

1.4 Esercizi

1.4.1 Esercizi dei singoli paragrafi

1.1 - Dai numeri naturali ai numeri irrazionali

1.1. Dimostra, con un ragionamento analogo a quello fatto per $\sqrt{2}$, che $\sqrt{3}$ non è razionale.

1.2 - I numeri reali

1.2. Per ciascuno dei seguenti numeri reali scrivi una sequenza di sei numeri razionali che lo approssimano per difetto e sei numeri razionali che lo approssimano per eccesso. Esempio: $\sqrt{3}$: $A = \{1, 1,7, 1,73, 1,732, 1,7320, 1,73205\}$, $B = \{2, 1,8, 1,74, 1,733, 1,7321, 1,73206\}$.

- a) $\sqrt{5}$: $A = \{\dots\dots\dots\}$, $B = \{\dots\dots\dots\}$;
 b) $\frac{6}{7}$: $A = \{\dots\dots\dots\}$, $B = \{\dots\dots\dots\}$;
 c) $\frac{1}{7}$: $A = \{\dots\dots\dots\}$, $B = \{\dots\dots\dots\}$;
 d) $\sqrt{2} + \sqrt{3}$: $A = \{\dots\dots\dots\}$, $B = \{\dots\dots\dots\}$;
 e) $\sqrt{2} \cdot \sqrt{3}$: $A = \{\dots\dots\dots\}$, $B = \{\dots\dots\dots\}$.

1.3 (*). Determina per ciascuno dei seguenti numeri irrazionali i numeri interi tra i quali è compreso. Esempio: $5 < \sqrt{30} < 6$.

- | | | |
|------------------|----------------------------|-------------------------------|
| a) $\sqrt{50}$; | e) $\sqrt{107}$; | i) $2 + \sqrt{7}$; |
| b) $\sqrt{47}$; | f) $\sqrt{119}$; | j) $\sqrt{20} - \sqrt{10}$; |
| c) $\sqrt{91}$; | g) $\sqrt{5} + \sqrt{3}$; | k) $\sqrt{\frac{7}{10}}$; |
| d) $\sqrt{73}$; | h) $2\sqrt{7}$; | l) $7 + \sqrt{\frac{1}{2}}$. |

1.4. Disponi in ordine crescente i seguenti numeri reali:

- a) $\sqrt{2}$, 1, $\frac{2}{3}$, $2,0\overline{13}$, $\sqrt{5}$, $\frac{3}{2}$, 0,75.
 b) π , $\sqrt{3}$, $\frac{11}{5}$, $0,9$, $\sqrt{10}$, $3,14$, $\sqrt[3]{25}$.

1.5. Rappresenta con un diagramma di Eulero-Venn l'insieme dei numeri reali \mathbb{R} , suddividilo nei seguenti sottoinsiemi: l'insieme dei numeri naturali \mathbb{N} , l'insieme dei numeri interi relativi \mathbb{Z} , l'insieme dei numeri razionali \mathbb{Q} , l'insieme \mathbb{J} dei numeri irrazionali. Disponi in maniera opportuna i seguenti numeri: $\sqrt{3}$, $\sqrt[3]{5}$, π , $0,3$, $3,14$, $\frac{3}{2}$, -2 .

1.6 (*). Indica il valore di verità delle seguenti affermazioni:

- a) un numero decimale finito è sempre un numero razionale;
 b) un numero decimale illimitato è sempre un numero irrazionale;
 c) un numero decimale periodico è un numero irrazionale;
 d) la somma algebrica di due numeri razionali è sempre un numero razionale;
 e) la somma algebrica di due numeri irrazionali è sempre un numero irrazionale;
 f) il prodotto di due numeri razionali è sempre un numero razionale;
 g) il prodotto di due numeri irrazionali è sempre un numero irrazionale.

1.3 - Valore assoluto

1.7 (*). Calcola il valore assoluto dei seguenti numeri:

- | | | |
|-----------|----------------------|---------------|
| a) $ -5 $ | d) $ 0 $ | g) $ -3+5 $ |
| b) $ +2 $ | e) $ -10 $ | h) $ (-1)^3 $ |
| c) $ -1 $ | f) $ 3-5 \cdot (2) $ | i) $ -1-2-3 $ |

1.8. Dati due numeri reali x ed y entrambi non nulli e di segno opposto, verifica le seguenti relazioni con gli esempi numerici riportati sotto. Quali delle relazioni sono vere in alcuni casi e false in altri, quali sono sempre vere, quali sono sempre false?

Relazione	$x = -3, y = 5$		$x = -2, y = 2$		$x = -10, y = 1$		$x = 1, y = -5$	
$ x < y $	V	F	V	F	V	F	V	F
$ x = y $	V	F	V	F	V	F	V	F
$ x < y$	V	F	V	F	V	F	V	F
$ x+y < x + y $	V	F	V	F	V	F	V	F
$ x-y = x - y $	V	F	V	F	V	F	V	F
$ x - y = x-y $	V	F	V	F	V	F	V	F

1.9 (*). Elimina il valore assoluto sostituendo le espressioni con una funzione definita per casi:

- | | |
|-------------------------|--------------------------|
| a) $f(x) = x+1 $; | e) $f(x) = x^2-1 $; |
| b) $f(x) = x-1 $; | f) $f(x) = x^3-1 $; |
| c) $f(x) = x^2+1 $; | g) $f(x) = x^2-6x+8 $; |
| d) $f(x) = (x+1)^2 $; | h) $f(x) = x^2+5x+4 $. |

1.10 (*). Elimina il segno di valore assoluto dalle seguenti espressioni sostituendole con una funzione definita per casi:

- | | |
|--|---|
| a) $f(x) = \frac{ x+1 }{ x+2 }$; | e) $f(x) = x-2 + x-3 $; |
| b) $f(x) = \left \frac{x+1}{x-1} \right $; | f) $f(x) = x+1 \cdot x+2 $; |
| c) $f(x) = x+1 + x-2 $; | g) $f(x) = \left \frac{x+1}{4} \right + \left \frac{x+2}{x+1} \right $; |
| d) $f(x) = x+2 + x-2 $; | h) $f(x) = \left \frac{x+1}{x+2} \right + \left \frac{x+2}{x+1} \right $. |

1.4.2 Risposte

1.3. a) $7 < \sqrt{50} < 8$, g) $3 < \sqrt{5} + \sqrt{3} < 4$, h) $5 < 2\sqrt{7} < 6$, i) $4 < 2 + \sqrt{7} < 5$.

1.6. a) V, b) F, c) F, d) V, e) V, f) F, g) F.

1.7. a) 5, b) 0, c) 2, d) 2, e) 10, f) 1, g) 1, h) 7, i) 6.

1.9. a) $x+1$ se $x \geq -1$; $-x-1$ se $x < -1$, b) $x-1$ se $x \geq 1$; $1-x$ se $x < 1$.

1.10. a) $\frac{x+1}{x+2}$ se $x < -2 \vee x > -1$; $-\frac{x+1}{x+2}$ se $-2 < x < -1$; 0 se $x = -1$; senza significato se $x = -2$.