**Prof. Dr. H. Brenner** **Osnabrück WS 2019/2020**

# Bündel, Garben und Kohomologie

## Arbeitsblatt 25

Aufgabe 25.1. Es sei $I \subseteq \mathbb{R}$ ein reelles Intervall und $I = U \cup V$ eine Überdeckung mit (in $I$) offenen Intervallen. Zeige, dass man eine stetige Funktion

$$f\colon U \cap V \longrightarrow \mathbb{R}$$

als

$$f = g|_{U \cap V} - h|_{U \cap V}$$

mit stetigen Funktionen $g\colon U \to \mathbb{R}$ und $g\colon V \to \mathbb{R}$ schreiben kann.

Aufgabe 25.2. Es sei $I \subseteq \mathbb{R}$ ein reelles Intervall. Wir betrachten die kurze exakte Garbensequenz

$$0 \longrightarrow C^0(-,\mathbb{R}) \longrightarrow \operatorname{Abb}(-,\mathbb{R}) \longrightarrow \operatorname{Abb}(-,\mathbb{R})/C^0(-,\mathbb{R}) \longrightarrow 0$$

auf $I$. Es sei $I = U \cup V$ eine Überdeckung mit (in $I$) offenen Intervallen und es sei ein globaler Schnitt in der Quotientengarbe $\operatorname{Abb}(-,\mathbb{R})/C^0(-,\mathbb{R})$ gegeben, der durch Schnitte $s \in \operatorname{Abb}(U,\mathbb{R})$ und $t \in \operatorname{Abb}(V,\mathbb{R})$ repräsentiert werde. Zeige, dass dieser Schnitt durch eine Abbildung $r \in \operatorname{Abb}(I,\mathbb{R})$ repräsentiert wird.

Aufgabe 25.3. Es sei $I \subseteq \mathbb{R}$ ein reelles abgeschlossenes Intervall. Wir betrachten die kurze exakte Garbensequenz

$$0 \longrightarrow C^0(-,\mathbb{R}) \longrightarrow \operatorname{Abb}(-,\mathbb{R}) \longrightarrow \operatorname{Abb}(-,\mathbb{R})/C^0(-,\mathbb{R}) \longrightarrow 0$$

auf $I$. Zeige, dass

$$\operatorname{Abb}(-,\mathbb{R}) \longrightarrow \operatorname{Abb}(-,\mathbb{R})/C^0(-,\mathbb{R})$$

surjektiv ist.

Aufgabe 25.4. Es sei $I \subseteq \mathbb{R}$ ein reelles abgeschlossenes Intervall. Zeige

$$H^1(I, C^0(-,\mathbb{R})) = 0.$$

Aufgabe 25.5. Es sei $G$ eine diskrete topologische Gruppe mit zumindest zwei Elementen $a \neq b$. Wir betrachten auf $S^1$ die exakte Garbensequenz

$$0 \longrightarrow G \longrightarrow \operatorname{Abb}(-,G) \longrightarrow \operatorname{Abb}(-,G)/G \longrightarrow 0\,,$$

wobei hier $G$ die Garbe der lokal konstanten Funktionen mit Werten in $G$, also $C^0(-,G)$, bezeichnet. Es sei $S^1 = U \cup V$ eine offene Überdeckung des Einheitskreises durch zwei sich überlappende Kreissegmente derart, dass der Durchschnitt $U \cap V$ aus zwei disjunkten Kreissegmenten $A$ und $B$ besteht. Es sei

$$h \in \Gamma\big(S^1, \operatorname{Abb}(-,G)/G\big)$$

ein Schnitt, der auf $V$ durch die Nullabbildung $0 \in \operatorname{Abb}(V,G)$ und auf $U$ durch eine Abbildung $g \in \operatorname{Abb}(U,G)$ repräsentiert werde, die auf $A$ den konstanten Wert $a$ und auf $B$ den konstanten Wert $b$ besitze. Zeige, dass dieser Schnitt nicht durch ein Element aus $\operatorname{Abb}(S^1,G)$ repräsentiert werden kann und dass folglich $H^1(S^1,G) \neq 0$ ist.

Aufgabe 25.6. Zeige unter Verwendung von Beispiel 6.6, dass

$$H^1(\mathbb{C}^\times,\mathbb{Z}) \neq 0$$

ist (hier bezeichnet $\mathbb{Z}$ die Garbe der stetigen Funktionen mit Werten in der diskreten topologischen Gruppe $\mathbb{Z}$).

Aufgabe 25.7. Es sei $X$ ein topologischer Raum mit der Eigenschaft, dass es einen Punkt $x \in X$ gibt, dessen einzige offene Umgebung der Gesamtraum ist.

(1) Zeige, dass das Spektrum eines lokalen Ringes diese Eigenschaft hat.
(2) Zeige, dass sämtliche Garben von kommutativen Gruppen $\mathcal{G}$ auf $X$ keine nichtriviale Kohomologie besitzen.
(3) Zeige, dass nicht sämtliche Garben auf $\operatorname{Spek}(R)$ zu einem lokalen Ring $R$ welk sind.

Aufgabe 25.8. Es sei $R$ ein Integritätsbereich und $I$ ein Ideal in $R$ mit der zugehörigen quasikohärenten Idealgarbe $\widetilde{I}$ auf $\operatorname{Spek}(R)$. Zeige unter Verwendung von Lemma 25.7, dass

$$H^1(\operatorname{Spek}(R),\widetilde{I}) = 0$$

ist.

Aufgabe 25.9. Sei $R = K[X,Y]$ der Polynomring über einem Körper $K$ mit dem maximalen Ideal $\mathfrak{m} = (X,Y)$. Wir betrachten die kurze exakte Sequenz von $R$-Moduln

$$0 \longrightarrow R \stackrel{e\mapsto(Y,-X)}{\longrightarrow} R^2 \stackrel{e_1\mapsto X,\, e_2\mapsto Y}{\longrightarrow} \mathfrak{m} \longrightarrow 0\,.$$

(1) Formuliere die kurze exakte Garbensequenz der zugehörigen quasi-kohärenten Moduln auf $\mathbb{A}_K^2 = \operatorname{Spek}(R)$.
(2) Zeige, dass die Auswertung der Garbensequenz aus (1) auf $U = D(X,Y) \subset \mathbb{A}_K^2$ nicht exakt ist.
(3) Was ist das Bild unter dem verbindenen Homomorphismus von
$$1 \in R = \Gamma(U, \mathcal{O}_X) = \Gamma(U, \widetilde{\mathfrak{m}})$$
in $H^1(U, \mathcal{O}_X)$?

Aufgabe 25.10. Es sei $(X, \mathcal{O}_X)$ ein integres Schema mit dem Funktionenkörper $K$. Es sei $\mathcal{O}_X^\times$ die Garbe der Einheiten auf $X$ und es sei $\mathcal{U}$ die konstante Garbe zu $K^\times$. Zeige
$$H^1(X, \mathcal{O}_X^\times) = \Gamma\big(X, \mathcal{U}/\mathcal{O}_X^\times\big) / \operatorname{bild}\big(K^\times \to \Gamma\big(X, \mathcal{U}/\mathcal{O}_X^\times\big)\big).$$

Aufgabe 25.11. Es sei $R$ ein faktorieller Integritätsbereich. Zeige
$$H^1(\operatorname{Spek}(R), \mathcal{O}_X^\times) = \{1\}.$$

Aufgabe 25.12. Wir betrachten den quadratischen Zahlbereich $R = A_{-5} = \mathbb{Z}[\sqrt{-5}] \cong \mathbb{Z}[T]/(T^2+5)$. Zeige unter Verwendung von Beispiel 14.6, dass
$$H^1(\operatorname{Spek}(R), \mathcal{O}_{\operatorname{Spek}(R)}^\times) \neq \{1\}$$
ist.

Aufgabe 25.13. Es sei $f \colon X \to Y$ eine stetige Abbildung zwischen topologischen Räumen. Zeige, dass durch den Vorschub $\mathcal{G} \mapsto f_*\mathcal{G}$ ein linksexakter kovarianter Funktor von der Kategorie der Garben von kommutativen Gruppen auf $X$ in die Kategorie der Garben von kommutativen Gruppen auf $Y$ gegeben ist.

Bemerkung: Die zugehörigen rechtsderivierten Funktoren nennt man *höhere Bildgarben*.

## Abbildungsverzeichnis