam $dz\frac{Z}{\mathfrak{Z}}$, reducenda, est

$$dx\frac{\sqrt{(1+mxx)}}{(1+nxx)^{\frac{3}{2}}},\text{ siue }dx\frac{\sqrt{(1+mxx)}}{(nxx-1)^{\frac{3}{2}}},$$

vbi priorem considerasse sufficiet. Ponatur autem pro illa

$$z = \frac{1}{\sqrt{(1+nxx)}},\text{ eritque }1 + nxx = \frac{1}{zz},\text{ hinc}$$

$$nxx = \frac{1-zz}{zz}\text{ et }x = \frac{\sqrt{(1-zz)}}{z\sqrt{n}},$$

porro

porro erit

$$n x\, d x = -\frac{d z}{z^3};\ d x = -\frac{d z}{z^3 \sqrt{n(1-zz)}},$$

tum vero fiet

$$\sqrt{(1+m x x)} = \frac{\sqrt{((n-m)zz+m)}}{z\sqrt{n}},$$

quare denique colligetur

$$d x \frac{\sqrt{(1+m x x)}}{(1+n x x)^{\frac{3}{2}}} = - d z \frac{\sqrt{((n-m) z z+m)}}{n \sqrt{(1-z z)}}.$$

Statui autem quoque poteſt

$z = \frac{x}{\sqrt{(1+nxx)}}$, quo facto erit

$z z + n z z x x = x x$, hincque $x = \frac{z}{\sqrt{(1-nzz)}}$,

vnde

$$d x = \frac{d z}{(1-n z z)^{\frac{3}{2}}} \text{ et}$$

$$\sqrt{(1+m x x)} = \frac{\sqrt{(1+(m-n)zz)}}{\sqrt{(1-nzz)}},$$

quare obtinebimus

$$d x \frac{\sqrt{(1+m x x)}}{(1+n x x)^{\frac{3}{2}}} = d z \frac{\sqrt{(1+(m-n) z z)}}{\sqrt{(1-n z z)}},$$

vbi tamen facile vnicuique liquet, hoc z cum iſto in priori formula adhibito non eſſe confundendum.

§. 9. Quinta formula, ſubſtitutione ad formam $d z \frac{Z}{Z'}$ reducibilis, eſt

$$\frac{x^2\, d x}{(1+n x x)^{\frac{3}{2}} \sqrt{(1+m x x)}}, \text{ ſiue } \frac{x^2\, d x}{(n x x-1)^{\frac{3}{2}} \sqrt{(1+m x x)}}.$$

Ponatur heic

$z =$

$z = \frac{1}{\sqrt{(1+nxx)}}$, fietque $x = \frac{\sqrt{(1-zz)}}{z\sqrt{n}}$,
$dx = \frac{-dz}{z^2\sqrt{n(1-zz)}}$; $\sqrt{(1+mxx)} = \frac{\sqrt{((n-m)zz+m)}}{z\sqrt{n}}$ et

$$\frac{x^2\,dx}{(1+nxx)^{\frac{3}{2}}\sqrt{(1+mxx)}} = -\frac{dz\sqrt{(1-zz)}}{n\sqrt{((n-m)zz+m)}}.$$

Statui vero quoque poteſt

$$z = \sqrt{\left(\frac{1+mxx}{1+nxx}\right)},$$

vnde colligitur

$$x = \sqrt{\left(\frac{1-zz}{nzz-m}\right)};\; dx = \frac{(m-n)\,z\,dz}{(nzz-m)^{\frac{3}{2}}\sqrt{(1-zz)}};$$

$\sqrt{(1+nxx)} = \frac{\sqrt{(n-m)}}{\sqrt{(nzz-m)}}$, hinc

$$(1+nxx)^{\frac{3}{2}}\sqrt{(1+mxx)}$$
$$= (1+nxx)^2\sqrt{\frac{1+mxx}{1+nxx}} = \frac{z(n-m)^2}{(nzz-m)^2};$$

quare obtinebimus

$$-\frac{dz\sqrt{(1-zz)}}{(n-m)\sqrt{(nzz-m)}} = \frac{x^2\,dx}{(1+nxx)^{\frac{3}{2}}\sqrt{(1+mxx)}}.$$

§. 10. Sexta demum formula, ad noſtrum differentiale reductionem admittens, eſt

$$\frac{dx}{(1+nxx)^{\frac{3}{2}}\sqrt{(1+mxx)}}$$

pro qua adhibeatur ſubſtitutio

$$z = \frac{x}{\sqrt{(1+nxx)}},\ \text{vnde}\ dx = \frac{dz}{(1-nzz)^{\frac{3}{2}}},$$

$\sqrt{(1+mxx)} = \frac{\sqrt{(1+(m-n)zz)}}{\sqrt{(1-nzz)}}$; $x = \frac{z}{\sqrt{(1-nzz)}}$;

ideoque

$$\frac{dx}{(1+nxx)^{\frac{3}{2}}\sqrt{(1+mxx)}} = \frac{dz\sqrt{(1-nzz)}}{\sqrt{(1+(m-n)zz)}}.$$

Denique poni poteſt

$$z = \sqrt{\frac{(1+mxx)}{(1+nxx)}}, \text{ hinc } dx = \frac{(m-n)zdz}{(nzz-m)^{\frac{3}{2}}\sqrt{(1-zz)}};$$

$$(1+nxx)^{\frac{3}{2}}\sqrt{(1+mxx)} = \frac{z(n-m)^2}{(nzz-m)^2};$$

atque

$$\frac{dx}{(1+nxx)^{\frac{3}{2}}\sqrt{(1+mxx)}} = -\frac{dz\sqrt{(nzz-m)}}{(n-m)\sqrt{(1-zz)}}.$$

§. 11. Et hae quidem ſunt formulae differentiales, quae ſubſtitutione facta immediate ad formam differentialis propoſiti reducuntur. Praeter has vero plurimae aliae dantur, quarum integratio ad integrale formulae propoſitae reducitur, ſi ad illud addatur quantitas quaepiam algebraica, vel etiam quarum integratio bina integralia formae propoſitae inuoluit. Poſterioris generis hoc eſt differentiale:

$$\frac{dz}{\sqrt{(1+mzz)(1+nzz)}}, \text{ quippe quod}$$

$$= \frac{dz(1+mzz)}{\sqrt{(1+mzz)(1+nzz)}} - \frac{mzzdz}{\sqrt{(1+mzz)(1+nzz)}}$$

$$= dz\frac{\sqrt{(1+mzz)}}{\sqrt{(1+nzz)}} - \frac{mzzdz}{\sqrt{(1+mzz)(1+nzz)}},$$

vbi prius differentiale iam formae eſt propoſitae, poſterius autem ad illam reducitur ope ſubſtitutionis §. 7 adhibitae. Tum vero erit quoque

$$\frac{dz}{\sqrt{(1+mzz)(1+nzz)}} = \frac{n\,dz\sqrt{(1+mzz)}}{(n-m)\sqrt{(1+nzz)}}$$
$$- \frac{m\,dz\sqrt{(1+nzz)}}{\sqrt{(1+mzz)}},$$

vbi vtrumque differentiale iam formae eſt propoſitae, et vlteriori reductione non indiget.

§. 12. Patet igitur formulam $\frac{dz}{\sqrt{(1+mzz)(1+nzz)}}$ ſemper quidem ad binas huiusmodi formulas:

$$dz\sqrt{\left(\frac{1+mzz}{1+nzz}\right)}$$

eſſe reducibilem, adeoque eius integrationem per rectificationem Sectionum Conicarum facile expediri poſſe. Verum tamen huiusmodi reductione inſtituta, vix primo intuitu liquet, hoc integrale arcum tam Hyperbolicum, quam Ellipticum inuoluere; quare operae omnino pretium erit, in huius formulae integrationem directe inquirere, cui inſtituto exſequendo Theorema noſtrum (V) adprime vtile erit. Primum autem eo ueniet, vt ſingulos caſus huius formulae expendamus, qui ob litteras m, n permutabiles non niſi hi numerantur:

I. $\frac{dz}{\sqrt{(1+mzz)(1+nzz)}}$; II. $\frac{dz}{\sqrt{(1+mzz)(1-nzz)}}$;
III. $\frac{dz}{\sqrt{(1+mzz)(nzz-1)}}$; IV. $\frac{dz}{\sqrt{(1-mzz)(1-nzz)}}$;
V. $\frac{dz}{\sqrt{(1-mzz)(nzz-1)}}$.

§. 13. Primum igitur formula

$\frac{dz}{\sqrt{(1+mzz)(1+nzz)}}$ ad formam $\frac{d\Phi}{\sqrt{(1+2e\cos.\Phi+e^2)}}$ reducitur, ſtatuendo $z=\frac{\lambda \sin.\Phi}{1+e\cos.\Phi}$, vnde colligitur

$$dz=\frac{\lambda d\Phi(e+\cos.\Phi)}{(1+e\cos.\Phi)^2},$$

tumque ſi ſtatuatur

$$\sqrt{(1+mzz)}=\frac{\mu\sqrt{(1+2e\cos.\Phi+e^2)}}{1+e\cos.\Phi}, \text{ erit}$$
$$\sqrt{(1+nzz)}=\frac{\mu'(e+\cos.\Phi)}{1+e\cos.\Phi}.$$

Habe-

Habebimus vero

$$\sqrt{(1 + m z z)} = \frac{\sqrt{(1 + 2 e \cos. \Phi + e^2)}}{1 + e \cos. \Phi},$$

posito $m \lambda^2 = 1$, siue $\lambda = \frac{1}{\sqrt{m}}$, tumque fiet

$$\sqrt{(1 + n z z)} = \frac{e + \cos. \Phi}{1 + e \cos. \Phi},$$ si statuatur $e^2 = \frac{m + n}{m}$,

hincque

$$\frac{d z}{\sqrt{(1 + m z z)(1 + n z z)}} = \frac{d \Phi}{\sqrt{m} \sqrt{(1 + 2 e \cos. \Phi + e^2)}}.$$

Praeterea si ponatur

$$\sqrt{(1 + n z z)} = \frac{\sqrt{(1 + 2 e' \cos. \Psi + e'^2)}}{1 + e' \cos. \Psi},$$

fiet $n \lambda^2 = 1$, siue $\lambda = \frac{1}{\sqrt{n}}$, tumque

$$\sqrt{(1 + m z z)} = \frac{e' + \cos. \Psi}{1 + e' \cos. \Psi},$$ posito $e'^2 = \frac{m + n}{n}$, vnde fit

$$\frac{d z}{\sqrt{(1 + m z z)(1 + n z z)}} = \frac{d \Psi}{\sqrt{n} \sqrt{(1 + 2 e' \cos. \Psi + e'^2)}}.$$

Caeterum facile quoque intelligitur, loco substitutionis $z = \frac{\lambda \sin. \Phi}{1 + e \cos. \Phi}$ heic adhiberi posse $z = \frac{\lambda \sin. \Phi}{e + \cos. \Phi}$; reductiones autem inde deriuandas cum supra allatis prorsus conuenire, nisi quod valores pro e inuersi sint illorum, quos supra attulimus.

§. 14. Pro formula $\frac{d z}{\sqrt{(1 + m z z)(1 - n z z)}}$ ad istam formam $\frac{d \Phi}{\sqrt{(1 + 2 e \cos. \Phi + e^2)}}$ reducenda, statuatur

$$z = \frac{\lambda (e + \cos. \Phi)}{\sqrt{(1 + 2 e \cos. \Phi + e^2)}},$$ hinc

$$d z = \frac{\lambda d \Phi \sin. \Phi (1 + e \cos. \Phi)}{(1 + 2 e \cos. \Phi + e^2)^{\frac{3}{2}}},$$

quapropter si ponatur

$$\sqrt{(1 - n z z)} = \frac{\mu \sin. \Phi}{\sqrt{(1 + 2 e \cos. \Phi + e^2)}}$$ fiet

$$\sqrt{(1 + m z z)} = \frac{\mu' (1 + e \cos. \Phi)}{\sqrt{(1 + 2 e \cos. \Phi + e^2)}}.$$

 Est

Est vero

$$\sqrt{(1 - nzz)} = \frac{\sin.\Phi}{\sqrt{(1 + 2e\cos.\Phi + e^2)}},$$

si ponatur $n\lambda^2 = 1$, siue $\lambda = \frac{1}{\sqrt{n}}$; tumque fiet

$$1 + mzz = \frac{1 + 2e\cos.\Phi + e^2 + \frac{m}{n}(e^2 + 2e\cos.\Phi + \cos.\Phi^2)}{1 + 2e\cos. + e^2} =$$

$$\left(1 + \frac{m}{n}\right)\frac{(1 + 2e\cos.\Phi + e^2\cos.\Phi^2)}{1 + 2e\cos.\Phi + e^2} + \frac{e^2\sin.\Phi^2 - \frac{m}{n}\sin.\Phi^2 + \frac{m}{n}e^2\sin.\Phi^2}{1 + 2e\cos.\Phi + e^2}.$$

Hinc si ponatur

$$e^2\frac{(n+m)}{n} = \frac{m}{n}, \text{ seu } e^2 = \frac{m}{n+m}, \text{ erit}$$

$$\sqrt{(1 + mzz)} = \frac{(1 + e\cos.\Phi)\sqrt{(1 + \frac{m}{n})}}{\sqrt{(1 + 2e\cos.\Phi + e^2)}} = \frac{\sqrt{m}}{e\sqrt{n}}.\frac{(1 + e\cos.\Phi)}{\sqrt{(1 + 2e\cos.\Phi + e^2)}},$$

ideoque

$$\frac{dz}{\sqrt{(1 + mzz)(1 - nzz)}} = \frac{-e\,d\Phi}{\sqrt{m}\sqrt{(1 + 2e\cos.\Phi + e^2)}}$$

$$= \frac{-d\Phi}{\sqrt{(m+n)}\sqrt{(1 + 2e\cos.\Phi + e^2)}}.$$

Caeterum patet, heic pro z substitui quoque posse

$$\frac{\lambda(1 + e\cos.\Phi)}{\sqrt{(1 + 2e\cos.\Phi + e^2)}};$$

verum reductio hinc oriunda cum priori prorsus consentiens est.

§. 15. Nunc si formula

$\frac{dz}{\sqrt{(1 + mzz)(nzz - 1)}}$ ad formam $\frac{d\Phi}{\sqrt{(1 + 2e\cos.\Phi + e^2)}}$

reduci debeat, ponatur

$$z = \frac{\lambda\sqrt{(1 + 2e\cos.\Phi + e^2)}}{e + \cos.\Phi}, \text{ vnde fiet}$$

$$dz = \frac{\lambda\,d\Phi\sin.\Phi(1 + e\cos.\Phi)}{(e + \cos.\Phi)^2\sqrt{(1 + 2e\cos.\Phi + e^2)}}.$$

Quare si statuatur

$$\sqrt{(nzz - 1)} = \frac{\mu\sin.\Phi}{e + \cos.\Phi}, \text{ erit}$$

$$\sqrt{(1 + mzz)} = \frac{\lambda(1 + e\,cos.\,\Phi)}{e + cos.\,\Phi};$$ atque est

$$nzz - 1 = \frac{n\lambda^2(1 + 2e\,cos.\,\Phi + e^2) - (e^2 + 2e\,cos.\,\Phi + cos.\,\Phi^2)}{(e + cos.\,\Phi)^2}$$

$$= \frac{sin.\,\Phi^2}{(e + cos.\,\Phi)^2},$$ posito $n\lambda^2 = 1$,

vnde fiet

$$1 + mzz = \frac{(e + cos.\,\Phi)^2 + \frac{m}{n}(1 + 2e\,cos.\,\Phi + e^2)}{(e + cos.\,\Phi)^2}$$

$$= \frac{(1 + \frac{m}{n})(1 + e\,cos.\,\Phi)^2}{(e + cos.\,\Phi)^2} + \frac{sin.\,\Phi^2(e^2 - 1 + \frac{m}{n}e^2)}{(e + cos.\,\Phi)^2},$$

$$= \frac{(n + m)(1 + e\,cos.\,\Phi)^2}{n(e + cos.\,\Phi)^2}$$

si ponatur

$$e^2 = \frac{n}{n + m},$$ seu $e = \frac{\sqrt{n}}{\sqrt{n + m}}$, vnde

$$\sqrt{(1 + mzz)} = \frac{(1 + e\,cos.\,\Phi)}{e(e + cos.\,\Phi)},$$ ideoque

$$\frac{dz}{\sqrt{(1 + mzz)(nzz - 1)}} = \frac{\lambda e\,d\Phi}{\sqrt{(1 + 2e\,cos.\,\Phi + e^2)}}$$

$$= \frac{d\Phi}{\sqrt{(n + m)}\sqrt{(1 + 2e\,cos.\,\Phi + e^2)}}.$$

Tum autem heic substitutione quoque

$$z = \frac{\lambda\sqrt{(1 + 2e\,cos.\,\Phi + e^2)}}{(1 + e\,cos.\,\Phi)},$$

vti licebit, verum reductio, inde deducenda, ad priorem redire censenda est.

§. 16. Pro formula IV $\frac{dz}{\sqrt{(1 - mzz)(1 - nzz)}}$ ad formam istam propositam reducenda, statuatur

$$z = \lambda\frac{(e + cos.\,\Phi)}{1 + e\,cos.\,\Phi},$$ hinc $dz = \lambda\frac{(e^2 - 1)d\Phi\,sin.\,\Phi}{(1 + e\,cos.\,\Phi)^2}$.

Quare si ponatur

$$\sqrt{(1 - nzz)} = \frac{\mu\,sin.\,\Phi}{1 + e\,cos.\,\Phi},$$ erit

$$\sqrt{(1 - mzz)} = \mu'\frac{\sqrt{(1 + 2e\,cos.\,\Phi + e^2)}}{1 + e\,cos.\,\Phi}.$$

Est vero

$$1 - n z z = \frac{(1 + e\,cos.\,\Phi)^2 - n\lambda^2 (e + cos.\,\Phi)^2}{(1 + e\,cos.\,\Phi)^2} = \frac{(1 - e^2)\,sin.\,\Phi^2}{(1 + e\,cos.\,\Phi)^2},$$

posito $n\lambda^2 = 1$; tum autem fiet

$$1 - m z z = \frac{(1 + e\,cos.\,\Phi)^2 - \frac{m}{n}(e + cos.\,\Phi)^2}{(1 + e\,cos.\,\Phi)^2}$$

$$= \left(1 - \frac{m}{n}\right)\frac{(1 + 2e\,cos.\,\Phi + e^2)}{(1 + e\,cos.\,\Phi)^2} + \frac{sin.\,\Phi^2\left(\frac{m}{n} - e^2\right)}{(1 + e\,cos.\,\Phi)^2},$$

ex quo, si statuatur $\frac{m}{n} = e^2$. prodibit

$$1 - m z z = (1 - e^2)\frac{(1 + 2e\,cos.\,\Phi + e^2)}{(1 + e\,cos.\,\Phi)^2},$$

ideoque

$$\frac{dz}{\sqrt{(1 - m z z)(1 - n z z)}} = \frac{-\lambda\,d\Phi}{\sqrt{(1 + 2e\,cos.\,\Phi + e^2)}} = \frac{-d\Phi}{\sqrt{n}\sqrt{(1 + 2e\,cos.\,\Phi + e^2)}}.$$

Caeterum substitutio $z = \frac{\lambda(1 + e\,cos.\,\Phi)}{e + cos.\,\Phi}$, ad easdem perducet conclusiones, quod etiam oppido liquet, si posterior valor ipsius e prioris statuatur inuersus.

§. 17. Pro formula (V) $\frac{dz}{\sqrt{(1 - m z z)(n z z - 1)}}$, ponatur $z = \frac{\lambda\sqrt{(1 + 2e\,cos.\,\Phi + e^2)}}{e + cos.\,\Phi}$, eritque

$$dz = \frac{\lambda\,d\Phi\,sin.\,\Phi\,(1 + e\,cos.\,\Phi)}{(e + cos.\,\Phi)^2\sqrt{(1 + 2e\,cos.\,\Phi + e^2)}};\ \sqrt{(n z z - 1)} = \frac{sin.\,\Phi}{e + cos.\,\Phi},$$

posito $n\lambda^2 = 1$; tum vero erit

$$1 - m z z = \frac{(e + cos.\,\Phi)^2 - \frac{m}{n}(1 + 2e\,cos.\,\Phi + e^2)}{(e + cos.\,\Phi)^2}$$

$$= \left(1 - \frac{m}{n}\right)\frac{(1 + e\,cos.\,\Phi)^2}{(e + cos.\,\Phi)^2} + \frac{sin\,\Phi^2\left(e^2 - 1 - \frac{m}{n}e^2\right)}{(e + cos.\,\Phi)^2}.$$

Hinc si statuatur $e^2\left(1 - \frac{m}{n}\right) = 1$, siue $e^2 = \frac{n}{n - m}$, prodibit

$$\sqrt{(1 - m z z)} = \frac{1 + e\,cos.\,\Phi}{e\,(e + cos.\,\Phi)},$$

ideo-

ideoque

$$\frac{dz}{\sqrt{(1-mzz)(nzz-1)}} = \frac{\lambda e\, d\Phi}{\sqrt{(1+2e\cos.\Phi+e^2)}} = \frac{d\Phi}{\sqrt{(n-m)}\sqrt{(1+2e\cos.\Phi+e^2)}}.$$

Patet autem, hanc reductionem locum habere non posse, nisi ponatur $n > m$; quare si fuerit $m > n$, loco formulae allatae ista adhibeatur:

$\frac{dz}{\sqrt{(mzz-1)(1-nzz)}}$, tumque si statuatur

$$z = \frac{\lambda'\sqrt{(1+2e'\cos.\psi+e'^2)}}{e'+\cos.\psi} \text{ et } \sqrt{(mzz-1)} = \frac{\sin.\psi}{e'+\cos.\psi},$$

fiet

$$\sqrt{(1-nzz)} = \frac{1+e'\cos.\psi}{e'(e'+\cos.\psi)}, \text{ posito } e' = \sqrt{\frac{m}{m-n}},$$

tumque erit

$$\frac{dz}{\sqrt{(mzz-1)(1-nzz)}} = \frac{d\psi}{\sqrt{(m-n)}\sqrt{(1+2e'\cos.\psi+e'^2)}},$$

hincque formula differentialis

$$\frac{dz}{\sqrt{(1-mzz)(nzz-1)}},$$

quae primo intuitu duplicem reductionem requirere videtur, prouti $n > m$. vel $n < m$, tamen eadem substitutione ad formam propositam reducitur, ob litteras m et n permutabiles. Per singulos igitur casus eundo, demonstratum est, integralia formularum propositarum semper et omni casu binos arcus, vnum Ellipticum, alterum Hyperbolicum inuoluere, nisi quatenus litteris m et n valores, siue euanescentes, seu infiniti tribuantur.

§. 18. Quod autem formulas differentiales attinet ex prioribus deriuandas, posito vel $m = 0$, vel $m = \infty$, illae sequenti ratione expediuntur. Formula differentialis $\frac{dz}{\sqrt{(1+nzz)}}$ fit aequalis $\frac{d\psi}{\sqrt{n}\sqrt{2}(1+\cos.\psi)}$ §. 13, posito

$e = 1$ et $z = \frac{\sin.\psi}{\sqrt{n}(1+\cos.\psi)} = \frac{1}{\sqrt{n}}$ tang. $\frac{1}{2}\psi$.

Formu-

Formula differentialis

$\frac{dz}{\sqrt{1-nzz)}}$ aequalis fiet

$= \frac{d\Phi}{\sqrt{n}}$ §. 14, posito $e = 0$, et $z = \frac{cos.\Phi}{\sqrt{n}}$,

Differentiale autem

$\frac{dz}{\sqrt{(nzz-1)}}$ fiet $= \frac{d\Phi}{\sqrt{n}.\sqrt{2(1+cos.\Phi)}}$

$$= \frac{d\Phi}{2\sqrt{n}.\,cos.\frac{1}{2}\Phi} \text{ §. 15. posito } e = 1, \text{ et}$$

$$z = \frac{1}{\sqrt{n}.\,cos.\frac{1}{2}\Phi},$$

et hi quidem sunt casus, pro quibus statuitur $m = 0$. Pro casibus autem, vbi $m = \infty$, negotium per reductiones supra commemoratas non prorsus confici potest. Sic si formulae differentialis $\frac{dz}{z\sqrt{(1+nzz)}}$ integrale ope §. 13. quaeri deberet, substitutio $z = \frac{sin.\Phi}{\sqrt{m}(1+cos.\Phi)}$ fieret incongrua, ob $\sqrt{m} = \infty$. Si vero ponatur

$e\sqrt{(e^2-1)}\frac{sin.\Phi}{1+e\,cos.\Phi} = \frac{1+e\,cos.\Psi}{sin.\Psi}$, fiet

$\frac{d\Phi}{\sqrt{(1+2e\,cos.\Phi+e^2)}} = \frac{-d\Psi}{\sqrt{(1+2e.cos.\Psi+e^2)}}$,

vnde posito $e = 1$, esse debebit

$$\frac{dz}{z\sqrt{(1+nzz)}} = \frac{-d\Psi}{\sqrt{2(1+cos.\Psi)}} = \frac{-d\Psi}{2\,cos.\frac{1}{2}\Psi},$$

posito

$z = \frac{1}{e\sqrt{m}(e^2-1)}\frac{1+cos.\Psi}{sin.\Psi}$. Est vero ob

$e^2 = \frac{m+n}{m}$, $e^2 - 1 = \frac{n}{m}$ et $\sqrt{m}(e^2-1) = \sqrt{n}$,

vnde pro casu praesenti

$z = \frac{1}{\sqrt{n}}\,cos.\frac{1}{2}\Psi$.

Formu-

Formula differentialis

$$\frac{dz}{z\sqrt{(1-nzz)}} \text{ fit } = \frac{-d\Phi}{\sqrt{2(1+\text{cof.}\,\Phi)}} = \frac{-d\Phi}{2\,\text{cof.}\,\frac{1}{2}\Phi}$$

§. 14, pofito $e = 1$, et

$$z = \frac{1+\text{cof.}\,\Phi}{\sqrt{n}\sqrt{2(1+\text{cof.}\,\Phi)}} = \frac{\text{cof.}\,\frac{1}{2}\Phi.}{\sqrt{n}}.$$

Denique formula differentialis

$\frac{dz}{z\sqrt{(nzz-1)}}$ per §. 15 fit $= d\Phi$, pofito
$e = 0$ et $z = \frac{1}{\sqrt{n}.\text{cof.}\,\Phi}$.

§. 19. Praeter reductiones in fuperioribus commemoratas pro formulis huius generis: $\frac{dz}{\sqrt{(1+mzz)(1+nzz)}}$, aliae quoque adhiberi poffent, quarum mentionem inieciffe fufficiet. Sic pro formula

$\frac{dz}{\sqrt{(1+mzz)(1+nzz)}}$ fubftitutio $z = \lambda \frac{(1+e\,\text{cof.}\,\psi)}{\text{fin.}\,\psi}$

adhiberi poteft. Pro formula

$\frac{dz}{\sqrt{(1+nzz)(1-nzz)}}$ fubftitutione vti licebit $z = \frac{\lambda\,\text{fin.}\,\psi}{(1+e\,\text{cof.}\,\psi)^2}$;

pofito enim $n\lambda^2 = 1 - e^2$, fiet

$$1 - nzz \frac{(1+e\,\text{cof.}\,\psi)^2 - (1-e^2)\,\text{fin.}\,\psi^2}{(1+e\,\text{cof.}\,\psi)^2} = \frac{(\text{cof.}\,\psi + e)^2}{(1+e\,\text{cof.}\,\psi)^2},$$

tum vero erit

$$1 + mzz \frac{1+2e\,\text{cof.}\,\psi + e^2}{(1+e\,\text{cof.}\,\psi)^2}, \text{ pofito } e^2 = \frac{m}{m+n}.$$

Pro formula $\frac{dz}{\sqrt{(1-mzz)(nzz-1)}}$, praeter fubftitutionem §. 15 allatam, ifthanc: $z = \lambda \frac{(1+e\,\text{cof.}\,\psi)}{\text{fin.}\,\psi}$ adhibere quoque licebit, vbi $n\lambda^2 = \frac{1}{1-e^2}$. Vlterius formulae $\frac{dz}{\sqrt{(1-mzz)(1-nzz)}}$ reductio perficietur ope fubftitutionis

 $z =$

$$z = \frac{\lambda \sin. \psi}{\sqrt{(1 + 2\cos. \psi + e^2)}}, \text{ et posito } n\lambda^2 = 1, \text{ fiet}$$

$$1 - nzz = \frac{(e + \cos. \psi)^2}{1 + 2e\cos. \psi + e^2}, \text{ nec non}$$

$$1 - mzz = \frac{(1 + e\cos. \psi)^2}{1 + 2e\cos. \psi + e^2}, \text{ posito } \frac{m}{n} = e^2.$$

At tamen formulae $\frac{dz}{\sqrt{(1 - mzz)(nzz - 1)}}$ reductio, instituenda substitutione

$$z = \lambda \frac{(1 + e\cos. \psi)}{\sin. \psi},$$

non succedit, quia, etiamsi $nzz - 1$ ad alterutram harum formarum:

$$\frac{(e + \cos. \psi)^2}{\sin. \psi^2}, \text{ vel } \frac{1 + 2e\cos. \psi + e^2}{\sin. \psi^2} \text{ reducatur},$$

nullo modo praestari potest, vt $1 - mzz$ alterutri harum formarum aequetur.

§. 20. Si in formulis supra §§. 6 - - - 9 allatis ponatur $zz = v$, has consequemur formulas differentiales, per rectificationem Sectionum Conicarum integrabiles:

$$1.\ \frac{dv\sqrt{(1 + mv)}}{\sqrt{v(1 + nv)}};\quad 2.\ \frac{dv\sqrt{(1 + mv)}}{v\sqrt{v(1 + nv)}};\quad 3.\ \frac{dv\sqrt{v}}{\sqrt{(1 + mv)(1 + nv)}};$$

$$4.\ \frac{dv}{v\sqrt{v(1 + mv)(1 + nv)}};\quad 5.\ \frac{dv\sqrt{(1 + mv)}}{(1 + nv)\sqrt{v(1 + nv)}};$$

$$6.\ \frac{dv\sqrt{v}}{(1 + nv)^{\frac{3}{2}}\sqrt{(1 + mv)}};\quad 7.\ \frac{dv}{(1 + nv)^{\frac{3}{2}}\sqrt{v(1 + mv)}};$$

$$8.\ \frac{dv}{\sqrt{v(1 + mv)(1 + nv)}}.$$

Ex quibus concluditur, hoc differentiale:

$$\frac{du(A + Bu)}{\sqrt{(\alpha + \beta u)(\gamma + \delta u)(\varepsilon + \zeta u)}},$$

siue simpliciter $\frac{du(A + Bu)}{\sqrt{u(\alpha + \beta u)(\gamma + \delta u)}}$ per rectificationem Sectionum

onum Conicarum integrari posse; est enim hoc differentiale:

$$\frac{A\,du}{\sqrt{u(\alpha+\beta u)(\gamma+\delta u)}}+\frac{B\,du\sqrt{u}}{\sqrt{(\alpha+\beta u)(\gamma+\delta u)}}$$

$$=\frac{A\,du}{\sqrt{\alpha\gamma}.\sqrt{(u(1+\frac{\beta}{\alpha}u)(1+\frac{\delta}{\gamma}u)}}$$

$$+\frac{B\,du\sqrt{u}}{\sqrt{\alpha\gamma}\sqrt{(1+\frac{\beta}{\alpha}u)(1+\frac{\delta}{\gamma}u)}},$$

quae cum formulis differentialibus 8 et 3 plane congruunt. Quin imo adeo haec formula differentialis:

$$\frac{du(A+Bu)}{\sqrt{u(1+2mu\,cos.\theta+m^2u^2)}},$$

per rectificationem Sectionum Conicarum sit integrabilis, etiamsi productum $1+2mu$ cos. $\theta+m^2u^2$ binos factores habeat imaginarios. Nam si ponatur

$$1+2mu\,\text{cos.}\,\theta+m^2u^2=(1+muz)^2,$$

fiet $2mu$ cos. $\theta=m^2u^2(z^2-1)+2muz$, vnde colligitur

$$u=\frac{2(cos.\theta-z)}{m(zz-1)}=\frac{2(z-cos.\theta)}{m(1-zz)};\ du=\frac{2dz(1+z^2-2z\,cos.\theta)}{m(1-zz)^2};$$

$$1+muz=\frac{1+2z(z-cos.\theta)}{1-zz}=\frac{1+2z\,cos.\theta+zz}{1-zz},$$

ideoque, ob

$$A+Bu=\frac{mA(1-zz)+2B(z-cos.\theta)}{m(1-zz)},$$

prodibit

$$\frac{du(A+Bu)}{\sqrt{u(1+2mu\,cos.\theta+m^2u^2)}}=\frac{du(A+Bu)}{(1+muz)\sqrt{u}}=\frac{A\,du}{(1+muz)\sqrt{u}}$$

$$+\frac{Bdu\sqrt{u}}{1+muz}=\frac{A\sqrt{2}}{\sqrt{m}}\frac{dz}{\sqrt{(1-zz)(z-cos.\theta)}}$$

$$+\frac{2B\sqrt{2}}{n\sqrt{m}}\frac{dz\sqrt{(z-\text{cos.}\,\theta)}}{(1-zz)^{\frac{3}{2}}}.$$

Prioris formae integratio per formulam nostram 8 constat;

 pro

pro posteriori vero habetur

$$\int \frac{dz\,\sqrt{(z-\text{cos.}\,\theta)}}{(1-zz)^{\frac{3}{2}}} = \frac{z\,\sqrt{(z-\text{cos.}\,\theta)}}{(1-zz)^{\frac{1}{2}}}$$

$$-\tfrac{1}{2}\int \frac{z\,dz}{\sqrt{(z-\text{cos.}\,\theta)}\,(1-zz)},$$

quod vltimum integrale quomodo ad rectificationes Sectionum Conicarum sit reducendum ex superioribus constat.

§. 21. In Tomo VIII Nouor. Comment. docuit Illustris *Eulerus*, integrationem huiusmodi formulae:

$$\int \frac{dx}{\sqrt{(a+bx+cx^2+dx^3+ex^4)}}$$

semper et omni casu, per rectificationem Sectionum Conicarum expediri posse. Nam si supponatur formam $a+bx+cx^2+dx^3+ex^4$ in hos factores trinomiales reales resolui:

$$\alpha+2\beta x+\gamma x^2 \text{ et } \delta+2\varepsilon x+\zeta xx,$$

tumque ponatur

$$y = \frac{\delta+2\varepsilon x+\zeta xx}{\alpha+2\beta x+\gamma xx}, \text{ fiet}$$

$$\frac{dx}{\sqrt{(\alpha+2\beta x+\gamma xx)(\delta+2\varepsilon x+\zeta xx)}} = \frac{\frac{1}{2}dy}{\sqrt{y\,(pyy+qy+r)}},$$

vbi

$$p=\beta\beta-\alpha\gamma;\; q=\alpha\zeta-2\beta\varepsilon+\gamma\delta;\; r=\varepsilon\varepsilon-\zeta\zeta.$$

At vero de formula

$$\frac{dx\,(A+Bx+Cxx)}{\sqrt{(\alpha+2\beta x+\gamma xx)\,(\delta+2\varepsilon x+\zeta xx)}}$$

nondum constitit, qua ratione eius integratio per rectificationem Sectionum Conicarum generatim expediatur. Facile autem liquet, formulam simpliciorem:

$$\frac{dx\,(A+Bx+Cx^2}{\sqrt{(Dx^4+Ex^2+F)}},$$

ita

ita esse comparatam, vt semper per rectificationem Sectionum Conicarum integretur; nam posito $x x = z$, fit

$$dx = \frac{dz}{\sqrt{z}}, \text{ et } \frac{dx(A+Cx^2)}{\sqrt{(Dx^4+Ex^2+F)}} = \frac{dz(A+Cz)}{\sqrt{z(Dzz+Ez+F)}}$$
$$= \frac{A\,dz}{\sqrt{z(Dzz+Ez+F)}} + \frac{C\,dz\sqrt{z}}{\sqrt{(Dzz+Ez+F)}},$$

quae differentialia cum forma

$$\frac{du(A+Bu)}{\sqrt{u(1+2mu\cos.\theta+m^2 \cdot u^2)}}$$

(§. 20) congruunt, si nimirum $Dzz + Ez + F$ factores non habuerit reales, alioquin autem ad formas nostras 8 et 3, eodem § allatas, reducuntur. Tum vero erit

$$\frac{Bx\,dx}{\sqrt{(Dx^4+Ex^2+F)}} = \frac{B\,dz}{z\sqrt{(Dz^2+Ez+F)}},$$

cuius differentialis integratio quadraturam Circuli vel Hyperbolae inuoluit.

22. Quod attinet formulam

$$\frac{dy(P+Qy+Ry^2)}{\sqrt{(Ay^4+2By^3+Cy^2+2Dy+E)}},$$

quamuis non constet, an generatim ad rectificationem Sectionum Conicarum reducatur, tamen ab Illustr. *Eulero*, in Tomo VIII Commentar. demonstratum est, eandem per hanc rectificationem esse integrabilem, quoties fuerit $QA = RB$, ex quo, si fuerit $B = 0$, sequitur etiam statuendum esse $Q = 0$, vnde colligitur, pro isto casu formulam propositam sequentem adipisci formam:

$$\frac{dy(P+Ry^2)}{\sqrt{(Ay^4+Cy^2+2Dy+E)}},$$

hinque formula ista generalis ad rectificationem Sectionum Conicarum reducetur, modo formula

$$\frac{Ry^2dy}{\sqrt{(Ay^4+Cy^2+2Dy+E)}},$$

ad istam rectificationem se reduci patiatur. Pro casu autem particulari, quo $QA = RB$, demonstratio etiam sequenti

quenti

quenti ratione adornari poterit:

Ponatur $y = \frac{m + nx}{m' + n'x}$, eritque

$$\sqrt{(Ay^4 + 2By^3 + Cy^2 + 2Dy + E)} =$$
$$\frac{\sqrt{(A(m+nx)^4 + 2B(m+nx)^3(m'+n'x) + C(m+nx)^2(m'+n'x)^2 + 2D(m+nx)(m'+n'x)^3 + E(m'+n'x)^4)}}{(m'+n'x)^2}$$

et $dy = \frac{(m'n - mn')dx}{(m'+n'x)^2}$; hinc ſi in formula transformata, coefficientes poteſtatum x^3 et x euaneſcere ſupponantur, has aequationes adipiſcemur:

$$1°.)\ 4Amn^3 + 2Bm'n^3 + 6Bmn'n^2 + 2Cm'n'n^2 + 2Cmnn'^2 + 2Dmn'^3 + 6Dnm'n'^2 + 4Em'n'^3 = 0;$$

$$2°.)\ 4Am^3n + 2Bm^3n' + 6Bm^2m'n + 2Cmm'^2n + 2Cm^2m'n' + 2Dm'^3n + 6Dm'^2n'm + 4Em'^3n' = 0;$$

ex priori colligimus:

$$2A + B\frac{m'}{m} + 3B\frac{n'}{n} + C\frac{m'}{m}.\frac{n'}{n} + C\frac{n'^2}{n^2} + D\frac{n'^3}{n^3} + 3D\frac{m'}{m}.\frac{n'^2}{n^2} + 2E\frac{m'}{m}.\frac{n'^3}{n^3} = 0;$$

ex altera vero

$$2A + B\frac{n'}{n} + 3B\frac{m'}{m} + C\frac{m'^2}{m^2} + C\frac{m'}{m}.\frac{n'}{n} + D\frac{m'^3}{m^3} + 3D\frac{n'}{n}.\frac{m'^2}{m^2} + 2E\frac{n'}{n}.\frac{m'^3}{m^3} = 0,$$

quarum aequationum differentia, per $\frac{m'}{m} - \frac{n'}{n}$ diuiſa, praebet:

$$0 = 2B + C\left(\frac{m'}{m} + \frac{n'}{n}\right) + D\left(\frac{m'^2}{m^2} + \frac{4m'n'}{mn} + \frac{n'^2}{n^2}\right) + 2E\frac{m'}{m}.\frac{n'}{n}\left(\frac{m'}{m} + \frac{n'}{n}\right).$$

Simili autem ratione colligitur, multiplicando priorem per $\frac{m'}{m}$ et poſteriorem per $\frac{n'}{n}$, tumque diuidendo productorum differentiam per $\frac{m'}{m} - \frac{n'}{n}$:

$$0 = 2A + B\left(\frac{m'}{m} + \frac{n'}{n}\right) - D\frac{m'}{m}.\frac{n'}{n}\left(\frac{m'}{m} + \frac{n'}{n}\right) - 2E\frac{m'^2}{m^2}.\frac{n'^2}{n^2}.$$

Si

Si breuitatis gratia ponatur

$$\frac{n'}{m} + \frac{n'}{n} = p, \quad \frac{m'}{m} \cdot \frac{n'}{n} = q;$$

nostrae aequationes ita erunt expressae:

$$0 = 2B + Cp + D(pp + 2q) + 2Epq$$
$$0 = 2A + Bp - Dpq - 2Eq^2.$$

Ex posteriori fit $p = \frac{2(Eq^2 - A)}{B - Dq}$, qui valor in priori substitutus praebet hanc aequationem:

$$2B(B - Dq)^2 + 2C(B - Dq)(Eq^2 - A)$$
$$+ 4D(Eq^2 - A)^2 + 2D(B - Dq)^2 q$$
$$+ 4E(Eq^2 - A)(B - Dq)q,$$

quae euoluta erit:

$$q^3(D^3 - CDE + 2BEE) - q^2(BD^2 - BCE + 2ADE)$$
$$- q(B^2D - ACD + 2ABE)$$
$$+ B^3 - ABC + 2A^2D = 0.$$

§. 23. Simul ac ex hac aequatione valor ipsius q definitus fuerit, habebitur p ope aequationis $p = \frac{2(Eq^2 - A)}{B - Dq}$, tumque facili negotio inuenientur:

$$\frac{m'}{m} \text{ et } \frac{n'}{n}, \text{ ob } \frac{m'}{m} + \frac{n'}{n} = p \text{ et } \frac{m'}{m} \cdot \frac{n'}{n} = q.$$

Caeterum heic quoque obseruasse iuuat, esse, in formula transformata, coefficientes ipsorum x^4, x^2 et terminum absolutum hac ratione expressos:

$$A' = An^4 + 2Bn^3n' + Cn^2n'^2 + 2Dn'^3n + En'^4$$
$$C' = 6Am^2n^2 + 6B(mm'n^2 + m^2nn')$$
$$+ C(m^2n'^2 + m'^2n^2 + 4mm'nn')$$
$$+ 6D(mm'n'^2 + m'^2nn') + 6Em'^2n'^2$$
$$E' = Am^4 + 2Bm^3m' + Cm^2m'^2 + 2Dm'^3m + Em'^4.$$

De-

Definitis valoribus ipsorum m, m', n, n', statuatur:

$$\int \frac{dy(P+Qy+Ry^2)}{\sqrt{(Ay^4+2By^3+Cy^2+2Dy+E)}} = \frac{\alpha\sqrt{(Ay^4+2By^3+Cy^2+2Dy+E)}}{n'y-n}$$
$$+\int \frac{dx(P'+Q'x+R'x^2)}{\sqrt{(A'x^4+C'x^2+E')}};$$

huiusmodi enim formam hoc integrale esse habiturum leui attentione patet; sumtis igitur differentialibus, ob

$x = \frac{m-m'y}{n'y-n}$ et $\frac{dy}{\sqrt{(Ay^4+2By^3+Cy^2+2Dy+E)}} = \frac{(nm'-n'm).\,dx}{\sqrt{(A'x^4+C'x^2+E')}}$,

has consequemur aequalitates:

$$n'^2 R = n'\alpha A, \text{ siue } \alpha A = n' R;$$
$$n'^2 Q - 2nn' R = -2n\alpha A + n'\alpha B, \text{ vnde}$$
$$\alpha B = n' Q, \text{ hincque } \tfrac{R}{A} = \tfrac{Q}{B}.$$

Porro fit

$$n'^2 P - 2n'nQ + n^2 R = -3n\alpha B$$
$$+ \frac{1}{m'n-mn'}(P'n'^2 - Q'n'm' + R'm'^2);$$
$$-2nn'P + n^2 Q = -n\alpha C - n'\alpha D$$
$$+ \frac{1}{m'n-mn'}(-2P'nn' + Q'(n'm+nm') - 2R'mm');$$
$$n^2 P = -n\alpha D - n'\alpha E + \frac{1}{m'n-mn'}(P'n^2 - Q'mn + R'm^2),$$

quae etiam concinnius ita exprimuntur:

$$n'^2 P = -\frac{n^2\alpha A}{n'} - n\alpha B + \frac{1}{m'n-mn'}(P'n'^2 - Q'm'n' + R'm'^2);$$
$$-2nn'P = -\frac{n^2\alpha B}{n'} - n\alpha C - n'\alpha D$$
$$+ \frac{1}{m'n-mn'}(-2P'nn' + Q'(n'm+m'n) - 2R'mm');$$
$$+n^2 P = -n\alpha D - n'\alpha E + \frac{1}{m'n-mn'}(P'n^2 - Q'mn + R'm^2).$$

Si prima, per $2n$ multiplicata, addatur ad secundam, in n' ductam, tumque summa capiatur secundae in n ductae et tertiae per $2n'$ multiplicatae, has obtinemus aequationes:

$$0 = -\frac{2n^3\alpha A}{n'} - 3n^2\alpha B - nn'\alpha C - n'^2\alpha D - n'Q' + 2R'm',$$
$$0 = -\frac{n^3\alpha B}{n'} - n^2\alpha C - 3nn'\alpha D - 2n'^2\alpha E - nQ' - 2R'm.$$

Sum-

Sumta autem ſumma prioris per m et poſterioris per m' multiplicatae, fiet

$$-2mn^3\alpha A - 3mn'n^2\alpha B - mn^3\alpha B - m'n'n^2\alpha C$$
$$-mnn'^2\alpha C - mn'^3\alpha D - 3m'nn'^2\alpha D$$
$$-2m'n'^3\alpha E - n'Q'(mn' + m'n) = 0$$

vbi quum per §. praecedentem liqueat, terminum per α multiplicatum eſſe $= 0$, fiet quoque $Q' = 0$; vnde R' per alterutram aequationum modo allatarum definietur. Hincque ſi aequationum, quas tam P' quam R' ingrediuntur, prima in $2m$ ſecunda in m' ducatur, fiet

$$2P' = -\frac{2mn^3\alpha A}{n'^2} - \frac{m'n^2\alpha B}{n'^2} - \frac{2mn\alpha B}{n'} - \frac{m'n\alpha C}{n'}$$
$$-m'\alpha D + 2P(m'n - mn').$$

§. 24. Hac igitur ratione euictum eſt, formulam

$$\frac{dy(P + Qy + Ry^2)}{\sqrt{(Ay^4 + 2By^3 + Cy^2 + 2Dy + E)}},$$

ſemper ad iſtam ſimpliciorem:

$$\frac{dx(P' + R'x^2)}{\sqrt{(A'x^4 + C'x^2 + E')}}$$

eſſe reducibilem, quoties fuerit $AQ = RB$. Hinc ſi factores expreſſionis

$$Ay^4 + 2By^3 + Cy^2 + 2Dy + E \text{ ſint,}$$
$$\alpha y^2 + 2\beta y + \gamma,\ \delta y^2 + 2\varepsilon y + \zeta, \text{ forma}$$
$$\frac{dy(P + Qy + Ry^2)}{\sqrt{(Ay^4 + 2By^3 + Cy^2 + 2Dy + E)}},$$

etiam ſic exprimi poteſt:

$$\frac{dy(P + Qy + Ry^2)}{\sqrt{(\alpha y^2 + 2\beta y + \gamma)(\delta y^2 + 2\varepsilon y + \zeta)}};$$

vbi ſi ponatur $R = \mu\alpha$, fiet

$$\frac{dy(P + Qy + Ry^2)}{\sqrt{(\alpha y^2 + 2\beta y + \gamma)(\delta y^2 + 2\varepsilon y + \zeta)}} = \frac{dy(\mu\alpha y^2 + \mu\beta y + P) + (Q - \mu\beta)y\,dy}{\sqrt{(\alpha y^2 + 2\beta y + \gamma)(\delta y^2 + 2\varepsilon y + \zeta)}},$$

vbi quum prius membrum reductionis supra commemoratae sit susceptibile, iam sequeretur, formulam generalem ad rectificationem Sectionum Conicarum reduci posse, modo formula

$$\frac{y\,dy}{\sqrt{(\alpha y^2 + 2\beta y + \gamma)(\delta y^2 + 2\varepsilon y + \zeta)}}$$

per istam rectificationem integretur. Et si loco y ponatur eius valor $\frac{m + nx}{m' + n'x}$, facile patet, formulam modo dictam in huiusmodi abire:

$$\frac{(\lambda + \mu x)\,dx}{(\lambda' + \mu' x)\sqrt{(A' x^4 + C' x^2 + E')}},$$

cuius formulae integratio per rectificationem Sectionum Conicarum perficietur, modo isthaec formula:

$$\frac{dx}{(\lambda' + \mu' x)\sqrt{(A' x^4 + C' x^2 + E')}}$$

per istam rectificationem fuerit integrabilis. Hic si statuatur $x = \frac{1}{v}$, formula modo allata in istam abibit:

$$\frac{v\,dv}{(\mu' + \lambda' v)\sqrt{(A' + C' v^2 + E' v^4)}},$$

vnde iterum, ponendo $v^2 = z$, huiusmodi emerget formula:

$$\frac{dz}{(\mu' + \lambda' \sqrt{z})\sqrt{(A' + C' z + E' zz)}}.$$

Binarum vero huiusmodi formularum:

$$\frac{dz}{(\mu' - \lambda' \sqrt{z})\sqrt{(A' + C' z + E' zz)}} \text{ et } \frac{dz}{(\mu' + \lambda' \sqrt{z})\sqrt{(A' + C' z + E' zz)}}$$

$$\text{summa} = \frac{2\mu'\,dz}{(\mu'^2 - \lambda'^2 z)\sqrt{(A' + C' z + E' zz)}},$$

manifesto ad rectificationem Sectionum Conicarum est reducibilis. Differentiae vero

$$= \frac{2\lambda'\,dz\sqrt{z}}{(\mu'^2 - \lambda'^2 z)\sqrt{(A' + C' z + E' zz)}}$$

reductio ad istam rectificationem dependet exinde, vtrum haec formula:

$$\frac{dz}{(\mu'^2 - \lambda'^2 z)\sqrt{z(A' + C' z + E' zz)}}$$

ad hanc rectificationem reduci possit, nec ne.

§. 25.

§. 25. Si hanc disquisitionem vlterius prosequi velimus, dispiciendum est, vtrum expressio $A' + C'z + E'zz$ factores habuerit reales nec ne? Priori casu supponamus illos esse $(\alpha + \beta z)(\gamma + \delta z)$, ita vt huiusmodi proposita sit formula:

$$\frac{dz}{(\varepsilon - \zeta z)\sqrt{z(\alpha+\beta z)(\gamma+\delta z)}} = \frac{dz(\varepsilon - \zeta z)}{\varepsilon(\varepsilon - \zeta z)\sqrt{z(\alpha+\beta z)(\gamma+\delta z)}}$$
$$+ \frac{\zeta z dz}{\varepsilon(\varepsilon - \zeta z)\sqrt{z(\alpha+\beta z)(\gamma+\delta z)}}.$$

Prius membrum per rectificationem saepius commemoratam est integrabile, posterius vero, ponendo $\varepsilon - \zeta z = v$, huiusmodi obtinebit formam:

$$\frac{dv\sqrt{(\varepsilon - v)}}{v\sqrt{(\lambda + \mu v)(\lambda' + \mu' v)}},$$

vnde iterum ponendo $\lambda + \mu v = uu$, tandem huiusmodi proueniet formula:

$$\frac{du}{(c + eu^2)} \cdot \frac{\sqrt{(a + bu^2)}}{\sqrt{(f + gu^2)}},$$

siue simpliciter

$$\frac{du}{(1 + u^2)} \cdot \frac{\sqrt{(a + bu^2)}}{\sqrt{(f + gu^2)}}, \quad \frac{du}{(1 - u^2)} \cdot \frac{\sqrt{(a + bu^2)}}{\sqrt{(f + gu\ )}},$$

has enim binas posteriores cum illa generaliori aeque late patere, nullum est dubium.

§. 26. Denique si expressio $A' + C'z + E'zz$ factores non habuerit reales, seu si huius sit formae: $\alpha^2 + 2n\alpha\beta z + \beta^2 zz$, existente $n < 1$, ponatur

$$\sqrt{(\alpha^2 + 2n\alpha\beta z + \beta^2 zz)} = \beta z + x,$$

vnde fiet

$$\alpha^2 + 2n\alpha\beta z = 2\beta xz + x^2, \text{ hincque}$$
$$z = \frac{\alpha^2 - x^2}{2\beta(x - n\alpha)}; \quad dz = -\frac{dx(x^2 - 2n\alpha x + \alpha^2)}{2\beta(x - n\alpha)^2};$$
$$\beta z + x = \frac{x^2 - 2n\alpha x + \alpha^2}{2(x - n\alpha)};$$

 $\varepsilon -$

$$\varepsilon - \zeta z = \frac{2\beta\varepsilon(x-n\alpha) - \zeta(\alpha^2 - x^2)}{2\beta(x-n\alpha)};$$

quam ob rem obtinebimus

$$\frac{dz}{(\varepsilon-\zeta z)\surd z(A'+C'z+E'zz)} = \frac{dz}{(\varepsilon-\zeta z)(\beta z+x)\surd z}$$
$$= -\frac{2dx\surd 2\beta(x-n\alpha)}{(\zeta x^2+2\beta\varepsilon x-2n\alpha\beta\varepsilon-\alpha^2\zeta)\surd(\alpha^2-x^2)},$$

vbi ob

$$\zeta x^2 + 2\beta\varepsilon x - 2n\alpha\beta\varepsilon - \alpha^2\zeta$$

in hos binos factores resolubilem:

$$\zeta\left(x+\frac{\beta\varepsilon}{\zeta}-\surd\left(\frac{\beta^2\varepsilon^2}{\zeta^2}+\frac{2n\alpha\beta\varepsilon}{\zeta}+\alpha^2\right)\right) \text{ et}$$
$$x+\frac{\beta\varepsilon}{\zeta}+\surd\left(\frac{\beta^2\varepsilon^2}{\zeta^2}+\frac{2n\alpha\beta\varepsilon}{\zeta}+\alpha^2\right),$$

formula vltimo allata in binas huius generis resolui poterit:

$$\frac{\mu dx\surd(x-n\alpha)}{(x+\lambda)\surd(\alpha^2-x^2)} \text{ et } \frac{\mu' dx\surd(x-n\alpha)}{(x-\lambda')\surd(\alpha^2-x^2)},$$

quas in § praecedenti ad altervtram harum formarum:

$$\frac{du}{1+u^2}\cdot\frac{\surd(a+bu^2)}{\surd(f+gu^2)} \text{ vel } \frac{du}{1-u^2}\cdot\frac{\surd(a+bu^2)}{\surd(f+gu^2)},$$

reduci posse docuimus.

DE

DE CASIBVS QVIBVSDAM MAXIME MEMORABILIBVS IN ANALYSI INDETERMINATA; VBI IMPRIMIS INSIGNIS VSVS CALCVLI ANGVLORVM IN ANALYSI DIOPHANTAEA OSTENDITVR.

Auctore

L. EULERO.

§. 1.

Quaestionum, quas hic sum tractaturus, iam olim mentionem feci, in Dissertatione, Tomo VI. Nouor. Comm. inserta sub titulo: *De Problematibus indeterminatis, quae videntur plusquam determinata*; vbi ostendi, quomodo vnica aequatione, inter quantitates indeterminatas constituta, plurima Problemata Diophantaea facili calculo simul resolui queant; id quod vtique maxime Paradoxon videbatur, cum vulgo numerus conditionum propositarum numerum quantitatum incognitarum superare non soleat. Quam ob caussam argumentum ibi tractatum vtique in Analysi maximi momenti est censendum. Tum temporis autem in eiusmodi aequationibus subsistere fui coactus, in quibus quantitates indeterminatae non vltra secundam dimensionem ascendant. Nunc autem tales aequationes sum contemplaturus, vbi indeterminatae adeo ad quartam dimensioſionem aſſurgunt, quarum reſolutio fines Analyſeos tranſcendere videatur, quandoquidem hic tantum de ſolutionibus per numeros rationales agitur.

§. 2. Prima igitur aequatio quarti gradus, quam hic tractabo, hoc Problemate continetur.

Problema I.

Inuenire quatuor numeros rationales x, y, z, v, *vt huic aequationi ſatisfiat:*

$$\left.\begin{matrix} x^4+y^4+z^4-2xxyy-2xxzz-2yyzz \\ +2xxvv+2yyvv+2zzvv+v^4 \end{matrix}\right\} = 0$$

cuius formulae, ſatis prolixae, loco hic breuitatis gratia in ſequentibus ſcribam litteram V.

§. 3. Pro his autem litteris x, y, z, v, inuentis idoneis valoribus, ſimul ſequentes ſeptem formulae ſponte euadent numeri quadrati, quae ſunt:

$$\begin{aligned}
&\text{I. } xxyy-zzvv=\tfrac{1}{4}(xx+yy-zz+vv)^2\\
&\text{II. } xxzz-yyvv=\tfrac{1}{4}(xx+zz-yy+vv)^2\\
&\text{III. } yyzz-xxvv=\tfrac{1}{4}(yy+zz-xx+vv)^2\\
&\text{IV. } xxyy-vv(xx+yy)=\tfrac{1}{4}(xx+yy-zz-vv)^2\\
&\text{V. } xxzz-vv(xx+zz)=\tfrac{1}{4}(xx+zz-yy-vv)^2\\
&\text{VI. } yyzz-vv(yy+zz)=\tfrac{1}{4}(yy+zz-xx-vv)^2\\
&\text{VII. } xxyy+xxzz+yyzz=\tfrac{1}{4}(xx+yy+zz+vv)^2.
\end{aligned}$$

Ratio per ſe eſt manifeſta, cum quarta pars formulae noſtrae V, cuius valor per hypotheſin $=0$, ſingulis his ſeptem formulis addita, producat reuera quadrata, quorum radices hic aſſignauimus.

§. 4.

§. 4. Quodſi autem duae tantum huiusmodi formulae, vel adeo tres proponantur, quae quadrata reddi debeant, per praecepta communia methodi Diophanteae negotium difficillime confici poterit, etiamſi quis maxime prolixos calculos expediuerit; vnde intelligitur, ſi quatuor pluresue tales formulae ad quadrata reducendae proponantur, ſolutionem ne tentari quidem poſſe. Tanto magis igitur erit mirandum, quando omnium harum ſeptem formarum reductionem ad quadrata vnico quaſi labore aſſignabimus.

Solutio Problematis propoſiti.

§. 5. Totam autem ſolutionem ex duabus tantum prioribus formulis deduci poſſe obſeruaui, quemadmodum ex ſequente Analyſi intelligetur. Facile autem apparet, primam formulam $xxyy - zzvv$ quadratum reddi, ſi ſumatur $xy = zv\frac{(pp+rr)}{2pr}$; tum enim huius formulae radix erit $= \frac{zv(pp-rr)}{2pr}$, quae igitur aequalis erit quantitati $\frac{1}{2}(xx+yy-zz+vv)$. Simili modo ſecunda formula euadit quadratum, ſi ſumatur

$$xz = \frac{yv(qq+ss)}{2qs};$$

tum enim eius radix erit

$$\frac{yv(qq-ss)}{2qs} = \frac{1}{2}(xx+zz-yy+vv),$$

ex quibus conditionibus iam liquet, omnes quatuor quantitates x, y, z, v, determinari poſſe, ita vt non opus ſit ad reliquas formulas reſpicere.

§. 6. Cum igitur ſit

$$\frac{xy}{zv} = \frac{pp+rr}{2pr} \text{ et } \frac{xz}{yv} = \frac{qq+ss}{2qs},$$

prior

prior per posteriorem multiplicata dabit hanc aequationem:

$$\frac{xx}{vv} = \frac{(pp+rr)(qq+ss)}{4prps}.$$

Prior autem per posteriorem diuisa dat

$$\frac{yy}{zz} = \frac{qs(pp+rr)}{pr(qq+ss)};$$

vnde patet, istam solutionem absolui non posse, nisi pro literis p, r, q, s, tales numeri exhiberi queant, vt ista formula: $\frac{(pp+rr)(qq+ss)}{4prqs}$ euadat quadratum. Hoc autem praestito quoque altera expressio, pro $\frac{yy}{zz}$ inuenta, fiet quadratum. Infra autem fusius ostendemus, quomodo tales numeri p, r, q, s, quotcunque libuerit, inuestigari queant.

§. 7. Hic igitur assumemus tales numeros nobis iam esse cognitos, indeque reperiri

$$\frac{xx}{vv} = \frac{aa}{bb} \text{ et } \frac{yy}{zz} = \frac{cc}{dd};$$

inde ergo statuatur

$$x = at;\ v = bt;\ y = cu \text{ et } z = du,$$

et iam has duas literas t et u ex radicibus ante exhibitis sequenti modo facile eruere licebit. His enim valoribus substitutis prior radix praebebit

$$\frac{bdtu(pp-rr)}{pr} = (aa+bb)tt + (cc-dd)uu.$$

Simili modo ex altera radice nanciscimur

$$\frac{bctu(qq-ss)}{qs} = (aa+bb)tt - (cc-dd)uu.$$

Sufficeret autem vnica harum duarum aequationum, quandoquidem per extractionem radicis quadratae ambae quantitates t et u, atque adeo duplici modo definiri possent, nisi forte ad irrationalia delaberemur. Hoc autem fieri non posse ex sequenti Analysi patescet.

Formu-

§. 8. Statuamus hic breu. gr.

$$\frac{pp-rr}{2pr}=m \text{ et } \frac{qq-ss}{2qs}=n,$$

vbi notetur, pro radicibus quadratis etiam ſumi potuiſſe

$$\frac{rr-pp}{2pr} \text{ et } \frac{ss-qq}{2qs};$$

vnde patet, ambas literas m et n tam poſitiue quam negatiue accipi poſſe. Hoc modo habebimus has aequationes:

$$2mbdtu=(aa+bb)tt+(cc-dd)uu$$

$$2nbctu=(aa+bb)tt-(cc-dd)uu,$$

quae duae aequationes, additae, dabunt hanc:

$$b(md+nc)tu=(aa+bb)tt,$$

quae praebet

$$\frac{t}{u}=\frac{b(md+nc)}{aa+bb}.$$

Eodem modo, ſi poſterior a priore ſubtrahatur, prodibit iſta aequalitas:

$$b(md-nc)tu=(cc-dd)uu,$$

vnde iterum deducitur

$$\frac{t}{u}=\frac{cc-dd}{b(md-nc)},$$

qui duo valores certe inter ſe conuenire debent. Vtamur igitur poſteriore forma, et quia literas m et n pro lubitu ſiue poſitiue ſiue negatiue accipere licet, ſtatuamus

$$t=cc-dd \text{ et } u=b(md\pm nc);$$

vbi iam duplex ſolutio inuoluitur.

§. 9. Subſtituamus igitur hos valores, atque omnes noſtrae quatuor quantitates incognitae x, y, z, v, ſequenti modo prodibunt determinatae:

$$x = a(cc - dd);\ v = b(cc - dd)$$
$$y = bc(md \pm nc);\ z = bd(md \pm nc),$$

vbi vel ſigna ſuperiora vel inferiora vbique capi debebunt. Atque nunc certo affeuerare poſſumus, his valoribus literarum x, y, z, v, omnes ſeptem formulas ſupra memoratas quadrata reddi, quamuis tantum duas priores hic in computum duxerimus.

§. 10. Ante autem quam methodum ſumus tradituri, numeros idoneos pro literis p, r, q, s inueſtigandi, conueniet hanc ſolutionem per aliquot exempla illuſtrare, in quo negotio quidem neceſſe erit, ex iis, quae deinceps tradentur, valores idoneos pro literis p, r, q, s, depromere.

Exemplum I.

vbi $p = 5$, $r = 1$, $q = 8$, $s = 1$.

§. 11. Ex his igitur valoribus habebimus ſtatim

$$\frac{xy}{zv} = \frac{13}{5} \text{ et } \frac{xz}{yv} = \frac{65}{16};$$

hinc iam ſequitur, fore

$$\frac{xx}{vv} = \frac{13^2}{4^2} \text{ et } \frac{yy}{zz} = \frac{4^2}{5^2};$$

quamobrem ſtatuamus

$$x = 13t;\ v = 4t;\ y = 4u;\ z = 5u,$$

ita vt ſit

$$a = 13;\ b = 4;\ c = 4;\ d = 5.$$

Iam porro quia eſt

$$m = \frac{12}{5} \text{ et } n = \frac{63}{16},$$

ex

ex his iam valoribus namiſcemur

$$x = 39;\; v = 12;\; y = 16\left(4 \pm \tfrac{21}{4}\right);\; z = 20\left(4 \pm \tfrac{21}{4}\right).$$

Prouti igitur vel ſuperiora ſigna vel inferiora valent, obtinebimus duas ſequentes ſolutiones ad minimos terminos reductas, ſi forte habuerint inter ſe comunem factorem:

$$\text{I. } x = 39;\; v = 12;\; y = 20;\; z = 25.$$

$$\text{II. } x = 39;\; v = 12;\; y = 148;\; z = 185.$$

quarum ſolutionum prior ſine dubio ſimplices ſatis numeros Problemati ſatisfacientes ſuppeditat.

§. 12. Videamus, quomodo prior Solutio omnibus ſeptem formulis ſupra allatis ſatisfaciat

$$\text{I. } \sqrt{(xxyy - zzvv)} = \tfrac{1}{2}(xx + yy - zz + vv) = 720.$$

$$\text{II. } \sqrt{(xxzz - yyvv)} = \tfrac{1}{2}(xx + zz - yy + vv) = 945.$$

$$\text{III. } \sqrt{(yyzz - xxvv)} = \tfrac{1}{2}(yy + zz - xx + vv) = 176.$$

$$\text{IV. } \sqrt{(xxyy - vv(xx + yy))} = \tfrac{1}{2}(xx + yy - zz - vv) = 576.$$

$$\text{V. } \sqrt{(xxzz - vv(xx + zz))} = \tfrac{1}{2}(xx + zz - yy - vv) = 801.$$

$$\text{VI. } \sqrt{(yyzz - vv(yy + zz))} = \tfrac{1}{2}(yy + zz - xx - vv) = 320.$$

$$\text{VII. } \sqrt{(xxyy + xxzz + yyzz)} = \tfrac{1}{2}(xx + yy + zz + vv) = 1345.$$

Exemplum II.

quo $p = 5$, $r = 1$, $q = 13$, $s = 9$.

§. 13. Hic igitur erit

$\frac{xy}{zv} = \frac{13}{5}$ et $\frac{xz}{yv} = \frac{125}{117}$, hinc $\frac{xx}{vv} = \frac{5^2}{3^2}$ et $\frac{yy}{zz} = \frac{39^2}{25^2}$, ideoque $\frac{x}{v} = \frac{5}{3}$ et $\frac{y}{z} = \frac{39}{25}$.

Fiat

Fiat ergo

$$x = 5\,t;\ v = 3\,t;\ y = 39\,u;\ z = 25\,u,$$

ita vt fit

$$a = 5;\ b = 3;\ c = 39;\ d = 25.$$

Porro autem erit

$m = \frac{12}{5}$ et $n = \frac{44}{117}$, ex quibus valoribus fiet

$$x = 5 \cdot 896;\ v = 3 \cdot 896;$$

$$y = 3 \cdot 39 \cdot 60 \pm 39 \cdot 44;\ z = 3 \cdot 25 \cdot 60 \pm 25 \cdot 44.$$

Hinc ergo sequentes duae solutiones deducuntur:

I. $x = 112;\ v = 672;\ y = 39;\ z = 25.$

II. $x = 112;\ v = 672;\ y = 39 \cdot 89;\ z = 25 \cdot 89.$

Exemplum III.

quo $p = 8,\ r = 1;\ q = 13;\ s = 9.$

§. 14. Hoc casu erit

$\frac{xy}{zv} = \frac{65}{16}$ et $\frac{xz}{yv} = \frac{125}{117}$, hincque

$\frac{xx}{vv} = \frac{25^2}{12^2}$ et $\frac{yy}{zz} = \frac{39^2}{20^2}.$

Sumto igitur

$x = 25\,t;\ v = 12\,t;\ y = 39\,u;\ z = 20\,u$ erit

$$a = 25;\ b = 12;\ c = 39;\ d = 20.$$

Porro fit

$$m = \frac{63}{16} \text{ et } n = \frac{44}{117}.$$

Hinc iam colligitur

$$x = 25 \cdot 1121;\ v = 12 \cdot 1121$$

$$y = 39\,(945 \pm 176);\ z = 20\,(945 \pm 176);$$

has

has ergo nanciscimur solutiones:

I. $x = 25 \cdot 1121$; $v = 12 \cdot 1121$; $y = 39 \cdot 769$; $z = 20 \cdot 769$

II. $x = 25$; $v = 12$; $y = 39$; $z = 20$

Exemplum IV.

quo $p = 3$, $r = 1$; $q = 15$; $s = 8$.

§. 15. Fiet igitur

$\frac{xy}{zv} = \frac{5}{3}$ et $\frac{xz}{yv} = \frac{289}{240}$, ideoque

$\frac{xx}{vv} = \frac{17^2}{12^2}$ et $\frac{yy}{zz} = \frac{20^2}{17^2}$. Hinc sumto

$x = 17t$; $v = 12t$; $y = 20u$; $z = 17u$ erit

$a = 17$; $b = 12$; $c = 2$; $d = 17$.

Deinde fiet

$m = \frac{4}{3}$ et $n = \frac{161}{240}$, vnde colligitur

$x = 17 \cdot 111$; $v = 12 \cdot 111$

$y = 20(272 \pm 161)$; $z = 17(272 \pm 161)$.

Hinc sequentes solutiones:

I. $x = 17 \cdot 111$; $v = 12 \cdot 111$; $y = 20 \cdot 433$; $z = 17 \cdot 433$

II. $x = 17$; $v = 12$; $y = 20$; $z = 17$

quae solutio posterior sine dubio omnium est simplicissima.

Exemplum V.

quo $p = 5$, $r = 2$, $q = 9$, $s = 8$

§. 16. Hic erit

$\frac{xy}{zv} = \frac{29}{20}$ et $\frac{xz}{yv} = \frac{145}{144}$, hinc

$\frac{xx}{vv} = \frac{29^2}{24^2}$ et $\frac{yy}{zz} = \frac{6^2}{5^2}$.

 Suma-

Sumatur ergo

$a = 29$; $b = 24$; $c = 6$; $d = 5$; et cum sit

$m = \frac{21}{20}$ et $n = \frac{17}{144}$, valores quaesiti erunt

$x = 29.11$; $y = 6\,(126 \pm 17)$

$v = 24.11$; $z = 5\,(126 \pm 17)$.

Ambae ergo solutiones erunt

I. $x = 29.11$; $v = 24.11$; $y = 6.\ 109$; $z = 5\ 109$

II. $x = 29$; $v = 24$; $y = 78$; $z = 65$

Alia Solutio eiusdem Problematis,

per Calculum angulorum deducta.

§. 17. Cum formula $xxyy - zzvv$ debeat esse quadratum, hoc eueniet, si sumatur $xy\,\text{sin.}\,\alpha = vz$; tum enim erit $\sqrt{(xxyy - zzvv)} = xy\,\text{cos.}\,\alpha$, quae ergo quantitas aequalis est huic formulae:

$$\tfrac{1}{2}(xx + yy - zz + vv).$$

Simili modo, posito

$$yv = xz\,\text{sin.}\,\beta, \text{ fiet } \sqrt{(xxzz - yyvv)} = xz\,\text{cos.}\,\beta$$
$$= \tfrac{1}{2}(xx + zz - yy + vv).$$

§. 18. Cum igitur sit

$\frac{xy}{zv} = \frac{1}{\text{sin.}\,\alpha}$ et $\frac{xz}{yv} = \frac{1}{\text{sin.}\,\beta}$, productum dabit

$$\frac{xx}{vv} = \frac{1}{\text{sin.}\,\alpha\,\text{sin.}\,\beta};$$

quamobrem statuamus $x = t$ et $v = t\sqrt{\text{sin.}\,\alpha\,\text{sin.}\,\beta}$. Prior vero per posteriorem diuisa dat $\frac{yy}{zz} = \frac{\text{sin.}\,\beta}{\text{sin.}\,\alpha}$; vnde statuamus

$$y = u\sqrt{\text{sin.}\,\beta} \text{ et } z = u\sqrt{\text{sin.}\,\alpha}.$$

Substi-

Substituantur nunc hi valores in superiore radice extracta siue in hac aequatione:

$$2\,x\,y\,\text{cos.}\,\alpha = x\,x + y\,y - z\,z + v\,v,$$

orieturque ista:

$$2\,t\,u\,\text{cos.}\,\alpha\,\sqrt{\text{sin.}\,\beta} = t\,t\,(1 + \text{sin.}\,\alpha\,\text{sin.}\,\beta) + u\,u\,(\text{sin.}\,\beta - \text{sin.}\,\alpha),$$

ex qua aequatione quadratica quaeratur u, fietque

$$u = \frac{t\,\text{cos.}\,\alpha\,\sqrt{\text{sin.}\,\beta} \pm t\,\text{cos.}\,\beta\,\sqrt{\text{sin.}\,\alpha}}{\text{sin.}\,\beta - \text{sin.}\,\alpha};$$

quamobrem sumi poterit

$$t = \text{sin.}\,\beta - \text{sin.}\,\alpha \text{ et } u = \text{cos.}\,\alpha\,\sqrt{\text{sin.}\,\beta} \pm \text{cos.}\,\beta\,\sqrt{\text{sin.}\,\alpha}.$$

§. 19. Substitutis igitur his valoribus loco t et u, quatuor quantitates quaesitae x, y, z, v ita determinabuntur, vt sit

$$x = \text{sin.}\,\beta - \text{sin.}\,\alpha;\quad v = (\text{sin.}\,\beta - \text{sin.}\,\alpha)\,\sqrt{\text{sin.}\,\alpha\,\text{sin.}\,\beta}$$

$$y = \text{cos.}\,\alpha\,\text{sin.}\,\beta \pm \text{cos.}\,\beta\,\sqrt{\text{sin.}\,\alpha\,\text{sin.}\,\beta};\quad z = \text{cos.}\,\beta\,\text{sin.}\,\alpha + \text{cos.}\,\alpha\,\sqrt{\text{sin.}\,\alpha\,\text{sin.}\,\beta}.$$

Cum igitur hoc modo aequationi

$$2\,\sqrt{(x\,x\,y\,y - z\,z\,v\,v)} = x\,x + y\,y - z\,z + v\,v,$$

satisfiat, sumtis vtrinque quadratis ipsa aequatio biquadradica proposita V oritur, cui ergo etiam his valoribus satisfiet, consequenter etiam omnes septem formulae supra allatae simul fient quadrata, etiamsi in hac Analysi binas tantum priores simus contemplati.

§. 20. Vt igitur valores pro x, y, z, v inuenti fiant rationales, ante omnia sinus et cosinus angulorum α et β debent esse rationales, id quod fiet, si sumamus

$$\text{sin.}\,\alpha = \frac{2\,p\,r}{p\,p + r\,r} \text{ et } \text{sin.}\,\beta = \frac{2\,q\,s}{q\,q + s\,s};$$

tum

tum enim erit

$$\cos.\,\alpha = \frac{pp - rr}{pp + rr} \text{ et } \cos.\,\beta = \frac{qq - ss}{qq + ss}.$$

Praeterea vero hic imprimis requiritur, vt productum ſinuum, ſcilicet:

$$\sin.\,\alpha \sin.\,\beta = \frac{4pqrs}{(pp + rr)(qq + ss)} = \square,$$

quae eſt ea ipſa conditio, quae in ſolutione praecedente poſtulabatur, ita vt iſta ſolutio ab illa non aliter niſi modo inueſtigationis diſcrepet. Hic vero fundamentum totius ſolutionis multo clarius perſpicitur. Nunc igitur eam inueſtigationem aggrediamur, quam ſupra ſumus polliciti; quemadmodum ſcilicet binae tales formulae indagari queant, quarum productum quadratum efficiat.

Quaeſtio.

Inueſtigare binas huiusmodi formulas:

$$\frac{pp + rr}{2pr} \text{ et } \frac{qq + ss}{2qs},$$

quarum productum fiat quadratum.

Solutio.

§. 21. Cum igitur iſtud productum debeat fieri quadratum, per quadratum $4pprrqqss$ multiplicando etiam hoc productum quadratum reddi debet:

$$pr(pp + rr) \times qs(qq + ss);$$

vbi id commodum ſumus adepti, vt prior factor tantum literas p et r, poſterior vero ſolas q et s contineat, cui conditioni vtique perfectiſſime ſatisfieret, ſi vtraque formula $pr(pp + rr)$ et $qs(qq + ss)$ ſeorſim quadratum effici poſſet. Verum iam dudum demonſtratum eſt, hoc pror-

prorſus eſſe impoſſibile. Quia enim producti prioris factores p, r, $(pp+rr)$ ſunt primi inter ſe, neceſſe foret, vt ſinguli eſſent quadrata. Poſito ergo $p=tt$ et $r=uu$, tertius factor quadratus efficiendus foret t^4+u^4. Demonſtratum autem eſt, ſummam duorum biquadratorum quadratum reddi nunquam poſſe.

§. 22. Cum igitur ambae hae formulae:

$$pr(pp+rr) \text{ et } qs(qq+ss)$$

ipſae quadrata eſſe nequeant, neceſſe eſt, vt ſint *numeri planiſimiles*, vti ab *Euclide* vocantur. Quanquam autem ad hoc efficiendum quatuor habemus quantitates indeterminatas p, r, q, s, tamen nullo modo ſolutio generalis adhuc inueſtigare potuit; quam ob cauſſam tantum ſolutionibus particularibus contenti eſſe debemus, quae etiam maximas difficultates inuoluunt, niſi iſtas formulas in aliam ſpeciem tranſmutemus, quod commodiſſime hoc modo fiet. Ponatur $p=2fg$ et $r=ff-gg$; ſimilique modo $q=2hk$ et $s=hh-kk$, hocque modo ambae noſtrae formulae euadent

$$2fg(ff-gg)(ff+gg)^2 \text{ et } 2hk(hh-kk)(hh+kk)^2.$$

Quia igitur poſtremi factores ſponte ſunt quadrata, ſupereſt, vt hoc productum:

$$2fg(ff-gg)\times 2hk(hh-kk)$$

reddatur quadratum, ſiue, quod eodem redit, hoc:

$$fg(ff-gg).\ hk(hh-kk),$$

et quia hic etiam quatuor literae inſunt, vt eas ad pauciorem numerum reducamus, ſtatuamus $h=g$ et $k=f-g$; hoc modo poſterior formula erit $fg(f-g)(2g-f)$, quae

 per

per priorem multiplicata, omiſſis factoribus quadratis, praebet hoc productum: $(f+g)(2g-f)$ quadratum efficiendum. Hunc in finem ponatur

$$f = \frac{2mm - nn}{3} \text{ et } g = \frac{mm + nn}{3}.$$

ſiue, quia vtriusque literae aeque multipla ſumere licet, ſumamus

$$f = 2mm - nn \text{ et } g = mm + nn, \text{ vnde fiet}$$
$$h = mm + nn \text{ et } k = mm - 2nn.$$

§. 23. Hinc ergo pro lubitu innumerabilia paria binarum talium formularum:

$$fg(ff-gg) \text{ et } hk(hh-kk)$$

erui poterunt, quarum productum certe erit quadratum. Veluti ſi ſumamus $m = 2$ et $n = 1$, habebimus hos valores:

$$f = 7;\ g = 5;\ h = 5;\ k = 2.$$

Hinc enim fit

$$fg(ff-gg) = 840 \text{ et } hk(hh-kk) = 210,$$

quarum productum eſt $4.\ 210^2$.

§. 24. Verum hoc modo valores literarum p, r, q, s, mox prodirent ſatis enormes, quia poſuimus

$$p = 2fg,\ r = ff-gg;\ q = 2hk \text{ et } s = hh-kk,$$

qui in exemplo allato fierent

$$p = 70;\ q = 20;\ r = 24;\ s = 21,$$

vbi bini p et r per 2 depreſſi euadent $p = 35$ et $r = 12$; ita vt noſtrum productum vtique ſit quadratum, ſcilicet:

$$3^2.\ 4^2.\ 5^2.\ 7^2.\ 29^2.\ 37^2.$$

Verum

Verum quia hi numeri ex casu simplicissimo, pro m et n sumto, sunt orti, facile intelligitur, ex maioribus valoribus, pro m et n ortis, pro literis p, r, q, s mox maximos numeros esse prodituros.

§. 25. Cum igitur pro nostro Problemate Solutiones potissimum simpliciores intendamus, istae formulae, ad quas sumus perducti, ad hunc scopum neutiquam sunt accommodatae; vnde longe aliam viam inire conueniet, quae ita sit comparata, vti non ad numeros nimis magnos pro literis p, r, q, s, perducat, et quae simul simplicissimas solutiones certissime exhibeat, id quod sequenti modo commodissime praestabitur. Cum $ab\,(aa+bb)$ sit forma vtriusque formulae, qua indigemus, pro a et b successiue accipiamus numeros simpliciores, et productum reuocemus ad hanc formam: $A^2 F$, vbi A^2 complectatur omnes factores quadratos, F vero sit productum ex factoribus non quadratis. Pro nostro igitur instituto eiusmodi duae pluresue formulae requiruntur, quae pro F eundem valorem praebeant, quandoquidem tales pro binis nostris formulis $pr\,(pp+rr)$ et $qs\,(qq+ss)$ accipere licebit. Hunc in finem sequentem tabulam adiungimus, quae pro singulis valoribus literarum a et b numeros litera F indicatos exhibeat, et quoniam consultum est in valoribus simplicioribus subsistere, hinc omittamus omnes numeros primos maiores quam 13.

a	b	F
2	1	2.5
3	1	2.3.5
3	2	2.3.13
4	3	3
5	1	2.5.13
7	1	2.7
7	4	5.7.13
8	1	2.5.13
9	7	2.5.7.13
11	2	2.5.11
11	3	2.3.5 11.13
12	5	3.5
13	9	2.5.13
15	8	2.3.5
18	1	2.13

§. 26. Hanc autem tabulam vlterius continuare licet, ſtatuendo $a = 2fg$ et $b = ff - gg$; tum enim tantum formulam $2fg(ff - gg)$ examinare ſufficiet. Hinc ergo ſimilem tabulam pro numeris f et g ſubiungamus, adſcriptis ſimul valoribus litterarum a et b, et vltima columna valores literae F indicabit:

f	g	a	b	F	f	g	a	b	F
2	1	4	3	3	8	1	16	63	7
3	2	12	5	3.5	8	3	48	55	3.5.11
4	1	8	15	2.3.5	8	5	80	39	3.5.13
4	3	24	7	2.3.7	8	7	112	15	3.5.7
5	2	20	21	3.5.7	9	2	36	77	7.11
5	4	40	9	2.5	9	4	72	65	2.5.13
6	1	12	35	3.5.7	10	1	20	99	5.11
6	5	60	11	3.5.11	10	3	60	91	3.5.7.13
7	2	28	45	5.7	11	2	44	117	11.13
7	4	56	33	2.3.7.11	11	4	88	105	2.3.5.7.11
7	6	84	13	3.7.13	11	10	220	21	3.5.7.11

§. 27. Iam ex his duabus tabulis coniunctis excerpamus eos casus, quibus eadem litera F conuenit.

F	a	b	F	a	b
2.5	2	1		5	1
	40	9	2.5.13	8	1
	3	1		13	9
2.3.5	15	8		72	65
				21	20
			3.5.7	35	12
				112	15
				60	11
			3.5.11	55	48

§. 28. Ex his iam casibus plurimae Solutiones nostri Problematis, quo quaeruntur quatuor numeri x, y,

 z, v,

z, v, quibus formula biquadratica, in Problemate propoſita, ſigno V indicata, reuera ad nihilum redigitur, deduci poſſunt, quarum iam plures in exemplis allatis ſunt datae, quas igitur hic conſpectui coniunctim exponamus:

x	20	39	185	672	78	39.89	25.1121	20.433	6.109
y	17	25	148	112	65	25.89	12.1121	17.433	5.109
z	17	20	39	39	29	672	39.769	17.111	29.11
v	12	12	12	25	24	112	20.769	12.111	24.11

vbi, quia literae x, y, z, inter ſe permutari poſſunt, maximos valores ipſi x tribuimus, hincque deſcendentes pro y et z ſcripſimus. Semper autem minimus valor literae v competit.

Problema II.

Propoſita formula biquadratica

$$V = x^4 + y^4 + z^4 + v^4 - 2xxyy - 2xxzz - 2xxvv - 2yyzz - 2yyvv - 2zzvv$$

inueſtigare valores quatuor numerorum x, y, z, v. *vt iſta formula nihilo fiat aequalis.* Quod Problema etiam ita enunciari poteſt: *Quaerantur quatuor quadrata*, xx, yy, zz, vv. *quorum ſi ponatur ſumma* $= \Sigma$, *et ſumma factorum ex binis* $= \Pi$, *vt ſit* $\Sigma^2 = 4\Pi$.

§. 29. Quod ſi tales valores pro literis x, y, z, v fuerint inuenti, ſimul ſequentes formulae reddentur quadrata, quorum radices ita ſe habebunt:

I. $2\sqrt{(xxyy + zzvv)} = xx + yy - zz - vv$

II. $2\sqrt{(xxzz + yyvv)} = xx + zz - yy - vv$

III.

III. $2\sqrt{(xxvv+yyzz)} = xx+vv-yy-zz$

IV. $2\sqrt{(xxyy+xxzz+yyzz)} = xx+yy+zz-vv$

V. $2\sqrt{(xxyy+xxvv+yyvv)} = xx+yy+vv-zz$

VI. $2\sqrt{(xxzz+xxvv+zzvv)} = xx+zz+vv-yy$

VII. $2\sqrt{(yyzz+yyvv+zzvv)} = yy+zz+vv-xx$

quibus addi poteſt

VIII. $2\sqrt{\Pi} = xx+yy+zz+vv.$

In hoc igitur Problemate quaterni numeri x, y, z, v, aequaliter ingrediuntur, cum in priore Problemate quadrati vv ratio fuiſſet diuerſa.

Solutio huius Problematis.

§. 30. Solae priores formulae hic iterum ſufficiunt ad totam ſolutionem abſoluendam. Cum enim formula $xxyy+zzvv$ debeat reddi quadratum, hoc eueniet, ſumendo

$$xy = zv\frac{(pp-rr)}{2pr};$$

tum enim erit

$$\sqrt{(xxyy+zzvv)} = \frac{zv(pp+rr)}{2pr},$$

ideoque

$$= \tfrac{1}{2}(xx+yy-zz-vv).$$

Simili modo pro ſecunda formula ſi ſumatur

$$xz = \frac{yv(qq-ss)}{2qs} \text{ erit}$$

$$\sqrt{(xxzz+yyvv)} = \frac{yv(qq+ss)}{2qs} =$$
$$\tfrac{1}{2}(xx+zz-yy-vv).$$

§. 31.

§. 31. Cum igitur habeamus has duas aequationes:

$$\frac{xy}{zv} = \frac{pp - rr}{2pr} \text{ et } \frac{xz}{yv} = \frac{qq - ss}{2qs}$$

earum productum dabit

$$\frac{xx}{vv} = \frac{(pp - rr)(qq - ss)}{4prqs};$$

prior vero per posteriorem diuiſa dabit

$$\frac{yy}{zz} = \frac{qs(pp - rr)}{pr(qq - ss)},$$

atque nunc vtrique conditioni ſatisfiet, dummodo fuerit

$$\frac{(pp - rr)(qq - ss)}{prqs} = \square.$$

Quomodo igitur hoc effici debeat in ſequentibus fuſius docebimus. Interim vero hic aſſumamus, tales valores pro literis p, q, r, s, nobis eſſe cognitos.

§. 32. Statuere igitur poterimus

$$\frac{xx}{vv} = \frac{aa}{bb} \text{ et } \frac{yy}{zz} = \frac{cc}{dd},$$

vbi ergo numeri a, b, c, d, vt cogniti ſpectantur. Quamobrem hinc ponamus $x = at$, $v = bt$, $y = cu$, $z = du$, ſicque totum negotium nunc eo eſt reductum, vt ambo numeri t et u debite aſſignentur. Pro priore igitur radice quadrata $\frac{zv(pp + rr)}{2r}$ habebimus $zv = bdtu$; vnde ſi ſtatuamus breu. gr. $\frac{bd(pp + rr)}{2pr} = m$, ſimilique modo pro altera radice (ob $yv = bctu$) $\frac{bc(qq + ss)}{2qs} = n$, ambo radices erunt mtu et ntu.

§. 33. Pro priore igitur radice habebimus

$$2mtu = xx + yy - zz - vv;$$

pro altera vero

$$2ntu = xx + zz - yy - vv,$$

qua-

quarum ſumma dabit

$$(m+n)tu = xx - vv = (aa-bb)tt,$$

vnde ſtatim deducitur $\frac{t}{u} = \frac{m+n}{aa-bb}$. Simili modo differentia dabit

$$(m-n)tu = yy - zz = (cc-dd)uu,$$

vnde etiam deducimus $\frac{t}{u} = \frac{cc-dd}{m-n}$, qui duo valores per ipſam quaeſtionis naturam inter ſe congruere debebunt. At vero quia m et n per extractionem radicis ſunt natae, eas tam negatiue quam poſitiue accipere licebit, vnde ſimul gemini valores pro t et u reperientur, quibus inuentis tota Problematis Solutio ita ſe habebit:

$$x = a(m+n);\ v = b(m+n);$$

$$y = c(aa-bb);\ z = d(aa-bb);$$

vnde facile erit exempla quotcunque euoluere.

Exemplum 1.

quo ſumitur $p=5$, $r=2$, $q=6$ et $s=1$.

§. 34. Hic igitur erit

$\frac{xy}{zv} = \frac{21}{25}$ et $\frac{xz}{yv} = \frac{35}{12}$;

vnde oritur

$\frac{xx}{vv} = \frac{7^2}{4^2}$, ideoque $a=7$ et $b=4$;

tum vero erit

$\frac{yy}{zz} = \frac{3^2}{5^2}$, ergo $c=3$ et $d=5$;

vnde fiet $m=29$ et $n=37$. Cum autem ſit $m=\pm 29$, duplex ſolutio ita ſe habebit:

$$x=7(37\pm 29);\ v=4(37\pm 29);\ y=99;\ z=165.$$

Signa igitur ſuperiora praebent hanc ſolutionem:

$$x = 14;\ v = 8;\ y = 3;\ z = 5;$$

inferiora vero

$$x = 56;\ v = 32;\ y = 99;\ z = 165.$$

Exemplum 2.

quo $p = 5,\ r = 2,\ q = 8,\ s = 7.$

§. 35. Hic erit

$$\frac{xy}{zv} = \frac{21}{20} \text{ et } \frac{xz}{yv} = \frac{15}{112},$$

vnde oritur

$$\frac{xx}{vv} = \frac{3^2}{8^2} \text{ et } \frac{yy}{zz} = \frac{14^2}{5^2}.$$

Sumatur ergo $a = 3$; $b = 8$; $c = 14$; $d = 5$, fietque $m = 58$ et $n = 113$. Verum ob $m = \pm 58$ duplex oritur ſolutio, ſcilicet:

$$x = 3(113 \pm 58);\ v = 8(113 \pm 58);$$
$$y = 14.55 \text{ et } z = 5.55.$$

Hinc hae duae ſolutiones:

$$x = 3;\ v = 8;\ y = 14;\ z = 5.$$
$$x = 3.171;\ v = 8.171;\ y = 14.55;\ z = 5.55.$$

Exemplum 3.

quo $p = 6;\ r = 1;\ q = 8;\ s = 7.$

§. 36. Hoc caſu fit

$\frac{xy}{zv} = \frac{35}{12}$ et $\frac{xz}{yv} = \frac{15}{112}$, ideoque

$\frac{xx}{vv} = \frac{5^2}{8^2}$ et $\frac{yy}{zz} = \frac{14^2}{3^2}$.

Sum-

Sumto igitur

$a = 5$; $b = 8$; $c = 14$; $d = 3$ erit

$m = \pm 74$ et $n = 113$, hincque

$x = 5(113 \pm 74)$ et $v = 8(113 \pm 74)$;

vnde hae duae ſolutiones oriuntur:

$x = 5$; $v = 8$; $y = 14$; $z = 3$.

$x = 5.187$; $v = 8.187$; $y = 14.39$; $z = 3.39$.

Exemplum 4.

quo $p = 6$, $r = 5$; $q = 8$; $s = 3$.

§. 37. Cum hinc ſit

$\frac{xy}{zv} = \frac{11}{60}$ et $\frac{xz}{yv} = \frac{55}{48}$, erit

$\frac{xx}{vv} = \frac{11^2}{24^2}$ et $\frac{yy}{zz} = \frac{2^2}{5^2}$, ideoque

$a = 11$; $b = 24$; $c = 2$; $d = 5$;

hinc ob $m = 122$ et $n = 73$, erit

$x = 11(122 \pm 73)$ et $v = 24(122 \pm 73)$;

vnde ſequentes deducuntur ſolutiones:

$x = 11.49$; $v = 24.49$; $y = 2.455$; $z = 5.455$;

$x = 33$; $v = 72$; $y = 14$; $z = 35$.

§. 38. Si quis plura huiusmodi exempla euoluere voluerit, quoniam totum negotium eo redit, vt pro p, r, q, s, idonei valores exhiberi queant, ad hoc efficiendum ſequentem regulam adiungamus.

Regula, pro inueniendis numeris idoneis, pro p, r, q, s.

§. 39. Si f et g denotent numeros quoscunque siue positiuos sive negatiuos, semper accipi poterit

$$p = fg \text{ et } r = (2g+f)(3g+2f);$$

tum vero sumi poterunt duplici modo pro q et s valores debiti, scilicet:

$$q = (2g+f)(3g+f) \text{ et } s = f(f+g), \text{ vel}$$
$$q = (f+g)(3g+2f) \text{ et } s = g(3g+f);$$

vbi notandum, si bini tales numeri habeant factorem communem, eum omitti posse; ac si eueniat, vt tales numeri prodeant negatiui, eorum loco semper positiuos scribere licebit. Ita si pro f et g vnitas accipiatur, erit $p = 1$ et $r = 15$; tum vero habebitur vel

$$q = 6 \text{ et } s = 1, \text{ vel } q = 5 \text{ et } s = 2,$$

vbi insuper notasse iuuabit, loco binorum talium numerorum etiam eorum semi-summam et semi-differentiam accipi posse. Ita loco $p = 1$ et $r = 15$ sumi poterit $p = 8$ et $r = 7$, quem casum in exemplis ante allatis expediuimus.

Solutio ex calculo angulorum petita.

§. 40. Pro hoc igitur Problemate statuamus $\frac{xy}{zv} = \frac{\cos.\alpha}{\sin.\alpha}$; tum enim erit

$$\sqrt{(xxyy+zzvv)} = \frac{zv}{\sin.\alpha} = \tfrac{1}{2}(xx+yy-zz-vv).$$

Tum vero statuatur

$$\frac{xz}{yv} = \frac{\cos.\beta}{\sin.\beta}, \text{ ac tum habebitur}$$

$$\sqrt{(xxzz+yyvv)} = \frac{yv}{\sin.\beta} = \tfrac{1}{2}(xx+zz-yy-vv).$$

§. 41. Iam his duabus formulis combinandis habebimus primo

$$\frac{xx}{vv} = \frac{\operatorname{cof.} \alpha \operatorname{cof.} \beta}{\operatorname{fin.} \alpha \operatorname{fin.} \beta} = \cot. \alpha \cot. \beta,$$

vnde ponatur $x = t \sqrt{\cot. \alpha \cot. \beta}$ et $v = t$. Simili modo habebitur

$$\frac{yy}{zz} = \frac{\cot. \alpha}{\cot. \beta}, \text{ vnde ponatur}$$

$$y = u \sqrt{\cot. \alpha} \text{ et } z = u \sqrt{\cot. \beta}.$$

Substituantur hi valores in priore aequatione radicali, fietque

$$\frac{2tu\sqrt{\cot. \beta}}{\operatorname{fin.} \alpha} = tt(\cot. \alpha \cot. \beta - 1) + uu(\cot. \alpha - \cot. \beta),$$

vnde colligitur

$$\frac{u}{t} = \frac{\frac{\sqrt{\cot. \beta}}{\operatorname{fin.} \alpha} \pm \frac{\sqrt{\cot. \alpha}}{\operatorname{fin.} \beta}}{\cot. \alpha - \cot. \beta}.$$

Statuatur ergo

$$u = \frac{\sqrt{\cot. \beta}}{\operatorname{fin.} \alpha} \pm \frac{\sqrt{\cot. \alpha}}{\operatorname{fin.} \beta} \text{ et } t = \cot. \alpha - \cot. \beta,$$

et quatuor valores quaesiti erunt

$$x = \cot. \alpha \sqrt{\cot. \alpha \cot. \beta} - \cot. \beta \sqrt{\cot. \alpha \cot. \beta},$$

$$v = \cot. \alpha - \cot. \beta; \; y = \frac{\cot. \alpha}{\operatorname{fin.} \beta} + \frac{\sqrt{\cot. \alpha \cot. \beta}}{\operatorname{fin.} \alpha}$$

$$z = \frac{\cot. \beta}{\operatorname{fin.} \alpha} + \frac{\sqrt{\cot. \alpha \cot. \beta}}{\operatorname{fin.} \beta}.$$

§. 42. Vt igitur isti valores fiant rationales, ante omnia necesse est, vt tam sinus quam cosinus angulorum α et β, tum vero etiam, vt $\sqrt{\alpha \cot. \beta}$, fiant rationales. Priori satisfit, ponendo

$$\operatorname{fin.} \alpha = \frac{2pr}{pp+rr} \text{ et } \operatorname{fin.} \beta = \frac{2qs}{qq+ss},$$

tum enim fiet

$$\operatorname{cof.} \alpha = \frac{pp-rr}{pp+rr} \text{ et } \operatorname{cof.} \beta = \frac{qq-ss}{qq+ss}$$

 ideo-

ideoque

$$\cot.\alpha = \frac{pp-rr}{2pr} \text{ et } \cot.\beta = \frac{qq-ss}{2qs}.$$

Quamobrem requiritur, vt productum $\frac{(pp-rr)(qq-ss)}{prqs}$ fiat quadratum, ſicque deducimur ad ipſam ſolutionem ante inuentam, et quia hoc modo ipſa aequatio biquadratica adimpletur, ſimul omnes ſeptem formulae ſupra memoratae euadent quadrata.

§. 43. Colligamus iam caſus in exemplis ſuperioribus euolutos, atque ſimul plures caſus habebimus, quibus huic aequationi biquadraticae ſatisfit, ſcilicet:

$$x^4+y^4+z^4+v^4-2xxyy-2xxzz-2xxvv$$
$$-2yyzz-2yyvv-2zzvv=0,$$

et quia literae x, y, z, v, inter ſe permutari patiuntur, valores ſupra inuentos ſecundum ordinem magnitudinis diſponamus.

$x=$	14	72	165	8, 171	8, 187	5, 455
$y=$	8	35	99	14, 55	5, 187	24, 49
$z=$	5	33	56	3, 171	14, 39	2, 455
$v=$	3	14	32	5, 55	3, 39	11, 49

GEMINA

GEMINA METHODVS
INVESTIGANDI VALOREM PRODVCTI

$$\int \frac{x^{a-1}\,dx}{\sqrt[n]{(1-x^n)^b}} \times \int \frac{x^{\alpha-1}\,dx}{\sqrt[n]{(1-x^n)^\beta}}$$

DVM AMBO INTEGRALIA A TERMINO $x=0$ VSQVE AD TERMINVM $x=1$ EXTENDVNTVR.

Auctore

NICOLAO FVSS.

Prior Methodus.

§. 1.

Designetur propositum binorum integralium productum, compendii gratia, littera S, vt sit

$$S = \int \frac{x^{a-1}\,dx}{\sqrt[n]{(1-x^n)^b}} \times \int \frac{x^{\alpha-1}\,dx}{\sqrt[n]{(1-x^n)^\beta}} \begin{bmatrix}\text{ab } x=0\\ \text{ad } x=1\end{bmatrix}$$

(modus, terminos integrationis notandi, hic adhibitus, nulla explicatione indigebit), eritque differentiando

$$dS = \frac{x^{a-1}\,dx}{\sqrt[n]{(1-x^n)^b}} \int \frac{x^{\alpha-1}\,dx}{\sqrt[n]{(1-x^n)^\beta}} + \frac{x^{\alpha-1}\,dx}{\sqrt[n]{(1-x^n)^\beta}} \int \frac{x^{a-1}\,dx}{\sqrt[n]{(1-x^n)^b}};$$

vbi iam id commodi sumus adepti, vt in huius expressionis

onis vtroque membro vnicus tantum factor integralis occurrat.

§. 2. Statuatur iam porro prior pars differentialis

$$\frac{x^{a-1}\,dx}{\sqrt[n]{(1-x^n)^b}}\int\frac{x^{\alpha-1}\,dx}{\sqrt[n]{(1-x^n)^\beta}}=dP,$$

altera vero

$$\frac{x^{\alpha-1}\,dx}{\sqrt[n]{(1-x^n)^\beta}}\int\frac{x^{a-1}\,dx}{\sqrt[n]{(1-x^n)^b}}=dQ,$$

ita vt habeamus hanc aequationem differentialem:

$dS = dP + dQ$, ideoque integrando $S = P + Q$. Totum igitur negotium eo redit, vt valores literarum P et Q ex binis aequationibus differentialibus modo allatis integrando eruantur.

§. 3. Hunc in finem consideretur primo prior harum aequationum, quae erat:

$$dP=\frac{x^{a-1}\,dx}{\sqrt[n]{(1-x^n)^b}}\int\frac{x^{\alpha-1}\,dx}{\sqrt[n]{(1-x^n)^\beta}},$$

pro qua integranda notetur esse

$$\frac{1}{\sqrt[n]{(1-x^n)^\beta}}=1+\frac{\beta}{n}x^n+\frac{\beta(\beta+n)}{n.2n}x^{2n}$$
$$+\frac{\beta(\beta+n)(\beta+2n)}{n.2n.3n}x^{3n}+\text{etc.}$$

vnde, per $x^{\alpha-1}\,dx$ multiplicando et integrando, colligitur

factor

factor integralis

$$\int \frac{x^{\alpha-1}\,dx}{\sqrt[n]{(1-x^n)^{\beta}}} = \frac{x^{\alpha}}{\alpha} + \frac{\beta}{n} \cdot \frac{x^{\alpha+n}}{\alpha+n} + \frac{\beta(\beta+n)}{n.\,2n} \cdot \frac{x^{\alpha+2n}}{\alpha+2n}$$

$$+ \frac{\beta(\beta+n)(\beta+2n)}{n.\,2n.\,3n} \cdot \frac{x^{\alpha+3n}}{\alpha+3n} + \text{etc.}$$

haecque ſeries, in factorem alterum $\frac{x^{a-1}\,dx}{\sqrt[n]{(1-x^n)^b}}$ ducta et integrata, praebebit valorem quaeſitum P.

§. 4. Cum igitur, facta multiplicatione, primus valoris integralis terminus euadat

$$\int \frac{x^{a+\alpha-1}\,dx}{\sqrt[n]{(1-x^n)^b}},$$

reliqui autem omnes, puta:

$$\int \frac{x^{a+\alpha+n-1}\,dx}{\sqrt[n]{(1-x^n)^b}}; \int \frac{x^{a+\alpha+2n-1}\,dx}{\sqrt[n]{(1-x^n)^b}}; \text{ etc.}$$

ad priorem reduci patiantur, ponatur ille

$$\int \frac{x^{a+\alpha-1}\,dx}{\sqrt[n]{(1-x^n)^b}} = \Gamma$$

et quo reductio facilior reddatur, ſequens inſtituatur operatio generalis, ad Lemma generale, in ſubſidium vocandum, perducens.

§. 5. Cum exponentes ipſius x in numeratoribus continuo numero n crescant, consideretur haec formula integralis: $\int \frac{x^{f+n-1}\,dx}{\sqrt[n]{(1-x^n)^b}}$, quae ad hanc simpliciorem:

$\int \frac{x^{f-1}\,dx}{\sqrt[n]{(1-x^n)^b}}$ sit reuocanda. Hunc in finem statuatur illa formula

$$\int \frac{x^{f+n-1}\,dx}{\sqrt[n]{(1-x^n)^b}} = A\int \frac{x^{f-1}\,dx}{\sqrt[n]{(1-x^n)^b}} + B\,x^f(1-x^n)^{1-\frac{b}{n}}$$

et sumtis differentialibus erit

$$\frac{x^{f+n-1}\,dx}{\sqrt[n]{(1-x^n)^b}} = \frac{A\,x^{f-1}\,dx}{\sqrt[n]{(1-x^n)^b}} + B f x^{f-1}\,dx\,(1-x^n)^{1-\frac{b}{n}}$$
$$- B(n-b)\,x^{f+n-1}\,dx\,(1-x^n)^{-\frac{b}{n}}$$

quae aequatio, ducta in $\sqrt[n]{(1-x^n)^b}$ et diuisa per $x^{f-1}dx$, ad hanc simpliciorem reducitur:

$$x^n = A + Bf(1-x^n) - B(n-b)\,x^n,$$

ex qua ambo coefficientes A et B facili negotio determinantur, cum, aequando inter se terminos absolutos, itemque terminos litteram x continentes, fieri debeat

$$Bf + A = 0 \text{ et } B(f+n-b) = -1.$$

Hinc enim colligitur

$$B = \frac{-1}{f+n-b} \text{ et } A = \frac{f}{f+n-b}.$$

quibus

quibus substitutis in aequatione assumta, fiet

$$\int \frac{x^{f+n-1}\,dx}{\sqrt[n]{(1-x^n)^b}} = \frac{f}{f+n-b} \int \frac{x^{f-1}\,dx}{\sqrt[n]{(1-x^n)^b}};$$

terminus enim absolutus, littera B affectus, posito $x = 1$, in nihilum abit.

§. 6. Beneficio igitur huius Lemmatis valores integrales terminorum seriei pro P inuentae, quae est

$$P = \frac{1}{\alpha}.\int \frac{x^{a+\alpha-1}\,dx}{\sqrt[n]{(1-x^n)^b}} + \frac{\beta}{n}.\frac{1}{\alpha+n}.\int \frac{x^{a+\alpha+n-1}\,dx}{\sqrt[n]{(1-x^n)^b}}$$

$$+ \frac{\beta(\beta+n)}{n.2n}.\frac{1}{\alpha+2n}.\int \frac{x^{a+\alpha+2n-1}\,dx}{\sqrt[n]{(1-x^n)^b}} + \text{etc.}$$

sequenti modo per priorem Γ exprimentur:

$$\int \frac{x^{a+\alpha-1}\,dx}{\sqrt[n]{(1-x^n)^b}} = \Gamma.$$

$$\int \frac{x^{a+\alpha+n-1}\,dx}{\sqrt[n]{(1-x^n)^b}} = \frac{a+\alpha}{a+\alpha+n-b}\,\Gamma.$$

$$\int \frac{x^{a+\alpha+2n-1}\,dx}{\sqrt[n]{(1-x^n)^b}} = \frac{a+\alpha}{a+\alpha+n-b}.\frac{a+\alpha+n}{a+\alpha+2n-b}\,\Gamma.$$

$$\int \frac{x^{a+\alpha+3n-1}\,dx}{\sqrt[n]{(1-x^n)^b}} = \frac{a+\alpha}{a+\alpha+n-b}.\frac{a+\alpha+n}{a+\alpha+2n-b}.$$

$$\frac{a+\alpha+2n}{a+\alpha+3n-b}\,\Gamma. \text{ etc.}$$

Substitutio horum valorum in serie modo allata hanc suppeditat expressionem pro priore parte:

$$P = \Gamma \left\{ \begin{array}{l} \frac{1}{\alpha} + \frac{\beta}{n} \cdot \frac{1}{\alpha+n} \cdot \frac{a+\alpha}{a+\alpha+n-b} + \frac{\beta(\beta+n)}{n.\,2n} \cdot \frac{1}{\alpha+2n} \cdot \frac{a+\alpha}{a+\alpha+n-b} \cdot \frac{a+\alpha+n}{a+\alpha+2n-b} \\ + \frac{\beta(\beta+n)(\beta+2n)}{n.\,2n.\,3n} \cdot \frac{1}{\alpha+3n} \cdot \frac{a+\alpha}{a+\alpha+n-b} \cdot \frac{a+\alpha+n}{a+\alpha+2n-b} \cdot \frac{a+\alpha+2n}{a+\alpha+3n-b} \end{array} \right.$$

§. 7. Hoc valore pro P inuento, superfluum foret, easdem operationes pro altera parte Q, valoris quaesiti, repetere. Ex inspectione enim expressionis per dQ designatae, eiusque cum formula dP comparatione, facile perspicitur, illam ab hac non nisi in hoc discrepare, quod exponentes a et α, itemque b et β sint permutati. Dummodo ergo in Serie pro P inuenta scribamus litteram α loco a, tum vero β loco b, et vice versa, reliquis operationibus prolixioribus supersedere poterimus. Hoc enim facto fiet:

$$Q = \Delta \left\{ \begin{array}{l} \frac{1}{a} + \frac{b}{n} \cdot \frac{1}{a+n} \cdot \frac{a+\alpha}{a+\alpha+n-\beta} + \frac{b(b+n)}{n.\,2n} \cdot \frac{1}{a+2n} \cdot \frac{a+\alpha}{a+\alpha+n-\beta} \cdot \frac{a+\alpha+n}{a+\alpha+2n-\beta} \\ + \frac{b(b+n)(b+2n)}{n.\,2n.\,3n} \cdot \frac{1}{a+3n} \cdot \frac{a+\alpha}{a+\alpha+n-\beta} \cdot \frac{a+\alpha+n}{a+\alpha+2n-\beta} \cdot \frac{a+\alpha+2n}{a+\alpha+3n-\beta} + \text{etc.} \end{array} \right.$$

denotante Δ valorum formulae integralis $\int \frac{x^{\alpha-1}\,dx}{\sqrt[n]{(1-x^n)^\beta}}$, quem scilicet, pro iisdem integrationis terminis, (ab $x=0$ vsque ad $x=1$) recipit.

§. 8. Inuentis autem valoribus litterarum P et Q, innotescit simul valor quaesitus producti propositi. Summa enim ambarum serierum modo traditarum exhibebit valorem litterae S, qua supra istud productum:

$$\int \frac{x^{a-1}\,dx}{\sqrt[n]{(1-x^n)^b}} \times \int \frac{x^{\alpha-1}\,dx}{\sqrt[n]{(1-x^n)^\beta}}$$

designa-

designauimus, sumtis integralibus ab $x = 0$ ad $x = 1$. Harum serierum vsum sequentibus exemplis illustrasse, operae pretium erit.

Exemplum I.

§. 9. Sit propositum hoc productum binorum integralium:

$$S = \int \frac{dx}{\sqrt[3]{(1-x^3)^2}} \times \int \frac{x\,dx}{\sqrt[3]{(1-x^3)}},$$

cuius valorem, ab $x = 0$ ad $x = 1$ extensum, inuestigari oporteat. Cum igitur hoc casu sit

$$n = 3;\ a = 1;\ b = 2;\ \alpha = 2;\ \beta = 1,$$

erit primo

$$\Gamma = \int \frac{xx\,dx}{\sqrt[3]{(1-x^3)^2}} \text{ et } \Delta = \int \frac{xx\,dx}{\sqrt[3]{(1-x^3)}},$$

quas duas formulas ante omnia, habito respectu terminorum integrationis, integrari oportet.

§. 10. Pro priore formula integranda ponatur $1 - x^3 = z^3$, eritque

$$\int \frac{xx\,dx}{\sqrt[3]{(1-x^3)^2}} = -\int dz, \text{ ideoque}$$

$$\Gamma = C - z = C - \sqrt[3]{(1-x^3)},$$

vbi constans C ita determinari debet, vt posito $x = 0$ valor Γ in nihilum abeat. Erit igitur $C = 1$, ideoque

$\Gamma = 1 - \sqrt[5]{(1 - x^5)}$, positoque $x = 1$ erit pro terminis integrationis praescriptis $\Gamma = 1$. Pro altera formula Δ, si ponatur $1 - x^3 = z^3$, ob differentiale $x\,x\,d\,x = -z\,z\,d\,z$ erit

$$\Delta = -\int z\,d\,z = C - \tfrac{1}{2} z\,z,$$

vnde pro iisdem terminis integrationis adipiscimur $\Delta = \frac{1}{2}$.

§. 11. Substituantur igitur in seriebus pro P et Q inuentis valores Γ et Δ modo eruti, tum vero loco n, a, b, α, β debiti valores scribantur, quo facto elicitur

$$P = \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{3} \cdot \tfrac{1}{5} \cdot \tfrac{3}{4} + \tfrac{1.4}{3.6} \cdot \tfrac{1}{8} \cdot \tfrac{3.6}{4.7} + \tfrac{1.4.7}{3.6.9} \cdot \tfrac{1}{11} \cdot \tfrac{3.6.9}{4.7.10}$$
$$+ \tfrac{1.4.7.10}{3.6.9.12} \cdot \tfrac{1}{14} \cdot \tfrac{3.6.9.12}{4.7.10.13} + \text{etc.}$$

$$Q = \tfrac{1}{2} \left\{ \begin{array}{l} 1 + \tfrac{2}{3} \cdot \tfrac{1}{4} \cdot \tfrac{3}{5} + \tfrac{2.5}{3.6} \cdot \tfrac{1}{7} \cdot \tfrac{3.6}{5.8} + \tfrac{2.5.8}{3.6.9} \cdot \tfrac{1}{10} \cdot \tfrac{3.6.9}{5.8.11} \\ + \tfrac{2.5.8.11}{3.6.9.12} \cdot \tfrac{1}{13} \cdot \tfrac{3.6.9.12}{5.8.11.14} + \text{etc.} \end{array} \right\}$$

quae autem ambae series, depressione, quantum fieri potest, instituta, sequentem induunt formam concinniorem:

$$P = \tfrac{1}{1.2} + \tfrac{1}{4.5} + \tfrac{1}{7.8} + \tfrac{1}{10.11} + \tfrac{1}{13.14} + \text{etc.}$$
$$Q = \tfrac{1}{1.2} + \tfrac{1}{4.5} + \tfrac{1}{7.8} + \tfrac{1}{10.11} + \tfrac{1}{13.14}$$

vbi iam manifestum est, fieri $Q = P$, ita vt valor producti propositi sit $S = 2P$.

§. 12. Iam pro inuestiganda summa seriei pro P inuentae fingatur esse

$$P = \tfrac{x^2}{1.2} + \tfrac{x^5}{4.5} + \tfrac{x^8}{7.8} + \tfrac{x^{11}}{10.11} + \text{etc.}$$

eritque

eritque, si bis differentietur et per $d x^2$ diuidatur,

$$\frac{d d P}{d x^2} = 1 + x^3 + x^6 + x^9 + x^{12} + \text{etc.}$$

Constat autem summa huius seriei $= \frac{1}{1 - x^3}$, ita vt sit

$$\frac{d d P}{d x^2} = \frac{1}{1 - x^3},$$

vnde integrando colligitur

$$\frac{d P}{d x} = \int \frac{d x}{1 + x^3},$$

hinc per $d x$ multiplicando denuoque integrando erit

$$P = \int d x \int \frac{d x}{1 - x^3}.$$

§. 13. Hic ergo formulam adepti sumus duplici signo summatorio implicatam; verum alterum eorum eliminatur ope reductionis notissimae $\int p\, d q = p q - \int q\, d p$. Posito enim

$p = \int \frac{d x}{1 - x^3}$ et $d q = d x$, ob $d p = \frac{d x}{1 - x^3}$ et $q = x$ fiet

$$\int d x \int \frac{d x}{1 - x^3} = x \int \frac{d x}{1 - x^3} - \int \frac{x\, d x}{1 - x^3},$$

vnde posito, vti requiritur, factore finito $x = 1$, erit

$$P = \int \frac{d x}{1 - x^3} - \int \frac{x\, d x}{1 - x^3}.$$

§. 14. Ex elementis autem Calculi integralis notum est esse

$$\int \frac{d x}{1 - x^3} = -\tfrac{1}{3} l (1 - x) + \tfrac{1}{6} l (1 + x + x x) + \tfrac{1}{\sqrt{3}} \text{ A tang. } \frac{x \sqrt{3}}{2 + x}$$

$$\int \frac{x\, d x}{1 - x^3} = -\tfrac{1}{3} l (1 - x) + \tfrac{1}{6} l (1 + x + x x) - \tfrac{1}{\sqrt{3}} \text{ A tang. } \frac{x \sqrt{3}}{2 + x}.$$

Facta igitur horum valorum substitutione obtinetur

$$P = \tfrac{2}{\sqrt{3}} \text{ A tang. } \frac{x \sqrt{3}}{2 + x};$$

integrali vero vsque ad terminum praescriptum $x = 1$ extenso, fit

$$P = \tfrac{2}{\sqrt{3}} \text{ A tang. } \tfrac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\pi}{3 \sqrt{3}}.$$

En

En ergo nacti ſumus valorem producti propoſiti per quadraturam circuli expreſſum, cum ſit.

$$\int \frac{dx}{\sqrt[3]{(1-x^3)^2}} \times \int \frac{x\,dx}{\sqrt[3]{(1-x^3)}} \begin{bmatrix} \text{ab } x = 0 \\ \text{ad } x = 1 \end{bmatrix} = \frac{2\pi}{3\sqrt{3}}.$$

Exemplum II.

§. 15. Propoſitus ſit inueſtigandus valor huius producti:

$$S = \int \frac{dx}{\sqrt{(1-x^4)}} \times \int \frac{xx\,dx}{\sqrt{(1-x^4)}} \begin{bmatrix} \text{ab } x = 0 \\ \text{ad } x = 1 \end{bmatrix}.$$

Hoc quidem productum in forma generali non contentum ideoque omnem applicationem reſpuere videtur, quia ſimul fieri nequit $n = 2$ et $n = 4$; verum facile ad caſum generalem accommodari poteſt, loco $\sqrt{(1-x^4)}$ ſcribendo $\sqrt[4]{(1-x^4)^2}$, ita vt productum propoſitum ſit

$$S = \int \frac{dx}{\sqrt[4]{(1-x^4)^2}} \times \int \frac{xx\,dx}{\sqrt[4]{(1-x^4)^2}}.$$

§. 16. Cum igitur pro hoc caſu habeamus

$$n = 4;\ a = 1;\ b = 2;\ \alpha = 3;\ \beta = 2,$$

ambo factores communes, ſeriebus praepoſiti, erunt

$$\Gamma = \int \frac{x^3\,dx}{\sqrt[4]{(1-x^4)^2}} \text{ et } \Delta = \int \frac{x^3\,dx}{\sqrt[4]{(1-x^4)^2}};$$

ideoque $\Delta = \Gamma$. Pro hac formula $\int \frac{x^3\,dx}{\sqrt[4]{(1-x^4)^2}}$ integranda ſtatuatur $1 - x^4 = z^4$; ita vt, ob

$$x^3\,dx = -z^3\,dz \text{ et } \sqrt[4]{(1-x^4)^2} = zz, \text{ fiat}$$
$$\Gamma = -\int z\,dz = C - \tfrac{1}{2}zz.$$

Hinc, posito $x = 0$, fiet $C = 1$, ideoque $\Gamma = 1 - \frac{1}{2}zz$; tum vero sumto $x = 1$ erit

$$\Gamma = \Delta = \int \frac{x^3\,dx}{\sqrt[4]{(1-x^4)^2}} \begin{bmatrix} \text{ab } x = 0 \\ \text{ad } x = 1 \end{bmatrix} = \tfrac{1}{2}.$$

Hic valor pro Γ et Δ inuentus, si, una cum valoribus pro n, a, α, b, β, in seriebus pro P et Q datis substituatur, prodibit

$$P = \tfrac{1}{2}\left(\tfrac{1}{3} + \tfrac{2}{4}\cdot\tfrac{1}{7}\cdot\tfrac{4}{6} + \tfrac{2.6}{4.8}\cdot\tfrac{1}{11}\cdot\tfrac{4.8}{6.10} + \tfrac{2.6.10}{4.8.12}\cdot\tfrac{1}{15}\cdot\tfrac{4.8.12}{6.10.14} + \text{etc.}\right)$$
$$Q = \tfrac{1}{2}\left(1 + \tfrac{2}{4}\cdot\tfrac{1}{5}\cdot\tfrac{4}{6} + \tfrac{2.6}{4.8}\cdot\tfrac{1}{9}\cdot\tfrac{4.8}{6.10} + \tfrac{2.6.10}{4.8.12}\cdot\tfrac{1}{13}\cdot\tfrac{4.8.12}{6.10.14} + \text{etc.}\right)$$

quae expressiones, depressione facta, ad has reducuntur:

$$P = \tfrac{1}{2.3} + \tfrac{1}{6.7} + \tfrac{1}{10.11} + \tfrac{1}{14.15} + \text{etc.}$$
$$Q = \tfrac{1}{1.2} + \tfrac{1}{5.6} + \tfrac{1}{9.10} + \tfrac{1}{13.14} + \text{etc.}$$

§. 17. Quo summas harum duarum serierum commode colligere queamus, fingamus primo pro P istam seriem:

$$P = \tfrac{x^3}{2.3} + \tfrac{x^7}{6.7} + \tfrac{x^{11}}{10.11} + \tfrac{x^{15}}{14.15} + \text{etc.}$$

eritque bis differentiando

$$\tfrac{ddP}{dx^2} = x + x^5 + x^9 + x^{13} + x^{17} + \text{etc.} = \tfrac{x}{1-x^4};$$

hinc retrogrediendo erit

$$\tfrac{dP}{dx} = \int\tfrac{x\,dx}{1-x^4} \text{ et } P = \int dx \int \tfrac{x\,dx}{1-x^4}.$$

Hic vt supra in exemplo praecedente adhibeamus Lemma $\int p\,dq = pq - \int q\,dp$, quod nobis istam subministrat expressionem:

$$P = x\int\frac{x\,dx}{1-x^4} - \int\frac{xx\,dx}{1-x^4} = \int\frac{x\,dx}{1-x^4} - \int\frac{xx\,dx}{1-x^4}$$

quia factorem finitum x vnitati statim aequare licet. Iam vero constat esse

$$\int\frac{x\,dx}{1-x^4} = \tfrac{1}{4}\,l\,\frac{1+x}{1-x} + \tfrac{1}{4}\,l\,(1+xx)$$

$$\int\frac{xx\,dx}{1-x^4} = \tfrac{1}{4}\,l\,\frac{1+x}{1-x} - \tfrac{1}{2}\,\mathrm{A\ tag.}\,x\,;$$

vnde, facta substitutione, colligitur

$$P = \tfrac{1}{4}\,l\,(1+xx) + \tfrac{1}{2}\,\mathrm{A\ tag.}\,x\,,$$

siue posito $x = 1$ erit

$$P = \tfrac{1}{4}\,l\,2 + \tfrac{1}{2}\cdot\tfrac{\pi}{4}.$$

§. 18. Pro altero valore Q determinando fingatur simili modo

$$Q = \frac{x^2}{1.2} + \frac{x^6}{5.6} + \frac{x^{10}}{9.10} + \frac{x^{14}}{13.14} + \text{etc.}$$

sumtisque differentio-differentialibus erit

$$\frac{ddQ}{dx^2} = 1 + x^4 + x^8 + x^{12} + x^{16} + \text{etc.} = \frac{1}{1-x^4},$$

ita vt iterum integrando fiat

$$\frac{dQ}{dx} = \int\frac{dx}{1-x^4} \text{ et } Q = \int dx\int\frac{dx}{1-x^4}\,;$$

hincque reducendo vt supra

$$Q = \int\frac{dx}{1-x^4} - \int\frac{x\,dx}{1-x^4}\,,$$

ita vt ob

$\int\frac{dx}{1-x^4} = \tfrac{1}{4}\,l\,\frac{1+x}{1-x} + \tfrac{1}{2}\,\mathrm{A\ tag.}\,x$, habeamus

$$Q = \tfrac{1}{2}\,\mathrm{A\ tag.}\,x - \tfrac{1}{4}\,l\,(1+xx)$$

siue pro terminis integrationis praescriptis

$$Q = \tfrac{1}{2}\cdot\tfrac{\pi}{4} - \tfrac{1}{4}\,l\,2\,,$$

vnde colligendo nanciscimur

$$S = P + Q = \tfrac{\pi}{4}\,,$$

hoc

hoc eſt

$$\int \frac{dx}{\sqrt{(1-x^4)}} \times \int \frac{xx\,dx}{\sqrt{(1-x^4)}} \left[\begin{matrix} ab\ x = 0 \\ ad\ x = 1 \end{matrix} \right] = \frac{\pi}{4}.$$

quae expreſſio complectitur proprietatem illam Elaſticae rectangulae, ſiue Lintcariae, ab Ill. *Eulero* detectam: quod rectangulum, ſub applicata huius curuae, abſciſſae $= 1$ reſpondente, eiusque arcu comprehenſum, aequetur areae circuli, cuius diameter $= 1$.

Methodus altera.

§. 19. Fundamentum huius methodi in eo eſt poſitum, quod iſta formula integralis: $\int \frac{x^{m-1}\,dx}{\sqrt[n]{(1-x^n)^{n-k}}}$, ab $x = 0$ vsque ad $x = 1$ extenſa, duplici modo in productum infinitum conuerti queat, ope Methodi nuperrime ab Illuſtri *Eulero* traditae, ex qua, ipſo ſuadente, modum deſumſi, valorem producti in titulo expoſiti explorandi, qui eo maiorem attentionem meretur, quod applicationes caſuum particularium ſine vlla vlteriori integratione expediri et facili negotio ex formulis generalibus deduci queant.

§. 20. *Prior modus* conuerſionis formulae $\int \frac{x^{m-1}\,dx}{\sqrt[n]{(1-x^n)^{n-k}}}$ in productum infinitum hic eſt:

Ponatur $\Sigma = x^m (1-x^n)^{\frac{k}{n}}$,

quae formula pro vtroque termino integrationis, hoc eſt tam caſu $x = 0$, quam caſu $x = 1$, euaneſcit, dummodo fuerint m, n et k numeri poſitiui. Hinc differentiando erit:

$$d\Sigma = x^{m-1}\,dx\,(1-x^n)^{\frac{k-n}{n}}\,(m - m x^n - k x^n).$$

 Po-

Posito igitur

$$dx(1-x^n)^{\frac{k-n}{n}} = dV,$$

ita vt sit

$$V = \int \frac{dx}{\sqrt[n]{(1-x^n)^{n-k}}},$$

erit iterum integrando

$$\Sigma = m\int x^{m-1}\, dV - (m+k)\int x^{m+n-1}\, dV.$$

§. 21. Cum autem forma pro Σ assumta pro ambobus integrationis terminis in nihilum abeat, fieri debet $\Sigma = 0$, vnde nascitur haec aequatio:

$$m\int x^{m-1}\, dV - (m+k)\int x^{m+n-1}\, dV = 0,$$

ideoque, integralibus ab $x = 0$ ad $x = 1$ extensis, erit

$$\int x^{m-1}\, dV = \frac{m+k}{m}\int x^{m+n-1}\, dV.$$

Simili modo fiet

$$\int x^{m+n-1}\, dV = \frac{m+k+n}{m+n}\int x^{m+2n-1}\, dV;$$

$$\int x^{m+2n-1}\, dV = \frac{m+k+2n}{m+2n}\int x^{m+3n-1}\, dV;$$

$$\int x^{m+3n-1}\, dV = \frac{m+k+3n}{m+3n}\int x^{m+4n-1}\, dV;$$

et ita porro. Quod si igitur loco integralium, in parte dextra occurrentium, successiue substituantur valores assignati, haecque operatio in infinitum vsque continuata concipiatur, habebitur:

$$\int x^{m-1}\, dV = \frac{m+k}{m}\cdot\frac{m+k+n}{m+n}\cdot\frac{m+k+2n}{m+2n}\cdots\int x^{m+in-1}\, dV$$

denotante i numerum infinitum.

§. 22. Ponatur breuitatis gratia $\int x^{m-1}\, dV = \Phi$, vt sit

$\Phi =$

$$\Phi = \frac{m+k}{m} \cdot \frac{m+k+n}{m+n} \cdot \frac{m+k+2n}{m+2n} \cdot \frac{m+k+3n}{m+3n} \ldots \int x^{m+in-1}\, d\mathrm{V},$$

et pro eliminanda formula integrali infinita $\int x^{m+in-1} d\mathrm{V}$ ſumatur $m = n$, ſtatuaturque

$$\Phi' = \int \frac{x^{n-1}\, dx}{\sqrt[n]{(1-x^n)^{n-k}}},$$

quae formula per ſimile productum infinitum exprimi, ſimulque integrari poteſt. Ponatur enim

$$1 - x^n = z^n, \text{ vt ſit } x^{n-1}\, dx = -z^{n-1}\, dz \text{ et}$$
$$\sqrt[n]{(1-x^n)^{n-k}} = z^{n-k}, \text{ fietque}$$

$$\Phi' = -\int z^{k-1}\, dz = \mathrm{C} - \frac{z^k}{k} = \mathrm{C} - \frac{(1-x^n)^{\frac{k}{n}}}{k},$$

vbi, poſito $x = 0$, conſtans ita definitur, vt ſit $\mathrm{C} = \frac{1}{k}$, vnde colligitur

$$\Phi' = \frac{1 - (1-x^n)^{\frac{k}{n}}}{k},$$

hincque poſito $x = 1$ erit

$$\Phi' = \frac{1}{k} = \frac{n+k}{n} \cdot \frac{2n+k}{2n} \cdot \frac{3n+k}{3n} \cdot \frac{4n+k}{4n} \ldots \int x^{n+in-1}\, d\mathrm{V}.$$

§. 23. Quod ſi iam prior productum Φ per iſtud Φ' diuidatur, ſinguli factores vnius per reſpondentes alterius, factor infiniteſimus

$$\frac{\int x^{m+in-1}\, d\mathrm{V}}{\int x^{n+in-1}\, d\mathrm{V}}$$

vnitati aequabitur, quo obſeruato orietur iſta expreſſio:

$$\frac{\Phi}{\Phi'} = k\Phi = \frac{n(m+k)}{m(n+k)} \cdot \frac{2n(m+k+n)}{(m+n)(2n+k)} \cdot \frac{3n(m+k+2n)}{(m+2n)(3n+k)} \cdot \text{ etc.}$$

Hic ergo modus suppeditauit:

$$\int \frac{x^{m-1}\,dx}{\sqrt[n]{(1-x^n)^{n-k}}} = \frac{1}{k} \cdot \frac{n(m+k)}{m(n+k)} \cdot \frac{2n(m+k+n)}{(m+n)(2n+k)} \cdot \frac{3n(m+k+2n)}{(m+2n)(3n+k)} \cdot \text{etc.}$$

§. 24. *Modus alter*, eandem formulam in huiusmodi productum infinitum conuertendi, ita se habet: In expressione, §. 21. pro formula

$$\int x^{m-1}\,dV = \int \frac{x^{m-1}\,dx}{\sqrt[n]{(1-x^n)^{n-k}}}$$

inuenta, ponatur $m = n - k$, vt habeatur ista:

$$\int \frac{x^{n-k-1}\,dx}{\sqrt[n]{(1-x^n)^{n-k}}} = \frac{n}{n-k} \cdot \frac{2n}{2n-k} \cdot \frac{3n}{3n-k} \cdot \cdot \cdot \int x^{n-k+in-1}\,dV$$

vbi iam formulam integralem $\int \frac{x^{n-k-1}\,dx}{\sqrt[n]{(1-x^n)^{n-k}}}$ per praecepta cognita haud difficulter ad rationalitatem perducere et integrare licet.

§. 25. Quo autem hoc facillime fieri queat, repraesentetur formula illa sub hac forma:

$$\int \frac{dx}{x} \times \frac{x^{n-k}}{\sqrt[n]{(1-x^n)^{n-k}}}, \text{ et posito } \frac{x}{\sqrt[n]{(1-x^n)}} = y \text{ erit}$$

$$\int \frac{x^{n-k-1}\,dx}{\sqrt[n]{(1-x^n)^{n-k}}} = \int \frac{dx}{x} \cdot y^{n-k}.$$

Est

Eſt autem

$$\frac{x^n}{1-x^n}=y^n,\ \text{idcoque}\ x^n=\frac{y^n}{1+y^n},$$

vnde, ſumtis logarithmis erit

$$n\,l\,x=n\,l\,y-l\,(1+y^n),$$

hincque differentiando

$$\frac{dx}{x}=\frac{dy}{y}-\frac{y^{n-1}\,dy}{1+y^n}=\frac{dy}{y\,(1+y^n)}.$$

Hoc valore ſubſtituto formula integralis propoſita transmutatur in hanc rationalem: $\int\frac{y^{n-k-1}\,dy}{1+y^n}$, quae autem, ob terminos integrationis $x=0$ et $x=1$, ab $y=0$ vsque ad $y=\infty$ eſt extendenda, ita vt nunc habeamus

$$\int\frac{x^{n-k-1}\,dx}{\sqrt[n]{(1-x^n)^{n-k}}}\left[\begin{array}{l}\text{ab}\ x=0\\ \text{ad}\ x=1\end{array}\right]=\int\frac{y^{n-k-1}\,dy}{1+y^n}\left[\begin{array}{l}\text{ab}\ y=0\\ \text{ad}\ y=\infty\end{array}\right].$$

§. 26. Integrationi actuali ſatis obſtruſae hic immorari ſuperfluum foret; cum Ill. *Eulerus* iam dudum in Calculi Integralis Tom. I. pag. 252. demonſtrauerit eſſe

$$\int\frac{y^{\mu-1}\,dy}{1+y^n}\left(\begin{array}{l}\text{ab}\ y=0\\ \text{ad}\ y=\infty\end{array}\right)=\frac{\pi}{n\,\text{ſin.}\,\frac{\mu\pi}{n}}.$$

Hoc enim notato integrale quaeſitum formulae propoſitae erit

$$\frac{\pi}{n\,\text{ſin.}\,\frac{(n-k)\pi}{n}}=\frac{\pi}{n\,\text{ſin.}(180^\circ-\frac{k\pi}{n})}=\frac{\pi}{n\,\text{ſin.}\,\frac{k\pi}{n}}.$$

Per

Per productum infinitum igitur erit:

$$\int \frac{x^{n-k-1}\,dx}{\sqrt[n]{(1-x^n)^{n-k}}} = \frac{\pi}{n \sin.\frac{k\pi}{n}} = \frac{n}{n-k}\cdot\frac{2n}{2n-k}\cdot\frac{3n}{3n-k}\cdots\int x^{n-k+in-1}\,dV.$$

§. 27. Si igitur superius productum, §. 21. inventum,

$$\Phi = \int \frac{x^{m-1}\,dx}{\sqrt[n]{(1-x^n)^{n-k}}} = \frac{m+k}{m}\cdot\frac{m+k+n}{m+n}\cdot\frac{m+k+2n}{m+2n}\cdots\int x^{m+in-1}\,dV$$

per posterius diuidatur, ob postremum factorem integralem

$$\frac{\int x^{m+in-1}\,dV}{\int x^{n-k+in-1}\,dV} = 1,$$

habebimus hanc expressionem:

$$\frac{n \sin.\frac{k\pi}{n}}{\pi}\cdot\Phi = \frac{(m+k)(n-k)}{mn}\cdot\frac{(m+k+n)(2n-k)}{2n(m+n)}\cdot\frac{(m+k+2n)(3n-k)}{3n(m+2n)}\cdot\text{etc.}$$

§. 28. Duplex igitur nacti sumus productum infinitum pro formula integrali

$$\int \frac{x^{m-1}\,dx}{\sqrt[n]{(1-x^n)^{n-k}}} \begin{bmatrix}\text{ab } x=0\\ \text{ad } x=1\end{bmatrix},$$

cum sit

$$\text{I.} \int \frac{x^{m-1}\,dx}{\sqrt[n]{(1-x^n)^{n-k}}} = \frac{1}{k}\cdot\frac{n(m+k)}{m(n+k)}\cdot\frac{2n(m+k+n)}{(m+n)(2n+k)}\cdot\frac{3n(m+k+2n)}{(m+2n)(3n+k)}\cdot\text{etc.}$$

$$\text{II.} \int \frac{x^{m-1}\,dx}{\sqrt[n]{(1-x^n)^{n-k}}} = \frac{\pi}{n \sin.\frac{k\pi}{n}}\cdot\frac{(m+k)(n-k)}{nm}\cdot\frac{(m+k+n)(2n-k)}{2n(m+n)}\cdot\frac{(m+k+2n)(3n-k)}{3n(m+n)}\cdot\text{etc.}$$

Ope

Ope igitur harum duarum expressionum facile erit infinitorum huiusmodi productorum:

$$\int \frac{x^{a-1}\,dx}{\sqrt[n]{(1-x^n)^b}} \times \int \frac{x^{\alpha-1}\,dx}{\sqrt[n]{(1-x^n)^\beta}},$$

valores assignare, id quod exemplis, iam ante prioris methodi subsidio expeditis, ostendisse operae pretium erit.

Exemplum I.

§. 29. Sit $\Phi = \int \frac{dx}{\sqrt[3]{(1-x^3)^2}}$, ita vt sit $m = 1$, $n = 3$, et $k = 1$, et binae expressiones pro hac forma integrali erunt:

$$1^\circ).\ \int \frac{dx}{\sqrt[3]{(1-x^3)^2}} = \frac{3.2}{1.4} \cdot \frac{6.5}{4.7} \cdot \frac{9.8}{7.10} \cdot \frac{12.11}{10.13} \cdot \text{etc.}$$

$$2^\circ).\ \int \frac{dx}{\sqrt[3]{(1-x^3)^2}} = \frac{2\pi}{3\sqrt{3}} \cdot \frac{2.2}{1.3} \cdot \frac{5.5}{4.6} \cdot \frac{11.11}{10.12} \cdot \text{etc.}$$

Tum vero sumatur $\Phi = \int \frac{x\,dx}{\sqrt[3]{(1-x^3)}}$, et ob $m = 2, n = 3$ et $k = 2$ erit duplici modo:

$$\text{I.}\ \int \frac{x\,dx}{\sqrt[3]{(1-x^3)}} = \frac{1}{2} \cdot \frac{3.4}{2.5} \cdot \frac{6.7}{5.8} \cdot \frac{9.10}{8.11} \cdot \frac{12.13}{11.14} \cdot \text{etc.}$$

$$\text{II.}\ \int \frac{x\,dx}{\sqrt[3]{(1-x^3)}} = \frac{2\pi}{3\sqrt{3}} \cdot \frac{1.4}{2.3} \cdot \frac{4.7}{5.6} \cdot \frac{7.10}{8.9} \cdot \frac{10.13}{11.12} \cdot \text{etc.}$$

Harum expreſſionum ſumatur I. et II. eritque productum

$$\int \frac{dx}{\sqrt[3]{(1-x^3)^2}} \times \int \frac{x\,dx}{\sqrt[3]{(1-x^3)}} \left(\begin{matrix}\text{ab } x=0\\ \text{ad } x=1\end{matrix}\right) = \frac{2\pi}{3\sqrt{3}},$$

vt ſupra.

Exemplum II.

§. 30. Sumatur $\Phi = \int \frac{dx}{\sqrt[4]{(1-x^4)^2}}$, vbi $n=4$, $m=1$ et $k=2$, quibus ſubſtitutis geminus valor formulae integralis Φ erit

$$1^\circ).\ \int \frac{dx}{\sqrt[4]{(1-x^4)^2}} = \frac{1}{2} \cdot \frac{3.4}{1.6} \cdot \frac{7.8}{5.10} \cdot \frac{11.12}{9.14} \cdot \text{ etc.}$$

$$2^\circ).\ \int \frac{dx}{\sqrt[4]{(1-x^4)^2}} = \frac{\pi}{4} \cdot \frac{2.3}{1.4} \cdot \frac{6.7}{5.8} \cdot \frac{10.11}{9.12} \cdot \text{ etc.}$$

Statuatur porro $\Phi = \int \frac{xx\,dx}{\sqrt[4]{(1-x^4)^2}}$, eritque $n=4$, $m=3$, $k=2$, ideoque duplici modo

$$\text{I. } \int \frac{xx\,dx}{\sqrt[4]{(1-x^4)^2}} = \frac{1}{2} \cdot \frac{4.5}{3.6} \cdot \frac{8.9}{7.10} \cdot \frac{12.13}{11.14} \cdot \text{ etc.}$$

$$\text{II. } \int \frac{xx\,dx}{\sqrt[4]{(1-x^4)^2}} = \frac{\pi}{4} \cdot \frac{2.5}{3.4} \cdot \frac{6.9}{7.8} \cdot \frac{10.13}{11.14} \cdot \text{ etc.}$$

Hinc

Hinc sumto producto ex prima prioris et secunda posterioris formae, colligitur:

$$\mathrm{I}^a \times \mathrm{II}^a = \tfrac{\pi}{4} \cdot \tfrac{1.\ 2.\ 3.\ 4.\ 5.\ etc.}{1.\ 2.\ 3.\ 4.\ 5.\ etc.}, \text{ hoc est}$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{(1-x^4)}} \times \int \frac{xx\,dx}{\sqrt{(1-x^4)}} \begin{bmatrix} \text{ab } x = 0 \\ \text{ad } x = 1 \end{bmatrix} = \tfrac{\pi}{4},$$

Exemplum III.

§. 31. Sit $\Phi = \int \frac{dx}{\sqrt{(1-x^6)}} = \int \frac{dx}{\sqrt[6]{(1-x^6)^3}}$, quae postrema forma applicationi magis conuenit, et cum hoc casu sumi debeat $m = 1$, $n = 6$ et $k = 3$, fiet per producta §. 28 exhibita:

$$1^\circ) \int \frac{dx}{\sqrt[6]{(1-x^6)^3}} = \frac{1}{3} \cdot \frac{6.4}{1.9} \cdot \frac{12.10}{7.15} \cdot \frac{18.16}{13.21} \cdot \frac{24.22}{19.27} \cdot \text{etc.}$$

$$2^\circ) \int \frac{dx}{\sqrt[6]{(1-x^6)^3}} = \frac{\pi}{6} \cdot \frac{4.3}{1.6} \cdot \frac{10.\ 9}{7.12} \cdot \frac{16.15}{13.18} \cdot \frac{22.21}{19.24} \cdot \text{etc.}$$

Sit porro $\Phi = \int \frac{x^3\,dx}{\sqrt{(1-x^6)}} = \int \frac{x^3\,dx}{\sqrt[6]{(1-x^6)^3}}$, atque ob $m = 4$, $n = 6$ et $k = 3$ erit

$$\text{I.} \int \frac{x^3\,dx}{\sqrt[6]{(1-x^6)^3}} = \frac{1}{3} \cdot \frac{6.7}{4.9} \cdot \frac{12.13}{10.15} \cdot \frac{18.19}{16.21} \cdot \frac{24.25}{22.27} \cdot \text{etc.}$$

$$\text{II. } \int \frac{x^3\, dx}{\sqrt[6]{(1-x^6)^3}} = \frac{\pi}{6} \cdot \frac{7\cdot 3}{6\cdot 4} \cdot \frac{13\cdot 9}{12\cdot 10} \cdot \frac{19\cdot 15}{18\cdot 16} \cdot \frac{25\cdot 21}{24\cdot 22} \text{ etc.}$$

Multiplicando iam, ſiue 1 per II, ſiue 2 per I, fiet

$$\int \frac{dx}{\sqrt{(1-x^6)}} \times \int \frac{x^3\, dx}{\sqrt{(1-x^6)}} = \frac{\pi}{6}.$$

vti iam aliunde conſtat.

§. 32. Infiniti adhuc alii caſus particulares afferri poſſent, quibus omnibus productum infinitum, valorem producti integralis exhibens, abrumpitur: generaliori autem modo haec abruptio efficitur, ſumendo primo

$$m = \mu + 1;\ n = 2\nu \text{ et } k = \nu,$$

vt habeatur:

$$1. \int \frac{x^\mu\, dx}{\sqrt[2\nu]{(1-x^{2\nu})^\nu}} = \frac{1}{\nu} \cdot \frac{2\nu(\mu+\nu+1)}{3\nu(\mu+1)} \cdot \frac{4\nu(\mu+3\nu+1)}{5\nu(\mu+2\nu+1)} \cdot \frac{6\nu(\mu+5\nu+1)}{7\nu(\mu+4\nu+1)} \text{ etc.}$$

$$2. \int \frac{x^\mu\, dx}{\sqrt[2\nu]{(1-x^{2\nu})^\nu}} = \frac{\pi}{2\nu} \cdot \frac{\nu(\mu+\nu+1)}{2\nu(\mu+1)} \cdot \frac{3\nu(\mu+3\nu+1)}{4\nu(\mu+2\nu+1)} \cdot \frac{5\nu(\mu+5\nu+1)}{6\nu(\mu+4\nu+1)} \text{ etc.}$$

tum vero ſumendo $m = \mu + \nu + 1$, manente $n = 2\nu$ et $k = \nu$, quo caſu obtinentur hae duae expreſſiones:

$$\text{I.} \int \frac{x^{\mu+\nu}\, dx}{\sqrt[2\nu]{(1-x^{2\nu})^\nu}} = \frac{1}{\nu} \cdot \frac{2\nu(\mu+2\nu+1)}{3\nu(\mu+\nu+1)} \cdot \frac{4\nu(\mu+4\nu+1)}{5\nu(\mu+3\nu+1)} \cdot \frac{6\nu(\mu+6\nu+1)}{7\nu(\mu+5\nu+1)} \text{ etc.}$$

$$\text{II.} \int \frac{x^{\mu+\nu}\, dx}{\sqrt[2\nu]{(1-x^{2\nu})^\nu}} = \frac{\pi}{2\nu} \cdot \frac{\nu(\mu+2\nu+1)}{2\nu(\mu+\nu+1)} \cdot \frac{3\nu(\mu+4\nu+1)}{4\nu(\mu+3\nu+1)} \cdot \frac{5\nu(\mu+6\nu+1)}{6\nu(\mu+5\nu+1)} \text{ etc.}$$

§. 33. Quo abruptio producti harum binarum formularum integralium, quae fieri debet, siue 1 per II siue 2 per I multiplicetur, melius in oculos incidat, factorem denominatoris, $\mu + 1$, tanquam a reliquis, prorsus similibus, alienum spectare et seorsim ponere conueniet. Verbi gratia si consideremus expressionem numero 1 designatam, eam sub hac forma repraesentemus, praecedenti prorsus aequiualentem:

$$\int \frac{x^\mu\, dx}{\sqrt[2\nu]{(1-x^{2\nu})^\nu}} = \frac{1}{\mu+1} \cdot \frac{2\nu(\mu+\nu+1)}{\nu(\mu+2\nu+1)} \cdot \frac{4\nu(\mu+3\nu+1)}{3\nu(\mu+4\nu+1)} \cdot \frac{6\nu(\mu+5\nu+1)}{5\nu(\mu+6\nu+1)} \cdot \text{etc.}$$

quam si igitur ducamus in istam:

$$\int \frac{x^{\mu+\nu}\, dx}{\sqrt[2\nu]{(1+x^{2\nu})^\nu}} = \frac{\pi}{2\nu} \cdot \frac{\nu(\mu+2\nu+1)}{2\nu(\mu+\nu+1)} \cdot \frac{3\nu(\mu+4\nu+1)}{4\nu(\mu+3\nu+1)} \cdot \frac{5\nu(\mu+6\nu+1)}{6\nu(\mu+5\nu+1)} \cdot \text{etc.}$$

prodibit sequens productum satis memorabile:

$$\int \frac{x^\mu\, dx}{\sqrt{(1-x^{2\nu})}} \times \int \frac{x^{\mu+\nu}\, dx}{\sqrt{(1-x^{2\nu})}} \begin{pmatrix} \text{ab } x = 0 \\ \text{ad } x = 1 \end{pmatrix} = \frac{\pi}{2\nu(\mu+1)}.$$

§. 34. Idem, vti iam innuimus, productum nascitur, sumendo 2 et I. Cum enim sit

$$2. \int \frac{x^\mu\, dx}{\sqrt{1-x^{2\nu}}} = \frac{\pi}{2\nu} \cdot \frac{\nu}{\mu+1} \cdot \frac{3\nu(\mu+\nu+1)}{2\nu(\mu+2\nu+1)} \cdot \frac{5\nu(\mu+3\nu+1)}{4\nu(\mu+4\nu+1)} \cdot \frac{7\nu(\mu+5\nu+1)}{6\nu(\mu+6\nu+1)} \cdot \text{etc.}$$

$$\text{I}. \int \frac{x^{\mu+\nu}\, dx}{\sqrt{(1-x^{2\nu})}} = \frac{1}{\nu} \cdot \frac{2\nu(\mu+2\nu+1)}{3\nu(\mu+\nu+1)} \cdot \frac{4\nu(\mu+4\nu+1)}{5\nu(\mu+3\nu+1)} \cdot \frac{6\nu(\mu+6\nu+1)}{7\nu(\mu+5\nu+1)} \cdot \text{etc.}$$

vtique erit

$$\int \frac{x^{\mu}\, dx}{\sqrt{(1-x^{2\nu})}} \times \int \frac{x^{\mu+\nu}\, dx}{\sqrt{(1-x^{2\nu})}} \begin{pmatrix} \text{ab } x = 0 \\ \text{ad } x = 1 \end{pmatrix} = \frac{\pi}{2\nu(\mu+1)}.$$

qui valor, ex formulis generalioribus noſtris deductus, prorſus congruit cum illo, quem Ill. *Eulerus*, in Inſtitutionibus calculi integralis, Tom. I. pag. 232; per longe aliam methodum inuenerat.

PHY-

PHYSICO-
MATHEMATICA.

DE

DE MOTV OSCILLATORIO DVORVM CORPORVM EX FILO SVPER TROCHLEAS TRADVCTO SVSPENSORVM.

Auctore

L. EULERO.

§. 1.

Filo A M N B, ſuper duas trochleas M et N traducto, appenſa ſint duo corpora A et B. Per puncta M et N ducantur rectae verticales M P et N Q, ad easque horizontales A P et B Q, et elapſo tempore t corpora teneant ſitum in figura repraeſentatum. Tum pro ſitu corporum ponantur coordinatae $MP = x$ et $PA = y$, $NQ = x'$ et $QB = y'$, et quia longitudo fili manet inuariata, ſtatuamus $MN = M$, $MA = a + z$ et $NB = b - z$, vt tota fili longitudo ſit $= a + b + M$; tum vero ponamus angulos $AMP = \eta$ et $BNQ = \theta$ eritque Tab. III. Fig. 1.

$$x = (a + z) \text{ coſ. } \eta = \text{ et } y = (a + z) \text{ ſin. } \eta;$$

eodemque modo

$$x' = (b - z) \text{ coſ. } \theta \text{ et } y' = (b - z) \text{ ſin. } \theta.$$

§. 2. Ponatur nunc tenſio fili $= T$, a qua quia ambo corpora ſurſum trahuntur, dum propria grauitate deorsum nituntur, principia motus nobis suppeditant quatuor sequentes aequationes:

$$\text{I. } \frac{ddx}{2g\,dt^2} = \frac{A - T\cos.\eta}{A}; \quad \text{III. } \frac{ddx'}{2g\,dt^2} = \frac{B - T\sin.\theta}{B}$$

$$\text{II. } \frac{ddy}{2g\,dt^2} = -\frac{T\sin.\eta}{A}; \quad \text{IV. } \frac{ddy'}{2g\,dt^2} = -\frac{T\sin.\theta}{B},$$

ex quibus quatuor aequationibus 1°. tensionem fili T: 2° quantitatem z; 3° et 4° angulos η et θ definiri oportet.

§. 3. At vero differentiando habebimus

$$dx = dz\cos.\eta - (a+z)\,d\eta\sin.\eta \text{ et } ddx = (ddz - (a+z)\,d\eta^2)\cos.\eta - (2dzd\eta + (a+z)dd\eta)\sin.\eta$$

$$dy = dz\sin.\eta + (a+z)\,d\eta\cos.\eta \text{ et } ddy = (ddz - (a+z)\,d\eta^2)\sin.\eta + (2dzd\eta + (a+z)dd\eta)\cos.\eta$$

Eodem modo reperietur

$$ddx' = -(ddz + (b-z)\,d\theta^2)\cos.\theta + (2\,dz\,d\theta - (b-z)\,dd\theta)\sin.\theta$$

$$ddy' = -(ddz + (b-z)\,d\theta^2)\sin.\theta - (2\,dzd\theta - (b-z)\,dd\theta)\cos.\theta$$

quibus valoribus substitutis, nostrae aequationes erunt:

$$\text{I. } \frac{(ddz - (a+z)\,d\eta^2)\cos.\eta - (2\,dz\,d\eta + (a+z)\,dd\eta)\sin.\eta}{2g\,dt^2} = \frac{A - T\cos.\eta}{A}.$$

$$\text{II. } \frac{(ddz - (a+z)\,d\eta^2)\sin.\eta + (2\,dz\,d\eta + (a+z)\,dd\eta)\cos.\eta}{2g\,dt^2} = -\frac{T\sin.\eta}{A}.$$

$$\text{III. } -\frac{(ddz + (b-z)\,d\theta^2)\cos.\theta + (2\,dz\,d\theta - (b-z)\,dd\theta)\sin.\theta}{2g\,dt^2} = \frac{B - T\cos.\theta}{B}.$$

$$\text{IV. } -\frac{(ddz + (b-z)\,d\theta^2)\sin.\theta - (2\,dz\,d\theta - (b-z)\,dd\theta)\cos.\theta}{2g\,dt^2} = -\frac{T\sin.\theta}{B}.$$

§. 4. Hinc iam per idoneas combinationes formentur aequationes sequentes simpliciores:

I. $\cos.\eta$ + II. $\sin.\eta$ dat:

$$\text{I}^\circ.\ \frac{ddz - (a+z)\,d\eta^2}{2g\,dt^2} = \frac{A\cos.\eta - T}{A}; \text{ porro}$$

− I. $\sin.\eta$ + II. $\cos.\eta$ dat:

II°.

II°. $\frac{2\,dz\,d\eta + (a+z)\,dd\eta}{2\,g\,dt^2} = -\text{ſin.}\,\eta.$

$-$ III. coſ. θ $-$ IV. ſin. θ praebet:

III°. $\frac{ddz + (b-z)\,d\theta^2}{2\,g\,dt^2} = \frac{T - B\,\text{coſ.}\,\theta}{B}.$

$+$ III. ſin. θ $-$ IV. coſ. θ producit:

IV°. $\frac{2\,dz\,d\theta - (b-z)\,dd\theta}{2\,g\,dt^2} = \text{ſin.}\,\theta.$

Sicque tantum in I^a et III^a. tenſio T occurrit, ſecunda autem et quarta tenſionis ſunt immunes.

§. 5. Ad tenſionem igitur eliminandam vtamur hac noua combinatione: I^a. A $+$ III^a. B, quae praebet

$$\frac{(A+B)\,ddz - A\,(a+z)\,d\eta^2 + B\,(b-z)\,d\theta^2}{2\,g\,dt^2} = A\,\text{coſ.}\,\eta - B\,\text{coſ.}\,\theta$$

quae ergo aequatio cum ſuperiorum ſecunda et quarta totam ſolutionem problematis continet, vnde tam quantitatem z quam angulos η et θ definiri oportet.

§. 6. Antequam reſolutionem harum aequationum aggrediamur, quatuor aequationes primum inuentas alio modo tractemus, et quia eſt

$$dx = dz\,\text{coſ.}\,\eta - (a+z)\,d\eta\,\text{ſin.}\,\eta \text{ et } dy = dz\,\text{ſin.}\,\eta + (a+z)\,d\eta\,\text{coſ.}\,\eta$$

vtamur ſequentibus combinationibus:

I. $2\,dx$ $+$ II. $2\,dy$, vnde fit

$$\frac{2\,dx\,ddx + 2\,dy\,ddy}{2\,g\,dt^2} = 2\,dx - \frac{2\,T\,dz}{A},$$

quae aequatio integrata dat

$$\frac{dx^2 + dy^2}{2\,g\,dt^2} = 2\,x - 2\int\frac{T\,dz}{A}.$$

Nunc vero haec combinatio: I. x $+$ II. y praebet

$$\frac{x\,ddx + y\,ddy}{2\,g\,dt^2} = x - \frac{T\,(a+z)}{A}.$$

Haec aequatio addatur ad priorem et prodibit

$$\frac{dx^2 + dy^2 + xddx + yddy}{2g\,dt^2} = 3x - 2\int \frac{T\,dz}{A} - \frac{T}{A}(a+z),$$

vbi quidem partis ad ſiniſtram integrale eſt $\frac{x\,dx + y\,dy}{2g\,dt^2}$; at ex membro ad dextram nihil concludi poſſet. Pari modo non ſuccederet haec combinatio: I. y — II. x, quae dat $\frac{yddx - xddy}{2g\,dt^2} = y$, vbi etiam membri ſiniſtri integrale eſt $\frac{y\,dx - x\,dy}{2g\,dt^2}$, ſed iterum membrum alterum nullam reductionem patitur.

§. 7. Mirum autem non eſt, hunc motum, qualem in genere contemplamur, prorſus eſſe inextricabilem, quoniam ambo corpora A et B etiam inaequalia eſſe poſſent: hoc autem caſu grauius inter oſcillandum deſcenderet, leuius vero aſcenderet, ſicque motus prodiret nimis complicatus, quam vt per calculum determinari poſſet. Quamobrem neceſſe eſt noſtram inueſtigationem tantum ad corpora aequalia reſtringere, quia alioquin ſtatus aequilibrii locum habere non poſſet. Praeterea vero etiam neceſſe eſt diuagationes, ſeu angulos η et θ quam minimos aſſumere; vnde facile intelligitur, tenſionem fili hoc caſu ponderi cuiusque corporis fore aequalem, ita vt ſit $T = A = B$. Denique patet, niſi corporibus initio motus verticalis fuerit impreſſus, ambo corpora durante motu vix eſſe vel aſcenſura vel deſcenſura, ſicque etiam quantitas z quaſi vt infinite parua tractari poterit.

§. 8. Ponamus igitur ambo corpora A et B inter ſe aequalia, ac primo quidem remoueamus vtrumque motum oſcillatorium, ita vt ſit $\eta = 0$ et $\theta = 0$, ac remanebunt

bunt tantum aequationes prima et tertia

$$\frac{ddz}{2g\,dt^2} = 1 - \frac{T}{A};$$
$$\frac{ddz}{2g\,dt^2} = \frac{T}{A} - 1;$$

quae inuicem additae dant $\frac{2ddz}{2g\,dt^2} = 0$, et a se inuicem subtractae relinquunt $0 = -\frac{2T}{A} + 2$. Ex priore ergo sequitur $\frac{dz}{dt} = \alpha$, ideoque $z = \alpha t$; vnde patet, corpus A motu vniformi descendere celeritate $= \alpha$, alterum vero corpus B eadem celeritate ascendere. Ex posteriore vero fit $T = A$; tensio scilicet fili perpetuo erit eadem et aequalis ponderi vnius corporis.

§. 9. Nunc igitur tribuamus vtrique corpori quandam inclinationem η et θ, quasi infinite exiguam, et manifestum est, priorem motum inde non sensibiliter turbari, ita vt adhuc sit $z = \alpha t$ et $T = A$, nisi quatenus ob motum minimum corporum tensio aliquantillum immutetur; vnde literam B in calculo retineamus. Quatuor ergo aequationes nostrae erunt:

$$\text{I} - \frac{(a+\alpha t)\,d\eta^2}{2g\,dt^2} = 1 - \frac{T}{A};\quad \text{II}\ \frac{2\alpha\,dt\,d\eta + (a+\alpha t)\,dd\eta}{2g\,dt^2} = -\eta$$
$$\text{III}\ \frac{(b-\alpha t)\,d\theta^2}{2g\,dt^2} = \frac{T}{A} - 1;\quad \text{IV}\ \frac{2\alpha\,dt\,d\theta - (b-\alpha t)\,dd\theta}{2g\,dt^2} = \theta,$$

vbi ex secunda et quarta elici opportet ambos angulos η et θ. Prima vero ac tertia, quia inuoluunt quasi infinite-parua secundi ordinis, tantum inseruient correctionibus minimis, tam tensionis T quam quantitatis z, accuratius determinandis, quas igitur hic praetermittere licebit.

§. 10. Pro angulo igitur η inueniendo habemus hanc aequationem:

$$2\alpha\, dt\, d\eta + (a + \alpha t)\, dd\eta + 2g\eta\, dt^2 = 0,$$

quam quidem facile effet ad differentialia primi gradus reducere, quod autem nobis parum lucri effet allaturum. Ad ipfam aequationem autem commodius referendam ponamus $a = i\alpha$ et $\frac{2g}{\alpha} = n$, vt habeamus hanc aequationem:

$$2\, dt\, d\eta + (i + t)\, dd\eta + n\eta\, dt^2 = 0,$$

pro cuius integrali inueniendo fingamus hanc feriem:

$$\eta = A + Bt + Ctt + Dt^3 + Et^4 + Ft^5 + \text{etc.}$$

eritque

$$\frac{d\eta}{dt} = B + 2Ct + 3Dtt + 4Et^3 + 5Ft^4 + \text{etc. et}$$

$$\frac{dd\eta}{dt^2} = 1.2C + 2.3Dt + 3.4Ett + 4.5Ft^3 \text{ etc.}$$

qui valores fubftituantur vt fequitur:

$$\left.\begin{array}{llllll}
\frac{i\,dd\eta}{dt^2} = 1.2iC & + 2.3iDt & + 3.4iEtt & + 4.5iFt^3 & + \text{etc.} \\
\frac{t\,dd\eta}{dt^2} = & + 1.2C & + 2.3D & + 3.4E & + \text{etc.} \\
\frac{2\,d\eta}{dt} = 2B & + 4C & + 6D & + 8E & + \text{etc.} \\
n\eta = nA & + nB & + nC & + nD & + \text{etc.}
\end{array}\right\} = 0$$

vnde deducuntur hae determinationes:

$$C = \frac{-2B - nA}{1.2\,i};\quad D = \frac{-6C - nB}{2.3\,i};\quad E = \frac{-12D - nC}{3.4\,i};\ \text{etc.}$$

§. 11. Quia autem hic finguli coefficientes a binis praecedentibus pendent, huic incommodo medelam afferemus, ponendo $i + t = s$, vt habeamus hanc aequationem:

$$2\, ds\, d\eta + s\, dd\eta + n\eta\, ds^2 = 0, \text{ et nunc ponamus}$$

$$\eta = A + Bs + Css + Ds^3 + \text{etc.}$$

qua

qua ſerie ſubſtituta fiet

$$\left.\begin{aligned}\frac{s\,dd\eta}{ds^2} &= 1.2\,Cs + 2.3\,Dss + 3.4\,Es^3 + 4.5\,Fs^4 + \text{etc.}\\ \frac{2\,d\eta}{ds} &= 2B + 4Cs + 6Dss + 8Es^3 + 10Fs^4 + \text{etc.}\\ n\eta &= nA + nBs + nCss + nDs^3 + nEs^4 + \text{etc.}\end{aligned}\right\} = 0$$

Hinc fit

$$B = \frac{-nA}{2};\ C = \frac{-nB}{6};\ D = \frac{-nC}{12};\ E = \frac{-nD}{20};\ \text{etc.}$$

vnde ſeries aſſumta ita prodit expreſſa:

$$\frac{\eta}{A} = 1 - \frac{ns}{2} + \frac{nnss}{2.6} - \frac{n^3s^3}{2.6.12} + \frac{n^4s^4}{2.6.12.20} - \text{etc.}$$

quae, quia nullo caſu abrumpitur, nihil prodeſt, niſi forte quamdiu tempus, ideoque et s, eſt quantitas valde parua.

§. 12. Notatu etiam digna eſt transformatio iſtius aequationis, ſtatuendo $\eta = \frac{y}{s}$; hinc enim erit

$$d\eta = \frac{dy}{s} - \frac{y\,ds}{ss} \text{ et } dd\eta = \frac{ddy}{s} - \frac{2\,dy\,ds}{ss} + \frac{2y\,ds^2}{s^3};$$

qui valores ſubſtituti producent hanc aequationem:

$$ddy + \frac{ny\,ds^2}{s} = 0,$$

Quod ſi hic ponamus

$y = e^{\int u\,ds}$, vt ſit $dy = u\,ds\,e^{\int u\,ds}$ et $ddy = (du\,ds + u^2ds^2)\,e^{\int u\,ds}$, fietque $du + uu\,ds + \frac{n\,ds}{s} = 0$, quae aequatio quia eſt formae Riccatianae, quam nullo adhuc modo tractare licuit, omnis opera in ea euoluenda fruſtra conſumetur; ita vt determinationem huius motus oſcillatorii, quo corpora A et B ciebuntur, dum filum ſuper trochleas vniformiter promouetur, pro caſu deſperato declarare ſimus coacti.

§. 13. Interim tamen, quia longitudo fili MA continuo crefcit, ita vt pendulum, corpus A fuftinens, continuo crefcat, evidens eft, ofcillationes continuo tardiores fieri debere; vnde fi pro tempore praefente quantitas s tanquam conftans fpectaretur, omiffo primo termino, vt haberemus:

$$d\,d\,y + \frac{n\,y\,d\,s^2}{s} = 0, \text{ integrale foret}$$

$$y = \mathfrak{A} \text{ fin. } (\lambda + s \sqrt{\tfrac{n}{s}}) \text{ fiue}$$

$$\eta\,s = \mathfrak{A} \text{ fin. } (\lambda + \sqrt{n\,s}) \text{ fiue}$$

$$\eta = \frac{\mathfrak{A}\,\alpha}{a + \alpha\,t} \text{ fin. } (\lambda + \frac{\sqrt{2\,g\,(a + \alpha\,t)}}{\alpha});$$

quae expreffio non multum videtur a fcopo aberrare.

§. 14. Vt autem appareat, quantum ille valor

$$y = \mathfrak{A} \text{ fin. } (\lambda + s \sqrt{\tfrac{n}{s}}) = \mathfrak{A} \text{ fin. } (\lambda + \sqrt{n\,s})$$

a veritate difcrepet, eum in aequatione differentiali $s\,d\,d\,y + n\,y\,d\,s^2 = 0$ fubftituamus. Quia ergo eft

$$\frac{d\,y}{d\,s} = \frac{\mathfrak{A}\,\sqrt{n}}{2\,\sqrt{s}} \text{ cof. } (\lambda + \sqrt{n\,s}) \text{ et}$$

$$\frac{d\,d\,y}{d\,s^2} = -\frac{n\,\mathfrak{A}}{4\,s} \text{ fin. } (\lambda + \sqrt{n\,s}) - \frac{n\,\mathfrak{A}}{4\,s\,\sqrt{n\,s}} \text{ cof. } (\lambda + \sqrt{n\,s})$$

habebimus hanc aequationem:

$$-\frac{n\,\mathfrak{A}}{4} \text{ fin. } (\lambda + \sqrt{n\,s}) - \frac{n\,\mathfrak{A}}{4\,\sqrt{n\,s}} \text{ cof. } (\lambda + \sqrt{n\,s}) + n\,\mathfrak{A} \text{ fin. } (\lambda + \sqrt{n\,s}) = 0$$

fiue

$$\frac{3\,n\,\mathfrak{A}}{4} \text{ fin. } (\lambda + \sqrt{n\,s}) - \frac{\mathfrak{A}\,\sqrt{n}}{4\,\sqrt{s}} \text{ cof. } (\lambda + \sqrt{n\,s}) = 0$$

vnde aberratio diiudicari debet.

§. 15. Quanquam igitur cafus, quo B = A, facillimus videbatur, tamen ftatim ac filum promouetur nihil plane

plane de motu corporum definire licet; quando autem filum quiescit, ita vt sit $\alpha = 0$, tum vtrumque corpus perinde oscillationes suas peraget, ac si firmiter esset suspensum. Tanto igitur minus erit sperandum, si corpora inter se inaequalia statuere velimus. Interim tamen occurrent certi quidam casus, quibus praeter omnem expectationem motum definire licebit, quos ergo vtique operae pretium erit accuratius euoluisse.

§. 16. Primum igitur iterum faciamus $\eta = 0$ et $\theta = 0$, et aequationes nostrae erunt:

I. $\frac{ddz}{2g\,dt^2} = 1 - \frac{T}{A}$.

III. $\frac{ddz}{2g\,dt^2} = \frac{T}{B} - 1$; vnde fit $T = \frac{2AB}{A+B}$, hincque

$$\frac{ddz}{2g\,dt^2} = \frac{A-B}{A+B} = \frac{1}{n}, \text{ vt fit } n = \frac{A+B}{A-B}.$$

Hinc iam erit

$$\frac{dz}{2g\,dt} = \frac{t}{n}, \text{ ideoque } dz = \frac{2gt\,dt}{n} \text{ et } z = \frac{gtt}{n},$$

vbi constantes non addimus, quia hinc multo magis quam supra in aequationes inextricabiles illaberemus; sic igitur assecuti sumus has duas aequationes: $T = \frac{2AB}{A+B}$ et $z = \frac{gtt}{n}$, existente $n = \frac{A+B}{A-B}$, ita vt n sit numerus positiuus, si $A > B$, contra vero negatiuus.

§. 17. Nunc etiam vtrique corpori minimas tribuamus inclinationes, a quibus cum praecedentes valores non immutari sint censendi, tantum secunda et quarta aequationum nostrarum in computum erunt ducendae, quae ob $dz = \frac{2gt\,dt}{n}$ erunt:

$$\frac{4gt\,dt\,d\eta + (an + gtt)\,dd\eta}{2gn\,dt^2} = -\eta \text{ et}$$

$$\frac{4gt\,dt\,d\theta - (bn - gtt)\,dd\theta}{2gn\,dt^2} = +\theta,$$

quae cum inter se sint similes, tractasse solam primam sufficiet, quae quo commodior reddatur, faciamus $na = ig$, vt sit $i = \frac{na}{g}$, et aequatio resoluenda erit:

$$4\,t\,dt\,d\eta + (i + tt)\,dd\eta + 2\,n\,\eta\,dt^2 = 0$$

quam etiam vt supra per series integrare tentemus.

§. 18. Fingamus igitur sequentem seriem:

$$\eta = A + Bt + Ctt + Dt^3 + Et^4 + Ft^5 + Gt^6 + \text{etc. erit}$$

$$\frac{d\eta}{dt} = B + 2Ct + 3Dtt + 4Et^3 + 5Ft^4 + 6Gt^5 + \text{etc. et}$$

$$\frac{dd\eta}{dt^2} = 1.2C + 2.3Dt + 3.4Ett + 4.5Ft^3 + 5.6Gt^4 + \text{etc.}$$

quibus substitutis fiet

$$\left.\begin{array}{lllllll}
\frac{idd\eta}{dt^2} = 1.2iC & + 2.3iDt & + 3.4iEtt & + 4.5iFt^3 & + 5.6iGt^4 & + \text{etc.} \\
\frac{ttdd\eta}{dt^2} = & & + 1.2C & + 2.3D & + 3.4E & + \text{etc.} \\
\frac{4tdη}{dt} = & 4B & + 8C & + 12D & + 16E & + \text{etc.} \\
2n\eta = 2An + & 2Bn & + 2Cn & + 2Dn & + 2En & + \text{etc.}
\end{array}\right\} = 0$$

vnde sequuntur sequentes denominationes:

$$C = -\frac{2An}{1.2i};\; D = -\frac{B(2n+4)}{2.3i};\; E = -\frac{C(2n+10)}{3.4i};$$

$$F = -\frac{D(2n+18)}{4.5i};\; G = -\frac{E(2n+28)}{5.6i};\; H = -\frac{F(2n+40)}{5.6i}\ \text{etc.}$$

sicque bini primi coefficientes A et B manent indeterminati.

§. 19. Hinc igitur perspicitur, hanc seriem abrumpi sequentibus casibus: scil. $n = 0$; $n = -2$; $n = -5$; $n = -9$; $n = -14$; $n = -20$, hincque in genere si $n = -\frac{i(i+3)}{2}$; vbi quidem alternatim vel A vel B nihilo aequale sumi debet, ita vt his casibus motum desideratum assignare valeamus. Praecipuos igitur euoluamus:

I. Si

I. Si $n = -2$ erit $\eta = B t$

II. Si $n = -5$ erit $\eta = A + \frac{10 A t t}{1 \cdot 2 i}$;

III. Si $n = -9$ erit $\eta = B t + \frac{14 B t^3}{2 \cdot 3 i}$;

IV. Si $n = -14$ erit $\eta = A + \frac{28 A t t}{1 \cdot 2 i} + \frac{28 \cdot 18 A}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 i i}$;

V. Si $n = -20$ erit $\eta = B t + \frac{36 B t^3}{2 \cdot 3 i} + \frac{36 \cdot 2 B t^5}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 i i}$;

VI. Si $n = -27$ erit $\eta = A + \frac{54 A t t}{1 \cdot 2 i} + \frac{54 \cdot 44 A t^4}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 i i} + \frac{54 \cdot 44 \cdot 26 A t^6}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 i^3}$;

etc. etc. etc. etc.

§. 20. Euoluamus igitur casum $n = -2$, vnde pro nostris corporibus prodit $B = 3 A$, ita vt corpus A sit ascensurum; tum igitur erit $\eta = B t$, quod autem est integrale particulare, vnde ante omnia integrale completum inuestigari debet. Hunc in finem ponamus $\eta = t v$, ita vt sit $d\eta = t\, d v + v\, d t$ et $d d \eta = t\, d d v + 2\, d t\, d v$, et prodibit

$$4 t t\, d t\, d v + (i + t t) t\, d d v + 2 (i + t t)\, d t\, d v = 0, \text{ siue}$$

$$(i + t t) t\, d d v + 2 (i + 3 t t)\, d t\, d v = 0, \text{ vnde fit}$$

$$d d v = -\frac{2 (i + 3 t t)\, d t\, d v}{t (i + t t)}, \text{ hinc}$$

$$\frac{d d v}{d v} = -\frac{2 (i + 3 t t)\, d t}{t (i + t t)} = -\frac{2\, d t}{t} - \frac{4 t\, d t}{i + t t},$$

vnde fit integrando

$$l \frac{d v}{d t} = -2 l t - 2 l (i + t t) + l C, \text{ consequenter}$$

$$\frac{d v}{d t} = \frac{C}{t t (i + t t)^2}, \quad \text{ideoque} \quad d v = \frac{C\, d t}{t t (i + t t)^2},$$

quae ita resoluitur:

$$d v = \frac{C\, d t}{i i t t} - \frac{C\, d t}{i (i + t t)^2} - \frac{C\, d t}{i i (i + t t)}, \text{ vnde fit}$$

$$v = -\frac{C}{i i t} - \frac{C}{i} \int \frac{d t}{(i + t t)^2} - \frac{C}{i i} \int \frac{d t}{i + t t}.$$

§. 21. Erat autem $i = \frac{n\alpha}{g} = -\frac{2\alpha}{g}$, ideoque i numerus negatiuus. Ponamus igitur $i = -cc$ et habebimus

$$v = -\frac{C}{c^4 t} + \frac{C}{cc}\int\frac{dt}{(tt-cc)^2} - \frac{C}{c^4}\int\frac{dt}{tt-cc}.$$

Ponamus porro $\int\frac{dt}{(tt-cc)^2} = \frac{\alpha t}{tt-cc} + \int\frac{\beta dt}{tt-cc}$, eritque differentiando et per dt diuidendo

$$\frac{1}{(tt-cc)^2} = \frac{\alpha}{tt-cc} - \frac{2\alpha tt}{(tt-cc)^2} + \frac{\beta}{tt-cc},$$

vnde colligimus $\alpha = \beta = -\frac{1}{2cc}$, ita vt nunc fit

$$v = -\frac{C}{c^4 t} - \frac{Ct}{2c^4(tt-cc)} - \frac{3C}{2c^4}\int\frac{dt}{tt-cc}.$$

Eft vero

$$\int\frac{dt}{tt-cc} = -\int\frac{dt}{cc-tt} = -\frac{1}{2c}\,l\,\frac{c+t}{c-t}$$

confequenter

$$v = -\frac{C}{c^4 t} - \frac{Ct}{2c^4(cc-tt)} + \frac{3C}{4c^5}\,l\,\frac{c+t}{c-t},$$

vel, pofito breuitatis gratia $C = -Dc^5$, fiet

$$v = \frac{Dc}{t} + \frac{Dct}{2(cc-tt)} - \frac{3D}{4}\,l\,\frac{c+t}{c-t} + E.$$

§. 23. Inuento hoc valore erit angulus nofter

$$\eta = Dc + \frac{Dctt}{2(cc-tt)} - \frac{3}{4}Dt\,l\,\frac{c+t}{c-t} + Et,$$

vbi notetur effe $cc = -i = +\frac{2\alpha}{g}$. Pofito igitur $t = 0$ fiet $\eta = Dc$; ficque Dc exprimit inclinationem initialem. Hinc crefcente t hoc pendulum MA afcendet, et angulus etiam crefcit, nifi forte conftans D fuerit negatiua; verum tempus t non vltra c augeri poteft, quia alioquin expreffio pro η adeo in infinitum excrefceret. Quod quo clarius appareat, confideremus etiam celeritatem angularem $\frac{d\eta}{dt} = \frac{Dc^3 t}{(cc-tt)^2} - \frac{3}{4}D\,l\,\frac{c+t}{c-t} - \frac{3}{2}\frac{Dct}{cc-tt} + E$. Nunc igitur ponamus initio, quo $t = 0$, fuiffe $\eta = \alpha$ et $\frac{d\eta}{dt} = 0$,

erit-

eritque $\alpha = D c$ et $E = 0$, ideoque et $D = \frac{\alpha}{c}$, ficque erit

$$\eta = \alpha + \frac{\alpha t t}{2(cc - tt)} - \frac{3\alpha t}{4c} l \frac{c+t}{c-t} \text{ et}$$

$$\frac{d\eta}{dt} = \frac{\alpha c c t}{(cc - tt)^2} - \frac{3\alpha}{4c} l \frac{c+t}{c-t} - \frac{3\alpha t}{2(cc - tt)}, \text{ fiue}$$

$$\frac{d\eta}{dt} = \frac{\alpha t(3tt - cc)}{2(cc - tt)^2} - \frac{3\alpha}{4c} l \frac{c+t}{c-t},$$

ficque hinc ad quoduis tempus t tam angulum η quam celeritatem angularem $\frac{d\eta}{dt}$ definire licet.

§. 24. Ex indole harum formularum perfpicuum eft, tempus t non vltra terminum C augeri poffe, quippe quo tempore longitudo fili $MA = a + z$ ad nihilum redigitur, et tam angulus η, quam celeritas $\frac{d\eta}{dt}$ in infinitum excrefcunt, quod quidem cum pendulo infinite breui facile conciliari poteft. Verum iam multo ante, quam hoc euenit, angulus η tam fit magnus, vt non amplius pro tam paruo haberi poffit, qualem natura noftri calculi fupponit; ficque etiam iftius motus determinatio mox erronea euadet. Quod autem ad ofcillationes alterius corporis maioris B attinet, earum motus ob defectum Analyfeos nullo plane cafu definire licet, quoniam omnes valores numeri n, quibus integratio fuccedit, funt negatiui, ideoque tantum in pendulo afcendente locum habere poffunt.

DE PROBLEMATE QVODAM MECHANICO, SATIS OBVIO, AT SOLVTV DIFFICILLIMO.

Auctore
L. EVLERO.

§. 1.

Consideranti mihi hunc versum Virgilii saepius occurrentem:

Anchora de prora iacitur, stant littore puppes.

obtulit se ista quaestio: quomodo nauis, postquam anchora de prora fuerit iacta, motum suum sit prosecutura; vbi quidem euidens est, proram alium motum recipere non posse, praeter circularem circa anchoram. At vero tota nauis interea circa proram motu quodam rotatorio feretur, quem autem tam ob ipsam resistentiam aquae, quam ob eius continuam mutationem, nullo modo per principia mechanica determinare licet.

§. 2.

§. 2. Remotis autem his impedimentis quaeſtio ad hanc formam ſimpliciſſimam redigatur:

Si corpus quodcunque B C D, plano horizontali poliſſimo incumbens, (vt omnis frictio remoueatur) de puncto B, ope fili B A in puncto A, fixum retineatur, eique motus quicunque imprimatur, inueſtigare motum, quo iſtud corpus deinceps eſt progreſſurum. Tab. III. Fig. 2.

Tentamen Solutionis.

§. 3. Sit maſſa corporis propoſiti $BCD = M$, eiusque centrum grauitatis ſit in C, momentum vero inertiae, reſpectu axis verticalis puncto C inſiſtentis, ponatur $= Mkk$; longitudo fili ſit $AB = a$ et interuallum $BC = b$. Per punctum A iam ducatur recta fixa $AE = e$, ad quam motus corporis quouis tempore referatur, atque elapſo tempore $= t$ teneat corpus cum filo ſitum in figura expreſſum, ponaturque primo angulus $EAB = \Phi$, et, producta recta C B vſque ad rectam A E in L, vocetur angulus $ELB = \psi$, ita vt tota quaeſtio eo reducatur, vt ad quoduis tempus t iſti bini anguli Φ et ψ determinentur. Ponatur autem quoque breu. gr. differentia horum angulorum $\psi - \Phi = ABL = \omega$.

§. 4. His factis denominationibus determinationem motus aggrediamur; et quia corpus nullas alias vires ſollicitantes ſuſtinet, praeter tenſionem fili A B, ponamus iſtam tenſionem pro hoc tempore $= T$, ita vt corpus in puncto B vi iſta T in directione B A ſollicitetur. Nunc vt prima principia Mechanicae applicare queamus, pro motu corporis progreſſiuo ex centro C ad axem A E

ducatur

ducatur normalis C X et vocentur binae coordinatae $AX = x$ et $XC = y$, tumque ex figura erit

$$x = a\,\text{cof.}\,\Phi + b\,\text{cof.}\,\psi \text{ et } y = a\,\text{fin.}\,\Phi + b\,\text{fin.}\,\psi,$$

vnde differentiando colligimus

$$dx = -a\,d\Phi\,\text{fin.}\,\Phi - b\,d\psi\,\text{fin.}\,\psi$$

$$dy = +a\,d\Phi\,\text{cof.}\,\Phi + b\,d\psi\,\text{cof.}\,\psi$$

$$ddx = -a\,dd\Phi\,\text{fin.}\,\Phi - a\,d\Phi^2\,\text{cof.}\,\Phi - b\,dd\psi\,\text{fin.}\,\psi - b\,d\psi^2\,\text{cof.}\,\psi$$

$$ddy = +a\,dd\Phi\,\text{cof.}\,\Phi - a\,d\Phi^2\,\text{fin.}\,\Phi - b\,dd\psi\,\text{cof.}\,\psi - b\,d\psi^2\,\text{fin.}\,\psi.$$

§. 5. Hinc iam ad motum centri grauitatis C definiendum ei tenfio fili T immediate applicata concipiatur, quae fecundum directiones coordinatarum refoluta dabit pro directione X A vim $= T\,\text{cof.}\,\Phi$ et pro directione C X vim $= T\,\text{fin.}\,\Phi$, vnde principia motus has duas aequationes fuppeditant:

$$\frac{ddx}{\alpha\,dt^2} = -\frac{T\,\text{cof.}\,\Phi}{M} \text{ et } \frac{ddy}{\alpha\,dt^2} = -\frac{T\,\text{fin.}\,\Phi}{M},$$

vbi elementum temporis dt conftans eft affumtum, et α denotat celeritatem lapfu libero grauium per vnum minutum fecundum acquifitam, fiquidem tempora in minutis fecundis, celeritates vero per fpatia, vno minuto fecundo percurfa, exprimere velimus.

§. 6. Quoniam autem tenfio fili T penitus eft incognita, vt eam eliminemus primam aequationem ducamus in $\text{fin.}\,\Phi$ fecundam vero in $\text{cof.}\,\Phi$ atque differentia dabit: $ddx\,\text{fin.}\,\Phi - ddy\,\text{cof.}\,\Phi = 0$, quae aequatio loco ddx et ddy fubftitutis valoribus modo ante traditis, induet hanc formam fatis fimplicem, ob $\psi - \Phi = \omega$; fcilicet:

$$a\,dd\Phi + b\,dd\psi\,\text{cof.}\,\omega - b\,d\psi^2\,\text{fin.}\,\omega = 0.$$

Simili

Simili modo primae aequationis, ductae in cos. Φ, et secundae in sin. Φ, summa dabit ipsam tensionis quantitatem

$$T = - M \frac{(d\,d\,x \cos.\Phi + d\,d\,y \sin.\Phi)}{\alpha\, d\, t^2},$$

vnde facta substitutione erit:

$$\frac{T}{M} = \frac{a\,d\,\Phi^2 + b\,d\,d\,\psi \sin.\omega + b\,d\,\psi^2 \cos.\omega}{\alpha\, d\, t^2},$$

quam autem cognoscere non datur, antequam totus motus fuerit exploratus.

§. 7. Praeterea etiam plurimum iuuabit istam combinationem in vsum vocare, dum prima per $d\,x$, altera vero per $d\,y$ multiplicatur, vt horum productorum summa praebeat hanc aequalitatem:

$$\frac{d\,x\,d\,d\,x + d\,y\,d\,d\,y}{\alpha\, d\, t^2} = - \frac{T}{M} (d\,x \cos.\Phi + d\,y \sin.\Phi).$$

At vero est $d\,x \cos.\Phi + d\,y \sin.\Phi = - b\,d\,\psi \sin.\omega$, vnde fit

$$\frac{d\,x\,d\,d\,x + d\,y\,d\,d\,y}{\alpha\, d\, t^2} = \frac{T}{M}\, b\,d\,\psi \sin.\omega,$$

quae aequatio ideo summum vsum praestabit, quia membrum sinistrum absolute integrari potest, cum eius integrale sit $\frac{d\,x^2 + d\,y^2}{2\,\alpha\, d\, t^2}$, vbi notetur esse

$$d\,x^2 + d\,y^2 = a\,a\,d\,\Phi^2 + b\,b\,d\,\psi^2 + 2\,a\,b\,d\,\Phi\,d\,\psi \cos.\omega.$$

§. 8. Expedito motu progressivo motum quoque gyratorium nostri corporis circa centrum grauitatis C investigemus, qui oritur ex mutatione anguli E L C $= \psi$, quippe cuius mutatio dabit quantitatem motus gyratorii. Cum igitur nulla alia vis adsit, praeter tensionem fili B A $=$ T, cuius momentum respectu centri grauitatis C est b T sin. ω, quod tendit ad angulum ψ imminuendum, eius mutatio reperietur, si istud momentum diuidatur per

 momen-

momentum inertiae corporis, Mkk, vnde ſecundum principia motus oritur iſta aequatio: $\frac{dd\psi}{\alpha dt^2} = -\frac{bT\,\sin.\omega}{Mkk}$. Hac igitur formula continetur determinatio motus gyratorii.

§. 9. Quodſi hanc aequationem multiplicemus per $d\psi$, orietur

$$\frac{d\psi\, dd\psi}{\alpha dt^2} = -\frac{bT\,d\psi\,\sin.\omega}{Mkk}.$$

Supra autem vidimus eſſe

$$\frac{dx\,ddx + dy\,ddy}{\alpha dt^2} = \frac{bT\,d\psi\,\sin.\omega}{M}.$$

Quare cum nunc ſit

$$\frac{kk\,d\psi\,dd\psi}{\alpha dt^2} = -\frac{bT\,d\psi\,\sin.\omega}{M},$$ hinc ſequitur fore

$$\frac{dx\,ddx + dy\,ddy + kk\,d\psi\,dd\psi}{\alpha dt^2} = 0,$$

cuius integrale eſt

$$\frac{dx^2 + dy^2 + kk\,d\psi^2}{2\alpha dt^2} = \text{Conſt.}$$

quae aequatio, loco $dx^2 + dy^2$ ſubſtituto valore ante dato, induet hanc formam:

$$\frac{aa\,d\Phi^2 + (bb + kk)\,d\psi^2 + 2ab\,d\Phi\,d\psi\,\cos.\omega}{2\alpha dt^2} = C.$$

§. 10. Euidens eſt hanc aequationem inuoluere vim viuam, quae in corpore ineſt, cum $\frac{dx^2 + dy^2}{\alpha dt^2}$ exprimat quadratum celeritatis, qua centrum grauitatis corporis C promouetur, et $\frac{d\psi^2}{\alpha dt^2}$ exprimat quadratum celeritatis angularis; vnde patet, in corpore ſemper eandem quantitatem vis viuae conſeruari, quae ergo ſemper manebit aequalis illi vi vivae, quae corpori initio fuerit impreſſa.

§. 11. Iam igitur aſſecuti ſumus duas aequationes a tenſione fili T liberas, quarum prior, §. 6 inuenta, eſt

eſt differentialis ſecundi gradus; poſteriorem vero modo inuentam ad primum gradum reducere licuit, atque hae duae aequationes totam problematis ſolutionem complectuntur, quae ſunt:

$$\text{I. } a\,d\,d\,\Phi + b\,d\,d\,\psi \operatorname{cof.} \omega - b\,d\,\psi^2 \operatorname{fin.} \omega = 0$$

$$\text{II. } \frac{a\,a\,d\,\Phi^2 + (b\,b + k\,k)\,d\,\psi^2 + 2\,a\,b\,d\,\Phi\,d\,\psi \operatorname{cof.} \omega}{d\,t^2} = f\,f.$$

His enim ad quoduis tempus t bini anguli Φ et ψ determinari debent, namque praeter tempus t ambo tantum anguli Φ et ψ in his aequationibus inſunt, propter $\omega = \psi - \Phi$.

§. 12. Nunc autem loco angulorum Φ et ψ introducamus in calculum ipſas celeritates angulares, quibus corpus partim circa punctum fixum et partim circa proprium centrum grauitatis C gyratur, ponamusque celeritatem angularem circa punctum A $= \frac{d\,\Phi}{d\,t} = u$, et circa centrum grauitatis C celeritatem angularem $\frac{d\,\psi}{d\,t} = v$, hocque modo poſterior aequatio iam penitus ad quantitates finitas reducetur, quippe quae erit:

$$a\,a\,u\,u + (b\,b + k\,k)\,v\,v + 2\,a\,b\,u\,v \operatorname{cof.} \omega = f\,f.$$

Pro priore vero aequatione, cum ſit $d\,\Phi = u\,d\,t$ et $d\,\psi = v\,d\,t$, ob $d\,t$ ſumtum conſtans, erit $d\,d\,\Phi = d\,u\,d\,t$ et $d\,d\,\psi = d\,v\,d\,t$. Quia vero eſt $d\,t = \frac{d\,\Phi}{u}$, itemque $d\,t = \frac{d\,\psi}{v}$, eliminando tempuſculum $d\,t$, erit

$$d\,d\,\Phi = \frac{d\,\Phi\,d\,u}{u} \text{ et } d\,d\,\psi = \frac{d\,\psi\,d\,v}{v},$$

hincque prior aequatio reducetur ad hanc formam:

$$\frac{a\,d\,\Phi\,d\,u}{u} + \frac{b\,d\,\psi\,d\,v}{v} \operatorname{cof.} \omega - b\,d\,\psi^2 \operatorname{fin.} \omega = 0.$$

§. 14. Quia autem haec aequatio praeter celeritates u et v adhuc elementa $d\,\Phi$ et $d\,\psi$ continet, ea ex calculo expelli oportet. Cum ergo ſit $d\,\Phi = u\,d\,t$ et $d\,\psi = v\,d\,t$, erit $d\,\psi - d\,\Phi = d\,\omega = (v - u)\,d\,t$, vnde fiet

$$d\,t = \frac{d\,\omega}{v - u}, \text{ hincque } d\,\Phi = \frac{u\,d\,\omega}{v - u} \text{ et } d\,\psi = \frac{v\,d\,\omega}{v - u},$$

quibus valoribus ſubſtitutis erit aequatio poſtrema

$$a\,d\,u + b\,d\,v \operatorname{cof.} \omega - \frac{b\,v\,v\,d\,\omega \operatorname{fin.} \omega}{v - u} = 0.$$

Sicque duas habemus aequationes inter ternas variabiles v, u, et ω; vnde totum negotium eo redit, vt binae per tertiam definiantur. Quem in finem in eo eſt elaborandum, vt, vna harum trium quantitatum eliſa, ad vnicam aequationem, binas tantum variabiles inuoluentem, ſolutio perducatur.

§. 15. Hic quidem primo videtur ex aequatione finita quaeri poſſe valorem $\operatorname{cof.} \omega$, qui cum ſuo differentiali in altera aequatione ſubſtitutus produceret aequationem differentialem inter binas celeritates u et v, quae autem tantopere erit perplexa, vt nihil plane inde concludi queat. Verum in alium modum incidi, ad duas tantum variabiles perueniendi, per aequationem multo ſimpliciorem, quae autem nihilominus ita eſt comparata, vt omnia artificia analytica adhuc cognita fruſtra pro ea euoluenda in ſubſidium vocentur. Interim tamen haud inutile videtur, hanc ipſum operationem hic ob oculos exponere, quo clarius pateat, cuiusmodi incrementis Analyſis adhuc indigeat.

§. 16. Hic primo ſtatim ponatur $u = p\,v$ et aequatio iam erit:

$$(aapp + bb + kk + 2abp \cos. \omega) vv = ff,$$

quae, posito porro $bb + kk = bc$, fit simplicior, scil.

$$vv(aapp + bc + 2abp \cos. \omega) = ff,$$

vbi notasse iuuabit, si corpus ex ipso puncto B suspenderetur, distantiam centri oscillationis ab hoc puncto futuram esse $= b + \frac{kk}{b} = c$. Praeterea vero faciamus $b \cos. \omega = z$, et aequatio nostra induet hanc formam:

$$vv(aapp + bc + 2apz) = ff,$$

quae per logarithmos dat

$$2lv + l(aapp + bc + 2apz) = 2lf,$$

vnde differentiando fit

$$\frac{dv}{v} = \frac{-aapdp - a(pdz + zdp)}{aapp + bc + 2apz}.$$

§. 17. Simili modo etiam in altera aequatione differentiali, posito $u = vp$ et $b \cos. \omega = z$, vt fiat $b\,d\omega \sin. \omega = -dz$, habebimus,

$$a(pdv + vdp) + 2dv + \frac{vdz}{1-p} = 0,$$

quae per v diuisa praebet

$$\frac{dv}{v} = -\frac{adp}{ap+z} - \frac{dz}{(1-p)(ap+z)}.$$

Hic iam loco $\frac{dv}{v}$ substituatur valor ante inuentus, orieturque sequens aequatio inter binas variabiles p et z:

$$\frac{adp}{ap+z} + \frac{dz}{(1-p)(ap+z)} = \frac{aapdp + a(pdz + zdp)}{aapp + bc + 2apz},$$

quae sublatis fractionibus reducitur ad hanc:

$$a(1-p)(bc - zz)dp + (bc + aap^3 + apz(1+p))dz = 0.$$

 §. 18.

§. 18. Ecce ergo tota Problematis noſtri Solutio perducta eſt ad hanc aequationem differentialem primi gradus, parum complicatam, inter binas variabiles p et z, vnde ſi licuerit z per p modo finito definire, etiam quadratum $v v$ per p definiretur, hincque porro altera celeritas $u = p v$; quam ob rem plurimum optandum eſſet vt Geometrae vires ſuas excercerent in iſta aequatione reſoluenda. Vbi notaſſe iuuabit, ſi vltimum membrum $p z (1 + p)$ abeſſet, totam aequationem nulla difficultate eſſe laboraturam, quia ſeparationem variabilium ſponte admitteret: foret enim $\frac{(1 - p) d p}{b c + a a p^3} = \frac{d z}{b c - z z}$. Ante autem quam haec inuentio fuerit facta, vlterius progredi non licet.

Supplementum.

continens Solutionem perfectam Problematis.

§. 19. Poſtquam praecedens ſcriptum abſolueram, prorſus deſperans de reſolutione aequationis differentialis, ad quam ſum perductus, nihilo tamen minus rem variis modis deinceps tentaui, et tandem per longas ambages contigit mihi eruere aequationem integralem, atque adeo algebraicam, quam hic comunicaturus ſum; ipſam autem Analyſin, qua ſum vſus, in aliam occaſionem reſeruare eſt viſum.

§. 20. Perueneram autem ad hanc aequationem differentialem primi gradus:

$$a(1-p)(bc-zz)\,dp + bc + aap^3 + apz(1+p)\,dz = 0,$$

vbi

vbi ex praecedentibus elementis erat $p = \frac{n}{v}$, $z = b$ cof. ω et $bc = bb + kk$. Hanc aequationem porro, ponendo $z = as$ et $\frac{bb + kk}{aa} = nn$, ita vt fit $s = \frac{b}{a}$ cof. ω, ad hanc formam fimpliciorem reduxi:

$$dp(1-p)(nn-ss) + ds(nn + p^3 + ps(1+p)) = 0,$$

quippe quae, praeter binas variabiles p et s, vnicam conftantem nn involvit, atque huius aequationis integrale completum inueni effe

$$\frac{nn + ps + p + s}{\sqrt{nn + pp + 2ps}} = C.$$

§. 21. Quoniam autem Analyfin, quae me huc perduxit, exponendam in aliud tempus referuo, hic fufficiet veritatem huius integralis demonftrare. Oftendam enim, fi haec formula differentietur, tum ipfam aequationem integrandam reuera refultare. Euidens autem eft, differentiale huius formulae fore fractionem, cuius denominator eft $(nn + pp + 2ps)^{\frac{3}{2}}$, per quam ergo fi aequatio propofita diuidatur, integrabilis euadat neceffe eft.

§. 22. Numerator iftius differentialis duabus conftabit partibus, altera per dp altera per ds affecta; vtramque igitur feorfim inueftigemus. Ac prior quidem pars erit

$$dp(s+1)(nn+pp+2ps) - dp(p+s)(nn+ps+p+s)$$

quae reducitur ad hanc formam: $dp(1-p)(nn-ss)$, quae eft ipfa pars prior aequationis propofitae. Simili modo reperitur altera pars

$$= ds(p+1)(nn+pp+2ps) - pds(nn+ps+p+s),$$

quae

quae reducitur ad $ds(nn+p^3+ps(1+p))$, id quod cum membro secundo aequationis propositae conuenit.

§. 23. Ex hac igitur aequatione integrali definiri poterit s per p, cuius valor ita se habet:

$$s = \frac{CCp-(p+1)(p+nn) \pm C\sqrt{(CCpp+(pp-1)(pp-nn))}}{(p+1)^2};$$

vnde, ob $s = \frac{b\,\text{cos}.\,\omega}{a}$, angulus ω per variabilem p exprimitur. Deinde vero aequatio integralis primum inuenta

$$ff = (aapp + bc + 2abp\,\text{cos}.\,\omega)\,vv,$$

ob $\frac{bc}{aa} = nn$, dabit $vv = \frac{ff}{aa(nn+pp+2ps)}$, ideoque etiam v per p definitur, cum sit $v = \frac{f}{a\sqrt{(nn+pp+2ps)}}$, vnde ob positum $u = pv$ erit etiam $u = \frac{fp}{a\sqrt{(nn+pp+2ps)}}$. Hinc porro etiam ipsi anguli ψ et Φ per has formulas integrandas inuestigantur: $\Phi = \int\frac{u\,d\omega}{v-u}$ et $\psi = \int\frac{v\,d\omega}{v-u}$; ac denique, cum sit $\frac{d\Phi}{u} = dt$, vel etiam $\frac{d\psi}{v} = dt$, ipsum quoque tempus t per eandem variabilem p determinabitur. Erit enim $t = \int\frac{d\omega}{v-u}$, sicque omnia sunt determinata quae ad perfectam Problematis solutionem spectant.

§. 24. Praeterea vero etiam notasse iuuabit inter ternas variabiles v, u et ω duas aequationes algebraicas dari posse; si enim in integrali aequatione inuenta loco p scribatur $\frac{u}{v}$, ob $\sqrt{(nn+pp+2ps)} = \frac{f}{av}$ et $s = \frac{b\,\text{cos}.\,\omega}{a}$, erit illa aequatio

$$Cf = b\,\text{cos}.\,\omega\,(v+u) + a(u+nnv).$$

Ante autem iam inueneramus esse

$$\frac{ff}{aa} = nnvv + uu + \frac{2b}{a}uv\,\text{cos}.\,\omega.$$

§. 25.

§. 25. Initio vero iam inueneramus aequationem differentialem inter easdem ternas variabiles v, u, ω, quae erat: $a\,d\,u + b\,d\,v \cos.\,\omega = \frac{b\,v\,v\,d\,\omega \sin.\,\omega}{v - \omega}$. Haec ergo cum binis praecedentibus integralibus conuenire debet, quae, si constantes per integrationem ingressas paulisper mutemus, ponendo $\frac{f}{u} = g$ et $\frac{f\,C}{a} = h$, erunt:

$$g\,g = u\,u + n\,n\,v\,v + \frac{2\,b\,u\,v}{a} \cos.\,\omega$$

$$h = \frac{b \cos.\,\omega}{a} (v + u) + u + n\,n\,v,$$

atque hanc conuenientiam contemplanti haud difficile erit viam multo planiorem inuenire, quae ad eandem integrationem, tanto labore erutam, perducat.

SOLVTIO GEMINA PROBLEMATIS, QVO MOTVS CORPORIS, FILO ALICVBI ALLIGATI, SVPER PLANO HORIZONTALI QVAERITVR.

Auctore

L. EVLERO.

§. 1.

Cum nuper hanc quaeſtionem tractaſſem, perueni ad aequationem differentialem primi gradus, inter binas variabiles, non nimis complexam, quae autem ita erat comparata, vt omnia Calculi artificia adhuc cognita ei reſoluendae non ſufficere viderentur. Poſtquam autem rem pluribus modis tentaſſem, tandem per longas ambages ad eius integrationem ſum perductus, atque adeo ſumma admiratione deprehendi, eius integrale algebraice exprimi poſſe. Tum vero temporis contentus fui, ipſam tantum aequationem integralem cum publico communicare, ſimul pollicitus, totam Analyſin, qua eo ſum deductus, alia occaſione ob oculos ponere, quod igitur nunc praeſtare conſtitui. Deinde vero aliam ſolutionem eiusdem quaeſtionis multo ſimpliciorum ſum adeptus, quam hic etiam expoſiturus ero.

So-

Solutio prior Problematis.

§. 2. Sit B C D corpus propositum, cuius massa sit $= M$, et centrum grauitatis in C, cuius respectu momentum inertiae sit $M k k$, hocque corpus in B alligatum sit filo $B A = a$, in puncto A fixo; puncti porro B distantia a centro grauitatis sit $B C = b$, quibus positis elapso tempore $= t$ referatur corpus ad axem fixum A E, ponaturque angulus $E A B = \phi$, et, producta recta C B vsque ad hunc axem in L, vocetur angulus $E L B = \psi$, qui ergo superat angulum priorem ϕ angulo $A B L = \omega$, ita vt sit $\omega = \psi - \phi$. Tab. III. Fig. 2.

§. 3. Calculo igitur secundum principia motus ad haec elementa applicato, posui porro celeritatem angularem puncti B circa $A = u$, puncti vero C circa $B = v$, ita vt sit $u = \frac{d\phi}{dt}$ et $v = \frac{d\psi}{dt}$. Deinde posui $u = p v$ et $b \operatorname{cos.} \omega = z$, ac breuitatis gratia feci $b b + k k = b c$, hincque aequatio differentialis prodiit ista:

$$a(1-p)(bc-zz)dp + (bc + aap^3 + apz(1+p))dz = 0$$

quae autem, posito $z = a s$ et $\frac{bc}{aa} = nn$, ad hanc formam simpliciorem reducitur:

$$dp(1-p)(nn-ss) + ds(nn + p^3 + ps(1+p)) = 0.$$

vbi ergo est $s = \frac{b \operatorname{cos.} \omega}{a}$ et $nn = \frac{bb+kk}{aa}$; sicque in hanc aequationem inter binas variabiles p et s vnica quantitas constans, et quidem data, nn ingreditur. In id igitur mihi erat incumbendum, vt istius aequationis integrale inuestigarem.

§. 4. Quoniam in hac aequatione quatuor terminorum species reperiuntur, vbi scilicet binae variabiles p

 et

et s vel vnicam tantum dimenfionem, vel duas, vel tres, vel quatuor, obtinent; has quatuor partes feorfim repraefento:

I. $nn(dp+ds)$ III. $psds-ssdp$

II. $-nnpdp$ IV. $pssdp+pp(p+s)ds.$

§. 5. Incipiamus nunc a parte vltima, quam autem, ponendo $s=pq$, primo in hanc formam transfundamus: IV. $=p^3q(2q+1)dp+p^4(1+q)dq$. Iam fi haec forma diuidatur per $p^4q(2q+1)$, fiet integrabilis; erit enim $\frac{IV}{p^4q(2q+1)}=\frac{dp}{p}+\frac{(1+q)dq}{q(2q+1)}$; vnde integrando colligitur $\int\frac{IV}{p^4q(2q+1)}=l\frac{pq}{\sqrt{(2q+1)}}$. Hinc, retrogrediendo ad differentialia, erit

$$IV=p^4q(2q+1)d.l\frac{pq}{\sqrt{(2q+1)}}.$$

Quare fi breuitatis gratia ponatur $\frac{pq}{\sqrt{(2q+1)}}=r$, vt fit

$$p=\frac{r\sqrt{(2q+1)}}{q} \text{ erit } IV=\frac{r^3(2q+1)^3}{q}dr.$$

Pofito porro $\frac{r(2q+1)}{q}=t$, ob

$$r=\frac{qt}{2q+1}, \text{ erit } IV=t^3dr=t^3d.\frac{qt}{2q+1}.$$

§. 6. Formula tertia $psds-ssdp$, ita repraefentata: $pss(\frac{ds}{s}-\frac{dp}{p})$, ftatim dat hanc expreffionem: $III=pss.d.l\frac{s}{p}$, fiue, loco s et p fubftitutis valoribus,

$$III=p^3qq.d.lp=\frac{t^3q}{(2q+1)^{\frac{3}{2}}}dq\;(\text{ob } p=\frac{t}{\sqrt{(2q+1)}}).$$

Erit ergo

$$\frac{III}{t^3}=\frac{qdq}{(2q+1)^{\frac{3}{2}}}=d.\frac{q+1}{\sqrt{(2q+1)}}, \text{ ideoque } III=t^3.d.\frac{q+1}{\sqrt{(2q+1)}}.$$

§. 7.

§. 7. Colligamus iam tertiam et quartam partem, quarum summa erit $III + IV = t^3 . d . \left(\frac{qt}{2q+1} + \frac{q+1}{\sqrt{(2q+1)}}\right)$. Reliquae duae partes facili negotio eruentur. Cum enim sit $II = -nnp\,dp = -\frac{nn}{2} d.pp$, loco p scribendo valorem inuentum $\frac{t}{\sqrt{(2q+1)}}$, erit $II = -\frac{1}{2} nn . d . \frac{tt}{2q+1}$. Prima denique, quae est $nn(dp + ds) = nn . d . (p + s)$, erit

$$I = nn . d . p(1 + q) = nn . d . \frac{(1+q)t}{\sqrt{(2q+1)}}.$$

Ergo colligendo fiet

$$I + II = \tfrac{1}{2} nn . d . \left(\frac{2(1+q)t}{\sqrt{(2q+1)}} - \frac{tt}{2q+1}\right).$$

§. 8. Ponatur nunc

$$\frac{qt}{2q+1} + \frac{q+1}{\sqrt{(2q+1)}} = P \text{ et } \frac{2(1+q)}{\sqrt{(2q+1)}} - \frac{t}{2q+1} = Q,$$

eritque $I + II = \frac{1}{2} nnt\,d . Q$ et $III + IV = t^3 . d . P$, ideoque habebimus

$$I + II + III + IV = 0 = t^3 dP + \tfrac{1}{2} nn(t\,dQ + Q\,dt).$$

Cum autem sit

$$P - \tfrac{1}{2} Q = \frac{qt}{2q+1} + \frac{q+1}{\sqrt{2q+1}} - \frac{q+1}{\sqrt{2q+1}} + \frac{t}{2(2q+1)} = \frac{t}{2}$$

erit $Q = 2P + t$, quo substituto aequatio proposita tandem in hanc simpliciorem transmutatur:

$$t(nn + tt)\,dP + nnP\,dt - nnt\,dt = 0$$

siue in hanc:

$$dP + \frac{nnP\,dt}{t(nn+tt)} = \frac{nn\,dt}{nn+tt}.$$

§. 9. Consideretur iam coefficiens ipsius P, qui est $\frac{nn\,dt}{t(nn+tt)} = \frac{dt}{t} - \frac{t\,dt}{nn+tt}$, cuius integrale est $l \frac{t}{\sqrt{(nn+tt)}}$. Quamobrem tota aequatio, si per fractionem $\frac{t}{\sqrt{(nn+tt)}}$ multiplicetur, fiet integrabilis. Prodit enim

 $t\,dP$

$$\frac{t\,d\,P}{\sqrt{(nn+tt)}} + \frac{nn\,P\,dt}{(nn+tt)^{\frac{3}{2}}} = \frac{nn\,t\,dt}{(nn+tt)^{\frac{3}{2}}},$$

cuius integrale eſt

$$\frac{P\,t}{\sqrt{(nn+tt)}} = -\frac{nn}{\sqrt{(nn+tt)}} + C,$$

vnde colligitur $P\,t = C\sqrt{(nn+tt)} - nn$. Cum igitur poſuerimus

$$P = \frac{q\,t}{2q+1} + \frac{q+1}{\sqrt{(2q+1)}}, \text{ erit etiam}$$

$$P\,t = \frac{q\,t\,t}{2q+1} + \frac{t(q+1)}{\sqrt{(2q+1)}},$$

vnde naſcitur haec aequatio algebraica:

$$C\sqrt{(nn+tt)} - nn = \frac{q\,t\,t}{2q+1} + \frac{t(q+1)}{\sqrt{2q+1}},$$

quae, ſubſtituendo loco t valorem $p\sqrt{(2q+1)} = \sqrt{p(2s+p)}$, ad hanc reducitur:

$$C\sqrt{(nn+2ps+pp)} - nn = p + s + ps,$$

ſiue ad hanc:

$$C = \frac{nn+p+s+ps}{\sqrt{(nn+2ps+pp)}},$$

quod eſt integrale completum aequationis differentialis propoſitae:

$$dp(1-p)(nn-ss) + ds(nn+p^3+ps(1+p)) = 0$$

Altera ſolutio multo ſimplicior et elegantior.

§. 10. Hanc ſolutionem mihi immediate ex primis formulis differentio-differentialibus deriuare licuit, quae, poſitis coordinatis $AX = x$ et $XC = y$ et tenſione fili $AB = T$, ſunt:

$$\text{I. } \frac{ddx}{\alpha\,dt^2} = -\frac{T\,\text{coſ.}\,\Phi}{M}; \quad \text{II. } \frac{ddy}{\alpha\,dt^2} = -\frac{T\,\text{ſin.}\,\Phi}{M};$$

$$\text{III. } \frac{dd\Psi}{\alpha\,dt^2} = -\frac{T\,b\,\text{ſin.}\,\omega}{M};$$

vbi

vbi α denotat celeritatem, lapſu grauium libero vno minuto ſecundo acquiſitam. Coordinatae autem x et y ita per angulos Φ et ψ definiuntur, vt ſit

$$x = a \operatorname{cof.} \Phi + b \operatorname{cof.} \psi \text{ et } y = a \operatorname{fin.} \Phi + b \operatorname{fin.} \psi,$$

vnde differentiando fit

$$dx = -a\, d\Phi \operatorname{fin.} \Phi - b\, d\psi \operatorname{fin.} \psi$$
$$dy = +a\, d\Phi \operatorname{cof.} \Phi + b\, d\psi \operatorname{cof.} \psi$$
$$ddx = -a\, dd\Phi \operatorname{fin.} \Phi - a\, d\Phi^2 \operatorname{cof.} \Phi - b\, dd\psi \operatorname{fin.} \psi - b\, d\psi^2 \operatorname{cof.} \psi$$
$$ddy = +a\, dd\Phi \operatorname{cof.} \Phi - a\, d\Phi^2 \operatorname{fin.} \Phi + b\, dd\psi \operatorname{cof.} \psi - b\, d\psi^2 \operatorname{fin.} \psi$$

§. 11. Iam formulae ita combinentur; primo ſcilicet I fin. Φ – II cof. $\Phi = 0$, quae ergo, facta ſubſtitutione, dabit hanc aequationem:

$$a\, dd\Phi + b\, dd\psi \operatorname{cof.} \omega - b\, d\psi^2 \operatorname{fin.} \omega = 0.$$

Deinde fiat iſta combinatio: I. cof. Φ + II fin. $\Phi = -\frac{T}{M}$, vnde ergo naſcitur haec aequatio:

$$a\, d\Phi^2 + b\, dd\psi \operatorname{fin.} \omega + b\, d\psi^2 \operatorname{cof.} \omega = \frac{T}{M}.$$

At vero ex tertia formula eſt $\frac{T}{M} = \frac{kk\, dd\psi}{b \operatorname{fin.} \omega}$, vnde ſubſtituto hoc valore in ſuperiore aequatione erit

$$kk\, dd\psi + ab\, d\Phi^2 \operatorname{fin.} \omega + bb\, dd\psi \operatorname{fin.} \omega^2 + bb\, d\psi^2 \operatorname{fin.} \omega \operatorname{cof.} \omega = 0.$$

§. 12. Duas igitur nacti ſumus aequationes differentiales ſecundi gradus, quas hoc modo per litteras A et B indicemus:

$$A = a\, dd\Phi + b\, dd\psi \operatorname{cof.} \omega - b\, d\psi^2 \operatorname{fin.} \omega = 0.$$
$$B = kk\, dd\psi + ab\, d\Phi^2 \operatorname{fin.} \omega + bb\, dd\psi \operatorname{fin.} \omega^2 + bb\, d\psi^2 \operatorname{fin.} \omega \operatorname{cof.} \omega = 0,$$

in quas tantum bini anguli Φ et ψ, vna cum $\omega = \psi - \Phi$ ingrediuntur, et nunc totum negotium eo redit, vt eiusmodi di combinatio harum aequationum instituatur, quae ad formulam integrabilem perducat. Hoc autem praestabit ista combinatio: $B + A\,(a + b\cos.\omega) = 0$, vnde oritur ista aequatio

$$\left.\begin{array}{l} kkdd\psi + abd\Phi^2 \sin.\omega + bbdd\psi \sin\omega^2 + bbd\psi^2 \sin.\omega\cos.\omega \\ + aadd\Phi - abd\psi^2 \sin.\omega + bbdd\psi\cos.\omega^2 - bbd\psi^2 \sin.\omega\cos.\omega \\ \qquad + abdd\psi\cos.\omega \\ \qquad + abdd\Phi\cos.\omega \end{array}\right\} = 0.$$

§. 13. In hac aequatione occurrit terminus $ab\sin.\omega$, qui ob $d\psi - d\Phi = d\omega$ praebet hoc membrum:

$$-abd\omega\,(d\Phi + d\psi)\sin.\omega,$$

sicque nunc nostra aequatio, vlterius reducta, erit:

$$\left.\begin{array}{l} kkdd\psi + aadd\Phi - abd\omega\sin.\omega\,(d\Phi + d\psi) \\ + bbdd\psi + abdd\Phi\cos.\omega \\ + abdd\psi\cos.\omega \end{array}\right\} = 0$$

siue

$$aadd\Phi + ab\,(dd\Phi + dd\psi)\cos.\omega + (bb + kk)\,dd\psi$$
$$- abd\omega\,(d\Phi + d\psi)\sin.\omega = 0.$$

Vbi iam manifestum est, huius aequationis integrale esse

$$ab\,(d\Phi + d\psi)\cos.\omega + aad\Phi + (bb + kk)\,d\psi = C\,dt.$$

Quia enim elementum dt constans est assumtum, id propter homogeneitatem constanti est adiungendum.

§. 14. Egregie autem haec aequatio integralis conuenit cum ea quam methodo priore inuenimus; ad quod ostendendum introducamus celeritates angulares u et v, et cum sit $\frac{d\Phi}{dt} = u$ et $\frac{d\psi}{dt} = v$, habebitur ista aequatio:

Iam

$$a\,b\,\text{cof.}\,\omega\,(u+v)+a\,a\,u+(b\,b+k\,k)\,v=C.$$

Iam haec aequatio, per $a\,a$ diuisa, et posito vt supra fecimus

$\frac{b\,\text{cof.}\,\omega}{a}=s$ et $\frac{b\,b+k\,k}{a\,a}=n\,n$, hanc induet formam:

$$s\,(u+v)+u+n\,n\,v=C.$$

Nunc fiat $u\,p=v$, eritque $v\,s\,(p+1)+p\,v+n\,n\,v=C.$ At vero principium conseruationis virium vivarum in praecedente dissertatione perduxit ad hanc aequationem:

$$f\,f=a\,a\,v\,v\,(n\,n+p\,p+2\,p\,s),$$

vnde deducitur $v=\frac{f}{a\sqrt{(n\,n+p\,p+2\,p\,s)}}$, qui valor in nostra aequatione substitutus suppeditat sequentem:

$$C=\frac{f}{a}\,\frac{n\,n+p+s+p\,s}{\sqrt{(n\,n+p\,p+2\,p\,s)}}\ \text{siue}\ \frac{n\,n+p+s+p\,s}{\sqrt{(n\,n+p\,p+2\,p\,s)}}=\frac{C\,a}{f},$$

quae est ea ipsa aequatio, ad quam nos praecedens integratio perduxit. Manifestum igitur est, hanc posteriorem integrationem priore multo esse simpliciorem et elegatiorem.

ANNOTATIONES
CIRCA CONSTRVCTIONEM ET VSVM
ACVS INCLINATORIAE
ET
DETERMINATIO INCLINATIONIS MAGNETICAE PETROPOLI AD FINEM ANNI 1778.

Auctore

W. L. KRAFFT.

§. 1.

Acus declinatoria, vtilissima illa cursus nautici moderatrix, ad eum, quo hodie praedita est, perfectionis gradum euehi potuisset, etiamsi de inclinatione magnetica nihil fuisset cognitum. Aliter vero res se habet, si de declinationis magneticae legibus, eiusque in locis diuersis & diuersis temporibus variationum theoria, rei nauticae successibus non minus profutura, quaestio sit: huius enim theoriae perficiendae spes fere nulla videtur, nisi vtriusque phaenomeni magnetici obseruationes indiuulso nexu copulentur; vnde, quicquid ad acum inclinatoriam perficiendam valet, vtilitatis in re nautica titulo physicorum attentionem sibi vindicat, si vel maxime a magnetismi terrestris, cuius caussam natura intimis terrae recessibus abdidit, singularitate discesseris. Acus inclinatoriae experimentis intentus, in me-

methodum inclinationis magneticae tali acu definiendae, vfitatis concinniorem mihi visam, & in ipsius acus vlterius perficiendae facile aliquod artificium incidi, quas qualescunque annotationes meas, si quis forte earum vsus esse possit, hic exponere constitui.

§. 2. Acus inclinatoria, circa quam hae annotationes versantur, ea est, quam Illustris *Daniel Bernoulli*, iam ante hos viginti tres annos, magno ingenii acumine primus in lucem protulit (*), cuius autem vsus, non obstante insigni, quo aliis eiusmodi instrumentis omnibus palmam praeripit, perfectionis gradu, mirum quam parum aut innotuerit obseruatoribus aut inter eos inualuerit. Cuius igitur cum hic mihi descriptio esset praemittenda; eam ita confici operae pretium fuit, vt praecipua ad adcuratam eius constructionem necessaria praecepta traderem et singulorum ad instrumenti perfectionem momenta in subiunctis notis expenderem. Primaria pro acus inclinatoriae *Bernoullianae* constructione praecepta huc potissimum redeunt:

I. Acus ipsa, ex chalybe puro, homogeneo et optime indurato paranda, figuram habeat parallelepipedi, in vtraque extremitate ita acuminati, vt linea recta, bina eius acumina iungens, per mediam eius altitudinem et crassitiem transeat. Longitudo acus sit circiter 16 pollicum; altitudo 4 lin. et crassities

Y 2 me-

(*) Vid Journal des Scavans Janvier 1757. et Memoire sur la maniere de construire les Bouſſoles d'Inclinaiſon par Mr. *Dan. Bernoulli.*

media $1\frac{1}{2}$ lin. (*a*). Acus ſecundum has dimenſiones conſtruendae maſſa, ex vtroque latere ita diſtribuatur, vt centrum eius grauitatis ſaltem proxime in medium eius punctum cadat.

II. Acus, praeliminario modo ita aequilibratae, vtrique lateri in medio lineae bina eius acumina iungentis afferruminetur cuſpis chalybea, diametri dimidiae circiter lineae (*b*) et duas tresue lineas longa, ex-

---

(*a*) Acus dimenſiones duplici quaſi limite circumſcribuntur: primo enim longitudinem acus talem eſſe oportet, vt limbi, eius obliquitates menſurantis, diuiſio ne ſit nimis parua; adde, quod, ceteris paribus, acus longiores maioris, quam breuiores, magnetiſmi capaces ſint. Contra vero illae dimenſiones etiam tales ſint neceſſe eſt, vt acus, ex axe ſuo horizontaliter ſuſpenſa, proprio ſuo pondere quam minime incuruetur; qua ſcilicet inflexione centrum grauitatis eius alios atque alios in diuerſis acus obliquitatibus ſitus adipiſcitur, vt, ſi vel maxime in vna acus poſitione in centrum ſuſpenſionis eius fuerit reductum, in omnibus aliis infra id centrum deprimatur; id, quod obſeruationes tali acu inſtitutas non erroneas reddere non poteſt. Imminuitur vero iſta acus flexibilitas, non ſolum augendo materiae, ex qua conſtruitur, rigiditatem, vnde eam ex chalybe probe indurato conſtrui conuenit, quo ipſo ſimul vis magneticae tenacior euadit; ſed augendo quoque eius altitudinem et minuendo eius longitudinem, cuius ſcilicet biquadrato, ceteris paribus, acuum a proprio ſuo pondere incuruationes proportionales ſunt. Craſſitiem acus quod attinet, commode vſu venit, vt eius imminutio, ad vis magneticae acui imprimendae intenſitatem optabilis, acus flexibilitatem non augeat. Praeſcriptas hic dimenſiones Ill. *Bernoulli* acubus inclinatoriis idoneas experimentis comprobauit.

(*b*) Cuſpides hae tales ſint oportet, vt frictio earum vel in cubili, cui immittuntur, vel ſuper fulcro, cui ſuper imponuntur, ſit quam miniexacte cylindrica (*c*), durissima et politissima, al-

tera

minima. Immissionem axis in bina cubilia, licet talis acus suspensio id commodi praestet, vt in ea centrum grauitatis acus ad axem reductum, quiescat atque acus circa id ipsum centrum immobile conuertatur, Ill. *Bernoulli* tamen in acubus inclinatoriis plane non admittit, propterea quod acus ita suspensae oscillationes motu axis *radente* peragantur; in quo motu frictio ineuitabilis est; quae cum vi magneticae inclinatrici, in ratione sinus elongationis acus a vera ipsius inclinatione magnetica decrescenti facile aequalis fieri possit; acum ad quietem reducere valet, licet ea adhuc notabiliter a iusta sua inclinatione elongata sit. Acus inclinatoriae *Bernoullianae* axis fulcro horizontali (III.) super imponitur, super quo, dum oscillat acus, axis non nisi motum pure *voluentem* habet, a quo motu omnis abest frictio, et quae, si qua sit, non solum axis et fulcri laeuigatione et duritie, atque materiarum, axis chalybei et fulcri vitrei, heterogeneitate, sed per id quoqne insensibilis redditur, quod cuspides sint cylindricae adeoque omnis earum cum fulcro contactus, si fulcrum fuerit *planum*, ad *lineam*; si vero fulcrum quoque sit cylindricum, eique cuspides transuersim imponantur, ad *punctum* teducatur. Licet vero in tali axis acus super fulcrum superimpositione centrum grauitatis acus ad axem reductum non quiescat, sed, ob motum axis super fulcro horizontali volutorium, alternatim, dum oscillat acus, horizontaliter progrediatur et regrediatur: tamen acus hoc modo mobilis grauitate sua nullatenus impeditur, quominus vi inclinatrici magneticae liberrime obsequi possit, propterea quod acus ita positae centrum grauitatis, licet non quiescat, tamen, non obstante motu suo, semper in linea verticali per punctum contactus axis cum fulcro versetur. Cum tamen motum hunc centri grauitatis horizontalem quam minimum esse conueniat: diametrum cuspidum esse quam minimam oportet, salua tamen altera conditione, vt pondus acus absque vlla inflexione ferre queant; vnde ne n mium onerentur, pondus acus ne sit nimis magnum oportet. Acus supra descriptae pondus inueni 507 granorum.

(*c*) Licet a non perfecta cuspidum cylindricitate, si verbi caussa ellipsoidicae sint in ratione axium 1 ad 0, 95, iam errores aliquot
gra-

tera alteri exacte aequales (*d*) atque eum in modum vtraque positae, vt earum bini axes in vnam eandemque lineam rectam cadant, plano verticali oscillationis acus, exacte normalem.

III. Construatur fulcrum inclinatorium, totum orichalceum fig. 3 expressum Constat id cylindro recto A B C D E F G diametri vnius circiter pollicis et vnum pedem alto. A summitate huius cylindri vsque ad profunditatem, dimidia acus longitudine paulo maiorem, in ipso eius medio verticaliter inscindatur rima *a b c d f* a cylindri axe vtrinque duas, adeoque in vniuersum quatuor lineas lata. Inferior huius cylindri pars solida per planum circulare H, radii trium circiter pollicum, ipsi concentricum normaliter transfixa, immittitur verticaliter foramini circulari eiusdem cum cylindro diametri plani K L, ope quatuor cochlearum et duarum

Tab. III.

graduum in obseruationes, tali acu et tali modo super fulcro posita institutas irrepere possint (vid. Ill. *Bernoulli* dissertatio supra allegata: tamen modus, quo ad tornum efformantur istae cuspides, artificis dexteritate, satis praecisionis admittit, vt errores hinc oriundi insensibiles reddi queant, quod si sperare non liceret; modus *Bernoullianus* acum suspendendi hic expositus plane non admitti posset.

(*d*) Ad euitandam polorum magneticorum in acu sibi succedentium pluralitatem seu puncta vt vocantur consequentia, interest quidem, acus co tinuitatem secundum longitudinem quam minime interrumpi (vid Cel. *Zeiheri* diss. Nov. Comment. Tom. VII. p. 309); tamen etiam absque sensibili incommodo acum nostram inclinatoriam in medio perforari et cuspidem continuam transfigi posse puto; quam adeo cuspidem ex hoc foramine subinde eximi posse conducet. vid. nota (*h*).

rum libellarum hydroſtaticarum ad ſitum horizontalem reducendi, ſuper quo plano totus cylinder vna cum plano circulari ipſi affixo circa axem ſuum verticalem immobilem verſatilis eſt, ſecundum graduationem circuli M N in plano K L deſcripti et cylindro concentrici. Rimae *a b c d f* binae acies ſuperiores *a b* et *d f* duos portant cylindrulos vitreos horizontales, aequales, politiſſimos, acierum longitudini et alterum alteri parallelos atque ambos ita poſitos, vt eorum ſummae ſuperficies exacte in vno eodemque plano, eoque ad axem cylindri verticalem normali, ſitae ſint (*e*). Poſticus denique rimae *a b c d f* paries E F G portat limbum ſemicircularem verticulem P Q R, diametri longitudine acus tantillum minoris, cuius radius verticalis cum axe cylindri coincidat, et ex cuius centro ſuper limbi plano deſcriptus eſt ſemicirculus, radii acus dimidiae longitudini aequalis, in gradus eorumque partes aliquotas diſtincte diuiſus et in parte ſua infima per foramen Q cylindri viſibilis.

IV. Cylindro fulcri inclinatorii ad ſitum verticalem, adeoque plano cylindrulorum vitreorum ad ſitum horizontalem, exacte reducto; his cylindrulis transverſim et ad eorum longitudinem normaliter impona-

---

(*e*) Vt ſcilicet, cylindro ad ſitum verticalem reducto, hoc planum ſit perfecte horizontale. Errores, qui a plani huius ſitu tantillum obliquo oriuntur, eo ſunt maiores, quo maior eſt cuſpidum diameter: vnde eam ob hanc quoque cauſſam eſſe minimam oportet. vid. nota (*b*).

ponantur cuſpides acus, atque haec, ope limae more conſueto, ita aequilibretur, vt centrum gravitatis eius, quam fieri poteſt, proxime in medium axis punctum cadat (*f*). Acus ita aequilibratae

(*f*) Si centrum grauitatis acus 1) exacte ad centrum axis acus reduci poſſet et 2) in quacunque acus obliquitate in iſto loco perſeueraret: acus inclinatoria hactenus deſcripta ſummo perfectionis gradu gauderet, propterea quod, frictione artificiis modo expoſitis vel deſtructa vel certe inſenſibili reddita, talis acus, vi magnetica imbuta et ſuper fulcro inmeridiano magnetico mobilis, in nulla alia obliquitate quieſcere poſſet, praeter eam, quae aequalis eſt verae inclinationi magneticae. Prius quod attinet; aberrationes ſitus centri grauitatis ab axe acus tantillae, vt vel dexterrimo artifici ineuitabiles ſint, iam efficere poſſunt, vt acus vi magnetica imbuta et ſuper fulcro in meridiano magnetico mobilis, in obliquitate quieſcat a vera inclinatione magnetica notabiliter diſcrepante. Altera vero conditio, nempe centri grauitatis in eodem loco perſeuerantia, rigoroſo ſenſu ne poſſibilis quidem eſt, cum omnis acus in ſitu horizontali poſita proprio ſuo pondere incuruetur, haecque inflexio in variis acus obliquitatibus varia ſit. Puto tamen errorem obſeruationum ex poſteriori hoc acus defectu oriundum, minuendo acus longitudinem, fieri inſenſibilem; quod vt appareat, vtamur experimento Ill. *Dan. Bernoullii*, quo inuenit, virgam ferream homogeneam cylindricam, diametri 4 lin et 4 pedes longam, ex centro ſuo grauitatis horizontaliter ſuſpenſam ita incuruari, vt centrum eius grauitatis $\frac{1}{25}$ mis partibus lineae infra ſitum, quem, ſi virga foret inflexilis, haberet, deprimatur; quae centri grauitatis depreſſiones cum ſint in virgis ſola longitudine diuerſis biquadrato longitudinum proportionales: ſequitur, in tali virga 16 pollices longa adeoque acus hic deſcriptae longitudinem habente non niſi partem $\frac{1}{2500}$ mam lineae aequare, quae adeo quantitas pro ſitu acus horizontali computata, in obliquis acus poſitionibus in ratione coſinus obliquitatis imminuitur adeoque in regionibus, vbi vera inclinatio magnetica notabilis eſt prorſus negligi poteſt. Reſtat ergo prior potiſſimum acus inclinatoriae imperfectio, poſteriori tae alterutri lateri annulus orichalceus A B C D diametri quatuor circiter pollicum, exacte graduatus, ita affigitur, vt planum eius ad axem acus normale ſit, atque graduationis eius centrum O in ipſum acus axem; initium vero infra id centrum in lineam O A longitudini acus in centro iſto perpendicularem cadat. Acus hoc apparatu inſtructa, denuo ſuper fulcro inclinatorio ita aequilibretur, limam annulo, non acui, applicando, vt commune centrum grauitatis acus et annuli quam proxime ad acus axem reducatur. Tab. IV. Fig. 1.

V. Acu cum annulo iunctim, ita aequilibrata, iungatur annulo index orichalceus O I, circa axem acus leuiuſcula cum frictione verſatilis, cuius pondus partem circiter ſexageſimam ſummae ponderum acus et annuli adaequet. Acus, annulo et indice inſtructa, et hactenus omnis vis magneticae expers ſeruata, imponatur fulcro inclinatorio, ita, vt axis acus ad planum limbi ſemicircularis graduati ſit normalis et centro graduationis exacte reſpondeat. Acus hoc modo ſuſpenſae obſeruentur in limbo graduato obliquitates pro ſingulis indicis ſuper annulo poſitionibus; hincque tabula conſtruatur, quam in ſequentibus cum Ill. *Bernoullio* tabulam aequationis vocabimus. (g)

VI.

riori longe notabilior et artifici dexterrimo vix euitabilis; atque huius praeciſe defectus in verae inclinationis magneticae obſeruationem influxui ingenioſiſſime occurrit Ill. *Bernoullius* apparatu ſimplici qui in hoc articulo iam porro deſcribitur.

(g) Si acus, iunctim cum annulo, foret perfecte aequilibrata, id eſt, ſi

VI. Imbuatur nunc acus valida vi magnetica, quod ita fieri hic ſuppono, vt acus extremitas B, diviſionis annuli gradui nonageſimo reſpondens, polus euadat *borealis*; altera M *meridionalis*; atque hac vltima operatione tota acus inclinatoriae conſtructio erit abſoluta. (*h*)

§. 3.

ſi centrum commune grauitatis acus et annuli ad centrum axis foret reductum: angulus poſitionis indicis ſemper reſpondenti acus obliquitati foret aequalis (vid. nota *** §. 3); vnde hoc in caſu conſtructio tabulae aequationis foret ſuperfiua; atque hoc ipſo indicio gradus praeciſionis in acu, iunctim cum annulo, aequilibranda obtentus diiudicari poteſt.

(*h*) Communiter tales acus vi magnetica imbuuntur, ſtringendo eas alterutro magnetis polo per totam longitudiuem, vbi quidem ea acus extremitas, in qua affrictus incipit, polo magnetis ſtringenti homologum, altera vero contrarium magnetiſmum adipiſcitur. Cum vero haec methodus non ſolum non admodum efficax, ſed etiam, praeſertim in chalybe indurato, qualem hic adhiberi convenit, ad producendos in acu plures polos magneticos ſucceſſiuos valde prona ſit: eam in acubus inclinatoriis animandis adhiberi minime conuenit. Ad perfectam acus inclinatoriae magnetiſationem requiritur 1) vt vi magnetica ſit ſaturata 2) vt omnes, quas concepit, vires magneticae ad acum in debitum ſitum convertendam conſpirent neque aliae alias in hoc effectu impediant; requiritur ergo, vt vna pars dimidia acus non niſi borealem, altera vero non niſi auſtralem magnetismum poſſideat, id eſt, vt acus non niſi *vnicum* centrum magneticum, idque praeciſe in axe ſuo poſitum, habeat. Huic ſcopo egregie ſatisfacit methodus magnetificandi duplicis contactus ſeu *Cantoniana*, quae eo abſoluitur, vt acui praeciſe in medio eius imponantur poli contrarii duorum magnetum artificialium verticalium, circiter vna linea interpoſito ligni fruſtulo a ſe remoti, hique tum alternis vicibus, eadem ſeruata diſtantia, mediocri ſed vniformi preſſione, ſuper acu prorſum atque retrorſum trahantur, ita tamen, vt neuter polorum vnquam vltra acus extremitatem promoueatur. Operatione hac aliquoties et ſuper

§. 3. Fulcro igitur inclinatorio ſuper linea meridiana magnetica, ope acus nauticae cognita, ita diſpoſito, vt iſta linea per centrum et initium diuiſionis circularis

---

ſuper vtroque acus latere repetita, poli iterum praeciſe ad medium acus reducantur et tum horizontaliter et ad acus longitudinem normaliter ab a u auferantur. Hoc modo ea acus extremitas, quam polus borealis ſpectabat, auſtralem et vice verſa magnetismum adipiſcitur, et, quod praecipuum eſt, centrum magneticum exacte ad medium acus erit reductum, modo id obſervetur, vt dimidium acus vnum praeciſe totidem vicibus ſtringatur, ac alterum dimidium. conf. Aepini Tent. theoriae electricitatis et magnetismi §. 233. Patet vero, vt haec methodus acui adminiſtrari queat, opus eſſe, vt axis ex medio acus foramine, per quod transfixus eſt, eximi queat. vid. nota (*d*); et cum haec methodus ob expoſitam, ipſi peculiarem, eamque magni momenti praerogatiuam ceteris omnibus praeferenda ſit: acum ita inſtrui operae pretium eſt. Quodſi tamen acus ita non inſtructa ſit, vt axis eximi poſſit: licebit, etſi minori commodo, ea vti methodo, qua Cel. *Anglus*, *Knightius*, coram Societate regia Londinenſi, acum nauticam ope duarum magnetum artificialium 16 poll. longorum egregia vi magnetica imbuit, quae in *Antheaumu* Diſſertatione de magnetibus artificialibus, anno 1758 ab Acad. praemio coronata ita deſcribitur: Ms. *Knight* ayant placé ſes deux barres en ligne directe, le pole Nord de l'une en contact avec le pole Sud de l'autre, il poſa l'aiguille deſſûs enſorte, que ſon centre étoit ſur la ligne de contact des deux barres; (inter quas laminas noſtro caſu axis acus interponi poteſt) puis appuyant ſur le centre de l'aiguille, il tira les barres de chaque coté les faiſſant gliſſer ſous l'aiguille; vbi quidem ea acus pars dimidia, quae polo boreali ſtringitur, auſtralem et vice verſa magnetismum adipiſcitur. Ceterum ope limaturae ferri acui per cribrum circumſtratae examinari poteſt, vtrum acus non niſi vnicum centrum magneticum idque praeciſe ad axem reductum, poſſideat, nec ne? Simili quoque examine dignoſcetur, num bini acus poli magnetici praeciſe cum binis eius acuminibus, vti opus eſt, coincidant, adeoque axis acus longitudinalis cum diametro eius magnetica idem ſit.

M N in plano K L defcriptae tranfeat: limbus graduatus P Q R fuper hoc plano circa axem cylindri verticalem verfatilis pro lubitu vel ad meridianum magneticum vel ad aliud quodcunque planum dato angulo ab eo declinans, id eft, ad quodcunque azimutum magneticum reduci poterit. Ponamus igitur, hunc limbum in plano verticali conftitui, quod a plano meridiani magnetici declinet angulo $= \omega$; et indicem annuli pofitum effe ad angulum A O I $= \eta$. Sit indicis huius pondus $=$ M, eiusque centrum grauitatis in k, cuius ponatur ab axe O diftantia O $k = d$. Sit porro acus et annuli iunctim pondus $=$ A, eorumque commune centrum grauitatis in G, huius ponatur ab axe O diftantia O G $= g$ et angulus A O G $= \gamma$. Hifce notatis imponatur haec acus magnetica, ab omni proximitate ferri remota, modo ante praefcripto (V) cylindrulis vitreis, ac ponatur obliquitas, in qua acus fe ad quietem componet, feu angulus P O B $= \vartheta$, vbi nunc conditiones pro ftatu hoc aequilibrii acus neceffarias definire oportet. Elegantiffime quidem hanc quaeftionem iam refoluit Cel. *I. A. Eulerus* in differtatione Actorum Acad. Berol. Tom. XI inferta (*); cum tamen Vir celeberrimus ibi legem quandam magnetismi hypotheticam et ipfo experimentorum acu inclinatoria inftitutorum cum theoria ifti legi fuperftructa confenfu demum confirmandam affumferit, totamque quaeftionem ad doctrinam fphaericam reduxerit: non erit alienum hic oftendere, quomodo eadem quaeftionis refolutio ex poftea cognitis certis et indubitatis magnetismi legibus plana methodo repetenda fit. Cum

Fig. 2.

(*) Theorie de l'inclinaifon de l'aiguille magnetique confirmée par des experiences par Mr. *J. A. Euler*.

Cum igitur ducta verticali O H ob angulum $AOH = POB = \vartheta$ et $GOH = \gamma + \vartheta$, statim pateat, ex pondere A in puncto G collecto oriri vim, cuius momentum $= Ag. \text{fin.} (\gamma + \vartheta)$, quae ad acum circa axem O conuertendam cuspidemque B eleuandam tendit; similiter ob $HOI = \eta - \vartheta$, ex pondere M in k collecto oriri vim, cuius momentum $= Md. \text{fin} (\eta - \vartheta)$ quae pariter ad acum circa axem O conuertendam, sed cuspidem B deprimendam tendit; id vnum superest, vt tertiae vis, qua acus sollicitatur, vis nimirum magneticae momentum ad acum conuertendam inuestigetur. Sit hunc in finem vis magnetica in acum libere mobilem et in azimuto magnetico $= \omega$ constitutam agens $= W$; et P O F illa obliquitas, ad quam haec vis acum in isto plano reducere conatur; id est, W denotet talem vim, quae acus polo boreali B sub dicto angulo applicata aequipollet vi mediae inter omnes sollicitationes, quas nucleus terrae magneticus in acum exserit. Simili significatione sit vis magnetica in acum in ipso meridiano magnetico constitutam agens $= V$ et illa obliquitas, ad quam haec vis acum in hoc plano reducere conatur, seu vera inclinatio magnetica $= \alpha$. Exprimatur iam vis W per lineam B S ipsi O F parallelam, eritque posito $POF = u$ et $OB = k$, ob angulum $BOF = u - \vartheta$, huius vis momentum $= Wk \text{fin.} (u - \vartheta)$ ad acum circa axem conuertendam et cuspidem B deprimendam tendentis. Constat vero ex ipsa theoria magnetica (**), esse tang. $u = \frac{\text{tang.}\, \alpha}{\text{cof.}\, \omega}$ et $W \text{fin.}\, u = V \text{fin.}\, \alpha$; vnde ob

$$\text{fin.}\, u = \frac{\text{tang.}\, \alpha}{\sqrt{(\text{tang.}\, \alpha^2 + \text{cof.}\, \omega^2)}} \text{ et cof.}\, u = \frac{\text{cof.}\, \omega}{\sqrt{(\text{tang.}\, \alpha^2 + \text{cof.}\, \omega^2)}},$$

 colli-

(**) Conf. Ill. *Aepini* tentamen theoriae electricitatis et magnetismi, §. 314 et seqq.

colligitur

$$\text{fin.}\,(u-\vartheta)=\frac{\text{tang.}\,\alpha.\,\text{cof.}\,\vartheta-\text{cof.}\,\omega\,\text{fin.}\,\vartheta}{V(\text{tang.}\,\alpha^2+\text{cof.}\,\omega^2)}\text{ et}$$

$$W=V\,\text{cof.}\,\alpha\,V(\text{tang.}\,\alpha^2+\text{cof.}\,\omega^2),$$

quibus valoribus fubftitutis, erit vis magneticae in acum agentis momentum $=Vk(\text{fin.}\,\alpha\,\text{cof.}\,\vartheta-\text{cof.}\,\alpha.\,\text{fin.}\,\vartheta.\,\text{cof.}\,\omega)$ vnde, ob momentorum ex vtraque parte aequalitatem, pro ftatu aequilibrii acus erit

$$A\,g.\text{fin.}(\gamma+\vartheta)=M\,d\,\text{fin.}(\eta-\vartheta)+V\,k\,(\text{fin.}\alpha\,\text{cof.}\vartheta-\text{cof.}\alpha\,\text{fin.}\vartheta\,\text{cof.}\omega)$$

hincque

$$\text{tang.}\,\vartheta=\frac{M\,d\,\text{fin.}\,\eta-A\,g\,\text{fin.}\,\gamma+V\,k\,\text{fin.}\,\alpha}{M\,d\,\text{cof.}\,\eta+A\,g.\,\text{cof.}\,\gamma+V\,k\,\text{cof.}\,\alpha\,\text{cof.}\,\omega}$$

quae formula cum *Euleriana* eadem eft. (***)

§. 4. Aequatio pro ftatu aequilibrii acus modo inuenta

$$A\,g.\text{fin.}(\gamma+\vartheta)=M\,d.\text{fin.}(\eta-\vartheta)+Vk\,(\text{fin.}\alpha\,\text{cof.}\vartheta-\text{cof.}\alpha\,\text{fin.}\vartheta\,\text{cof.}\omega)$$

ftatim tres methodos notatu dignas fuppeditat, ope acus inclinatoriae modo defcriptae veram definiendi inclinationem magneticam, absque eo, vt centrum grauitatis acus cum axe coincidere, fiue etiam eius ab hoc aberrationem noffe oporteat. Acu enim in azimuto magnetico quocunque $=\omega$ conftituta, patet, fi fuerit $\text{tang.}\,\vartheta=\frac{\text{tang.}\,\alpha}{\text{cof.}\,\omega}$, terminum littera V affectum euanefcere, adeoque ipfam hanc acus obliquitatem, qualescunque etiam vi acus magneticae variationes inducantur, femper tamen eidem indicis pofitioni refpondere et vice verfa eam acus obliquitatem, quae,

(***) Hinc igitur patet, fi fuerit $V=0$ et $g=0$; id eft, fi acus fuerit omnis vis magneticae expers et perfecte aequilibrata; fore $\vartheta=\eta$, vti fupra diximus in nota *g*.

quae, vi acus magnetica quomodocunque variata, eidem tamen ſemper indicis poſitioni reſpondet, eſſe $=$ Arc.tang. $\frac{tang.\,\alpha}{coſ.\,\omega}$; qua igitur acus obliquitate, quae ſe ab omnibus reliquis eſſentiali hoc charactere diſtinguit, experimentorum ope cognita et poſita $= \Phi$, innoteſcet inde vera inclinatio magnetica $= \alpha$; cum, ob ω ſeu azimutum magneticum cognitum, ſit tang. $\alpha =$ tang. Φ. coſ. ω; adeoque, ſi experimenta acu in meridiano magnetico conſtituta facta fuerint, ob $\omega = 0$ habebitur $\Phi = \alpha$.

§. 5. Tres autem variationes huic ſcopo idoneae vi magneticae acus inferri poſſunt: poteſt enim iſta vis 1) aut deſtrui atque iterum excitari 2) aut debilitari atque intendi 3) aut excitari atque inuerti, ita, vt ea acus extremitas, quae boreali magnetiſmo fuerat imbuta, iam auſtralem et vice verſa adipiſcatur, vnde tres reſultant methodi ſequentes:

I. Acu omnis adhuc vis magneticae experte vel ea penitus orbata: pro ſingulis indicis poſitionibus obſeruentur reſpondentes acus obliquitates. Acu deinceps valida vi magnetica imbuta, et in meridiano magnetico conſtituta: eaedem obſeruationes repetantur; atque ea acus obliquitas, quae vtroque caſu eidem indicis poſitioni reſpondet, vera erit inclinatio magnetica.

Methodus haec, ab Ill. *Bernoullio* commendata, hac inſigni praerogatiua gaudet, quod tabula aequationis, (§. 2. V) pro acu omnis plane magnetiſmi experte ſemel conſtructa, deinceps conſtanter pro quouis tempore et loco, ſi ſcilicet pro omnibus et ſingulis gradibus poſitionis indicis fuerit conſtructa, valeat, qualescunque ipſa inclinatio ma-

magnetica vel varietates in diuerſis locis vel mutationes ſucceſſu temporis ſubierit; modo id certum ſit, acum rudiori quadam tractatione ſitum centri grauitatis ſuae non mutaſſe. Sed eadem methodus hac inſigni quoque difficultate premitur, quod propemodum impoſſibile ſit, acum omnis plane vis magneticae expertem habere et quod, ſi acus, dum tabula aequationis conſtruitur, iam fuerit vel leuiſſimo magnetismo imbuta, haec methodus principali ſua vtilitate excidat, propterea quod ea tabula iam non valet, niſi quamdiu non ſolum ſitus centri grauitatis acus, ſed ipſa quoque inclinatio magnetica nullam variationem ſubierit; adeoque toties de nouo conſtrui debet, quoties inclinationis magneticae vel differentias in diuerſis locis vel variationes diuerſis temporibus explorare velis. Quam exigua autem ſpes ſit, acum vnquam omnis magnetismi expertem haberi, vel inde perſpicitur, quod, ſi acus, ignita et in eo ſitu, quo magnetismus terreſtris ipſi nullam vim magneticam inducit (*), refrigerata vel maxime omnem vim magneticam perdidiſſet; tamen, cum pro conſtruenda tabula aequationis tempus ſatis notabile inclinata teneri debeat, ſi vel maxime in ipſo *aequatore* magnetico fuerit conſtituta (**), ab actione magnetismi terreſtris vim aliquam magneticam ſponte ſit conceptura, eamque ceteris paribus eo maiorem, quo maior eſt ipſa inclinatio magnetica.

II[da] methodus: Acu valide magnetica et in meridiano magnetico conſtituta conſtruatur tabula aequationis: tumque vi

(*) In ſitu ſcilicet ad inclinationem magneticam normali.

(**) In quo ſcilicet plano actio magnetismi terreſtris in acum, ceteris paribus, omnium minima eſt, atque adeo nulla, ſi acus in ſitu horizontali detineatur.

vi acus notabiliter imminuta, eaedem obseruationes repetantur vel vice versa: atque ea acus obliquitas, quae vtroque casu eidem respondet indicis positioni, vera erit inclinatio magnetica.

III^{tia} methodus: *Acu valide magnetica et in meridiano magnetico constituta, construatur tabula aequationis: tum inuertatur magnetismus, et acu eodem, ac ante, modo in meridiano magnetico constituta, vt scilicet eadem, quae ante, eius extremitas, iam australis, versus Boream spectet, eaedem obseruationes repetantur; atque ea acus obliquitas, quae vtroque casu eidem respondet indicis positioni, vera erit inclinatio magnetica.*

Methodum secundam iam adhibuit Cel. *Malletus* (vid. Nov. Comm. T. XIV. Pars II. p. 38); tertiae vero nullibi mentionem fieri memini; licet secundae praeferenda sit, propterea quod imminuta vi magnetica, ceteris paribus etiam intensitas tendentiae acus ad iustam suam obliquitatem et ad superanda frictionis, si qua sit, obstacula imminuatur, cum contra in tertia methodo vis magnetica vtroque casu quantumuis valida esse possit. Licet vero, vbicunque inclinatio magnetica iam aliquatenus cognita est, tabulam aequationis pro mediocri positionum indicis interuallo, inter cuius limites inclinatio magnetica cadit, construxisse sufficiat; tamen ista constructio et operosa est, si praecisam eam esse velis, et incerta, tam ob graduationis, obliquitatem acus mensurantis, paruitatem (conf. nota *a*), quam etiam ob id, quod errores toti, quanti quanti sunt, inclinationis magneticae determinationem inde deductam afficiant; vnde hisce methodis sequentem, in quam incidi, commodissime substitui posse puto.

I. Acu valide magnetica et in meridiano magnetico conſtituta pro duabus quibuscunque indicis poſitionibus $\mathfrak{a}$ et $\mathfrak{b}$ obſeruentur reſpondentes acus obliquitates $\mathfrak{A}$ et $\mathfrak{B}$. Cum igitur ob $\omega = 0$ et

$$\text{poſito } \frac{Ag}{Md} = m \text{ et } \frac{Vk}{Md} = n; \text{ ſit}$$

$$\text{tang. } \vartheta = \frac{\text{ſin. } \eta - m \text{ ſin. } \gamma + n \text{ ſin. } \alpha}{\text{coſ. } \eta + m \text{ coſ. } \gamma + n. \text{ coſ. } \alpha},$$

$$\text{erit poſito } - m \text{ ſin. } \gamma + n \text{ ſin. } \alpha = P \text{ et}$$

$$m \text{ coſ. } \gamma + n \text{ coſ. } \alpha = Q$$

$$\text{tang. } \mathfrak{A} = \frac{\text{ſin. } \mathfrak{a} + P}{\text{coſ. } \mathfrak{a} + Q} \text{ et tang. } \mathfrak{B} = \frac{\text{ſin. } \mathfrak{b} + P}{\text{coſ. } \mathfrak{b} + Q}:$$

ex quibus duabus aequationibus valores P et Q definire licet; quibus inuentis habebitur

$$\text{ſin. } (\eta - \vartheta) = Q \text{ ſin. } \vartheta - P. \text{ coſ. } \vartheta. \ (\S.\ 4.)$$

II. Vi acus magnetica notabiliter debilitata, pro duabus quibuscunque indicis poſitionibus $\mathfrak{a}'$ et $\mathfrak{b}'$ obſeruentur reſpondentes acus obliquitates $\mathfrak{A}'$ et $\mathfrak{B}'$; atque inde colligantur valores $- m$ ſin. $\gamma + n'$ ſin. $\alpha = P'$ et m coſ. $\gamma + n'$ coſ. $\alpha = Q'$; quibus inuentis iterum pro tali acus ſtatu magnetico generaliter habebitur ſin. $(\eta - \vartheta) = Q'$ ſin. $\vartheta - P'$ coſ. ϑ.

III. Denique, ſi eousque procedere velis, inuerſo acus magnetiſmo, ex obſeruatis acus obliquitatibus $\mathfrak{A}''$ et $\mathfrak{B}''$ binis indicis poſitionibus quibuscunque $\mathfrak{a}''$ et $\mathfrak{b}''$ reſpondentibus colligantur valores

$$- m \text{ ſin. } \gamma + n'' \text{ ſin. } \alpha = P''$$

$$\text{et } m \text{ coſ. } \gamma + n'' \text{ coſ. } \alpha = Q''$$

quibus inuentis pro tali acus ſtatu magnetico generaliter erit ſin. $(\eta - \vartheta) = Q''$ ſin. $\vartheta - P''$ coſ. ϑ.

Cum

Cum igitur casu $\vartheta = \alpha$, in omnibus hisce tribus casibus sin. $(\eta - \vartheta)$ vnum eundemque valorem habeat (§. 4.): patet, fore

$$\text{I)}\ Q \sin.\alpha - P \cos.\alpha = Q' \sin.\alpha - P' \cos.\alpha.$$
$$\text{II)}\ Q' \sin.\alpha - P' \cos.\alpha = Q'' \sin.\alpha - P'' \cos.\alpha.$$
$$\text{III)}\ Q \sin.\alpha - P \cos.\alpha = Q'' \sin.\alpha - P'' \cos.\alpha;$$

ex quibus aequationibus pro determinanda vera inclinatione magnetica concluditur.

$$\text{I. tang.}\ \alpha = \frac{P - P'}{Q - Q'}.$$
$$\text{II. tang}\ \alpha = \frac{P' - P''}{Q' - Q''}.$$
$$\text{III. tang.}\ \alpha = \frac{P - P''}{Q - Q''}.$$

quam methodum iam sequenti exemplo illustrabimus.

§. 6. Mense Nouembri anni 1778 acu inclinatoria *Bernoulliana* in ipso meridiano magnetico omni, qua potui, cura sequentes obseruationes institui:

1.) Acu valide magnetica

$$\eta = 0°;\ \vartheta = 19°\ 15' = \mathfrak{A}$$
$$\eta = 180°;\ \vartheta = 156°\ 30' = \mathfrak{B}$$

hinc cum sit

$$\text{tang.}\ \mathfrak{A} = \frac{P}{1 + Q}\ \text{et tang.}\ \mathfrak{B} = \frac{P}{-1 + Q},$$

colligitur

$$P = \frac{2 \sin.\mathfrak{A} \sin.\mathfrak{B}}{\sin.(\mathfrak{B} - \mathfrak{A})} = 0,38734\ \text{et}$$
$$Q = \frac{\sin.(\mathfrak{B} + \mathfrak{A})}{\sin.(\mathfrak{B} - \mathfrak{A})} = 0,10917.$$

2.) Acus vi magnetica notabiliter imminuta

$$\eta = 0°;\ \vartheta = 6°\ 0' = \mathfrak{A}'$$
$$\eta = 180°;\ \vartheta = 173°\ 45' = \mathfrak{B}'$$

vnde ſimili modo colligitur

$$P' = 0,10726 \text{ et } Q' = 0,02056.$$

3.) Magnetismo acus inuerſo

$$\eta = 0°;\ \vartheta = -\ 19°\ 10' = \mathfrak{A}''$$
$$\eta = 180°;\ \vartheta = 195°\ 35' = \mathfrak{B}''$$

hinque

$$P'' = -0,30947 \text{ et } Q'' = -0,10965,$$

ex quibus iam valoribus concluditur

$$\text{I. tang. } \alpha = \frac{P - P'}{Q - Q'} = 3,1608;\ \alpha = 72°\ 26'.$$
$$\text{II. tang. } \alpha = \frac{P' - P''}{Q' - Q''} = 3,2004;\ \alpha = 72°\ 38'$$
$$\text{III. tang. } \alpha = \frac{P - P''}{Q - Q''} = 3,1844;\ \alpha = 72°\ 34'$$

quae determinationes licet propemodum quarta gradus parte adhuc inter ſe diſcrepent: maior tamen conſenſus ſperari non poteſt, quam diu in ipſis obſeruationibus obliquitatum acus vltra praeciſionem totidem minutorum certi eſſe non poſſumus, cui defectui aliter occurri poſſe non videtur, niſi applicando acui inclinatoriae diuiſionem Nonnianam, aut diviſioni limbi lineas transuerſales, in diuiſionibus quadrantum aſtronomicorum cognitas. Quo tamen de methodi huius gradu praeciſionis melius iudicari queat: eodem tempore inclinationem magneticam etiam ea methodo determinaui, quam in diſſertatione ſupra allegata Cel. *Eulerus* commendat, et qua etiam alias vſus ſum (conf. Nou. Comm. T. XIX. p. 543). In hac methodo praeter ſuperiores obſeruationes in auxilium adhuc vocanda eſt tertia, quae acu ſuper meridiano magnetico conuerſa inſtituitur. Obſeruationes igitur ſunt ſequentes:

Acu

	Acu valide magnetica.	Magnetismo inuerſo.
$\omega = 0^\circ;\ \eta = 0^\circ$	$\vartheta = 19^\circ\, 15' = \mathfrak{A}$	$\vartheta = -19^\circ\, 10' = \mathfrak{A}''$
$\omega = 0^\circ;\ \eta = 180^\circ$	$\vartheta = 156^\circ\, 30' = \mathfrak{B}$	$\vartheta = 195^\circ\, 35' = \mathfrak{B}''$
$\omega = 180^\circ;\ \eta = 0^\circ$	$\vartheta = 24^\circ\, 10' = \mathfrak{C}$	$\vartheta = -16^\circ\, 0' = \mathfrak{C}''$

Cum igitur poſito

$$m \operatorname{coſ.} \gamma - n \operatorname{coſ.} \alpha = R \text{ et } m \operatorname{coſ.} \gamma - n'' \operatorname{coſ.} \alpha = R''$$

ob $\omega = 180^\circ$ habeatur

$$\operatorname{tang.} \mathfrak{C} = \frac{P}{1 + R} \text{ et } \operatorname{tang.} \mathfrak{C}'' = \frac{P}{1 + R''},$$

hinc ob $P = 0,38734$, concluditur

$R = -0,13591$ et $R'' = 0,07711$, vnde ob

$$m \operatorname{coſ.} \gamma + n \operatorname{coſ.} \alpha = Q = 0,10917 \text{ et}$$

$$m \operatorname{coſ.} \gamma + n'' \operatorname{coſ.} \alpha = Q'' = -0,10965$$

habetur

$$m \operatorname{coſ.} \gamma = \frac{Q + R}{2} = -0,01337,$$

atque pro ſtatu magnetiſmi inuerſi

$$m \operatorname{coſ.} \gamma = \frac{Q'' + R''}{2} = -0,01627;$$

qui duo valores cum iidem prodire debuiſſent: ſumto medio ſtatuamus $m \operatorname{coſ.} \gamma = -0,01482$; adeoque $m = -\frac{0,01482}{\operatorname{coſ.} \gamma}$.
Simili modo erit

$$n \operatorname{coſ.} \alpha = \frac{Q - R}{2} = 0,12254 \text{ et}$$

$$n'' \operatorname{coſ.} \alpha = \frac{Q'' - R''}{2} = -0,09338; \text{ adeoque}$$

$$n = \frac{0,12254}{\operatorname{coſ.} \alpha} \text{ et } n'' = -\frac{0,09338}{\operatorname{coſ.} \alpha},$$

quibus valoribus in aequationibus

$$-m \sin.\gamma + n \sin.\alpha = P = 0,38734 \text{ et}$$
$$-m \sin.\gamma + n'' \sin.\alpha = P' = -0,30947$$

ſubſtitutis habetur

$$0,01482 \text{ tang } \gamma + 0,12254 \text{ tang. } \alpha = 0,38734 \text{ et}$$
$$0,01482 \text{ tang. } \gamma - 0,09338. \text{ tang. } \alpha = -0,30947$$

vnde concluditur tang. $\alpha = 3,2272$ adeoque $\alpha = 72° 47'$. Vnde ſumto inter omnes determinationes praecedentes medio habetur Petropoli exeunte anno 1778 vera inclinatio magnetica 72° 36'. Ceterum comparando vtramque methodum patet, priorem, quam hic expoſui, ſub pari praeciſionis gradu prae altera id commodi habere, quod omnes obſeruationes in ea neceſſariae in meridiano magnetico inſtituantur, neque, vt in altera, opus ſit, acum a ſitu ſuo quoad azimutum dimoueri; quo accedit, vt, annotante ipſo Cel. *Eulero* (diſſ. alleg. §. 62) methodus ab ipſo propoſita adhiberi non poſſit, ſi angulus γ fuerit $= 90°$, cum ea, quam hic expoſui, vniuerſaliter ſuccedat, qualemcunque demum valorem iſte angulus habuerit.

§. 7. Licet hiſce methodis vera inclinatio magnetica exacte definiri poſſit absque eo, vt centrum grauitatis acus cum eius axe coincidere neceſſe ſit: tamen euidens eſt, non ſolum acum eo fore perfectiorem, ſed etiam aliis inclinationis magneticae phaenomenis detegendis aptiorem, quo propius centrum eius grauitatis ad eius axem reducere liceat; id, quod ſequente ſimplici apparatu acui adiungendo effici poſſe puto. Super dorſo ſu-
Fig. 3. periori acus circa eius medium figantur duae laminulae orichalceae A et B, foraminibus cochleatis pertuſae, per quae transeat filum orichalceum axi acus longitudinali paral-

parallelum C D vtrinque in capitula grassiora C et D terminatum; cuius igitur motu centrum grauitatis acus in directione, acus longitudini parallela, vel dextrorsum vel sinistrorsum promoueri poterit. In vtroque porro acus dorso praecise supra et infra axem infigantur acui tenues cochleae orichalceae itidem capitulis grauiusculis instructae E et F, ad acus longitudinem normales, quarum ope centrum grauitatis eius attolli vel deprimi poterit. (*)

Quodsi iam inclinatio magnetica superioribus methodis omni, qua fieri potest, praecisione fuerit definita: dematur index orichalceus, O I (fig. 1.) et cochlearum modo descriptarum combinato auxilio effici poterit, vt acus inclinatoria 1) in meridiano magnetico ipsam illam inclinationem modo inuentam indicet et 2) in plano ad meridianum magneticum normali siue aequatore magnetico constituta situm perfecte verticalem teneat; quod si fuerit obtentum; certum est, centrum grauitatis acus exactissime ad axem esse reductum; cum enim index orichalceus demtus sit, erit $M = 0$; (§. 3) et cum acus in meridiano magnetico veram indicet inclinationem magneticam, ob $\omega = 0$ erit

$$\text{tang. } \alpha = \frac{-A g \text{ sin } \gamma + V k \text{ sin. } \alpha}{A g \text{ cos. } \gamma + V k \text{ cos. } \alpha}$$

vnde concluditur $A g$ sin. $(\alpha + \gamma) = 0$. Cum porro acus in aequatore magnetico adeoque casu $\omega = 90°$ situm teneat verticalem, erit

$$\frac{-A g \text{ sin. } \gamma + V k \text{ sin. } \alpha}{A g. \text{ cos. } \gamma.} = \text{tang. } 90° = \infty$$

adeoque $A g$. cos. $\gamma = 0$; quae duae aequationes

A g.

(*) Similem apparatum etiam ab Ill. *L. Eulero*, sed alium in finem, fuisse propositum, videre licet in eius diss. de obseruatione inclinationis magn. pag. 93.

$$A\, g.\ \text{cof.}\ \gamma = 0 \text{ et } A\, g.\ \text{fin.}\ (\alpha + \gamma) = 0$$

locum aliter habere non poſſunt, niſi fuerit $g = 0$, ſiue centri grauitatis acus ab eius axe diſtantia nulla; id quod etiam inde dignoſci poterit, ſi in quouis azimuto magnetico ω obliquitas acus $= u$ talis fuerit, vt ſit tang. $u = \frac{\text{tang.}\ \alpha}{\text{cof.}\ \omega}$. Si, hoc obtento, indicem orichalceum reponi placeat, generaliter erit

$$\text{tang.}\ \vartheta = \frac{M\, d\ \text{fin.}\ \eta + V\, k\ \text{fin.}\ \alpha}{M\, a\ \text{cof.}\ \eta + V\, k\ \text{cof.}\ \alpha\ \text{cof.}\ \omega}$$

adeoque in ipſo meridiano magnetico ea acus obliquitas, quae reſpondenti ſuae indicis poſitioni aequalis eſt, vera erit inclinatio magnetica.

Ceterum acus inclinatoria, ad hunc perfectionis gradum euecta, ad obſeruandas, ſi quae ſint, inclinationis magneticae variationes diurnas vel menſtruas, vel ab electricitate atmoſphaerae aurorisue borealibus atque aliis circumſtantiis phyſicis pendentes demum idonea videtur.

NOVUM

NOVUM HYGROMETRI GENUS DESCRIPTUM

Auctore

P. INOCHODZOW.

Refractionem terrestrem, in Libellatione locorum summopere necessariam, diuersis eiusdem diei horis notabiliter variari; atque hanc variationem non vnice a calore et pressione aëris, sed partim a diuerso Solis situ respectu obiecti, cuius altitudo metitur, et maxime a diuersa quantitate vaporum, in aëre natantium pendere, multae eaeque indubiae docent obseruationes. Aër enim inferior fit vel humidior vel siccior, altitudine Barometri saepe inuariata: Mane ac vesperi copiosiores plerumque vapores haerere circa horizontem suspensos, vnde et refractionem radiorum maiorem esse experientia testatur. Optandum igitur est, vt obseruationibus Thermometricis ac Barometricis associentur etiam Hygrometricae, quibus incrementa et decrementa aërei humoris mensurari, atque in calculum refractionis introduci possint.

Construendis Hygrometris materiam praebent omnia corpora, quae humore ex aëre recepto mutationem aut in magnitudine, aut in contorsione et reuolutione, aut denique in pondere ſubeunt. Innumera ſunt eiusmodi corpora, vti ſalia omnis generis, oleum vitrioli, charta, pergamenum, corium ouillum, funes cannabini, chordae ex inteſtinis animalium contortae, ſpongia, cotoneum, lana, asſerculi abietini, ſpica ariſtae etc., ex quibus diuerſimode confici ſolent Hygrometra. Aſt magna adhuc imperfectione laborant haec inſtrumenta, neque ſunt durabilia; ſed ſuccedente tempore effectu ſuo orbantur: quam ob rem obſeruationes poſteriores cum anterioribus comparari tuto nequeunt. Deeſt praeterea certa ac determinata menſura, ad quam ſtatus atmoſphaerae, ſingulis fere momentis variabilis, referri poſſit: pleraque enim Hygrometra indicant gradus humiditatis pro arbitrio obſeruantis aſſumtos.

Omnes Hygrometrorum ſpecies, eorumque defectus ſigillatim exponere, noſtri non eſt propoſiti; ſed his modo ac figura diuerſis, nouum, nulli antea inuentorum (*) ſecundum, addere lubet; praeſertim cum hodie obſeruationum meteorologicarum frequens ſit vſus et magna conſideratio habeatur.

Dum in vrbe Dmitriewſk obſeruationibus aſtronomicis et Geodeticis vacaremus, inuenimus ibi in dextra Wolgae ripa, prope oſtium riui Camyſchenkae, lapidem ſciſſilem argillaceum in magna copia reperiundum, qui humorem euidenter recipit, eumque poſtea remittit, imo digitis ſudore humidis et praecipue linguae ſiccus adglutinatur. Inſtitutis cum hoc lapide experimentis, ponderando illum libra tenui, qua pharmacopolae vti ſolent, ſed ad com-

(*) Hygrometrum Dni. *de Luc* ex ſolo nomine tantum nobis notum.

commodiorem vſum a b. *Lowitzio* ſingulari modo conſtructa, didicimus lapidem memoratum exiſtente aëris humiditate ponderoſiorem, decreſcente vero illa leuiorem eſſe, atque adeo vice Hygrometri fungi poſſe.

Vt autem viciſſitudines atmoſphaerae ad certam menſuram reuocentur, duos, prouti in Thermometris, terminos, maximae ſcilicet ſiccitatis et humiditatis, ſequentem in modum determinauimus.

Electa et noſtro vſui apta, dicti lapidis fruſta ſcindimus in laminas tenues, et conciliata illis figura circulari, terebamus vnum diſcum ſupra alterum, principio mediante arena ſcriptoria et aqua, denique ſola aqua vltimam inducebamus polituram; obſeruando vt eadem vbiuis, quousque licet maneat craſſities; quod machina huic ſcopo conuenienti facilius, citius et accuratius, quam nudis manibus, vti nos fecimus, obtineri poteſt.

Gradum humiditatis maximae reperimus detinendo lapidem, dicto modo praeparatum ſub aqua, donec ea plene ſaturetur; tum repetito ſaepius diuerſis temporibus experimento, lapidem ſemel aqua impraegnatum conſtans habere pondus, et rariſſime niſi vnico grano diſcrepare, deprehendimus. Tempus vero minimum, quo eiusmodi lapis plene ſaturatur, exacte determinare non licet; ab initio enim plus, deinde minus imbibit; ſufficit ſi per aliquot horas ſub aqua detineatur. Lapis ex aqua extractus, antequam librae applicetur, linteolo leniter abſtergendus eſt, vt ſuperflua tollatur aqua.

 Alte-

Alterum terminum, ſummae ſcilicet ſiccitatis, inuenimus exponendo lapidem igni ad decem circiter minuta prima, et eximendo illum forcipe ponderauimus excandeſcentem. Lapidem igni paulatim admouere neceſſum eſt; alias enim cum fragore diſrumpitur; et vt ponderatio cito abſoluatur, libra cum ſacomate aliquantum leuiori ſit ad manus. Hoc etiam experimentum bis et ter cum nonnullis lapidibus repetiimus, ac ſemper pondus lapidis non niſi vno, vel ſesqui grano, quem in igne perdit, minui deprehendimus.

Poſt candefactionem immerſimus iterum lapidem in aquam, vt denuo ſummum humiditatis gradum haberemus, atque obſeruauimus lapidem eandem prope quantitatem aquae recipere, ac ſi non eſſet ignitus, et non niſi vno, vel ſesqui grano, vt antea monuimus, differre.

Hoc modo notatis in vtroque experimento ponderibus lapidis ex igne et aqua poſtremum exemti, habetur certa menſura, ſeu ſcala, ad quam humorem in aëre latentem referre licet: Humiditas enim aëris definiri poteſt ex ratione denſitatis vaporum ad denſitatem aquae.

Sit pondus lapidis ex aqua extractum $= P$
et ex igne exemtum $= \pi$
pondus quodam tempore obſeruatum $= Q$
et humiditas aëris huic obſeruationi reſpondens $= H$
erit $H = \frac{Q - \pi}{P - \pi}$; vel ponendo $P - \pi = M$ erit

$$H = \frac{Q - \pi}{M} = \frac{1}{M} Q - \frac{\pi}{M};$$

vbi $\frac{1}{M}$ et $\frac{\pi}{M}$ ſunt termini conſtantes. Sit porro pondus eius-

eiusdem lapidis alio tempore obſeruatum $= q$, et humiditas pro hac obſeruatione $= h$

$$\text{erit } h = \frac{q - \pi}{M}, \text{ et}$$

$$H : h = Q - \pi : q - \pi : \text{ hoc eſt,}$$

humiditates ſunt vti exceſſus ponderum lapidis ſupra pondus eiusdem ex igne depromti.

Praeter indicatos terminos aſſignari poſſunt ex ipſis obſeruationibus duo alii, ſiccitatis nempe aeſtiuae et humiditatis autumnalis, vel hybernae, indeque media aëris conſtitutio concludi, quae etiam habetur in conclaui mediocriter tepefacto. His notatis adnecti poteſt ſcalae hygrometricae, prout in Barometris fieri ſolet, tabella, oſtendens variam coeli temperiem ſiccam et humidam.

Non acquieuimus primis tentaminibus in Dmitriewsk habitis, quorum annotationes iniuria temporis perierunt, reduces Petropolin adportauimus nobiscum nonnullos eiusmodi lapides rudes, cum quibus hic denuo experimenta inſtituimus, atque diuturnitate temporis rem comprobare voluimus. Operam inprimis dedimus, vt plures capiamus obſeruationes, ex quibus ſequentia deriuauimus.

1. Quo diſcus lapidis maior, eo melius aëris mutationes dignoſci poſſunt.

2. Quo tenuior, eo ad praeſtandum Hygrometrum aptior; ob craſſitiem enim minus ſenſibilis eſt, nec cito exſiccatur.

3. Lapides hos per quatuor annos mutationem non

 ſu-

ſubiiſſe; quod quolibet tempore, mergendo illos in aquam, et poſtea ponderando, experiri licet.

4. Vt diuerſa Hygrometra ſint concordantia, eandem exacte magnitudinem et craſſitiem habeant, ſimulque pondera ipſorum, a primo initio ex aqua extractorum, ſint aequalia neceſſe eſt; quod atterendo alterutrum lapidem ſupra tertium haud difficulter praeſtare licet. Non poſſumus tamen diffiteri, exiguam diſcrepantiam inter nonnullos hosce lapides deprehendi; dum ſcilicet ex igne eximuntur, non idem accurate pondus habere; ſed granis duobus vel tribus differre; quod ab imperfecta ipſorum aequalitate, et forſan ipſa denſitate prouenire, nullum eſt dubium. Nihilo minus effecimus duos lapides quorum vnus ex igne exemtus ponderabat 126, 5 grana, alter vero 126; ille aqua imbutus grauis erat 179 granorum et hic $178\frac{1}{2}$; ante candefactionem vero vterque 180 grana ponderabat. Inſtitutis per octo menſes quotidie obſeruationibus, differentia inter illos nunquam ſesqui granum ſuperabat. Quod ſi igitur machina idonea et manus exercitati artificis adhibeatur, eiusmodi Hygrometra concordantia confici poſſe non dubitamus.

5. Cum lapidibus diuerſae magnitudinis, ſed eiusdem pene craſſitiei, inſtituimus etiam obſeruationes, et reperimus omnes illos incrementa ac decrementa humiditatis ſimul indicare, et pondera humiditatem indicantia ſequi prope rationem diametrorum duplicatam. Hanc tamen Regulam non eſſe intelligen-

gendam in rigore mathematico ingenue fatemur; ob rationem enim supra allatam, cui addi potest, quod lapides diu expositi, (suspensique in arca, cuius fundus perforatus, vt aëri liber aditus pateat), ponderabantur vero in conclaui hyeme calefacto; hinc mensibus hybernis citius quam aestiuis anomaliae quaedam interdum obseruatae sunt. Huc etiam conferre aliquid potest attritus ipsius librae, ad succinctam cuius descriptionem nunc accedimus, quoniam illa in capiendis his experimentis et obseruationibus praecipuum constituit instrumentum.

Adhibuimus libram parmaceuticam, cuius scapum *a b* $3\frac{1}{2}$ pollicum Parisinorum longum. Sepositis lancibus applicuimus illarum loco duos vncos orichalceos, quorum ex altero *a* suspenditur lapis hygrometricus, ex altero vero *b* sacoma *p*, proxime aequale ponderi lapidis ex igne exemti. Vt autem incrementa ac decrementa humiditatis facile et expedite habeantur, neque pondusculà addere, aut demere et numerare opus sit, quod longum et taediosum sane foret, extremitati brachii, de qua pendet sacoma, adnexa est catenula *b e f* ex paruis, magnitudine et pondere aequalibus, fili argentei annulis confecta, cuius alterum extremum *e* affigitur superiori parti asserculi A B, sursum ac deorsum apte mobilis in sulco alius asserculi fixi E D, in quo ipsa libra ad clauum E *d* suspenditur. Vncus in *a* aliquantum grauior fit vnco in *b*, vt iugum nondum oneratum ea ex parte descendat, et ad obtinendum situm horizontalem, asserculum A B eo vsque promoueatur, donec pars catenulae sub *b* pendens, suppleat Tab. V. Fig. 1.

de-

defectum ponderis vnci *b*, et fit aequilibrium. Hoc in statu notentur in vtroque afferculo puncta, vel lineolae coincidentes *q*, *r*, vnde initium scalae sumendum erit. Deinde vnco *a* applicetur ponduſculum 10 granorum, et agatur deorſum afferculum A B eo vsque, donec iterum deſcendente catenula aequilibrium reſtituatur; hoc in ſitu ducatur in afferculo mobili lineola *s*, reſpondens notae *q* in afferculo fixo prius factae. Hoc modo obtinebitur in ſcala interuallum *r s* 10 granorum; quia vero annuli catenulae aequalis ponderis ſunt, diuidatur iſtud in 10 partes aequales, ſingula grana repraeſentantes, et continuata diuiſione per totam afferculi A B longitudinem adſcribantur ſurſum verſus numeri. Vel vnco *a* ſeorſim applicando ponduſcula, 20, 30, 40, 50 etc. granorum, notentur, vti dictum, interualla, et inter ſe comparentur; qua ratione examinare licebit, vtrum omnes catenulae annuli aequiponderantes ſint, an ſecus. Interuallum vndecim granorum diuidatur in 10 partes aequales, et hae transferantur in afferculum fixum C D, ad latus ſcalae, ſupra et infra notam *q* principio factam, numeri que deſuper apponantur. Hoc modo habebitur ſpecies ſic dicti Nonnii, et partes grani decimae, imo centeſimae aeſtimari poſſunt. Reliquum ex inſpectione figurae patet: Fig. 2. exhibet horizontalem ſectionem afferculorum, fixi *a b c d e f* et mobilis *b c d e f h i*, cuius pars extans *b c d e* ſulco prioris apte reſpondet. Vt ambo aſſercula arcte inter ſe cohaereant, applicatus eſt a tergo elater *k l m*.

Tab. V. Fig. 2.

Figura

Figura 3^{ia} repraeſentat libram, vt vocant, ocula- Tab. VI. riam ex orichalco conſtructam: iugum *a b* 9¼ pollicum Pariſinorum longum; axis iugi ex chalybe indurato fabrefactus, cuius acies bene laeuigatae intrant in foramina trutinae conuenientia *o o* fig. 5. Ad minuendum vero attritum et ad maiorem motus facilitatem curauimus, vt iugum ipſum circa axem ſit etiam volubile. Ne vero excidat axis, aut ad alterutrum trutinae latus declinetur, cochleae *f f* ab vtraque parte acies axis capitulis ſuis tangunt. Lingula acuminata *c d* 5 pollicum longa, cui ſubiacet index *g h*. Extremitati iugi *a* applicatur lapis hygrometricus et cochlea firmatur; alteri extremitati *b* adnectitur catenula, et ex vnco ſuſpenditur ſacoma *p*. Reliqua cum priori deſcriptione congruunt, hoc ſolo diſcrimine, quod catenula non fixo, ſed ope cochleae *i* paulisper mobili vnco *m* ſuſpenſa ſit; vt attolli deprimique poſſit, prout aequilibrium iugi et conuenientia initii ſcalae ac Nonnii poſtulat. Fig. 5. exhibet ſectionem librae verticalem per centrum eius tranſeuntem, vt partes ipſius a latere conſpiciantur. Quo catenula ſubtilior, eo ampliorem fore ſcalam per ſe patet: in ſcala huius librae interuallum 10 granorum occupat $2''. 10''', 7$, in ſcala vero prioris eidem interuallo reſpondent 4 pollices. Cum libra orichalcea, cui ante paucos dies vltima manus impoſita eſt, obſeruationes nondum fecimus; eiusque ſcalam et Nonnium etiam ex orichalco, mutationi non tam obnoxio, conficere in animo habemus.

Catenulam librae prius deſcriptae et diu per aeſtatem expoſitae, diebus calidiſſimis aliquantulum elongari exinde ſuſpicamur, quod adducta ſcala, quam interea immutatam praeſupponimus, ad primam *Nonnii* notam, iugum absque Hygrometro et Sacomate inclinatur ex parte *b* (fig. 1.) infra ſitum horizontalem. Hinc nota eſt occaſio ſequens problema reſoluendi.

Dato exceſſu longitudinis catenulae a calore extenſae, inuenire incrementum ponderis; vel hoc cognito illum determinare?

Sit catenula A B D C extremitati iugi in C adne-
Fig. 6. xa, et A B δ C eadem ab aeſtu Solis elongata; quia pars tantummodo C D vel C δ agit in iugum, reliqua A B D vel A B δ ab vnco ſuſtentatur: fingamus pondus catenulae A B D C vel A B δ C $=$ P, longitudinem A B D C vocemus L et exceſſum longitudinis l; adeoque longitudo catenulae extenſae erit L $+ l$, incrementum vero ponderis ſit $p =$ pond. C δ $-$ pond. C D.

$ABDC : P = CD : \text{pond. } CD$	$AB\delta C : P = C\delta : \text{pond. } C\delta$
$L : P = CD : \text{pond. } CD$	$L + l : P = C\delta : \text{pond. } C\delta$
$\text{pond. } CD = \frac{P.\,CD}{L}$	$\text{pond. } C\delta = \frac{P.\,C\delta}{L+l}$

vnde

$$p = \frac{P.\,C\delta}{L+l} - \frac{P.\,CD}{L};\ \text{ſed}$$

$$CD = \frac{L - AB}{2} \text{ et } C\delta = \frac{L + l - AB}{2},\ \text{erit}$$

$$p = \frac{P}{L+l}\,\frac{(L + l - AB)}{2} - \frac{P}{L}\,\frac{(L - AB)}{2}$$

et facta reductione

$$p = \frac{\frac{1}{2} P\, l\, AB}{L\,(L+l)} \text{ atque } l = \frac{2\,L^2 p}{P.\,AB - 2\,L p}.$$

In

In ſequenti tabella ſpeciminis loco offertur conſpectus obſeruationum Hygrometricarum annis 1777 et 1778 Petropoli habitarum; vbi maxima et minima humiditas earumque differentiae quot menſibus exhibentur. Ad illas faciendas vſi ſumus lapide, cuius diameter erat $3''. 6\frac{1}{2}'''$, craſſities vero vix dimidiam lineam ſuperabat. Pondus huius lapidis ex igne exemti deprehenſum

- - - - -	199, 3 gran.
et ex aqua extracti - -	275, 3

Differentia igitur terminorum 76 granorum, quibus in ſcala reſpondent 30 pollices, et ſi placet cum gradibus commutari poſſunt.

Menſ.	H. max.	H. min.	Differ.	H. max	H. min.	Differ.
	1777			1778		
	Gran.	Gran.	Gran.	Gran.	Gran.	Gran.
Ianuar.	49, 6	30, 2	19, 4	53, 4	44, 2	9, 2
Febr.	51, 2	38, 4	12, 8	46, 6	17.	29, 6
Mart.	46.	13, 3	32, 7	46.	13.	33.
Apr.	39	10.	29.	38, 8	11.	27, 8
Mai	30, 8	9, 6	21, 2	36.	11, 3	24, 7
Iun.	44.	11.	33.	38.	10, 8	27, 2
Iul.	45, 7	12.	33, 8	39, 5	11, 4	28.
Aug.	46, 2	13, 8	32, 4	- - -	- - -	- - -
Sept.	53, 2	19.	34, 2	61, 2	30, 7	30, 5
Octob.	54 8	25, 3	29, 5	57, 6	38.	19, 6
* Nov.	55, 6	50, 3	5, 3	56, 4	38, 7	17, 7
* Dec.	56, 7	50.	6, 7	60, 6	50, 2	10, 4

Menſibus aſteriſco notatis, non ſingulis diebus obſeruationes conſignatae ſunt.

 Maxi-

Maxima omnium humiditas obſeruata 61, 2 gran.
et minima - - - - 9, 6
vnde differentia - - - - 51, 6
et media aëris conſtitutio reſpondet 35, 4 granis, quod parum differt a 38 gr. ipſo experimento detectis.

Vt ex variationibus Hygrometri mutationes Atmoſphaerae definiantur; notum debet eſſe, vtrum lapis humorem aëris proportionaliter recipit ac expellit; qua de re ſaepe quidem cogitabamus, votorum tamen noſtrorum finem nondum ſumus aſſecuti; obſeruationes Hygrometricae conferendae forent cum obſernationibus circa quantitatem pluuiae lapſae et euaporationis aquae, quas nobis facere non licuit. Omnem itaque ſcrupulum, qui in hac materia ſupereſt, alio reſeruamus tempori.

P H Y S I C A.

ANALYSIS CHEMICA
AGARICI FVGITIVI ET BOLETORVM BOVINI ATQVE IGNIARII,

Auctore

I. G. GEORGI.

Post examen Confervae, in Actis Academiae (Ann. MDCCLVIII. Part. I.) exhibitum, in Fungorum Species varias, circa Petropolin copiose provenientes inquirere coepi, e quibus hic praesertim seligo *Agaricum fugitiuum* a Cel. *Gleditsch* (Meth. Fungor. sp. 4.) sic appellatum, atque varietates *Boleti bouini* et *igniarii L.* ad arborum truncos excrescentes.

Agaricus fugitiuus, fimetorum praesertim tetra progenies, in insula *S. Basilii*, quae Petropoleos partem constituit, humida autumnali tempestate partim in ruderatis, post habitationum incendia passim relictis, partim circa fimi quisquiliarumque acervos, et in lignis putridis, modo subsolitarius, modo caespitatim, deni imo vigeni simul, pullulat. Pluvioso coelo periodum vegetationis, ab ortu usque ad computrescentiam, intra quatriduum, immo biduum absoluit; mutabili etiam tempestate non vltra sex

vel

vel octo dies durat, vnde fere oculis spectandum exhibet incrementum. In vegeto pulpa alba est, pereunti fuscescit et in ichorem nigrum paene tota diffluit. Per totum vegetationis stadium cadaueroso foetore offendit nares, ideoque licet acrioris veneni expers, neque ab animalibus comeditur, neque Insectis eorumque Laruis alimento est, eoque se pro examine nostro chemico et indagandis principiis animali vel vegetabili regno peculiaribus, praecipue commendat.

Collecti et in quocunque vase coaceruati Agarici fugitiui, intra diem, auctioreque calore intra paucas horas, in ichorem diffluunt nigricantem, aquosum. Membranacei quidquid non dissoluitur, mucosam exhibet faciem et siccatum nonam circiter, decimamue partem, ponderis recentium fungorum, exaequat.

Ichor dissolutione Agaricorum ortus, muccidus apparet, initio statim aëris bullas haud copiosas secernit, dein perstat iners, cadauerosum seruat odorem, gustu subdulcis est, sine acredine vlla, et in phialis angustis luci obuersus, pellucido bruneo est colore, qui chartas flaua tinctura imbuit. Post aliquot dies supernatat lympha flauescens, subsidet materia nigra. *Lympha* euaporata in extractum mucosum, insipidum vertitur, quod licet annuo spatio asseruatum. vestigia salis essentialis plane nulla exhibet. At *Sedimentum*, aqua ablutum et siccatum, in pulverem tenerrimum, aterrimum, levem, subinsipidum, mucorei odoris vertitur, cuius e duodecim libris Agaricorum vnciae duae cum semisse prodierunt. Isque puluis solutioni gummosae, cum tantillo Aluminis, intritus, atramentum,

mentum, chinenſis ſubaemulum, odoramentis gratius reddendum, praebet.

Puluis idem ſedimenti, flammae candelae inflatus, ſcintillatim uritur. Acidis vitrioli vel nitri neque ſoluitur, nec mutat colorem. In Lixiuio alcalino itidem color non magis, imo nec odor perit; aliquantulum tamen ſoluitur, quod per euaporationem colaturae flavum exhibet extractum.

Semuncia pulueris ſiccati Alcohole penitus extracta, tincturam dat flauam; huiusque euaporatione reſinam vegetabilem, quae lota ſcrupuli pondus habet.

Triginta ſex uncias ſucci per colliquationem Agaricorum nati, e cucurbita deſtillaui. Exiguo calore ſpumeſcebat continuo, donec dimidium fere humoris expuliſſem; tunc quieuit et auctiori calore tractari ſe paſſus eſt, vt dein e retorta vitrea, ſaepius mutatis excipulis, ad remanentiam carbonacei reſidui, deſtillari potuerit. Prodiit hac deſtillatione primum aqua limpida, quae reagentibus omnino nihil mutabatur; odorem primum ſeruabat putridum, vappidum, qui dein iam minus et minus notabilis fuit: in lingua velut lubricum ſenſum excitabat. Sic priores fuere nouendecim unciae; ſequentes tres aeque limpidae affuſo ſale tartari deliquato odorem emittebant volatilem. Poſtea phlegma ſenſim magis flauum habui, odorem empyreumaticum ſpargens; prodiit ſimul oleum empyreumaticum primum flauum, dein nigricans. Phlegma iſtud nouem unciarum pondus exaequauit; olei drachmae tres ſeparari poterant, fereque tantundem adhaerebat

 collo

collo retortae, ex parte aduſtum. Salis volatilis nihil apparuit.

A phlegmate color viridis in Syrupo violarum; et quod vltimum prodiit, cum acidis ſubefferueſcens, cupro viridem aeruginem inducit. Omne phlegma drachmis ſex Spiritus ſalis ſaturari potuit, amiſſo ſimul odore volatili, et remanente empyreumatico. Euaporatum deinde, reliquit drachmas duas magmatis ſalino-oleoſi, quod tritura cum alcali fixo, volatile ſpargit. Eodem phlegmate vrinoſo creta et Mercurius in acido nitri ſoluta, albo colore praecipitantur. Oleum quoque alcalino volatili principio abundat, eiusque odorem affuſis acidis amittit.

Reſiduum deſtillationis carbonaceum, ſpumoſum, empyreuma oluit, et uncias duas cum dimidia aequauit. Contritum et in aqua coctum omne, flaueſcenti illam colore tinxit; tinctura ad conſiſtentiam mellis (pond. unciae cum didragma) inſpiſſata, guſtum vix excitat, a reagentibus nihil mutatus, et per quatuor menſes adſeruata cryſtallos nullas generat.

Reſiduum a decoctione unciam et ſeptem drachmas pendet, nigricans et ne calcinatione quidem dealbandum. Cum nitri ſex drachmis mixtum in crucibulo detonuit viuide. Maſſa ſeptem drachmarum, lotura ad $2\frac{1}{2}$ drachmas rediit; Lixiuium, affuſo acido, terram vitreſcibilem albam proiecit. Reſiduum non ſolubile feruet cum acidis, ad inſtar terrae calcareae.

Vnciae

Vnciae triginta Agarici fugitiui fupra ignem citius exficcati ad tres uncias rediere; in crucibulo ignito ficcati fungi cum fumo, flammaque comburuntur, primum in carbonem fpumofum, continuato igne in nigricantes cineres, quorum pondus fuit drachmar. trium cum fcrupulo. Ex hoc refiduo alcalici fixi falis grana triginta fex educi potuere; iterumque igne tortum adhuc grana viginti quinque alcalini, aliquantum (vt etiam prius) muriatico fale inquinati edidit. Terra mortua indolis eft calcareae.

* * * * * * * * *

Complures Septembri menfe lectae varietates *Boleti*, quem *bouinum* appellat *Linneus*, in conclaui temperato afferuatae breui fcatebant vermibus albis, pollicaribus, qui parenchymatis magnam partem exedebant. Itaque felegi ex his Boletis, qui poft dies decem nulla infectorum veftigia prae fe ferebant, erantque maximam partem tenerioris aetatis.

Odor his erat terrenus, fubftantia alba, fubfibrofa, fere infipida. In aëre calidiori feptem partes octauas ponderis exficcatione amittebant, tenaces tunc facti. Recentium contritorum odor pungens exfurgit, raphani fubaemulus. Hoc modo refoluuntur in magma flauescens, mucilaginofum, cuius fuccus exprimi nequit, nifi aqua diluti. Conferuati etiam in vafe Boleti fenfim fponte diffluunt, muco magis pellucente, fed foetidiore. Addito calore, copiofior profluit mucus; attamen membranacea compages Boletorum feruat formam, fed eft mucofa pariter, et quia humidum aëris abforbere folet, non poteft exficcari, nifi calore. Mucus, qui fponte fecefsit, requie fit fubaquofus,

 lim-

limpidior, et odore caret. Coctura Boletorum in aqua efficitur extractum minus tenax, inodorum, mucosum.

Si mucus sponte natus ad melleam consistentiam euaporetur, speciem mucilaginis admodum lubricae induit, non vero glutinosus, et gustu subamarus est. Extractum eiusmodi, aeque ac decoctione paratum, ultra annum seruatur, absque conspicua concretione salina. Ad siccitatem calore redacta ambo, Gummi Cerasorum specie referunt, sed ab humore aëris denuo solent deliquescere.

Boleti recentes in aceto vini digesti, colorem effundunt saturate flauum. E tali tinctura prodit aliquantum extracti mucosi, maceratique Boleti euadunt tenaciores.

Recentes item, in Alcohole extractum largiuntur resinoso-vnctuosum; residuo admodum tenaci. Vncia siccatorum Boletorum cum Alcohole digesta praebet tincturam flauentem, e qua obtineri potest resina flauescens, amaricans, cuius elotae scrupuli duo prodeunt; (Boletus laricinus verae resinae dimidium sui ponderis largitur).

Boleti bouini recentes ex aqua destillati dant phlegma vappidi odoris, sine vllo Olei essentialis vestigio.

Sexdecim unciae eorundem lectissimorum et recentium e cucurbita vitrea caute destillatae, successiue praebuerunt:

a. Phlegma limpidum, fungosi odoris, sine empyreumate et salino principio, ad vncias vndecim.

b.

b. Phlegmatis flauescentis, empireumate volatili fragrantis Vnc. jß.; Exploratum hoc ſulphuris hepate per coctionem parato, nullam aciditatem prodit, neque ſolutionem cretae in acido nitri mutat. Syrupum violarum viridi mutat, et ab inſtillato Alcali deliquato odor magis volatilis inde exſurgit.

c. Phlegmatis obſcure flaui admodum empireumatici Vnciam I. cum drachmis II. In quo reagentia et odor ipſe volatilis principii maiorem abundantiam prodebant.

d. Simul cum hoc phlegmate prodiit Oleum primum flauum, dein fuscum, cuius tantummodo drachmae II. ſeparabiles erant, et tantundem fere retortae collo adhaeſerat Ab iſto oleo, phlegmate mixto Hepar ſulphuris, vt et Cretae ſolutio praecipitatur, quod ſimul acidi et alcali volatilis ſeu ammoniacalis principii indicium eſt.

Reſiduus a deſtillatione Carbo unius unciae, cum drachma et duobus ſcrupulis pondus habuit, forma Boletorum atque textura optime ſeruata, fibris etiam magis, quam in recenti textura, conſpicuis. Contrita et aqua elota ſalis muriatici grana decem exſtitere; alcali defuit. Simul cum ſale, extracti fuscescentis gr. X. prodiere.

Elixivata materia carbonacea in crucibulo uſta per bihorium drachmas duas cinerum nigricantium, adeoque non ab omni phlogiſto depuratorum reliquit, quae

 per

per efferuescentiam cum acidis calcaream indolem prodit, et aquam pauxillo alcalini fixi imbuit.

Boleti bouini ficcati, ad uncias duo et fex drachmas crucibulo ignito ingefti, diuturna cum flamma urebantur; carbo exftitit fpumeus, qui diuturniore uftione in cineres ex albis nigrisque particulis mixtos abit. Hi lixiviatione Alcali vegetabilis fcrupulos duos reddunt. Terra elota cum acidis feruet; denuo igne diuturno uftae ad drachmas tres cum dimidia pondus rediit, iterumque fcrupulum alcalini falis cum aliquo muriatici veftigio dedit. Superfuit tunc terra cinerascens, acidis fe praebens calcaream.

Boletus itaque bouinus elementa, demto exiguo Alcali volatilis, talia continet quae vel funt vegetabilibus propria, vel iisdem cum animalibus communia.

* * * * * * * * *

Boletus igniarius, *verficolor*, aliique in truncis arborum parafitici, humida tempeftate adeo prompte crescunt, vt obuios culmos, ftipulasque non eleuent fed obuoluant et includant. Sicco aëre contrahuntur valde, humido tumefcunt, et proportione humoris pondere et magnitudine augentur, hygrometricis ideo ufibus apti. Subftantiam contextam habent fibris parallelis, fpongiofo-elafticam, fere infipidam, vappidi odoris. Tempeftate quamuis ficciore in fylua collecti, in conclaui dimidium adhuc ponderis exficcatione amittunt.

Coctura in mera aqua prodit ex hisce Boletis extractum mucofum, parum fapidum. Addito Salis alcalici fixi

fixi pauxillo, aqua plus educit materiae. Qui remanent fibrosi panniculi leuissimi sunt, tusique in lanuginem quasi resoluuntur, quae fomitem praebet domestico vsui, chirurgis stypticas turundas.

Vnciae sexdecim Boletorum recentium, vividissimorum, e betulinis truncis lectorum, destillatione curiosius e Retorta vitrea instituta praebent:

Phlegma limpidum, insipidum, vappidum ad Uncias quinque cum dimidia.

Phlegma flavescens, empireumaticum neque acidae, nec alcalinae indolis, ad vncias duo cum dimidia.

Phlegmatis rufescentis, empyreuma valde olentis, oleoque eiusdem naturae primum flauente, dein fusco sociati uncias duo cum dimidia.

Atque hoc quidem cum Alcali fixo aliquantum fervet et ob oleum admixtum lactescit; sulphur idem ex Hepate sulphuris illico cum foetore deiicit, chartam succo heliotropii tinctam rubefacit, et omnia criteria spiritus lignorum sic dicti habet.

Oleum, quod separari potuit simile oleis lignorum, fuit drachmar. quinque.

In Carbone Fungorum forma perstiterat, et distinctae admodum fibrae conspectui se praebuerunt; pondus eius fuit unciar. trium cum drachmis sex.

Calcinatione diuturna e carbone fiunt cineres nigricantes, calcareae indolis.

Sex-

Sexdecim unciae Boletorum ex Betulis ſicciore aëre recenter lectorum, combuſtione in crucibulo ignito cinerum leuiſſimorum, coloris cinerei, ſex drachmas dederunt; e quibus lixivium Salis alcali fixi grana quinquaginta octo eduxit, ablutaque terra mortua, calcareae inſtar cum acidis ferbuit.

Adeoque Boleti arborei plane vegetabilem indolem probaſſe videntur.

DE

DE INCONSTANTIA FABRICAE CORPORIS HVMANI, DE ELIGENDISQVE AD EAM REPRAESENTANDAM EXEMPLARIBVS.

Auctore

C. F. WOLFF.

Mirum eſt, quam variis modis partes corporis humani, in vno atque in altero dum comparantur corpore, inter ſe diſſentiunt. Non ſolum in venis, earumque minoribus ramis, quorum varietas infinita atque indeterminabilis eſt, vel in truncis earum maioribus, qui haud multo illis conſtantiores eſſe ſolent; non ſolum in arteriis minoribus, maioribusue, quarum in ſummis truncis quos arcus aortae producit, variationes mirabiles exſtant, neque in neruis ſolis, eorumque in diſtributione, quarum partium omnium continuae atque perpetuae inconſtantiae nunquam anatomicorum oculos memoriamque fugere potuerunt, quaeque omnium in ore ſemper vna fuere quaerela communis; ſed etiam in oſſibus, in musculis et in ipſis visceribus, in hepate, ventriculo, in renibus, imo in nobiliſſimis corporis humani partibus, in corde atque in cerebro, adeo vsque ſe natura in varias diffundit formas, vt vix duo inueniantur corpora humana in quibus nobilia haec viſcera in omnibus ſuis partibus atque in proprietatibus ſuis, in figura, in ſitu, in proportione plane inter ſe conueniant, imo, quod magis mirum videri oportet, vt nulla in his visceribus particula ſit, quae non varia in variis corporibus inueniatur.

Non nego, conuenientias dari, easque perpetuas; non miras ſimilitudines nego, vbique in corpore humano obuias, et, niſi in ſingulis eius, certe in plurimis manifeſtas partibus. Quae quidem niſi eſſent, nullum, quod dici poſſet, corpus humanum, nulla aliorum animalium quae poſſent vocari, corpora darentur. At aliae iuxta illas conſtantiſſimas notas ſimul ſemper partibus inhaerent notae copioſae, quibus iſtae in ſingulis corporibus a ſe inuicem differunt; eaeque adeo inconſtantes cum conſtantibus ſunt commixtae atque confuſae, vt vix quemquam mortalium, qui eas diſtinguere atque definire poſſit, fore exiſtimem.

Sunt primum ſubtiliores illae differentiae, quae ipſae facile quidem in obuiis partibus comparatis percipiuntur, difficilius autem multo deſcribuntur aut explicantur; quae vel in viſcerum ipſorum, vel in partium, quibus illa conſtant, minorum diuerſis figuris et proportionibus inter ſe mutuo, vel etiam in ſitu harum partium, plerumque et ſemper fere conſiſtere ſolent. Veluti vultus hominum inter ſe differunt, in quibus quot homines tot primo obſervas intuitu vultus diuerſos; quos facile cognoscas, difficile vero, aut nunquam, definias; et qui, innumerabiles licet, in ſolis tamen perpaucarum partium diuerſis figuris et proportionibus conſiſtunt; ita internis ſimiliter corporis noſtri partibus et viſceribus characteres eiusmodi natura impreſſit, quibus ſingulae ſingulorum hominum partes et viſcera ſe a ſui ſimilibus diſtinguunt.

Dein-

Deinde vero alterum, idque praecipuum, eſt genus differentiarum, quo partes, quae viſcera, aut alias corporis noſtri maiores partes efficiunt, vel nouae et peculiares occurrunt, vel ſolitae contra deficiunt, vel aliae pro aliis ſubſtituuntur, vel ita tandem ſolitae alterantur et transformantur, vt pro iisdem ſolitis cognoſci non poſſint, ſed pro nouis et peculiaribus habeantur. Exempla horum omnium in plicis veſiculae felleae, in vaginae vteri plicis carunculisque myrtiformibus, in columnis carneis cordis, in papillis quibus valvulae tenentur, in valvula venae coronariae magnae, in ipſa *Euſtachii* válvula, praenobili nobiliſſimi viſceris particula, imprimis in arteriis, vénas enim omitto, et in neruis copioſa occurrunt. Hae eius ſunt indolis differentiae, vt primo intuitu appareant non modo, ſed protinus quoque in quonam conſiſtant, perſpiciantur. Vtque externa corporis humani figura innumeris modis ſimplicior eſt, quam fabrica artificioſiſſima interna; nunquam quoque accidit, vt vel in vultu, vel in caeteris partibus externis, ſi aliquos caſus rariſſimos et monſtra excipias, huiusmodi differentiae appareant. Nunquam in vultu ne minima quidem, quae ad vultum pertineat, particula deficere, nunquam inſolita in vultu vel ſuperflua obſeruata eſt. Nunquam cilia defuerunt aut ſupercilia, nunquam caruncula lacrymalis. Vidi carunculam eam abeſſe in aliquo monſtro, et ipſe hic oculus monſtroſus ea erat natura, vt priuatum caruncula eſſe oporteret, vtque, ſi exſtitiſſet haec particula, hoc ipſum magis monſtroſum in eo oculo et contra naturam fuiſſet.

Non melius autem, neque omnino alia ratione, veritas eorum, quae aſſerui, plane apparet, quam ſi vel partes duorum pluriumue corporum ipſae, vel icones earum minutius et curatius expreſſae, coram inter ſe comparantur. Si vel centies anatomicus aliquam in diuerſis corporibus partem viderit; nonniſi complexum tamen eorum tantummodo ad nouum, quod denuo coram ſit, exemplum adferet in ſua idea, in quibus viſae prius partes inter ſe conuenerant. Elapſa omnia erunt in quibus diſtulerant. Imo, quod magis notatu dignum mihi eſſe videtur, ne in ipſo praeſenti exemplo quidem, niſi id, quod inueteratae ideae iam inhaeret, percipere poterit. Caecus erit ad omnia quae huic ideae contraria ſunt, luſcus ad ea, quae ab illa recedunt, niſi de altero differentiarum genere fuerint, quae ſenſus valdopere feriant. Imo quod plane miraculo proximum eſt, oculatiſſimus ſaepe in iis videndis erit, quae nuſpiam in ſuo praeſenti, quod conſiderat, obiecto exiſtunt. Sed iſtud imprimis huc pertinet, quod dixi, aegrius nos ea videre in aliquo praeſenti obiecto, in quibus ab inueterata noſtra idea illud recedit, niſi quidem vehementer oculos ferirent.

Si Ill. *Huberus*, poſtquam egregiam ſuam de vagina vteri iconem ediderat, in eo hanc vaginam exemplo denuo eſſet intuitus, quod poſtea *Hallerus* pingi curauit, parum puto crediediſſet abeſſe, quin plane nouum hoc *Halleri* exemplum ſuo, quod pinxerat prius, ſit ſimile. At nunc comparentur inter ſe coram binae exemplorum iſtorum icones. Quanta in ſingulis fere particulis differentia, in nymphis, in clitoride, earumque inter ſe ſitu et proportione, in ſinibus veſtibuli, in lacunis multo apud *Hallerum* copioſioribus, in orificio vrethrae eiusque corpore glandoſo, in carunculis myrthiformibus, ſeu valuulis

Halleri

Halleri et maxime omnium in rugis vaginae, quae vix quidquam inter ſe ſimile in binis iconibus habent. Copia differunt plurimum et ſitu et diſpoſitione et magnitudine et figura, quae longae transuerſae reticulatae in vna, diſperſae vel cogregatae et papillares in altera obſeruantur. Atque haec quidem exemplaria vaginarum non ipſa ea ex pluribus ſunt, quae maxime inter ſe differrent.

In atriis cordis, imprimis in dextro, et in ventriculis quoque, quam mirae inueniuntur varietates, ſi plurium hominum corda accuratius delineantur, iconesque inter ſe comparantur. Duas modo eiusmodi icones coram habeo, quarum alteram in diſſertatione de orificio venae coronariae magnae publici iuris feci, alteram mihi conſeruo. At iſtae iam ſufficiunt ad demonſtrandam inſignem in fabrica cordis differentiam. Largior et fere vndulata valuula *Euſtachii* in ea eſt icone, quam edidi, anguſta extenſa acuta in altera; anguſtiſſimam et vix vllam in tertio memini me vidiſſe corde quod non pinxi. Fibrillis aliquot ſubreticulatis extremitas poſterior in priori icone terminatur, anterior, a limbo foueae pro orificio venae coronariae magnae diſtincta, extremo fine tandem ad latus huius orificii ſe applicat. In altera icone extremitas poſterior ſimplex et tenuiſſima eſt, anterior tota limbo foueae adhaeret, vel potius ipſa hunc limbum efficit, qui in corde priori peculiaris erat, et valuula ad baſin aliquid reticuli habet. Tota mirifice reticulata, qualem nunquam vidi, et qualem vix credo unquam in alio eſſe inuentam cadauere, in Halleri iconibus anatomicis exſtat.

Foſſa oualis ſolitam ſubrotundam figuram in ea,

 quam

quam edidi icone habet; triangularem fere in altera. Foraminula caeca, quae in citata differtatione notaui, annulum occupaut oualem in icone edita; in altera plurima illorum pars in fossa continetur.

Valuula orificii venae coronariae magnae pulchra tenuis membranula est in edita icone, fundo acuto dextrorsum, lato margine exciso mobili finisterius terminata; proinde pyramidalis fere figura; passim foraminulis notata. Crassa subcarnosa membrana est in icone altera et integerrima, figura fere cylindrica, formaque et habitu tam diuerso, vt vix eandem esse particulam intelligas. In alio corpore orificium venae coronariae magnae vltra Eustachii valuulam erat et nulla prorsus instructum valuula propria, defensum tamen a valuula *Eustachii* ipsa.

Paries dexterior auriculae dextrae columnis intus muscularibus cylindricis semper est repletissimus. Hac longitudinales et sibi mutuo parallelae sunt in altera icone, in altera, quam edidi, sunt arboris instar mire ramificatae. Vnus est truncus communis, medius, et caeteris crassior, qui partim vtrinque, partim superius ex apice suo, plurimas reliquas ramorum instar columnas producit.

In hac, quam mecum habeo, icone, valuula orificii venosi ventriculi dextri in tres, vt plerumque solet, irregulares figura portiones subdiuisa est integras; in edita, quae harum portionum posterior est, in duas porro diuisa est portiones minores, vt quatuor numerentur harum valuularum, quae tricuspidales vocantur: sinisterior, quae septo incumbit vna, alteraque anterior et duae posteriores.

fteriores. In illa icone papilla, quae filamenta fua in interftitium inter portionem anteriorem et pofteriorem inferit, magna longa craffa et robufta eft, multo gracilior minorque et debilior in hac quam edidi. Mediocris papilla eft quae interftitium inter portionem valuulae pofteriorem et finifteriorem filamentis fuis occupat in illa icone non edita; et duae funt minores, quae interftitia inter finiftram et pofteriores et inter pofteriores ipfas portiones tenent in edita. Denique tota portio finifterior, quae fepto incumbit, et interftitium inter eam et pofteriorem, fimplicibus filamentis fafciculatis in ea, quam edidi, icone tenetur. In altera egregia craffiufcula papilla fummo fepto infidet, quae filamenta fua ad illus valuulae partes mittit, et quam faepius etiam in aliis iam reperi corporibus.

Longum et taediofum effet notabiles recenfere differentias omnes, et labor infinitus fingula defcribere minutiora. Nulla particula eft, quae non aliter atque aliter in aliis fe habeat hominibus. Et ipfi embryones gallinacei, eorumque imprimis inuolucra, (hominis enim et animalium quoad varietates natura eadem eft) adeo non nunquam differunt, vt aliorum animalium embryones effe crederes, nifi ex ouo gallinaceo fcires effe petitos. Atque id eo magis, cum infignem tamen et inexfpectatam inter humanum embryonem menftruum et feptem dierum gallinaceum fimilitudinem in corpore et in extremitatum primordiis inuenerim; quo fieri non poffe putes, quin fumma etiam femper fimilitudo inter gallinaceos ipfos occurrat.

In tanta nunc rerum inconftantia, fi fabrica corporis

poris humani vel verbis ſit repraeſentanda, vel arte pictoria; quam normam tandem arbitrare, aut quam fabricam nobis potiſſimum eſſe pro norma eligendam? Eam quaſi vno ore hic omnes clamare audio, quae inter caeteras omnes frequentiſſima eſt. Quo quidem dicto, ſi tanquam regulam vniuerſalem illud intelligendum eſſe velis, vix quidquam a vero magis, vel a bono conſilio, alienum dici poſſe exiſtimo.

Primum *Albinus* iam, non ſatis eſſe, monuit, in conſtruendis iconibus fabricae corporis humani, vt ad naturam iſtae conſtruantur praeſentem; neceſſe eſſe, vt *pulchra* ad eam rem eligatur *natura*. Antequam immortales ſuas tabulas oſſium et muſculorum hominis ille edidiſſet, haud valde anatomicos de euitandis inconſtantiae erroribus ſollicitos fuiſſe videtur. Quodcunque cadauer, dummodo integra eſſet fabrica, nec laeſa effectibus morboſis, aptum eſſe videbatur ad repraeſentandam corporis noſtri ſtructuram, et icones, dummodo fidae eſſent, bonae iudicabantur. Hinc factum eſt, vt in optimis quoque iconibus, non nitor quidem ſculpturae, nec delineationis elegantia, nam id praecipuum erat, quod curabatur, et illud, in quo ſolo reprehenſionem ab critico *Albino* exſpectabant, ſed ipſa veritas iure meritoque ab eo deſideraretur. Quod quidem merito fieri poſſe nemini in mentem venerat; cum ad naturam praeſentem adeo vsque fideliter eſſent delineatae icones, vt ne fila quidem, quibus vaſa aut inteſtina erant ligata, neque acus delineatores obliti eſſent, quibus partes reclinatae fuerant affixae. Sed res plana eſt. Vt enim continuo natura variat; quo magis in icone accurate minutiſſima quaecuis ſunt expreſſa, eo in pro-

ximo

ximo quocum illam compares, cadauere inuenies facilius et copiosius structuram ab icone differre; et, si cum secundo eam, et cum tertio corpore comparaueris, semper alia et alia in icone videbuntur apparere vitia.

Albinus ergo primum et variabilem esse fabricam corporis humani monuit, et pulcherrimam docuit esse praeferendam iis, quae minus pulchrae in aliis exemplis inuenirentur. Vti nunc quaeuis in suo genere pulcherrima rariora quoque, haud frequentissima eadem, esse solent; *Albini* sententiam non eam fuisse patet, vt quae inter caeteras frequentissima, sed quae pulcherrima sit, fabrica eligatur; quamuis haec rarior etiam, immo rarissima sit.

Neque male *Albinus* meo quidem arbitratu docuit. Si figura externa hominis exemplaris causa sit repraesentanda, vel vultus humanus; nemo est, qui non pulcherrimam hominis figuram vultumue pulcherrimum praeferat; siquidem iste et deformibus melior, et verus tamen nihilominus vultus humanus vel figura humana est aeque ac illae, quae aliis continuo et aliis deformitatibus vel vitiis notantur. Similis plane, prorsusque eadem res est cum structura interna. Veluti homines mancos, curuos, gibbosos maleque proportionatos, veluti plumbeos vides et lapides et stipites, iterumque formosos et proportionis elegantia insignes; sic corda quoque cerebraque et hepata et reliqua viscera omnia nunc male conformata obseruantur, nunc figura et habitu proportioneque et interna structura pulcherrima; sic vasorum et neruorum systemata, ſic oſſium denique et muſculorum compages aut pulchra aut deformia inueniuntur.

Pulchra ergo deformibus et in externa corporis humani figura et in interna eius repraeſentanda fabrica praeferenda ſunt. Cuiusmodi repraeſentatio, niſi cum proximo quouis cadauere inciſo conuenit, docebit ſaltim, quomodo differens haec ſtructura comparata eſſe debeat, docebitque quid elegantiori in ea fabricae humanae ſit conforme, quid ab illa recedat. Et tabulae *Albinianae* muſculorum non natura, vt dicunt, praeſenti, ſeu praeſenti cadauere, ſed natura praeſens *Albinianis* corrigenda et aeſtimanda eſt tabulis.

Deinde Oſteologi, frequentiori procul dubio edocti vſu, multo quam ſplanchnologi et angiologi neurologique feliciores mihi eſſe videntur in eligendis exemplaribus ad demonſtrationes ſuas oſteologicas. Iſti non adeo vsque naturam, vel potius vocabulum *naturae*, venerantur, vt quaelibet oſſa, naturalia dummodo ſint, aeque apta eſſe cenſeant ad Oſteologiam docendam. Ea eligunt, in quibus notabilia oſſium quaecunque, apophyſes, proceſſus, eminentiae, tubercula, foſſae, ſulci, rimae, fiſſurae, cauitates quaelibet aut impreſſiones, foraminulaque ſingula non modo non deficiunt, ſed quam diſtinctiſſime quoque apparent.

Perfectiſſimam igitur illi quidem ſtructuram adhibent ad repraeſentandam fabricam corporis humani et ad formandam ſibi de hac fabrica ideam. Eaque omnino ab *Albini* pulcherrima ſtructura diuerſa eſſe videtur; ſiquidem longi-

longitudo proceſſuum et profunditas ſulcorum foſſarumque et tuberculorum magnitudo nihil ad pulchritudinem oſſis confert, quae, ſi quae eſt in aliquo oſſe, in figura potius oſſis totius et in proportione partium, quibus illud efficitur, conſiſtit.

Tantum abeſt autem, quin ſingula haec oſſium notabilia in ſingulis inueniantur oſſibus, vt in viginti potius exemplaribus vix vnum ſaepe reperiatur, quo omnia ſatis manifeſto demonſtrari queant, vtque modo non ſemper pluribus ſit opus exemplaribus ad alia atque alia demonſtranda. Sic igitur Oſteologorum perpectiſſima ſtructura non magis quam *Albini* pulcherrima et frequentiſſima ſimul ſed potius rariſſima eſt.

Huic *Albini* monito et vſui illi Oſteologorum tertium, idque primarium addendum eſt momentum, ad quod in eligendis exemplaribus ſit reſpiciendum. Vſus conſiderari debet eius partis, quae deſcribenda nobis aut pingenda eſt, et munus, quo ea fungitur. Quae fabrica inter caeteras variantes fabricas omnes quam maxime ad hunc vſum conducit, quaeque aptiſſima ad eum eſt et conuenientiſſima, ea etiamſi ſit rarior, eligenda eſt. Ea tanquam exemplar fabricae eſt conſideranda, cuius niſi natura et reliqua ſimilia reddidit corpora humana omnia, reddere tamen voluit; et tanquam fabrica, a qua dum fabricae corporum aliorum recedunt; eatenus vitioſae iſtae aut defectuoſae et mancae, aut imperfectae ſunt cenſendae.

In vesiculis felleis humanis nonnullis ad collum, vel etiam ad aliquam corporis partem postremam, colloque proximam, egregiae intus plicae reperiuntur transuersales, aut fere spirales, insigniter eminentes et marginibus acutis, quibus in cauitatem respiciunt, terminatae. In aliis nullae sunt eiusmodi plicae, aut, si quae sunt, paruae sunt et obtusae et rugae potius quam plicae. Vt vsus autem procul dubio aliquis est harum plicarum in remoranda atque in acuenda bile; patet in solis illis vesiculis, quae plicas habent maiores copiosioresque et eminentiores, veram esse structuram humanam; caeteras esse exemplaria defectuosa.

Sic valuula venae coronariae magnae in aliis cordibus latior reperitur largiorque et breuior; reperitur tenuior simul et foraminulis quoque rotundis pertusa, veluti in eo exemplo fuit, cuius iconem in citata de orificio dissertatione dedi. In aliis contra angustior et longior est et planior simul et crassior et integerrima; velut eam in ea icone cordis habeo, quod publici iuris non feci. Si animum aduertas ad vsum huius valuulae, quem minutius in illa dissertatione explicui, et qui in defendendo orificio contra sanguinem consistit auriculae, in latus canalis irruentem; multo perspicies aptiorem esse ad hunc vsum eam, quae angustior et longior, quaeque strictior et planior et crassior est ea, quae latior est breuiorque atque tenuior. Illa itaque vera norma est fabricae humanae. Ceterae, quo magis ab illa recedunt, quo sunt breuiores latioresque quoque magis accedunt ad figuram valvulae semilunaris; eo sunt magis vitiosae. Quam pinxi in in icone edita, ea postponenda igitur est varietati alteri; sed frequentior mihi tum illa esse videbatur.

Pulcherrima procul dubio aspectu est illa valuula *Eustachii*, quam *Hallerus* pingi curauit in iconibus suis anatomicis; quae tota reticulata atque cribrosa est. At quicunque vsus specialis sit valuulae *Eustachii*; nullam, facile vides, valuulam vllum vsum habere posse, quae penitus perforata sit atque cribrosa. Iuuat itaque procul dubio iconem habere pulcherrimam summa cum arte pictam et sculptam fabricae elegantissimae, tanquam alicuius, quae exstiterit, quaeque detur, varietatis; at vera structura non est, quam consulto natura fecerit.

His exemplis, quibus facile plura addere possem, patet, non semper naturam, neque in singulis corporibus, vbique omnino suum obtinere propositum finem; contingere nonnunquam vel caussis accidentalibus, quasi morbosis, vel debilitate virium formatricium, nutriciumque, vel impedimentis formationi oppositis, vel quibuscunque caussis aliis, vt fabrica struenda haud satis ex voto succedat; contingere contra, vt melius paululum in aliis, in aliis longe optime et mirifice succedat, quo plenum naturae consilium nobis quasi manifestetur. Tum vsu partis perspecto igitur, aut sine perspecto, in quem partem natura struxit, ea prae ceteris eligenda fabrica erit, qua quam penitissime et quam facillime is finis obtinetur.

Denique tamen et fieri posse videtur, vt ad frequentiam structurae sit respiciendum. Sunt partes, partiumque structurae, in quibus quid pulchrum imprimis,

 quidue

quidue perfectum aut vtile dicas ad aliquem finem, nescias, vbi varietas quaeuis aequum ad omnes illas laudes ius habere, nobis quidem, videtur. Inferius nunc ex aorta, nunc paulo superius, alibi ex arteria renali, arteria spermatica, oritur; neque quid magis horum conducat ad secretionem seminis, aut quid pulchrius sit caeteris, aut quid perfectius, apparet. Sic id ergo quod frequentius inuenisti, eligito.

Ita autem generatim de quatuor his fabricae humanae proprietatibus eligendis sentiendum esse arbitror; vt *pulchra* et *perfecta* structura in ossibus imprimis et neruis; ea, quae *aptior ad vsum*, potissimum in visceribus sit quaerenda atque prae caeteris eligenda.

In ossibus alia completa, distincta atque perfecta, incompleta alia, indistincta et obtusa esse, neminem fugit; neque latet, quae hominum corpora perfectiora ossa largiantur. Musculi similiter magni, distincti, torosi, robusti in aliis corporibus, in aliis parui, debiles, confusi et concreti inueniuntur. Sed pulchritudo quoque et ossibus et musculis est, iterumque deformitas sua. Sunt crassa et breuia extremitatum ossa in aliis hominibus; in aliis longiora et debiliora; elegantem in aliis tum inter crassitiem et longitudinem, tum respectu totius corporis proportionem vides. Sunt recta nimis alia, alia nimis curuata, et eum denique alia ductum habent, quo plane insignem membro, ex illis composito, pulchritudinem concilient. Peluis, iusto latior, in sexu potiori praesertim, femora et pedes, imprimis si breuia sunt, nimium a se inuicem vt distent, efficit, idemque brachiis vitium adfert iusto latior thorax.

thorax. Et thorax et peluis anguſtiores quoque iuſto in aliis inueniuntur; cuius poſterioris anguſtia in feminis praeſertim notabile corpori vitium infert. Verbo, vt ſceleto *Albiniano* nihil pulchrius videri poteſt, id ipſum, cum aliis comparatum, innumeras in iis indicabit deformitates, easque continuo alias et alias; vt contra comparatorum ſceletorum vitia detecta nouas continuo pulchritudines in *Albiniano* declarabunt. Similiterque cum muſculis comparatum eſt, quorum pulchritudines deformitatesque, quas corporis figurae externae conciliant, ipſi pictores, expertes omni anatomia, diſtinguere nouerunt. Et vel ſolae tabulae muſculorum *Albinianae*, cum proximo quouis corpore comparatae, innumera variarum deformitatum pulchritudinumque exempla oſtendunt.

Sed minus opus eſſe videtur in oſſibus et muſculis vt de ea, quae aptior ad vſum ſit, fabrica anatomicus ſit ſollicitus. Ab ortu, fibrarumque directione et inſertione, propria cuiuslibet muſculi functio pendet. Iam in ipſis his proprietatibus muſculi minus variant, et ſi quae reperiuntur aut repertae ſunt varietates, rariſſimae iſtae nec cunfundendae cum illis continuis ſunt, quae aliae continuo et aliae in ſingulis corporibus reperiuntur, et quarum quae eligenda potiſſimum ſit, neſcias. Similiterque cum oſſibus eſt comparatum, quae in iis, quae vſum concernunt, variare non ſolent.

Quae ratio pulchritudinis ſit in vaſis et neruis, dubium videri poſſet. Eſt autem profecto his partibus elegantia ſua quae quidem ob communem ſecandi methodum vitioſam, praeſertim in longis extremitatum neruis, haud ſatis ſolet obſeruari.

ſeruari. Plerumque, dum trunci neruorum, eorumque rami praeparantur, illi ab omni celluloſa quam nitidiſſime depurantur. Eſt, quaſi oculos laederet intolerabilis hinc inde neruo adhaerens celluloſa; nec prius quietus animus nobis redditur, quam omnis prouide ſit celluloſa remota. Tum etiam neque figuram recte, neque craſſitiem nerui, neque neruum noſtrum egregium ipſum, ſatis perſpicere atque contemplari poſſe nobis videmur, niſi liberatus a celluloſa penitus ſit. Praeterea et muſculi, neruo ſubiecti, expoliuntur, quod quidem eo magis eſt neceſſarium, cum ad ſurculos vsque minutiſſimos neruum noſtrum proſequimur. Sic omni vinculo ſoluti truncus et rami primarii ex ſedibus ſuis naturalibus plane auferuntur. Funium nunc inſtar extenſorum alii, alii laxorum ad modum, a membro, cui inhaerebant, remoti apparent. Quis ſitus fuerit nerui in ſingulis partibus ſuis? quae via, quam legerit? quis ductus, quo fuerit progreſſus? haec omnia deleta nunc ſunt, nec vnquam poterunt rurſus in hoc quidem corpore inueſtigari. Supereſt, vt albos tuos neruos eſſe videas et cylindricos, quemadmodum caeteri quoque ſunt nerui corporis humani omnes. Atque in ipſis illis proprietatibus deletis, maxime in ductu, quo neruus progreditur, ſumma nerui elegantia conſiſtit. Non mirum ergo eſt, ſi haec minus fuerit obſeruata.

Tantum abeſt autem, quin neruum, a principio, vt fieri ſolet, ad finem vsque ſolutum, in priſtinam poſſis reſtituere ſedem, vt potius, parte modo eius aliqua a vinculo ſoluta, totus iam perditus ſit ductus, totusque iam factus irreparabilis. In ſingulis punctulis enim neceſſe eſt vt ſedes habeatur nerui immota ad ductum eius verum,

ductus

ductusque elegantiam vel perſpiciendam atque cognoscendam, vel exprimendam. Neque poteſt ſoluendo neruum anatomicus, vel ſingulis pro nerui punctis puncta ſibi notare in musculis, vel partibus ſubiectis, vel vnquam denuo ea puncta inuenire, ſi ſemel pars nerui e ſua ſede ſit remota. Et arcus, quem neruus progrediendo deſcribit, vel flexio quaedam, vel inclinatio, innumeris modis arte variari poteſt.

Sic ergo, vt me expediam a digreſſione, procedendum eſt in cognoscendis neruis. Remouendae quae partes incumbunt. Tum hactenus celluloſa a trunco auferenda, qua eum abſcondit; idque per omnem nerui tractum perque primarios ramos, qui in eadem cum trunco ſuperſicie natant, faciendum. Quae faciem autem auerſam nerui, imo, quae latera tenet, illumque ad musculos, ſeu partes ſubiectas, annectit, celluloſa intacta ſeruanda. Sic ductus nerui totius cum ramis ſuis primariis, quo vsque iſti apparent, membro in aptum ſitum redacto, delineetur, qua ratione in musculis progreditur et quas ſedes ſingulis ſui et ramorum partibus tenet. Hic labor omnium difficillimus eſt. Eo peracto licet truncum, primariorumque ramorum principia expolire, quo iuſtam nunc craſſitiem neruo vbique et in ſingulis ſui partibus, et proportionem iuſtam, et porro rotunditatem ſuam, aut planitiem, et crenas porro et impreſſiones et fiſſuras, et quaecunque in neruo obſeruabilia ſunt, reddere poſſis. Tandem poſtremo et ſurculos quoque, quo vsque lubet, euoluito et iconi addito. Musculi caeterum methodo Albini ad varia ſtrata pingendi.

Summa mihi elegantia ſemper in ductibus illis, quos nerui progrediendo deſcribunt, reſidere viſa eſt, et

 adeo

adeo vsque de certitudine huius elegantiae fui perſuaſus, vt, niſi pulchri fuerint, quos pinxeram, nerui, non vere, non accurate delineatos eſſe putauerim. Certum eſt quoque, ductus in variis corporibus variare; et meliores igitur, quo vsque haec quidem praeſtari poſſunt, eligendi erunt. Deinde in proportione neruorum ad reliquas partes, et in ramorum ad truncos proportione, certa quoque pulchritudo exiſtit, ad quam ergo ſimiliter reſpiciendum. Vaſis caeterum ſimilis cum neruis conditio eſſe videtur. Quae his autem porro aeque ac illis variabilia ſunt, ortus reſpectu, progreſſus et inſertionis, in iis ad ſolam frequentiam reſpiciendum eſſe exiſtimo.

Certum eſt omnino, etiam viſceribus ſuam, non imaginariam, pulchritudinem eſſe. Vidi in monſtris nonnullis viſcera tam mirifice tamque peculiariter in ſummam concinnata pulchritudinem, vt non potuerim dubitare, quin inter primarios fines in his creaturis natura pulchritudinem viſcerum habuerit. Et in ipſa ſolita quoque viſcerum corporis noſtri fabrica inſignis pulchritudo regnat, quae facilius percipi, quam deſcribi verbis, poteſt. Attamen cum certis, iisque variis, vſibus viſcera manifeſto deſtinata ſunt, in quos magnam fabrica illorum, partiumque minorum configuratio et compoſitio, partem ſibi vindicat; cumque cauitatibus corporis incluſa viſcera lateant, vbi ad externam corporis pulchritudinem nihil conferre poſſunt; veriſimile eſt, primarium naturae in fabrica viſcerum finem vſum eorum, pulchritudinem nonniſi ſecundarium, eſſe. Quare imprimis ad eam quoque, quae vſui conuenientior eſt, fabricam, deinde ad eam, quae pulchrior ſimul caeteris ſit, animum aduertendum eſſe arbitror.

Quam-

Quamuis aliqua pars modo eorum, quae de inconſtantia fabricae corporis humani, de eligendisque ad eam repraeſentandam exemplaribus dixi, praemonenda iis, quae de fabrica dicentur veſiculae felleae humanae, neceſſario fuiſſent; conſultius tamen, neque inutile forte, putaui fore, ſi totam illam ſeriem idearum, vt alia ex aliis naſcuntur, proponerem, propriamque inde potius diſſertatiunculam conficerem. Quo facto ad veſiculam felleam redeo.

NOVAE PENNATVLAE ET SERTVLARIAE SPECIES DESCRIPTAE.

Ab

I. LEPECHIN.

Pennatula Coccinea.

Tab. VII. F. A. Pennatula ſtipite tereti, radicata, lateribus papilloſis polypifloris, ſummitate clauata.

Pennatula noſtra medium conſtituit genus inter alcyonia et pennatulas; ſtipes enim ipſius fixus et quaſi radicatus, naturam alcyonii arguit; aſt ſubſtantia carnea et papillae protuberantes, calyculatae polypiflorae, ad latera et ſummitatem diſpoſitae, ad pennatulas eam relegare ſuadent.

Deſcriptio.

Stipes eſt ſesquipollicem longus, digitum humanum auricularem craſſus, teres, rugoſus, rugis longitudinalibus, totam longitudinem ſtipitis perreptantibus: ad tertiam fere partem ſtipes complanatur, et ex lateribus ipſius propullulant papillae tres aut quatuor lineas longae, molles, calyculatae, ſtriis longitudinalibus notatae, oſculis pertuſae, poly-

polyſiflorae. Polypi ſunt cylindrici, apice ſtellati, radiis, pro more ſuo, octonis. Dictae papillae ad latera vna ſerie diſpoſitae cernuntur, ad ſummitatem vero colliguntur in clauam ſpheroideam, et quaſi capitulum animalculi efformant. Subſtantia totius animalculi eſt mollis, tunica, cutis aemula, obducta, color ſanguineus, atque adeo pulcre cinnabarinus.

Locus; ſinus Candalacenſis maris Albi, vbi profundiſſima loca amat.

Sertularia obſoleta.

Sertularia pinnata, pinnis alternis, calyculis vt plurimum octofariam per quincunces diſpoſitis, ouato-ſubcordatis. Tab. VII. Fig. B.

Deſcriptio.

Pro radicula inſeruit ſubſtantia quaedam membranacea, in medio cuius reperitur punctum corneum planum. Ex eo ſurgit caulis, raro quinque pollices excedens, ſemper ſimplex, cornu colore aemulans, nudus et non niſi ad ſummas diuiſuras calyculis obſitus, a principio articulatus, articulis cylindricis breuibus, ad margines annulis eminentibus notatis. Aſt quo altius aſcendit caulis, eo obſoletiores euadunt articuli, ad ſummum vero obſoletiſſimi, ad latera ipſius conſpiciuntur ſtygmata oblongo ouata, albida. Illis in locis, vbi exeunt rami, caulis parum attenuatur, inflectitur et exiguos emittit denticulos; his formantur rami longiſſimi, continui, cylindracei, laeuigati. Calyculi ſaepe octafariam per quincunces diſpoſiti, vix vltra ſuperficiem ramuli prominuli, ouato-ſubcordati, oſculo conniuente ſimplici nec exerto.

Locus; oceanus glacialis. Legi varia huius ſpecimina ad littora ſabuloſa promontorii Canin-Nos dicti.

Figura B ſiſtit habitum et magnitudinem naturalem, *b* truncum cum ramulo per microſcopium adauctum. *c* calyculum ſeparatum et auctum.

CYPRINVS BARBVS ET CYPRINVS CAPITO DESCRIPTI

Auctore

A. I. GÜLDENSTAEDT.

Cohorti Cyprinorum cirratorum addidi ante aliquot annos Capoëtam et Murſam, atque ad finem deſcriptionis earum, quae Tomo XVII *Nou. Commentar. Acad. Imp. Petrop.* inſerta eſt, nominibus ſpecificis et reliquos ad eandem cohortem pertinentes piſces diſtinxi, eorumque vberiorem dilucidationem promiſi. Hac plurimum egere mihi videntur Barbus et Capito, ceu ſpecies ſummopere affines, hinc difficillime diſtinguendae.

De Capitone nulla, quantum ſcio, mentio apud ichthyologos occurrit, praeter illam curtam, quae *l. c.* a me exhibita eſt.

De Barbo multi varia tradiderunt, eiusdemque icones reliquerunt; ſed illae deſcriptiones incompletae, et figurae rudes ſunt adeo, vt minime ſufficiant ad diſtinguendum Barbum a Murſa et Capitone.

Icon,

Icon Barbi, quam Comes *Marſilius* in Tomo IV *Danubii perluſtrati* Tabula 7 dedit, multo praeſtantior eſt illis, quas *Geſnerus* et *Willughbeius* reliquerunt; attamen diffiteri nemo poterit, quod etiam haec *Marſiliana* figura quoad pinnas earumque radios, quoad ſquamarum figuram, et quoad lineam lateralem non ſat fideliter naturam exprimat. Icon nouiſſima, quae in Tabula 25 Tomi 3 *Itinerarii Gmeliniani* invenitur, adeo rudis eſt, vt quemcunque alium Cyprinum oblongum pariter repraeſentare poſſit.

Deſcriptiones, quas Viri Celeberrimi *Willughbeius* (vid. *Hiſt. piſc.* p. 259), Comes *Marſilius* (vid. *Danubius pannonico-myſicus perluſtratus* p. 18), *Gronouius* (vid. *Muſeum ichthyologicum* p. 5), *Leske* (vid. *ichthyologiae lipſienſis ſpecimen* p. 19) et *S. G. Gmelin* (vid. *Reiſe durch Rußland* Tom. 3. p. 242) de Barbo dederunt, tantum in partibus externis verſantur; *Willughbeius* mentionem viſcerum fecit equidem, ſed breuiſſimam, et quoad inteſtini flexuras probabiliter erroneam; de dimenſionibus, ad diſtinguendas ſpecies affines vtiliſſimis, omnes ſilent.

His defectibus penſitatis mearum partium eſſe duxi, ampliorem Barbi deſcriptionem concinnare, eandemque ad modulum deſcriptionis de Murſa antea datae componere, quo differentia inter has duas ſpecies, et inter Capitonem poſt deſcribendum, eo euidentior eluceſcat.

Speciebus his tribus inter ſe rite diſtinctis vix timeo, ne cum Carpione vnquam porro confundantur, qui equidem cum illis quoad cirros quatuor ad os obuios et quoad ad officulum tertium pinnae dorſalis denticulatum conuenit, ſed officulo tertio pinnae ani denticulato facile dignoſcitur, atque omni corporis figura, qua multo latior eſt, adeo vt longitudo latitudinem maximam tantum quater ſuperet, nec non ſquamis magnis primo intuitu diſtinguitur. De Carpione iam praeterea *Artedius* ſufficientem ad diagnoſin deſcriptionem et dimenſionem externarum internarumque partium dedit (vid. *deſcript. piſc.* p. 25), quas in indiuiduis maximis, triginta pollices anglicanos longis, pondere ad quatuordecim libras roſſicas accedentibus, in mari caſpio et palude maeotide, praeſertim ad oſtia fluuii Terek, nec non Wolgae et Tanais frequentiſſimis, naturae conſentaneas eſſe cognoui. Carpionem Roſſi ad mare caſpium et ad fluuios hoc mare petentes, nec non ad Tanaïn, nomine cum Tataris communi Saſan (Сазанъ) appellant, qui Maloroſſis Dynapris accolis Karop dicitur. Illa denominatio accedit ad Scharan, quo nomine Raſciani ad Danubium, ſecundum Comitem *Marſilium* (l. c. p. 17), hunc piſcem imbuunt, et haec analoga eſt nomini eiusdem piſcis vulgari germanico Karp ſeu Karpſe.

Barbus propter cirros ſeu myſtaces Roſſis ad Terek fluuium Uſatſch (Усачъ) dicitur, ſed a Maloroſſis ad Dynaprin Marena, ſeu Marina, ſeu Miron appellatur, quod nomen idem cum raſciano, ſecundum Comitem *Marſilium* (l. c. p. 18) ad Danubium vſitato, Marna ſeu Marniza. Barbus in mari nigro et caſpio abundat. Ex mari caſpio menſibus hyemalibus frequenter adſcendit fluuios Terek et Kumam; in Cyro rarior; in reliquis huius maris fluuiis rariſſimus. Ex mari nigro maiori copia quam Carpio Dynaprin petit.

 Capito

Capito non alibi quam in Cyro a me obſeruatus eſt (vid. *Com. nou. Acad. Sc. Petr.* Tom. XVII. p. 518), nec vnquam ille in palude maeotide ſeu Dynapri poſt crebros piſcatus apparuit; nec aliud nomen praeter illud georgianum Tſchanari mihi innotuit.

Praemiſſis hiſce generalioribus accedamus ad deſcriptiones Barbi et Capitonis ſpeciales.

Deſcriptio Cyprini Barbi.

Statura oblongo-carinata, latitudine quinquies, et in maximis ſexies, craſſitie octies a longitudine ſuperata; magnitudo adulti fere tripedalis, vulgo bipedalis et ſeſquipedalis. Habitum Tabula VIII, piſcem in Dynapri captum magnitudine naturali ſiſtens, exprimit.

Caput depreſſum, glabrum, vertice lato, plano; roſtrum rotundatum, planum, horizontale, ante mandibulam ſuperiorem arcuatam prominens (vid. Tab. X. fig. 3); mandibula inferior rectior, rotundata; rictus oris mediocris, quo aperto mandibula ſuperior e vagina protruditur.

Cirri quatuor; duo ſuperiores ad latera roſtri (*a*), duo inferiores ad angulos oris (*b*), natanti deorſum pendentes, longitudine ſubaequales inter ſe et diametro oris.

Nares oculis propiores quam roſtro, duplices, valvula intermedia aperturam poſticam obtegente.

Oculi ad latera capitis, mediocres; iride flauicante; pupilla nigra, rotunda.

Oper-

Opercula branchiarum plana, aperturas branchiarum obtegentia, laeuia; membrana branchioſtega radiis tribus arcuatis latis (*c*) vtrinque ſtipata; gula latiuſcula.

Dorſum parum a vertice ad pinnam dorſalem adſcendens, obtuſe carinatum; a pinna dorſali ad caudam horizontale, rotundatum; latera planiuſcula; linea lateralis recta, in medio ventri propior quam dorſo; abdomen planum, latum, quo in ſitu prono repoſito gula et extremitas caudalis parum a plano eleuatae ſunt.

Squamae corpus totum obtegentes, imbricatae, mediocres, dorſum verſus fuſceſcentes et punctis nigricantibus irroratae, abdomen verſus albidae, in adultis pariter ac in paruis.

Pinna dorſalis ſolitaria, in medio dorſi ſita, trapezoidea; radiis vndecim vel duodecim, primo breuiſſimo et integro; ſecundo parum breuiore quam tertius, craſſo, integro, acuminato; tertio omnium longiſſimo et craſſiſſimo, poſtice vtrinque ab apice vltra medium ſerrato, denticulis deorſum ſpectantibus; reliquis muticis et ramoſis.

Pinnae pectorales oblongo-acuminatae; radiis octodecim, decreſcentibus.

Pinnae ventrales dorſali oppoſitae, in medio ventre ſitae, obtuſe trapezoideae; radiis nouem, primo maximo et integro, reliquis decreſcentibus et ramoſis.

Pinna ani in medio inter pinnas ventrales et caudam, proxime pone anum obuia; radiis nouem, duobus primis breuibus, tertio longissimo et integro, reliquis ramosis.

Cauda verticalis, bifurca, cruribus aequalibus, radiis nouemdecim, neglectis vtrinque tribus breuibus.

Color pinnarum pectoralium et abdominalium albus, fusco supra punctatus; pinnae ani albicans; dorsi fuscescens et nigro nonnunquam maculatus; caudae fuscus; non raro pinnae omnes pallide rubent.

Dimensiones partium externarum in duobus indiuiduis, quorum maius ex fluuio Terek, et minus ex Dynapri obtentum est, ita inuentae sunt secundum anglicanos pollices et lineas:

	pol.	lin.	pol.	lin.
Longitudo ab apice rostri ad caudae extremum - - - - -	18	10	30	—
Longitudo a rostro ad pinnam dorsalem	8	—	10	10
Longitudo pinnae dorsalis secundum dorsum - - - - -	2	—	2	8
Longitudo a pinna dorsali ad caudae radicem - - - -	5	5	11	9
Longitudo a radice caudae ad eius extremum - - - -	4	4	5	2
Longitudo a rostri extremo ad mandibulam inferiorem - - -	—	7	—	6
Longitudo a rostri extremo ad marginem operculorum - - - -	3	10	4	9
Longitudo a rostri extremo ad radicem pinnarum pectoralium - -	3	10	5	2

Longi-

	pol.	lin.	pol.	lin.
Longitudo a radice pinnarum pectorali- um ad apicem - - -	3	2	3	10
Longitudo a radice pinnarum pectorali- um ad radicem pinnarum ventra- lium - - - -	4	5	7	3
Longitudo pinnarum ventralium - -	2	9	3	2
Longitudo a radice pinnarum ventralium ad pinnam ani - - -	3	4	8	2
Longitudo pinnae ani ad ventrem -	1	3	2	—
Longitudo radii pinnae ani longiſſimi -	3	—	3	2
Longitudo a pinna ani ad caudae radicem	2	8	3	10
Longitudo cirrorum - - -	—	10	1	6
Diſtantia inter roſtrum et cirros poſte- riores - - - -	1	2	—	—
Longitudo et latitudo ſquamarum maxi- marum - - - - -	—	$2\frac{1}{2}$	—	3
Diameter tranſuerſalis inter cirros an- teriores - - - - - -	—	6	1	2
Diameter tranſuerſalis inter cirros po- ſteriores - - - -	—	11	1	5
Diameter tranſuerſalis inter angulos oris	—	9	1	2
Diameter inter roſtrum et nares - -	1	4	1	—
Diſtantia inter nares et oculos - -	—	5	—	7
Diſtantia inter aperturas branchiarum -	2	2	3	2
Diameter oculorum - - -	—	5	—	5
Diameter perpendicularis capitis inter nares - - - - -	1	2	1	1
Diameter perpendicularis inter oculos -	1	8	1	6
Diameter perpendicularis capitis in ver- tice - - - - -	2	5	2	7

	pol.	lin.	pol.	lin.
Diameter corporis maxima ad pinnam dorſalem - - - - -	4	—	4	10
Diameter corporis perpendicularis ad anum - - - - -	2	9	3	7
Diameter perpendicularis ad caudae radicem - - - -	1	10	2	7
Diameter inter ramos extremos caudae	3	4	4	10
Diameter tranſuerſalis corporis in linea laterali ad branchiarum aperturam	1	11	2	9
Diameter eadem ad pinnas ventrales -	2	—	3	9
Diameter eadem ad pinnam ani - -	1	3	1	9
Diameter eadem ad caudae radicem -	—	6	1	—
Diameter tranſuerſalis maxima - -	2	3	3	11

Anatomia Cyprini Barbi.

Lingua triangularis adnata; tota oris cauitas edentula, glabra. Branchiae vtrinque quatuor, radiis arcuatis, qui apophyſibus muticis breuibus, aequalibus, vtrinque pectinati ſunt; accedit fauces verſus radius quintus ſimpliciter pectinatus, branchia carens.

Cor oblongum, vix coryli magnitudine in piſce ſesquipedali; auricula laxa ampliſſima. Diaphragma tendineum.

Hepar ſtructurae valde ſingularis; ſuperne ad diaphragma ſubſtantia tenui tractum inteſtinalem obuoluens, ſiniſtrorſum deſinens in lobum magnum quadraticum, ſed tenuem; dextrorſum autem lineare ad inteſtini latus per longitudinem ſpithamae deſcendens, ibidemque inter inteſtini

ſtini curuaturas amplificatur in lobulum dextrum oblongo-acuminatum, et in ſiniſtrum cordiformem magnum.

Veſica fellea poſtice ad latus dextrum ventriculi ſita, ipſique arcte adhaerens, et hepatis ſubſtantia tenui fere tota inuoluta, pyriformis, iuglande maior, ductum magnum bipollicarem ſurſum ad ventriculum emittens, bile viridi ſcatens.

Lien triangularis, ſanguinolentus, paruus, ad curvaturam inteſtini primam adhaerens.

Ventriculus ab inteſtino non ſeparatus, ſed tractus inteſtinalis continuus, diametro a gula (*a*) ad anum (*b*) aequabiliter decreſcens, curuaturis inteſtino Murſae (vid. *Nou. Comment. Ac. Sc. Petr.* Tom. XVII. pag. 517) perfecte analogus, figura 2 Tabula X magnitudine naturali ex piſce ſesquipedali, quem Tabula VIII ſiſtit, repraeſentatus, recte extenſus toto piſce vulgo ſeſquilongior, nonnunquam et duplo longior, celluloſa breui arcte connexus, hepatis proceſſus in interſtitia recipiens; in cauitate mucum rubentem et faſciolas nonnullas fouens.

Peritonaeum argenteum, nigro maculatum. Ouaria oblonga, a diaphragmate ad anum decurrentia; veſiculae ſpermaticae in maribus ouariis figura et ſitu analogae.

Veſica aërea ad totum dorſum decurrens, medio conſtricta, argentea; ductus pneumaticus vna extremitate gulae, altera initio partis inferioris veſicae inſertus. Inter ſpinam dorſi et veſicam aëream viſcus ſanguinolentum renale

nale ſitum eſt, eiusdem cum veſica extenſionis, ſuperne valde latum et craſſum.

Caro oſſibus biſurcis ſtipata, alba, dulcis, minus grata, nec pinguis; ſanitati, niſi valde ſalita, nociua ex Dynapris accolarum relationibus diarrhoeam prouocans. Vertebrae quadraginta quatuor, cum prima clauiculam emittente et vltima radiata. Coſtae ſedecim. In alio indiuiduo vertebras tantum quadraginta tres numeraui, ſed coſtas viginti.

Pondus indiuidui triginta pollices longi nouem libras roſſicas adaequat.

Deſcriptio Cyprini Capitonis.

Capito figura externa et ſtatura corporis proxime ad Barbum accedit, latitudine quinquies, craſſitie nonies a longitudine ſuperata. Magnitudo maxima pariter tripedalis. Indiuidui pedalis habitum Tabula IX naturae vbique conſentaneum ſiſtit.

Roſtrum, mandibulae, cirri, nares, opercula branchiarum, dorſum cum reliquo corpore, vt in Barbo nunc deſcripto. Oculorum iris nitidiſſime aurata.

Squamae aliquantum maiores illis Barbi, et colore diuerſiſſimae, qui conſtantiſſimus variis anni temporibus, et in iunioribus vix pollicaribus, et in adultis tripedalibus ſemper inauratus, infra lineam lateralem luteus, ſupra illam fuſco adumbratus.

Pinnis

Pinnis iterum Capito cum Barbo conuenit, ſi ad figuram et radiorum numerum reſpicias; ſed differt colore, qui in omnibus pinnis inferioribus luteus, in ſuperioribus fuſceſcens. Tertius radius pinnae dorſalis equidem vtrinque denticulatus eſt, vt in Barbo, ſed modo non plane eodem; in Capitone nimirum baſin ad medium vsque, in Barbo apicem vltra medium occupant denticuli.

Dimenſiones ſequentes indiuiduorum duorum magnitudine diuerſa inſeruiant ad iconis Tabula IX exhibitae complementum et ad diiudicandam vlteriorem differentiam inter Capitonem et Barbum.

Menſurae anglicanae - - -	pol.	lin.	pol.	lin.
Longitudo ab apice roſtri ad caudae extremum - - - -	27	—	11	9
Longitudo a roſtro ad pinnam dorſalem	11	6	5	2
Longitudo pinnae dorſalis ſecundum dorſum - - - -	2	7	1	3
Longitudo a pinna dorſali ad caudae radicem - - - -	8	8	3	10
Longitudo a radice caudae ad extremum	4	9	2	—
Longitudo a roſtri extremo ad mandibulam inferiorem - - -	—	9	—	4
Longitudo a roſtri extremo ad marginem operculorum - - -	5	9	2	6
Longitudo a roſtri extremo ad radicem pinnarum pectoralium - -	6	—	2	7
Longitudo a radice pinnarum pectoralium ad apicem - - -	4	2	1	9

	pol.	lin.	pol.	lin.
Longitudo a radice pinnarum pectoralium ad radicem pinnarum ventralium - - - - - -	6	2	2	7
Longitudo pinnae ani secundum ventrem - - - - - -	1	6	—	9
Longitudo pinnae ani ab ortu ad apicem	3	3	1	6
Longitudo cirrorum - - -	1	9	—	11
Distantia inter rostrum et cirros anticos	—	9	—	4
Distantia inter cirros anticos et posticos	1	—	—	6
Longitudo et latitudo squamarum maximarum - - - -	—	4	—	2
Distantia inter cirros anteriores - -	1	—	—	7
Distantia inter cirros posteriores - -	1	6	—	9
Distantia inter angulos oris - - -	1	3	—	7
Distantia inter rostrum et nares - -	1	8	—	8
Distantia inter nares et oculos - -	—	8	—	4
Diameter oculorum - - -	—	6	—	4
Diameter transuersalis inter nares -	1	4	—	7
Diameter transuersalis inter oculos -	2	2	1	1
Diameter transuersalis inter opercula branchiarum - - -	3	—	1	6
Diameter perpendicularis capitis inter nares - - - - -	1	5	—	8
Diameter perpendicularis capitis inter oculos - - - -	2	2	1	—
Diameter perpendicularis in vertice -	3	2	1	6
Diameter perpendicularis corporis maxima ad pinnam dorsalem - -	5	—	2	5
Diameter perpendicularis corporis ad anum - - - -	3	4	1	7

Diame-

	pol.	lin.	pol.	lin.
Diameter perpendicularis ad caudae radicem - - - -	2	4	1	1
Diameter inter ramos extremos caudae	5	—	3	7
Diameter transuerſalis corporis in linea laterali ad branchiarum opercula	2	8	1	3
Diameter eadem ad pinnas ventrales -	3	—	1	4
Diameter eadem ad pinnam ani - -	1	8	—	10
Diameter eadem ad caudae radicem -	—	6	—	3
Diameter transuerſalis maxima - -	3	2	1	6

Ex hiſce dimenſionibus patet, Capitonem a Barbo differre capite longiore, latiore et minus depreſſo; roſtro obtuſiore; corpore aliquantum latiore et tenuiore; pinna dorſali a capite remotiore.

In internis maior et euidentior adhuc differentia inter Barbum et Capitonem.

Lingua, oris cauitas, branchiae, cor, diaphragma, vt in Barbo.

Hepar corpore lato diaphragmati ſuccumbens, in lobos lineares tres fiſſum; lobus primus breuiſſimus, pone ventriculum et ſiniſtrorſum ſitus; lobus ſecundus duplo longior, priori parallelus, dextrorſum obuius; lobus tertius longiſſimus, ad anum vſque deſcendens, antrorſum et dextrorſum repoſitus, inteſtino adhaerens, in medio bifidus; quorum ſiniſter lobulus iterum duobus lobis latioribus, inter inteſtini infimam curuaturam ſitis, auctus eſt.

 Veſicu-

Veſicula fellea magna, pyriformis, in medio abdominis inter inteſtini gyros repoſita, ductu ſurſum ad ventriculum tendente.

Lien linearis, atro-rubens, per totum abdomen ad latus inteſtini ſiniſtrum decurrens.

Ventriculus ab inteſtino non ſeparatus, ſed tractus inteſtinalis vniformis, pennae anſerinae craſſitie, quater a gula (*a*) ad anum (*b*) ſpiraliter incuruatus, vt figura 3 Tabulae X indicat; gyris celluloſa breui arcte inter ſe connexis; inteſtinum recte extenſum toto piſce duplo longius, et quod excurrit; nam in indiuiduo tredecim pollices longo, inteſtinum viginti ſex pollicibus aequabat; et in altero viginti ſeptem pollices longo, ſexaginta nouem pollices excedebat cibarius canalis.

Peritonaei argentei cuticula tenuiſſima nigra.

Ouaria, veſiculae ſpermaticae, veſica aërea, viſcus renale, vt in Barbo.

Caro ſapida, oſſiculis minus frequentibus ſtipata. Vertebrae quadraginta ſeptem. Coſtae octodecim.

Pondus indiuidui viginti ſeptem pollices longi ſex libris roſſicis cum ſemiſſe adaequauit.

Euidentiſſime igitur patet, Capitonem a Barbo hepatis et lienis figura, inteſtini flexuris, peritonaei colore, vertebrarum coſtarumque numero ſatis ſuperque differre, ſerre, quibus ſi diſcrimina coloris externi addas, non poteris non Capitonem pro diſtinctiſſima Cyprinorum cirratorum ſpecie habere, quam a Murſa adhuc minori negotio dignoſces, noſtram Murſae deſcriptionem et iconem, quas in Tomo XVII *Nouor. Commentar. Acad. Scient. Petrop.* inuenies, cum Capitone collaturus. Differt autem Cyprinus Murſa a Capitone: roſtro longiore, capite acutiore, ore longius tubuloſo, labio inferiore tumido trilobo, corpore minus lato ſeu oblongiore, dorſo lato planiuſculo, ſquamis dimidio minoribus, pinnis inferioribus albidis, non luteis, inteſtini flexuris.

APPENDIX OBSERVATIONVM.

Addamus quaedam, ad hiſtoriam reliquorum Cyprinorum cirratorum pertiuentia.

I. De Carpione.

Cyprinus Carpio per Roſſiam auſtralem, in aquis antea p. 241 indicatis, obuius variat colore pro varia aetate, vt iam ex *Rondeletii* obſeruatione *Willoughbeius* (vid. *piſc. hiſt.* p. 245) recte memorat. Iuniores, octo pollices longi, toti cinereo-argentei ſunt, absque vllis aurei ſeu aurantii veſtigiis; grandaeui, triginta pollices longi, toti fuſco-aurei ſunt, maculis quadraticis fuſcis, a tunica ſquamas connectente et tranſparente; etiam his iris argentea et venter albicat.

Squamarum omnium pars prominens ſtriato-aſpera. Squamarum maximarum indiuidui triginta pollices longi latitudo vnius pollicis, longitudo nouem linearum. Foramen longitudinale in ſquamis lineae lateralis oblique ſquamam tranſit.

Radii pinnae dorſalis vulgo viginti tres, pectoralis ſedecim, ventralis nouem, ani nouem, caudae nouemdecim, praeter tres vtrinque breues. Radii craſſi denticulati ſeu ſerrati pinnarum dorſi et ani ordine tertii ſunt, non ſecundi, quanquam duo primi breuiſſimi; nec hi tres primores ſpinoſi, ſed mutici, reliquis tamen rigidiores et ſimplices.

Piſcis triginta pollices longi diameter perpendicularis maxima ſeptem pollicum, et quod excurrit, ac transuerſalis maxima quinque pollicum; eiusdem cirrorum anticorum longitudo ſex linearum, poſticorum dupla. Inteſtinum huius indiuidui a gula ad anum quinquaginta tribus pollicibus longitudine aequabat, cuius flexuras tres ſuperiores totidemque inferiores figura 4 Tabulae X per lineam ſimplicem recuruatam exprimit.

Grandaeui Carpiones, praeſertim aquas ſubſalſas inhabitantes, ſaporis gratia multum ſuperantur a iunioribus, aquarum dulcium incolis. Per Aprilem illi fere tripedales gregatim intrant ex mari caſpio fluuium Terek, eorumque magna copia á Coſácis piſcatur, qui illos longitudinaliter dimidiatos vento per aliquot ſeptimanas exponunt, et ita ſiccatos vel ipſi comedunt, vel populis Caucaſum inhabitantibus et piſcium penuria laborantibus vendunt.

dunt. Palata pulposa in figuram cordis sesquipollicaris exscinduntur, et aceto atque aromatibus condita ad Rossiae metropoles sub titulo linguarum Carpionum transmittuntur. Membranae internae vesicae aëreae eorundem grandaeuorum Carpionum conuolutae pariter ad aërem exsiccantur et ichthyocollae nomine venduntur, quae equidem ichthyocollae, quam Acipenseres largiuntur, analoga, attamen et colore lutescenti, et qualitate conglutinandi ea inferior est. Ad ostia Wolgae et Tanais iisdem vsibus Carpiones inseruiunt.

Icon bona Carpionis, notas omnes characteristicas, pinnarum praesertim et cirrorum, exacte refereus etiamnum deficit; nouissima, quam Cel. *Lepechin* in Tabula 23 Tomi I *itinerarii* exhibuit, habitum piscis nostratis bene exprimit.

II. De Gobione.

Cyprinus Gobio pariter in variis aquis a me obseruatus est. Viri Celeberrimi *Artedius* (vid. *descript. pisc.* p. 13. n. 5.), *Gronouius* (vid *Mus. ichthyol.* T. II. p. 2. n. 149.) et *Leske* (vid. *ichthyol. lips. spec.* p. 26.) descriptiones partium externarum huius piscis dederunt, quas naturae consentaneas inueni. De visceribus *Artedius* ait simpliciter, quod sint vt in congeneribus. Sed hoc breuitatis studium ambiguitati locum dat, cum partes internae Cyprinorum *Artedii* quoad figuram, proportionem et situm plurimum differant. Breuiter igitur exponam, quas in externis varietates viderim; his subiungam earundem partium dimensiones huc vsque deficientes, tandemque ampliorem viscerum descriptionem.

Tres

Tres quoad colores varietates mihi obuiam iuerunt; prima corpore maculato, pinnis immaculatis; secunda corpore immaculato, pinnis maculatis; tertia corpore et pinnis maculatis. Macularum defectum aetatem tantum minorem piscis indicare, vix probabile videtur, cum longiores immaculatos, breuiores maculatos obtinuerim; hinc in locis et aquis harum varietatum caussam latitare mihi persuadeo. Prima varietas in Kuma ad Caucasi pedem septentrionalem; secunda in riuulis ad Rionem seu Phasin abeuntibus per Imeretiam, nec non in Dynapri per Rossiam Nouam; tertia in fluuio Moskwa ad metropolin a me obseruata est. Situs et color macularum, si adsunt, vt *Artedius l. c.* indicauit, numero autem plures.

Radii, vt mihi ex plurium indiuiduorum inspectione constat, pinnae dorsalis vulgo vndecim, non raro plus vel minus vno; pinnae pectoralis sedecim vel septemdecim; pinnae ventralis octo vel nouem; pinnae ani pariter octo vel nouem; caudae nouemdecim et tres vtrinque breues.

Indiuidua, quae ex his aquis obtinui, maxima vix sex pollices anglicanos longa fuerunt, nec his maiora dari incolae perhibent. En! dimensiones partium externarum secundum mensuram anglicanam:

	pol.	lin.
Longitudo ab apice rostri ad caudae extremum	4	6
Longitudo a rostro ad pinnam dorsalem - -	1	10
Longitudo pinnae dorsalis secundum dorsum -	—	8

Longitu-

	pol.	lin.
Longitudo a pinna dorſali ad caudae radicem -	1	4
Longitudo a radice caudae ad eius extremum -	—	9
Longitudo a roſtro ad marginem operculorum -	1	—
Longitudo a roſtro ad pinnarum pectoralium radicem - - - - -	1	—
Longitudo pinnarum pectoralium - - -	—	9
Longitudo a radice pinnarum pectoralium ad radicem pinnarum ventralium - - -	1	—
Longitudo pinnarum ventralium - - -	—	7
Longitudo a radice pinnarum ventralium ad anum - - - - -	—	6
Longitudo ab ano ad initium pinnae ani - -	—	3
Longitudo pinnae ani ad ventrem - - -	—	5
Longitudo pinnae ani maxima - - -	—	6
Longitudo a pinna ani ad caudae radicem -	—	8
Longitudo cirri vtrinque ad os obuii - -	—	4
Longitudo ſquamarum maximarum - - -	—	$1\frac{1}{2}$
Latitudo ſquamarum maximarum - -	—	2
Diameter transuerſalis inter angulos oris - -	—	4
Diſtantia inter roſtrum et nares - - -	—	4
Diſtantia inter nares et oculos - - -	—	$1\frac{1}{2}$
Diameter inter aperturas branchiarum - -	—	6
Diameter oculorum - - - -	—	2
Diameter perpendicularis capitis inter nares -	—	5
Diameter eadem inter oculos - - -	—	6
Diameter perpendicularis corporis maxima ad pinnae dorſalis initium - - -	—	10
Diameter perpendicularis ad anum - -	—	7
Diameter perpendicularis ad caudae radicem -	—	$3\frac{1}{2}$

	pol.	lin.
Diameter inter ramos caudae - - -	—	10
Diameter transuerſalis corporis ad branchias -	—	$6\frac{1}{2}$
Diameter transuerſalis corporis maxima - - -	—	7
Diameter transuerſalis ad anum - - -	—	5

Anatomia Cyprini Gobionis.

Oris cauitas edentula. Branchiae vtrinque quatuor, quarum radii apophyſibus breuibus, obtuſis, glabris vtrinque pectinati ſunt; accedit fauces verſus radius quintus branchia carens, ſimpliciter pectinatus.

Cor triquetrum. Diaphragma tendineum. Hepar quadrilobum; lobis tribus longitudinalibus, linearibus, quorum lateralis quilibet ad ouaria ſeu veſiculas ſpermaticas, medius inter inteſtini curuaturas deſcendit; lobo quarto minimo, triquetro. Veſicula fellea minima, vix percipienda.

Lien minimus, lanceolatus, atro-rubens, inter veſicam aëream et inteſtinum ſitus.

Ventriculus ab inteſtino non ſeparatus, ſed tractus inteſtinalis a gula ad anum fere deſcendit, tunc ad diaphragma iterum recuruatur, tandem ad anum recta procedit, piſcem longitudine non ſuperans.

Peritonaeum argenteum, venis ad ſpinam nigris. Ouaria oblonga, vtrinque ad veſicam aëream totum abdomen menſe Auguſto occupantia, ouulis albis, ſeminis papauerini magnitudine, foeta.

Veſica

Vesica aërea a diaphragmate ad anum extensa, medio constricta. Viscus renale ad spinam oblongum, sanguinolentum.

Gobio in omni Rossia frequens, ob carnem sapidam vbique aestimatus, Rossis dicitur vulgo Piskar (пискарь), qui ab incolis Rossiae Paruae plane alio nomine Stolbez (столбецЪ) appellatur. Horum autem Piskar seu Pitschkur (пичкурЪ) Cobitis fossilis est, quam Rossi vulgo Wjun (вьюнЪ) atque Germani Danubii accolae, secundum Comitem *Marsilium* (*l. c.* p. 89), Pisgurn seu Peisker nominant.

III. De Tinca.

Cyprini Tincae externarum internarumque partium descriptionem, eiusdemque dimensiones, quas *Artedius* (vid. *descr. pisc.* p. 27. n. 14) dedit, naturae quam maxime consentaneas esse perspexi ex indiuiduis plurimis, quae ex Dynapri, Tanai et Terek fluuio, atque ex lacubus adiacentibus obtinui.

Maximi indiuidui, quod habui, longitudo fuit sexdecim pollicum, et latitudo perpendicularis maxima fere quinque pollicum anglicorum; eiusdemque cirri, quorum vnus vtrinque ad os adest, tres lineas non excedebant.

Radios numeraui pinnae dorsalis vndecim vel duodecim; pectoralis septemdecim, plus vel minus vno; ventralis decem vel vndecim; ani decem vel vndecim; caudae ſemper integrae nouemdecim, praeter aliquos vtrinque breues.

Vertebras vidi triginta nouem, et coſtas vtrinque viginti.

Tinca, in omni Roſſia frequens, incolis dicitur Lin.

* * * * * * * * *

Per obſeruationes hucusque prolatas gnarus quilibet confirmata agnoſcet nomina noſtra ſpecifica, quibus omnino ad naturae nutum ſeptem Cyprinos cirratos in Tomo XVII *Nou. Comment. Acad. Scient. Petr.* p. 519. diſtinximus, ita vt in poſterum vix timendum ſit, ne tirones confundantur ſeu periti offendantur, noſtras eorum deſcriptiones cum indiuiduis in natura obuiis conferentes, quippe non breuitatis ſtudio, quo anteceſſores ſaepius peccauerunt, ſed notionibus diſtinctis, omni ſyſtematis ichthyologici ſeu piſcium generum conditori ſufficientibus, lectori placere ſtuduimus. Eundem ad calcem rogamus, vt errores typographicos, qui nobis abſentibus diſſertationem noſtram de Cyprinis cirratis antecedentem, Tomo XVII *Nou. Comm. Acad. Sc. Petr.* inſertam, ingreſſi ſunt, corrigere velint, quorum primarii, vt reliquos leuiores taceamus, ſunt ſequentes: p. 513 lin. 19 loco - inferior mento breuior - lege: inferior multo breuior; p. 518 lin. vlt. loco - contortus ita in - lege: contortus. Sed in, pag. 519 lin. penult. loco - cirris 3 - lege: cirris 4.

DIGI-

DIGITALES ALIAE HYBRIDAE (a).

Auctore
I. T. KOELREVTER.

Experimentum I.

Digital. ferrug. ♀.
Digital. obſcura. ♂.
Ann. 1776. d. 28. Iul. Flor. plur.
it. poſtea d. 14. Aug. — —.
Vid. Exp. inuerſ. II.

Deſcriptio.

Primum floruerunt hae plantae hybridae medio Iun. an. 1778. atque altitudinem 3', 11'' circiter attigerunt.

Caulis: tenuior atque flexilis magis, quam ♀, craſſior ac rigidior, quam ♂. In vegetiori indiuiduo e caulis primarii media fere parte rami vndecim, pedem circiter et vltra longi egrediebantur, e folio-

(a) Vid. Act. Acad. Scient. Petrop. pro anno 1777. Pars prima. p. 215.

rum alis originem ducentes. Ita quoque ex eiusdem basi, proxime ad radicem, cauliculus alius secundarius emersit, plus quam dimidiae primarii altitudinis, vnicoque ramulo instructus. Tam caulium, quam ramorum summitates parum nutant.

Folia lineari-lanceolata, partim denticulata, partim integerrima: angustiora, breuiora, acutiora, rigidiora, denticulisque copiosioribus atque acutioribus instructa, quam ♀; sed latiora multo, longiora, obtusiora, teneriora, nec adeo euidenter denticulata, quam ♂ nonnulla esse solent.

Flores caulis primarii omnem ambitum, ♀ more, fere aequaliter occupant, secundariorum vero vnilaterales magis, ♂ ad instar, sunt, mediae inter vtrumque parentem magnitudinis ac formae. Color eorum, qui clausi adhuc, vel aperturam modo passi sunt, ex obscure ferrugineo ac profundius purpurascente mixtus, in diutius expansis vero, solis praesertim actione, paullo dilutior quidem, ita tamen, vt florentes hae hybridae ob innatam ac praeualentem ipsarum obscuritatem ac tristitiam a hybridis, e ferrug. ♀ et ambig. ♂, vel ex ambig. ♀ et obscur. ♂. connubio ortis iam eminus facillime distinguantur.

Calyx patens, sine omni nitore dilute viridis ac glaber; segmentis ex ouali lanceolatis, margine extremo vel albescentibus, vel subinde etiam leui purpura tinctis. Laciniae tres superiores patentissimae.

Corolla

Corolla magis elongata quidem, nec vrceolata adeo, quam ♀; breuior autem, multoque ventricofior ♂. Tubus breuis, notabiliter inflexus, ac, fi bafin eius pallidam excipias, purpura fuperne profundius tinctus. Ventris fuperficies fuperior e ferrugineo purpurafcens, inferior fordide luteola, ac venofa eft, latera autem in fpadiceum magis vergunt. Interiora corollae multa ac praeualenti purpura fere vndique fuffufa, reticuloque venularum concolori, vel exterius etiam translucente, variegata. Labium fuperius latum, perbreue, retufum, obfolete bilobum ac reflexum. Laciniae labii inferioris laterales obtufiufculae ac fubreflexae: intermedia oualis, fubdeflexa, longiusque multo protenfa, quam in ♂, minus autem longe, nec adeo lingulata, quam ♀. Pili, vt in parentibus; inprimis labii inferioris lacinia intermedia maxime omnium villofa eft.

Stamina longiora, rectioraque ♀, breuiora magisque inflexa ♂. Puluis antherarum, vt in ceteris huius generis hybridis.

Piftillum longius itidem minusque vncatum, quam ♀; brevius autem, magisque incuruatum, quam ♂.

Pericarp. Capfula acutior ac pro ratione longior, nec adeo ventricofa, qua ♀; aft breuiori acumine inftructa, ampliorque, ♂.

Semina bona vix vlla. Vid. Tab. XI.

Expe-

Experimentum II.

Digital. obſcura ♀.
Digital. ferrug. ♂.
An. 1776. d. 6 Iul. Flor. plur.
Vid. Exp. inuerſ. I.

Semina bonae notae parciori longe numero inde colliguntur, quam ab experimento praecedenti; plantae autem ex iis prognatae prioribus ſimillimae ſunt.

Experimentum III.

Digital. ambig. ♀.
Digital. obſcura. ♂.
An. 1776. d. 20 Iun. Flor. plur.
Vid. Exp. inuerſ. IV.

Deſcriptio.

Altitudo harum plantarum, quae an. 1778. primum floruerunt, a 2′, 8″ ad 3′, 8″.

Caulis tenuior ac flexilis magis, quam ♀; craſſior ac rigidior, quam ♂.

Folia longe anguſtiora, rigidiora ac glabriora, quam ♀; multoque latiora, teneriora ac piloſiora, quam ♂: radicalia ex ouali oblonga, caulina lanceolata, omniaque denticulata.

Flores

Flores heteromalli: ♀ minores, aſt ♂ maiores. Color flavus vndique intenſior longe, quam in ♀, dilutior vero, quam in ♂; rufus autem huius maxime notabilis, aſt viuidior longe atque ſuauior.

Calyx laete viridis, ſubpiloſus, inprimis ad laciniarum marginem: laciniis ipſis ex ouato lanceolatis, patentibus.

Corolla ſubdepreſſa ac elongata, ♂ ad inſtar, coloris ſupra e ruſo bruni, ſubtus pallide flaueſcentis, intus autem fere aurantii, venisque ruſeſcentibus facile vbique, praeprimis autem circa inferiorem floris partem, diſtincte reticulata.

Labium ſuperius breue ac obtuſum, vtrinque denticulo breuiſſimo inſtructum. Labii inferioris lacinia intermedia obtuſe triangula, ſubdeflexa, laterales extrorſum flexae, acuminatae. Pili in fauce corollae eiusque laciniis longiſſimi. Cetera pube vndique tecta.

Stamina breuiora, quam in ♀, longiora, quam in ♂. Antherae autem, more ſolito, minores, quam in vtrisque. Particulae pulueris antherarum maxima ex parte effoetae, collapſae ac irregulares; paucisſimae bonae adhuc notae.

Piſtillum inter ♀ et ♂ mediae magnitudinis.

Pericarp. Capſula acutior, ac pro ratione longior, nec adeo ventricoſa, quam ♀; aſt breuioris acuminis, ampliorque, quam ♂.

Semina bona vix vlla.

Not. Flores harum plantarum coloris in vniuerſum peramoeni, multoque intenſioris ac viuidioris ſunt, quam iſti Digital. ferrug. ♀. ambig. ♂. ita quoque longitudine eosdem ſuperant, amplitudine autem iis cedunt.

Experimentum IV.

Digital. obſcura ♀.
Digital. ambigua ♂.
An. 1776. d. 5 Iul. et ſequ. Flor. plur.
Vid. Exp. inuerſ. III.

Plantae, hoc experimento enatae, iis Experimenti III ſimillimae.

Experimentum V.

Digital. obſcura ♀.
Digital. lutea ♂. (*b*).
An. 1776. d. 13 Iul. Flor. plur.
Vid. Exp. inuerſ. VI.

Deſcri-

(*b*) Confer. Act. Petrop. ſupra cit. p. 230. Experimentum XXXV olim infructuoſum.

Deſcriptio.

Caulis ac rami craſſiores ac rigidiores, quam ♀; tenuiores autem ac flexiliores, quam ♂. In vno harum plantarum indiuiduo infra medium caulem ex alis foliorum ſeptem rami exorti ſunt, quorum longiſſimi 1′, 4″ aequabant. Proxime ad radicem vero ſex egrediebantur caules ſecundarii diuerſae inter ſe magnitudinis, quorum nonnulli longitudine primario non multo inferiores.

Altitudo harum plantarum maxima, ſub finem Iunii 1778 menſurata, 4′, 11″.

Folia lanceolata, denticulata, multo latiora ac teneriora, quam ♀; aſt anguſtiora ac rigidiora, quam ♂.

Flores heteromalli: ♀ minores, aſt ♂ maiores. Color e luteo ſpadiceo ac flauicante mixtus.

Calyx laete viridis, glaber ac patulus; laciniis lanceolatis.

Corolla extra calycem ſatis incuruata deorſum, fauceque ampliore inſtructa eſt, quam ♂, minus euidenter autem, quam in ♀. Superior ventris pars tubum pallidulum verſus ſpadicea, reliqua eiusdem, ac omnis inferior in luteum intenſiorem vergunt. Praeterea aduſta quaſi macula vtrinque ad angulum labii ſuperioris. Labium ſuperius intus pallide flaueſcens, reflexum, obtuſum ac emarginatum. Laciniae laterales itidem pallide flaueſcentes, ac e lata bafi in fubacutum apicem terminatae. Lacinia intermedia fubouata, pallide flauefcens, venulisque e ferrugineo purpurafcentibus dilutioribus picta. Faucis interiora colore paullo obfcurius purpurafcente fuffufa. Pili in fauce labioque inferiori omni longiffimi. Reliqua corollae pubefcentia.

Stamina inter ♀ et ♂ mediam obferuant proportionem. Pulueris antherarum qualitas, vt in omnibus huius generis hybridis, maxime fufpecta.

Piftillum inter ♀ et ♂ mediae longitudinis ac craffitiei.

Pericarp. Capfula fatis acuta; breuius tamen roftrata, quam ♀, longius vero, quam ♂.

Semina bona vix vlla.

Experimentum VI.

Digital. lutea ♀.
Digital. obfcura ♂. (*c*).
An. 1776. d. 18 Iul. Flor. plur.
Vid. Exp. inuerf. V.

Cum plantae hybridae inuerfo modo generatae iis alterius eiusdemque fpeciei alias fimillimae fint, miratus fui,

---

(*c*) Confer. Act. Petrop. fupra cit, p. 230 Experimentum XXXIV olim infructuofum.

fui, praesentem hanc florum forma ac colore ab ista Exp. V. adeo discrepantem enasci potuisse, vt pro alia plane compositione incautus quisque eam facile habuerit, nisi media inter vtrumque parentem proportio, quam, non obstante hac diuersitate, nihilominus luculenter prae se ferebant, experimenti veritas, aliaque momenta contrarium suasissent. Phoenomeni huius insoliti ratio absque dubio in matris luteae, in hortis nostris diu iam coli solitae natura quaerenda est, cuius degenerationem, culturae fere omnis effectum nunquam deficientem, varietates floribus maioribus vel minoribus, colorisque modo intensioris, modo pallidioris, in hortis hinc inde obuiae, satis superque demonstrant.

Descriptio.

Altitudo harum plantarum a 4′, 9″ ad 5′, 5″.

Caulis ac rami, vt in praecedenti. *Folia* similia.

Flores heteromalli: ♀ maiores, ♂ minores. Color superne e spadiceo leuiter purpurascens, inferne saturate luteus.

Calyx, vt in praeced. sed foliola paullo longiora, minusque patula.

Corolla extra calycem minus incuruata deorsum, quam in praeced. longior itidem ac angustior multo, ventre vix notabili, ac multo minus protuberante, quam in ♀ et ♂.

Adusta quasi macula vtrinque ad angulum labii superioris intensior ac fere purpurascens. Labium superius us intus intenſe flaueſcens ac profundius diuiſum: laciniis anguſtioribus, aſt obtuſioribus. Laciniae laterales anguſtiores et acutiores, colorisque intenſius flaueſcentis. Lacinia intermedia oualis, apice pallidulo, inferius in aurantium vergens, venisque ac lituris lateralibus profundius purpuraſcentibus notata. Pili, vt in praeced.

Stamina cum *Piſtillo* longiora, quam in eadem, mediae quamlibet inter ♀ et ♂ proportionis.

Capſulae forma et ſterilitas eadem.

Not. Flores nonnulli caulis primarii corniculo quaſi nectarifero vno alteroue recto ac oblique retrorſum ſpectante, e medio fere floris latere oriundo, inſtructi, ſingulari naturae luſu. Alterum huius ſpeciei indiuiduum flores exhibebat, iis luteae haud multo longiores, aſt longe breuiores, quam mox deſcriptum, licet quoad colorem ac formam partium ab hoc non multum abluſerit. Haec ipſa etiam indiuiduorum diuerſitas ſententiam meam, quam de degenerata luteae natura ſupra tuli, vlterius confirmat.

Experimentum VII.

Digital. lutea. ♀.
Digital. ambigua ♂. (*d*).
An. 1776. d. 3 Aug. Flor. plur.
Vid. Exp. inuerſ. VIII.

Deſcri-

(*d*) Confer. Act. Petrop. ſupra cit. p. 225. Experimentum XV olim infructuoſum.

Defcriptio.

Altitudo harum hybridarum maxima, an. 1778. fub finem Iunii menfurata, circiter 5'.

Caulis ac rami mediae inter vtrumque parentem craffitiei.

Folia lato-lanceolata ac obtufe denticulata: latiora multo, teneriora, laetius virentia ac villofiora, quam in ♀; anguftiora, rigidiora, obfcurius virentia ac glabriora, quam in ♂.

Flores heteromalli: magnitudinis inter ♀ et ♂ mediae. Color in vniuerfum paullo intenfior, quam in ♀; aft pallidus magis, venulisque ac lituris paucioribus minusque euidentibus notatus. Adufta etiam quafi macula vtrinque ad angulum labii fuperioris, fic quoque binae aliae eiusmodi vtrinque inter tubum corollae ventrisque initium.

Calyx patulus magis, quam in ♀, fed laciniae non reflexae, nec adeo longae, vt in ♂.

Corolla, vi ♂, fubdepreffa, ventre fatis ampliato ac infra protuberante.

Labium fuperius obtufius quidem bidentatum ac latius, quam in ♀; aft acutius, nec adeo retufum ac latum, quam in ♂. Labii inferioris lacinia intermedia binaeque laterales, inter longius productam acutioresque ♀ et retufiorem minusque acuminatas ♂ mediam obferuant propotionem. Pilorum longitudo ac copia, vt in parentibus.

Stamina et *Piftillum* inter ♀ et ♂ mediae longitudinis et craffitiei; antherae autem, hybridarum fterilium more

more ſolito minores, pulueriſque antherarum particulae plurimae effoetae ac collapſae.

Pericarp. Capſula obtuſior ac ventricoſa magis, quam ♀; acutior vero, quam ♂.

Semina bona vix vlla.

Not. Summa harum plantarum, e connubio luteae cum ambigua tandem enatarum ſterilitas omnium ſolidiſſimum praebet argumentum contra eorum ſententiam, qui vtramque pro vna eademque ſpecie vel vnam pro mera varietate alterius falſo olim proclamauerant.

Experimentum VIII.

Digital. ambigua ♀.
Digital. lutea ♂.
An. 1776 d. 10 Aug. Flor. plur.
Vid. Exp. inuerſ. VII.

E plurimis ſeminibus, ſatis bonae notae, anno 1777 terrae mandatis, vnica modo mihi enata eſt plantula, iis Exp. inuerſi valde ſimilis, quae vero iam ineunte aetate, neſcio, quo caſu, periit.

• • • • • • • • •

Iconum Explicatio.

Tab. XI. Fig. I. ſpica primaria florum

Digital. { ferrugin. ♀. / obſcurae. ♂.

a. Folium radicale.
b et c. caulina.

ASTRO-

ASTRONOMICA.

NOVA METHODVS MOTVM PLANETARVM DETERMINANDI

Auctore

L. EVLERO.

§. 1.

Agitur hic de celeberrimo illo Problemate *Kepleriano*, cuius plurimae solutiones passim sunt traditae, quae omnes in hoc conueniunt, vt ex data anomalia vera Planetae eius anomalia media definiatur; cum tamen ad vsum astronomicum vicissim ex data anomalia media vera assignari deberet. Quanquam autem non difficile erat solutionem inuentam per conuersionem ad hunc scopum traducere, methodum directam, qua ex media anomalia inuestigari queat anomalia vera, vsu non esse carituram arbitror. Quamobrem hic constitui eam methodum, qua in determinando motu Lunae feliciter sum vsus, ad Planetas primarios etiam adcommodare, quo clarius natura et vis huius methodi ob oculos exponatur; quandoquidem in illa eiusmodi artificia occurrunt, quae propter multitudinem elementorum, quibus motus Lunae implicatur, non satis dilucide perspiciuntur.

Tab. II. Fig. 18. §. 2. Referat igitur tabula planum, in quo Planeta moueatur, vbi punctum S ſit centrum Solis, axis vero S ♈ ad principium arietis dirigatur. Planeta autem elapſo tempore τ, quod in diebus exprimi aſſumo, peruenerit in P, vnde ad axem demiſſo perpendiculo P Q vocentur binae coordinatae $SQ = x$ et $QP = y$; ipſa autem diſtantia Planetae a Sole ſit $SP = v$, ita vt $vv = xx + yy$. His poſitis conſtat principia motus ſequentes dare binas aequationes:

$$\frac{ddx}{\Delta d\tau^2} = -\frac{x}{v^3} \text{ et } \frac{ddy}{\Delta d\tau^2} = -\frac{y}{v^3},$$

vbi elementum $d\tau$ ſumitur conſtans, et littera Δ denotat certam quantitatem conſtantem, quam ex motu Terrae mox definiemus. Hic autem integrationi harum formularum non immoror, quam tum demum feliciori ſucceſſu ſum ſuſcepturus, cum has aequationes ad vſum commodiorem transformauero, vbi totum negotium multo facilius ſuccedet.

§. 3. Quoniam hic ambae coordinatae x et y, quarum valores ad quoduis tempus aſſignari oportet, maximis variationibus ſunt obnoxiae, dum per totam Planetae orbitam modo fieri poſſunt poſitiuae modo negatiuae, eas ante omnia ad alium axem transferri conueniet, vbi multo minores variationes ſint ſubiturae. Hunc in finem ſtatim motum medium eiusdem Planetae in calculum introduco, quo ſcilicet ſingulae reuolutiones motu aequabili circa ſolem in circulo peragantur. Ducatur igitur recta S M ad locum medium, quem Planeta eodem tempore eſt occupaturus; quippe qui locus ex tabulis mediorum motuum facillime innoteſcit. Vocemus igitur eius longitudinem,

nem, seu angulum $\Upsilon SM = \zeta$, qui ergo tempori est proportionalis, hancque rectam SM pro hoc tempore tanquam axem spectemus, ad quem locum Planetae P per coordinatas orthogonales referamus, quae sint

$Sq = X$, $qP = Y$, vnde iterum fit $vv = XX + YY$; ex his vero priores coordinatae ita definiuntur, vt sit

$$x = X \operatorname{cos.} \zeta - Y \operatorname{sin.} \zeta \text{ et } y = X \operatorname{sin.} \zeta + Y \operatorname{cos.} \zeta.$$

Atque nunc iam istud commodum sumus affecuti, vt, nisi Planeta enormem habuerit excentricitatem, hae quantitates X et Y exiguas tantum mutationes sint passurae, dum noua abscissa $Sq = X$ nunquam multum a distantia Planetae media a Sole est discrepatura; applicata autem $Pq = Y$ nunquam certos limites, non adeo remotos, est transgressura. Si enim Planeta excentricitate penitus careret, perpetuo foret X quantitas constans et $Y = 0$, quandoquidem hoc casu motus Planetae in motum medium recideret.

§. 4. Cum igitur sit $x = X \operatorname{cos.} \zeta - Y \operatorname{sin.} \zeta$, erit

$$dx = dX \operatorname{cos.} \zeta - dY \operatorname{sin.} \zeta - d\zeta (X \operatorname{sin.} \zeta + Y \operatorname{cos.} \zeta)$$

et denuo differentiando, ob $d\zeta$ constans, fiet

$$ddx = ddX \operatorname{cos.} \zeta - ddY \operatorname{sin.} \zeta - 2 d\zeta (dX \operatorname{sin.} \zeta + dY \operatorname{cos.} \zeta) - d\zeta^2 (X \operatorname{cos.} \zeta - Y \operatorname{sin.} \zeta).$$

Eodem modo, cum sit

$$y = X \operatorname{sin.} \zeta + Y \operatorname{cos.} \zeta, \text{ erit}$$

$$dy = dX \operatorname{sin.} \zeta + dY \operatorname{cos.} \zeta + d\zeta (X \operatorname{cos.} \zeta - Y \operatorname{sin.} \zeta) \text{ et}$$

$$ddy = ddX \operatorname{sin.} \zeta + ddY \operatorname{cos.} \zeta + 2 d\zeta (dX \operatorname{cos.} \zeta - dY \operatorname{sin.} \zeta) - d\zeta^2 (X \operatorname{sin.} \zeta + Y \operatorname{cos.} \zeta).$$

Hinc igitur colligimus sequentes valores:

$$d\,d\,x \cos.\zeta + d\,d\,y \sin.\zeta = d\,d\,X - 2\,d\zeta\,dY - X\,d\zeta^2$$
$$d\,d\,y \cos.\zeta - d\,d\,x \sin.\zeta = d\,d\,Y + 2\,d\zeta\,dX - Y\,d\zeta^2$$

§. 5. At vero ex aequationibus fundamentalibus ſequitur fore

$$\frac{d\,d\,x \cos.\zeta + d\,d\,y \sin.\zeta}{\Delta\,d\,\tau^2} = \frac{-x \cos.\zeta - y \sin.\zeta}{v^3} = \frac{-X}{v^3},$$
$$\frac{d\,d\,y \cos.\zeta - d\,d\,x \sin.\zeta}{\Delta\,d\,\tau^2} = \frac{-y \cos.\zeta + x \sin.\zeta}{v^3} = \frac{-Y}{v^3},$$

quae ergo aequationes, ſubſtitutis valoribus modo inuentis, nobis praebebunt ſequentes formulas per X et Y expreſſas:

$$\frac{d\,d\,X - 2\,d\zeta\,dY - X\,d\zeta^2}{\Delta\,d\,\tau^2} = \frac{-X}{v^3},$$
$$\frac{d\,d\,Y + 2\,d\zeta\,dX - Y\,d\zeta^2}{\Delta\,d\,\tau^2} = \frac{-Y}{v^3},$$

ex quibus ergo binas nouas coordinatas X et Y definiri conuenit.

§. 6. Antequam autem hoc negotium ſuſcipiamus, ex motu Terrae medio, quem pro penitus cognito aſſumere licet, quantitatem conſtantem Δ determinemus. Hunc in finem ſtatuamus diſtantiam mediam Terrae a Sole $= 1$, et iam loco Planetae P ſubſtituamus ipſam Terram, quaſi motu ſuo medio in circulo, cuius radius $= 1$, circa Solem moueretur, fietque hoc caſu $X = 1$ et $Y = 0$, hincque $v = 1$, vnde noſtrae aequationes euadent:

$$-\frac{d\zeta^2}{\Delta\,d\,\tau^2} = -1 \text{ et } 0 = 0.$$

Hinc ergo fit

$$d\zeta^2 = \Delta\,d\tau^2, \text{ ideoque } \Delta = \frac{d\zeta^2}{d\tau^2},$$

vbi ζ denotat longitudinem Terrae mediam, quae ſi pro tempore τ dierum vocetur $= t$, erit $\Delta = \frac{dt^2}{d\tau^2}$; ſicque in noſtris formulis loco $\Delta\,d\tau^2$ ſcribi conueniet dt^2. Quamobrem,

obrem, cum tempori propoſito τ reſpondeat motus Terrae medius, quem vtiqne pro cognito aſſumere licet, cum pro vno die ſit $t = 59'. 8, 19''$, hoc valore introducto pro quolibet Planeta habebimus ſequentes aequationes:

$$\frac{ddX - 2d\zeta dY - Xd\zeta^2}{dt^2} = \frac{-X}{v^3} \text{ et}$$
$$\frac{ddY + 2d\zeta dX - Yd\zeta^2}{dt^2} = \frac{-Y}{v^3}.$$

§. 7. Quia angulus ζ denotat longitudinem mediam Planetae, is ad angulum t datam tenebit rationem; quocirca ſi ſtatuamus $\zeta = nt$, ideoque $d\zeta = ndt$, aequationes noſtrae induent has formas:

$$\frac{ddX}{dt^2} - \frac{2ndY}{dt} - nnX = -\frac{X}{v^3} \text{ et}$$
$$\frac{ddY}{dt^2} + \frac{2ndX}{dt} - nnY = -\frac{Y}{v^3}.$$

Cum igitur ſit $\zeta = nt$, tempore vnius anni, quo fit $t = 360°$, fiet $\zeta = n. 360°$, qui eſt motus medius Planetae pro vno anno, hinc pro λ annis motus Planetae medius fiet $\lambda n. 360°$; vnde patet: Planetam integram reuolutionem eſſe abſoluturum, quando fit $\lambda n. 360° = 360$, ideoque $\lambda = \frac{1}{n}$, ita vt tempus periodicum Planetae futurum ſit $= \frac{1}{n}$ annis.

§. 8. Conſideremus nunc etiam diſtantiam mediam noſtri Planetae a Sole, quae ſit $= a$, ac tribuamus Planetae ipſum motum medium, quem ſcilicet eſſet ſecuturus, ſi omni excentricitate careret; tum ergo foret $Y = 0$ et $X = v = a$, pro quo ergo caſu formulae noſtrae dabunt $nn = \frac{1}{a^3}$, conſequenter $n = \frac{1}{a\sqrt{a}}$ et $0 = 0$; vnde, cum tempus periodicum Planetae modo ſit inuentum $= \frac{1}{n}$ annis, nunc erit $= a\sqrt{a}$ annis. Sicque patet regula *Kepleri* altera, qua ſtatuit, tempora periodica Planetarum ſequi rationem

nem ſesquiplicatam diſtantiarum mediarum. Cum enim aſſumſerimus diſtantiam Terrae mediam a Sole $= 1$, quia eius tempus periodicum eſt vnus annus, per hanc regulam tempus periodicum Planetae, cuius diſtantia a Sole media eſt $= a$, vtique aequari debebit $a \sqrt{a}$ annis.

§. 9. In computum nunc etiam trahamus excentricitatem orbitae Planetae, quae tamen non ſit adeo enormis, vt locus Planetae verus a medio non nimis diſcrepet; tum igitur abſciſſa noſtra $Sq = X$ non multum a diſtantia media a diſcrepabit, quem in finem ſtatuamus $X = a(1+x)$, applicatam vero $qP = Y = ay$, ita vt hae nouae quantitates x et y, quas cum iisdem literis ſupra adhibitis confundi non opportet, tantum fractiones numericas deſignent, certos limites non transgreſſuras. Hincque fiet diſtantia $v = a\sqrt{((1+x)^2 + yy)}$, quibus valoribus ſubſtitutis nanciſcemur ſequentes binas aequationes:

$$\frac{ddx}{dt^2} - \frac{2n\,dy}{dt} - nn(1+x) = \frac{-(1+x)}{a^3((1+x)^2+yy)^{\frac{3}{2}}}$$

$$\frac{ddy}{dt^2} + \frac{2n\,dx}{dt} - nny = \frac{-y}{a^3((1+x)^2+yy)^{\frac{3}{2}}},$$

vbi meminiſſe iuuabit, eſſe $n = \frac{1}{a\sqrt{a}}$ et $nn = \frac{1}{a^3}$; vnde, ſi loco $\frac{1}{a^3}$ ſcribamus nn, noſtrae aequationes erunt

$$\frac{ddx}{dt^2} - \frac{2n\,dy}{dt} - nn(1+x) = \frac{-nn(1+x)}{((1+x)+yy)^{\frac{3}{2}}}$$

$$\frac{ddy}{dt^2} + \frac{2n\,dx}{dt} - nny = \frac{-nny}{((1+x)^2+yy)^{\frac{3}{2}}}.$$

§. 10.

§. 10. Quatenus hic yy est valde paruum prae $(1+x)^2$, formula nostra irrationalis sequenti modo in seriem euoluetur:

$$((1+x)^2+yy)^{-\frac{3}{2}} = \frac{1}{(1+x)^3} - \frac{3\,yy}{2.\,(1+x)^5} + \frac{3.\,5.\,y^4}{2.\,4\,(1+x)^7} - \frac{3.\,5.\,7.\,y^6}{2.\,4.\,6\,(1+x)^9} + \text{etc.}$$

quo valore substituto nostrae aequationes euadent:

$$\frac{ddx}{dt^2} - \frac{2n\,dy}{dt} - nn\,(1+x) = \frac{-nn}{(1+x)^2} + \frac{3.\,nnyy}{2.\,(1+x)^4} - \frac{3.\,5.\,nny^4}{2.\,4\,(1+x)^6} + \frac{3.\,5.\,7.\,nny^6}{2.\,4.\,6\,(1+x)^8} \text{ etc.}$$

$$\frac{ddy}{dt^2} + \frac{2n\,dx}{dt} - nny = -\frac{nny}{(1+x)^3} + \frac{3\,nny^3}{2.\,(1+x)^5} - \frac{3.\,5.\,nny^5}{2.\,4\,(1+x)^7} + \frac{3.\,5.\,7.\,nny^7}{2.\,4.\,6\,(1+x)^9} \text{ etc.}$$

§. 11. Quatenus autem quoque x prae vnitate est valde paruum, denominatores nostrarum aequationum denuo in series conuertantur ope huius reductionis:

$$(1+x)^{-\lambda} = 1 - \lambda x + \frac{\lambda(\lambda+1)\,xx}{1.\,2} - \frac{\lambda(\lambda+1)(\lambda+2)\,x^3}{1.\,2.\,3} + \text{etc.}$$

vnde fit

$$\frac{1}{(1+x)^2} = 1 - 2x + 3xx - 4x^3 + 5x^4 - 6x^5 + 7x^6 - 8x^7 + \text{etc.}$$

$$\frac{1}{(1+x)^3} = 1 - 3x + 6xx - 10x^3 + 15x^4 - 21x^5 + 28x^6 - 36x^7 + \text{etc.}$$

$$\frac{1}{(1+x)^4} = 1 - 4x + 10xx - 20x^3 + 35x^4 - 56x^5 + 84x^6 - 120x^7 + \text{etc.}$$

$$\frac{1}{(1+x)^5} = 1 - 5x + 15xx - 35x^3 + 70x^4 - 126x^5 + 210x^6 - 330x^7 + \text{etc.}$$

$$\frac{1}{(1+x)^6} = 1 - 6x + 21xx - 56x^3 + 126x^4 - 252x^5 + 462x^6 - 792x^7 + \text{etc.}$$

etc. etc.

§. 12. Substituamus nunc istos valores in nostris aequationibus, ac terminos ad partem dextram secundum dimensiones, quas literae x et y in iis obtinent, disponamus;

 quo

quo clarius conuergentia terminorum ob oculos ponatur, ſiquidem literas x et y vt quantitates valde paruas reſpicere licet. Erit igitur

$$\begin{aligned}\frac{ddx}{dt^2}-\frac{2ndy}{dt}=\;&3nnx-3nnxx+4nnx^3-5nnx^4+6nnx^5-7nnx^6 \text{ etc.}\\ &+\tfrac{3}{2}nnyy-6nnxyy+15nnxxyy-30nnx^3yy+\tfrac{105}{2}nnx^4yy\\ &-\tfrac{15}{8}nny^4+\tfrac{45}{4}nnxy^4-\tfrac{315}{8}nnxxy^4\\ &+\tfrac{35}{16}nny^6\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\frac{ddy}{dt^2}+\frac{2ndx}{dt}=\;&+3nnxy-6nnxxy+10nnx^3y-15nnx^4y+21nnx^5y\\ &+\tfrac{3}{2}nny^3-\tfrac{15}{2}nnxy^3+\tfrac{45}{2}nnxxy^3-\tfrac{105}{2}nnx^3y^3\\ &-\tfrac{15}{8}nny^5+\tfrac{105}{8}nnxy^5.\end{aligned}$$

§. 13. Diuidamus has aequationes per nn, et cum ſit $nt=\zeta$, exiſtente ζ longitudine media Planetae, ſiue angulo ♈SM, quem ex tabula motuum mediorum Planetae ad quodvis tempus depromere licet, erit $ndt=d\zeta$ et $nndt^2=d\zeta^2$, vnde noſtrae aequationes aliquanto fient ſimpliciores, ſcilicet:

$$\begin{aligned}\frac{ddx}{d\zeta^2}-\frac{2dy}{d\zeta}=\;&3x-3xx+4x^3-5x^4+6x^5-7x^6 \text{ etc.}\\ &+\tfrac{3}{2}yy-6xyy+15xxyy-30x^3yy+\tfrac{105}{2}x^4yy \text{ etc.}\\ &-\tfrac{15}{8}y^4+\tfrac{45}{4}xy^4-\tfrac{315}{8}xxy^4 \text{ etc.}\\ &+\tfrac{35}{16}y^6 \text{ etc.}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\frac{ddy}{d\zeta^2}+\frac{2dx}{d\zeta}=\;&3xy-6xxy+10x^3y-15x^4y+21x^5y \text{ etc.}\\ &+\tfrac{3}{2}y^3-\tfrac{15}{2}xy^3+\tfrac{45}{2}xxy^3-\tfrac{105}{2}x^3y^3 \text{ etc.}\\ &-\tfrac{15}{8}y^5+\tfrac{105}{8}xy^5 \text{ etc.}\end{aligned}$$

§. 14. Iam obſeruauimus, ſi orbita Planetae excentricitate careret, perpetuo fore tam $x=0$ quam $y=0$. Eatenus igitur hae quantitates non euaneſcent, quatenus adeſt

adeſt excentricitas. Statuamus igitur excentricitatem eſſe $= e$, et cum ea tanquam ſatis exigua ſpectetur, facile intelligitur, ambas literas x et y per huiusmodi ſeries convergentes exprimi poſſe:

$$x = eP + eeQ + e^3R + e^4S + e^5T \text{ etc.}$$
$$y = ep + eeq + e^3r + e^4s + e^5t + e^6u \text{ etc.}$$

ex quibus ſtatim colligitur

$$dx = edP + eedQ + e^3dR + e^4dS + e^5dT + e^6dU + \text{etc.}$$
$$dy = edp + eedq + e^3dr + e^4ds + e^5dt + e^6du + \text{etc.}$$
$$ddx = eddP + eeddQ + e^3ddR + e^4ddS + e^5ddT + e^6ddU + \text{etc.}$$
$$ddy = eddp + eeddq + e^3ddr + e^4dds + e^5ddt + e^6ddu + \text{etc.}$$

tum vero pro membris compoſitis habebimus has formulas vsque ad poteſtatem ſextam ipſius e continuatas:

$$\begin{array}{lllll} xx = eePP + 2e^3PQ & + 2e^4PR & + 2e^5PS & + 2e^6PT \\ & + e^4QQ & + 2e^5QR & + 2e^6QS \\ & & & + e^6RR \end{array}$$

$$\begin{array}{llllll} xy = eepP & + e^3pQ & + e^4pR & + e^5pS & + e^6pT \\ & + e^3qP & + e^4qQ & + e^5qR & + e^6qS \\ & & + e^4rP & + e^5rQ & + e^6rR \\ & & & + e^5sP & + e^6sQ \\ & & & & + e^6tP \end{array}$$

$$\begin{array}{lllll} yy + eepp + 2e^3pq & + 2e^4pr & + 2e^5ps & + 2e^6pt \\ & + e^4qq & + 2e^5qr & + 2e^6qs \\ & & & + e^6rr \end{array}$$

$$\begin{array}{llll} x^3 = e^3P^3 + 3e^4PPQ & + 3e^5PPR & + 3e^6PPS \\ & + 3e^5PQQ & + 6e^6PQR \\ & & + e^6Q^3 \end{array}$$

$$
\begin{array}{rllll}
xxy = & e^3 pPP & + 2e^4 pPQ & + 2e^5 pPR & + 2e^6 pPS \\
 & & & + e^5 pQQ & + 2e^6 pQR \\
 & & + e^4 qPP & + 2e^5 qPQ & + 2e^6 qPR \\
 & & & & + e^6 qQQ \\
 & & & + e^5 rPP & + 2e^6 rPQ \\
 & & & & + e^6 sPP
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{rllll}
xyy = & e^3 ppP & + 2e^4 pqP & + 2e^5 prP & + 2e^6 psP \\
 & & & + e^5 qqP & + 2e^6 qrP \\
 & & + e^4 ppQ & + 2e^5 pqQ & + 2e^6 prQ \\
 & & & & + e^6 qqQ \\
 & & & + e^5 ppR & + 2e^6 pqR \\
 & & & & + e^6 ppS
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{rllll}
y^3 = & e^3 p^3 & + 3e^4 ppq & + 3e^5 ppr & + 3e^6 pps \\
 & & & + 3e^5 pqq & + 6e^6 pqr \\
 & & & & + e^6 q^3
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{rlll}
x^4 = & e^4 P^4 & + 4e^5 P^3 Q & + 4e^6 P^3 R \\
 & & & + 6e^6 PPQQ
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{rlll}
x^3 y = & e^4 pP^3 & + 3e^5 pPPQ & + 3e^6 pPPR \\
 & & & + 3e^6 pPQQ \\
 & & + e^5 qP^3 & + 3e^6 qPPQ \\
 & & & + e^6 rP^3
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{rlll}
xxyy = & e^4 ppPP & + 2e^5 ppPQ & + 2e^6 ppPR \\
 & & & + e^6 ppQQ \\
 & & + 2e^5 pqPP & + 4e^6 pqPQ \\
 & & & + 2e^6 prPP \\
 & & & + e^6 qqPP
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{rlll}
xy^3 = & e^4 p^3 P & + 3e^5 ppqP & + 3e^6 pprP \\
 & & & + 3e^6 pqqP \\
 & & + e^5 p^3 Q & + 3e^6 ppqQ \\
 & & & + e^6 p^3 R
\end{array}
$$

$y^4 = e^4$

$$y^4 = e^4 p^4 + 4 e^5 p^3 q + 4 e^6 p^3 r$$
$$+ 6 e^6 p p q q$$
$$x^5 = e^5 P^5 + 5 e^6 P^4 Q$$
$$x^4 y = e^5 p P^4 + 4 e^6 p P^3 Q$$
$$+ e^6 q P^4$$
$$x^3 y y = e^5 p p P^3 + 3 e^6 p p P P Q$$
$$+ 2 e^6 p q P^3$$
$$x x y^3 = e^5 p^3 P P + 3 e^6 p p q P P$$
$$+ 2 e^6 p^3 P Q$$
$$x y^4 = e^5 p^4 P + 4 e^6 p^3 q P$$
$$+ e^6 p^4 Q$$
$$y^5 = e^5 p^5 + 5 e^6 p^4 q$$
$$x^6 = e^6 P^6$$
$$x^5 y = e^6 p P^5$$
$$x^4 y y = e^6 p p P^4$$
$$x^3 y^3 = e^6 p^3 P^3$$
$$x x y^4 = e^6 p^4 P P$$
$$x y^5 = e^6 p^5 P$$
$$y^6 = e^6 p^6$$

§. 15. Concipiamus nunc omnes hos valores in noſtris aequationibus ſubſtitui, et quia quantitates P, Q, R et p, q, r ab excentricitate e immunes eſſe debent, neceſſe eſt, vt in his aequationibus omnes termini, paribus poteſtatibus ipſius e affecti, ſeorſim inter ſi aequentur, vnde vtraque aequatio in plures diſcerpetur, dum ſcilicet omnes termini ſimpliciter per e multiplicati inter ſe aequales ſtatuuntur, deinde vero illi termini, qui per $e\,e$ ſunt

 affecti,

affecti, tum ii, qui per e^3 ſunt affecti etc. Hoc igitur modo plures adipiſcimur ordines aequationum, ex quibus quantitates incognitas P, Q, R, S et p, q, r, s etc. determinari oportebit. Hos igitur ordines aequationum hic ob oculos ponamus.

Ordo primus,

continens partes ſola litera e affectas.

I. $\frac{ddP}{d\zeta^2} - \frac{2dp}{d\zeta} = 3P$

II. $\frac{ddp}{d\zeta^2} + \frac{2dP}{d\zeta} = 0.$

Ordo ſecundus,

continens partes per ee affectas.

I. $\frac{ddQ}{d\zeta^2} - \frac{2dq}{d\zeta} = 3Q - 3PP + \frac{3}{2}pp$

II. $\frac{ddq}{d\zeta^2} + \frac{2dQ}{d\zeta} = 3Pp$

Ordo tertius,

continens partes per e^3 affectas.

I. $\frac{ddR}{d\zeta^2} - \frac{2dr}{d\zeta} = 3R - 6PQ + 4P^3 + 3pq - 6ppP$

II. $\frac{ddr}{d\zeta^2} + \frac{2dR}{d\zeta} = 3pQ + 3qP - 6pPP + \frac{3}{2}p^3$

Ordo quartus,

continens partes per e^4 affectas.

I. $\frac{ddS}{d\zeta^2} - \frac{2ds}{d\zeta} = 3S - 6PR - 3QQ + 3pr + \frac{3}{2}qq - 6ppQ$
$+ 12PPQ - 12pqP - 5P^4 + 15ppPP - \frac{15}{8}p^4$

II. $\frac{dds}{d\zeta^2} + \frac{2dS}{d\zeta} = 3pR + 3qQ + 3rP - 12pPQ - 6qPP + \frac{9}{2}ppq$
$+ 10pP^3 - \frac{15}{2}p^3P$

Ordo

Ordo quintus,

continens partes per e^5 affectas.

$$\text{I.}\ \frac{ddT}{d\zeta^2} - \frac{2dt}{d\zeta} = 3T - 6PS - 6QR + 3ps + 3qr$$
$$+ 12PPR + 12PQQ - 12prP - 6qqP$$
$$- 20P^3Q + 30ppPQ + 30pqPP - \tfrac{15}{2}p^3q$$
$$+ 6P^5 - 30ppP^3 + \tfrac{45}{4}p^4P.$$

$$\text{II.}\ \frac{ddt}{d\zeta^2} + \frac{2dT}{d\zeta} = 3pS + 3qR + 3rQ + 3sP$$
$$- 12pPR - 6pQQ - 12qPQ - 6rPP$$
$$+ \tfrac{9}{2}ppr + \tfrac{9}{2}pqq + 30pPPQ + 10qP^3$$
$$- \tfrac{45}{2}ppqP - \tfrac{15}{2}p^3Q - 15pP^4 + \tfrac{45}{2}p^3PP$$
$$- \tfrac{15}{8}p^5$$

Ordo sextus,

continens partes per e^6 affectas.

$$\text{I.}\ \frac{ddU}{d\zeta^2} - \frac{2du}{d\zeta} = 3U - 6PT - 6QS - 3RR + 3pt$$
$$+ 3qs + \tfrac{3}{2}rr + 12PPS + 24PQR + 4Q^3$$
$$- 12psP - 12qrP - 12prQ - 6qqQ$$
$$- 12pqR - 6ppS - 20P^3R - 30PPQQ$$
$$+ 30ppPR + 15ppQQ + 60pqPQ$$
$$+ 30prPP + 15qqPP - \tfrac{15}{2}p^3r - \tfrac{45}{4}p^2q^2$$
$$+ 30P^4Q - 90p^2P^2Q - 60pqP^3 + 45p^3qP$$
$$+ \tfrac{45}{4}p^4Q - 7P^6 + \tfrac{105}{2}ppP^4 - \tfrac{315}{8}p^4PP + \tfrac{35}{16}p^6.$$

$$\text{II.}\ \frac{ddu}{d\zeta^2} + \frac{2dU}{d\zeta} = 3pT + 3qS + 3rR + 3sQ + 3tP$$
$$- 12pPS - 12pQR - 12qPR - 6qQQ$$
$$- 12rPQ - 6sPP + \tfrac{9}{2}ppS + 9pqr + \tfrac{3}{2}q^3$$
$$+ 30pPPR + 30pPQQ + 30qPPQ$$
$$+ 10rP^3 - \tfrac{45}{2}pprP - \tfrac{45}{2}pqqP - \tfrac{45}{2}ppqQ$$
$$- \tfrac{15}{2}p^3R - 60pP^3Q - 15qP^4 + \tfrac{135}{2}ppqPP$$
$$+ 45p^3PQ - \tfrac{75}{8}p^4q + 21pP^5 - \tfrac{105}{2}p^3P^3 + \tfrac{105}{8}p^5P.$$

§. 16.

§. 16. In conſtitutione horum ordinum tota vis iſtius methodi potiſſimum continetur, quae adeo multo latius patet, cum etiam eius ope motus lunares expediri queant. Cum enim hactenus ne vllam quidem integrationem tentauerimus, nunc binae aequationes cuiusque ordinis facili negotio integrari poterunt, namque in ordine primo tantum occurrunt binae incognitae P et p, quarum valores per integrationem ad functiones temporis ſiue anguli ζ reducuntur, quibus inuentis ſecundus ordo binas tantum incognitas Q et q complectitur, quas pari modo per tempus exprimere licebit; tum vero ſimili modo ex tertio ordine definientur literae incognitae R et r, et ita porro, vnde tandem veri valores pro binis incognitis principalibus x et y colligentur. Totum autem hoc integrationis negotium in ſequenti Problemate generali oſtendamus.

Problema generale.

§. 17. Propoſitis duabus aequationibus differentialibus ſecundi gradus:

$$\text{I. } \frac{ddZ}{d\zeta^2} - \frac{2dz}{d\zeta} = 3Z + M \text{ et}$$

$$\text{II. } \frac{ddz}{d\zeta^2} + \frac{2dZ}{d\zeta} = N,$$

vbi M et N denotant functiones quascunque temporis ſiue anguli ζ, inueſtigare valores binarum quantitatum incognitarum Z et z.

Solutio.

Incipiamus ab aequatione poſteriore, quae ducta in $d\zeta$ et integrata dat $\frac{dz}{d\zeta} + 2Z = \int N d\zeta$, vnde fit

$$\frac{dz}{d\zeta} = \int N\, d\zeta - 2\, Z,$$

qui valor in priore aequatione ſubſtitutus praebet

$\frac{ddZ}{d\zeta^2} - 2 \int N\, d\zeta + Z = M$, ſiue $\frac{ddZ}{d\zeta^2} + Z = M + 2 \int N\, d\zeta = L$, ponendo breuitatis ergo $L = M + 2 \int N\, d\zeta$. Conſtat autem, ſi eſſet $L = 0$, tum fore $Z = \alpha\, \text{coſ.}\, \zeta$, qui valor, etiamſi tantum eſt integrale particulare, tamen ſufficit ad integrale completum inueſtigandum. Statuamus igitur pro noſtro caſu eſſe $Z = v\, \text{coſ.}\, \zeta$, eritque

$$\frac{dZ}{d\zeta} = - v\, \text{ſin.}\, \zeta + \frac{dv}{d\zeta}\, \text{coſ.}\, \zeta \text{ et}$$
$$\frac{ddZ}{d\zeta^2} = - v\, \text{coſ.}\, \zeta - \frac{2\, dv}{d\zeta}\, \text{ſin.}\, \zeta + \frac{ddv}{d\zeta^2}\, \text{coſ.}\, \zeta,$$

ſicque noſtra aequatio euadet

$$\frac{ddv}{d\zeta^2}\, \text{coſ.}\, \zeta - \frac{2\, dv}{d\zeta}\, \text{ſin.}\, \zeta = L$$

quae per $d\zeta.\, \text{coſ.}\, \zeta$ multiplicata praebet

$$\frac{ddv}{d\zeta}\, \text{coſ.}\, \zeta^2 - 2\, dv\, \text{ſin.}\, \zeta\, \text{coſ.}\, \zeta = L\, d\zeta\, \text{coſ.}\, \zeta,$$

cuius integrale eſt

$$\frac{dv}{d\zeta}\, \text{coſ.}\, \zeta^2 = \int L\, d\zeta\, \text{coſ.}\, \zeta,$$

vnde colligitur

$$dv = \frac{d\zeta}{\text{coſ.}\, \zeta^2} \int L\, d\zeta\, \text{coſ.}\, \zeta,$$

quae aequatio denuo integrata dat

$$v = \int \frac{d\zeta}{\text{coſ.}\, \zeta^2} \int L\, d\zeta\, \text{coſ.}\, \zeta = \text{tang.}\, \zeta \int L\, d\zeta\, \text{coſ.}\, \zeta - \int L\, d\zeta\, \text{ſin.}\, \zeta,$$

quo valore inuento erit

$$Z = \text{ſin.}\, \zeta \int L\, d\zeta\, \text{coſ.}\, \zeta - \text{coſ.}\, \zeta \int L\, d\zeta\, \text{ſin.}\, \zeta,$$

vbi binae formulae integrales iam binas conſtantes per integrationes ingreſſas inuoluunt. Cum deinde ſit

$$\frac{dz}{d\zeta} = \int N\, d\zeta - 2\, Z, \text{ erit}$$
$$\frac{dz}{d\zeta} = \int N d\zeta - 2\, \text{ſin.}\, \zeta \int L\, d\zeta\, \text{coſ.}\, \zeta + 2\, \text{coſ.}\, \zeta \int L d\zeta\, \text{ſin.}\, \zeta,$$

 hinc-

hincque integrando deducitur

$$z = \int d\zeta \int N\, d\zeta - 2\int d\zeta\, \text{fin.}\, \zeta \int L\, d\zeta\, \text{cof.}\, \zeta$$
$$+ 2\int d\zeta\, \text{cof.}\, \zeta \int L\, d\zeta\, \text{fin.}\, \zeta$$

quae aequatio, ſi poſteriores formulae integrales duplicatae reducantur, ſequentem induet formam:

$$z = \int d\zeta \int N\, d\zeta + 2\,\text{cof.}\, \zeta \int L\, d\zeta\, \text{cof.}\, \zeta + 2\,\text{fin.}\, \zeta \int L\, d\zeta\, \text{fin.}\, \zeta$$
$$- 2\int L\, d\zeta.$$

§. 18. Reſtituamus nunc loco L valorem aſſumtum $M + 2\int N\, d\zeta$, ac pro valore ipſius Z reperiemus

$$\int L\, d\zeta\, \text{cof.}\, \zeta = \int M\, d\zeta\, \text{cof.}\, \zeta + 2\,\text{fin.}\, \zeta \int N\, d\zeta$$
$$- 2\int N\, d\zeta\, \text{fin.}\, \zeta \text{ et}$$
$$\int L\, d\zeta\, \text{fin.}\, \zeta = \int M\, d\zeta\, \text{fin.}\, \zeta - 2\,\text{cof.}\, \zeta \int N\, d\zeta$$
$$+ 2\int N\, d\zeta\, \text{cof.}\, \zeta,$$

vnde fit

$$Z = \text{fin.}\, \zeta \int M\, d\zeta\, \text{cof.}\, \zeta - \text{cof.}\, \zeta \int M\, d\zeta\, \text{fin.}\, \zeta$$
$$+ 2\int N\, d\zeta - 2\,\text{fin.}\, \zeta \int N\, d\zeta\, \text{fin.}\, \zeta - 2\,\text{cof.}\, \zeta \int N\, d\zeta\, \text{cof.}\, \zeta.$$

Deinde vero pro altero valore z, vbi eaedem formulae iam reductae occurrunt, habebimus

$$z = 2\,\text{cof.}\, \zeta \int M\, d\zeta\, \text{cof.}\, \zeta + 2\,\text{fin.}\, \zeta \int M\, d\zeta\, \text{fin.}\, \zeta$$
$$- 2\int M\, d\zeta - 4\,\text{cof.}\, \zeta \int N\, d\zeta\, \text{fin.}\, \zeta$$
$$+ 4\,\text{fin.}\, \zeta \int N\, d\zeta\, \text{cof.}\, \zeta - 3\int d\zeta \int N\, d\zeta.$$

§. 19. Quod ſi ergo M et N fuerint functiones quaecunque ipſius ζ, valores integrales pro Z et z inuenti non parum euadunt perplexi: Verum in reſolutione noſtrorum ordinum commode vſu venit, vt quantitates M et N perpetuo per ſinus et coſinus huiusmodi angulorum: $n\zeta + \alpha$, exprimantur, quemadmodum mox videbimus. Quando autem literae M et N huiusmodi induunt valores, tum integralia

tegralia quaesita satis succincte et concinne assignare licebit, id quod in sequenti Problemate speciali clarius ob oculos ponamus.

Problema speciale.

§. 20. Si binae aequationes differentiales secundi gradus huiusmodi habeant formam:

$$\text{I. } \frac{ddZ}{d\zeta^2} - \frac{2dz}{d\zeta} - 3Z = C \operatorname{cos.} (n\zeta + \alpha),$$

$$\text{II. } \frac{ddz}{d\zeta^2} + \frac{2dZ}{d\zeta} = c \operatorname{sin.} (n\zeta + \alpha),$$

inuenire valores integrales pro binis quantitatibus incognitis Z et z.

Solutio.

Haud difficulter quidem Solutio huius Problematis ex praecedenti deduci posset, siquidem valores integrales completi desiderarentur; verum quia pro nostro instituto integralia particularia sufficere possunt, quemadmodum in sequentibus manifesto patebit, ista integralia multo facilius inuestigare poterimus, quandoquidem forma integralium haud difficulter perspicitur. Hunc in finem statuamus $Z = F \operatorname{cos.} (n\zeta + \alpha)$ et $z = f \operatorname{sin.} (n\zeta + \alpha)$, vbi tantum coefficientes F et f definiri oportet. Substituamus igitur istos valores assumtos in binis nostris aequationibus propositis, et cum sit

$$\frac{dZ}{d\zeta} = -nF \operatorname{sin.} (n\zeta + \alpha) \text{ et } \frac{ddZ}{d\zeta^2} = -nnF \operatorname{cos.} (n\zeta + \alpha)$$

$$\frac{dz}{d\zeta} = +nf \operatorname{cos.} (n\zeta + \alpha) \text{ et } \frac{ddz}{d\zeta^2} = -nnf \operatorname{sin.} (n\zeta + \alpha)$$

aequatio prior in omnibus terminis continebit $\operatorname{cos.} (n\zeta + \alpha)$ posterior vero $\operatorname{sin.} (n\zeta + \alpha)$, quibus factoribus omissis eae induent has formas:

$$-nnF - 2nf - 3F = C \text{ et } -nnf - 2nF = 0$$

ex quibus inuestigari oportet literas F et f. Ex posteriore quidem statim colligitur $f = -\frac{2F}{n} - \frac{c}{nn}$, qui valor in priore substitutus praebet $-nnF + F + \frac{2c}{n} = C$, vnde fit

$$F = \frac{2c - nC}{n(nn-1)} \text{ et } f = \frac{2nC - c(3+nn)}{nn(nn-1)}.$$

§. 21. Pro hoc ergo casu proposito valores integrales quaesiti erunt

$$Z = \frac{2c - nC}{n(nn-1)} \operatorname{cos.}(n\zeta + \alpha) \text{ et } z = \frac{2nC - (3+nn)c}{nn(nn-1)} \operatorname{sin.}(n\zeta + \alpha)$$

atque hinc intelligitur, si quantitates M et N plures contineant huiusmodi terminos, veluti si aequationes nostrae essent

$$\frac{ddZ}{d\zeta^2} - \frac{2dz}{d\zeta} - 3Z = C \operatorname{cos.}(n\zeta + \alpha) + C' \operatorname{cos.}(n'\zeta + \alpha') + C'' \operatorname{cos.}(n''\zeta + \alpha'') + \text{etc.}$$

$$\frac{ddz}{d\zeta^2} + \frac{2dZ}{d\zeta} = c \operatorname{sin.}(n\zeta + \alpha) + c' \operatorname{sin.}(n'\zeta + \alpha') + c'' \operatorname{sin.}(n''\zeta + \alpha'') + \text{etc.}$$

tum, quia Z et z vbique vnicam tantum habent dimensionem, fore

$$Z = \frac{2c - nC}{n(nn-1)} \operatorname{cos.}(n\zeta + \alpha) + \frac{2c' - n'C'}{n'(n'n'-1)} \operatorname{cos.}(n'\zeta + \alpha') + \frac{2c'' - n''C''}{n''(n''n''-1)} \operatorname{cos.}(n''\zeta + \alpha'') + \text{etc.}$$

$$z = \frac{2nC - (3+nn)c}{nn(nn-1)} \operatorname{sin.}(n\zeta + \alpha) + \frac{2n'C' - (3+n'n')c'}{n'n'(n'n'-1)} \operatorname{sin.}(n'\zeta + \alpha') + \text{etc.}$$

His igitur praemissis singulos nostros ordines percurramus.

Resolutio aequationum primi ordinis.

§. 22. Quoniam hic binae aequationes propositae sunt:

$$\frac{ddP}{d\zeta^2} - \frac{2dp}{d\zeta} - 3P = 0,$$
$$\frac{ddp}{d\zeta^2} + \frac{2dP}{d\zeta} = 0$$

earum integratio ita in genere inſtituatur. Primo poſterior integrata dat $\frac{dp}{d\zeta} + 2P = \alpha$, vnde fit $\frac{dp}{d\zeta} = \alpha - 2P$, qui valor in prima ſubſtitutus praebet: $\frac{ddP}{d\zeta^2} + P = 2\alpha$. Ponatur hic, vt in ſolutione generali, $P = v \operatorname{cof.} \zeta$, fietque

$$\frac{ddv}{d\zeta^2} \operatorname{cof.} \zeta - \frac{2dv}{d\zeta} \operatorname{fin.} \zeta = 2\alpha$$

quae aequatio, in $d\zeta \operatorname{cof.} \zeta$ ducta et integrata, praebet

$$\frac{dv}{d\zeta} \operatorname{cof.} \zeta^2 = 2\alpha \operatorname{fin.} \zeta + \beta,$$

hincque fit

$$dv = \frac{2\alpha d\zeta \operatorname{fin.} \zeta}{\operatorname{cof.} \zeta^2} + \frac{\beta d\zeta}{\operatorname{cof.} \zeta^2},$$

vnde integrando oritur

$$v = \frac{2\alpha}{\operatorname{cof.} \zeta} + \beta \operatorname{tang.} \zeta + \gamma,$$

quocirca habebimus

$$P = 2\alpha + \beta \operatorname{fin.} \zeta + \gamma \operatorname{cof.} \zeta.$$

Tum vero porro erit

$$\frac{dp}{d\zeta} = -3\alpha - 2\beta \operatorname{fin.} \zeta - 2\gamma \operatorname{cof.} \zeta, \text{ vnde fit}$$
$$p = -3\alpha\zeta + 2\beta \operatorname{cof.} \zeta - 2\gamma \operatorname{fin.} \zeta + \delta$$

ſicque quatuor in calculum ingreſſae ſunt quantitates conſtantes α, β, γ, δ, quemadmodum integratio binarum aequationum differentialium ſecundi gradus poſtulat, vt integralia completa reperiantur.

§. 23. Quoniam noſtrum Problema vtique eſt determinatum, ex conditionibus quas inuoluit valores ſingularum harum conſtantium determinari oportet. Ac primo quidem quia angulus ζ denotat longitudinem mediam Planetae

netae, a qua locus verus nunquam vltra datos limites diſcrepare poteſt, manifeſtum eſt eſſe debere $\alpha = 0$. Niſi enim eſſet $\alpha = 0$, quantitas p, ideoque et x, creſcente ζ, tandem in infinitum excreſcere poſſet, id quod indicium eſſet, motum medium non rite eſſe conſtitutum, ex quo neceſſe eſt fieri $\alpha = 0$. Secundo ob eandem rationem quoque quarta conſtans δ nihilo aequari debet, vt locus medius cum vero in certis orbitae locis conueniat. Tertio pro binis reliquis conſtantibus faciamus $\beta = k \operatorname{ſin}. \varepsilon$ et $\gamma = k \operatorname{coſ}. \varepsilon$, vt obtineamus

$$P = k \operatorname{ſin}. \varepsilon \operatorname{ſin}. \zeta + k \operatorname{coſ}. \varepsilon \operatorname{coſ}. \zeta = k \operatorname{coſ}. (\zeta - \varepsilon) \text{ et}$$

$$p = 2 k \operatorname{ſin}. \varepsilon \operatorname{coſ}. \zeta - 2 k \operatorname{coſ}. \varepsilon \operatorname{ſin}. \zeta = - 2 k \operatorname{ſin}. (\zeta - \varepsilon)$$

ex quo poſteriore valore patet, ſi fuerit $\zeta = \varepsilon$, tum fore $p = 0$, ideoque etiam $y = 0$, quatenus ſcilicet a p pendet, ita vt hoc caſu locus verus cum medio conueniat. Quamobrem ſi aſſumamus cum Aſtronomis, hoc euenire in ipſo Aphelio, conſtans ε exhibebit longitudinem Aphelii. Tum vero pro quouis alio ſitu angulus $\zeta - \varepsilon$ exhibet anomaliam mediam, quae cum ſit praecipuum elementum in motu Planetarum, ſtatuamus breuitatis gratia $\zeta - \varepsilon = \theta$, eritque $P = k \operatorname{coſ}. \theta$ et $p = - 2 k \operatorname{ſin}. \theta$; vnde ex hoc ſaltem ordine erit $x = e k \operatorname{coſ}. \theta$, vbi $e k$ iam denotat excentricitatem, quandoquidem, ſumta anomalia media $\theta = 0$, foret diſtantia Planetae a Sole $a(1 + e k)$; at vero ſumto $\theta = 180^\circ$ prodiret diſtantia Perihelii $= a(1 - e k)$. Quare cum excentricitas ſupponatur $= e$, neceſſe eſt vt fiat $k = 1$, conſequenter conſtantibus noſtris rite determinatis reſolutio ordinis primi ita ſe habebit: $P = \operatorname{coſ}. \theta$ et $p = - 2 \operatorname{ſin}. \theta$; vbi θ exprimit anomaliam mediam, et cum ſit $\theta = \zeta - \varepsilon$, erit vtique $d\theta = d\zeta$, ideoque in ordinibus ſequentibus lo-

co

co $d\zeta$ ſcribere licebit $d\theta$, ita vt ſola anomalia media in calculum ſit ingreſſura.

Reſolutio aequationum ſecundi ordinis.

§. 24. In hoc ordine continentur quantitates incognitae Q et q, his aequationibus expreſſae:

$$\text{I. } \frac{ddQ}{d\theta^2} - \frac{2dq}{d\theta} - 3Q = -3PP + \tfrac{3}{2}pp,$$

$$\text{II. } \frac{ddq}{d\theta^2} + \frac{2dQ}{d\theta} = 3Pp;$$

vbi cum inuenerimus $P = \operatorname{coſ.}\theta$ et $p = -2\operatorname{ſin.}\theta$, erit

$P^2 = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\operatorname{coſ.}2\theta$, $Pp = -\operatorname{ſin.}2\theta$ et $pp = 2 - 2\operatorname{coſ.}2\theta$,

hincque noſtrae aequationes erunt

$$\frac{ddQ}{d\theta^2} - \frac{2dq}{d\theta} - 3Q = +\tfrac{3}{2} - \tfrac{9}{2}\operatorname{coſ.}2\theta = M,$$

$$\frac{ddq}{d\theta^2} + \frac{2dQ}{d\theta} = -3\operatorname{ſin.}2\theta = N$$

Quo nunc hic ſolutione ſpeciali (§. 20.) vti queamus, ambae literae M et N in duas partes diſcerptae concipiantur, quarum priores contineant angulum 0θ, alterae vero angulum 2θ, quandoquidem has literas ita repraeſentari licet: $M = \frac{3}{2}\operatorname{coſ.}0\theta - \frac{9}{2}\operatorname{coſ.}2\theta$ et $N = \operatorname{ſin.}0\theta - 3\operatorname{ſin.}2\theta$. Quia autem pro prioribus partibus fieret $n = 0$, formulae ſupra inuentae euadent incongruae, vnde hunc caſum ſeorſim euolui conueniet. Sit ergo in genere

$$\frac{ddZ}{d\theta^2} - \frac{2dz}{d\theta} - 3Z = C \text{ et } \frac{ddz}{d\theta^2} + \frac{2dZ}{d\theta} = 0,$$

vbi eſt $C = \frac{3}{2}$. Ex poſteriore aequatione fit $\frac{dz}{d\theta} = \alpha - 2Z$, vnde prior euadit $\frac{ddZ}{d\theta^2} + Z = 2\alpha + C = D$. Poſito nunc $Z = v\operatorname{coſ.}\theta$ erit $\frac{ddv}{d\theta^2}\operatorname{coſ.}\theta - \frac{2dv}{d\theta}\operatorname{ſin.}\theta = D$, quae aequatio ducta in $d\theta\operatorname{coſ.}\theta$ praebet integrale

$$\frac{dv}{d\theta}\operatorname{coſ.}\theta^2 = D\operatorname{ſin.}\theta + \beta, \text{ hincque}$$

$dv =$

$$d v = \frac{D\, d\,\theta\, \text{fin.}\,\theta}{\text{cof.}\,\theta^2} + \frac{\beta\, d\,\theta}{\text{cof.}\,\theta^2}$$

vnde integrando colligitur

$$v = \frac{D}{\text{cof.}\,\theta} + \beta\, \text{tang.}\,\theta + \gamma; \text{ erit ergo}$$

$$Z = D + \beta\, \text{fin.}\,\theta + \gamma\, \text{cof.}\,\theta, \text{ confequenter}$$

$$\frac{d\,z}{d\,\theta} = \alpha - 2\,D - 2\,\beta\, \text{fin.}\,\theta - 2\,\gamma\, \text{cof.}\,\theta$$

et integrando

$$z = \alpha\,\theta - 2\,D\,\theta + 2\,\beta\, \text{cof.}\,\theta - 2\,\gamma\, \text{fin.}\,\theta + \delta,$$

vbi ante omnia obferuandum eft, conftantem α ita accipi debere, vt fiat $\alpha - 2\,D = 0$, quia alioquin motus medius non rite effet conftitutus. Erit ergo

$$\alpha = 2\,D = 4\,\alpha + 2\,C, \text{ vnde fit } \alpha = -\tfrac{2}{3}\,C;$$

tum vero ob rationes fupra allegatas etiam effe oportet $\delta = 0$. Quod autem ad conftantes β et γ attinet, quia angulus θ in primo ordine iam rite conftitutus fupponitur, euidens eft poni debere $\beta = 0$ et $\gamma = 0$; ficque habebimus $Z = -\frac{1}{3}\,C$ et $z = 0$, qui valores adeo ex ipfis aequationibus differentialibus concludi potuiffent, dum fcilicet ambae vt conftantes effent fpectatae.

§. 25. Priores igitur partes pro litteris noftris Q et q praebent $Q = -\frac{1}{3}\,C = -\frac{1}{2}$ et $q = 0$; pro partibus autem pofterioribus, quia eft $n = 2$, formulae fupra (§. 20) exhibitae nulla laborant ambiguitate, et cum pro hoc cafu fit $C = -\frac{9}{2}$ et $c = -3$, colligitur $F = \frac{1}{2}$, et $f = \frac{1}{4}$, ita vt nunc fit $Z = \frac{1}{2}\,\text{cof.}\,2\,\theta$ et $z = \frac{1}{4}\,\text{fin.}\,2\,\theta$. Vtrosque ergo valores coniungendo habebimus pro ordine fecundo has determinationes:

$$Q = -\tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{2}\,\text{cof.}\,2\,\theta \text{ et } q = \tfrac{1}{4}\,\text{fin.}\,2\,\theta.$$

Refolu-

Resolutio aequationum tertii ordinis.

§. 26. Binae aequationes huius ordinis ita se habent:

$$\text{I. } \frac{ddR}{d\theta^2} - \frac{2dr}{d\theta} - 3R = -6PQ + 4P^3 + 3pq - 6ppP = M$$

$$\text{II. } \frac{ddr}{d\theta^2} + \frac{2dR}{d\theta} = 3pQ + 3qP - 6pPP + \tfrac{3}{2}p^3 = N.$$

Cum igitur iam inuenerimus

$$P = \text{cos. } \theta,\ p = -2 \text{ sin. } \theta,\ Q = -\tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{2} \text{ cos. } 2\theta \text{ et}$$
$$q = \tfrac{1}{4} \text{ sin. } 2\theta,$$

per notas reductiones angulorum, quibus est

$$\text{cos. } \alpha \text{ cos. } \beta = \tfrac{1}{2} \text{ cos. } (\alpha - \beta) + \tfrac{1}{2} \text{ cos. } (\alpha + \beta)$$
$$\text{sin. } \alpha \text{ cos. } \beta = \tfrac{1}{2} \text{ sin } (\alpha - \beta) + \tfrac{1}{2} \text{ sin. } (\alpha + \beta)$$
$$\text{sin. } \alpha \text{ sin. } \beta = \tfrac{1}{2} \text{ cos. } (\alpha - \beta) - \tfrac{1}{2} \text{ cos. } (\alpha + \beta)$$
$$\text{cos. } \alpha \text{ sin. } \beta = \tfrac{1}{2} \text{ sin. } (\alpha + \beta) - \tfrac{1}{2} \text{ sin. } (\alpha - \beta)$$

colligimus pro priore aequatione

$$PQ = -\tfrac{1}{4} \text{cos. } \theta + \tfrac{1}{4} \text{cos. } 3\theta,\ pq = -\tfrac{1}{4} \text{cos. } \theta + \tfrac{1}{4} \text{cos. } 3\theta,$$
$$P^3 = \tfrac{3}{4} \text{ cos. } \theta + \tfrac{1}{4} \text{ cos. } 3\theta,\ ppP = \text{cos. } \theta - \text{cos. } 3\theta,$$

hincque colligitur

$$M = -\tfrac{9}{4} \text{ cos. } \theta + \tfrac{25}{4} \text{ cos. } 3\theta.$$

Simili modo pro altera aequatione erit

$$pQ = \tfrac{3}{2} \text{ sin. } \theta - \tfrac{1}{2} \text{ sin. } 3\theta, \quad qP = + \tfrac{1}{8} \text{ sin. } \theta + \tfrac{1}{8} \text{ sin. } 3\theta,$$
$$pPP = -\tfrac{1}{2} \text{ sin. } \theta - \tfrac{1}{2} \text{ sin. } 3\theta,\ p^3 = -6 \text{ sin. } \theta + 2 \text{ sin. } 3\theta,$$

vnde fit

$$N = -\tfrac{9}{8} \text{ sin. } \theta + \tfrac{39}{8} \text{ sin. } 3\theta.$$

§ 27. Hic literae M et N iterum ex duabus constant partibus, pro quarum prioribus est $n = 1$, pro posterioribus autem $n = 3$. Priore autem casu formulae supra datae fiunt incongruae, vnde hunc casum seorsim euolui conueniet. Sit igitur

 $\frac{ddZ}{d\theta^2}$

$$\frac{ddZ}{d\theta^2} - \frac{2\,dz}{d\theta} - 3Z = C \operatorname{cos}.\theta \text{ et } \frac{ddz}{d\theta^2} + \frac{2\,dZ}{d\theta} = c \operatorname{sin}.\theta,$$

ita vt ſit $C = -\frac{9}{4}$ et $c = -\frac{9}{8}$. Iam ex poſteriore fit,

$$\frac{dz}{d\theta} = -c \operatorname{cos}.\theta - 2Z + \alpha,$$

hinque prior aequatio prodibit

$$\frac{ddZ}{d\theta^2} + Z = (C - 2c) \operatorname{cos}.\theta + 2\alpha.$$

Cum autem noſtro caſu ſit $C - 2c = 0$, habebimus

$$\frac{ddZ}{d\theta^2} + Z = 2\alpha.$$

Hinc ſi vt hactenus ponatur $Z = v \operatorname{cos}.\theta$, erit

$$\frac{ddv}{d\theta^2} \operatorname{cos}.\theta - \frac{2\,dv}{d\theta} \operatorname{ſin}.\theta = 2\alpha,$$

et integrando

$$\frac{dv}{d\theta} \operatorname{cos}.\theta^2 = 2\alpha \operatorname{ſin}.\theta + \beta, \text{ vnde colligitur}$$

$$dv = \frac{2\alpha\, d\theta \operatorname{ſin}.\theta}{\operatorname{coſ}.\theta^2} + \frac{\beta\, d\theta}{\operatorname{coſ}.\theta^2},$$

hincque porro

$$v = \frac{2\alpha}{\operatorname{coſ}.\theta} + \beta \operatorname{tang}.\theta + \gamma,$$

conſequenter

$$Z = 2\alpha + \beta \operatorname{ſin}.\theta + \gamma \operatorname{cos}.\theta, \text{ ex quo porro fit}$$

$$\frac{dz}{d\theta} = -c \operatorname{cos}.\theta - 3\alpha - 2\beta \operatorname{ſin}.\theta + 2\gamma \operatorname{cos}.\theta,$$

vnde reperitur

$$z = -c \operatorname{ſin}.\theta - 3\alpha\theta + 2\beta \operatorname{cos}.\theta - 2\gamma \operatorname{ſin}.\theta + \delta.$$

§. 28. Cum hic motum medium rite conſtitutum eſſe aſſumamus, neceſſe eſt vt ſit $\alpha = 0$, tum vero etiam debet eſſe $\delta = 0$. Quod autem ad conſtantes β et γ attinet, quia etiam Aphelium rite conſtitutum aſſumimus, debet etiam

etiam esse $\beta = 0$ et $\gamma = 0$, sicque valores nostri quaesiti erunt

$$Z = 0 \text{ et } z = -c \sin.\theta = +\tfrac{9}{8}\sin.\theta.$$

Hic autem probe obseruasse iuuabit, si non fuisset $C - 2c = 0$, ad terminos fuisse peruentum, qui ipsum angulum θ continuissent, quos nullo modo per constantes tollere licuisset. Hoc scilicet casu motus Planetae verus non ad medium reuocari potuisset; vnde ista conditio $C - 2c = 0$ necessario in natura rei est fundata, atque etiam in sequentibus ordinibus, quoties Sinus et Cosinus anguli simplicis θ occurrunt, semper necessario euadere debet $C = 2c$, indeque semper erit $Z = 0$ et $z = -c\sin.\theta$.

§. 29. Pro terminis autem posterioribus, angulum 3θ inuoluentibus, formulae supra datae tuto adhiberi possunt: erit enim

$$n = 3,\ C = \tfrac{75}{4} \text{ et } c = \tfrac{39}{8}, \text{ vnde fit } F = -\tfrac{3}{8} \text{ et } f = -\tfrac{7}{24},$$

quocirca ex hoc ordine nanciscimur sequentes determinationes:

$$R = -\tfrac{3}{8}\cos.3\theta \text{ et } r = +\tfrac{9}{8}\sin.\theta - \tfrac{7}{24}\sin.3\theta.$$

Resolutio aequationum quarti ordinis,

§. 30. Binae huius ordinis aequationes ita se habent:

$$\text{I. } \frac{ddS}{d\theta^2} - \frac{2ds}{d\theta} - 3S = \left.\begin{array}{l} -6PR - 3QQ + 3pr + 3qq \\ +6ppQ + 12PPQ - 12pqP \\ -5P^4 + 15ppPP - \tfrac{15}{8}p^4 \end{array}\right\} = M$$

II.

$$\text{II. } \frac{dds}{d\theta^2} + \frac{2ds}{d\theta} = \left.\begin{array}{l} 3pR + 3qQ + 3rP \\ -12pPQ - 6qPP + \frac{9}{2}ppq \\ +10pP^3 - \frac{15}{2}p^3P \end{array}\right\} = \text{N}.$$

Hic finguli termini, vt hactenus factum eſt, enoluantur, ac pro priore quidem aequatione reperietur:

$PR = -\frac{3}{16}\operatorname{cof.} 2\theta - \frac{3}{16}\operatorname{cof.} 4\theta$, $QQ = \frac{3}{8} - \frac{1}{2}\operatorname{cof.} 2\theta + \frac{1}{8}\operatorname{cof.} 4\theta$,

$pr = -\frac{9}{8} + \frac{17}{12}\operatorname{cof.} 2\theta - \frac{7}{24}\operatorname{cof.} 4\theta$, $qq = \frac{1}{32} - \frac{1}{32}\operatorname{cof.} 4\theta$,

$ppQ = -\frac{3}{2} + 2\operatorname{cof.} 2\theta - \frac{1}{2}\operatorname{cof.} 4\theta$, $PPQ = -\frac{1}{8} + \frac{1}{8}\operatorname{cof.} 4\theta$,

$pqP = -\frac{1}{8} + \frac{1}{8}\operatorname{cof.} 4\theta$, $P^4 = \frac{3}{8} + \frac{1}{2}\operatorname{cof.} 2\theta + \frac{1}{8}\operatorname{cof.} 4\theta$,

$ppPP = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\operatorname{cof.} 4\theta$, $p^4 = 6 - 8\operatorname{cof.} 2\theta + 2\operatorname{cof.} 4\theta$,

vnde colligitur:

$$\text{M} = -\frac{1221}{8} + \frac{251}{8}\operatorname{cof.} 2\theta - \frac{965}{64}\operatorname{cof.} 4\theta.$$

Pro altera vero aequatione erit

$pR = -\frac{3}{8}\operatorname{fin.} 2\theta + \frac{3}{8}\operatorname{fin.} 4\theta$, $qQ = -\frac{1}{8}\operatorname{fin.} 2\theta + \frac{1}{16}\operatorname{fin.} 4\theta$,

$rP = +\frac{5}{12}\operatorname{fin.} 2\theta - \frac{7}{48}\operatorname{fin.} 4\theta$, $pPQ = \frac{1}{2}\operatorname{fin.} 2\theta - \frac{1}{4}\operatorname{fin.} 4\theta$,

$qPP = \frac{1}{8}\operatorname{fin.} 2\theta + \frac{1}{16}\operatorname{fin.} 4\theta$, $ppq = \frac{1}{2}\operatorname{fin.} 2\theta - \frac{1}{4}\operatorname{fin.} 4\theta$,

$pP^3 = -\frac{1}{2}\operatorname{fin.} 2\theta - \frac{1}{4}\operatorname{fin.} 4\theta$, $p^3P = -2\operatorname{fin.} 2\theta + \operatorname{fin.} 4\theta$,

vnde colligitur

$$\text{N} = \frac{21}{4}\operatorname{fin.} 2\theta - \frac{61}{8}\operatorname{fin.} 4\theta.$$

§. 30. Hic igitur occurrunt tres partes, quarum prima eſt conſtans, ſecunda vero angulo 2θ et tertia angulo 4θ affecta. Pro prima igitur parte erit

$$\text{C} = -\frac{1221}{8},\ c = 0 \text{ et } n = 0,$$

vnde, quemadmodum in ordine ſecundo iam vidimus, colligitur

$$\text{Z} = -\frac{1}{3}\text{C} = +\frac{407}{8} \text{ et } z = 0.$$

Porro

Porro pro ſecunda parte eſt

$$n = 2,\ C = \tfrac{251}{8} \text{ et } c = \tfrac{21}{4}, \text{ vnde fit}$$

$$F = \frac{2c - 2C}{6} = \frac{c - C}{3} = -\tfrac{209}{24} \text{ et } f = -F - \tfrac{c}{4} = \tfrac{355}{48}.$$

Pro tertia tandem parte, vbi

$$n = 4,\ C = -\tfrac{963}{64} \text{ et } c = -\tfrac{61}{8}, \text{ erit}$$

$$F = \frac{2c - 4C}{60} = \frac{c - 2C}{30} = +\tfrac{719}{960}, \text{ hincque}$$

$$f = -\tfrac{F}{2} - \tfrac{c}{16} = \tfrac{49}{480},$$

quibus valoribus ſubſtitutis habebimus

$$S = \tfrac{407}{8} - \tfrac{209}{24} \operatorname{cof.} 2\theta + \tfrac{719}{960} \operatorname{cof.} 4\theta,$$

$$s = \tfrac{355}{48} \operatorname{fin.} 2\theta + \tfrac{49}{480} \operatorname{fin.} 4\theta.$$

§. 31. Nimis longum foret huiusmodi calculos pro ordinibus ſuperioribus exſequi, praecipue cum motus Planetarum primariorum iam aliunde ſatis ſit cognitus, atque hic inſtitutum noſtrum in eo tantum verſetur, vt ſpecimen huius nouae methodi tradamus. Omiſſis igitur ſequentibus ordinibus pro binis noſtris incognitis x et y ſequentes conſecuti ſumus valores:

$$x = e \operatorname{cof} \theta + ee\left(\tfrac{1}{2} - \tfrac{1}{2} \operatorname{cof.} 2\theta\right) - \tfrac{3}{8} e^3 \operatorname{cof.} 3\theta$$
$$+ e^4\left(\tfrac{407}{8} - \tfrac{209}{24} \operatorname{cof.} 2\theta + \tfrac{719}{960} \operatorname{cof.} 4\theta\right)$$

$$y = -2e \operatorname{fin.} \theta + \tfrac{1}{4} ee \operatorname{fin.} 2\theta + e^3\left(\tfrac{9}{8} \operatorname{fin.} \theta - \tfrac{7}{24} \operatorname{fin.} 3\theta\right)$$
$$+ e^4\left(\tfrac{355}{48} \operatorname{fin.} 2\theta + \tfrac{49}{480} \operatorname{fin.} 4\theta\right),$$

§. 31. Inuentis autem his valoribus x et y innoteſcet angulus M S P, qui vocatur aequatio centri Planetae, quae ſi ponatur $= \omega$, erit longitudo Planetae vera

$$= \Upsilon S P = \zeta + \omega;$$

vbi ζ denotat longitudinem Planetae mediam. Pro aequatioquatione autem centri ω, ob

$$Sq = a(1+x) \text{ et } Pq = ay, \text{ erit tang. } \omega = \frac{y}{1+x};$$

denique ex ipſa hac aequatione ω colligetur diſtantia Planetae a Sole

$$SP = \frac{a(1+x)}{\text{coſ. }\omega} = a(1+x) \text{ ſec. } \omega,$$

vbi a deſignat diſtantiam Planetae mediam a Sole.

§. 32. Pro Planetis quidem primariis neutiquam conſultum foret eiusmodi tabulas conſtruere, quae pro ſingulis anomaliis mediis exhiberent valores litterarum x et y, cum tabularum conſuetarum ope totum negotium multo facilius expediri queat. Verum ſi perturbationes, quas Planetae ob actionem mutuam ſibi inferunt, inueſtigare voluerimus, tum iſtam methodum, etſi per ſe non parum moleſtam, pari ſucceſſu applicare licebit, dum contra aliae methodi ob ſummam integrationum difficultatem vix in vſum vocari poſſunt. Huius igitur methodi vis potiſſimum in eo conſiſtit, quod in ſingulis ordinibus, quos conſtituimus, negotium integrationis mira facilitate expediri poteſt, id quod in hac diſſertatione inprimis oſtendere mihi erat propoſitum, quo facilius noua theoria mea motuum lunarium diiudicari poſſit, quandoquidem ea tota iſti artificio inuititur.

DE ECLIPSI SOLIS
ANNO 1778
DIE 24 IVNII ST. NOV. OBSERVATA.

Auctore

A. I. LEXELL.

§. 1.

Quum huius Eclipsis in plurimis atque valde dissitis locis institutae sint obseruationes, magnum hinc subsidium adfertur, siue pro detegendis, seu confirmandis differentiis Meridianorum inter loca, in quibus hae obseruationes factae habentur. Inter illas vero praecipuum locum tuetur Petropolitana, quod per hanc correctio Latitudinis Lunae ex Tabulis desumtae, exactius quam ex aliis quibuscunque determinari queat; quamobrem antequam ad reliquas obseruationes progredior, in vsum Astronomorum breuem expositionem meae circa hanc Eclipsin obseruationis, tradere animus est.

§. 2. Primum igitur pro motu Penduli, diebus Eclipsin siue praecedentibus, seu sequentibus institutae sunt obseruationes:

Die

	Temp. Pend.
Die 19 Iunii, Meridies verus	$0^h. 9'. 56'', 6$
22 - - -	0. 11. 29, 5
27 - - -	0. 14. 11, 1

Quare quum pro his diebus ſint pro momentis meridierum aequationes temporis

$$+ 48'', 2; + 1'. 27'', 1; + 2'. 30'', 6,$$

fiet acceleratio Penduli inter 19 et 22 Iunii interuallo 24 horarum $18''$, 0, tumque inter 22 et 27 Iunii, pro eodem temporis interuallo $19''$, 6, medium harum determinationum eſſet $18''$, 8. Verum quum ex aliis obſeruationibus conſtet, determinationes pro diebus 19 et 22 Iunii maiorem mereri fidem quam illam pro 27 Iunii, accelerationem ſupponamus $18''$, 5, qua poſita fiet pro Meridie die 24 Iulii, tempus Penduli $0^h. 12'. 32''$, 3, hincque pro tempore principalium obſeruationum initii et finis huius Eclipſis. Tempus Penduli anteuertet tempus verum $12'. 40''$ et $12'. 41''$.

§. 3. Iſta autem momenta commemorata ſecundum meam obſeruationem, ita habentur aſſignata:

	Temp. Pend.	Temp. vero
Initium Eclipſis	$6^h. 13'. 47''$	$6^h. 1'. 7''$
Finis - -	7. 5. 26	6. 52. 45

Praeter has vero, circa diſtantias cornuum ſequentes Micrometro obiectiuo inſtitutae ſunt obſeruationes :

Temp.

Temp. Pend.		Temp. vero		Dist. corn.
$6^h. 25'. 26''$	-	$6^h. 12'. 46''$	-	$12'. 28''$
27. 45	-	15. 5	-	13. 37
29. 13	-	16. 33	-	14. 10
31. 13	-	18. 33	-	15. 4
32. 27	-	19. 47	-	15. 14
35. 41	-	23. 1	-	15. $38\frac{1}{2}$
36. 59	-	24. 19	-	15. 47
40. 35	-	27. 54	-	15. 43
41. 48	-	29. 7	-	15. 34
44. 55	-	32. 14	-	15. 12
49. 14	-	36. 23	-	14. 12

Sunt vero pleraeque istarum valde dubiae, quod statim ac Eclipsis inchoauerat Sol nubibus obtegeretur, quae tamen ad finem vergente Eclipsi magis magisque dispellebantur, ita vt felici successu momentum Finis obseruare licuerit

§. 4. Antequam nos accingere liceat ad recensendas conclusiones siue ex his, seu ex aliis obseruationibus deductas, primum ipsa Elementa calculi ex Tabulis Astronomicis deducta adponere conueniet, vt eo tutior fides nostris calculis haberi queat.

Elementa ex Tabulis Aſtronomicis deducta, pro Eclipſi Solis A. 1778 d. 24 Iunii.

	Temp. medio Pariſ. $3^h. 38'$.	Temp. medio Pariſ. $4^h. 38'$.
Long. ☉ =	$3^s. 3^\circ. 3'. 32''$	$3^s. 3^\circ. 5'. 55''$
Aſc. ☉ =	93. 20. 4	93. 22. 38
Longit. ☽ =	3. 2. 57. 50	3. 3. 35. 26
Lat. ☽ =	$18'. 45'',1$	$22'. 14'',0$
Mot. horar. in Longit.	37. 36	
in Latit.	3. 29,3	
Mot. Solis horar.	2. 23	
Semidiam. ☉	15. 47	
Semidiam. ☽	16. 40,3	
Paralax. ☽ aequat.	61. 11,0	
Paral. ☽ — Paral. ☉	61. 2,5	

Si haec Elementa conferantur cum iſtis, quae in Ephemeridibus Berolinenſibus pro Anno 1778 reperiuntur, in plerisque quidem conſenſus adeſſe inuenietur; verum tamen pro binis Elementis, quae in computo Eclipſium inſignis ſunt momenti, haud exigua adeſt diſcrepantia. Nam in Ephemeridibus Latitudo Lunae certe 6'' vel 7'' iuſto maior adhibita eſt, tumque per inaduertentiam motus Lunae a Sole ibi ſtatuitur 35'. 22'', ſumta ſcilicet differentia inter motum Lunae in orbita et motum Solis, vbi tamen differentia inter motus Lunae et Solis in Ecliptica conſiderari debuiſſet. Caeterum quum calculum pro Latitudine Lunae non modo pro binis momentis iam allegatis, ſed etiam pro ipſo tempore, quo coniunctio Solis et Lunae contigit, inſtituerim, ſine vlla haeſitatione aſſeue-

aſſeuerare auſim, determinationem in Ephemeridibus Berolinenſibus pro Latitudine Lunae allatam erroneam eſſe.

§. 5. His praecognitis ſubiungamus quoque Elementa calculi pro qualibet obſeruatione huius Eclipſis a nobis computata, quae quidem ad tria ſequentia reſtringere licebit: Parallaxin Longitudinis Lunae, Latitudinem Lunae apparentem, et Diametrum eiusdem Aſtri apparentem.

	Pro initio	Pro fine	Parall. Long	Latit. ☽ appar.	Diam. ☽ appar.
Petropoli	$6^h. 1'. 7''$	- - -	$29'.39,''1$	$28'.25,''8$	$16'.46,''3$
		6. 52. 45	28. 36, 5	28. 5, 3	16. 44, 6
Berolini	4. 44. 50	- - -	34. 29, 1	20. 15, 1	16. 48, 0
		6. 12. 36	35. 54, 8	20. 42, 6	16. 45, 5
Manhemii	4. 23. 5	- - -	35. 42, 2	16. 43, 2	16. 50, 1
		6. 1. 28	38. 37, 1	17. 37, 1	16. 45, 8
Grenouici	3. 40. 11	- - -	30. 45, 5	16. 12, 1	16. 51, 7
		5. 25. 12	36. 30, 7	16. 35, 7	16. 47, 5
Cadix	3. 18. 53	- - -	37. 25, 7	1. 34, 0	16. 53, 1
		5. 26. 26	47. 41, 8	4. 15, 0	16. 46, 7
Coimbrae	3. 4. 17	- - -	33. 31, 8	4. 27, 0	16. 53, 6
		5. 12. 14	44. 41, 0	6. 19, 0	16. 47, 7
Stockholmiae	5. 4. 19	- - -	29. 25, 9	25. 33, 9	16. 48, 4
		6. 13. 26	29. 55, 1	25. 13, 9	16. 46, 0
Tuneti	4. 40. 21	- - -	45. 46, 3	6. 50, 0	16. 49, 0
		6. 29. 54	47. 41, 1	9. 51, 1	16. 43, 0
Maſſiliae	4. 12. 0	- - -	39. 16, 8	10. 58, 4	16. 50, 6
		6. 1. 46	43. 28, 0	12. 51, 6	16. 45, 2

	Pro initio	Pro fine	Parall. Longit.	Latit. ☽ appar.	Diam. ☽ appar.
Nancaei	$4^h.12'.44''$	- - -	$35'.32'',2$	$15'.31'',4$	$16'.50'',6$
	- - -	$5^h.55'.31''$	39. 14, 6	16. 32, 1	16. 46, 0
Bononiae	4. 40. 15	- - -	40. 30, 9	13. 43, 5	16. 49, 0
	- - -	6. 21. 50	42. 21, 8	15. 23, 9	16. 44, 3
Bruxellis	4. 3. 28	- - -	33. 12, 6	16. 43, 7	16. 50, 8
	- - -	5. 42. 52	37. 22, 3	17. 20, 9	16. 46, 7
Caleti	3. 48. 40	- - -	31. 54, 2	16. 12, 8	16. 51, 4
	- - -	5. 31. 30	37. 5, 7	16. 44, 2	16. 47, 2
Geneuae	4. 13. 56	- - -	37. 25, 9	13. 33, 3	16. 50, 5
	- - -	5. 29. 26	41. 14, 9	14. 57, 8	16. 45, 6
Hafniae	4. 39. 50	- - -	31. 41, 2	22. 7, 2	16. 49, 3
	- - -	6. 2. 44	33. 17, 8	22. 15, 8	16. 46, 1
Patauii	4. 41. 48	- - -	39. 58, 2	14. 34, 2	16. 49, 2
	- - -	6. 21. 41	41. 41, 8	16. 6, 2	16. 44, 4
Pisis	4. 35. 58	- - -	40. 47, 6	12. 49, 2	16. 49, 5
	- - -	6. 19. 28	42. 59, 2	14. 37, 4	16. 44, 3
Mediolani	4. 29. 9	- - -	39. 5, 0	13. 50, 2	16. 49, 8
	- - -	6. 12. 3	41. 45, 3	15. 22, 6	16. 44, 9
Hospitalit.	3. 39. 47	- - -	30. 41, 8	16. 13, 7	16. 51, 7
Christi Lond.	- - -	5. 25. 1½	36. 28, 5	16. 36, 4	16. 47, 5
Oxonii	3. 33. 45	- - -	29. 57, 8	16. 8, 4	16. 51, 9
	- - -	5. 19. 47	36. 8, 9	16. 25, 9	16. 47, 5
Leicestriae	3. 34. 5	- - -	29. 23, 0	16. 51, 5	16. 51, 9
	- - -	5. 18. 12	35. 21, 8	17. 1, 2	16. 47, 9
Windobonae	5. 1. 40	- - -	38. 49, 0	17. 57, 9	16. 48, 3
	- - -	6. 32. 49	39. 13, 6	19. 1, 9	16. 44, 1

Cremi-

	Pro initio.	Pro fine.	Parall. Longit.	Latit. ☽ appar.	Diam. ☽ appar.
Cremifani	$4^h.50'.43''$	- - -	$38'.25'',6$	$17'.12''.2$	$16'.48''.8$
	- - -	$6^h.24'.56''$	39. 31, 3	18. 19, 2	16. 44, 5
Vltraiecti	4. 4. 25	- - -	32. 22, 2	17. 49, 3	16. 50, 8
	- - -	5. 43. 39	36. 20, 1	18. 16, 9	16. 46, 7
Aureaci	4. 36. 32	- - -	37. 1, 5	16. 58, 2	16. 49, 5
	- - -	6. 12. 37	39. 3, 1	17. 58, 7	16. 45, 2
Caroli coronae	4. 53. 51	- - -	31. 53, 2	23. 5, 8	16. 48, 8
	- - -	6. 12. 20	32. 48, 7	23. 5, 9	16. 45, 8
Lundae	4. 42. 27	- - -	31. 47, 7	22. 15, 8	16. 49, 2
	- - -	6. 4. 58	33. 16, 1	22. 15, 1	16. 46, 0
Parifiis	3. 53. 20	- - -	33. 48, 4	14. 38, 8	16. 51, 3
Tolofatii	3. 52. 24	- - -	37. 16, 1	10. 1, 9	16. 51, 4
Ingolftadii	- - -	6. 13. 56	39. 7, 2	17. 59, 9	16. 45, 2
Göttingae	- - -	6. 2. 38	36. 53, 8	19. 10, 4	16. 45, 9
Lugduni Gallor.	- - -	5. 55. 27	41. 47, 3	14. 18, 2	16. 45, 6
Gedani	- - -	6. 27. 34	34. 12, 1	22. 53, 7	16. 44, 9

§. 6. Per haec Elementa, fi correctiones Latitudinis Lunae, fummae Diametrorum apparentium, atque Parallaxis Lunae exprimantur per y, δ, π, fequentes confequemur expreffiones pro tempore coniunctionis:

Pro Petropoli $5^h.37'.38'' + 3,48\,\delta + 3,04.y - 3,28.\pi$

$5.36.\ \ 4 - 3,38\,\delta - 2,92.y + 1,68.\pi$

hinc $94 + 6,86\,\delta + 5,96\,y - 4,96.\pi = 0$

Pro Berolino $4.29.36 + 2,18\,\delta + 1,35\,y - 1,86.\pi$

$4.28.39 - 2,21\,\delta - 1,40\,y + 0,05.\pi$

hinc $57 + 4,39\,\delta + 2,75\,y - 1,81.\pi = 0$

Pro

Pro Manhemio	$4^h.\ 9'.58''$	$+ 1,99\delta + 1,02y - 1,61.\pi$
	$4.\ 9.\ 2$	$- 2,02\delta - 1,10y - 0,33.\pi$
hinc	56	$+ 4,01\delta + 2,12y - 1,28.\pi = 0$
Pro Grenouico	$3.\ 36.\ 4$	$+ 1,96\delta + 0,97y - 1,43.\pi$
	$3.\ 35.\ 14$	$- 1,98\delta - 1,01.y - 0,32.\pi$
hinc	50	$+ 3,94\delta + 1,98.y - 1,11.\pi = 0$
Pro Gade	$3.\ 10.\ 42$	$+ 1,71\delta + 0,08.y - 1,07.\pi$
	$3.\ 10.\ 10$	$- 1,72\delta - 0,22.y - 1,21.\pi$
hinc	32	$+ 3,43\delta + 0,30.y + 0,14.\pi = 0$
Pro Conimbria	$3.\ 2.\ 18$	$+ 1,72\delta + 0,23.y - 1,03.\pi$
	$3.\ 1.\ 39$	$- 1,74\delta - 0,34.y - 1,06.\pi$
hinc	39	$+ 3,46\delta + 0,57.y + 0,03.\pi = 0$
Pro Stockh.	$4.\ 48.\ 36$	$+ 2,75\delta + 2,17.y - 2,44.\pi$
	$4.\ 47.\ 26$	$- 2,69\delta - 2,09.y + 0,86.\pi$
hinc	70	$+ 5,44\delta + 4,26.y - 3,20.\pi = 0$
Pro Tunete	$4.\ 16.\ 41$	$+ 1,74\delta + 0,37.y - 1,45.\pi$
	$4.\ 15.\ 54$	$- 1,79\delta - 0,54.y - 1,00.\pi$
vnde	47	$+ 3,53\delta + 0,91.y - 0,45.\pi = 0$
Pro Massilia	$3.\ 57.\ 26$	$+ 1,81\delta + 0,61.y - 1,41.\pi$
	$3.\ 56.\ 48$	$- 1,85\delta - 0,74.y - 0,85.\pi$
hinc	38	$+ 3,66\delta + 1,35.y - 0,56.\pi = 0$
Pro Nancaeo	$4.\ 1.\ 5$	$+ 1,98\delta + 1,02.y - 1,58.\pi$
	$4.\ 0.\ 7$	$- 1,97\delta - 0,99y - 6,41.\pi$
vnde	58	$+ 3,95\delta + 2,01.y - 1,17.\pi = 0$
Pro Bononia	$4.\ 21.\ 36$	$+ 1,88\delta + 0,79.y - 1,58.\pi$
	$4.\ 20.\ 51$	$- 1,94\delta - 0,92.y - 0,57.\pi$
vnde	45	$+ 3,82\delta + 1,71.y - 1,01.\pi = 0$
Pro Geneva	$4.\ 0.\ 43$	$+ 1.87\delta + 0,78.y - 1,48.\pi$
	$3.\ 59.\ 55$	$- 1,92\delta - 0,88.y - 0,56.\pi$
vnde	48	$+ 3,79\delta + 1,66.y - 0,92.\pi = 0$

Pro

Pro Hasnia	$4^h.26'.40''+2,32\delta+1,57.y-1,97.\pi$
	$4.25.23-2,33\delta-1,59.y+0,30.\pi$
hinc	$77+4,65\delta+3,16.y-1,67.\pi=0$
Pro Patavio	$4.23.32+1,90\delta+0,85.y-1,60.\pi$
	$4.22.30-1,96\delta-0,97.y-0,50\pi$
hinc	$62+3,86\delta+1,82.y-1,10.\pi=0$
Pro Pisis	$4.17.34+1,85\delta+0,73.y-1,55.\pi$
	$4.16.44-1,91\delta-0,86.y-0,62\pi$
ideoque	$50+3,76\delta+1,59.y-0,93.\pi=0$
Pro Mediolano	$4.12.52+1,88\delta+0,79.y-1,53.\pi$
	$4.12.4-1,93\delta-0,92.y-0,54.\pi$
hinc	$48+3,81\delta+1,71.y-0,99.\pi=0$
Pro Hospitalit.	$3.35.45+1,96\delta+0,97.y-1,43.\pi$
ChristiLondini	$3.35.8-1,98\delta-1,01.y-0,32.\pi$
vnde	$37+3,94\delta+1,98.y-1,11.\pi=0$
Pro Oxonio	$3.31.3+1,96\delta+0,99.y-1,41.\pi$
	$3.30.18-1,97\delta-0,99.y-0,31.\pi$
hinc	$45+3,93\delta+1,96.y-1,10.\pi=0$
Pro Leicestria	$3.31.39+1,99\delta+1,03.y-1,43.\pi$
	$3.30.37-2,00\delta-1,04.y-0,26.\pi$
hinc	$62+3,99\delta+2,07.y-1,17.\pi=0$
Pro Windobona	$4.41.51+2,05\delta+1,13.y-1,76.\pi$
	$4.40.43-2,09\delta-1,22.y-0,22.\pi$
hinc	$68+4,14\delta+3,35.y-1,54.\pi=0$
Pro Cremisano	$4.32.25+2,00\delta+1,06.y-1,73.\pi$
	$4.31.47-2,06\delta-1,16.y-0,26\pi$
hinc	$38+4,06\delta+2,32.y-1,47.\pi=0$
Pro Aureaco	$4.20.54+1,98\delta+1,02.y-1,66.\pi$
	$4.19.53-2,04\delta-1,13.y-0,27.\pi$
hinc	$61+4,02\delta+2,15.y-1,39.\pi=0$

Pro

Pro Carolicorona	$4^h.38'.22''+2,40\delta+1,71.y-2,12\pi$	
	$4.37.22-2,42\delta-1,72.y+0,43.\pi$	
hinc	$70+4,82\delta+3,43.y-2,55.\pi=0$	
Pro Lunda	$4.28.52+2,33\delta+1,59.y-2,00.\pi$	
	$4.27.48-2,33\delta-1,60.y+0,31.\pi$	
hinc	$64+4,66\delta+3,19.y-2,31.\pi=0$	
Pro Bruxellis	3. 54. 37 - - -	dubia
	$3.52.15-2,02\delta-1,07.y-0,28.\pi$	
Pro Calete	$3.42.35+1,97\delta+0,97.y-1,46.\pi$	
	3. 40. 45 - - -	dubia
Pro Ultrajecto	$3.55.50+2,03\delta+1,11.y-1,58.\pi$	dubia
	$3.55.50-2,06\delta-1,16.y-0,19.\pi$	
Pro Parisiis	$3.45.26+1,91\delta+0,86.y-1,43.\pi$	ex init.
Pro Tolosatio	$3.41.49+1,79\delta+0,54.y-1,30.\pi$	ex init.
Pro Ingolstadio	$4.21.\ 6-2,04\delta-1,13.y-0,27.\pi$	ex fine
Pro Göttinga	$4.14.58-2,10\delta-1,24.y-0,12.\pi$	ex fine
Pro Lugd. Gall.	$3.54.29-1,90\delta-0,84.y-0,46.\pi$	ex fine
Pro Gedano	$4.49.16-2,39\delta-1,68.y+0,37.\pi$	ex fine

§. 7. Quum autem pleraeque harum obseruationum a Clarissimis Astronomis Mediolanensibus *Francisco Reggio* et *Barnaba Oriani* supputatae fuerint, vbi nostri calculi ab illis Celeb. horum Astronomorum dissenserint, duplici Methodo computos omnes instituimus, quibus inter se consentientibus, nullum nobis superfuit dubium, quin nostris calculis fidem adhibere possemus. Et quod speciatim attinet obseruationem pro initio Bruxellis institutam, Parallaxis Longitudinis nequaquam inueniri poterit $34'.22'',4$, quemadmodum Celeb. *Reggio* eam statuit in Ephemerid. Mediolanens. pro Anno 1780. pag. 234, nec expressio

pro

pro tempore coniunctionis a Celeb. *Oriani* pag. 255. allata, rite ſe habet. Idem quoque valet de obſeruatione pro fine Caleti inſtituta, vbi tamen numeri a Celeb. *Reggio*, pro Parallaxi Longitudinis allati, ſatis bene ſe habent, et tempus coniunctionis ab ipſo inuentum $3^h. 41'. 45''$. idem fere prodit, quod prodiret, ſi concluſionum noſtrarum, ex fine et initio Eclipſis deductarum medium ſumeretur. Caeterum ſi Longitudo Bruxellorum a Pariſiis ſtatuatur $8'. 7''$ et Caletis $1'. 56''$ à l'Occid., nec obſeruatio Bruxellis inſtituta pro fine Eclipſis, vel iſta Caleti pro initio, omnimoda certitudine gaudent, quemadmodum ex determinationibus, pro differentia Meridianorum hinc deducendis, infra patebit.

§. 8. Si aequationes, ex concluſionibus pro tempore coniunctionis ſupra deductas, examinemus; facile patebit, coefficientes correctionum δ, y, π in ipſis tanta gaudere diſcrepantia, vt modo obſeruationibus omnimoda conſtaret fides, nulla difficultate hae correctiunculae, ſaltem proxime, determinari poſſent. Nam ſi concluſiones, ex obſeruationibus Gadeti et Conimbriae inſtitutis elicitas, conferamus cum concluſionibus, deductis ex obſeruationibus in Germania vel Anglia factis, tumque cum concluſionibus ex obſeruatione Petropolitana aut Stockholmienſi deductis, hinc binae reſultabunt aequationes, quibus quaepiam incognitarum δ, y, π exſulabit, binis reliquis manentibus, tumque earum ope binae reliquarum in numeris abſolutis exacte determinari poterant. Nam pro obſeruationibus primum commemoratis coefficientes ipſorum y, π valde ſunt exigui, pro obſeruationibus intermediis, y, π valores ſortiuntur mediocres, et in obſeruationibus, vltimo commemo-

mo-

moratis, coefficientes ipſorum y et π inſignes ſatis ſunt. Vt autem hoc euidentius conſtet, rem exemplo illuſtrabimus. Conferamus nimirum inter ſe concluſiones ex obſeruationibus Gadetanis, Oxonienſibus et Petropolitanis deductae, vbi quidem, ne errores obſeruationum quidquam turbent, loco numerorum abſolutorum litteras α, β, γ introducamus. Erit igitur

$\alpha + 3{,}43.\delta + 0{,}30.y + 0{,}14.\pi = 0$, ex obſeruatione Gadetana.

$\beta + 3{,}93\,\delta + 1{,}96.y - 1{,}10.\pi = 0$, ex obſeruatione Oxonienſi.

$\gamma + 6{,}86\,\delta + 5{,}96\,y - 4{,}96.\pi = 0$, ex obſeruatione Petropolit.

Ex prima fit $\delta = -0{,}292.\alpha - 0{,}087.y - 0{,}041.\pi$,

ex ſecunda $\delta = -0{,}254.\beta - 0{,}498.y + 0{,}280.\pi$,

ex tertia $\delta = -0{,}146.\gamma - 0{,}868.y + 0{,}723.\pi$,

Hinc per primam et ſecundam erit:

$$0 = -0{,}254\beta + 0{,}292.\alpha - 0{,}411.y + 0{,}321.\pi,$$

per primam et tertiam:

$$0 = -0{,}146.\gamma + 0{,}292.\alpha - 0{,}781.y + 0{,}764.\pi$$

quas aequationes omnino ita comparatas eſſe inuenimus, vt ex illis y et π ſatis exacte determinari poſſent, modo in numeris abſolutis α, β, γ errores inſigniores non adſint; quod quidem pro Eclipſibus Solis vix euitari poteſt, quum initium Eclipſis rarius eadem cum exactitudine obſeruari queat, ac finis Eclipſis, quin potius errores decem vel plurium ſecundorum in his obſeruationibus ſatis eſſe ſoleant frequentes. Pro caſu autem praeſenti facile colligitur, errorem in obſeruatione Gadetana commiſſum inſignem habere influxum, ad immutandum valorem correctionis δ.

§. 9.

§. 9. Propter incertitudinem igitur circa obſeruationes, pro determinandis correctionibus δ, y, π ita procedamus, vt certas conſtituamus hypotheſes pro valore ipſius π, de quo caeteroquin, ſiue affirmatiuus, ſeu negatiuus ſit, ex aliis obſeruationibus conſtat, eum vix 3 ſcrupula ſecunda excedere poſſe. Obſeruationibus igitur Petropoli, Stockholmiae et in Hoſpitalitio Chriſti Londini inſtitutis, hunc in finem electis, aequationes pro δ, y, π erunt:

$$94 + 6,86\,\delta + 5,96 . y - 4,96 . \pi = 0,$$

$$70 + 5,44\,\delta + 4,26 . y - 3,20 . \pi = 0,$$

$$37 + 3,94\,\delta + 1,98 . y - 1,11 . \pi = 0.$$

Quibus ſi $\pi = 0$, ſatisfaciunt $\delta = -5''$, $y = -10''$, tum ſi $\pi = -1$, erunt $\delta = -4$, $y = -12''$, et ſi $\pi = -2$, habebimus $\delta = -3$, $y = -14$. Verum iſti valores negatiui pro π vix admitti poſſunt, quod reliquae obſeruationes in Italia, Germania et Anglia factae hinc eo magis redderentur erroneae, nec ex altera parte, valor ipſius π poſitiuus admitti poſſe videtur, ſaltem ſi binis ſcrupulis ſecundis maior ſtatuatur, quod hinc δ valorem ſortiretur nimis magnum. Quicquid autem ſit, pro numeris abſolutis, tempori coniunctionis reſpondentibus, eruendis, ſuppoſuimus $\delta = -5''$, $y = -10''$ et $\pi = 0''$, quibus poſitis erit tempus coniunctionis pro Grenouico ex initio Eclipſis $3^h\ 35'.\ 44''$ et ex fine Eclipſis $3^h.\ 35'.\ 34''$, vbi ob diſcrepantiam $10'$, ſi ſupponamus finem Eclipſis cum quadruplo maiori certitudine obſeruari poſſe, ac initium, erit verum tempus coniunctionis Solis et Lunae pro Grenouico ex hac Eclipſi $3^h.\ 35'.\ 36''$, quod momentum nobis terminum comparationis conſtituet, ad quem reliquas obſeruationes referemus.

§. 10. Nunc igitur ſequuntur tam momenta pro tempore coniunctionis, quam differentiae Meridianorum inde elicitae:

	Tempus coniunct.		Differ. Meridian. a Grenouico.
Petropoli ex initio	$5^h. 36'. 50''$	- -	$2^h. 1'. 14''$ Or.
ex fine	5. 36. 50	- -	2. 1. 14
Berolini ex initio	4. 29. 12	- -	53. 36
ex fine	4. 29. 4	- -	53. 28
Manhemii ex initio	4. 9. 38	- -	34. 2
ex fine	4. 9. 23	- -	33. 47
Gade ex initio	3. 10. 33	- -	25. 3 Occ.
ex fine	3. 10. 21	- -	25. 15
Conimbriae ex initio	3. 2. 7	- -	33. 29
ex fine	3. 1. 51	- -	33. 45
Stockholmiae ex initio	4. 48. 1	- -	1. 12. 25 Or.
ex fine	4. 48. 0	- -	1. 12. 24
Tuneti ex initio	4. 16. 29	- -	40. 53 Or.
ex fine	4. 16. 8	- -	40. 32
Maſſiliae ex initio	3. 57. 11	- -	21 35
ex fine	3. 57. 5	- -	21. 29
Nancaei ex initio	4. 0. 45	- -	25. 9
ex fine	4. 0. 27	- -	24. 51
Bononiae ex initio	4. 21. 19	- -	43. 43
ex fine	4. 21. 11	- -	45. 35
Bruxellis ex fine	3. 52. 36	- -	17. 0
Caleti ex initio	3. 42. 15	- -	6. 39
Geneuae ex initio	4. 0. 25	- -	24. 49
ex fine	4. 0. 13	- -	24. 37
Hafniae ex initio	4. 26. 13	- -	50. 37
ex fine	4. 25. 51	- -	50. 15

Pa-

	Tempus coniunct.		Differ. Meridian. a Grenouico.
Patauii ex initio	$4^h. 23.' 14''$	- -	$47'. 38''$ Or.
ex fine	4. 22. 50	- -	47. 14
Pisis ex initio	4. 17. 17	- -	41. 42
ex fine	4. 17. 2	- -	41. 27
Mediolani ex initio	4. 12. 35	- -	36. 59
ex fine	4. 12. 23	- -	36. 45
Hospitalit. Christi	3. 35. 25	- -	11 Occ.
ex fine	3. 35. 28	- -	8
Oxonii ex initio	3. 30. 43	- -	4. 53
ex fine	3. 30. 38	- -	4. 58
Leicestriae ex initio	3. 31. 19	- -	4. 17
ex fine	3. 30. 57	- -	4. 39
Windobonae ex initio	4. 41. 29	- -	1^h. 5. 43 Or.
ex fine	4. 41. 6	- -	1. 5. 30
Cremisani ex initio	4. 32. 4	- -	56. 28
ex fine	4. 32. 9	- -	56. 33
Vltraiecti ex fine	3. 56. 11	- -	20. 35 Or.
Aureaci ex initio	4. 20. 34	- -	44. 58
ex fine	4. 20. 15	- -	44. 39
Carolicoronae ex initio	4. 38. 3	- -	1. 2. 27
ex fine	4. 37. 51	- -	1. 2. 15
Lundae ex initio	4. 28. 25	- -	52. 49
ex fine	4. 28. 16	- -	52. 40
Parisiis ex initio	3. 45. 8	- -	9. 32
Tolosatii ex initio	3. 41. 35	- -	5. 59
Ingolstadii ex fine	4. 21. 27	- -	45. 51
Göttingae ex fine	4. 15. 21	- -	39. 45
Lugduni Gallor. ex fine	3. 54. 47	- -	19. 11
Gedani ex fine	4. 49. 45	- -	1. 14. 9

Sin vero potius placuerit conclusiones, ex initio Eclipsis deductas, cum conclusione ex initio Grenouici obseruato comparare, differentiae Meridianorum pro locis a Grenovico versus Orientem sitis diminuentur 8'', pro locis vero occidentalioribus totidem secundis augerentur.

§. 11. Si cui videretur nos in fauorem obseruationis Stockholmiensis et Petropolitanae, reliquas magis iusto erroneas reddidisse, nostri instituti rationem facile reddere licebit. Scilicet si qui errores obseruationi Petropolitanae inessent, illi eiusmodi sunt, vt vix vllam prae se ferant verisimilitudinem; nam supponendum esset, initium Eclipsis iusto citius a me esse assignatum, cuius rei nulla probabilis ratio adferri potest. Nec quidem supponere licet, momentum finis iusto tardius a me esse constitutum, tum quod huiusmodi error minus frequens esse soleat, cum etiam quia sic ex fine Eclipsis differentia Meridianorum inter Grenouicum et Petropolin adhuc minor euaderet, ac $2^h. 1'. 14''$, quam duobus vel tribus secundis iusto minorem esse, videtur. Tum vero si supponeremus, in obseruatione Petropolitana errorem adesse 5'', neque tamen hoc errore admisso pleraeque reliquarum obseruationum plus quam a duo vel trium secundorum errore liberabuntur, vt praeter eam nonnullas adhuc dari obseruationes, vtpote Cremisfanensem et illam in Hospitalitio St. Christi institutam, quae potius arguerent, durationem Eclipsis Petropoli iusto breuius fuisse obseruatam. His igitur de caussis existimamus, nostras determinationes, si non prorsus exactas esse, saltem haud longe a veritate abludere posse.

§. 12.

§. 12. Vt autem eo magis confirmentur, quoque haud abs re erit, vt illas expressiones pro tempore coniunctionis inter se conferamus, in quibus coefficientes ipsorum δ, y, π, tam prope conueniant, vt ex eorum discrepantia non nisi error vnius vel alterius pro differentia Meridianorum oriri queat.

	Tempus conj. ex initio	Diff. Merid. a Grenouico.
Grenouici	$3^h.36'.\ 4''+1,96.\delta+0,97.y-1,43.\pi$	
Manhemii	$4.\ 9.58+1,99.\delta+1,02.y-1,61.\pi$	33'.54'' Or.
Nancaei	$4.\ 1.\ 5+1,98.\delta+1,02.y-1,58.\pi$	25. 1
Caleti	$3.42.35+1,97.\delta+0,97\,y-1,46.\pi$	6.31
Oxonii	$3.31.\ 3+1,96.\delta+0,97.y-1,41.\pi$	5. 1 Occ.
Leicestriae	$3.31.39+1,99.\delta+1,03.y-1,43.\pi$	4.25
Windobonae	$4.41.51+2,05.\delta+1,13.y-1,76.\pi$	1. 5.47 Or.
Cremifani	$4.32.25+2,00.\delta+1,06.y-1,73.\pi$	56.21
Aureaci	$4.20.54+1,98.\delta+1,02.y-1,66.\pi$	44.50
Parisiis	$3.45.26+1,94.\delta+0,86.y-1,43.\pi$	9.22
Bononiae	$4.21.36+1,88.\delta+0,79.y-1,58.\pi$	Diff. Merid. a Bononia.
Geneuae	$4.\ 0.43+1,87.\delta+0,78.y-1,48.\pi$	20'.53'' Oc.
Pataui	$4.23,32+1,90.\delta+0,85.y-1,60.\pi$	1.56 Or.
Pisis	$4.17,34+1,85.\delta+0,73.y-1,55.\pi$	4. 2 Occ.
Mediolani	$4.12,52+1,88.\delta+0,79.y-1,53.\pi$	8.44 Occ.
		Diff. Merid. inter Gades et Conim.
Gade	$3.10,42+1,71.\delta+0,08.y-1,07.\pi$	
Conimbriae	$3.\ 2,18+1,72.\delta+0,23.y-1,03.\pi$	8'. 24'' Oc.
		inter Massil. et Tunetum
Massiliae	$3.57,26+1,81.\delta+0,61.y-1,41.\pi$	
Tuneti	$4.16,41+1,74.\delta+0,37.y-1,45.\pi$	19'.15'' Or.

Bero-

	Tempus conj. ex initio	Diff. Merid. a Grenouico.
Berolini	$4^h.29',36''+2,18.\delta+1,35.y-1,86.\pi$	a Berolino.
Hafniae	$4.\ 26.\ 40+2,32\,\delta+1,57\,y-1,97.\pi$	$2'.56''$Occ.
Lundae	$4.\ 28.\ 52+2,33.\delta+1,59.y-2,00.\pi$	44
		a Lunda.
Caroli cor.	$4.\ 38.\ 32+2,40\,\delta+1,71.y-2,12.\pi$	9. 40
Massiliae	$3.\ 57.\ 26+1,81.\delta+0,61.y-1,41.\pi$	a Massilia.
Tolosatii	$3.\ 41.\ 49+1,79.\delta+0,54\,y-1,30.\pi$	15. 37

§. 13. Simili ratione pro fine Eclipsis habebimus:

	Tempus coniunct.	Diff. Merid. a Grenouico.
Grenouici	$3^h.35'.14''-1,98.\delta-1,01.y-0,32.\pi$	
Manhemii	$4.\ \ 9.\ \ 2-2,02.\delta-1,10.y-0,33.\pi$	$33'.48''$ Or.
Nancaei	$4.\ \ 0.\ \ 7-1,97.\delta-0,99.y-0,41.\pi$	24. 53
Bononiae	$4.\ 20\ 51-1,94.\delta-0\,92.y-0,57.\pi$	45. 37
Bruxellis	$3.\ 52.\ 15-2,02.\delta-1,07.y-0,28.\pi$	17. 1
Patauii	$4.\ 22.\ 30-1,96.\delta-0,97.y-0,50.\pi$	47. 16
Mediolani	$4.\ 12.\ \ 4-1,93.\delta-0,92.y-0,54.\pi$	36. 50
Oxonii	$3.\ 30.\ 18-1,97.\delta-0,99.y-0,31\,\pi$	4. 56Occ.
Leicestriae	$3.\ 30.\ 37-2,00.\delta-1,04\,y-0,26.\pi$	4. 37
Windobonae	$4.\ 40.\ 43-2,09.\delta-1,22.y-0,22.\pi$	$1^h.$ 5. 29 Or.
Cremisan	$4.\ 31.\ 47-2,06.\delta-1,16.y-0,26.\pi$	56. 33
Vltraiecti	$3.\ 55.\ 50-2,06.\delta-1,16.y-0,19.\pi$	20. 36
Ingolstadii	$4.\ 21.\ \ 6-2,04.\delta-1,13.y-0,27.\pi$	45. 52 Or.

Aureaci

	Tempus coniunct.	Diff. Merid. a Grenouico.
Aureaci	$4^h.19'.53''-2,04.\delta-1,13.y-0,27.\pi$	$44'.39''$
		a Bononia.
Bononiae	$4.\ 20.\ 51\ -1,94.\delta-0,92.y-0,57.\pi$	
Geneuae	$3.\ 59.\ 55\ -1,92.\delta-0,88\ y-0,56.\pi$	$20'.56''$Oc.
Pataauii	$4.\ 22.\ 30\ -1,96.\delta-0,97.y-0,50.\pi$	1. 39 Or.
Pisis	$4.\ 16.\ 44\ -1,91\ \delta-0,86.y-0,62.\pi$	4. 7Occ.
Mediolani	$4.\ 12.\ \ 4\ -1,93.\delta-0,92.y-0,54.\pi$	8. 47
Lugd. Gallor.	$3.\ 54.\ 29\ -1,90.\delta-0,84.y-0,46.\pi$	26. 22
		a Gade.
Gade	$3.\ 10.\ 10\ -1,72\ \delta-0,22.y-1,21.\pi$	
Conimbriae	$3.\ \ 1.\ 39\ -1,74.\delta-0,34.y-1,06.\pi$	$8'.31''$Oc.
		a Massilia.
Massiliae	$3.\ 56.\ 48\ -1,85.\delta-0,74.y-0,85.\pi$	
Tuneti	$4.\ 15.\ 54\ -1,79.\delta-0,54.y-1,00.\pi$	$19'.\ 6''$Or.
		a Berolino.
Berolini	$4.\ 28.\ 39\ -2,21.\delta-1,40.y+0,05.\pi$	
Windobonae	$4.\ 40.\ 43\ -2,09.\delta-1,22.y-0,22\ \pi$	$12'.\ 4''$Or.
Hafniae	$4.\ 25\ \ 23\ -2,33.\delta-1,59.y+0,30.\pi$	3. 16Occ.
Lundae	$4\ \ 27.\ 48\ -2,33.\delta-1,60.y+0.31.\pi$	0. 51Occ.
Göttingae	$4.\ 14.\ 58\ -2,10.\delta-1,24.y+0,12.\pi$	13. 41Occ.
		a Lunda
Lundae	$4.\ 27.\ 48\ -2,33.\delta-1,60.y+0,31.\pi$	
Hafniae	$4.\ 25.\ 23\ -2,33.\delta-1,59.y+0,30.\pi$	$2'.25''$Oc.
Caroli coron.	$4.\ 37\ \ 22\ -2,42\ \delta-1,72.y+0,43.\pi$	9. 34 Or.
Gedani	$4.\ 49.\ 16\ -2,39.\delta-1,68.y+0,37.\pi$	21. 28 Or.

§. 14. Heic igitur si statuatur Longitudo Bononiae a Meridiano Grenouicensi $45'$ $25''$ Or., Longitudo Gade $25'$ $10''$ Occid., Longitudo Massiliae $21'.$ $29''.$ Or., Lon-

 gitudo

gitudo Berolini 53′. 30″ item Orient., Longitudo denique Lundae 52′. 43″ Orientalis, prodibunt expreſſiones pro differentiis Meridianorum a Grenouico computatae, non multum diſcrepantes ab illis, quas iam in § 10 allegauimus, exceptis illis, quae ex obſeruationibus Bononienſibus deriuantur. Quum vero obſeruationes pro initio et fine Eclipſis, Bononiae inſtitutae, ſatis bene inter ſe conſentiant, ſi qui errores his obſeruationibus inſunt, illi praecipue deriuantur in ipſam determinationem temporis veri pro momentis obſeruationum. Caeterum pleraeque determinationes ſupra allatae cum determinationibus antea ſtabilitis ſatis bene conſentiunt, ſi obſeruationes Bruxellis et Caleti factas exceperis, in quibus vel ob hanc cauſſam criteria veritatis deſiderantur. Qui autem de hoc certior fieri voluerit, eum ablegamus ad noſtras diſſertationes de Eclipſi Solis anno 1769 et variis occultationibus fixarum Annis 1773 et 1774 obſeruatis. Denique quia pro Conimbria et Tunete, quod conſtat, non habeantur aliae obſeruationes, longitudini horum locorum ſtabiliendae inſeruientes, notare conuenit, nos cum Celeb. *Barnaba Oriani* ſuppoſuiſſe Latitudinem Conimbriae 40°. 14′, et Latitudinem Tunetis 36°. 40′.

§. 15. Quia in ſuperioribus demonſtratum eſt, veram coniunctionem Solis et Lunae ſecundum Eclipticam contingere Tempore vero Grenouicenſi 3^h. 35′. 36″, ſeu tempore medio 3^h. 37′. 29″, ideoque tempore medio Pariſino 3^h. 46′. 49″, Meridianorum differentia ſuppoſita 9′. 20″. Hoc igitur tempore

d. 24 Iunii 3^h. 46′. 49″ eſt Longit. ☉ et ☽ = 3^s. 3°. 3′. 53″ et
Latit. ☽ Bor. = 19′. 5,″8

Ideoque

Ideoque quum ex Tabulis *Mayeri* pro eodem tempore habeatur Longitudo Lunae $3^s. 3^\circ. 3'. 22''$ et Latitudo $19'. 15,''8$, colligitur correctio Longitudinis pro his Tabulis $+ 31''$ et correctio Latitudinis $- 10''$. Quod autem correctionem δ attinet, quam supra inuenimus $- 5''$, si valor pro diametro Solis $3''$ imminuatur, prouti mensurae a Celeb. *Short* requirere videntur, remanebunt adhuc $3,''5$, quibus siue vera semidiameter Lunae, seu etiam, propter inflexionem radiorum luminis, vel irradiationem quandam, summa semidiametrorum Solis et Lunae est diminuenda. Probe autem heic intelligendum est, has determinationes eatenus tantum veritati esse conformes, quatenus non solum ratio inter axin telluris et semidiametrum aequationis, quam nos supposuimus, locum habeat; sed etiam quatenus adsumere liceat, discos Solis et Lunae plane circulares habere figuras. Nam si hi disci ellipticae fuerint formae, pro aliis atque aliis obseruationibus correctio δ alium atque alium sortiri poterit valorem, vbi tamen, propter egregium consensum conclusionum ex Eclipsibus Solis deductarum, facile perspicitur, hanc differentiam vix vnum vel alterum scrupulum secundum excedere posse.

§. 16. Vt vero certior fierem, quantum diuersae hypotheses pro figura telluris efficere valerent, calculum repetere constitui pro obseruationibus Petropoli factis, sub hypothesi differentiae axium $\frac{1}{230}$, cum in prioribus calculis eam supposuissem $\frac{1}{200}$. Tum vero inueni ex obseruato initio Eclipsis tempus coniunctionis $5^h. 57'. 32''$, et ex obseruato fine $5^h. 36'. 13''$, quarum determinationum prior a supra inuenta $6''$, altera $9''$ differt, ita vt iam aequatio pro Petropoli futura eſſet: $79'' + 6,86\,\delta + 5,96\,y - 4,96\,\pi = 0$, vbi quidem, ſi $\delta = -5$, et $\pi = 0$, y non amplius eſſet niſi $-7,''5$; verum pro iſta hypotheſi haud omnino veriſimilitudine deſtituitur, valorem ipſius π aſſumi debere negatiuum, qui ſi ponatur $= -2$, valor ipſius y manebit vt ſupra. Caeterum pro iſthac hypotheſi nihil certi de correctionibus δ, y, π definire licet, priusquam calculi pro aliis obſeruationibus fuerint initi, vbi quidem obſeruare ſufficit, mutationes adeo inſignes in reliquas obſeruationes non induci, ac in Petropolitanam, ob coefficientes correctionum y, et π in reliquis obſeruationibus multo minores, ac in Petropolitana. Hunc autem laborem ſuſcipere e re non eſſe exiſtimavi, quod mihi ſufficeret, ſi correctionem Latitudinis Lunae cum exactitudine 3 vel 4 ſcrupulorum ſecundorum definiverim. Per hoc autem examen iam conſtat, nonnunquam de differentiis Meridianorum inſignes exoriri poſſe diſcrepantias, inter concluſiones ex obſeruationibus fixarum a Luna deductas, pro variis hypotheſibus figurae telluris; idque praeprimis dum quaeſtio eſt de obſeruationibus, in quibus coefficientes correctionum fuerint praemagni, hoc eſt quo magis Latitudo Lunae apparens Latitudinem alterius aſtri exceſſit, qui tamen caſus quum a caeteris facile dignoſci queant, eo ipſo certitudini concluſionum, ex his obſeruationibus deductarum, omnino vix quidquam derogabitur.

§. 17. Quamuis obſeruationes noſtrae pro diſtantiis cornuum omnino incertiores eſſent, quam vt ex illis quidquam tuto concludi poſſet, tamen experiri volui quantum a veritate aberrarent. In hunc igitur vſum calculum Parallaxium pro ſequentibus momentis inſtitui:

Temp.

Temp. vero Petropolit.	Parall. Longit. ☽	Latit. ☽ appar.	Diam. ☽ appar.
6^h. 1'. 5''	29'. 39'',1	28'. 25'',8	16'. 46'',3
6. 9. 42	29. 34, 7	28. 22, 9	16. 46, 1
6. 18. 18	29. 27, 8	28. 19, 7	16. 45, 8
6. 26. 54	29. 18, 6	28. 16, 4	16 45, 5
6. 35. 31	29. 6, 8	28. 13, 1	16. 45, 2
6. 44. 8	28. 52, 8	28. 9, 4	16. 44, 9
6. 52. 44	28. 36, 4	28. 5, 3	16. 44, 6

vbi quidem valores pro Parallaxi Longitudinis et Latitudine Lunae apparenti, optime inter ſe congruunt, ſiquidem differentiae ſecundae ad ſenſum conſtantes inueniantur. His igitur inuentis pro momentis obſeruationum, facili interpolatione, elementa calculi determinabuntur ſequentem in modum:

Temp vero Petrop.	Diſtant. corn.	Parall. Longit.	Latit. ☽ appar.	Diam. ☽ appar.
6^h. 12'. 46''	12'. 28''	29'.32,''5	28'.21'',8	16'.46'',0
15. 5	13. 37	29. 30, 7	28.20 ,9	16.45 ,9
16. 33	14. 10	29. 29, 4	28.20 ,1	16.45 ,9
18. 33	15. 4	29. 27, 5	28.19 ,6	16.45 ,8
19 47	15. 30	29. 26, 4	28.19 ,2	16.45 ,8
23. 1	15. 38½	29. 23, 0	28.18 ,0	16.45 ,7
24. 19	15. 47	29. 21, 6	28.17 ,4	16.45 ,6
27. 54	15. 43	29. 17, 4	28.16 ,0	16.45 ,5
29. 7	15. 34	29. 15, 9	28 15 ,6	16.45 ,4
32. 14	15. 12	29. 11, 6	28.14 ,4	16.45 ,3
36. 23	14. 12	29. 5, 2	28.12 ,7	16.45 ,2

 Verum

Verum facile patet, plerasque harum obferuationum ita comparatas efſe, vt ex illis de tempore coniunctionis vix quidquam concludi queat, quum minimi errores in obſervationibus commiſſi ad concluſiones immutandus plurimum valeant. Nihilominus determinationes ex obſeruatione ſecunda, tertia et vltima deriuatas, quippe quae correſpondentes ſunt, inter ſe comparabimus. Eſt igitur tempus coniunctionis

per ſecundam:	$5^h.39'.\ 5''+6{,}02\,\delta+5{,}76.y-5{,}55\pi$
per tertiam	$5.\ 39.\ 0+6{,}71.\delta+6{,}48.y-6{,}34\pi$
ex quibus medium	$5.\ 39.\ 3+6{,}37.\delta+6{,}12.y-5{,}95\pi$
Tum vero habetur	
ex vltima obſ.	$5.\ 33.\ 30-6{,}39.\delta-6{,}16.y+4{,}23\pi$
ideoque medium ſumendo	$5.\ 36.\ 17-0{,}01.\delta-0{,}04\,y-0{,}86\pi$

quae concluſio omnino rite ſe haberet, niſi in quapiam obſeruationum grauior quipiam deliteſceret error. Quum igitur ex ſuperioribus conſtet, tempus coniunctionis pro Petropoli incidere in $5^h.\ 36'.\ 50''$, facile hinc colligitur, vltimam obſeruationem errori grauiori eſſe obnoxiam. Pro correctione autem Latitudinis definienda melius quidem inſeruire poſſent obſeruationes noſtrae, modo rite ſe haberent. Igitur quum medium Eclipſis incidat in $6^h.\ 27'$ circiter Temp. Petropolitano, obſeruatio hunc in finem inſeruitura praecipue habetur octaua, pro qua eſt diſtantia apparens centrorum Solis et Lunae $1709''{,}4$, Latitudine Lunae exiſtente $1696''{,}0$, quarum differentia habetur $13''{,}4$, quod ſatis bene conſentit cum correctione Latitudinis ſupra allata; imprimis ſi ratio habeatur quantitatis, qua diameter Solis eſt diminuenda. Poſita enim ſemidiamidiametro Solis 15'. 45'', 5, fiet diſtantia centrorum 1707'', 6, quae Latitudinem apparentem tantum 15'', 6 ſuperat.

§. 18. Quum calculi a Celeb. Aſtronomis Mediolanenſibus pro hac Eclipſi a noſtris nonnunquam valde diſcrepent, haud praeter rem erit, vt huius diſcrepantiae rationes explicemus. Primum igitur, ſi concluſiones a Celeb. *Reggio* inuentae pro temporibus coniunctionum, tam pulchre conſentientes inter ſe habeantur, id ipſi Methodo, qua has concluſiones elicuit, eſt tribuendum; quippe quum ſecundum eius praeſcriptum, vtramque obſeruationem initii et finis Eclipſis inter ſe combinando, ex vtraque idem momentum pro tempore coniunctionis elici debet, modo calculi alias rite fuerint ſubducti. Verum hoc ipſo nihil probatur de praeſtantia talis Methodi, quin potius, meo quidem iudicio, vtramque obſeruationem ſeorſim conſiderare e re eſt, ſi alioquin quicquam certi iudicare quis voluerit de exactitudine ipſarum obſeruationum. His igitur in genere de Methodo, a Cel. *Reggio* adhibita, monitis, iam ipſius calculos propius examinemus, vbi quidem, quia omnes in cenſum vocare inutile foret, manebimus in calculo pro Mediolano.

§. 19. Hic igitur dum Parallaxes Longitudinis Lunae a Celeb. *Reggio* allatae cum noſtris ſat bene conſentiunt, in Parallaxibus Latitudinis inſignis oritur diſcrepentia. Nam pro initio Eclipſis eſt Parallaxis Latitudinis 34' 4'', 9, ideoque 23'', 6 minor, quam Celeb. *Reggio* ſtatuit; pro fine vero Eclipſis habetur Parallaxis Latitudinis 41'. 36'', 2, quae iterum 22'', 6 a determinatione Cel.

Celeb. *Reggio* differt, et huiusmodi quidem discrepantiae pro singulis obseruationibus occurrunt, ita vt concipere non valeam, quomodo laudatus hic Astronomus in his Parallaxibus computandis sit versatus. Hoc tamen dissensu non obstante, conclusiones ex calculis D. *Reggio* deductae omnino rite sibi constare poterunt, quod pro Methodo ab ipso adhibita tantum desideretur, vt differentia in Parallaxibus Latitudinis exacte sit assignata. Nec hypothesis ista, de diminutione semidiametrorum Solis et Lunae, multum in hoc negotio turbat, vtcunque gratuito et pluribus obseruationibus refragantibus illa sit supposita. Nam etsi pro casu praesenti tam insignis valor ipsius δ plerasque obseruationes ad consensum reduceret, tamen obstat, quod tribus obseruationibus, Massiliae, Cremisani et in Hospitalitio St. Christi institutis, errores sic inducerentur omni probabilitate destituti. Praeterea ex aliis obseruationibus colligere licet, correctionem Latitudinis pro casu praesenti haud multum $10''$ minorem esse posse, haec autem correctio cum valore ipsius $\delta = -11''$ nequaquam consistere potest, quum inde in obseruationem Petropolitanam deriuaretur error $41''$, et in obseruationem Stockholmiensem error $32''$, his praeterea erroribus omni probabilitate destitutis. Caeterum si cui placuerit examinare argumenta, quibus Celeb. *Du Séjour* diminutionem semidiametrorum ob inflexionem radiorum, stabiliuit $6'',5$, facile perspiciet, ista rite sibi non constare, nisi de Latitudine Lunae atque Parallaxi eius omnimoda adfuerit certitudo, id est, si haec Elementa paulo aliter assumantur, istam diminutionem locum amplius non habere. Nec nisi in casibus rarius obuenientibus, vnum vel alterum horum Elementorum independenter a reliquis definiri potest. Huiusmodi

iusmodi foret pro Eclipſi A. 1778 obſeruatio *Gadeti* inſtituta, quippe ex qua independenter fere a Latitudine Lunae et Parallaxi correctio δ determinaretur, quae foret $-9''$; verum ſi perpendamus initium Eclipſis rarius aeque exacte obſeruari, ac finem, ſi ſuppoſuerimus in obſeruatione initii decem tantum ſcrupulis ſecundis eſſe aberratum, et correctionem eſſe $6''$ negatiuam, pro correctione δ non amplius habetur niſi valor $-6''$. Sepoſita autem conſideratione diametri Solis, ex occultationibus fixarum a Luna concludere mihi viſus ſum, correctionem iſtam δ pro his caſibus vix $3''$ excedere poſſe. Verum quam hic locus non ſit, exactius de hac re diſquirendi, facile vnicuique permittimus, vt opinionem a ſe adoptatam ſequatur.

§. 20. Quod ad calculos Cel. *Oriani* attinet, expreſſionum pro tempore coniunctionis ab ipſo inuentarum diſcrepantia a noſtris explicatur per diuerſas hypotheſes, partim pro Latitudine Lunae, partim etiam pro figura telluris. Verum nonnunquam tamen diſſenſus reperiuntur, qui hinc explicari non poterunt. Nam, vt nihil de obſeruationibus Bruxellis et Caleti inſtitutis loquar, pro ipſa obſeruatione Mediolanenſi calculi Cel. *Oriani* vix ſibi rite conſtare poſſunt. Errorem autem inde prouenire exiſtimo, quod log ε ſuppoſitus ſit 9,9980893, qui calculo rite ſubducto habebitur $= 9,9990420$, vnde valores Parallaxium Longitudinis et Latitudinis iuſto minores prodiere. Tum vero obſeruandum, coefficientes correctionis π a Cl. *Oriani* ſuppoſitos pro initio Eclipſis rite ſe non habere; nam pro iſto momento patet, binarum partium capiendam eſſe ſummam, non vero differentiam, ſcilicet

 pars

pars ex Parallaxi Longitudinis oriunda tam pro initio, quam pro fine, habetur ſubtractiua. Caeterum nequaquam Cel. *Oriani* adſtipulari poſſumus, vbi contendit, aequationes ex hac Eclipſi elicitas prorſus ad vnam redire. Ad oculum enim patet, aequationem pro Gade ab illa pro Stockholmia valde eſſe diſcrepantem, quia in priori coefficientes ipſorum y et π valores ſortiuntur admodum exiguos.

§. 21. Pleraeque concluſionum in §. 10 allatarum egregie conueniunt cum illis, quae ex aliis obſeruationibus pro Longitudinibus locorum deductae ſunt, ideoque nouo argumento comprobant, quantum pretium tribuendum ſit obſeruationibus Eclipſium Solis, dum de differentiis Meridianorum inueſtigandis quaeſtio eſt, et ſi alicubi aliqua oriatur diſcrepantia, ea, prouti ex ratiociniis noſtris §. 12 et 13 allatis, concluditur, minime ipſi Methodo adſcribi poteſt. Sic ſi ex obſeruatione Ingolſtadienſi deducta differentia Meridianorum ab Obſeruatorio Grenouicenſi 45'. 51", 20" iuſto eſſet maior, prouti aliae obſeruationes id arguere videntur, hoc errori ipſius obſeruationis adſcribendum eſſe videtur. Similique ratione, dum Longitudines pro Bruxellis et Calete, ab antea inventis, vltra ſemiſſem minuti primi diſcrepant, id ſine dubio incertitudini ipſarum obſeruationum adſcribendum eſt. Contra vero, vbi obſeruationes exacte fuerint inſtitutae, concluſiones ex illis deductae tam bene conſentiunt, vt ſummum diſcrimen inter 5 ſcrupula ſecunda concludatur. Sic cum ex occultatione Palilicii, die 14 Aprilis 1774 Geneuae obſeruata, inueniſſemus differentiam huius loci a Meridiano Obſeruatorii Pariſini 15'. 14", vel

15'.

15'. 15'', quae iam per finem Eclipſis inuenitur 15' 17'', vix vllum eſt dubium, quo minus iſta differentia cum numeris iam allatis re ipſa tam prope congruat, vt ſummum diſcrimen 5 ſcrupula ſecunda excedere nequeat.

§. 22. In Ephemeridibus Berolinenſibus pro Anno 1780, occurrit calculus pro occultatione Palilicii die 29 Ianuarii 1776, Manhemii et Pariſiis obſeruata, per quem Cel. *Bode* concluſit, differentiam Meridianorum inter Obſeruatorium Pariſinum et Manhemienſe, eſſe 24'. 24''. Eundem calculum repetenti mihi concluſiones ab illis, quas inuenerat Cel. *Bode*, aliquantulum diuerſae ſe obtulerunt, quas heic exponam. Inueni igitur tempus coniunctionis pro Pariſiis,

ex immerſione: $11^h. 31'. 5'' + 1,89\,\delta + 0,27.y - 0,99.\pi$,
ex emerſione: $11.\ 31.\ 7 - 1,88.\delta - 0,12.y - 1,51.\pi$,

tumque pro Manhemia,

ex immerſione: $11.\ 55.\ 34 + 1,88\,\delta + 0,10\,y - 1,34.\pi$,
ex emerſione: $11.\ 55.\ 24 - 1,88.\delta + 0,07.y - 1,39.\pi$,

Hinc ex immerſione colligitur differentia Meridianorum 24. 29'' et ex emerſione 24'. 17'', quae concluſiones a ſupra inuentis haud multum diſſentiunt. Quod ad Longitudinem Obſeruatorii Piſis inſtituti attinet, illa quoque egregie per hanc Eclipſin confirmatur. Nam cum ex fine Eclipſis Solis, Anno 1769 obſeruatae, inueniſſemus huius loci Longitudinem 32'. 4'', a Meridiano Pariſino, illa per praeſentem Eclipſin inuenitur 32'. 7''.

SVPPLEMENTVM AD DISSERTATIONEM, DE

ECLIPSI SOLIS

ANNO 1778 OBSERVATA.

Auctore

A. LEXELL.

§. 1.

Tomo XV. Nouor. Commentariorum Methodum quandam propoſui, ex obſeruatis diſtantiis cornuum, vel partibus lucidis diſci Solis, in Eclipſibus Solis, concluſiones deducendi, quae pro determinandis differentiis Meridianorum ſatis exacte inſeruirent, modo ne ipſae obſeruationes vitio laborarent. Hanc Methodum cum poſtmodum variis exemplis illuſtrauerim, nunc quoque animus eſt eius adplicationem inſtituere ad obſeruationes circa quantitates Phaſium, Mediolani, Maſſiliae et in Hoſpitalitio Chriſti Londini, inſtitutas.

§. 2. Primum igitur ex obſeruationibus, Mediolani circa diſtantias centrorum inſtitutis, ſex priores, quae poſt inchoatam Eclipſin factae fuerunt, nec non ſex vltimae, ante finem Eclipſis, hunc in vſum eligendae fuerunt, quia ex huiusmodi obſeruationibus, quo magis a coniunctione appa-

apparente fuerint diſſitae, eo tutius de differentiis Meridianorum argumentari licet. Pro obſeruationibus igitur, poſt inchoatam Eclipſin inſtitutis, calculo Parallaxium inſtituto, inuenimus:

Temp. vero Mediol.	Paral. Longit.	Latit. ☽ app.	Diam. ☽ app.
$4^h. 29'. 9''$	$39'. 5''. 0$	$13'. 50'', 2$	$16'. 49'', 8$
4. 35. 9	39. 27, 4	13. 54, 5	16. 49, 5
4. 41. 9	39. 48, 2	13. 59, 1	16. 49, 2
4. 47. 9	40. 7, 4	14. 4, 1	16. 48, 9

hincque per interpolationem pro temporibus intermediis:

Temp. vero Mediol.	Parall. Long.	Latit. ☽ app.	Diam. ☽ app.
$4^h. 32'. 9''$	$39'. 16'', 4$	$13'. 52'', 3$	$16'. 49'', 7$
4. 38. 9	39. 38, 0	13. 56, 8	16. 49, 4
4. 44. 9	39. 58, 0	14. 1, 5	16. 49, 1

§. 3. His igitur determinatis, habebimus pro ipſis momentis obſeruatis:

Temp. vero Mediolani.	Parallaxis Longit.	Latitud. ☽ appar.	Diſtant. centr.
$4^h. 34'. 12''$	$39'. 23'', 7$	$13'. 53'', 8$	$30'. 13'', 1$
4. 38. 31	39. 39, 2	13. 57, 1	28. 8, 6
4. 41. 43	39. 49, 8	13. 59, 5	26. 49, 9
4. 43. 52	39. 57, 2	14. 1, 2	25. 48, 3
4. 46. 15	40. 4, 3	14. 3, 2	24. 55, 2
4. 48. 5	40. 10, 4	14. 4, 9	24. 0, 0

vnde calculo ſubducto inuenimus pro tempore coniunctionis has expreſſiones:

A. $4^h. 12'. 48'' + 1,92.\delta + 0,89.y - 1,61.\pi$,
B. $4. 12. 36 + 1,97.\delta + 0,98.y - 1,67.\pi$,
C. $4. 12. 52 + 1,98.\delta + 1,01.y - 1,71.\pi$,
D. $4. 12. 43 + 2,03.\delta + 1,11.y - 1,76.\pi$,
E. $4. 13. 3 + 2,07.\delta + 1,17.y - 1,80.\pi$,
F. $4. 12. 45 + 2,11.\delta + 1,25.y - 1,85.\pi$.

§. 4. Deinde pro momentis, finem Eclipsis proxime praeuertentibus, calculus Parallaxium has praebuit conclusiones:

Temp. vero Mediol.	Parall. Longit.	Latit. ☽ appar.
$5^h. 54'. 3''$	$41'. 52'', 0$	$15'. 5'', 6$
5. 57. 3	41. 51, 9	15. 8. 5
6. 0. 3	41. 51, 5	15. 11, 4
6. 3. 3	41. 50, 6	15. 14, 1
6. 6. 3	41. 49, 2	15. 16, 9
6. 9. 3	41. 47, 4	15. 19, 7
6. 12. 3	41. 45, 3	15. 22, 6

hincque colligemus pro ipsis momentis obseruatis:

Temp. vero Mediolani.	Parallaxis Longit.	Latitud. ☽ appar.	Distant. centr.
$5^h. 54'. 48''$	$41'. 52'', 0$	$15'. 6'', 4$	$23'. 58'', 3$
5. 57. 13	41. 51, 9	15. 8, 5	24. 53, 6
6. 0. 6	41. 51, 5	15. 11, 4	26. 25, 9
6. 2. 19	41. 50, 9	15. 13, 2	27. 25, 8
6. 5. 55	41. 49, 2	15. 16, 6	29. 22, 1
6. 7. 24	41. 48, 4	15. 17, 7	29. 58, 1

Calculo autem instituto pro momento coniunctionis sequentes elicientur expressiones:

f $4^h. 11'. 45'' - 2,20\,\delta - 1,38.\,y - 0,24.\,\pi$,
e $4.\ 12.\ 13 - 2,15\,\delta - 1,31.\,y - 0,30.\,\pi$,
d $4.\ 11.\ 56 - 2,08\,\delta - 1,20.\,y - 0,37.\,\pi$,
c $4.\ 12.\ 9 - 2,05\,\delta - 1,14.\,y - 0,41.\,\pi$,
b $4.\ 11.\ 56 - 2,00\,\delta - 1,04.\,y - 0,47.\,\pi$,
a $4.\ 12.\ 16 - 1,98\,\delta - 1,01.\,y - 0,48.\,\pi$.

§. 5. Nunc vero ſupereſt, vt concluſiones priores cum poſterioribus combinantur, quod fiet medium ſumendo illarum concluſionum, in quibus coefficientes ipſorum δ et y, poſitiui et negatiui, fere eiusdem ſunt valoris. Sic combinando concluſiones f, F orietur expreſſio pro tempore coniunctionis, in qua δ et y vix quidquam turbare poterunt:

F. $4^h. 12'. 45'' + 2,11.\,\delta + 1,25.\,y - 1,85.\,\pi$,
f. $4.\ 11.\ 45 - 2,20.\,\delta - 1,38.\,y - 0,24.\,\pi$,
1) $4.\ 12.\ 15 - 0,05.\,\delta - 0,06.\,y - 1,04.\,\pi$.

Simili ratione ſequentes inſtituendo combinationes:

e cum F, d cum F, d cum E, d cum D, c cum E, c cum D, c cum C, b cum D, b cum C, b cum B, a cum C, a cum B, a cum A,

hae emergent expreſſiones pro tempore coniunctionis:

2) $4^h. 12'. 29'' - 0,02\,\delta - 0,03.\,y - 1,07.\,\pi$,
3) $4.\ 12.\ 20 + 0,02.\,\delta + 0,02.\,y - 1,11.\,\pi$,
4) $4.\ 12.\ 29 - 0,00.\,\delta - 0,01.\,y - 1,08.\,\pi$,
5) $4.\ 12.\ 19 - 0,02.\,\delta - 0,04.\,y - 1,06.\,\pi$,
6) $4.\ 12.\ 36 + 0,01.\,\delta + 0,02.\,y - 1,10.\,\pi$,
7) $4.\ 12.\ 26 - 0,01.\,\delta - 0,02.\,y - 1,08.\,\pi$,
8) $4.\ 12.\ 30 - 0,03.\,\delta - 0,05.\,y - 1,06.\,\pi$,
9) $4.\ 12.\ 20 + 0,02.\,\delta + 0,03.\,y - 1,10.\,\pi$,

10)

10) $4^h. 12'. 25'' - 0,01.\delta - 0,02.y - 1,09.\pi$,
11) $4. 12. 16 - 0,01.\delta - 0,03.y - 1,07.\pi$,
12) $4. 12. 34 + 0,00.\delta + 0,00.y - 1,09.\pi$,
13) $4. 12. 26 - 0,01.\delta - 0,02.y - 1,07.\pi$,
14) $4. 12. 32 - 0,03.\delta - 0,06.y - 1,05.\pi$.

Ex quibus medium ſumendo colligitur tempus coniunctionis Solis et Lunae pro Mediolano: $4^h. 12'. 26'' - 1,08.\pi$. Sin vero ſimpliciter ex concluſionibus A, B, C etc. atque *a*, *b*, *c* etc. medias eliceremus, haberemus $4^h. 12'. 48''$ et $4^h. 12'. 2''$, inter quas intermedia eſt $4^h. 12'. 25''$, quae a modo inuenta non niſi ſcrupulo ſecundo differt. Caeterum quum Mediolani adhuc plures obſeruationes circa diſtantias centrorum inſtitutae fuerint, ſi earum computum inire voluiſſemus, numerum combinationum facile augere licuiſſet; verum pro noſtro inſtituto ſufficiebat illarum obſeruationum adhibuiſſe vſum, quae concluſiones certiſſimas praeberent.

§. 6. Pro obſeruationibus Maſſiliae circa partes lucidas diſci Solis, tam mox poſt inchoatam Eclipſin, quam proxime ante finem Eclipſis inſtitutis, calculus Parallaxium ſequentes praebuit concluſiones:

Temp. vero Maſſilienſi.	Parall. Longit.	Latit. ☽ appar.	Diam. ☽ appar.
$4^h. 12'. 0''$	$39'. 16'', 8$	$10'. 58'', 4$	$16'. 50'', 6$
4. 15. 0	39. 31, 0	11. 0, 7	16. 50, 5
4. 18. 0	39. 44, 8	11. 3, 1	16. 50, 4
4. 21. 0	39. 58, 2	11. 5, 6	16. 50, 2
4. 24. 0	40. 11, 2	11. 8, 1	16. 50, 1
4. 27. 0	40. 23, 8	11. 10, 7	16. 50, 0

Temp.

Temp. vero Maſſilienſi.	Parall. Longit.	Latit. ☽ appar.	Diam. ☽ appar.
$4^h. 30'. 0''$	$40'. 36'', 0$	$11'. 13'', 3$	$16'. 49'', 8$
4. 33. 0	40. 47, 8	11. 16. 0	16. 49, 6
4. 36. 0	40. 59, 2	11. 18, 7	16. 49, 5
4. 39. 0	41. 10, 2	11. 21, 5	16. 49, 3
5. 34. 46	43. 28, 0	12. 20, 8	16. 46, 6
5. 37. 46	43. 28, 6	12. 24, 3	16. 4[illegible], 4
5. 40. 46	43. 28, 8	12. 27, 7	16. 46, 3
5. 43. 46	43. 28, 6	12. 31, 1	16. 46, 2
5. 46. 46	43. 28, 0	12. 34, 6	16. 46, 0
5. 49. 46	43. 27, 0	12. 38, 0	16. 45, 8
5. 52. 46	43. 25, 5	12. 41, 4	16. 45. 7
5. 55. 46	43. 23, 6	12. 44, 8	16. 45, 5
5. 58. 46	43. 21, 3	12. 48, 2	16. 45, 3
6. 1. 46	43. 18, 5	12. 51, 6	16. 45, 2

§. 7. Hinc igitur fiet pro momentis obſeruatis:

Temp. vero Maſſilienſi.	Parall. Longit.	Latit. ☽ appar.	Diſtant. centr.
$4^h. 16'. 42''$	$39'. 38'', 7$	$11'. 4'', 5$	$30'. 19'', 9$
24. 8	40. 11, 7	11. 8, 9	26. 50, 9
27. 40	40. 27, 9	11. 11, 5	25. 6, 4
37. 18	41. 4, 0	11. 18, 9	20. 41, 5
40. 27	41. 15, 2	11. 23, 0	19. 25, 7

Expreſſiones vero pro tempore coniunctionis hinc elicientur iſtae:

$$3^h. 57'. 16'' + 1,83.\delta + 0,67.y - 1,45.\pi,$$
$$3. 57. 16 + 1,87.\delta + 0,78.y - 1,53.\pi,$$
$$3. 57. 1 + 1,90.\delta + 0,85.y - 1,58.\pi,$$

$$3^h.\ 56'.\ 50'' + 2,04.\ \delta + 1,11.\ y - 1,75.\ \pi,$$
$$3.\ 56.\ 59 + 2,10.\ \delta + 1,23.\ y - 1,83.\ \pi.$$

§. 8. Tum vero pro momentis verſus finem obſeruatis:

Temp. vero Maſſil.	Parall. Longit.	Latit. ☽ appar.	Diam. ☽ appar.	Diſtant. centr.
$5^h.\ 35'.\ 32''$	$43'.28'',2$	$12'.21'',7$	$16'.46'',6$	$18'.59'',7$
5. 39. 56	43. 28, 8	12. 26, 9	16. 46, 3	20. 58, 1
43. 32	43. 28, 6	12. 30, 0	16. 46, 2	22. 45, 0
45. 24	43. 28, 2	12. 33, 0	16. 46, 0	23. 40, 7
48. 22	43. 27, 3	12. 36, 9	16. 45, 8	25. 14, 0
56. 23	43. 23, 0	12. 45, 5	16. 45, 5	29. 28, 1
58. 0	43. 21, 9	12. 47, 5	16. 45, 3	30. 22, 0
59. 23	43. 20, 8	12. 48, 9	16. 45, 3	31. 8, 7
6. 1. 0	43. 19, 2	12. 50, 9	16. 45, 2	32. 4, 3

vnde expreſſiones pro tempore coniunctionis erunt:

$$3^h.\ 56'.\ 54'' - 2,24.\ \delta - 1,46.\ y - 0,31.\ \pi,$$
$$3.\ 57.\ 6 - 2,12.\ \delta - 1,26.\ y - 0,43.\ \pi,$$
$$3.\ 57.\ 4 - 2,04.\ \delta - 1,12.\ y - 0,51.\ \pi,$$
$$3.\ 57.\ 8 - 2,01.\ \delta - 1,06.\ y - 0,54.\ \pi,$$
$$3.\ 57.\ 6 - 1,97.\ \delta - 0,99.\ y - 0,59.\ \pi,$$
$$3.\ 57.\ 13 - 1,89.\ \delta - 0,82.\ y - 0,69.\ \pi,$$
$$3.\ 57.\ 12 - 1,88.\ \delta - 0,79.\ y - 0,70.\ \pi,$$
$$3.\ 57.\ 10 - 1,87.\ \delta - 0,77.\ y - 0,71.\ \pi,$$
$$3.\ 57.\ 8 - 1,86.\ \delta - 0,75.\ y - 0,73.\ \pi.$$

Concluſio media ex prioribus obſeruationibus eſt:

$$3^h.\ 57'.\ 4'' + 1,95.\ \delta + 0,93.\ y - 1,63.\ \pi,$$

et ex obſeruationibus verſus finem inſtitutis:

$$3^h.\ 57'.\ 7'' - 1,99.\ \delta - 1,00.\ y - 0,58.\ \pi,$$

hinc-

hincque conclusio inter has intermedia:

$$3^h.\ 57'.\ 6'' - 0,02.\ \delta - 0,03.\ y - 1,10.\ \pi;$$

ideoque quum pro Mediolano esset tempus coniunctionis $4^h.\ 12'.\ 26'' - 1,08.\ \pi$, differentia Meridianorum inter Massiliam et Mediolanum erit $15'.\ 20''$, quae conclusio cum illa, quam ex fine Eclipsis deduximus, intra quatuor scrupula secunda consentit. Quod autem pro obseruationibus Massiliae institutis conclusiones primae cum vltimis melius congruant, ac pro Mediolanensibus, sine dubio inde oritur, quod pro Massilia correctio δ alium sortiatur valorem ac pro Mediolano. Atque quum y sit $= - 10''$, saltem proxime, valor ipsius δ pro Massilia habebitur $+ 5''$.

§. 9. Inter obseruationes in Hospitalitio Christi institutas pro distantiis cuspidum illas selegimus, quae post inchoatam Eclipsin a $4^h.\ 0'$ vsque ad $4^h.\ 11'$ factae fuerunt, tumque tres vltimas ad finem vergente Eclipsi institutas, vt earum ope momentum coniunctionis erueremus; tum vero pro determinanda Latitudine Lunae obseruationes adhibuimus circa medium Eclipsis institutas. Pro quibus obseruationibus ratio Parallaxium ex sequenti Tabula elucet:

Temp. vero Londin.	Parall. Longit.	Latit. ☽ appar.	Diam. ☽ appar.
4^h. 0'. 32''	32'.23'',1	16'.12'',3	16'.51'',0
4. 2. 32	32. 32, 0	16. 12, 4	16. 51, 0
4. 4. 32	32. 40, 7	16. 12, 5	16. 50, 9
4. 6. 32	32. 49, 5	16. 12, 7	16. 50, 8
4. 8. 32	32. 58, 0	16. 12, 9	16. 50, 8
4. 10. 32	33. 6, 3	16. 13, 1	16. 50, 7
4. 12. 32	33. 4, 6	16. 13, 3	16. 50, 6
4. 32. 32	34. 28, 6	16. 17, 4	16. 49, 8
4. 34. 32	34. 35, 1	16. 17, 9	16. 49, 7
4. 36. 32	34. 41, 4	16. 18, 4	16. 49, 6
4. 38. 32	34. 47, 7	16. 19, 0	16. 49, 5
4. 52. 32	35. 27, 1	16. 23, 6	16. 48, 9
4. 54. 32	35. 32, 1	16. 24, 3	16. 48, 8

§. 10. His praefuppofitis erit pro primo commemoratis momentis:

Temp. vero Londin.	Parall. Longit.	Latit. ☽ appar.	Diam. ☽ appar.	Semiffis Diftant. cufpid.
4^h. 0'. 32''	32'.23'',1	16'.12'',3	16'.51'',0	10'.57'',7
4. 2. 44	32. 33, 1	16. 12, 4	16. 51, 0	11. 20, 5
4. 3. 53	32. 37, 6	16. 12, 4	16. 50, 9	11. 35, 1
4. 6. 25	32. 49, 2	16. 12, 7	16. 50, 8	12. 0, 0
4. 7. 54	32. 55, 2	16. 12, 9	16. 50, 8	12. 13, 0
4. 9. 34	33. 2, 1	16. 13, 1	16. 50, 7	12. 30, 9
4 11. 0	33. 8, 3	16. 13, 2	16. 50, 6	12. 41, 8

vnde

vnde pro tempore coniunctionis ſequentes deducuntur expreſſiones:

$$3^h.\ 35'.\ 53'' + 2,30.\delta + 1,54.y - 1,84.\pi,$$
$$3.\ 36.\ \ 7 + 2,36.\delta + 1,63.y - 1,90.\pi,$$
$$3.\ 35.\ 59 + 2,41.\delta + 1,70.y - 1,95.\pi,$$
$$3.\ 36.\ \ 0 + 2,57.\delta + 1,84.y - 2,04.\pi,$$
$$3.\ 36.\ \ 6 + 2,58.\delta + 1,94.y - 2,11.\pi,$$
$$3.\ 35.\ 43 + 2,70.\delta + 2,10.y - 2,22.\pi,$$
$$3.\ 35.\ 45 + 2,80.\delta + 2,22.y - 2,30.\pi,$$

ex quibus medium valorem ſumendo, conſequemur:

$$3^h.\ 35'.\ 56'' + 2,52.\delta + 1,89.y - 2,05.\pi.$$

Deinde pro momentis verſus finem Eclipſis habemus:

Temp. vero Londin.	Parall. Longit.	Latit. ☽ appar.	Diam. ☽ appar.	Semiſſis Diſtant. cuſpid.
$4^h.\ 52'.\ 2''$	$35'.25'',8$	$16'.23'',5$	$16'.48'',9$	$13'.10'',4$
4. 52. 48	35 27,7	16. 23. 7	16. 48, 9	13. 7, 4
4. 53. 38	35. 29, 8	16. 23, 9	16. 48, 8	13. 3, 2

hinc fiunt expreſſiones pro tempore coniunctionis:

$$3^h.\ 34'.\ 50'' - 2,84.\delta - 2,27.\delta + 0,50.\pi,$$
$$3.\ 35.\ \ 5 - 2,81.\delta - 2,20.y + 0,46.\pi,$$
$$3.\ 35.\ 16 - 2,72\ \delta - 2,12.y + 0,41.\pi,$$

vnde medio ſumto prodibit:

$$3^h.\ 35'.\ 4'' - 2,79.\delta - 2,20.y + 0,46.\pi.$$

Igitur concluſio intermedia inter illam priorem et hanc iam allatam erit:

$$3^h.\ 35'.\ 30 - 0,13.\delta - 0,15.y - 0,79.\pi.$$

Hacque conclusione cum illis pro Mediolano et Massilia comparata, fiet differentia Meridiani inter Hospitalit. Christi et Mediolanum $= 36'. 56''$, atque inter idem Hospitalitium et Massiliam $= 21'. 36''$, ratione correctionum δ, y, π plane seposita. At ex obseruatione pro fine Eclipsis, prior differentia habetur $36'. 53''$ et posterior $21'. 37''$, ita vt maiorem consensum vix desiderare liceret. Interim tamen facile largimur, obseruationes vltimas non inter meliores esse habendas, et pauciores quidem numero esse, quam vt conclusio ex ipsis satis certa colligi queat. Quodsi vero obseruationes, quae has praecedunt, ad inuestigandum tempus coniunctionis adhiberentur, conclusiones adhuc incertiores prodirent, quod minimi errores obseruationum in his determinationibus insignes producant mutationes.

§. 11. Pro determinanda correctione Latitudinis, obseruationum circa medium Eclipsis, quod tempore $4^h. 32'$ incidit, vsum adhibuimus ea ratione, vt postquam ex obseruatis distantiis cuspidum et cognitis semidiametris Solis atque Lunae distantias centrorum elicuerimus, illas debita reductione ad minimam distantiam reduxerimus. Pro ista vero reductione instituenda, postquam ex cognitis semidiametris Solis et Lunae, pro initio et fine Eclipsis, nec non distantia minima centrorum proxime determinata, innotuerit arcus apparens, durante Eclipsi a Luna descriptus, hincque motus Lunae in orbita apparente, inde quoque facili negotio determinari poterunt incrementa pro distantia centrorum, in obseruationibus a medio Eclipsis haud longe remotis. Conclusiones vero ex nostris calculis deductae sequentes habentur:

Temp.

Temp. vero.	Semissis Distant. cusp.	Distant. centr.	Distant. minim.
$4^h.28'.\ 5''$	$13'.52'',4$	$1015'', 8$	$1005'', 3$
4. 30. 0	13. 54, 8	1008, 0	1004, 7
4. 32. 32	13. 59, 7	994, 4	994, 4
4. 34. 14	14. 0, 9	990, 1	988, 9
4. 35. 24	13. 59, 1	996, 3	992, 3
4. 36. 22	13. 59, 4	995, 1	987, 8
4. 37. 6	14. 0, 0	993, 1	984, 2
4. 37. 46	13. 59, 7	993, 9	981, 6
4. 39. 9	13. 58. 5	994, 7	973, 2

Ex his determinationibus medius valor est $990'', 3$, vnde quum pro distantia media sit Latitudo ☽ apparens ex calculo $977'', 4$, hinc colligeretur correctio Latitudinis Lunae $- 13''$; vbi tamen facile perspicitur, obseruationes modo allatas vix pro tam exactis haberi posse, vt ex illis correctio Latitudinis satis exacte definiatur.

§. 12. Ex obseruationibus vero prope medium Eclipsis Mediolani institutis conclusiones aliquanto tutiores eliciuntur. Scilicet si ex distantiis centrorum pro initio et fine, quae sunt $1955'', 3$ et $1950'', 4$, tumque ex distantia minima, quam proxime nouimus esse $888''$, quaerantur arcus ab initio et fine vsque ad medium Eclipsis descripti, his additis cognoscetur motus Lunae in orbita apparente. Ex quo facili negotio eruentur quantitates, quibus distantia centrorum pro momentis, medio Eclipsis proximis, increscit. Hac igitur ratione consequemur:

Temp.

Temp. Mediol.	Dift. centr. obferu.	Diftant. minima.
$5^h. 18'. 13''$	$14'. 54'', 3$	$14'. 48'', 3$
5. 21. 4	14. 48, 3	14. 48, 3
5. 25. 41	14. 51, 1	14. 44, 7

ex quibus valor medius pro diftantia minima erit $14'. 47'', 1$. Atque pro medio Eclipfis calculus praebet Latitudinem Lunae apparentem $14'. 34'', 2$, vnde correctionem Latitudinis $- 12''$ circiter effe oportet. Caeterum facile intelligitur, hanc determinationem non adeo effe exactam, vt non vnius vel alterius fcrupuli fecundi correctionem admittat; quare nobis fufficiet, hac disquifitione correctionem Latitudinis, a nobis ftabilitam, faltem proxime confirmari.

EPI-

EPITOME
OBSERVATIONVM METEOROLOGICARVM PETROPOLI ANNO MDCCLXXVIII.
SECVNDVM CALENDARIVM GREGORIANVM INSTITVTARVM.

Auctore
IOANNE ALBERTO EVLER.

I. Barometrum.

1. Barometri altitudines maximae, minimae et mediae, vna cum variatione maxima et ſtatu medio, pro ſingulis menſibus anni 1778.

Menſe	Altitudo maxima Dig. p. c.	Altitudo maxima die hora	Altitudo minima Dig. p. c.	Altitudo minima die hora	Variatio Dig. p. c.	Medium Dig. p. c.	Altitudo media Dig. p. c.
Ianuar..	28. 59	7. X. a. m.	27. 49	23. VIII. p. m. 24. X. a. m.	1. 10	28. 04	28. 09
Februar.	28. 83	11. III. p. m.	27. 03	24. VI. p. m.	1. 80	27. 93	28. 10
Mart.	28. 69	12. II. p. m.	27. 37	25. VII. a. m.	1. 32	28. 03	27. 92
April.	28. 36	7. IX. a. m.	27. 12	1. VI. a. m.	1. 24	27. 74	27. 96
Maii	28. 44	6. Meridie	27. 62	19. VI. a. m.	0. 82	28. 03	27. 95
Iunii	28. 47	14. III. a. m.	27. 57	21. med. noct.	0. 90	28. 02	28. 00
Iulii	28. 29	20. VI. a. m.	27. 65	3. IV. a. m.	0. 64	27. 97	27. 96
Auguſti	28. 45	19. VII. a. m.	27. 28	13. VI. a. m.	1. 17	27. 87	27. 91
Sept.	28. 31	20. XI. p. m.	27. 52	14. IX p. m	0. 79	27. 91	27. 96
Octobr.	28. 42	30. XI. p. m.	26. 86	26. IV. a. m.	1. 56	27. 64	27. 74
Nouembr.	28. 65	5. veſperi	26. 92	24. III. p. m.	1. 73	27. 78	28. 05
Decembr.	28. 37	18. III. p. m.	26. 83	29. VIII p. m.	1. 54	27. 60	27. 65
Anno 1778.	28. 83	Menſe Februarii.	26. 83	Menſe Decembris.	2. 00	27. 83	27. 94

 2. Nu-

2. Numerus dierum quibus altitudo Barometri ſuperabat terminos quosdam circa altitudinem 28 poll.

Menſe	ſupra 28. 20 Dies, horae	ſupra 28. 10 Dies, horae	ſupra 28. 00 Dies, horae	ſupra 27. 90 Dies, horae	ſupra 27. 80 Dies, horae	per dimidium menſis ſupra Dig. p. c.
Ian.	11. 9	14. 21	17. 3	22. 15	25. 15	28. 07
Febr.	13. 15	14. 0	15. 18	17. 6	18. 9	28. 10
Mart.	4. 9	8. 12	11 6	17. 12	21. 15	27. 93
April.	6. 3	7 18	15. 3	17. 21	22. 12	28. 00
Maii	3. 15	8. 9	11. 3	16. 15	22. 0	27. 92
Iunii	5 0	9. 0	14. 12	19. 9	23. 18	27 99
Iulii	3. 3	6. 6	13 21	18. 9	23. 18	27. 96
Aug.	3. 6	6. 15	11. 12	16. 15	21. 0	27. 93
Sept.	2. 12	4. 12	11. 12	20. 18	25. 18	27. 93
Oct.	3 6	3. 21	4. 12	7. 0	12. 0	27. 73
Nou.	8. 12	16. 18	20. 3	22. 15	24. 18	28. 12
Dec.	1. 18	4. 12	6. 15	9 12	12. 12	27. 65
Anno 1778	66. 12	105. 0	153. 0	206 3	253. 15	27. 95

Notandum eſt, duas priores figuras altitudinum barometricarum pollices integros deſignare, quorum duodecim pedem regium pariſinum conſtituunt, poſteriores vero partes centeſimas vnius pollicis. Tum vero monendum eſt a. m. ſignificare *ante meridiem*, p. m. verum *poſt meridiem.*

Colligitur ex his binis tabulis, pro toto anno.

1. Altitudo maxima Barometri 28. 83: menſe Februarii die 11 hora antemeridiana X. Thermom. *Deliſl.*

lisl. 176. Coelum ſerenum. Ventus ex Occidente leniter ſpirabat.

2. Altitudo Barometri minima 26, 83: menſe Decembris, die 29 hora VIII poſt meridiem. Thermom. *Delisl.* 154. coelum nubiloſum, auſter ſatis vehemens.

3. Variatio maxima 2 poll.

4. Medium inter maximam altitudinem et minimam, 27, 83.

5. Barometri altitudo media inter omnes obſeruatas, 27. 94 vel 27 $\frac{94}{100}$ poll.

6. Ex ſecunda tabula patet, mercurium in tubo Barometri ſe ſuſtentaſſe

ſupra	28, 20 poll.	per dies	$66\frac{1}{2}$
	28, 10 poll.	per dies	105
	28, 00 poll.	per dies	153
	27, 90 poll.	per dies	$206\frac{1}{8}$
	27, 80 poll.	per dies	$253\frac{5}{8}$

vnde concluditur, mercurium per interuallum dimidii anni vel $182\frac{1}{2}$ dierum, ſe ſuſtentaſſe ſupra altitudinem 27,95 vel 27 $\frac{19}{20}$ poll.

 3. De-

3. Descensus et ascensus Barometri notabiliores.

Mense	Tempore die	hora	Diff. hor	Dig. p. c.	Diff. p. c.	Therm.	Ventus.	Atmosphaera.
Ian.	2.	4. a. m.	32	27. 93	+ 52	156	NW.	coelum nubilum, nebula
	3.	merid.		28. 45		160		coelum obductum.
	21.	3. a. m.	24	28. 37	— 58	181	N.	coelum serenum, at nebulos:
	21.	med. noct.		28. 20		185	—	coelum nubilum
	22.	med. noct.		27. 62		173	O.	coelum obductum
	23.	med. noct.		27. 49		172	NO. fort.	coelum serenum
Febr.	1.	meridie	30	28. 04	+ 66	154	NW fort.	coelum obductum
	2.	6. p. m.		28. 70		173	N.	coelum serenum
	23.	11. a. m.	22	27. 65	— 61	156	S.	coelum nubilum
	24.	9. a. m.		27. 04		151	SW. fort.	nix copiosa
	—	6. p. m.		27. 03		151		
Mart.	1.	6. a. m.	38	27. 51	+ 65	155	NO.	coelum obductum, nix
	2.	8. p. m.		28. 16		160	NW.	coelum obductum
	12.	6. p. m.	18	28. 68	—108	164	NW fort.	coelum serenum
	13.	meridie		27. 60		148	W. fort.	nix, coelum obductum.
	23.	0. a. m.	9	27. 91	— 43	166	NW.	coelum obductum et
	—	9. a. m.		27. 48		159		nix
	25.	8. a. m.	31	27. 37	+ 64	145	W. fort.	coelum obductum nix
	26.	3. p. m.		28. 01		154	NO.	—— serenum
	30.	0. a. m.	36	27. 94	— 65	148	SW.	coelum obductum, pluuia
	31.	meridie		27. 29		141	SW. fort.	—— obductum, pluuia
Iunii	4.	2. p. m.	20	27. 75	+ 36	126	W. fort.	coelum nubilum, pluuia copiosa et nix
	5.	10. a. m.		28. 11		124	variabl.	coelum ex parte serenum

Mense

Menfe	Tempore die hora	Diff. hor.	Dig. p.c.	Diff. p.c.	Therm.	Ventus.	Atmofphaera.
	12. 6. a. m.		27. 76		131	W. fort.	coelum nubilum, pluuia
Aug.	13. 6. a. m.	24	27. 27	− 49	133	SW.fort.	pluuia copiofa
	15. 9. a. m.	51	28. 08	+ 81	125	W. fort.	coelum ferenum
	5. 0. a. m.		27. 82		144	NO.	coelum obductum, pluuia
	5. 8. p. m.	20	27. 30	− 52	139	SO. fort.	pluuia copiofa
	24. 6. a. m.		27. 84		153	NW.	coelum nubilum, pluuia
	26. 3. a. m.	45	26. 86	− 98	149	SW.fort.	coelum obductum
Oct.	27. 0. a. m.	21	27. 15	+ 29	156	S.	coelum ferenum
	28. 0. a. m.	24	27. 49	+ 34	159	NW.	coelum ferenum
	29. 0. a. m.	24	27. 87	+ 38	154	N.	coelum nubilum
	30. 0. a. m.	24	28. 19	+ 32	152	N.	coelum obductum
	31. 0. a. m.	24	28. 42	+ 23	153	W.	coelum obductum
	3. 9. a. m.		27. 80		144	SW.	coelum obductum
	3. 3. p. m.		27. 82		144	——	—— ——
	4. meridie	21	28. 40	+ 58	144	NW.	—— ——
	5. 9. p. m.		28. 65		153	SO.fort.	coelum ferenum
Nou.	22. 6. p. m.		28. 13		155	NWfort.	coelum obductum
	23 2 p. m.		27. 92		162	SO. fort.	coelum nubilum, nix
	24. 3. p. m.	25	26. 92	−100	147	SW.fort.	nix, pluuia, procella
	25. 3. a. m.	12	27. 38	+ 46	164	O. fort.	coelum obductum
	7. meridie		28. 03		170	SO. fort.	coelum nubilum
	8. 0. a. m.		27. 88		161	——	coelum obductum, procell.
Dec.	9. meridie	36	27. 23	− 65	149	S.	coelum obductum, nix
	11. meridie.	48	28. 21	+ 98	180	NWfort.	coelum ferenum
	12. med. noct.	36	27. 42	− 79	170	S.O. fort	coelum obductum, nix

Menſe	Tempore die	hora	Diff hor.	Dig. p. c.	Diff. p. c.	Therm.	Ventus.	Atmoſphaera.
	16.	meridie		27. 41		159	NO. fort.	coelum obductum, nix
			51		+96			
	18.	3. p. m.		28. 37		167	O.	coelum ſerenum
			21		−55			
	19.	meridie		27. 82		154	SW. fort.	coelum obduct. nix, procell.
	20.	meridie		27 83		152	W.	coelum obductum
			27		−85			
	21.	3. p. m.		26. 98		149	W. fort.	coel. obduct. nebula, procell.
Dec.			24		+55			
	22.	3. p. m.		27. 53		157	W. fort.	coelum nubilum
			12		−34			
	23.	3. a. m.		27. 19		160	NW.	coelum obduct. nix
			12		+27			
	23.	3. p. m.		27. 46		165	NW.	coelum ſerenum
	24.	6. a. m.		27 40		169	N.	coelum nubilum
			32		+65			
	25.	2. p. m.		28. 05		170	NW.	coelum ſerenum
			18		−51			
	26.	8. a. m.		27. 54		152	NW.	coelum nubilos
	28.	6. p. m		27. 51		152	SW.	coelum nubilos
			26		−68			
	29.	8. p. m.		26. 83		154	S. fort.	coelum nubilos.

Signa + et − quae differentias altitudinum barometricarum praecedunt aſcenſus et deſcenſus mercurii indicant.

II. Ther-

II. Thermometrum.

1. Thermometri altitudines minimae, maximae et mediae pro fingulis menfibus anni 1778.

Menfe.	Altitudo minima. Gr.	die	hora	Altitudo maxima. Gr.	die	hora	Diff.	Altitudo media. nocte.	meridie.
Ianuar.	185	20. 22.	7. a. m.	150	10.	2. p. m.	35	170.	164.
Februar.	182	12.	7. a. m.	147	25.	2. p. m.	35	165.	157.
Mart.	179	18. 19.	6. a. m.	138	28.	2. p. m.	41	162.	152.
April.	163	5.	6. a. m.	121	25.	2. p. m.	42	150.	138.
Maii	152	7.	6. a. m.	120	17.	2. p. m.	32	141.	131.
Iunii	138	4. 6. 7.	6. a. m. 10. p. m. 6. a. m.	108	21.	2. p. m.	30	133.	121.
Iulii	136	8.	6. a. m.	107	20.	2. p. m.	29	131.	118.
Auguft.	145	29	6. a. m.	115	6.	2. p. m.	30	134.	124.
Septembr.	144	27.	6. a. m.	124	1. 28.	2. p. m.	20	138.	130.
Octobr.	159	28.	6. a. m.	137	1. 6.	2. p. m.	22	152.	146.
Nouemb.	176	27.	6. a. m.	144	2. 3. 4.	2. p. m.	32	159.	154.
Decembr.	182	11 18	7. a. m.	148	9. 21. 28.	2. p. m. 6. a. m. 9. a. m.	34	164.	156.
Anno 1778.	185	Ianuarius.		107	Iulius.		78	149.9	141.

2. Sta-

2. Status frigoris et caloris.

Menfe.	Dies frigidiores Grad.					Dies calidiores Gradib.				
	180	170	160	150	140	110	120	130	140	150.
Ianuar.	5	15	27	31	31					1.
Februar.	2	8	17	28	28					4.
Mart.		7	18	27	31				1	13.
April.			1	17	26			6	14	30.
Maii				3	17			14	30	31.
Iunii					0	2	10	30	30	30.
Iulii					0	5	17	30	31	31.
Auguft.					2		5	29	31	31.
Septembr.					8			17	29	30.
Octobr.				21	31				5	25.
Nouembr.		3	14	26	30					9.
Decembr.	2	9	16	31	31					9.
Anno 1778.	9	42	93	184	235	7	32	126	171	244.

3. Speciatim frigus obferuatum fuit intra gradus.

		Dies
180 et 190	die 20. 21. 22. 26. 28. Ian., die 11. 12. Febr. et die 11. 18. Dec. - -	9.
170 et 180	die 7. 8. 12. 17. 18. 19. 23. 24. 25. 27. Ian., die 2. 6. 10. 13. 14. 15. Febr. die 12. 15. 18 — 22 Mart., die 20. 26. 27. Nouembr. et die 7. 10. 12. 13. 17. 24. 25 Decembris - -	33.

		Dies
160 et 170 die	1 — 6. 9. 13. 14. 16. 30. 31. Ian., die 1. 3. 7. 8. 9. 16 — 19. Febr., die 2. 3. 4. 9. 11. 14. 16. 17. 23. 26. 28. Mart., die 5 April., die 6. 7. 11. 12. 13. 18. 19. 21. 23. 25. 28. Novembr. et die 6. 14. 15. 16. 22. 23. 31. Decembr. - - - -	51.

Calor autem deprehensus fuit intra gradus.

		Dies
110 et 100 die	16. 21. Iun. et die 19. 20 — 23 Iulii,	7.
120 et 110 die	8. 9. 10. 14. 15. 17. 18. 20. Iun., die 1. 5. 14. 15. 17. 18. 24. 26. 28 — 31. Iulii, et die 2. 4. 6. 8. 21. Augusti - - - - - -	25.
130 et 120 die	22 — 27 Aprilis, die 1. 10. 14 — 19. 25. 26. 28 — 31. Maii, die 1 — 7. 11 12. 13. 19. 22 — 30. Iunii, die 2. 3. 4. 6. 8 — 13. 16. 25. 27. Iulii, die 1. 3 5. 7. 9 — 20. 22 — 27. 30. 31. Aug. et die 1 — 7. 11. 12. 13. 16 — 19. 24. 26. 28 Septembris - - -	94.
140 et 130 die	28. Mart. die 14 — 18. 21. 28. 30. Apr., die 2 — 5. 7. 8 9. 11. 12. 13. 20 — 24. 27. Maii, die 7 Iulii, die 28. 29. Aug., die 8. 9. 10. 14. 15. 20 — 23. 25 27. 29. Sept., et die 1. 3. 5. 6. 7. Octobris - - -	45.

Ex tabula 1^{ma} intelligitur per totum annum fuiſſe:

1. Altitudinem Thermometri minimam, ſeu gradum frigoris maximi 185 grad. *Delisl.* menſe Ianuarii die 20 et 22. hora antemeridiana 7^a. Fuit autem illa 20^{ma} die coelum ſereuum, nebula valde ſpiſſa, vento leniter ſpirante e Septentrione: Barom. 28, 17. Hac vero die 22^{da} coelum plane ſerenum, malacia et altitudo Barometri 28, 00.

2. Altitudinem Thermometri maximam, ſeu gradum caloris maximi 107 grad. *Delisl.* menſe Iulii die 20^a hora poſtmeridiana ſecunda. Barometro tunc temporis momento $28\frac{1}{4}$ dig. coelo exiſtente ſereno et vento leniter flante ex Oriente.

3. Hinc variatio Thermometri maxima 78 grad. ſecundum Thermometrum *Delislianum.*

4. Frigus medium, ſeu altitudinem Thermometri mediam intra omnes mane et veſpere obſeruatas, 150 graduum: et calorem medium ſiue Thermometri altitudinem mediam intra omnes meridianas, 141 gr. At ſi menſes aeſtiuos Maium — Octobrem, ab hyemalibus Ian. — April. Nouembr. — Decembr. ſeparamus, reperimus in illis calorem medium fuiſſe $128\frac{1}{3}$ grad. et in his frigus medium $161\frac{2}{3}$ graduum.

Porro Tabula 2^{da} oſtendit fuiſſe hoc 1778 anno, dies 184 frigidiores gradu 150, hoc eſt congelationis naturalis

turalis termino, inter quos 93 fuerunt dies, quibus frigus ſuperabat 160 gradus. In his vero numerauimus 42 dies frigidiores gradu 170 et tandem 9 dies, quibus frigus excedebat 180 grad.

Deinde patet ex eadem Tabula, hoc 1778 anno quoad calorem fuiſſe 244 dies calidiores gradu 150, et 171 calidiores gradu 140, inter quos 126 dies annotauimus, quibus calor ſuperabat gradum 130, et 32, quibus tranſibat gradum 120: denique dies 7 calidiores gradu 110.

III. Ventus et Ventorum Directiones.

Menſe	Malacia dies	Vent. lenis dies	Vent. fortis. dies	Procelloſus dies	Nord dies	N·O dies	Oſt dies	S-O dies	Sud dies	S-W dies	Weſt dies	N-W dies	Variabilis dies
Ianuar	0	19	9	3	8	3	5	5	2	1	3	4	
Febr.	0	17	7	4	1	1	5	3	2	5	7	4	
Mart.	3	13	13	2	7	6	2	1	0	5	6	4	
April.	7	10	10	3	5	4	3	0	4	4	6	4	
Maii	6	9	13	3	1	4	4	1	0	7	6	6	2
Iunii	5	8	11	6	0	0	4	4	3	4	10	5	
Iulii	5	9	14	3	2	5	2	3	2	6	9	1	1
Aug.	5	13	11	2	1	2	5	0	1	8	9	5	
Sept.	5	11	9	5	1	2	4	2	7	6	3	5	
Oct.	4	16	8	3	4	8	2	2	5	4	4	2	
Nou.	4	12	13	1	0	0	9	8	4	5	0	4	
Dec.	3	7	15	6	2	1	2	5	4	3	9	5	
Anno 1778.	47	144	133	41	32	31	47	34	34	58	72	49	3

 Hinc

Hinc perſpicitur, hoc anno 1778 maxime regnaſſe Zephyrum, tum vero ventos e regionibus SW. et NW: deinde Eurum. Malaciae non raro obſeruatae fuerunt menſibus, Aprilis et Maii: procellae vero et venti vehementiores frequentius occurrunt menſibus Decembris, Iunii et Iulii.

In ſpecie autem hoc anno procellae flabant e regione.

		Dies.
NO.	die 4. 5. Maii, die 5. Iulii, et die 11 Octobris	4.
O.	die 19. Febr. et die 10. Sept. - - -	2.
SO.	die 13. Sept. - - - - - -	1.
S.	die 23. Febr. die 22. Apr. die 23. Iulii, die 11. 28. Sept. die 25. Oct. et die 8. Decembris -	7.
SW.	die 30. Ian. die 24. 25. Febr. die 24. Martii, die 16. 23. Apr. die 29. Maii, die 3. 6. Iunii, die 13. Aug. die 29. Sept. die 21. Oct. die 24. Nov. die 12. 19. Dec. - - -	15.
W.	die 27. 31. Ian. die 13. Martii, die 1. 28. Iunii, die 25. Iulii, die 14. Aug. et die 20. 21. 27. Dec. - - - - - -	10.
NW.	die 22. 27. Iunii - - - - -	2.

IV. Conſtitutio Coeli.

Menſe.	Coelum ſerenum dies	Coelum obductum dies	Nebuloſum dies	Pluuia dies	Nix dies	Quantit. aquae pluuiae. Dig. p. c.
Ianuar.	5.	11.	8.	—	14.	
Februar.	6.	16.	0.	—	10.	
Martii	7.	11.	2.	5.	13.	
Aprilis	10.	6.	7.	7.	5.	0, 47.
Maii	10.	5.	3.	15.	—	1, 60.
Iunii	12.	2.	0.	9.	—	0, 32.
Iulii	9.	7.	0.	13.	—	3, 02.
Auguſti	6.	5.	1.	17.	—	1, 44.
Septemb.	4.	8.	1.	19.	—	2, 60.
Octobr.	1.	20.	1.	13.	14.	0, 77.
Nouemb.	3.	20.	1.	4.	14.	1, 00.
Decemb.	1.	15.	3.	4.	14.	1, 02.
Anno 1778.	74.	126.	27.	106.	84.	12, 24.

Excellebant igitur quoad ſerenitatem coeli menſes Iunii, Maii et Aprilis. Frequentius pluit menſe Septembris et Auguſti et nix copioſa cecidit praeſertim menſe Ianuarii, Octobris, Nouembris et Decembris. Quantitas aquae pluuiae et niuis, a Viro Ill. *Lexell* mecum communicata, elapſo quocunque menſe ſecundum Calendarium Iulianum ſummata fuit: adeoque hae quantitates in noſtra tabula a die 12^{ma} cuiusque menſis vsque ad 12^{mam} ſequentis pertinere intelligendae ſunt; hincque ſumma 12 dig. $\frac{24}{100}$ altitudinem indicat aquae pluuiae et niuis, quae hoc 1778 an-

anno a 12 Aprilis vsque ad diem 12 Ianuarii ſequentis anni 1779 cecidit.

V. Reliqua phaenomena.

Grando cecidit die 30 Septembris.

Tonuit octies: die ſcilicet 1 et 15 Maii, die 10 et 16 Iunii, die 15 et 27 Iulii, die 16 Auguſti et quidem in vicinia die 6 Auguſti.

Aurorae boreales obſeruatae fuerunt 30: lucidae nimirum 12, die 19 et 21 Ianuarii, die 18 Februarii, die 16. 18 et 22 Martii, die 21 et 23 Aprilis, die 28 Auguſti, die 21 et 30 Septembris et die 13 Decembris. Deinde 18 fulgentes, die 18 et 20 Ianuarii, die 17 et 25 Februarii, die 17. 26 Martii, die 10 et 15 Aprilis, die 1. 3. 12. 15. 17 et 22 Septembris, die 20 Nouembris, et die 6. 10 et 17 Decembris.

Parhelion die 16 Ianuarii.

Flumen Neua a glacie liberatum fuit die 18 Aprilis, poſtquam per ſpatium 142 dierum glacie obductum perſtitit. Tum vero die 13 Nouembris magna ex parte glacie obducebatur, poſtea quam ergo per 209 dies a glacie liberatum manſit.

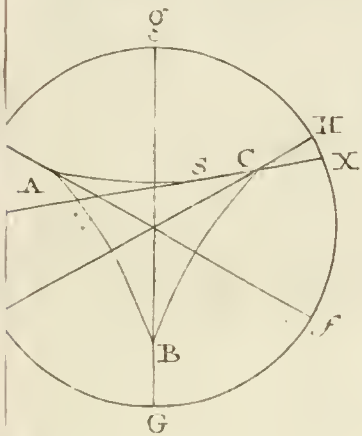


Fig 3

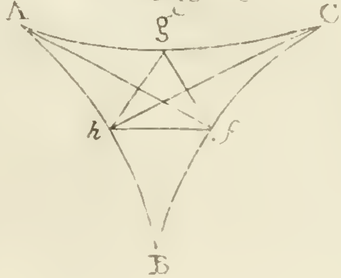


Fig 5

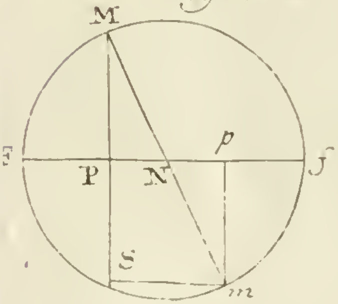


Fig 6

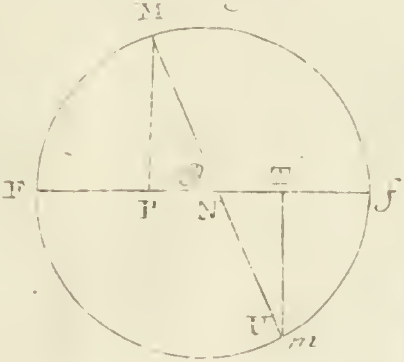


Fig 8

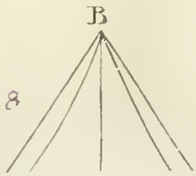


Fig 9

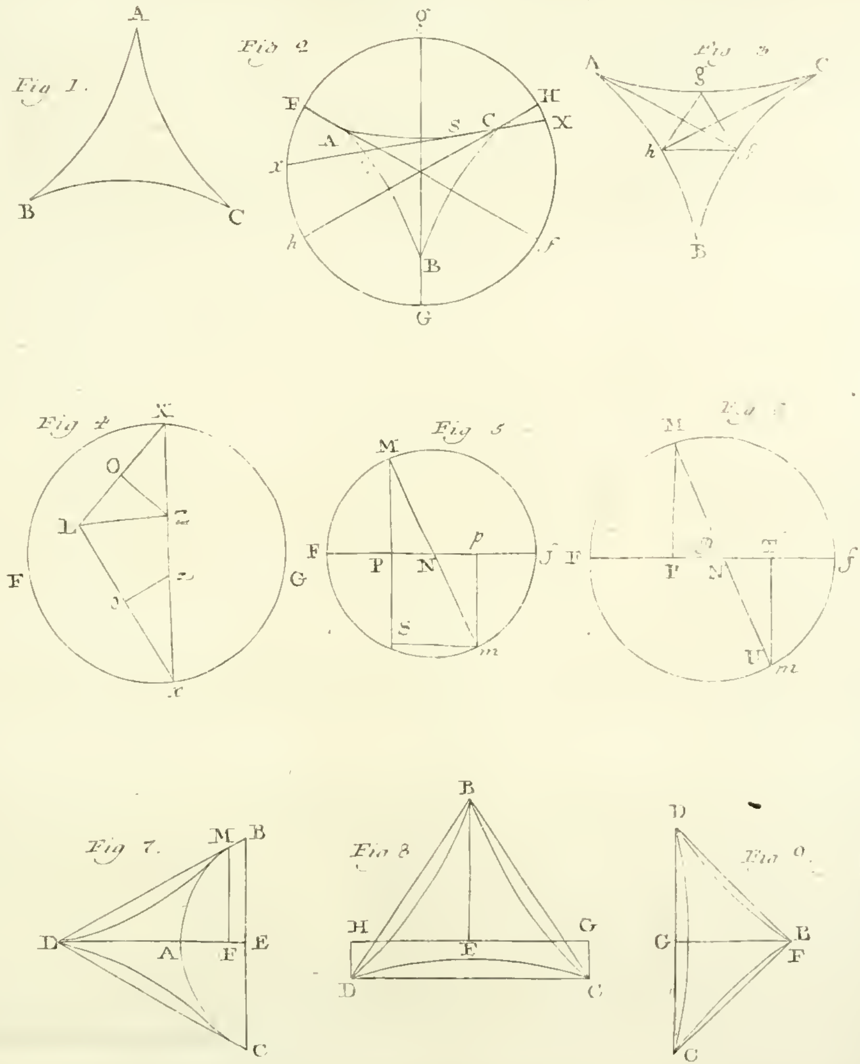


Fig 1.
Fig 2
Fig 3
Fig 4
Fig 5
Fig 6
Fig 7.
Fig 8
Fig 9.

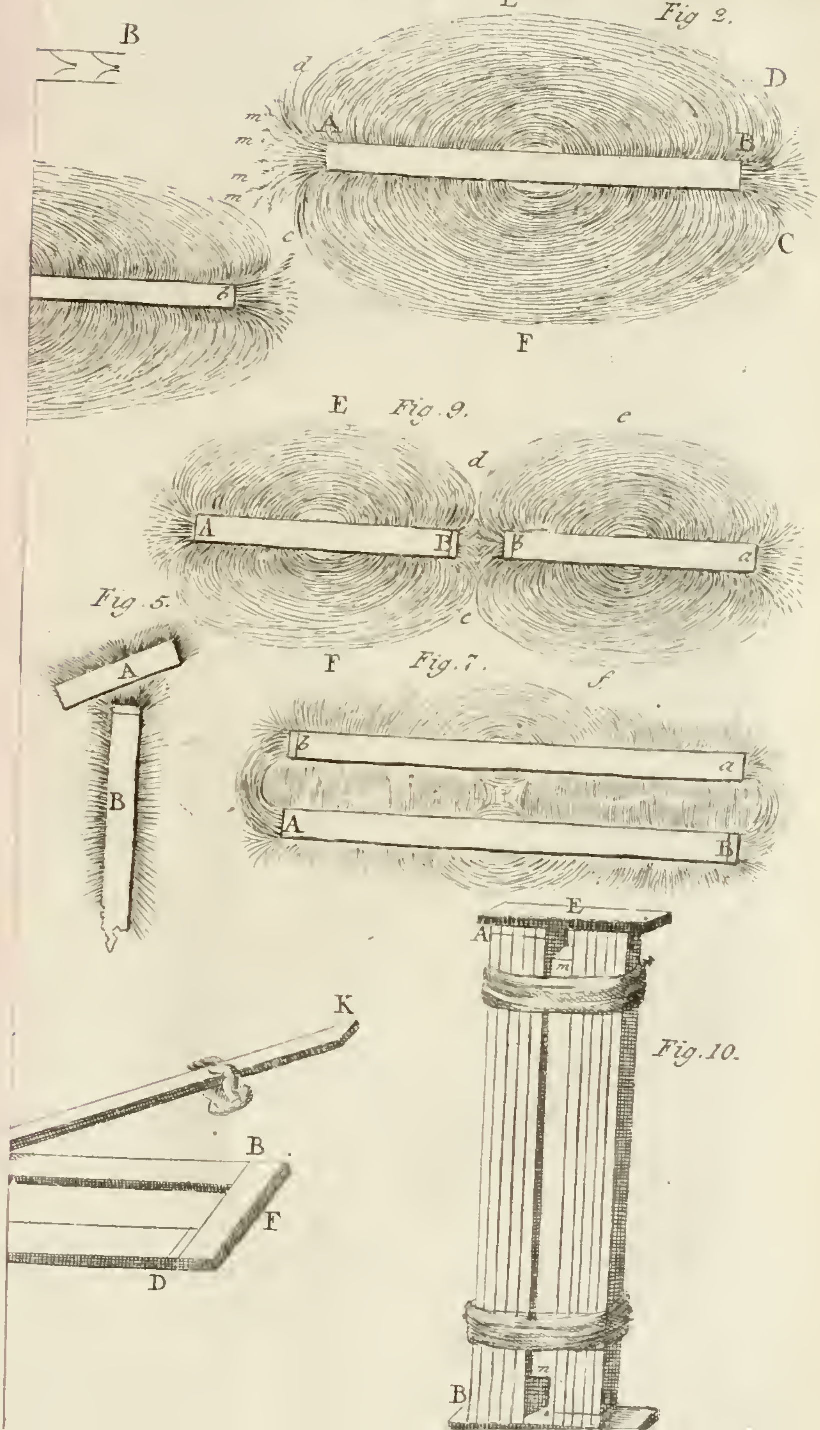


Fig 2.
Fig. 9.
Fig. 5.
Fig. 7.
Fig. 10.

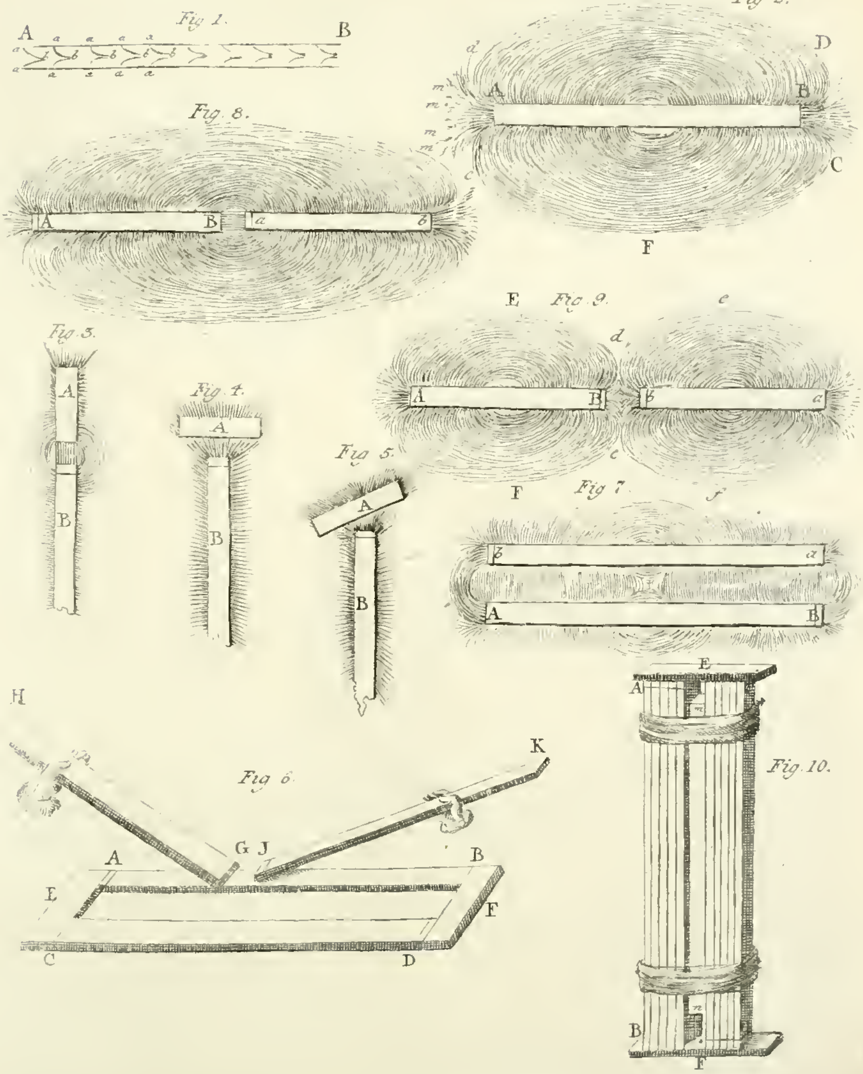


Fig 1.
Fig 2.
Fig. 8.
Fig 3.
Fig 4.
Fig 5.
Fig 9.
Fig 7.
Fig 6.
Fig 10.

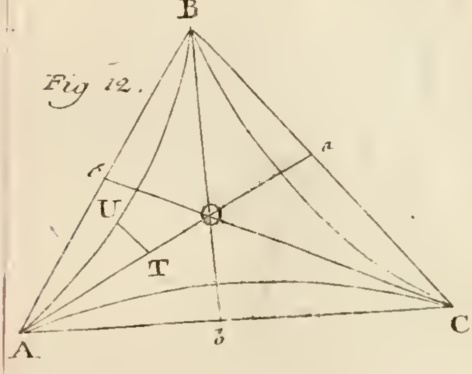


Fig 12.

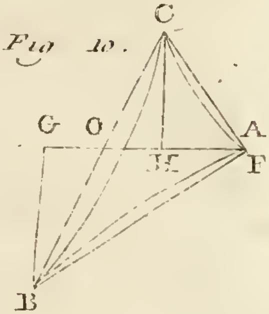


Fig 10.

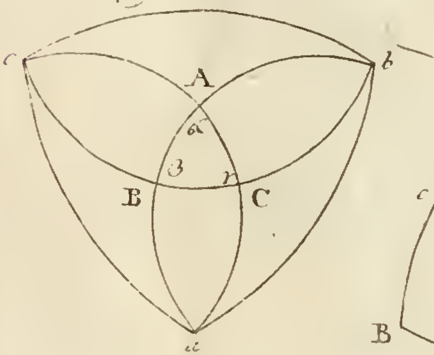


Fig 14.

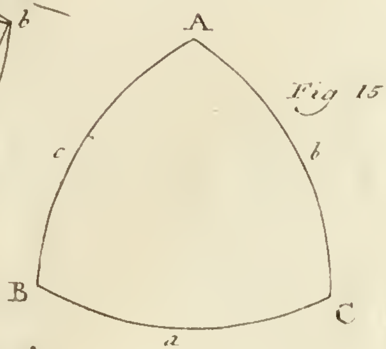


Fig 15.

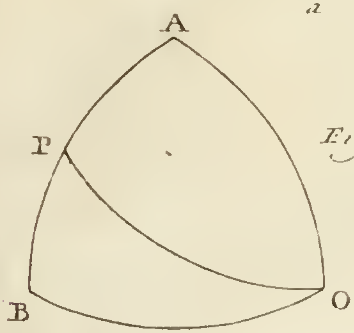


Fig 17.

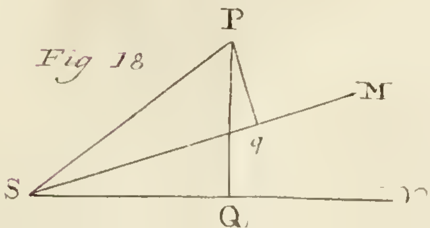


Fig 18

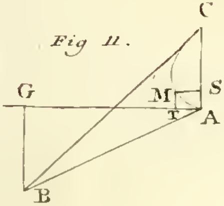


Fig. 11.

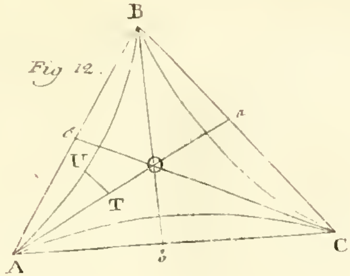


Fig. 12.

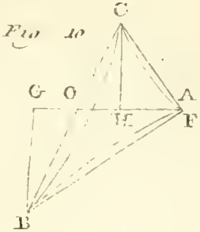


Fig. 10.

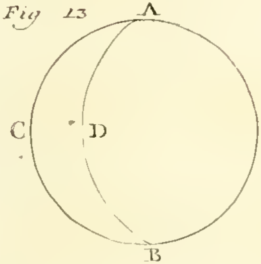


Fig. 13.

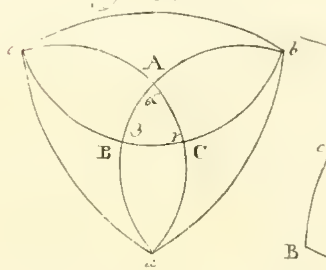


Fig. 14.

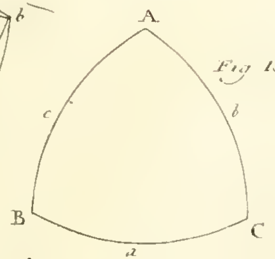


Fig. 15.

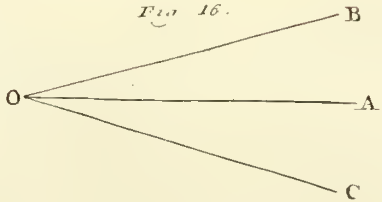


Fig. 16.

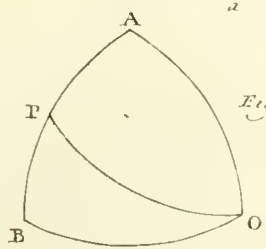


Fig. 17.

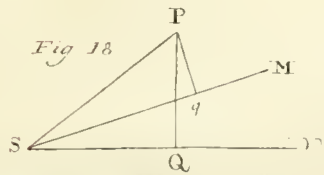


Fig. 18.

II.

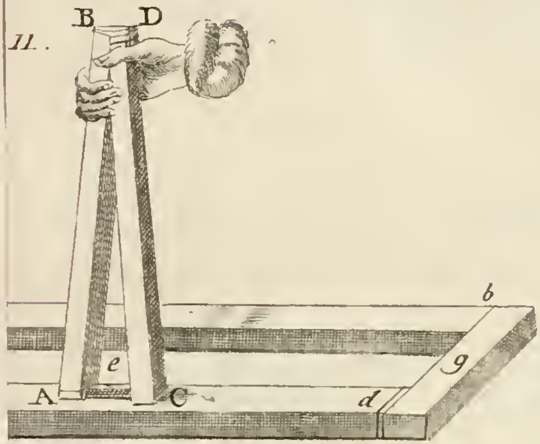


Fig. 12

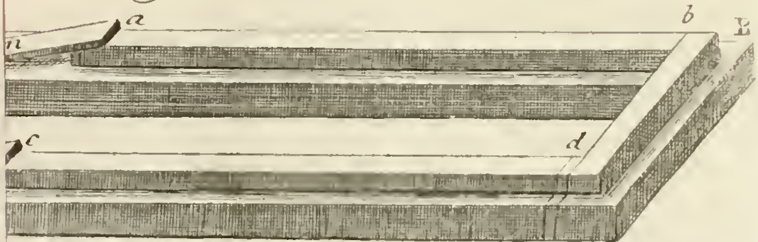


Fig. 14.

Fig. 13.

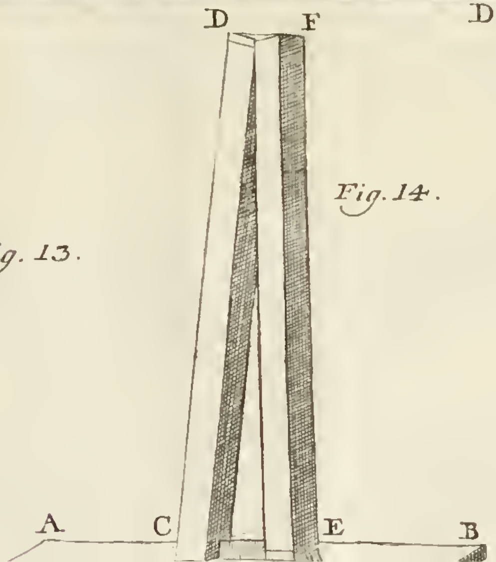


Fig 11.

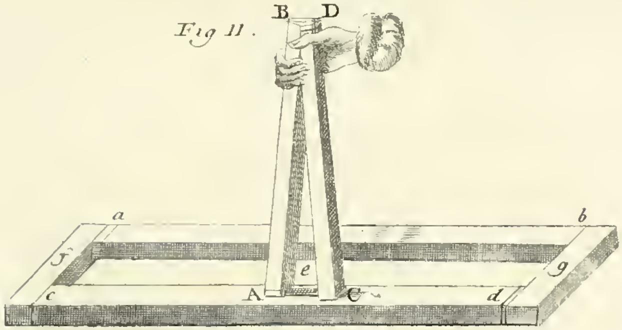
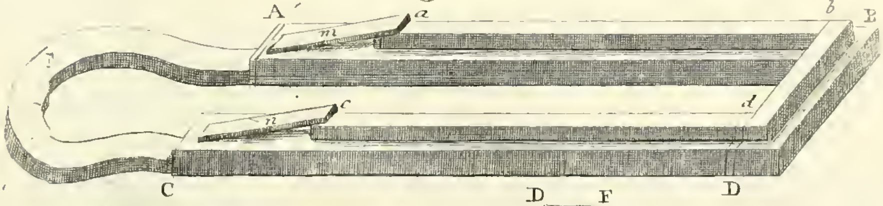


Fig. 12



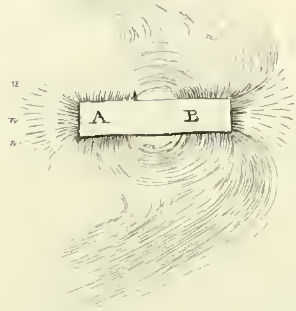


Fig. 13

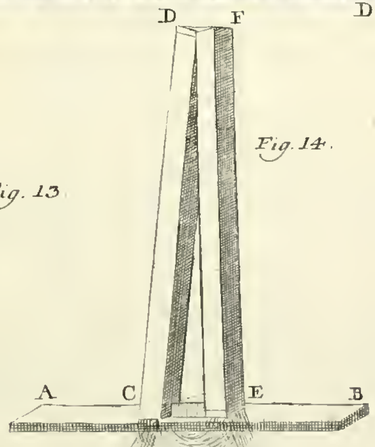


Fig. 14.

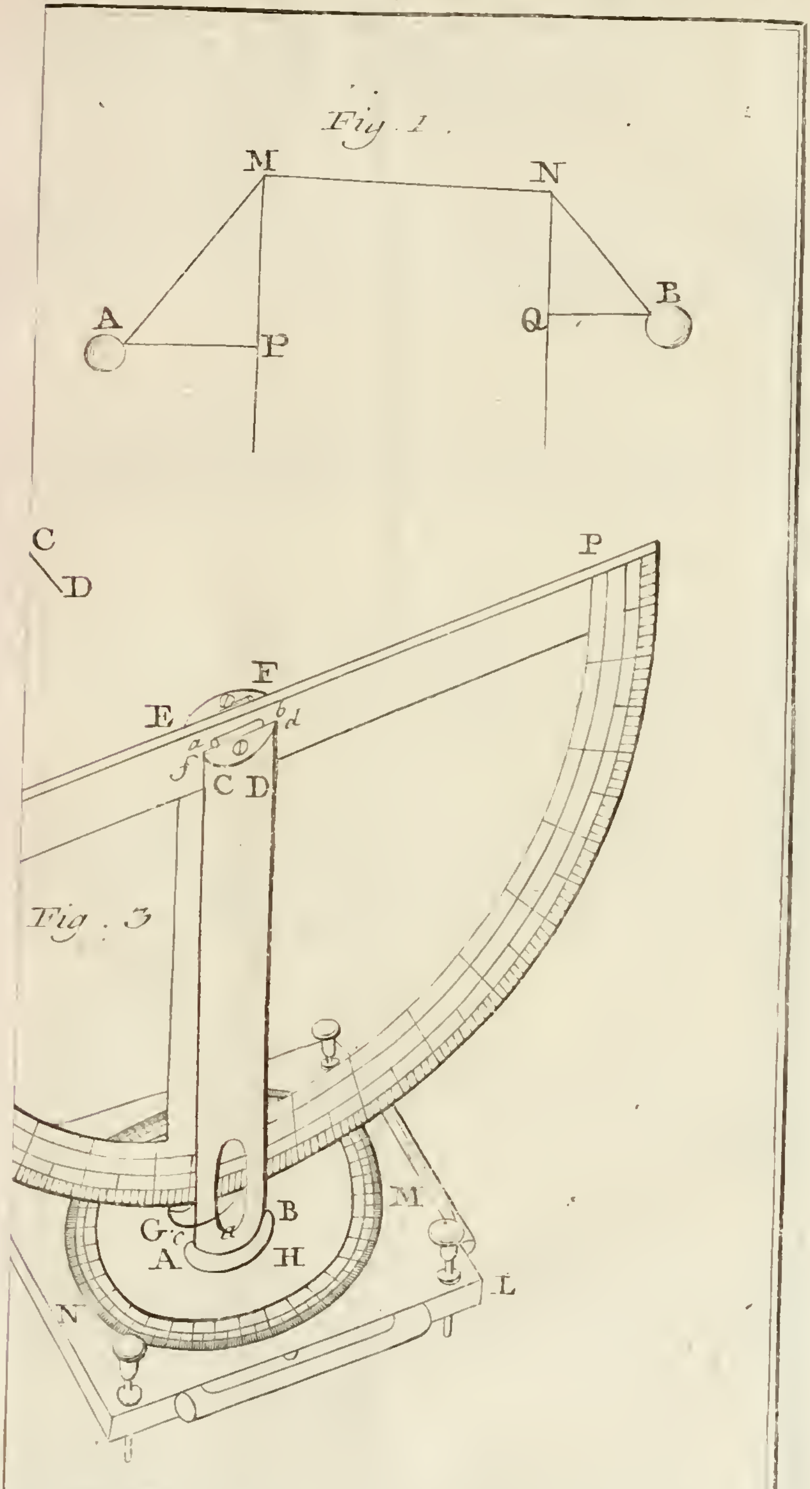


Fig. 1.

Fig. 3

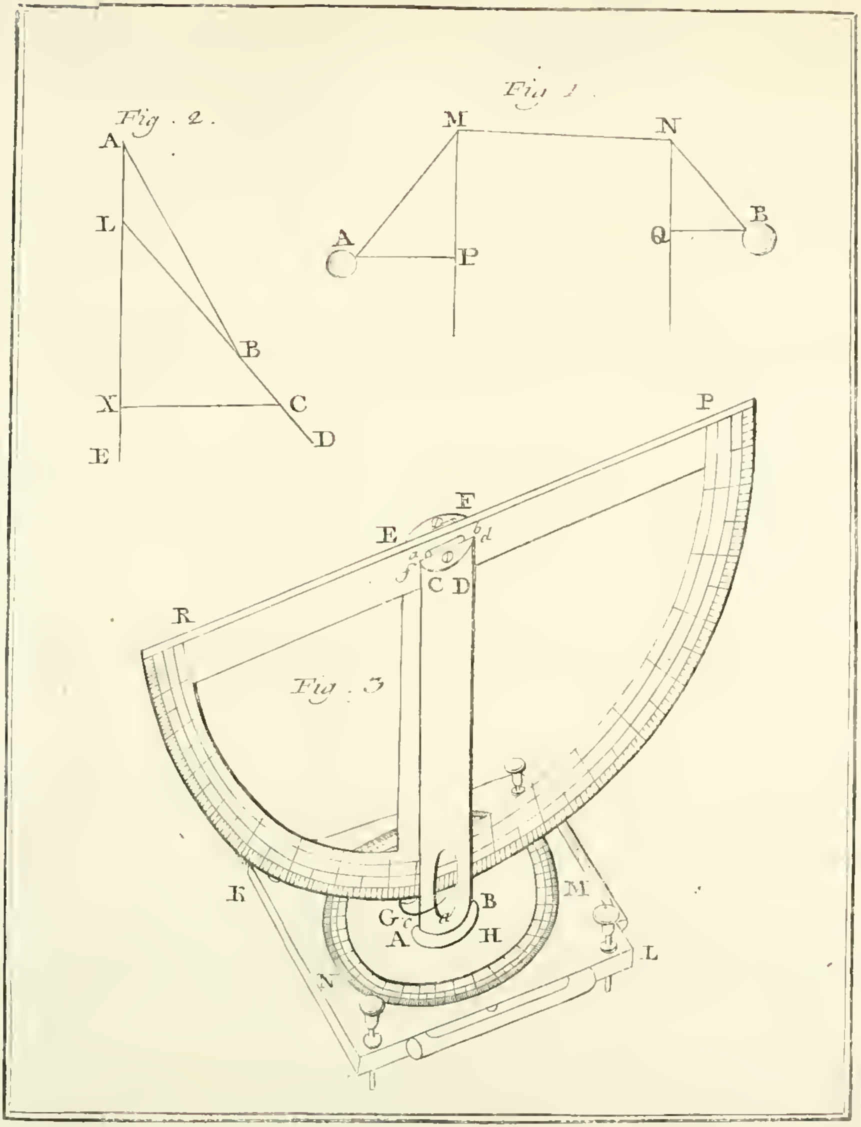
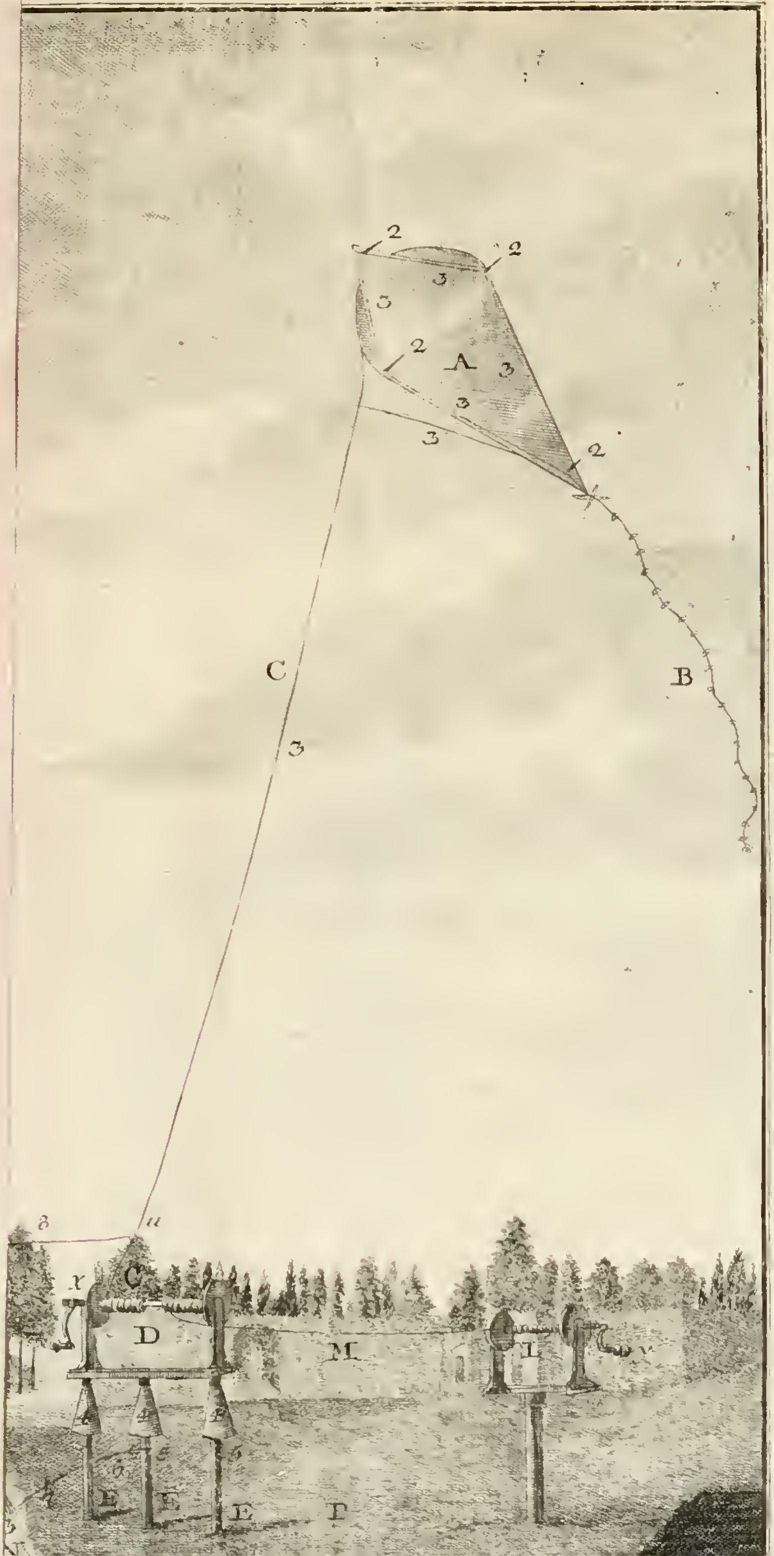
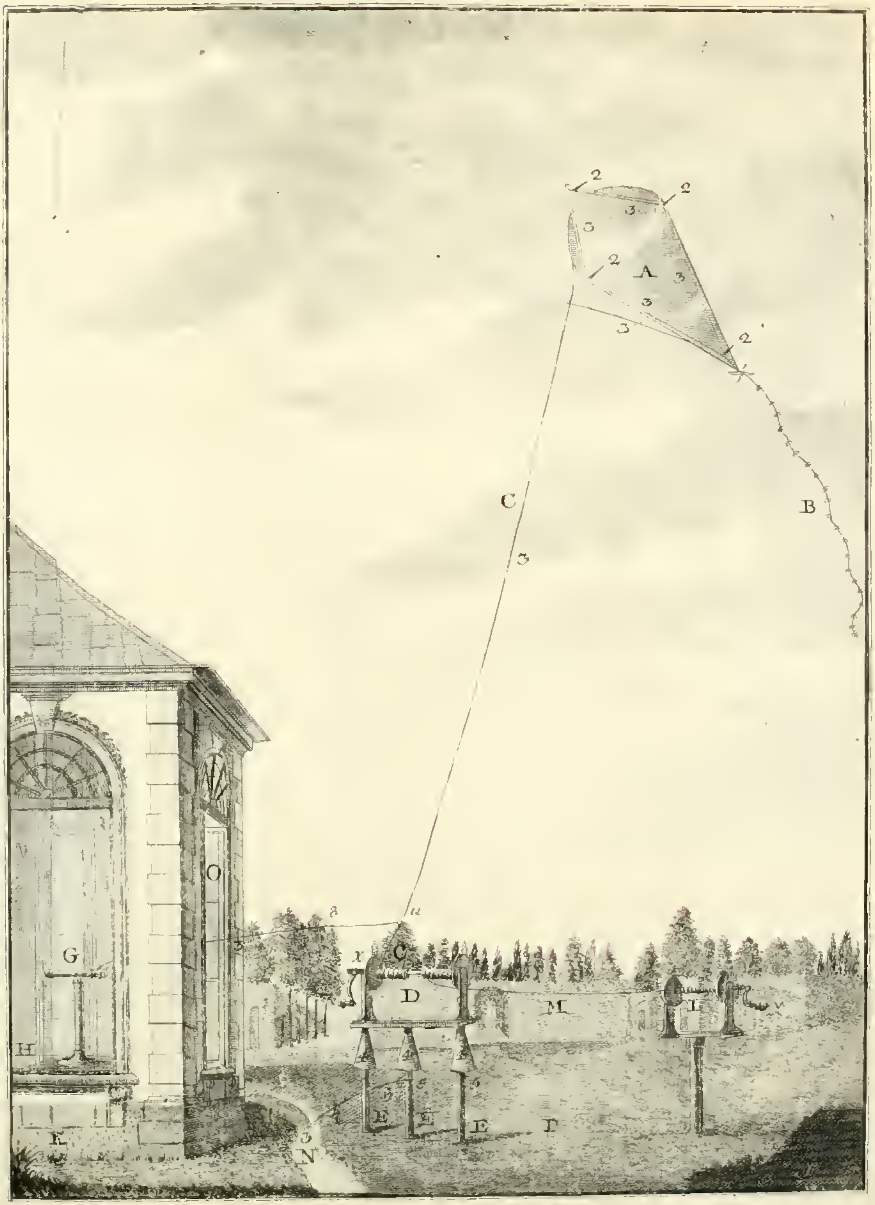
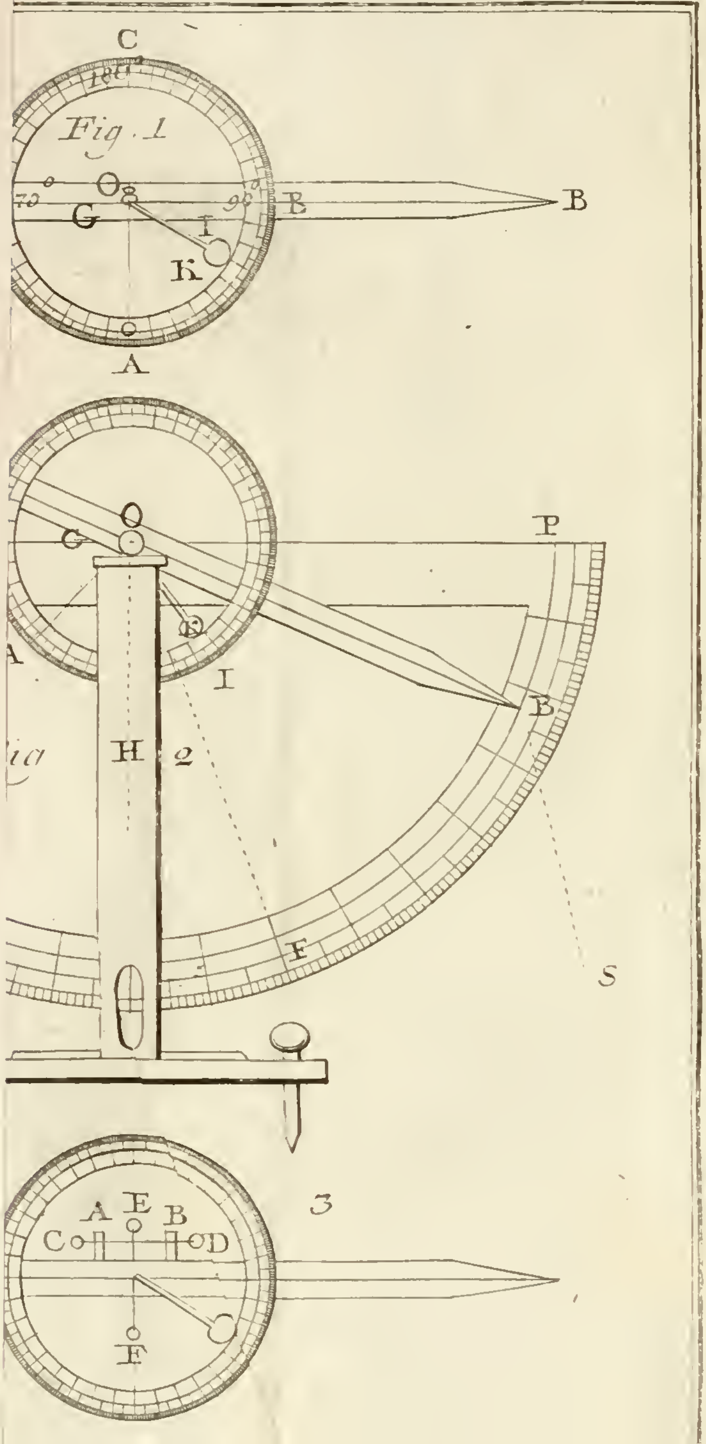
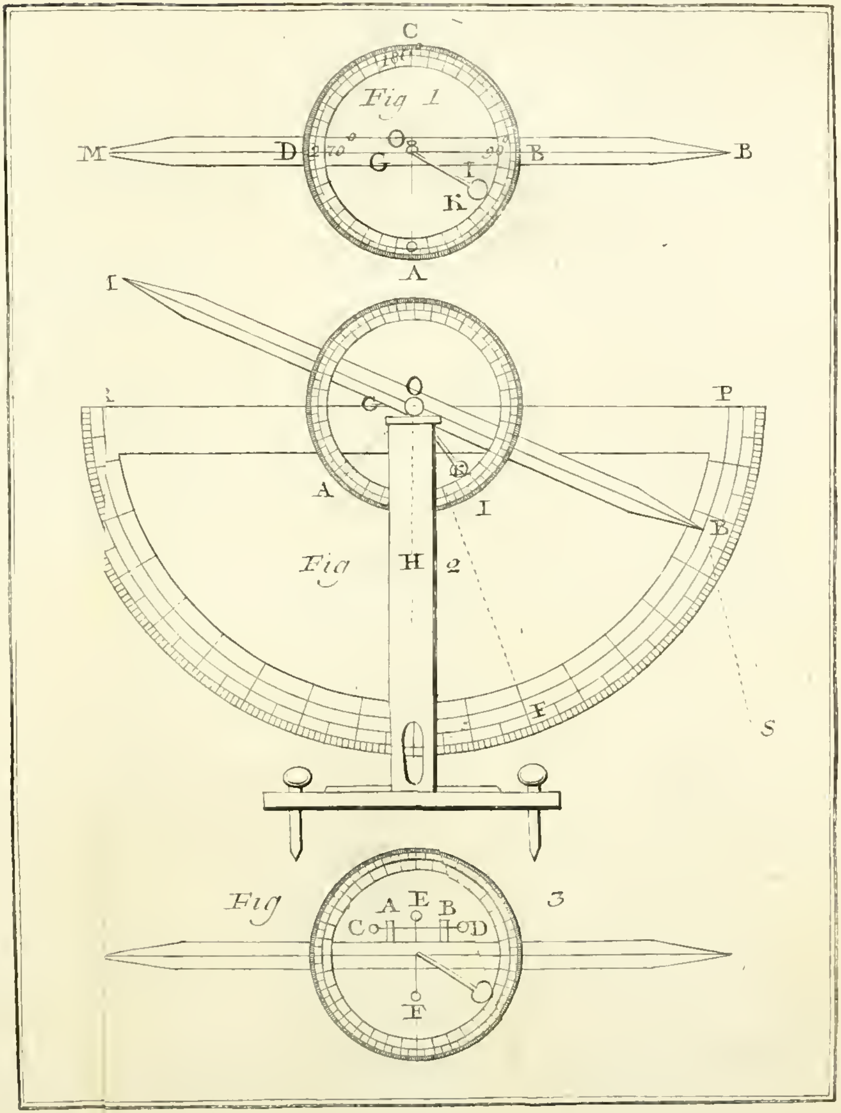


Fig. 2.
A
L
B
X
C
D
E
Fig. 1.
M
N
A
P
Q
B
Fig. 3.
P
F
E
b
d
a
f
C
D
R
K
M
B
G
c
a
A
H
L
N


2
2
3
3
2
A
3
3
3
2
C
B
3
D
M
E
E
E
P


A
B
C
D
E
F
G
H
M
N
O


C
180
Fig. 1
70
90
G
B
B
I
K
A
P
G
A
I
B
H
2
F
S
3
A
E
B
C
D
F


C
180
Fig 1
O
M
D
270
90
B
B
G
I
K
A
I
O
P
G
A
I
B
Fig
H
2
F
S
Fig
3
A
E
B
C
D
F

Acad . Sc . Petropol . Tom . II P. II Tab . V

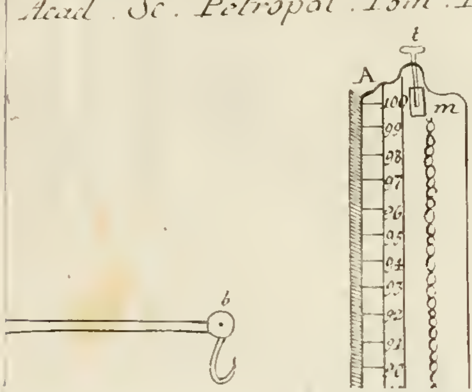


Fig . 4 .

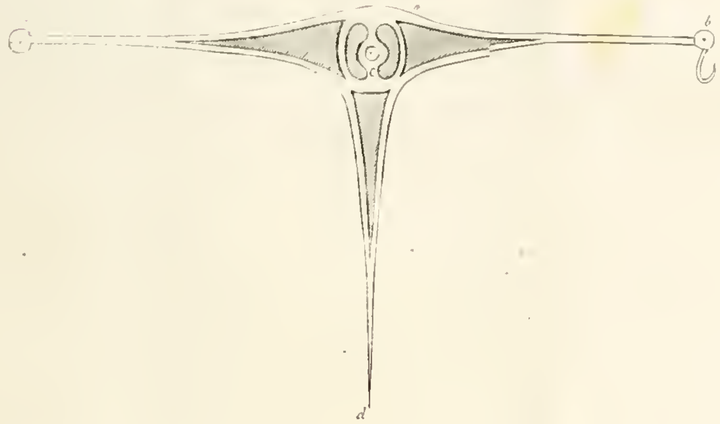
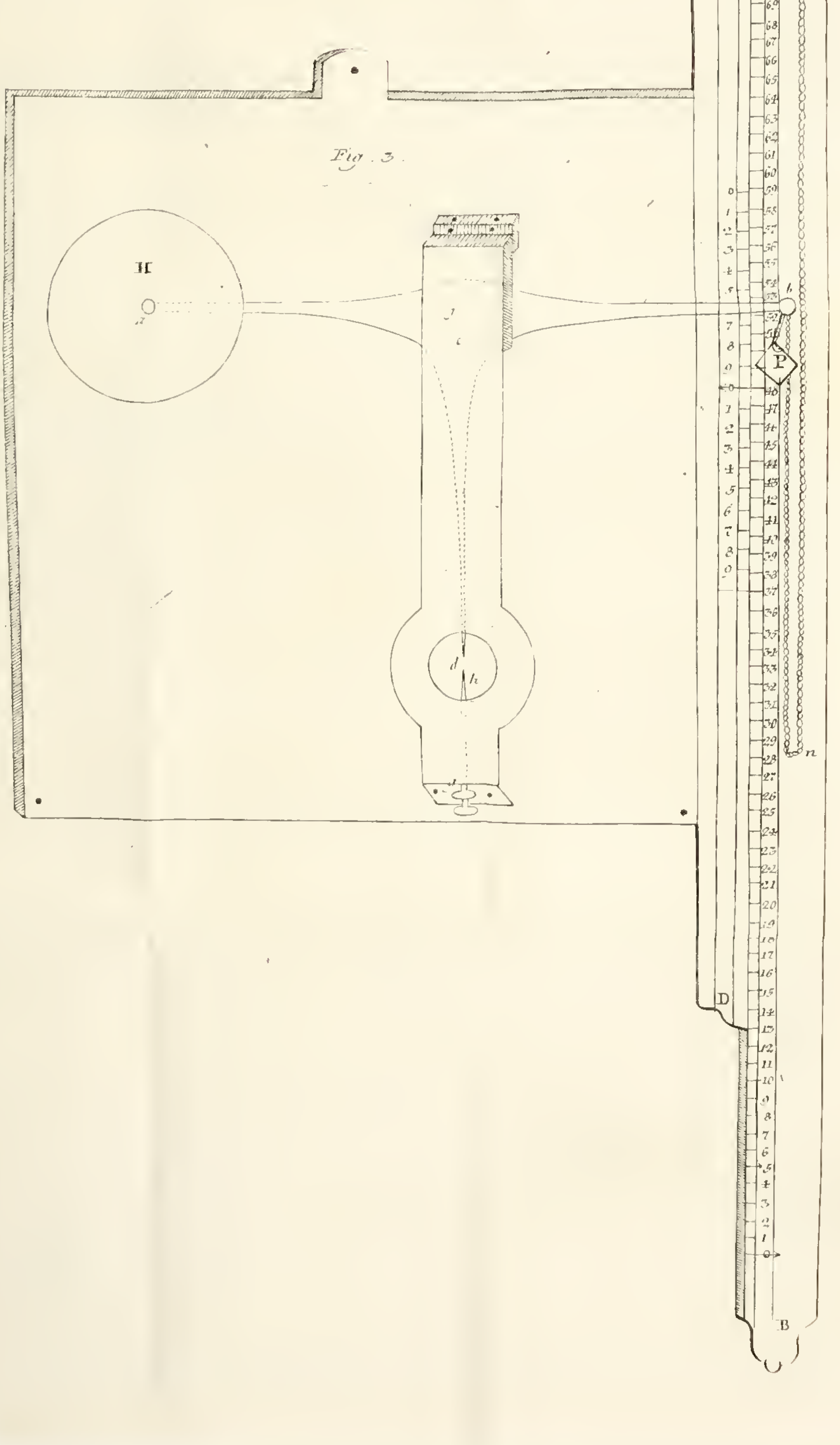


Fig . 3 .



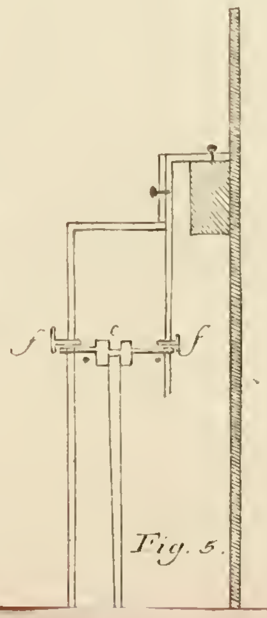


Fig. 5.

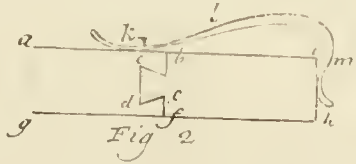


Fig. 2

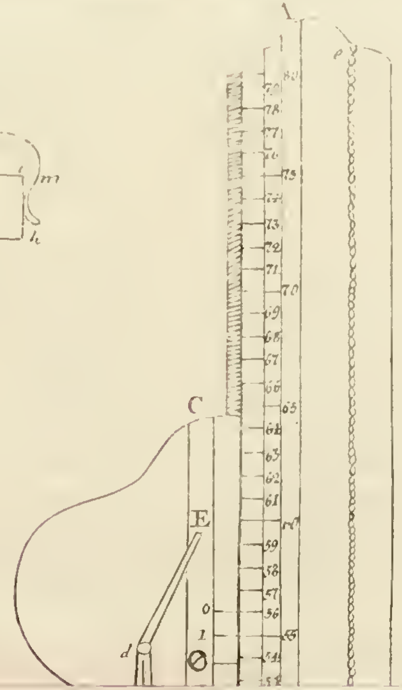


Fig. 1.

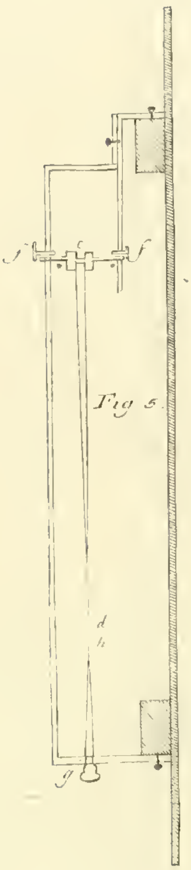


Fig 5.

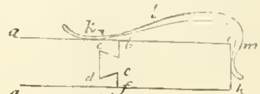


Fig 2

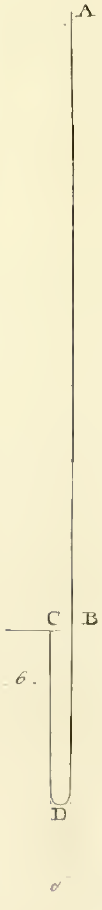


Fig 6.

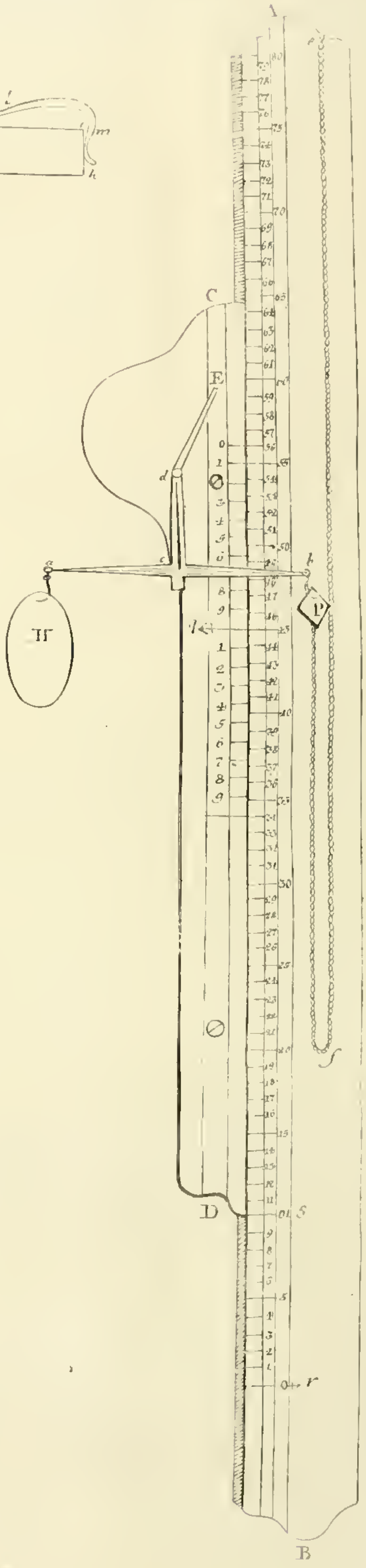
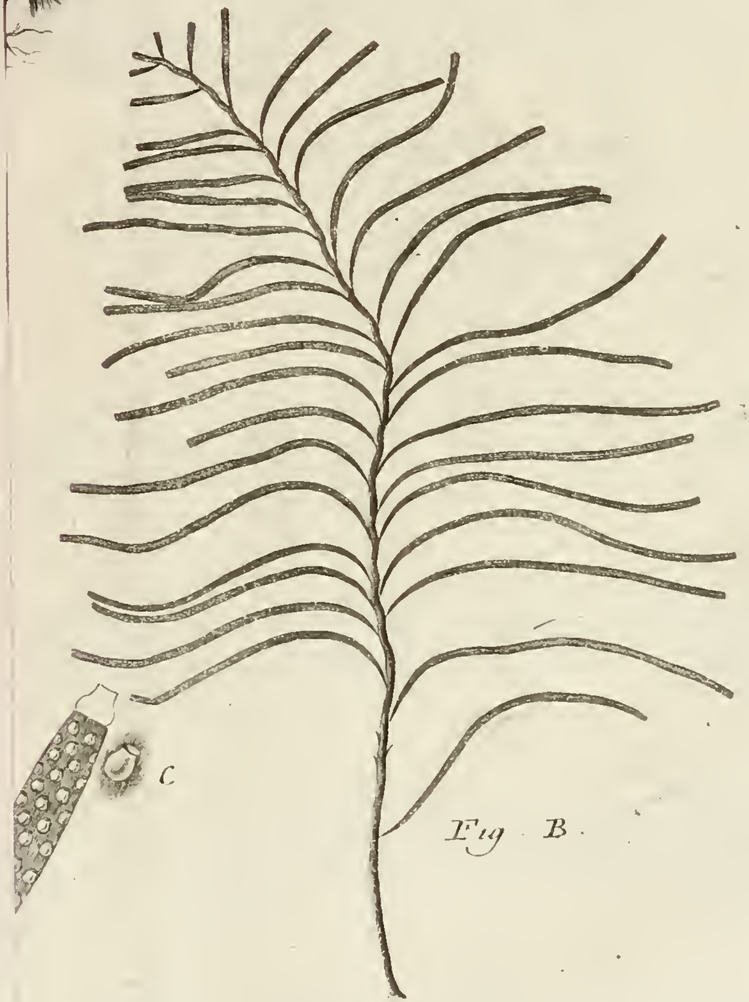


Fig 1.

Fig. A.

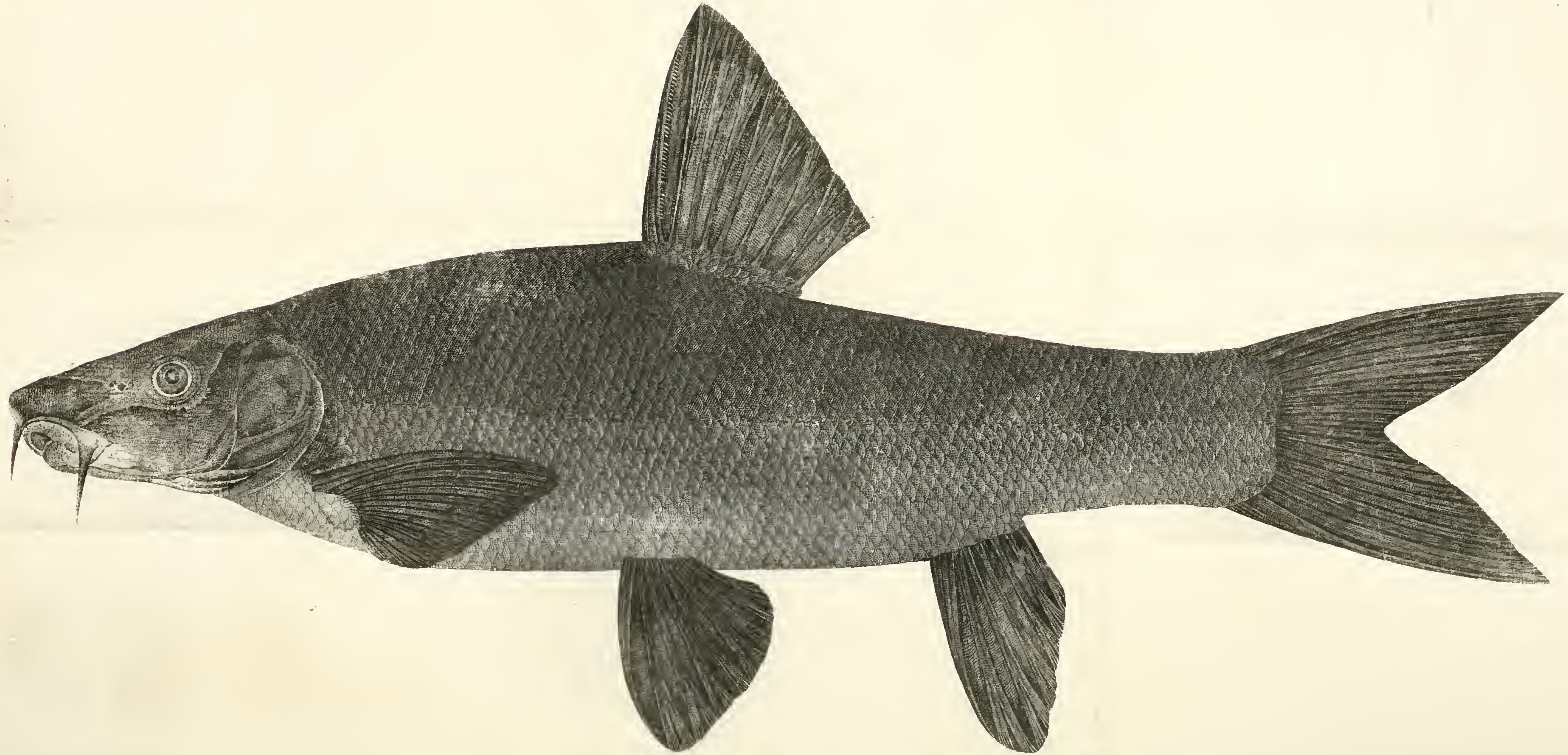


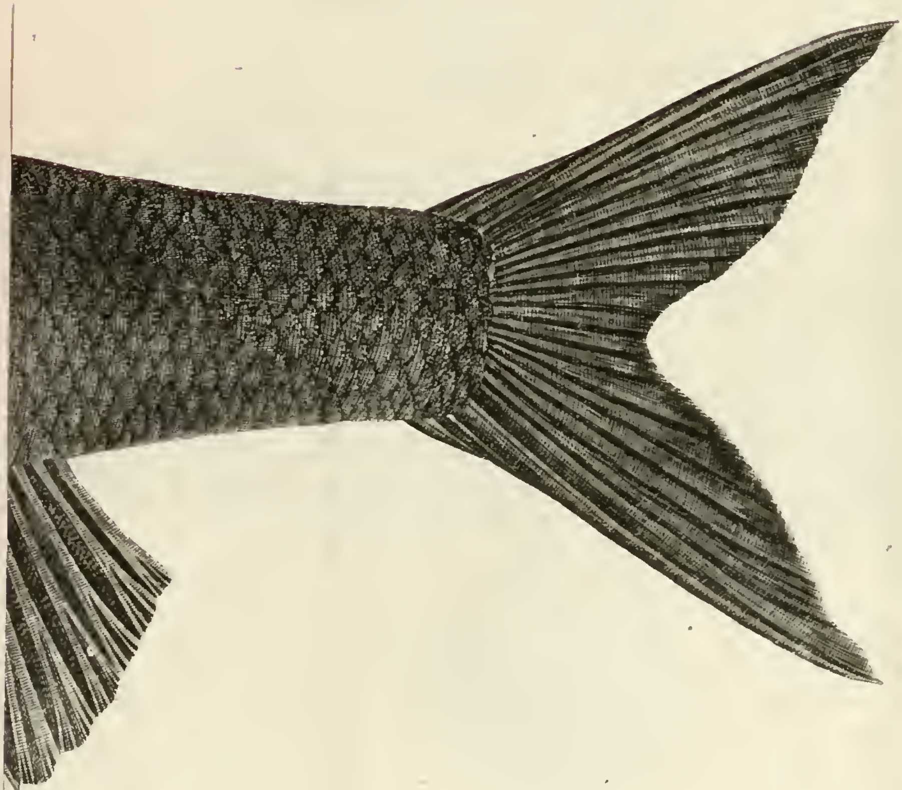
C

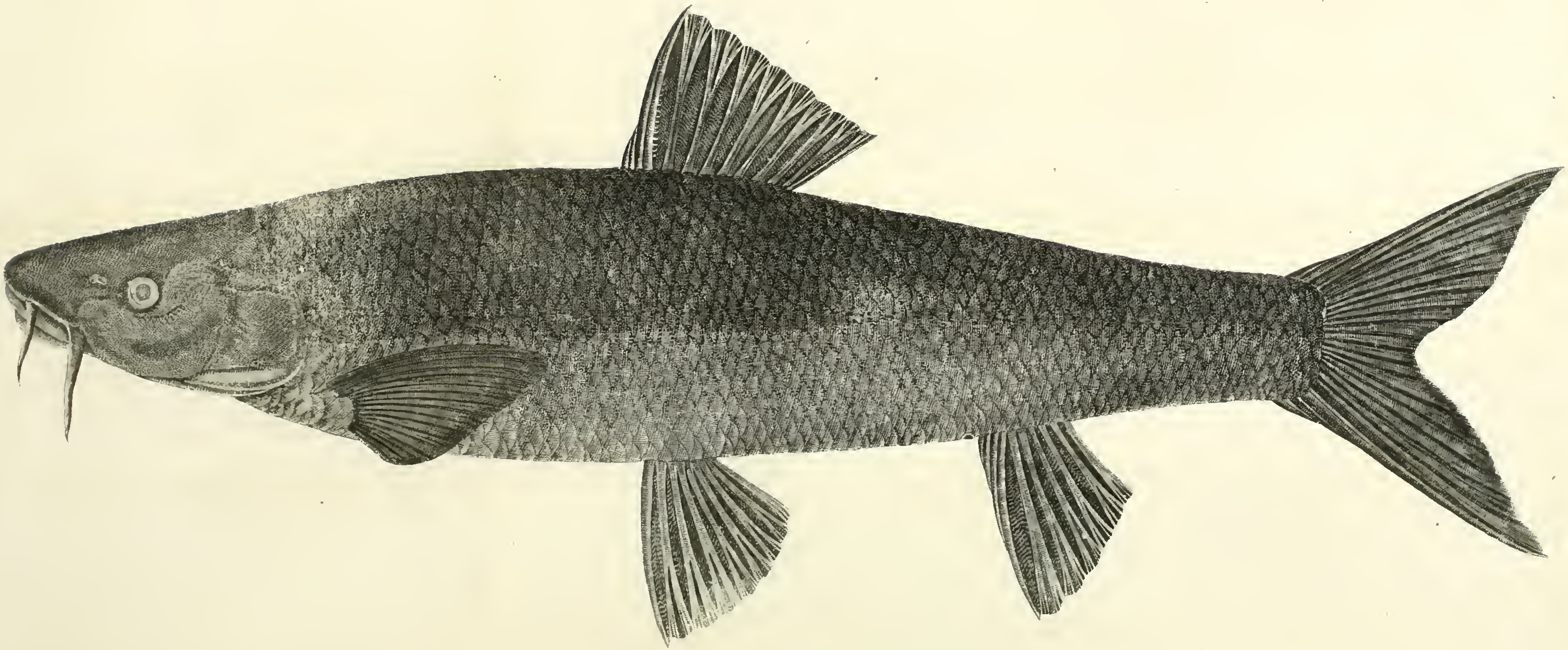
Fig. B.

Fig. A.

Fig B.







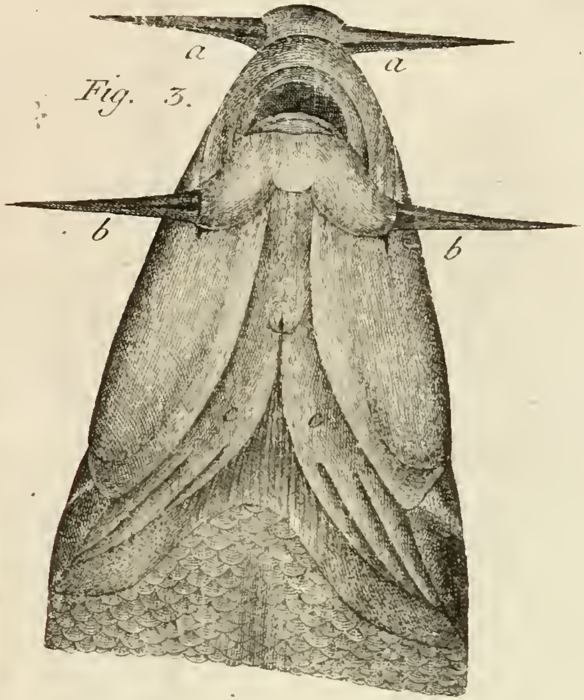


Fig. 3.

Fig. 4.

Fig. 3.

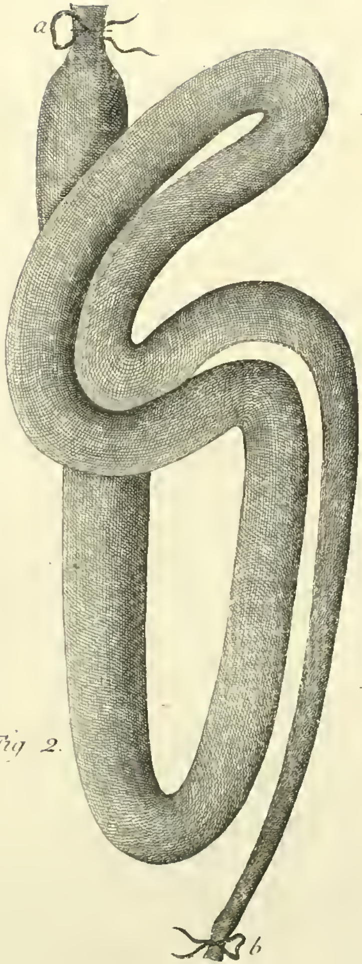
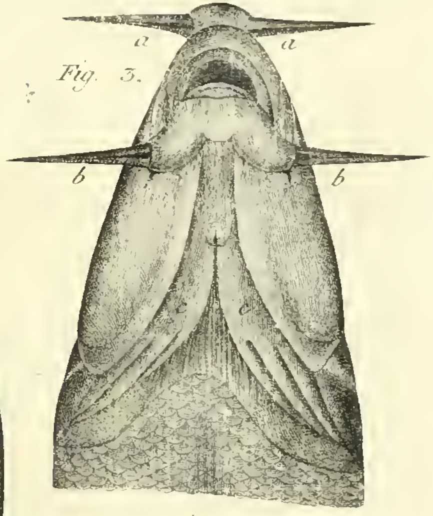


Fig 2.

Fig. 3.



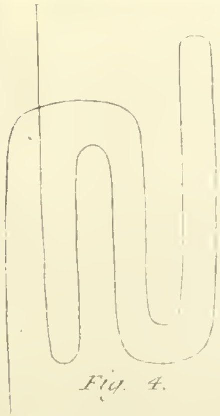


Fig. 4.

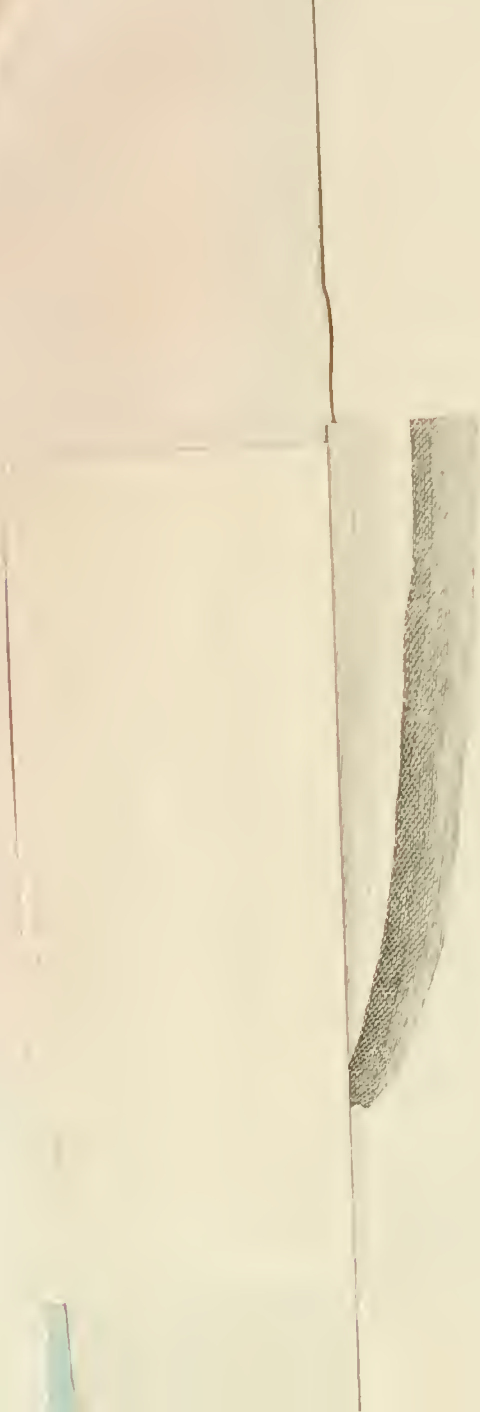



Fig. 1
a
b
c

Act. Acad. Sc. Petr. 1778. II.

Analysis Chemica agarici fugitivi et boletorum bovini atque igniarii auct. Georgi. p. 207.

De inconstantia fabricae corporis humani, de eligendisque ad eam repraesentandam exemplaribus auct. Wolff. p. 217

Novae Pennatulae et ~~[illegible]~~ Sertulariae species descriptae a Lepechin. p.

1.) Pennatula coitinea p. 236 t. VII. f. A

2.) Sertularia obsoleta p. 137. t. VII. f. B.

Cyprinus Barbus et Cyprinus Capito descripti auct. Güldenstädt.

Cyprinus Barbus p. 239. t. VIII.

Cyprinus Capito. p. 248 t. IX. X

Appendix Observationum ad historiam reliquorum cyprinorum citra forum.

1.) De Carpione. p. 253.

2.) De Gobione p. 255.

3.) De Tinca. p. 259.

Digitales hybridae autore Kölreuter

Acta ac. Sc. Petr. pr. ann. 1778. P. II

Plan einer Beschreibung des Russischen Reichs von Lepechin p. 1

Brief von Hahn an Pallas über den Schlangenberg, die Witterung von Barnaul, u. einem Viehsterben von Haarwürmern bewirkt. p. 32

Nachricht von der Anatomie einer vollkommen zweikörperichen ~~Monstro~~, menschlichen Mißgeburt, von Wolff. p. 41

Beobachtung eines Südlichts in St. Petersburg p. 115

Lycia hybrida auctore Kölreuter. p. 219

De Conferve natura disquisitio chemica auct. Georgi. p. 225

Descriptio vesiculæ felleæ Tigridis, ejusque cum leonina et humana comparatio, auct. Wolf. p. 234. t. VII f. 1 & 2.

Oniscorum species descripta ab Lepechin.

1.) Oniscus aculeatus p. 247. t. VIII. f. 1.

2.) —— scorpioides p. 248. t. VIII. f. 2

3.) —— cuspidatus p. 249 t. VIII f. 3.

Antilope subgutturosa descripta a Güldenstädt. p. 251. t. 9–12. Vorher einige Bemerkungen über die Antelopenarten, und ~~vom~~ über des jüngern Gmelins Naturbeobachtungen.