Prof. Dr. H. Brenner **Osnabrück SS 2023**

Grundkurs Mathematik II

Vorlesung 35

> Man gibt seine Kinder auf die Schule, daß sie still werden, auf die Hochschule, daß sie laut werden.
>
> Jean Paul (1763-1825)

Lineare Abbildungen

Eine lineare Funktion über einem Körper K ist einfach eine Abbildung der Form

$$K \longrightarrow K,\, x \longmapsto cx,$$

mit einer Konstanten c (einem Proportionalitätsfaktor), die bei einem angeordneten Körper den Anstieg des Graphen beschreibt. Ein einzelnes Element c kann man als eine 1×1-Matrix auffassen. Wir dehnen das lineare Konzept auf Abbildungen zwischen Standardräumen aus und wir werden sehen, dass diese durch Matrizen beschrieben werden können.

Definition 35.1. Es sei K ein Körper und $m, n \in \mathbb{N}$. Eine Abbildung

$$\varphi\colon\, K^n \longrightarrow K^m$$

heißt *lineare Abbildung*, wenn die beiden folgenden Eigenschaften erfüllt sind.

(1) $\varphi(u+v) = \varphi(u) + \varphi(v)$ für alle $u, v \in K^n$.
(2) $\varphi(sv) = s\varphi(v)$ für alle $s \in K$ und $v \in K^n$.

Beispiel 35.2. Es stehen n verschiedene Produkte zum Verkauf, wobei das i-te Produkt (pro Einheit) a_i kostet. Ein Einkauf wird durch das n-Tupel

$$(x_1,\, x_2,\, \ldots,\, x_n)$$

repräsentiert, wobei x_i die vom i-ten Produkt gekaufte Menge angibt. Der Preis des Einkaufs wird dann durch $\sum_{i=1}^n a_i x_i$ beschrieben. Die Preisabbildung

$$\varphi\colon\, \mathbb{Q}^n \longrightarrow \mathbb{Q},\, (x_1,\, x_2,\, \ldots,\, x_n) \longmapsto \sum_{i=1}^n a_i x_i.$$

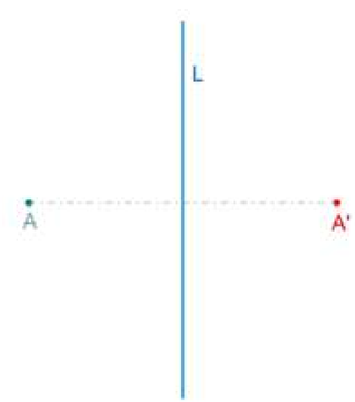
ist linear. Dies beruht auf

$$\varphi(x+y) = \sum_{i=1}^n a_i(x_i+y_i) = \sum_{i=1}^n a_i x_i + \sum_{i=1}^n a_i y_i = \varphi(x) + \varphi(y)$$

und
$$\varphi(sx) = \sum_{i=1}^{n} a_i s x_i = s \sum_{i=1}^{n} a_i x_i = s\varphi(x).$$
Inhaltlich bedeutet dies beispielsweise, dass wenn man zuerst den Einkauf $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ tätigt und eine Woche später den Einkauf $(y_1, y_2, \ldots, y_n)$, dass dann der Preis der beiden Einkäufe zusammen dem Preis entspricht, den man bezahlt hätte, wenn man auf einen Schlag
$$(x_1 + y_1, x_2 + y_2, \ldots, x_n + y_n)$$
gekauft hätte.

Beispiel 35.3. Es sei K ein Körper und sei K^n der n-dimensionale Standardraum. Dann ist die i-te *Projektion*, also die Abbildung
$$K^n \longrightarrow K, (x_1, \ldots, x_{i-1}, x_i, x_{i+1}, \ldots, x_n) \longmapsto x_i,$$
eine K-lineare Abbildung. Dies folgt unmittelbar aus der komponentenweisen Addition und Skalarmultiplikation auf dem Standardraum. Die i-te Projektion heißt auch die i-te *Koordinatenfunktion*.

Die beiden folgenden Beispiele entstammen der elementaren Geometrie.



Eine *Achsenspiegelung* an einer Achse.

Beispiel 35.4. Die Abbildung
$$K^2 \longrightarrow K^2, (x, y) \longmapsto (-x, y),$$
ist linear und beschreibt die *Achsenspiegelung* an der y-Achse.

Beispiel 35.5. Die Abbildung
$$K^2 \longrightarrow K^2, (x, y) \longmapsto (-x, -y),$$
ist linear und beschreibt die *Punktspiegelung* am Nullpunkt.

Lemma 35.6. *Es sei K ein Körper und sei $\varphi\colon K^n \to K^m$ eine lineare Abbildung. Dann gelten folgende Eigenschaften.*

(1) *Es ist* $\varphi(0) = 0$.
(2) *Für jede Linearkombination* $\sum_{i=1}^{k} s_i v_i$ *in* K^n *gilt*

$$\varphi\left(\sum_{i=1}^{k} s_i v_i\right) = \sum_{i=1}^{k} s_i \varphi(v_i).$$

Beweis. Siehe Aufgabe 35.7. □

LEMMA 35.7. *Es sei* K *ein Körper und seien* $\psi\colon K^p \to K^n$ *und* $\varphi\colon K^n \to K^m$ *lineare Abbildungen. Dann gelten folgende Eigenschaften.*

(1) *Die Hintereinanderschaltung*

$$\varphi \circ \psi\colon K^p \longrightarrow K^m$$

ist ebenfalls linear.
(2) *Wenn* φ *bijektiv ist, so ist auch die Umkehrabbildung*

$$\varphi^{-1}\colon K^m \longrightarrow K^n$$

linear.

Beweis. Siehe Aufgabe 35.8. □

Nach Lemma 35.6 wird unter einer linearen Abbildung die 0 auf die 0 abgebildet. Die Menge aller Vektoren, die unter einer linearen Abbildung auf 0 abgebildet werden, ist für die Abbildung charakteristisch und bekommt einen eigenen Namen.

DEFINITION 35.8. Zu einer linearen Abbildung $\varphi\colon K^n \to K^m$ heißt

$$\operatorname{kern} \varphi = \{x \in K^n \mid \varphi(x) = 0\}$$

der *Kern* von φ.

Der Kern ist einfach das Urbild des Nullvektors und wird auch mit $\varphi^{-1}(0)$ bezeichnet. Er ist ein Untervektorraum des K^n, siehe Aufgabe 35.31.

LEMMA 35.9. *Es sei* K *ein Körper und sei*

$$\varphi\colon K^n \longrightarrow K^m$$

eine lineare Abbildung. Dann ist φ *genau dann injektiv, wenn* $\operatorname{kern} \varphi = 0$ *ist.*

Beweis. Wenn die Abbildung injektiv ist, so kann es neben $0 \in K^n$ keinen anderen Vektor $v \in V$ mit $\varphi(v) = 0$ geben. Also ist $\varphi^{-1}(0) = 0$. Es sei umgekehrt $\operatorname{kern} \varphi = 0$ und seien $v_1, v_2 \in V$ gegeben mit $\varphi(v_1) = \varphi(v_2)$. Dann ist wegen der Linearität

$$\varphi(v_1 - v_2) = \varphi(v_1) - \varphi(v_2) = 0.$$

Daher ist $v_1 - v_2 \in \operatorname{kern} \varphi$ und damit $v_1 = v_2$. □

So, wie eine lineare Funktion $\varphi\colon K \to K$ durch den Wert an einer einzigen Stelle $\neq 0$ festgelegt ist, was die Grundlage für Dreisatzaufgaben ist, sind lineare Abbildungen $\varphi\colon K^n \to K^m$ durch die Werte auf einer Basis des K^n festgelegt. Der folgende Satz beweist dies für die Standardbasis, siehe Aufgabe 35.20 für den allgemeinen Fall. Für entsprechende „Mehrsatzaufgaben" siehe u. A. Aufgabe 35.1, Aufgabe 35.3 und Aufgabe 35.23.

Satz 35.10. *Es sei K ein Körper und $m, n \in \mathbb{N}$. Es seien w_i, $i = 1, \ldots, n$, Elemente in K^m. Dann gibt es genau eine lineare Abbildung*

$$\varphi\colon K^n \longrightarrow K^m$$

mit

$$\varphi(e_i) = w_i \text{ für alle } i = 1, \ldots, n\,,$$

wobei e_i den i-ten Standardvektor bezeichnet.

Beweis. Da $\varphi(e_i) = w_i$ sein soll und eine lineare Abbildung nach Lemma 35.6 (2) für jede Linearkombination die Eigenschaft

$$\varphi\left(\sum_{i=1}^{n} s_i e_i\right) = \sum_{i=1}^{n} s_i \varphi(e_i)$$

erfüllt, und jeder Vektor $v \in K^n$ sich als eine solche Linearkombination schreiben lässt, kann es maximal nur eine solche lineare Abbildung geben. Wir definieren nun umgekehrt eine Abbildung

$$\varphi\colon K^n \longrightarrow K^m,$$

indem wir jeden Vektor $v \in K^n$ mit der gegebenen Standardbasis als

$$v = \sum_{i=1}^{n} s_i e_i$$

schreiben und

$$\varphi(v) := \sum_{i=1}^{n} s_i w_i$$

ansetzen. Da die Darstellung von v als eine solche Linearkombination eindeutig ist, ist diese Abbildung wohldefiniert. Zur Linearität. Für zwei Vektoren $u = \sum_{i=1}^{n} s_i e_i$ und $v = \sum_{i=1}^{n} t_i e_i$ gilt

$$\begin{aligned} \varphi(u+v) &= \varphi\left(\left(\sum_{i=1}^{n} s_i e_i\right) + \left(\sum_{i=1}^{n} t_i e_i\right)\right) \\ &= \varphi\left(\sum_{i=1}^{n} (s_i + t_i) e_i\right) \\ &= \sum_{i=1}^{n} (s_i + t_i) \varphi(e_i) \end{aligned}$$

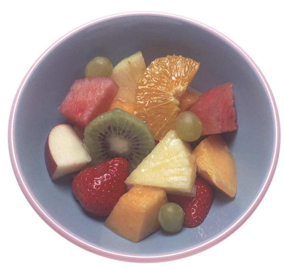
$$\begin{aligned} &= \sum_{i=1}^{n} s_i \varphi(e_i) + \sum_{i=1}^{n} t_i \varphi(e_i) \\ &= \varphi\left(\sum_{i=1}^{n} s_i e_i\right) + \varphi\left(\sum_{i=1}^{n} t_i e_i\right) \\ &= \varphi(u) + \varphi(v). \end{aligned}$$

Die Verträglichkeit mit der skalaren Multiplikation ergibt sich ähnlich, siehe Aufgabe 35.19. □

Lineare Abbildungen und Matrizen

Beispiel 35.11. Ein gesundes Frühstück beginnt mit einem Obstsalat. Die folgende Tabelle zeigt, wie viel Vitamin C, Calcium und Magnesium (jeweils in Milligramm) unterschiedliche Früchte (pro 100 Gramm) besitzen.

Frucht	Vitamin C	Calcium	Magnesium
Apfel	12	7	6
Orange	53	40	10
Traube	4	12	8
Banane	9	5	27



Dies führt zu einer Abbildung, die einem 4-Tupel $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix}$, das die verarbeiteten (oder verzehrten) Früchte beschreibt, den Gesamtgehalt des Obstsalats an Vitamin C, Calcium und Magnesium in Form eines 3-Tupels $\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}$ zuordnet.

Diese Abbildung kann mit der Matrix

$$\begin{pmatrix} 12 & 53 & 4 & 9 \\ 7 & 40 & 12 & 5 \\ 6 & 10 & 8 & 27 \end{pmatrix}$$

unter Verwendung der Matrixmultiplikation als Zuordnung

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} \longmapsto \begin{pmatrix} 12 & 53 & 4 & 9 \\ 7 & 40 & 12 & 5 \\ 6 & 10 & 8 & 27 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 12x_1 + 53x_2 + 4x_3 + 9x_4 \\ 7x_1 + 40x_2 + 12x_3 + 5x_4 \\ 6x_1 + 10x_2 + 8x_3 + 27x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}$$

beschrieben werden.

Beispiel 35.12. Zu jedem Geburtstag von Mustafa Müller backt seine Oma eine gewisse Anzahl (abhängig von den Wünschen der Gäste) an Himbeerkuchen, Käsekuchen und Apfelkuchen. Ein Himbeerkuchen benötigt 500 Gramm Mehl, 200 Gramm Zucker, 100 Gramm Butter, 250 Gramm Milch und 300 Gramm Himbeeren. Ein Käsekuchen benötigt 300 Gramm Mehl, 230 Gramm Zucker, 100 Gramm Butter, 100 Gramm Milch und 450 Gramm Quark. Ein Apfelkuchen benötigt 400 Gramm Mehl, 250 Gramm Zucker, 150 Gramm Butter, 200 Gramm Milch, 500 Gramm Äpfel und 100 Gramm Haselnüsse. Die Oma möchte aus der Anzahl der zu backenden Kuchen, repräsentiert durch ein Dreiertupel (x, y, z), die insgesamt benötigten Zutaten schematisch berechnen. Für das benötigte Mehl (in Kilogramm) gilt beispielsweise die Formel

$$0{,}5x + 0{,}3y + 0{,}4z\,.$$

Insgesamt wird der benötigte Einkauf durch die folgende lineare Abbildung (bzw. die Matrix) beschrieben (wobei die Angaben in Kilogramm und die Zutatenreihenfolge Mehl, Zucker, Butter, Milch, Himbeeren, Quark, Äpfel und Haselnüsse sind).

$$\mathbb{Q}^3 \longrightarrow \mathbb{Q}^8,\ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \longmapsto \begin{pmatrix} 0{,}5 & 0{,}3 & 0{,}4 \\ 0{,}2 & 0{,}23 & 0{,}25 \\ 0{,}1 & 0{,}1 & 0{,}15 \\ 0{,}25 & 0{,}1 & 0{,}2 \\ 0{,}3 & 0 & 0 \\ 0 & 0{,}45 & 0 \\ 0 & 0 & 0{,}5 \\ 0 & 0 & 0{,}1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}.$$

Definition 35.13. Es sei K ein Körper und seien $m, n \in \mathbb{N}$. Zu einer linearen Abbildung

$$\varphi \colon K^n \longrightarrow K^m$$

heißt die $m \times n$-Matrix

$$M = (a_{ij})_{ij},$$

wobei a_{ij} die i-te Koordinate von $\varphi(e_j)$ bezüglich der Standardbasis e_i des K^m ist, die *beschreibende Matrix zu* φ (bezüglich der Standardbasen).

Zu einer Matrix $M = (a_{ij})_{ij} \in \operatorname{Mat}_{m \times n}(K)$ heißt die durch

$$e_j \longmapsto \sum_{i=1}^{m} a_{ij} e_i$$

gemäß Satz 35.10 definierte lineare Abbildung die *durch M festgelegte lineare Abbildung*.

Die zu einer $m \times n$-Matrix M gehörende lineare Abbildung ist unmittelbar durch das Matrizenprodukt der Matrix mit den n-Spaltentupeln gegeben, also gleich

$$K^n \longrightarrow K^m, \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \longmapsto M \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}.$$

Die i-te Komponente des Ergebnisses ist ja einfach gleich $\sum_{j=1}^n a_{ij}x_j$.

Satz 35.14. *Es sei K ein Körper und seien $m, n \in \mathbb{N}$. Dann sind die in Definition 35.13 festgelegten Abbildungen zwischen linearen Abbildungen und Matrizen invers zueinander.*

Beweis. Dieser Beweis wurde in der Vorlesung nicht vorgeführt. □

Die folgende Aussage erklärt, warum das Matrizenprodukt so wichtig ist.

Satz 35.15. *Es sei B eine $n \times p$-Matrix und A eine $m \times n$-Matrix und es seien*

$$K^p \xrightarrow{B} K^n \xrightarrow{A} K^m$$

die zugehörigen linearen Abbildungen. Dann beschreibt das Matrixprodukt $A \circ B$ die Hintereinanderschaltung der beiden linearen Abbildungen.

Beweis. Die Gleichheit von linearen Abbildungen kann man auf der Standardbasis $e_1, \ldots, e_p$ des K^p nachweisen. Es ist

$$\begin{aligned} (A \circ B)(e_k) &= A(B(e_k)) \\ &= A\left(\sum_{j=1}^n b_{jk} e_j\right) \\ &= \sum_{j=1}^n b_{jk}\left(\sum_{i=1}^m a_{ij} e_i\right) \\ &= \sum_{i=1}^m \left(\sum_{j=1}^n a_{ij} b_{jk}\right) e_i \\ &= \sum_{i=1}^m c_{ik} e_i. \end{aligned}$$

Dabei sind die Koeffizienten

$$c_{ik} = \sum_{j=1}^n a_{ij} b_{jk}$$

gerade die Einträge in der Produktmatrix $A \circ B$. □

Für die Beziehung zwischen linearen Abbildungen, Matrizen und linearen Gleichungssystemen siehe Aufgabe 35.16 und Aufgabe 35.17.

Abbildungsverzeichnis