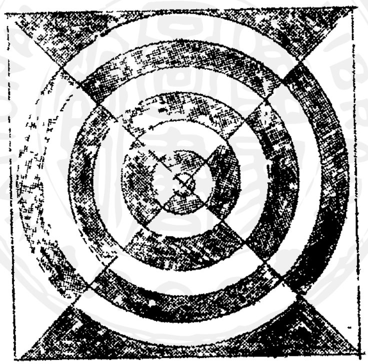
高等

平面三角法指導



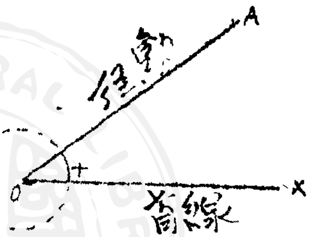
光明新数學普及會發行

目次

第一章 三角函数

§1. 角ノ測定

角XOA ハ其頂点Oヲ一端トシタ半直線ガ其角ノ平面上ヲOXノ位置カラOAノ位置マデ廻転シテ生ジタモノト考ヘルトキ, OXヲ此角ノ第一辺又ハ首線, OAヲ第二辺又ハ動径ト称ヘル。サウスレバ動径ノ廻転ノ方向ハ二様アルコトニナルカラ次ノ規約ヲ設ケル、



(I) 動径ガ時計ノ針ノ廻転ト反対ノ方向ニ廻転シテ生ジタ角ヲ正ノ角トシ,

(II) 動径ガ時計ノ針ノ廻転ト同方向ニ廻転シテ生ジタ角ヲ負ノ角トスル、

而シテ動径ガ其ノ頂点ノ周囲ヲ廻転スル廻転数ニハ別ニ制限ガナイ, 故ニ動径ノ或

位置ニヨツテ表ハサレル角ノ大サハ無限ニ多クアルコトニナル。今角XOAノ表ハス無数ノ角ノ中，絶対値ノ最小ナモノヲトツテソノ大サヲαトスルト（コレヲ**主値**トイヒ其値ハ二直角ヨリハ小ナル正又ハ負ノ角デアル），一般ニ角XOAハ

$$4\text{直角}\times n+\alpha$$

デ表ハサレコレヲ**一般角**ト称ヘル　但nハ零又ハ正，負ノ任意ノ整数ヲ表ハス

§2. 角ノ単位.

角ノ単位ニハ**六十分法**ト**弧度法**トノ二種類ガアル

六十分法. コレハ実用上ニ用ヒラレル角デ，ソノ単位ハ1直角ノ$\frac{1}{90}$ヲ$1°$（度），$1°$ノ$\frac{1}{60}$ヲ$1'$（分），$1'$ノ$\frac{1}{60}$ヲ$1''$（秒）トスル

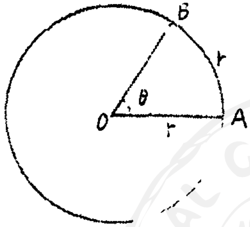
弧度法　中心O，半径トナル円ニ於テ，半径トニ等長ナ弧ABノ上ニ立ツ中心角ヲθトスレバ，幾何学ノ定理ニヨリ

$$\theta : 360^\circ = (\text{弧}AB) : (\text{全円周})$$

$$= r : 2\pi r \quad (\text{但シ}\pi\text{ハ円周率})$$

$$\therefore \quad \theta = 360^\circ \times \frac{r}{2\pi r} = \frac{180^\circ}{\pi}$$

故＝ $\theta = 57^\circ.2957795l\cdots = 57^\circ 17' 44''.806\cdots$



トナッテコノ θ ノ大サハ半径ノ如何ニ関セナイ一定不易ノ値ヲ有スル、コノ角ヲ(Radian)ト名ヅケテ理論ヲ主トスル場合ノ角ノ単位ニ用ヒル。而シテ(Radian)デアルコトヲ通例単ニ角 α 又ハ角ノ弧度ハ α デアルト云ッテ単位ノ名称(Radian)ヲ略スルコトガアル

サテコノ定義ニヨリ $1\,(\text{Radian}) = \dfrac{180^\circ}{\pi}$ デアルカラ

$$180^\circ = \pi\,(\text{Radian})$$

従ッテ $90^\circ = \dfrac{\pi}{2}$, $60^\circ = \dfrac{\pi}{3}$, $45^\circ = \dfrac{\pi}{4}$, $30^\circ = \dfrac{\pi}{6}$ 等デアル

今或角ヲ六十分法デ計レバ x°, 弧度法デ計レバ θ デアッタトスレバ次ノ関係式ガ

成立スル

$$180^\circ : x^\circ = \pi : \theta$$

故ニ　$x = \dfrac{180\theta}{\pi}$ (1)　又ハ　$\theta = \dfrac{x\pi}{180}$ (2)

コレ一ツノ角ノ六十分法ト弧度法トノ關係式デ (1) ニヨツテ弧度法ノ角ヲ六十分法ノ角ニ又 (2) ニヨツテ六十分法ノ角ヲ弧度法ニ直スコトガ出来ル

(例題) $22^\circ 30'$ ヲ弧度法デ又弧度 0.47 ヲ六十分法デ表ハセ.

(解) (i) 求ムル弧度ヲ θ トスル:

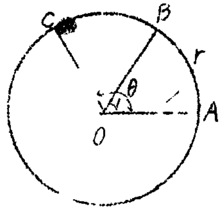
$$\theta = \frac{22.5\pi}{180} = \frac{\pi}{8} \left(= 0.39270\ldots\ldots\right)$$

(ii) 求メル角ヲ x° トスルト

$$x^\circ = \frac{180^\circ \times 0.47}{3.1416} = 26^\circ 55' 40''.8 \ldots$$ 但シ $\pi = 3.1416$ トス

§3 円弧ノ長サ　扇形ノ面積.

中心 O, 半径 1 ナル円ニ於テ任意ノ中心角 AOC ノ弧度ヲ θ, $\widehat{AC}$ ヲ l トスル　今 $\widehat{AB}$



ヲトニ等シイトスレバ

∠AOB ハ 1 (Radian) デアル　故ニ

$$l : r = \theta : 1$$

$$\therefore\ l = r\theta \quad 又ハ \quad \theta = \frac{l}{r}$$

即チ円弧ノ長サハ半径トソノ弧ニ対スル中心角ノ弧度トノ積ニ等シイ。又角ノ弧度ハコノ角ニ対スル弧ノ長サト半径トノ比ニ等シイ

次ニ扇形 AOC ノ面積ヲ A トスルト

$$A : \pi r^2 = \theta : 2\pi$$

$$\therefore\ A = \frac{1}{2}\theta r^2$$

故ニ扇形ノ面積ハソノ中心角ノ弧度ト半径ノ平方トノ積ノ半ニ等シイ

練習問題 1

1. 次ノ諸角ノ中ヲ六十分法ノモノハコレヲ弧度法ニ、弧度法ノモノハコレヲ六十分法ノ角デ表ハセ。

1) 120°　2) 135°　3) 150°　4) 5°37′30″

5) 32′　6) $\frac{\pi}{12}$　7) $\frac{\pi}{15}$　8) 0.75

2. 三角形ノ三ツノ角ガ等差級数ヲナストキ最小角ヲ六十分法デ表ハシタ数値ト、最大角ヲ弧度法デ表ハシタ数値トノ比ガ60:π デアルト云フ　三ツノ角ヲ求ム

3. 正n辺形ノ内角ノ大キサヲ弧度法デ表ハセ

4. 半径ガ6370kmデアル円ニ於テ中心角ガ1°ニ対スル弧ノ長サヲ小数第四位マデ求メヨ

5. 直径ガ18cmデアル円ニ於テ長サガ10cmナル円弧ニ対スル中心角ガ143°14′22″デアルトイフ　πノ値ヲ小数第四位マデ求メヨ

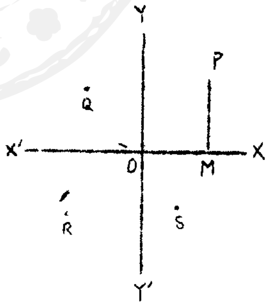
6. 地球自転ノ速度ハ赤道上デハ毎分約幾哩デアルカ　但シ地球ノ半径ヲ3960哩トスル

7. 月ノ直径ガ地球ニ於テ張ル角ハ31′デ

ナル地球ト月トノ距離ヲ240000哩トシテ月ノ直径ヲ算出セヨ.

§4 直角座標.

一ツノ平面上デ互ニ直交セル二定直線 XX', YY' ヲ引キ、ソノ交点ヲ O トスル。ソノ平面上ノ任意ノ一点 P カラ XX' ニ垂線ヲ立テ、其足ヲ M トスル。コノ場合ニ二ツノ線分 OM, PM ノ長サガワカルト点 P ノ位置ハ定マル。今 $OM=a$, $PM=b$ トスルト (a, b) ヲ点 P ノ直角座標又ハ単ニ座標ト云ヒ、二定直線 XX', YY' ヲ座標軸、ソノ交点 O ヲ原点ト云フ。而シテ XX' ヲ x 軸又ハ横軸ト云ヒ、YY' ヲ y 軸又ハ縦軸ト云フ。尚点 P ノ座標ノ中 a ヲ x 座標又ハ横座標ト云ヒ、b ヲ y 座標又ハ縦



座標ト云フ.

次ニ点ノ位置ニヨリx座標ハOノ左又ハ右ニ,y座標ハXX'ヨリ上又ハ下ニアルコトガアル　ソレデ点ノ位置ニヨツテ座標ニ正,負ノ符号ヲツケル．ソノ規約ハ次ノ通リデアル．

(I)　x座標ハ点ガy軸ノ右方ニアルトキハ正数デ,左方ニアルトキハ負数デ表ハス．

(II)　y座標ハ点ガx軸ノ上方ニアルトキハ正数デ,下方ニアルトキハ負数デ表ハス．

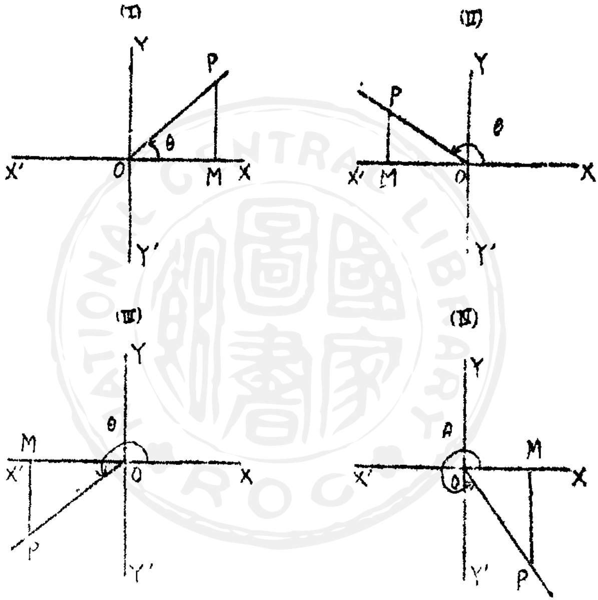
サウスレバ点ガ與ヘラレレバ一組ノ座標ガ定マリ,逆ニ座標ガ與ヘラレレバ唯一ツノ点ガ常ニ定マル

尚座標軸ニヨツテ分レタ四ツノ平面ノ部分即チXOY, YOX', X'OY', Y'OX ノ内部ヲ順次ニ第一,第二,第三,第四象限ト呼ブ．

コノ象限内ニ角ヲ畫クトキニハ通常角ノ頂点ハ原点ニ,首線ハOXニ一致スルヤウニ書クモノトスル

§5 三角函数

角θノ頂点ヲ原点Oニ、ソノ始線ヲOX上ニ一致セシメタトキノ動径ノ位置ヲOPト



スル（OPノ位置ニヨリ図ノヤウニ四通リノ場合ヲ生ズル）。今動径上ニ一点Pヲトリ、ソノ座標ヲ(a, b)、OPノ長サヲrトスルコノa bハOPノ位置即チθノ大サニヨッテ正又ハ負ノ線分ヲ表ハスモノデアルガ、

OP ハ常ニコレヲ正ナル線分ト規約スル

コノトキ、

$\frac{b}{r}$ ヲ角 θ ノ**正弦**トイヒ、コレヲ $\sin\theta$ デ表ハス

$\frac{a}{r}$ ヲ角 θ ノ**餘弦**トイヒ コレヲ $\cos\theta$ デ表ハス

$\frac{b}{a}$ ヲ角 θ ノ**正切**トイヒ、コレヲ $\tan\theta$ デ表ハス

$\frac{a}{b}$ ヲ角 θ ノ**餘切**トイヒ コレヲ $\cot\theta$ デ表ハス

$\frac{r}{a}$ ヲ角 θ ノ**正割**トイヒ コレヲ $\sec\theta$ デ表ハス

$\frac{r}{b}$ ヲ角 θ ノ**餘割**トイヒ コレヲ $\mathrm{cosec}\,\theta$ デ表ハス

而シテコノ六ツノ比ヲ總稱シテ角 θ ノ**三角函数**トイフ、此三角函数ノ値ハ角ノ大キサノミニ関シテ定マルモノデ OP ノ長サニハ関係シナイ。

角 θ ノ動径ガドノ象限内ニ存スルカニヨツテ a, b 及ビ三角函数ノ符号ハ定マル即チ次ノ通リデアル。

象限 / a, b, 函数	I	II	III	IV
a	+	−	−	+
b	+	+	−	−
正弦, 餘割	+	+	−	−
餘弦 正割	+	−	−	+
正切 餘切	+	−	+	−

§6 三角函数ノ基本公式

三角函数ノ定義カラ直チニ次ノ公式ガ得ラレル、

$$\sin\theta\,\mathrm{cosec} = 1,\quad \cos\theta\sec\theta = 1,\quad \tan\theta\cot = 1$$

及ビ $$\tan\theta = \frac{\sin\theta}{\cos\theta},\quad \cot\theta = \frac{\cos\theta}{\sin\theta}$$

次ニ前節ノ図ニ於テ、△OPMハ直角三角形ヲ形成スルガ故ニ a, b ノ正、負ニ関係ナク Pythagoras ノ定理カラ

$$r^2 = a^2 + b^2$$

故ニ $$\left(\frac{b}{r}\right)^2 + \left(\frac{a}{r}\right)^2 = 1 \quad 1 + \left(\frac{b}{a}\right)^2 = \left(\frac{r}{a}\right)^2,$$

$$\left(\frac{a}{b}\right)^2 + 1 = \left(\frac{r}{b}\right)^2$$

$$\therefore \sin^2\theta + \cos^2\theta = 1,\quad 1 + \tan^2\theta = \sec^2\theta,$$

$$1 + \cot^2\theta = \mathrm{cosec}^2\theta$$

注意 $(\sin\theta)^n$ ヲ通例 $\sin^n\theta$ ト記ス 他モ同様 但 $n=-1$ ノトキヲ除ク。

或角ノ三角函数ノ中ノ一ツノ値ヲ知ルト

キハ上記ノ公式又ハ直角三角形ノ性質ニヨッテ他ノ五ツノ函数ノ値ヲ求ムルコトガ出来ル、

例題 1. $\cos\theta = \frac{\sqrt{5}+1}{4}$ デアルトキ、他ノ三角函数ノ値ヲ求メヨ

(解) $\frac{\sqrt{5}+1}{4} > 0$ デアルカラ θ ハ第一又ハ第四象限内ノ角デアル、

$$\therefore \sin\theta = \pm\sqrt{1-\cos^2\theta} = \pm\frac{1}{4}\sqrt{10-2\sqrt{5}}$$

$$\tan\theta = \pm\frac{\sin\theta}{\cos\theta} = \pm\frac{\sqrt{1-\cos^2\theta}}{\cos\theta} = \pm\sqrt{5-2\sqrt{5}}$$

$$\cot\theta = \frac{1}{\tan\theta} = \pm\frac{1}{\sqrt{5-2\sqrt{5}}} = \pm\sqrt{1+\frac{2}{5}\sqrt{5}}$$

$$\sec\theta = \frac{1}{\cos\theta} = \frac{4}{\sqrt{5}+1} = \sqrt{5}-1$$

$$\operatorname{cosec}\theta = \frac{1}{\sin\theta} = \pm\frac{4}{\sqrt{10-2\sqrt{5}}} = \pm\sqrt{2+\frac{2}{5}\sqrt{5}}$$

但 θ ガ第一象限内ノ角デアルトキハ複符号中正ノ符号ヲトリ、θ ガ第四象限内ノ角デアルトキハ負ノ符号ヲトル、

練 習 問 題 2

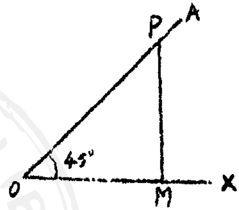
1. $\tan\theta = \sqrt{1-\frac{2}{5}\sqrt{5}}$ デアルトキ、他ノ三角函数ノ値ヲ求ム、

2. $\sin\theta = \frac{m^2-n^2}{m^2+n^2}$ ヲ與ヘテ他ノ三角函数ノ値ヲ求ム,

但 $m > n > 0$ トスル

§7. 45°, 30°, 60° ノ三角函数

(I) 45° ノ三角函数ノ値



$\angle XOA = 45°$ トシ, OA 上ノ任意ノ一点 P カラ OX ニ垂線 PM ヲ下ストキハ,

$\triangle POM$ ハ直角二等辺三角形トナル. 今 $OM = PM = a$ トスレバ $OP = \sqrt{2}a$ デアル.

仍テ $\sin 45° = \frac{PM}{OP} = \frac{1}{\sqrt{2}}$, $\cos 45° = \frac{OM}{OP} = \frac{1}{\sqrt{2}}$

$$\therefore \quad \sin 45° = \frac{1}{\sqrt{2}} = \cos 45°$$

従ッテ $\tan 45° = 1 = \cot 45°$

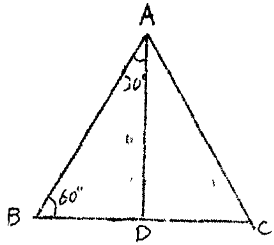
$$\sec 45° = \sqrt{2} = \operatorname{cosec} 45°$$

(II) 30°, 60° ノ三角函数ノ値

$\triangle ABC$ ヲ一辺ガ a ナル正三角形トシ, AD ヲ BC ヘノ垂線トスル. サウスルト,

$BD = \frac{a}{2}$, $AD = \frac{\sqrt{3}}{2}a$

トナル



$$\cos 60° = \frac{BD}{AB} = \frac{1}{2} = \sin 30°$$

$$\therefore \quad \cos 60° = \frac{1}{2} = \sin 30°$$

從ッテ

$$\sin 60° = \frac{\sqrt{3}}{2} = \cos 30°$$

$$\tan 60° = \sqrt{3} = \cot 30°$$

$$\tan 30° = \frac{1}{\sqrt{3}} = \cot 60°$$

$$\sec 60° = 2 = \operatorname{cosec} 30°$$

$$\sec 30° = \frac{2}{\sqrt{3}} = \operatorname{cosec} 60°$$

(例題) $\frac{\sin A}{\sin B} = \sqrt{2}$ (1), $\frac{\tan A}{\tan B} = \sqrt{3}$ (2)

デアルトキ、A及ビBノ最小正角ヲ求ム

(解) (1)カラ $\sin A = \sqrt{2}\sin B$ (3), (2)カラ,

$\tan A = \sqrt{3}\tan B$ (4), (3)ヲ(4)デ除シ

$$\cos A = \sqrt{\frac{2}{3}}\cos B \qquad (5)$$

(3)ト(5)トヲ平方シテ加ヘルト

$$1 = 2\sin^2 B + \frac{2}{3}\cos^2 B = 2\sin^2 B + \frac{2}{3}(1 - \sin^2 B)$$

$$\therefore \sin^2 B = \frac{1}{4} \qquad \therefore \sin B = \pm\frac{1}{2}$$

故ニBノ最小正角ハ$30°$デ従ッテ(3)カラAノ最小正角ハ$45°$トナル　而シテコレ等ハ何レモ(1)及ビ(2)ヲ満足スル

練　習　問　題　3

1. $\triangle ABC$ニ於テ$C=90°$トスルト

$a=c\sin A=c\cos B,\ b=c\cos A=c\sin B$

及ビ　$a=b\tan A=b\cot B$

ナルコトヲ證明セヨ，但$a=BC,\ b=CA,\ c=AB$トスル.

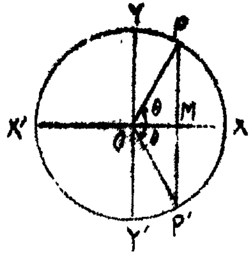
2. $\dfrac{\sin A}{\sin B}=\sqrt{3},\ \dfrac{\tan A}{\tan B}=3$デアルトキ$A,B$ノ最小正角ヲ求ム

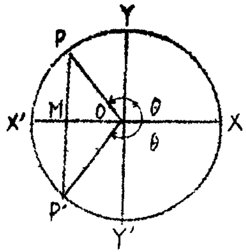
3 $\dfrac{\sin A}{\sin B}=\sqrt{\dfrac{3}{2}},\ \dfrac{\cos A}{\sin B}=\dfrac{1}{\sqrt{2}}$ヨリ$A,B$ノ最小正角ヲ求ム.

§8　負角，一般角，補角，餘角ノ三角函数

(1) 負角ノ三角函数

次圖ニ於テ$\angle XOP=\theta,\ \angle XOP'=-\theta$トス





解; Oヲ中心トシ任意ノ半径ノ円ヲ畫キ、θノ動径ト交点ヲ夫々P, P'トスル サウスルトPノ座標ヲ(a, b)トスレバP'ノ座標ハ(a, −b)トナル。

故ニ $OP=r$ トスレバ

$$\sin(-\theta)=\frac{-b}{r}=-\frac{b}{r}=-\sin\theta$$

$$\cos(-\theta)=\frac{a}{r}=\cos\theta$$

仍テ $\sin(-\theta)=-\sin\theta,\quad \cos(-\theta)=\cos\theta$

從テ $\tan(-\theta)=-\tan\theta,\quad \cot(-\theta)=-\cot\theta$

$\sec(-\theta)=\sec\theta,\quad \mathrm{cosec}(-\theta)=-\mathrm{cosec}\,\theta$

注意 xノ函数 $f(x)$ デ $f(-x)=f(x)$ ガ成立スルトキハ $f(x)$ ヲ偶函数トイヒ、$f(-x)=-f(x)$ ガ成立スルトキハ $f(x)$ ヲ

奇函数ト云フ.

故ニ余弦,正割ハ偶函数デ,正弦,正切,余切,余割ハ奇函数デアル

(II) 一般角ノ三角函数

先ヅ述ベタヤウナ角θト角$2n\pi+\theta$(nハ零又ハ任意ノ整数)トガ頂点及ビ首線ヲ共有スル角デアレバ,ソノ動径ハ一致スル.

故ニ $\sin(2n\pi+\theta)=\sin\theta$, $\cos(2n\pi+\theta)=\cos\theta$

$\tan(2n\pi+\theta)=\tan\theta$, $\cot(2n\pi+\theta)=\cot\theta$

$\sec(2n\pi+\theta)=\sec\theta$, $\operatorname{cosec}(2n\pi+\theta)=\operatorname{cosec}\theta$

系 $\sin(2n\pi-\theta)=\sin\{2n\pi+(-\theta)\}=\sin(-\theta)=-\sin\theta$

$\cos(2n\pi-\theta)=\cos\{2n\pi+(-\theta)\}=\cos(-\theta)=\cos\theta$

故ニ $\sin(2n\pi-\theta)=-\sin\theta$, $\cos(2n\pi-\theta)=\cos\theta$

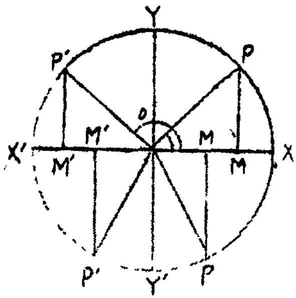
従テ $\tan(2n\pi-\theta)=-\tan\theta$, $\cot(2n\pi-\theta)=-\cot\theta$

$\sec(2n\pi-\theta)=\sec\theta$, $\operatorname{cosec}(2n\pi-\theta)=-\operatorname{cosec}\theta$

(III) 補角ノ三角函数

一般ニ角θノ正負ニ関セズ$\pi-\theta$ヲθノ補角ト云フ.

次図ニ於テ $\angle XOP=\theta$, $\angle XOP'=\pi-\theta$



トスレバ $\angle MOP = \angle M'OP'$ デアル

故ニPノ座標ヲ(a, b)トスレバP'ノ座標ハ$(-a, b)$デアル。今$OP = r$トスレバ

$$\sin(\pi-\theta) = \frac{b}{r} = \sin\theta$$
$$\cos(\pi-\theta) = \frac{-a}{r} = -\frac{a}{r} = -\cos\theta$$

又 $\sin(\pi+\theta) = \sin\{\pi-(-\theta)\} = \sin(-\theta) = -\sin\theta$

$\cos(\pi+\theta) = \cos\{\pi-(-\theta)\} = -\cos(-\theta) = -\cos\theta$

$\therefore$ $\sin(\pi\pm\theta) = \mp\sin\theta$, $\cos(\pi+\theta) = -\cos\theta$

從テ $\tan(\pi\pm\theta) = \pm\tan\theta$, $\cot(\pi\pm\theta) = \pm\cot\theta$

$\sec(\pi\pm\theta) = -\sec\theta$, $\operatorname{cosec}(\pi\pm\theta) = \mp\operatorname{cosec}\theta$

但複符号ハ同順ニトルモノトスル

系 nヲ任意ノ整数トスレバ

$$\sin\{(2n+1)\pi\pm\theta\} = \sin\{2n\pi+(\pi\pm\theta)\}$$
$$= \sin(\pi\pm\theta) = \mp\sin\theta$$

同様ニ $\cos\{(2n+1)\pi\pm\theta\} = \cos(\pi\pm\theta) = -\cos\theta$

$\therefore$ $\sin\{(2n+1)\pi\pm\theta\} = \mp\sin\theta$,

$$\cos\{(2n+1)\pi \pm \theta\} = -\cos\theta$$

従ッテ　$\tan\{(2n+1)\pi \pm \theta\} = \pm \tan\theta,$

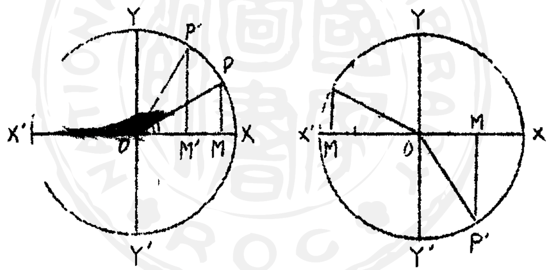
$$\cot\{(2n+1)\pi \pm \theta\} = \pm \cot\theta,$$

$$\sec\{(2n+1)\pi \pm \theta\} = -\sec\theta,$$

$$\mathrm{cosec}\{(2n+1)\pi \pm \theta\} = \mp \mathrm{cosec}\,\theta$$

但複符号ハ同順トス、

四　餘角ノ三角函数



一般ニ角 θ ノ正負ニ関セズ $\frac{\pi}{2}-\theta$ ヲ θ 餘角ト云フ、

図ニ於テ $\angle XOP = \theta$, $\angle XOP' = \frac{\pi}{2}-\theta$ トスルト

$$\angle MOP = \angle P'OY$$

而シテ $\triangle POM \equiv \triangle P'OM'$ デアル　故ニ P ノ座標ヲ (a, b) トスレバ P' ノ座標ハ (b, a)

トナル. 今 $OP=r$ トスレバ

$$\sin\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)=\frac{a}{r}=\cos\theta$$

$$\cos\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)=\frac{b}{r}=\sin\theta$$

又 $\sin\left(\frac{\pi}{2}+\theta\right)=\sin\left\{\frac{\pi}{2}-(-\theta)\right\}=\cos(-\theta)=\cos\theta$

$\cos\left(\frac{\pi}{2}+\theta\right)=\cos\left\{\frac{\pi}{2}-(-\theta)\right\}=\sin(-\theta)=-\sin\theta$

$\therefore$ $\sin\left(\frac{\pi}{2}\pm\theta\right)=\cos\theta,\quad \cos\left(\frac{\pi}{2}\pm\theta\right)=\mp\sin\theta$

従テ $\tan\left(\frac{\pi}{2}\pm\theta\right)=\mp\cot\theta,\quad \cot\left(\frac{\pi}{2}\pm\theta\right)=\mp\tan\theta$

$\sec\left(\frac{\pi}{2}\pm\theta\right)=\mp\operatorname{cosec}\theta,\quad \operatorname{cosec}\left(\frac{\pi}{2}\pm\theta\right)=\sec\theta$

但複符号同順トス

素 nヲ偶数トスレバ

$\sin\left\{n\pi+\left(\frac{\pi}{2}\pm\theta\right)\right\}=\sin\left(\frac{\pi}{2}\pm\theta\right)=\cos\theta$

又 nヲ奇数トスレバ

$\sin\left\{n\pi+\left(\frac{\pi}{2}\pm\theta\right)\right\}=-\sin\left(\frac{\pi}{2}\pm\theta\right)=-\cos\theta$

仍テ $\sin\left\{\left(n+\frac{1}{2}\right)\pi\pm\theta\right\}=(-1)^n\cos\theta$

同様ニ $\cos\left\{\left(n+\frac{1}{2}\right)\pi\pm\theta\right\}=\mp(-1)^n\sin\theta$

従テ $\tan\left\{\left(n+\frac{1}{2}\right)\pi\pm\theta\right\}=\mp\cot\theta$

$\cot\left\{\left(n+\frac{1}{2}\right)\pi\pm\theta\right\}=\mp\tan\theta$

$\sec\left\{\left(n+\frac{1}{2}\right)\pi\pm\theta\right\}=\mp(-1)^n\operatorname{cosec}\theta$

$$\operatorname{cosec}\left\{\left(n+\frac{1}{2}\right)\pi\pm\theta\right\}=(-1)^n\sec\theta$$

但 n ハ任意ノ整数ヲ表ハシ、複符号ハ同順ニトルモノトスル

(例題) 1.

$$\frac{\sin(-\theta)}{\sin(\pi+\theta)}+\frac{\tan\left(\frac{\pi}{2}+\theta\right)}{\cot\theta}+\frac{\cos\theta}{\sin\left(\frac{\pi}{2}+\theta\right)}$$ ヲ

簡単ニセヨ

(解) $$\text{與式}=\frac{-\sin\theta}{-\sin\theta}+\frac{-\cot\theta}{\cot\theta}+\frac{\cos\theta}{\cos\theta}=1$$

次ニ與ヘラレタ角ノ三角函数ノ値ヲ求ムルニ当リ、角ガ負デアルトキ又ハ大キナ角デアルトキハ、上記ノ公式ヲ用ヒテ正ノ 90° ヨリ小ナル角ノ同一函数ニ直スコトガ出来ル 尚函数ノ種類ヲ変ズルコトヲ許セバ、正ノ 45° ヨリ小ナル角ノ他ノ函数ニ直シ得ルコトガアル

(例題) 2. $\sin(-9846°)$ ヲ 90° ヨリ小ナル正角ノ正弦ニ直セ、又 45° ヨリ小サナ正角ノ餘弦ニ改メヨ。

(解) $\sin(-9846^\circ) = \sin(180^\circ \times 55 - 54^\circ)$

$= -\sin 54^\circ$

$= -\sin(90^\circ - 36^\circ) = -\cos 36^\circ$

(例題) 3. $\cos(-2640^\circ)$ ノ値ヲ求ム.

(解) $\cos(-2640^\circ) = \cos(360^\circ \times 7 + 120^\circ) =$

$= \cos(180^\circ - 60^\circ)$

$= -\cos 60^\circ = -\frac{1}{2}$

(例題) 4. n ガ任意ノ整数デアルトキ.

$\sin\left\{\frac{n\pi}{2} + (-1)^n \frac{\pi}{5}\right\}$

ヲ最小正角ノ正弦ニ改メヨ

(解) $n = 4m$ ノトキ

$\sin\left\{\frac{n\pi}{2} + (-1)^n \frac{\pi}{5}\right\} = \sin\left(2m\pi + \frac{\pi}{5}\right) = \sin\frac{\pi}{5}$

$n = 4m + 1$ ノトキ

$\sin\left\{\frac{n\pi}{2} + (-1)^n \frac{\pi}{5}\right\} = \sin\left\{\left(2m + \frac{1}{2}\right)\pi - \frac{\pi}{5}\right\}$

$= \sin\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{5}\right) = \sin\frac{3\pi}{10}$

$n = 4m + 2$ ノトキ

$\sin\left\{\frac{n\pi}{2} + (-1)^n \frac{\pi}{5}\right\} = \sin\left\{(2m+1)\pi + \frac{\pi}{5}\right\}$

$= \quad\quad (\pi \quad + \frac{\pi}{5}) = -\sin\frac{\pi}{5}$

$n=4m+3$ ノトキ

$$\sin\left\{\frac{n\pi}{2}+(-1)^n\frac{\pi}{5}\right\}=\sin\left\{\overline{2(m+1)-\frac{1}{2}}\pi-\frac{\pi}{5}\right\}$$
$$=-\sin\left(\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{5}\right)$$
$$=-\sin\left\{\pi-\left(\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{5}\right)\right\}=-\sin\frac{3\pi}{10}$$

注意　x ノ函数 $f(x)$ デ x ノ總テノ値ニ対シテ常ニ

$$f(x+\omega)=f(x) \quad 但\ \omega\ ハ常数$$

ナル関係ガ成立スルトキ, $f(x)$ ヲ週期函数トイヒ, ω ヲソノ週期トイフ.

$$\therefore \quad f(x+2\omega)=f(\overline{x+\omega}+\omega)=f(x+\omega)=f(x)$$
$$f(x-\omega)=f(\overline{x-\omega}+\omega)=f(x)$$

一般ニ　$f(x+n\omega)=f(x)$　但 n ハ任意ノ整数

コレヨリ見テ, 一般角ノ公式ニヨリ, 正弦, 餘弦, 正割, 餘割ハ 2π ヲ週期トスル週期函数デ又補角ノ公式ニヨリ正切, 餘切ハ π ヲ週期トスル週期函数デアル

練習問題

1.　次ノ式ヲ簡單ニセヨ.

(ハ) $\sec\left(\frac{3\pi}{2}-\theta\right)\sec\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)-\dfrac{\tan\left(\frac{3\pi}{2}-\theta\right)}{\cos\left(\frac{\pi}{2}+\theta\right)}$

(ニ) $\dfrac{1}{\sec\theta}+\dfrac{1}{\operatorname{cosec}\left(\frac{3\pi}{2}+\theta\right)}-\dfrac{1}{\operatorname{cosec}\left(\frac{3\pi}{2}-\theta\right)}+\dfrac{1}{\sec(\pi+\theta)}$

2. $\sin 2370°$, $\tan(-5430°)$, $\sec(-1035°)$, ……ノ値ヲ求ム.

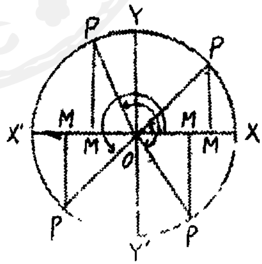
3. nガ任意ノ整数デアルトキ

$\sin\left\{\frac{n\pi}{2}+(-1)^n\frac{\pi}{6}\right\}$ ノ値ヲ求ム.

§9 三角函数ノ値ノ変化

角Aガ0ヨリ2πマデ変化スルトキ、ソレニ対応シテ三角函数ノ値ガ如何ニ変化スルカヲ研究セン

$\angle XOP = A$トシ、Oヲ中心トシ半径ガ長サノ単位ニ等シイ円（コレヲ単位円ト呼ブ）ヲ畫ク、而シテPノ座標ヲ(a, b)トスル サウスレバ



$$\sin A=\frac{b}{1}=b,\quad \cos A=\frac{a}{1}=a$$

ナリ，$\sin A$，$\cos A$ノ値ノ変化ハb，aノ値ノ変化ニ同一トナル

(I) $\sin A$ ノ変化．

角Aガ限リナク小デアルトキハbモ亦限リナク小デアル 即チAガ0デアルトキbノ極限値ハ0デアル 而シテAガ0カラ$\frac{\pi}{2}$マデ変化スルトキbハ正デ，ソノ値ハ漸次増大シテ，半径ノ長サニ近ヅキ，遂ニAガ$\frac{\pi}{2}$トナルトキ，bハOYニ一致スルガ，故ニソノ値ハ1トナル

即チAガ0カラ$\frac{\pi}{2}$マデ変化スルトキ，$\sin A$ハ正デソノ値ハ0カラ1マデ変化スル．

次ニAガ$\frac{\pi}{2}$カラπマデ変化スルトキ，bハ正デソノ値ハ漸次減少シ而シテAガπトナルトキbハ0トナル．故ニAガ$\frac{\pi}{2}$カラπマデ変化スルトキニハ，$\sin A$ハ正デソノ値ハ1カラ0マデ変化スル 尚Aガπカラ

$\frac{3\pi}{2}$ マデ変化スルトキ、bハ負デソノ絶対値ハ増大シ、Aガ $\frac{3\pi}{2}$ ノトキ bハ OY' ニ一致スルカラ -1 トナル、故ニコノトキ $\sin A$ ハ負デ 0 カラ -1 マデ変化スル　更ニAガ $\frac{3\pi}{2}$ カラ 2π マデ変化スルトキ bハ負デソノ絶対値ハ減少スル　而シテAガ 2π トナルトキ bハ0トナル　故ニコノトキ $\sin A$ ハ負デ -1 カラ 0 マデ変化スル

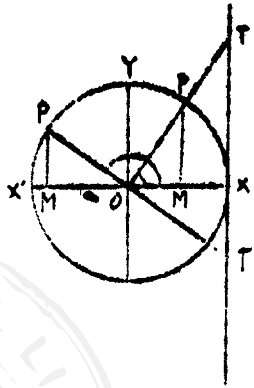
(II) $\cos A$ ノ変化

コノ場合ハ $a(OM)$ ノ変化ヲ研究スレバヨイ、故ニ正弦ノ場合ト同様ニシテ直チニ次ノ事実ヲ認メルコトガ出来ル

Aガ 0 ヨリ $\frac{\pi}{2}$ マデ変化スルトキ、a即チ $\cos A$ ハ正デ 1 カラ 0 マデ減少スル　次ニAガ $\frac{\pi}{2}$ カラ π マデ変化スルトキ $\cos A$ ハ負デ 0 カラ -1 マデ減少スル　更ニAガ π カラ $\frac{3\pi}{2}$ マデ変化スルトキ $\cos A$ ハ負デ -1 カラ 0 マデ増大シ、Aガ $\frac{3\pi}{2}$ カラ 2π マデ変化スルトキ $\cos A$ ハ正デ 0 ヨリ 1 マデ増大

スル

(四) $\tan A$ ノ変化



今 $\angle XOP = A$ トシ単位円ヲ書キ、Xニ於ケル切線ヲ引キ、OPノ延長トTニ交ハラシメル 而シテTノ座標ヲ$(1, c)$トオクトスレバ $\triangle OPM$ ト TX トハ相似形デアルガ故ニ、

$$\tan A = \frac{PM}{OM} = \frac{TX}{OX} = c$$

トナリ $\tan A$ ノ変化ハ c ノ変化ニ等シイ

サテAガ0カラ$\frac{\pi}{2}$マデ変化スルトキcハ正デ0ヨリ漸次増大シ、Aガ$\frac{\pi}{2}$ニ近迫スルトキcハ如何程デモ大トナツテ限リガナイ 即チAガ$\frac{\pi}{2}$ニナルトキニ即チ $\tan A$ ノ極限値ハ無限大（∞デ表ハス）ニナルトイヒ、コレヲ

$$\lim_{A \to \frac{\pi}{2} - 0} \tan A = \infty$$

ト記ス　故ニAガ0カラ$\frac{\pi}{2}$マデ変化スルトキ tan A ハ正デ0カラ∞マデ変化スル、換言スレバ0ヨリ出発シテ有限ナ総テノ値ヲトッテ遂ニ無限大マデ変化スル　次ニAガ第二象限内ノ角デ$\frac{\pi}{2}$ニ近迫マルトキ0即チ tan A ハ負デ、ソノ絶対値ハ如何程デモ大トナッテ限リガナイ、コレヲ

$$\lim_{A\to\frac{\pi}{2}+0} \tan A = -\infty$$

ト記ス、故ニAガ$\frac{\pi}{2}$カラπマデ変化スルトキハ、0即チ tan A ハ負デ－∞カラ0マデ変化スル、

而シテ tan A ハπヲ周期トスル周期函数デアルカラπカラ2πマデノ変化ハ0カラπマデノ変化ト同一デアル

(IV) ソノ他ノ函数ノ値ノ変化

cosec A, sec A, 及ビ cot A ハ夫々 sin A cos A 及ビ tan A ノ逆数デアルカラ其等値ノ変化ハ上述ノコトカラ導クコトガ出来

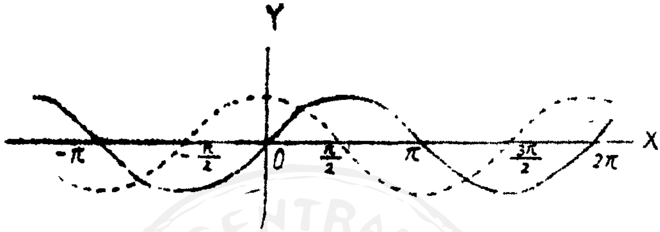
ル、但極限値ガ0ナルモノノ逆数ノ極限値ハ無限大デアル.

注意Ⅰ 三角函数ハ総テ週期函数デアルカラ0カラ 2π マデノ値ノ変化ヲ知レバ他ノ場合ノ変化ハ0カラ 2π マデノ変化ヲ繰返スニ過ギナイ.

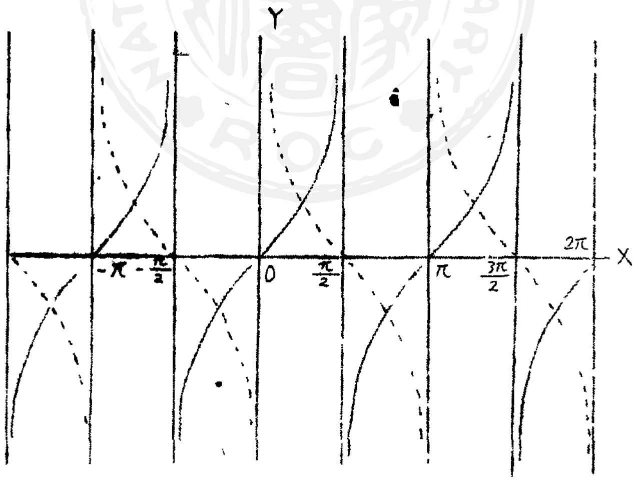
注意Ⅱ $\tan A$ ハ角Aノ増大ニツレテ,ソノ値ハ増大スルノミデアル,カカル函数ヲ逓昇函数トイフ、コレニ反シ $\cot A$ ハ角Aノ増大ニツレテ,ソノ値ハ減少スルノミデアル カカル函数ヲ逓降函数トイフ、 又 $\sin A$ ハAガ0カラ $\frac{\pi}{2}$ マデ変化スル間ハ逓昇函数デ $\frac{\pi}{2}$ カラ $\frac{3\pi}{2}$ マデ変化スル間ハ逓降函数デアル 余弦等ニツイテモ同様ニソノ逓昇又ハ逓降ノ状態ヲ知ルコトが出来ル、尚三角函数ノ値ノ変化ヲ一層明瞭ニ表ハスニハぐらふニヨルト便デアル

次ニ三角函数ノぐらふヲ掲ゲテオク、

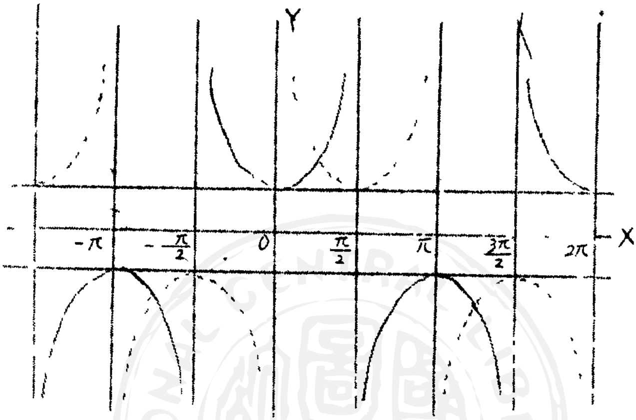
(I) 實線 $\sin\theta$ ノぐらふ 点線 $\cos\theta$ ノぐらふ



(II) 實線 $\tan\theta$ ノぐらふ, 点線 $\cot\theta$ ノぐらふ.



(Ⅲ) 実線 $\sec\theta$ ノぐらふ　点線 $\mathrm{cosec}\,\theta$ ノぐらふ



(例題) 1　$\dfrac{a\sin x+b}{a\sin x-b}$ (但シ $a>b>0$) ハ $\dfrac{a-b}{a+b}$ ト $\dfrac{a-b}{a+b}$

トノ間ノ値ヲトリ得ナイコトヲ証明セヨ

(解)　$a>b>0$ デアルカラ

$$\frac{a+b}{a-b} > \frac{a-b}{a+b} > 0$$

デアル　今 $\dfrac{a\sin x+b}{a\sin x-b}=y$ トオクハ ソノ[illegible]ト

$$\sin x = \frac{b(y+1)}{a(y-1)}$$

トナリ　且 $-1 \leqq \sin x \leqq 1$ デアルカラ

$$-1 \leqq \frac{b(y+1)}{a(y-1)} \leqq 1 \qquad (A)$$

デナケハナラヌ。

i $y>1$ デアルトキ

$-1 \leqq \frac{b(y+1)}{a(y-1)}$ ヨリ $-ay+a \leqq b(y+1)$ $\therefore \frac{a-b}{a+b} \leqq y$

又 $1 \geqq \frac{b(y+1)}{a(y-1)}$ ヨリ $a(y-1) \geqq b(y+1)$ $\therefore \frac{a+b}{a-b} \leqq y$

故ニ $y>1$ デアルトキ (A) ガ成立スルタメニハ $y \geqq \frac{a+b}{a-b}$ デアラネバナラヌ

ii $y<1$ デアルトキハ

$-1 \leqq \frac{b(y+1)}{a(y-1)}$ ヨリ $-a(y-1) \geqq b(y+1)$ $\therefore \frac{a-b}{a+b} \geqq y$

又 $1 \geqq \frac{b(y+1)}{a(y-1)}$ ヨリ $a(y-1) \leqq b(y+1)$ $\therefore \frac{a+b}{a-b} \geqq y$

故ニ $y<1$ デアルトキ (A) ガ成立スルタメニハ $y \leqq \frac{a-b}{a+b}$ デアラネバナラヌ。

而シテ $y=1$ ノトキハ $\sin x$ ノ値ハ不能デアル

故ニ y 即チ與式 $\frac{a-b}{a+b}$ ト $\frac{a+b}{a-b}$ トノ間ノ値ヲトルコトガ出来ナイ

練習問題

1 a 及ビ b ハ正デ相等シクナイトキ

$\sec^2\theta = \dfrac{4ab}{(a+b)^2}$ ニ適スルθハ存在シナイコトヲ証明セヨ。

2. 次ノ不等式ヲ解ケ。

$$2\cos x - 2\sin x + \sqrt{3} > \sqrt{3}\cot x$$

但シ $0° < x < 90°$ トス

3 2ト $\sin A + \cos A$ ト $\dfrac{2}{2-\sin A-\cos A}$ トノ大小関係ヲ調ベヨ。

§10. 三角恒等式

三角函数ヲ含ム等式デソノ式中ニ含ム角ノ如何ニ関セズ恒ニ成立スル等式ヲ三角恒等式ト云フ。

例ヘバ $\tan\theta\cot\theta = 1$ 或ハ $\sin^2\theta + \cos^2\theta = 1$ ノ如キハ何レモ三角恒等式デアル 三角恒等式ノ證明法ハ既知ノ公式ヲ利用シテ一辺ヨリ他辺ヲ誘導スルカ又ハ左右両辺ヲ変形シテ同一ノ式ニ誘導スレバヨイ。

(例題) 1. $\sin^2\theta\tan\theta+\cos^2\theta\cot\theta+2\sin\theta\cos\theta$

$$=\tan\theta+\cot\theta$$

ヲ証明セヨ

(解) 左辺$=\sin^2\theta\dfrac{\sin\theta}{\cos\theta}+\cos^2\theta\dfrac{\cos\theta}{\sin\theta}+2\sin\theta\cos\theta$

$$=\frac{1}{\sin\theta\cos\theta}(\sin^4\theta+2\sin^2\theta+\cos^4\theta)$$

$$=\frac{(\sin^2\theta+\cos^2\theta)^2}{\sin\theta\cos\theta}=\frac{1}{\sin\theta\cos\theta}$$

又 右辺$=\dfrac{\sin\theta}{\cos\theta}+\dfrac{\cos\theta}{\sin\theta}=\dfrac{\sin^2\theta+\cos^2\theta}{\sin\theta\cos\theta}$

$$=\frac{1}{\sin\theta\cos\theta}$$

∴ 左辺＝右辺

(例題) 2 $\dfrac{\tan A+\sec A-1}{\tan A-\sec A+1}=\dfrac{1+\sin A}{\cos A}$ ナルコト

ヲ証明セヨ。

(解)

左辺$=\dfrac{\dfrac{\sin A}{\cos A}+\dfrac{1}{\cos A}-1}{\dfrac{\sin A}{\cos A}-\dfrac{1}{\cos A}+1}=\dfrac{\sin A+1-\cos A}{\sin A-1+\cos A}$

故ニ $\dfrac{\sin A+1-\cos A}{\sin A-1+\cos A}=\dfrac{1+\sin A}{\cos A}$

ヲ証スレバヨイ，従デ分母ヲ払ツテ

$$\cos A(\sin A+1-\cos A)=(1+\sin A)(\sin A-1+\cos A)$$

ヲ証スレバヨイ. 然ルニコノ括弧ヲ外シテ簡単ニスルト,

$$\sin^2 A + \cos^2 A = 1$$

トナリ, コレハ成立スル 即チ與恒等式ハ成立スル

(例題) 3 $(\sin A + \sec A)^2 + (\cos A + \operatorname{cosec} A)^2$

$$= (1 + \sec A \operatorname{cosec} A)^2$$

ヲ証セヨ.

(解)

左辺 $= \sin^2 A + 2\sin A \sec A + \sec^2 A + \cos^2 A + 2\cos A \operatorname{cosec} A + \operatorname{cosec}^2 A$

而シテ $\sin A \sec A + \cos A \operatorname{cosec} A = \dfrac{\sin A}{\cos A} + \dfrac{\cos A}{\sin A}$

$$= \frac{1}{\sin A \cos A} = \sec A \operatorname{cosec} A$$

又 $\sec^2 A + \operatorname{cosec}^2 A = \dfrac{1}{\cos^2 A} + \dfrac{1}{\sin^2 A} = \dfrac{1}{\sin^2 A \cos^2 A}$

$$= \sec^2 A \operatorname{cosec}^2 A$$

∴ 左辺 $= 1 + 2\sec A \operatorname{cosec} A + \sec^2 A \operatorname{cosec}^2 A$

$= (1 + \sec A \operatorname{cosec} A)^2 =$ 右辺

練習問題

次ノ恒等式ヲ証明セヨ

1. $\sin\theta(1+\tan\theta)+\cos\theta(1+\cot\theta)=\sec\theta+\mathrm{cosec}\,\theta$

2. $2(\sin^6\theta+\cos^6\theta)-3(\sin^4\theta+\cos^4\theta)+1=0$

3. $\sec^2\theta+\mathrm{cosec}^2\theta=\tan^2\theta+\cot^2\theta+2$

4. $\dfrac{\tan A-\sin A}{\tan A+\sin A}=\dfrac{\tan A-\sin A}{\tan A\sin A}$

5. $\dfrac{1-\mathrm{cosec}\,\theta+\cot\theta}{1+\mathrm{cosec}\,\theta-\cot\theta}=\dfrac{\mathrm{cosec}\,\theta+\cot\theta-1}{\mathrm{cosec}\,\theta+\cot\theta+1}$

6. $\dfrac{1+\sin\theta-\cos\theta}{1+\sin\theta+\cos\theta}+\dfrac{1+\sin\theta+\cos\theta}{1+\sin\theta-\cos\theta}=2\,\mathrm{cosec}\,\theta$

7. $(\mathrm{cosec}\,\theta-\cot\theta)^2=\dfrac{1-\cos\theta}{1+\cos\theta}$

8. $\tan A(1-\cot^2A)+\cot A(1-\tan^2A)=0$

9. $2\sin\theta\cos\theta+\sin^3\theta\sec\theta+\cos^3\theta\,\mathrm{cosec}\,\theta=\tan\theta-\cot\theta$

10. $\dfrac{1-\sec\theta}{1+\sec\theta}-\dfrac{1+\sin\theta}{1-\sec\theta}=2\cos\theta(\cot\theta+\mathrm{cosec}^2\theta)$

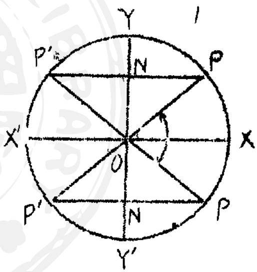
11. $2\sec^2A-\sec^4A-2\,\mathrm{cosec}^2A+\mathrm{cosec}^4A=\cot^4A-\tan^4A$

§11 三角方程式

三角函数ヲ含ム等式デ角ノ特別ナ値ニ対シノミ成立スル等式ヲ三角方程式トイヒ、其角

未知角トイフ. 而シテ未知角ノ値ヲ求メルコトヲ三角方程式ヲ解クトイヒ, 其値ヲ解トイフ.

三角方程式デハ或特別ナ一ツノ解ヲ求メ得タトキハ其方程式ヲ成立セシメル他ノ多数ノ角ヲ見出スコトガデキル 此ノ特別ナ解ヲ特殊解トイヒ, 他ノ総テノ場合ヲ含ム解ヲ一般解トイフ。



(I) $\sin x = a$ ノ解法. 但シ $|a|<1$, O ヲ中心トシテ単位円ヲ畫キ $a>0$ デアルトキハ OY 上ニ $a<0$ デアルトキハ OY′ 上ニ a ノ絶対値ヲ示スダケノ長サヲトリ N ヨリ XX′ ニ平行線ヲ引イテ円周ト PP′ デ交ラシメル サウスレバ動径 OP ニヨツテ表ハサレル角ノ中絶対値ノ最小ナルモノヲ α トスレバ動径 OP′ ニヨツテ表ハ $\pi-\alpha$ トナリ何レモ $\sin x = a$ ヲ

満足スル、而シテ動径 OP ヲ共有スル一般角ハ

$2m\pi+\alpha$ デ、動径 OP' ヲ共有スル一般角ハ

$2m\pi+\pi-\alpha$ 即チ $(2m+1)\pi-\alpha$ デアル 但シ

m ハ任意ノ整数デアル、故ニ $\sin x=a$ ヲ満足

スル x ハ

$$2m\pi+\alpha \quad \text{又ハ} \quad (2m+1)\pi-\alpha$$

ノ中ニ全部含マレ、コノ外ニハナイ、此ノ二ツヲ

一ツニ纏メルト

$$n\pi+(-1)^n\alpha$$

トナル、但シ n ハ零又ハ任意ノ整数デアル、コ

レ $\sin x=a$ ヲ満足スル x ノ一般解デアル、

系 $\operatorname{cosec} x=a$ ノ解法、但シ $|a|>1$.

コノ場合 $\sin x=\frac{1}{a}$ ヲ解ケバヨイ

(例題) 1. $\sin x=-\frac{1}{2}$ ヲ解ケ、

(解) コノトキノ特殊解ハ $-\frac{\pi}{6}$ デアル

$$\therefore \quad x=n\pi+(-1)^n\left(-\frac{\pi}{6}\right)$$

$$=n\pi-(-)^n\frac{\pi}{6}$$

例題) 2　$\sin^2 x = \cos^2 x$　ヲ解ケ.

(解)　$\sin^2 x = 1 - \sin^2 x$

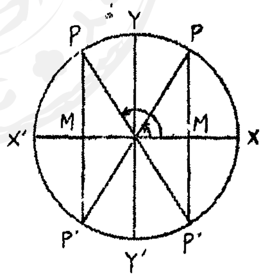
∴　$\sin x = \pm\frac{1}{\sqrt{2}} = \sin\left(\pm\frac{\pi}{4}\right)$

∴　$x = n\pi \pm \frac{\pi}{4} = (4n \pm 1)\frac{\pi}{4}$

然ルニ　$4n+1 = 2(2n)+1$　$4n-1 = 2(2n-1)+1$ デアルカラ $4n \pm 1$ ハ一般ニ $2k+1$ ノ形ニ表ハサレル

$$x = (2k+1)\frac{\pi}{4}$$

(ii)　$\cos x = a$ ノ解法　但シ $|a| < 1$,



(I) ノ場合ト同様ナ円ヲ畫キ, $a > 0$ デアルトキハ OX 上ニ, $a < 0$ デアルトキハ OX' 上ニ, a ノ絶対値ノ示スケノ長サ OM ヲトリ, M ヨリ YY' ニ平行線ヲ引キ円周トP, P' デ交ハラシメル　サウスルト動径 OP ニヨッテ表ハサレル角ノ中絶対値ノ最小ナルモノヲトリ, 其ノ大サヲ α

トスレバ動径 OP′ニヨツテ表ハサレル角ハ $-\alpha$ トナリ何レモ $\cos x=\alpha$ ヲ満足スル 而シテ動径 OP ヲ共有スル一般角ハ $2m\pi+\alpha$ デ動径 OP′ ヲ共有スル一般角ハ $2m\pi-\alpha$ デアル、但シ m ハ任意ノ整数デアル. 故ニ $\cos x=a$ ヲ満足スル x ハ

$$2n\pi+\alpha \quad \text{又ハ} \quad 2n\pi-\alpha$$

ノ中ニ全部含マレ、コノ外ニハナイ. コノニツヲ一ツニ纏メテ

$$2n\pi\pm\alpha$$

トスル、但 n ハ零又ハ任意ノ整数デアル. コレ $\cos x=a$ ヲ満足スル x ノ一般解デアル.

系 $\sec x=a$ ノ解法　但シ $|a|>1$.

コノ場合 $\cos x=\dfrac{1}{a}$ ヲ解ケバヨイ.

(例題) 1. $\cos x=-\dfrac{1}{\sqrt{2}}$ ヲ解ケ.

(解). $\cos x=-\dfrac{1}{\sqrt{2}}=-\cos\dfrac{\pi}{4}=\cos\left(\pi-\dfrac{\pi}{4}\right)$

$\therefore \quad x=2n\pi\pm\left(\pi-\dfrac{\pi}{4}\right)=(2n\pm1)\pi\mp\dfrac{\pi}{4}$

$$=(2k+1)\pi \pm \frac{\pi}{4}$$

(例題) 2, $2\sin^2\theta - 5\cos\theta - 4 = 0$ ヲ解ケ.

(解)

$$2(1-\cos^2\theta) - 5\cos\theta - 4 = 0$$

$$(2\cos\theta+1)(\cos\theta+2) = 0$$

$\therefore\ \cos\theta = -\frac{1}{2}$ 又ハ $\cos\theta = -2$

然ルニ餘弦ノ絶対値ハ1ヲ超エナイ, 故ニ −2 ハ捨テル.

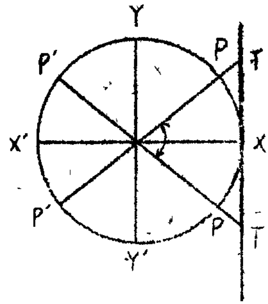
$$\therefore\quad \cos\theta = -\frac{1}{2} = \cos\left(\pi - \frac{\pi}{3}\right)$$

$$\therefore\quad \theta = 2n\pi \pm \left(\pi - \frac{\pi}{3}\right) = 2n\pi \pm \frac{2\pi}{3}$$

(III) $\tan x = a$ ノ解法

(I) ノ場合ト同様ナ円ヲ畫キXニ於ケル切線ヲ引ク $a>0$ デアルトキハ OX ノ上方ニ切線ニ沿ヒ, $a>0$ デアルトキハ OX ノ下方ニ切線ニ沿フテ a ノ絶対値ノ示スダケノ長サ XT ヲトリ T ト O トヲ結ブ直線ノ円周ト交ハル点ヲ P, P′ トスル、サウスルト動径 OP ニヨッテ表ハサレル角ノ中絶対値ノ最小ナモノヲトリ其大サヲ α ト

スレバ動径 OP' ニヨツテ表ハサレル角ハ $\pi+\alpha$ トナリ、何レモ $\tan x=\alpha$ ヲ満足スル、而シテ動径 OP ヲ共有スル一般角ハ $2m\pi+\alpha$ デ、



動径 OP' ヲ共有スル一般角ハ $2m\pi+\pi+\alpha$ 即チ $(2m+1)\pi+\alpha$ デアル、但 m ハ任意ノ整数デアル 故ニ $\tan x=\alpha$ ヲ満足スル x ハ

$$2m\pi+\alpha \quad 又ハ \quad (2m+1)\pi+\alpha$$

ノ中ニ全部含マレコノ外ニハナイ、コレヲ一ツニ纏メルト、

$$n\pi+\alpha$$

トナル、但 n ハ零又ハ任意ノ整数デアル、コレ $\tan x=\alpha$ ヲ満足スル x ノ一般解デアル

系 $\cot x=a$ ノ解法

コノ場合 $\tan x=\dfrac{1}{a}$ ヲ解ケバヨイ

(例題) 1. $\sqrt{3}\,\mathrm{cosec}^2\theta=4\cot\theta$ ヲ解ケ.

(解) $$\sqrt{3}(1+\cot^2\theta)=4\cot\theta$$

∴ $$\sqrt{3}\tan^2\theta-4\tan\theta+\sqrt{3}=0$$

$$(\sqrt{3}\tan\theta-1)(\tan\theta-\sqrt{3})=0$$

∴ $\tan\theta=\frac{1}{\sqrt{3}}=\tan\frac{\pi}{6}$ 又ハ $\tan\theta=\sqrt{3}=\tan\frac{\pi}{3}$

∴ $\theta=n\pi+\frac{\pi}{6}$ 又ハ $\theta=n\pi+\frac{\pi}{3}$

(例題) 2 $\sin^3\theta+\cos^3\theta=0$ ヲ解ケ.

(解) $\cos\theta=0$ 即チ $\theta=\frac{\pi}{2}$ ハ原方程式ヲ満足シ

く 故ニ両辺ヲ $\cos^3\theta$ ヲ除シ.

$$\tan^3\theta=-1 \quad (\text{虚根ハ捨テル})$$

∴ $$\tan\theta=-1=\tan\left(-\frac{\pi}{4}\right)$$

∴ $$\theta=n\pi-\frac{\pi}{4}$$

練 習 問 題

次ノ方程式ヲ解ケ

(i) $\sin x=-\frac{\sqrt{3}}{2}$ (ii) $\sin^2 x=\sin^2\alpha$

(iii) $2\cos^2\theta-7\sin\theta+2=0$ (iv) $\cos^2 x+\sin x=\frac{5}{4}$

$\sin 4\theta=\sin\theta$ ヲ解ケ.

3　$\cos\theta + \sin\theta = 1$　ヲ解ケ

4.　次ノ方程式ヲ解

$$2\sin^2 x + \sqrt{3}\cos x + 1 = 0$$

5.　次ノ方程式ヲ解ケ.

(i)　$\cos^2 x = \cos^2\alpha$　　(ii)　$\sin^2 x + \cos x = \frac{5}{4}$

6.　次ノ方程式ヲ解ケ

(i)　$\tan x = 1$　　(ii)　$6\cot^2\theta = 1 + 4\cos\theta$

(iii)　$\sec^2\theta + \cot^2\theta = \frac{13}{3}$　　(iv)　$\tan\alpha\tan x + 1 = 0$

7.　次ノ二ツノ方程式ヲ満足スル x, y ヲ求メヨ.

但シ x, y ハ何レモ $180°$ ヨリ小ナル正角トス。

$$x - y = 45°$$

$$\frac{\cos x}{\cos y} = \frac{1-\sqrt{3}}{\sqrt{2}}$$

8.　$\cos x \cos y + 1 = 0$　ヨリ x, y ヲ求ム。

§12 消去法

與ヘラレタ一組ノ方程式カラ, ソノ中ニ含マレル或特殊ノ文字ヲ含マナイ関係式ヲ作ルコトヲ

ソノ文字ヲ消去スルトイヒ、得タ関係式ヲ消去式トイフ。

消去ヲ行フ方法トシテ別ニ一般ノ法則ハナイ、上記ノ公式ヲ用ヒテ適宜コレヲ行ヘバヨイ。

(例題) 1.
$$\left.\begin{aligned}\tan\theta+\sin\theta&=m \quad (1)\\ \tan\theta-\sin\theta&=n \quad (2)\end{aligned}\right\}$$
ヨリ θ ヲ消去セヨ。

(解) (1), (2) ヲ $\sin\theta$, $\tan\theta$ ニツイテ解ケ

$$\tan\theta=\frac{1}{2}(m+n), \quad \sin\theta=\frac{1}{2}(m-n)$$

而シテ
$$\tan^2\theta=\frac{\sin^2\theta}{1-\sin^2\theta}$$

$$\therefore \quad \frac{1}{4}(m+n)^2=\frac{\frac{1}{4}(m-n)^2}{1-\frac{1}{4}(m-n)^2}$$

コレヲ簡約スルト

$$(m^2-n^2)^2=16mn$$

コレ求ムル消去式デアル

(例題) 2.
$$\left.\begin{aligned}y&=x\cot\theta+a\tan\theta \quad (1)\\ x\cos^2\theta&-a\sin^2\theta=0 \quad (2)\end{aligned}\right\}$$
ヨリ θ ヲ消去セヨ

(解) $(1)^2$
$$y^2=x^2\cot^2\theta+2ax+a^2\tan^2\theta$$

$$= \frac{x^2}{\tan^2\theta} + 2ax + a^2\tan^2\theta$$

又, (2) ヨリ $\tan^2\theta = \frac{x}{a}$, コレヲ上式ニ代入スル

$$y^2 = 4ax$$

コレ求ムル消去式デアル.

(例題) 9.
$$\frac{ax}{\cos\theta} - \frac{by}{\sin\theta} = a^2 - b^2 \qquad (1)$$
$$\frac{ax\sin\theta}{\cos^2\theta} + \frac{by\cos\theta}{\sin^2\theta} = 0 \qquad (2)$$
ヨリ

θ ヲ消去セヨ

(解)

(2) ヨリ
$$\frac{\dfrac{ax}{\cos\theta}}{\dfrac{\cos\theta}{\sin\theta}} = \frac{-\dfrac{by}{\sin\theta}}{\dfrac{\sin\theta}{\cos\theta}} = \frac{\dfrac{ax}{\cos\theta} - \dfrac{by}{\sin\theta}}{\dfrac{\cos\theta}{\sin\theta} + \dfrac{\sin\theta}{\cos\theta}}$$

$$= (a^2 - b^2)\sin\theta\cos\theta \quad [(1) ニヨル]$$

$$\therefore \quad \frac{ax\sin\theta}{\cos^2\theta} = (a^2 - b^2)\sin\theta\cos\theta$$

$$\cos^3\theta = \frac{ax}{a^2 - b^2} \qquad [\sin\theta \neq 0]$$

同様デ $\sin^3\theta = \frac{-by}{a^2 - b^2}$

故ニ $\cos^2\theta = \left(\frac{ax}{a^2 - b^2}\right)^{\frac{2}{3}} \qquad \sin^2\theta = \left(\frac{-by}{a^2 - b^2}\right)^{\frac{2}{3}}$

$$\therefore \quad 1 = \left(\frac{ax}{a^2 - b^2}\right)^{\frac{2}{3}} + \left(\frac{-by}{a^2 - b^2}\right)^{\frac{2}{3}}$$

即チ $(ax)^{\frac{2}{3}} + (by)^{\frac{2}{3}} = (a^2 - b^2)^{\frac{2}{3}}$

コレガ求ムル消去式デアル。

練　習　問　題

次ノ各々カラ θ ヲ消去セヨ

(i) $\left.\begin{array}{l}\sin\varphi = a\cos\theta + b\sin\theta \\ \cos\varphi = a\sin\theta - b\cos\theta\end{array}\right\}$　(ii) $\left.\begin{array}{l}\sin\theta(1-\cos\theta) = m \\ \cos\theta(1-\sin\theta) = n\end{array}\right\}$

(iii) $(x-a\sin)^2+(y-a\cos\theta)^2=(x\cos\theta-y\sin\theta)^2=a^2$

(iv) $\left.\begin{array}{l}a\sin\theta+b\cos\theta+c=0 \\ a'\sin\theta+b'\cos\theta+c'=0\end{array}\right\}$　(v) $\left.\begin{array}{l}a\sec^2\theta+b\sec\theta+c=0 \\ a'\sec^2\theta+b'\sec\theta+c'=0\end{array}\right\}$

但 $ab'-a'b \neq 0$　　　但 $ab'-ab \neq 0$

第二章　加法定理及ビ之ニ関聯スル公式

§1 射　影

一平面上ニ直線lト点PトアリPヨリlニ下セル垂線ノ足P'ヲlノ上ニ投ズル点Pノ正射影トイフ　Pガlノ上ニアラバP自身ヲ正射影トス　又点Pノ代リニ線分PQアルトキ　其両端ノ正射影ヲ両端トスル線分P'Q'ヲlノ上ニ投ズル線分PQノ正射影トイフ

特ニ垂直ト限ラズ與ヘラレタル方向ニ平行ナル射影――一般ニ斜射影――モ考ヘラレルレドモ以下用フルハ正射影ノミナルユヘ之ヲ単ニ射影ト称スベシ

マヅ線分ノ射影ノ大サヲ表ハス公式ヲ求ムルタメ二直線ノ間ノ角ヲ新タニ定義スベシ

從来角ノ始辺ハx軸ノ正ノ部分OXニ一致セシメ終辺ハ其ノ走レル向キヲ正ト規約せり　之

ヲ拡張シテ一般ニ角ノ両辺ニ向キヲ附シ其走レル向キヲ正トスベシ （今ヤ首辺ハ必ズシモ OX ニ一致スルヲ要セズ）

此規約ニ従ヒ二直線（又ハ線分）ノ間ノ角ヲ次ノ如ク定義ス：

各直線ニ向キヲ附シ一方ノ直線ヲ首線ト定メ二直線ノ正ノ向キノ間ノ角（図ノ矢ニテ示セル角）ヲ二直線ノ間ノ角ト定ム，此ノ角ヲ又首辺ト見ナセル直線ニ対スル他ノ直線ノ傾角トモイフ

平行直線ニ同ジ向キヲ附スレバ二直線ノ間ノ角ハ其ノ各ニ平行ナル二直線ノ間ノ角ニ一ツヅツ等シ

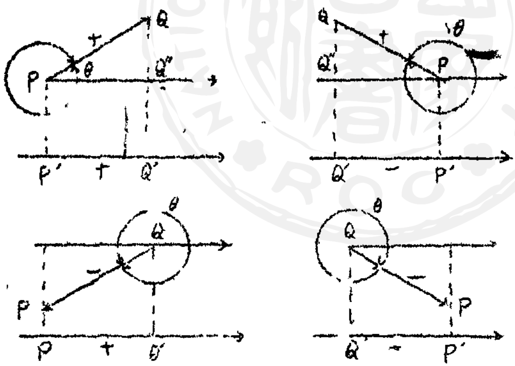
二直線ノ間ノ角ヲ此様ニ定メレバ線分ノ射影ノ大サヲ求ムルニ凡テノ場合ニ通用スル次ノ公式ヲ得 但シ線分 PQ ノ射影ヲ P′Q′ 従ツテ

QP ノ射影ヲ Q'P' ニテ表ハスモノトス.

定理1. 線分 PQ ノ直線 l ニ対スル傾角ヲ θ トセバ, PQ ノ l ノ上ニ投ズル射影 P'Q' ハ, PQ ノ正負ニ拘ラズ次ノ式ニテ表ハサル:

$$P'Q' = PQ \cos\theta.$$

コレニ依ツテ見レバ線分ト其射影トハ θ ノ値ニヨリ必ズシモ同符号ナラズ. 実際次ノ図ニ見ルガ如シ.



證明. PQ ガ正ナラバ, コレ餘弦ノ定義ノ直接ノ結果ナリ, 何ントナレバ, P ヨリ l ニ平行線ヲ引キ QQ' トノ交点ヲ Q'' トスレバ餘弦ノ定義ヨリ

$$PQ'' = PQ\cos\theta$$

且ツ $\quad P'Q' = PQ''\quad$ ナレバナリ.

次ニ PQ ガ負ナラバ正ナル QP ニ今証明シタル結果ヲ適用スルコトヲ得, 但シ QP ノ l ニ対スル傾角ハ PQ ノ l ニ対スル傾角ニ同ジ（頁49, 二直線ノ間ノ角ノ定義参照）. 即チ

$$Q'P' = QP\cos\theta,$$

$$P'Q' = PQ\cos\theta \qquad \text{(証明終)}$$

次ニ二点 P, Q ヲ連結スル屈折線 $PABCQ$ ノ各線分 PA, AB, BC, CQ ヲ順次ニ有向直線 l ノ上ニ射影スレバ次ノ定理ニヨリ.

定理 有向直線上動点ガヒキ續キ描キタル線分ヲ順次 $PA_1, A_1A_2, \cdots, A_{n-1}Q$ トスレバ

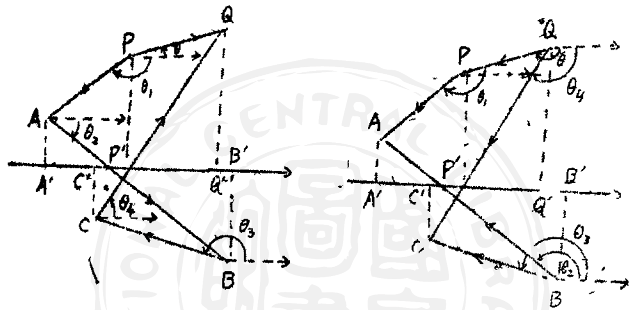
$$PA_1 + A_1A_2 + \cdots + A_{n-1}Q = PQ$$

$$\therefore\quad P'A' + A'B' + B'C' + C'Q' = P'Q'$$

各連結線分及ビ PQ ニソレゾレ向キヲ附シ（AP PA イヅレヲ正トスルモ随意ナリ, 他モ同

例.) l ニ対スル傾角ヲソレゾレ θ_1, θ_2, θ_3, θ_4, 及ビ θ トセバ定理1.ニヨリ上ノ式ハ又次ノ如クニ書キ表ハサレル.

$$PA\cos\theta_1 + AB\cos\theta_2 + BC\cos\theta_3 + CQ\cos\theta_4 = PQ\cos\theta$$



コレヲ一般ニシテ次ノ重要ナル定理ヲ得.

定理 2′ 二点 P, Q ヲ連結スル屈折線 PA_1, ---- $A_{n-1}Q$ ノ各線分 PA_1 A_1A_2 ------, $A_{n-1}Q$ ヲ順次ニ有向直線 l ノ上ニ射影スレバ

$$P'A_1' + A_1'A_2' + \cdots\cdots + A_{n-1}'Q' = P'Q'$$

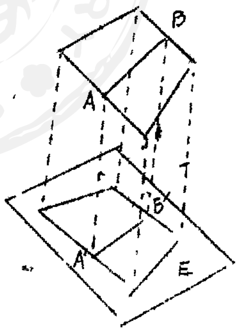
各線分ノ正ノ向キヲ随意ニ定メ, l ニ対スル傾角ヲソレゾレ θ_1, θ_2, ------, θ_n 及ビ θ トスレバ

$$PA_1\cos\theta_1 + A_1A_2\cos\theta_2 + \cdots\cdots + A_{n-1}Q\cos\theta_n = PQ\cos\theta$$

（附記）　空間ニ於ケル点又ハ線分ノ直線又ハ平面上ニ投ズル射影ノ意義ハ平面ノ場合ヨリ類推セラルベシ

空間ニ於ケル二直線ノ間ノ角トハ一点ヨリ各ニ平行ニ且同ジ向キニ引ケル二直線ノ間ノ角ニシテ直線ト平面トノ間ノ角トハ直線ノ平面上ニ投ズル其射影トノ間ノ角ナリト定義スレバ定理1ハ線分ヲ平面上ニ射影スル場合ニモ成立シ、定理2ハ平行線ガ空間ニアル場合ニモ成立ス。

次ニ一個ノ重要ナル應用ヲ示サン　梯形ノ底辺ガ平面Eニ平行ナラバ、Eノ上ニ投ズル射影ノ梯形ハ其ノ底辺舊ニ等シク、高サ$A'B'$ハ原ノ梯形ノ高サABノ射影ニシテ、



$$A'B' = AB\cos\theta,$$

依テ両梯形ノ面積ヲJ, J'トスレバ

$$J' = J\cos\theta,$$

然ニ θ ハ AB ト E トノ間ノ角ナレドモ AB ハ梯形ノ面ト平面 E トノ交線ニ垂直ナルユヘ両平面ノ間ノ角ナリトイフコトヲ得。

梯形ノ代リニ任意ノ平面多角形アルトキハ各頂点ヲ通リ平面 E ニ平行ナル平面ニテ多角形ヲ截リ之ヲ若干ノ三角形ト梯形トニ分テバ其各ニ上ノ公式ガアテハマリ結局次ノ定理ヲ得。

定理. 面積 J ナル平面多角形ノ平面上ニ投ゼル射影ノ面積 J' ハ

$$J' = J\cos\theta$$

但シ θ ハ両平面ノ間ノ角ナリトス

練　習　問　題

直六面体ノ対角線 OP ガ稜 OA, OB, OC トナス角ヲソレゾレ α, β, γ トスレ

$\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1$ ナルコトヲ証セヨ。

2，互ニ直交スル三平面ニ投ズル「面積 J ナル空間平面形ノ射影ノ面積ヲソレゾレ J_1, J_2, J_3 トセバ $J_1^2+J_2^2+J_3^2=J^2$ ナルコトヲ証セヨ．

3　直角壔ノ底面積ヲ知リテ底面トノ傾角 θ ナル截面ノ面積ヲ求メヨ．依テ又平行截面ノ面積ハスベテ相等シキコトヲ示セ．

4．円ヲ平面上ニ射影スレバ楕円トナリ平面ニ平行ナル直径及ビ之ニ直角ナル直径ノ射影ガ其楕円ノ両軸ナリ，此事実ヲ仮定シテ両軸ノ長サ $2a, 2b$ ナル楕円ノ面積ハ πab ナルコトヲ示セ．

§14　正弦及ビ余弦ノ加法定理及ビ減法定理

$\sin(\alpha+\beta)$ ハ $\sin\alpha$ $\sin\beta$ ヲ以テ，又 $\cos(\alpha+\beta)$ ハ $\cos\alpha$, $\cos\beta$ ヲ以テイヅレモ代数的ニ表ハサルルモノナリ，即チ

$$\sin(\alpha+\beta)=\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta,$$

$$\cos(\alpha+\beta)=\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta$$

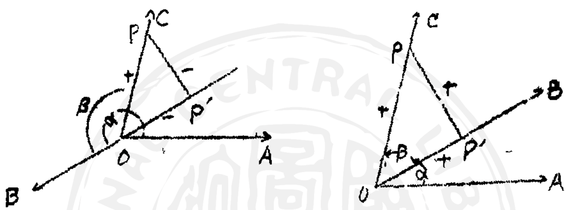
之レラソレゾレ正弦及ビ餘弦ノ加法定理イフ　第一ノ式ハ sin ノ他ニ cos ヲ含ミ第二式ハ cos ノ他ニ sin ヲ含メドモ之上ニイフ事実ニ抵觸セズ　何トナレバ sin, cos ノ一ナハ他ヲ以テ代数的ニ表ハシ得レバナリ　之ニ依リα及ビβノ正弦ヲ知ラバ代数的ニα+βノ正弦ガ求メラレル　餘弦ニ就イテモ同様ナリ

本定理ハ三角法ニ於ケル大多数ノ公式ノ根源トナルモノナレバ必ズ記憶スベキモノナリ

マヅα βヲ與ヘラレタル任意ノ角トシテ餘弦ノ加法定理ヲ証シ次ニソレヨリ正弦ノ場合ヲ誘導スベシ.

αノ首辺ヲ OA, 終辺ヲ OB トス、母線ガ OB ノ位置ヨリ更ニ OC 迄βニ等シキダケ回転スレバ茲ニ生ジタル角ハα+βニ等シク OA ハ其ノ首辺 OC ハ其ノ終辺ナリ,

終辺 OC 上ノ一点 P ヨリ OB ニ垂線 PP' ヲ引キ、線分 OP, OP', PP' ニ從來ノ規約ニ從ヒ向キヲ附スレバ OP ハ其向キ常ニ辺 OC ノ向キト一致スルユヘ正ナリ。 OP' ハ其ノ向キガ辺 OB ノ正



ノ向キト一致スレバ正、之ニ反スレバ負ナリ。P'P ハ有向直線 OB ニ垂直ナルユヘ OB ヲ水平ニ、其正ノ向キヲ右手ニ置クトキ OB ヨリ上ニ向ヘバ正、下ニ向ヘバ負ナリ。

線分 OP, OP' P'P ニ此様ニ向キヲ與フレバ常ニ

$$\frac{OP'}{OP}=\cos\beta, \qquad \frac{P'P}{OP}=\sin\beta$$

從テ　$OP=OP\cos\beta, \qquad P'P=OP\sin\beta,$

サテ射影ノ定理ニヨレバ OA ノ上ニ投ズル OP 射影ハ OP' P'P ノ各射影ノ和ニ等シ　之ヲ式ニテ

要ハスニ OP ノ OA ニ対スル傾角ハ明カニ $\alpha+\beta$,
OP' ノ OA ニ対スル傾角ハ α. $P'P$ ノ OB ニ対スル傾角ハ $\frac{\pi}{2}$ ナルユヘ OA' ニ対スル傾角ハ $\alpha+\frac{\pi}{2}$ ナリ.

依テ $OP\cos(\alpha+\beta)=OP'\cos\alpha+P'P\cos(\alpha+\frac{\pi}{2})$

コレニ前頁ノ OP', $P'P$ ノ式ヲ代入スレハ

$$OP\cos(\alpha+\beta)=(OP\cos\beta)\cos\alpha+(OP\sin\beta)\cos(\alpha+\frac{\pi}{2}),$$

即チ. $OP\cos(\alpha+\beta)=OP\cos\alpha\cos\beta-OP\sin\alpha\sin\beta.$

両辺ヲ OP ニテ割リ余弦ノ加法定理ヲ得

上ノ証明ニテ α ハ任意ナルユヘ α ノ代リニ $\frac{\pi}{2}+\alpha$ トスレバ

$$\cos(\frac{\pi}{2}+\alpha+\beta)=\cos(\frac{\pi}{2}+\alpha)\cos\beta-\sin(\frac{\pi}{2}+\alpha)\sin\beta,$$

或ハ $-\sin(\alpha+\beta)=-\sin\alpha\cos\beta-\cos\alpha\sin\beta$

両辺ノ符号ヲ変ヘタルモノハ即チ正弦ノ加法定理ナリ.

更ニ β ハ任意ナルユヘ β ヲ $-\beta$ ニ代ヘテ.

$$\cos(\alpha-\beta)=\cos\alpha\cos(-\beta)-\sin\alpha\sin(-\beta)$$

及ビ $\sin(\alpha-\beta)=\sin\alpha\cos(-\beta)+\cos\alpha\sin(-\beta)$

即チ $\cos(\alpha-\beta)=\cos\alpha\cos\beta+\sin\alpha\sin\beta$

及ビ $\sin(\alpha-\beta)=\sin\alpha\cos\beta-\cos\alpha\sin\beta$

以上ノ四個ノ公式ヲマトメテ再記スレバ

$$\left\{\begin{array}{ll}\left.\begin{array}{l}\sin(\alpha+\beta)=\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta\\ \cos(\alpha+\beta)=\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta\end{array}\right\} & (A)\\ \left.\begin{array}{l}\sin(\alpha-\beta)=\sin\alpha\cos\beta-\cos\alpha\sin\beta\\ \cos(\alpha-\beta)=\cos\alpha\cos\beta+\sin\alpha\sin\beta\end{array}\right\} & (B)\end{array}\right.$$

(B)ヲ減法定理トイフコトモアリ

§15. 正切及ビ餘切ノ加法定理及ビ減法定理

正切及ビ餘切ノ加法定理ハ正弦及ビ餘弦ノ場合ヨリ容易ニ誘導セラル 即チ

$$\frac{\sin(\alpha+\beta)}{\cos(\alpha+\beta)}=\frac{\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta}{\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta}$$

及ビ、 $$\frac{\cos(\alpha+\beta)}{\sin(\alpha+\beta)}=\frac{\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta}{\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta}$$

以上両式ノ右辺ノ分母分子ヲ第一ノ式ハ

$\cos\alpha\cos\beta$ ニテ第二ノ式ハ $\sin\alpha\sin\beta$ ニテ割リ

$$\begin{cases} \tan(\alpha+\beta)=\dfrac{\tan\alpha+\tan\beta}{1-\tan\alpha\tan\beta} & (1) \\ \cot(\alpha+\beta)=\dfrac{\cot\alpha\cot\beta-1}{\cot\alpha+\cot\beta} & (2) \end{cases}$$

(1) 及ビ (2) ニ於テ β ヲ $-\beta$ ニテ置キ換ヘ、

$\tan(-\beta)=-\tan\beta$, $\cot(-\beta)=-\cot\beta$ ニ注意シテ次式ヲ得、

$$\begin{cases} \tan(\alpha-\beta)=\dfrac{\tan\alpha-\tan\beta}{1+\tan\alpha\tan\beta} & (3) \\ \cot(\alpha-\beta)=\dfrac{\cot\beta\cot\alpha+1}{\cot\beta-\cot\alpha} & (4) \end{cases}$$

(例題) 1　$15°$, $75°$ ノ三角函数ノ値ヲ求ム.

(解) $\sin 15°=\sin(45°-30°)=\sin 45°\cos 30°-\cos 45°\sin 30°$

$$=\frac{1}{\sqrt{2}}\times\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{1}{\sqrt{2}}\times\frac{1}{2}$$

$$\therefore\quad \sin 15°=\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}=\cos 75°$$

$$\cos 15°=\cos(45°-30°)=\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}=\sin 75°$$

$$\tan 15°=\tan(45°-30°)=2-\sqrt{3}=\cot 75°$$

$$\cot 15°=\frac{1}{2-\sqrt{3}}=2+\sqrt{3}=\tan 75°$$

$$\sec 15^\circ = \frac{4}{\sqrt{6}+\sqrt{2}} = \sqrt{6}-\sqrt{2} = \operatorname{cosec} 75^\circ$$

$$\operatorname{cosec} 15^\circ = \frac{4}{\sqrt{6}-\sqrt{2}} = \sqrt{6}+\sqrt{2} = \sec 75^\circ$$

(例題)2　$\sin\alpha = \frac{4}{5}$, $\cos\beta = -\frac{8}{17}$ ヲ與ヘテ $\sin(\alpha+\beta)$, $\cos(\alpha+\beta)$ 及ビ $\sin(\alpha-\beta)$, $\cos(\alpha-\beta)$ ノ値ヲ求ム.

(解) α ハ第一又ハ第二象限ノ角 β ハ第二又ハ第三象限ノ角デ, $\cos\alpha = \pm\frac{3}{5}$, $\sin\beta = \pm\frac{15}{17}$ デアル.

(i) α ガ I, β ガ II デアル場合

$$\sin(\alpha+\beta) = \left(\frac{4}{5}\right)\times\left(-\frac{8}{17}\right)+\left(\frac{3}{5}\right)\times\left(\frac{15}{17}\right) = \frac{13}{85}$$

$$\cos(\alpha+\beta) = \left(\frac{3}{5}\right)\times\left(-\frac{8}{17}\right)-\left(\frac{4}{5}\right)\times\left(\frac{15}{17}\right) = -\frac{84}{85}$$

$$\sin(\alpha-\beta) = -\frac{77}{85}, \quad \cos(\alpha-\beta) = \frac{36}{85}$$

(ii) α ガ I, β ガ III デアル場合; (iii) α ガ II, β ガ II デアル場合 (iv) α ガ II, β ガ III デアル場合ハ如何.

練習問題

1. $\cos A = \frac{40}{41}$, $\cos B = \frac{60}{61}$ デアルトキ $\tan(A+B)$, $\tan(A-B)$ ノ値ヲ求ム。

2. $\tan 195^\circ \sin 105^\circ + \cos 165^\circ \cot 165^\circ + \tan 135^\circ \sin 9$… ノ値ヲ求ム。

3. 次ノ恒等式ヲ証明セヨ。

(i) $\sin\theta + \cos\theta = \sqrt{2}\sin\left(\theta + \frac{\pi}{4}\right) = \sqrt{2}\cos\left(\theta - \frac{\pi}{4}\right)$

(ii) $\sin\theta - \cos\theta = \sqrt{2}\sin\left(\theta - \frac{\pi}{4}\right) = -\sqrt{2}\cos\left(\theta + \frac{\pi}{4}\right)$

(iii) $\dfrac{\tan A - \tan B}{\tan A + \tan B} = \dfrac{\sin(A-B)}{\sin(A+B)}$

(iv) $\dfrac{\cot A - \cot B}{\cot A + \cot B} = -\dfrac{\sin(A-B)}{\sin(A+B)}$

4. $\tan B = \dfrac{2\sin A \sin C}{\sin(A+C)}$ デアルトキハ $\tan A$, $\tan B$, $\tan C$ ハ調和級数ヲナスコトヲ証明セヨ。

§16 重要ナ種々ノ公式

$$\sin(\alpha+\beta)\sin(\alpha-\beta) = \sin^2\alpha\cos^2\beta - \cos^2\alpha\sin^2\beta$$

$$= \sin^2\alpha(1-\sin^2\beta) - (1-\sin^2\alpha)\sin^2\beta$$

$$\therefore \sin(\alpha+\beta)\sin(\alpha-\beta) = \sin^2\alpha - \sin^2\beta = \cos^2\beta - \cos^2\alpha$$

同様ニ

$$\left.\begin{aligned}&\cos(\alpha+\beta)\cos(\alpha-\beta)=\cos^2\alpha-\sin^2\beta=\cos^2\beta-\sin^2\alpha\\&\sin(\alpha+\beta)\cos(\alpha-\beta)=\sin\alpha\cos\alpha+\sin\beta\cos\beta\\&\cos(\alpha+\beta)\sin(\alpha-\beta)=\sin\alpha\cos\alpha+\sin\beta\cos\beta\end{aligned}\right\}\text{(I)}$$

又

$$\left.\begin{aligned}&\frac{\cos(\alpha+\beta)}{\cos(\alpha-\beta)}=\frac{1-\tan\alpha\tan\beta}{1+\tan\alpha\tan\beta}\\&\frac{\sin(\alpha\pm\beta)}{\cos\alpha\cos\beta}=\tan\alpha\pm\tan\beta\ \text{(複符号同順)}\end{aligned}\right\}\text{(II)}$$

又＝第14節ノ公式 (A) 及ビ (B) ヲ加ヘ或ハ減ズレコトカラ

$$\left.\begin{aligned}&2\sin\alpha\cos\beta=\sin(\alpha+\beta)+\sin(\alpha-\beta)\\&2\cos\alpha\sin\beta=\sin(\alpha+\beta)-\sin(\alpha-\beta)\\&2\cos\alpha\cos\beta=\cos(\alpha+\beta)+\cos(\alpha-\beta)\\&2\sin\alpha\sin\beta=\cos(\alpha-\beta)-\cos(\alpha+\beta)\end{aligned}\right\}\text{(III)}$$

式デ $\alpha+\beta=\theta,\ \alpha-\beta=\phi$ トオクコトカラ

$$\left.\begin{aligned}&\sin\theta+\sin\phi=2\sin\tfrac{1}{2}(\theta+\phi)\cos\tfrac{1}{2}(\theta-\phi)\\&\sin\theta-\sin\phi=2\cos\tfrac{1}{2}(\theta+\phi)\sin\tfrac{1}{2}(\theta-\phi)\\&\cos\theta+\cos\phi=2\cos\tfrac{1}{2}(\theta+\phi)\cos\tfrac{1}{2}(\theta-\phi)\end{aligned}\right\}\text{(IV)}$$

$$\cos\phi-\cos\theta=2\sin\frac{1}{2}(\theta+\phi)\sin\frac{1}{2}(\theta-\phi)$$

コノ公式(III),(IV)ハ最モ重要ナ公式デ(III)ハ正弦,餘弦ノ積ヲ其和又ハ差ニ,(IV)ハ和又ハ差ヲ積ニ改メル公式デアル 又(IV)カラ次ノ公式ガ誘導サレル

$$\left.\begin{aligned}
\frac{\sin\theta+\sin\phi}{\sin\theta-\sin\phi}&=\frac{\tan\frac{1}{2}(\theta+\phi)}{\tan\frac{1}{2}(\theta-\phi)}\\
\frac{\sin\theta\pm\sin\phi}{\cos\theta+\cos\phi}&=\tan\frac{1}{2}(\theta\pm\phi)\ (\text{複符号同順})\\
\frac{\sin\theta\pm\sin\phi}{\cos\phi-\cos\theta}&=\cot\frac{1}{2}(\theta\mp\phi)\ (\text{複符号同順})\\
\frac{\cos\theta+\cos\phi}{\cos\phi-\cos\theta}&=\cot\frac{1}{2}(\theta+\phi)\cot\frac{1}{2}(\theta-\phi)
\end{aligned}\right\}\ (V)$$

(例題)1. $\tan\frac{A}{2}-\tan\frac{A}{3}-\tan\frac{A}{6}=\tan\frac{A}{2}\tan\frac{A}{3}\tan\frac{A}{6}$ ヲ證明セヨ.

(解) $\frac{A}{2}=\frac{A}{3}+\frac{A}{6}$ デアルヲ以テ

$$\tan\frac{A}{2}=\tan\left(\frac{A}{3}+\frac{A}{6}\right)=\frac{\tan\frac{A}{3}+\tan\frac{A}{6}}{1-\tan\frac{A}{3}\tan\frac{A}{6}}$$

$$\therefore\quad \tan\frac{A}{2}\left(1-\tan\frac{A}{3}\tan\frac{A}{6}\right)=\tan\frac{A}{3}+\tan\frac{A}{6}$$

即チ $\tan\frac{A}{2}-\tan\frac{A}{3}-\tan\frac{A}{6}=\tan\frac{A}{2}\tan\frac{A}{3}\tan\frac{A}{6}$

(例題)2 次式ノ値ヲ計算セヨ

$$\left(\sin 52^\circ\tfrac{1}{2}-\sin 37^\circ\tfrac{1}{2}\right)\left(\cos 22^\circ\tfrac{1}{2}+\cos 7^\circ\tfrac{1}{2}\right)$$

(解) $\sin 52^\circ\frac{1}{2}-\sin 37^\circ\frac{1}{2}=2\cos\frac{1}{2}\left(52^\circ\frac{1}{2}+37^\circ\frac{1}{2}\right)$

$$\times\sin\frac{1}{2}\left(52^\circ\tfrac{1}{2}-37^\circ\tfrac{1}{2}\right)=2\cos 45^\circ\sin\frac{15^\circ}{2}$$

$\cos 22^\circ\frac{1}{2}+\cos 7^\circ\frac{1}{2}=2\cos\frac{1}{2}\left(22^\circ\frac{1}{2}+7^\circ\frac{1}{2}\right)$

$$\times\cos\frac{1}{2}\left(22^\circ\tfrac{1}{2}-7^\circ\tfrac{1}{2}\right)=2\cos 15^\circ\cos\frac{15^\circ}{2}$$

$\therefore$ 求値式 $=2\cos 45^\circ\cos 15^\circ\times 2\sin\frac{15^\circ}{2}\cos\frac{15^\circ}{2}$

$$=2\cos 45^\circ\sin 15^\circ\cos 15^\circ$$

$$=\cos 45^\circ\times 2\sin 15^\circ\cos 15^\circ$$

$$=\cos 45^\circ\sin 30^\circ$$

$$=\frac{1}{\sqrt{2}}\times\frac{1}{2}$$

$$=\frac{\sqrt{2}}{4}$$

答 $\frac{\sqrt{2}}{4}$

練習問題

1. $1-\cos^2 A-\cos^2 B-\cos^2 C-2\cos A\cos B\cos C$

$$=-4\cos\frac{A+B+C}{2}\cos\frac{-A+B+C}{2}\cos\frac{A-B+C}{2}\cos\frac{A+B-C}{2}$$

ナルコトヲ証明セヨ

2. $\sin A \sin(B-C)\sin(B+C-A)$

$$+\sin B\sin(C-A)\sin(C+A-B)$$

$$+\sin C\sin(A-B)\sin(A+B-C)$$

$$=2\sin(B-C)\sin(C-A)\sin(A-B)$$

ナルコトヲ証明セヨ.

3. $A+B+C=\pi$ デアルトキ.

$$\cos^2 A+\cos^2 B+\cos^2 C+2\cos A\cos B\cos C=1$$

ガ成立スルコトヲ証明セヨ

4. $\dfrac{\sin(\theta+45°)\sin(\theta-45°)}{\sin^2\theta-\cos^2\theta}$ ヲ簡単ニセヨ.

§17 倍角ノ三角函数

正弦及ビ餘弦ノ加法定理ニ於テ $\beta=\alpha$ トオケバ

$$\begin{cases}\sin 2\alpha = 2\sin\alpha\cos\alpha & (1)\\ \cos 2\alpha = \cos^2\alpha-\sin^2\alpha & (2)\\ \qquad = 1-2\sin^2\alpha = 2\cos^2\alpha-1 & (3)\end{cases}$$

(3)ハ又次ノ形式ニテ用フルコト多シ:

$$\sin^2\alpha = \frac{1-\cos 2\alpha}{2}, \quad \cos^2\alpha = \frac{1+\cos 2\alpha}{2}$$

(1), (2), (3) ノ α ノ代リニ $\frac{\alpha}{2}$ トオケバ

$$\sin\alpha = 2\sin\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\alpha}{2} \qquad (1)'$$

$$\cos\alpha = \cos^2\frac{\alpha}{2} - \sin^2\frac{\alpha}{2} \qquad (2)'$$

$$= 1 - 2\sin^2\frac{\alpha}{2} = 2\cos^2\frac{\alpha}{2} - 1 \qquad (3)'$$

次ニ上記 (1), (2) ヲマズ

$$\sin 2\alpha = \frac{2\sin\alpha\cos\alpha}{\cos^2\alpha + \sin^2\alpha}, \quad \cos 2\alpha = \frac{\cos^2\alpha - \sin^2\alpha}{\cos^2\alpha + \sin^2\alpha}$$

形ニ書キ分母分子ヲソレゾレ $\cos^2\alpha$ ニテ割レ

$$\begin{cases} \sin 2\alpha = \dfrac{2\tan\alpha}{1+\tan^2\alpha} & (4) \\[2ex] \cos 2\alpha = \dfrac{1-\tan^2\alpha}{1+\tan^2\alpha} & (5) \end{cases}$$

マタ正切及ビ餘切ノ加法定理ニ於テ $\beta = \alpha$ ト

オケバ

$$\begin{cases} \tan 2\alpha = \dfrac{2\tan\alpha}{1-\tan^2\alpha} & (6) \\[2ex] \cot 2\alpha = \dfrac{\cot^2\alpha - 1}{2\cot\alpha} & (7) \end{cases}$$

上記 (4), (5), (6) ノ α ノ代リニ $\frac{\alpha}{2}$ トスレバ

$$\begin{cases} \sin\alpha = \dfrac{2\tan\frac{\alpha}{2}}{1+\tan^2\frac{\alpha}{2}} & (4)' \\[2ex] \cos\alpha = \dfrac{1-\tan^2\frac{\alpha}{2}}{1+\tan^2\frac{\alpha}{2}} & (5)' \\[2ex] \tan\alpha = \dfrac{2\tan\frac{\alpha}{2}}{1-\tan^2\frac{\alpha}{2}} & (6)' \end{cases}$$

更ニ上記(1), (3) ヲ用ヒテ

$$\sin(\alpha+2\alpha)=\sin\alpha\cos2\alpha+\cos\alpha\sin2\alpha$$

$$=\sin\alpha(1-2\sin^2\alpha)+2\sin\alpha(1-\sin^2\alpha)$$

$$\cos(\alpha+2\alpha)=\cos\alpha\cos2\alpha-\sin\alpha\sin2\alpha$$

$$=\cos\alpha(2\cos^2\alpha-1)-2\cos\alpha(1-\cos^2\alpha)$$

即チ

$$\begin{cases} \sin3\alpha=3\sin\alpha-4\sin^3\alpha & (8) \\ \cos3\alpha=4\cos^3\alpha-3\cos\alpha & (9) \end{cases}$$

(例題) 1. $\sin3A\sin^3A+\cos3A\cos^3A=\cos^3 2A$ ナルコトヲ証明セヨ.

(解) 左式 $=(3\sin A-4\sin^3A)\sin^3A+(4\cos^3A-3\cos A)\cos^3A$

$$=3(\sin^4A-\cos^4A)-4(\sin^6A-\cos^6A)$$

$$=(\sin^2 A-\cos^2 A)\{3-4(\sin^4 A+\sin^2 A\cos^2 A+\cos^4 A)\}$$

$$=-\cos 2A\{3-4(1-\sin^2 A\cos^2 A)\}$$

$$=-\cos 2A\{-1+\sin^2 2A\}=\cos 2A\cos^2 2A$$

$$=\cos^3 2A=$$ 右式

練　習　問　題

1. $$\frac{\cos 3A}{\cos A}-\frac{\cos 6A}{\cos 2A}+\frac{\cos 9A}{\cos 3A}-\frac{\cos 18A}{\cos 6A}$$

$$=2(\cos 2A-\cos 4A+\cos 6A-\cos 12A)$$ ヲ証セヨ

2 $\tan\phi=\dfrac{\sin\alpha\sin\theta}{\cos\theta-\cos\alpha}$ デアルトキハ

$\tan\theta=\dfrac{\sin\alpha\sin\phi}{\cos\phi\pm\cos\alpha}$ デアルコトヲ証明セヨ.

3 次ノ恒等式ヲ証明セヨ.

(I) $\dfrac{1+\sin 2A}{\sin A+\cos A}=\sqrt{2}\sin(A+45^\circ)$

(II) $\tan(30^\circ+A)\tan(30^\circ-A)=\dfrac{2\cos 2A-1}{2\cos 2A+1}$.

§18　18°, 36°, 54°, 72° ノ三角函数

今 $\alpha=18^\circ$ トスレバ $5\alpha=90^\circ$ $\therefore\ 2\alpha=90^\circ-3\alpha$

従ッテ　$\sin 2\alpha = \cos 3\alpha$

即チ　$2\sin\alpha\cos\alpha = 4\cos^3\alpha - 3\cos\alpha$

∴　$4\cos^2\alpha - 2\sin\alpha - 3 = 0$　($\cos\alpha \neq 0$ デアル)

即チ　$4\sin^2\alpha + 2\sin\alpha - 1 = 0$

∴　$\sin\alpha = \dfrac{-1\pm\sqrt{5}}{4}$　($\sin\alpha > 0$ デアル)

∴　$\sin 18^\circ = \dfrac{\sqrt{5}-1}{4} = \cos 72^\circ$

又　$\cos 18^\circ = \sqrt{1-\sin^2 18^\circ} = \dfrac{1}{4}\sqrt{10+2\sqrt{5}} = \sin 72^\circ$

従ッテ　$\tan 18^\circ = \sqrt{1-\frac{2}{5}\sqrt{5}} = \cot 72^\circ$

$\cot 18^\circ = \sqrt{5+2\sqrt{5}} = \tan 72^\circ$

又　$\sin 36^\circ = 2\sin 18^\circ \cos 18^\circ = \dfrac{1}{4}\sqrt{10-2\sqrt{5}} = \cos 54^\circ$

従ッテ　$\cos 36^\circ = \dfrac{1}{4}(\sqrt{5}+1) = \sin 54^\circ$

$\tan 36^\circ = \sqrt{5-2\sqrt{5}} = \cot 54^\circ$,

$\cot 36^\circ = \sqrt{1+\frac{2}{5}\sqrt{5}} = \tan 54^\circ$

§19　$\cos A$ ヲ知ッテ $\frac{1}{2}A$ ノ三角函数ヲ求ムルコト

倍角ノ公式系2ニ於テ $\alpha = \dfrac{A}{2}$ トオケバ

$\sin\dfrac{A}{2} = \pm\sqrt{\dfrac{1}{2}(1-\cos A)}$,　$\cos\dfrac{A}{2} = \sqrt{\dfrac{1}{2}(1+\cos A)}$

從ッテ $\tan\frac{A}{2}=\pm\sqrt{\frac{1-\cos A}{1+\cos A}}$

ヲ得ル、コノ公式デ角Aノ大サガ與ヘラレタ場合ハ $\sin\frac{A}{2}$, $\cos\frac{A}{2}$, $\tan\frac{A}{2}$ ノ符号ハ唯一ツニ決定サレル 然シ角Aガ與ヘラレズシテ $\cos A$ 値ノミ與ヘラレタトキハ コレ等ノ符号ハ確定スルコトヲ得ズシテ何レモ正負二ツノ値ヲ有スル、而シテ正弦餘弦ノ符号ハ任意ニ組合セテヨイガ正切ハ $\sin\frac{A}{2}/\cos\frac{A}{2}$ ニヨッテ符号ヲ定ムベキモノデアル 故ニ $\sin\frac{A}{2}$ $\cos\frac{A}{2}$, $\tan\frac{A}{2}$ ノ値ハ合セテ四組ノ解答ヲ得ル

(例題) 1. 22.5°, 67.5° ノ三角函数ノ値ヲ求ム.

(解) $\cos 45^\circ=\frac{1}{\sqrt{2}}$ デアル 故ニ

$$\sin 22.5^\circ=\sqrt{\frac{1-\frac{1}{\sqrt{2}}}{2}}=\frac{1}{2}\sqrt{2-\sqrt{2}}=\cos 67.5^\circ$$

$$\cos 22.5^\circ=\sqrt{\frac{1+\frac{1}{\sqrt{2}}}{2}}=\frac{1}{2}\sqrt{2+\sqrt{2}}=\sin 67.5^\circ$$

$$\tan 22.5^\circ = \frac{\sqrt{1-\frac{1}{\sqrt{2}}}}{\sqrt{1+\frac{1}{\sqrt{2}}}} = \sqrt{2}-1 = \cot 67.5^\circ$$

$$\cot 22.5^\circ = \frac{1}{\sqrt{2}-1} = \sqrt{2}+1 = \tan 67.5^\circ$$

(例題) 2. $\cos A = \frac{1}{2}$ デアルトキ, $\sin\frac{A}{2}$, $\cos\frac{A}{2}$, $\tan\frac{A}{2}$ ノ値ヲ求ム.

(解) 公式カラ,

$$\sin\frac{A}{2} = \pm\frac{1}{2}, \quad \cos\frac{A}{2} = \pm\frac{\sqrt{3}}{2}, \quad \tan\frac{A}{2} = \pm\frac{1}{\sqrt{3}}$$

仍テ求ムル値ハ次ノ四組デアル.

$$\left.\begin{aligned}\sin\frac{A}{2}&=\frac{1}{2}\\ \cos\frac{A}{2}&=\frac{\sqrt{3}}{2}\\ \tan\frac{A}{2}&=\frac{1}{\sqrt{3}}\end{aligned}\right\}\quad \left.\begin{aligned}\sin\frac{A}{2}&=\frac{1}{2}\\ \cos\frac{A}{2}&=-\frac{\sqrt{3}}{2}\\ \tan\frac{A}{2}&=-\frac{1}{\sqrt{3}}\end{aligned}\right\}\quad \left.\begin{aligned}\sin\frac{A}{2}&=-\frac{1}{2}\\ \cos\frac{A}{2}&=\frac{\sqrt{3}}{2}\\ \tan\frac{A}{2}&=-\frac{1}{\sqrt{3}}\end{aligned}\right\}\quad \begin{aligned}\sin\frac{A}{2}&=-\frac{1}{2}\\ \cos\frac{A}{2}&=-\frac{\sqrt{3}}{2}\\ \tan\frac{A}{2}&=\frac{1}{\sqrt{3}}\end{aligned}$$

§20 $\sin A$ ヲ知ッテ $\frac{1}{2}A$ ノ三角函数ヲ求ムルコト

$$1+\sin A = \left(\sin\frac{A}{2}+\cos\frac{A}{2}\right)^2, \quad 1-\sin A = \left(\sin\frac{A}{2}-\cos\frac{A}{2}\right)^2$$

$$\therefore \quad \sin\frac{A}{2}+\cos\frac{A}{2} = \pm\sqrt{1+\sin A}$$

$$\sin\frac{A}{2}-\cos\frac{A}{2} = \pm\sqrt{1-\sin A} \qquad (1)$$

$$\therefore \quad \sin\frac{A}{2} = \frac{1}{2}\left\{\pm\sqrt{1+\sin A}\pm\sqrt{1-\sin A}\right\}$$

$$\cos\frac{A}{2}=\frac{1}{2}\left\{\pm\sqrt{1+\sin A}\mp\sqrt{1-\sin A}\right\}$$

従ツテ

$$\tan\frac{A}{2}=\frac{\pm\sqrt{1+\sin A}\pm\sqrt{1-\sin A}}{\pm\sqrt{1+\sin A}\mp\sqrt{1-\sin A}}=\frac{1\pm\sqrt{1-\sin^2 A}}{\sin A}$$

コノ公式デ角 A ノ大サモ與ヘラレタ場合ハ $\sin\frac{A}{2}$, $\cos\frac{A}{2}$, $\tan\frac{A}{2}$ ノ符号ハ唯一ツニ定メルコトガ出来ル 即チ

$$\sin\frac{A}{2}+\cos\frac{A}{2}=\sqrt{2}\sin\left(\frac{A}{2}+\frac{\pi}{4}\right)$$

$$\sin\frac{A}{2}-\cos\frac{A}{2}=\sqrt{2}\sin\left(\frac{A}{2}-\frac{\pi}{4}\right)$$

デアレカラ $\frac{A}{2}+\frac{\pi}{4}$, $\frac{A}{2}-\frac{\pi}{4}$ ノ大サニヨツテ二式ノ符号、従ツテ(1)ニヨリ $\sqrt{1+\sin A}$, $\sqrt{1-\sin A}$ ノ符号ハ定マル 故ニ

$\sin\frac{A}{2}$, $\cos\frac{A}{2}$, $\tan\frac{A}{2}$

ノ[illegible]ニ確定スルコトガ出来ル

モシ A ガ與ヘラレズニ $\sin A$ ノ値ガ與ヘラレタトキハコレ等ノ符号ハ決定スルコトハ出来ナイデ一般ニ四組ノ値ヲ得ル

(例題) $\sin A=\frac{4}{5}$ ヲ知ツテ $\sin\frac{A}{2}$, $\cos\frac{A}{2}$,

$\tan\frac{A}{2}$ ノ値ヲ求ム。

(解) $\sin\frac{A}{2}=\frac{1}{2}\left\{\pm\sqrt{1+\frac{4}{5}}\pm\sqrt{1-\frac{4}{5}}\right\}$

$\therefore\ \sin\frac{A}{2}=\frac{2}{\sqrt{5}}$ 又ハ $\frac{1}{\sqrt{5}}$ 又ハ $-\frac{1}{\sqrt{5}}$ 又ハ $-\frac{2}{\sqrt{5}}$

又 $\cos\frac{A}{2}=\frac{1}{2}\left\{\pm\sqrt{1+\frac{4}{5}}\mp\sqrt{1-\frac{4}{5}}\right\}$

$\therefore\ \cos\frac{A}{2}=\frac{1}{\sqrt{5}}$ 又ハ $\frac{2}{\sqrt{5}}$ 又ハ $-\frac{2}{\sqrt{5}}$ 又ハ $-\frac{1}{\sqrt{5}}$

$$\tan\frac{A}{2}=\frac{1\pm\sqrt{1-\frac{16}{25}}}{\frac{4}{5}}=2 \text{ 又ハ } \frac{1}{2}$$

而シテ $\sin\frac{A}{2}$, $\cos\frac{A}{2}$ ノ値ハ複符号ヲ同順ニトツテ組合セ, $\tan\frac{A}{2}$ ノ値ハ $\sin\frac{A}{2}/\cos\frac{A}{2}$ ニヨツテ定メル. 仍テ次ノ四組ノ値ヲ得ル

$$\left.\begin{aligned}\sin\frac{A}{2}&=\frac{2}{\sqrt{5}}\\ \cos\frac{A}{2}&=\frac{1}{\sqrt{5}}\\ \tan\frac{A}{2}&=2\end{aligned}\right\}\quad
\left.\begin{aligned}\sin\frac{A}{2}&=\frac{1}{\sqrt{5}}\\ \cos\frac{A}{2}&=\frac{2}{\sqrt{5}}\\ \tan\frac{A}{2}&=\frac{1}{2}\end{aligned}\right\}\quad
\left.\begin{aligned}\sin\frac{A}{2}&=-\frac{1}{\sqrt{5}}\\ \cos\frac{A}{2}&=-\frac{2}{\sqrt{5}}\\ \tan\frac{A}{2}&=\frac{1}{2}\end{aligned}\right\}\quad
\left.\begin{aligned}\sin\frac{A}{2}&=-\frac{2}{\sqrt{5}}\\ \cos\frac{A}{2}&=-\frac{1}{\sqrt{5}}\\ \tan\frac{A}{2}&=2\end{aligned}\right\}$$

モシ $\sin A=\frac{4}{5}$ ヲ満足スル角ノ一ツヲ $486°52'$ トスルト $\frac{A}{2}$ ハ $243°26'$ トナリ $\frac{A}{2}+45°$ ハ $288°26'$, $\frac{A}{2}-45°$ ハ $198°26'$ トナル 故ニ

$$\sin\frac{A}{2}=\frac{1}{2}\left\{-\sqrt{1+\frac{4}{5}}-\sqrt{1-\frac{4}{5}}\right\}=-\frac{2}{\sqrt{5}}$$

$$\cos\frac{A}{2}=\frac{1}{2}\left\{-\sqrt{1+\frac{4}{5}}+\sqrt{1-\frac{4}{5}}\right\}=-\frac{1}{\sqrt{5}}$$

$$\tan\frac{A}{2}=2$$

(例題) 2　$2\sin A=\sqrt{1+\sin 2A}-\sqrt{1-\sin 2A}$ ナル等式ガ成立スルトキ，角Aノ存在スル範圍ヲ決定セヨ，

(解) 與ヘラレタ等式デ $\sqrt{1+\sin 2A}$ ハ正デアルカラ $\sin\left(A+\frac{\pi}{4}\right)$ ハ正デ，$-\sqrt{1-\sin 2A}$ ハ負デアルカラ $\sin\left(A-\frac{\pi}{4}\right)$ ハ負デアル　故ニ $A+\frac{\pi}{4}$ ハ第一乃至第二象限内ノ角デ，$A-\frac{\pi}{4}$ ハ第三乃至第四象限内ノ角デアラネバナラヌ。

$$\therefore\quad (2n+1)\pi>A+\frac{\pi}{4}>2n\pi$$

即チ　$$2n\pi+\frac{3\pi}{4}>A>2n\pi-\frac{\pi}{4}\qquad(1)$$

又　$$2n\pi>A-\frac{\pi}{4}>(2n-1)\pi$$

即チ　$$2n+\frac{\pi}{4}>A>2n\pi-\frac{3\pi}{4}\qquad(2)$$

トナル．而シテコノ(1)(2)ヲ同時ニ成立セシメルAハ結局

$$2n\pi+\frac{\pi}{4}>A>2n\pi-\frac{\pi}{4}$$

ブ大ケレバナラヌ. コレヲ求ムルAノ範囲デアル

§21 $\tan A$ ヲ知ッテ $\frac{1}{2}A$ ノ三角函数ヲ求ムルコト

$$\tan A = \frac{2\tan\frac{A}{2}}{1-\tan^2\frac{A}{2}}$$ ヨリ $$\tan\frac{A}{2} = \frac{-1\pm\sqrt{1+\tan^2 A}}{\tan A}$$

又 $\sin\frac{A}{2} = \pm\frac{\tan\frac{A}{2}}{\sqrt{1+\tan^2\frac{A}{2}}}$, $\cos\frac{A}{2} = \pm\frac{1}{\sqrt{1+\tan^2\frac{A}{2}}}$

コノ公式デ角Aノ与ヘラレタトキハ $\tan\frac{A}{2}$ 等ノ値ハ唯一ツニ定メラレル. モシAガ与ヘラレズニ $\tan A$ ノ値ガ与ヘラレタトキハ $\tan\frac{A}{2}$ ノ値ハ二ツ求マリ, 従ッテ $\sin\frac{A}{2}$, $\cos\frac{A}{2}$, $\tan\frac{A}{2}$ ノ値ハ合セテ四組求メ得ラレル

(例題) $\tan A = \frac{1}{\sqrt{3}}$ ヲ与ヘテ $\sin\frac{A}{2}$, $\cos\frac{A}{2}$, $\tan\frac{A}{2}$ ノ値ヲ求ム.

(解) $$\tan\frac{A}{2} = \frac{-1\pm\sqrt{1+\frac{1}{3}}}{\frac{1}{\sqrt{3}}} = -\sqrt{3}\pm 2$$

$$\sin\frac{A}{2} = \pm\frac{-\sqrt{2}\pm\sqrt{6}}{4},\quad \cos\frac{A}{2} = \pm\frac{\sqrt{6}\pm\sqrt{2}}{4}$$

故ニ

$$\left.\begin{aligned}\tan\frac{A}{2}&=-\sqrt{3}+2\\ \sin\frac{A}{2}&=\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}\\ \cos\frac{A}{2}&=\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}\end{aligned}\right\}\qquad \left.\begin{aligned}\tan\frac{A}{2}&=-\sqrt{3}+2\\ \sin\frac{A}{2}&=-\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}\\ \cos\frac{A}{2}&=-\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}\end{aligned}\right\}$$

$$\left.\begin{aligned}\tan\frac{A}{2}&=-\sqrt{3}-2\\ \sin\frac{A}{2}&=-\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}\\ \cos\frac{A}{2}&=\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}\end{aligned}\right\}\qquad \left.\begin{aligned}\tan\frac{A}{2}&=-\sqrt{3}-2\\ \sin\frac{A}{2}&=\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}\\ \cos\frac{A}{2}&=-\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}\end{aligned}\right\}$$

モシ $A=690°$ トスルト $\frac{A}{2}=345°$ デアル

故ニ $\tan\frac{A}{2}=-\sqrt{3}-\sqrt{2}$, $\sin\frac{A}{2}=-\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$

$$\cos\frac{A}{2}=\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$$

§21 三角函数ノ項ヨリ成ル級数ノ和

公式 $\quad 2\cos\alpha\sin\beta=\sin(\alpha+\beta)-\sin(\alpha-\beta)$

ヲ利用シテ角ガ等差級数ヲナス餘弦ノ級数ノ和ノ公式ヲ求メ、ソレヨリ同ジク正弦ノ級数ノ和ノ公式ヲ導キ出スコトヲ得、

即チ、

$$2\cos(\alpha+k\beta)\sin\frac{\beta}{2}=\sin\left(\alpha+\frac{2k+1}{2}\beta\right)-\sin\left(\alpha+\frac{2k-1}{2}\beta\right)$$

ニ於テ順次 $k=0, 1, 2, \cdots\cdots, n-1$ ノ置キテ得タルn個ノ式ヲ並々相加ヘ合セノハ

$$2\{\cos\alpha+\cos(\alpha+\beta)+\cdots\cdots+\cos(\alpha+\overline{n-1}\beta)\}\sin\frac{\beta}{2}$$

$$=\sin\left(\alpha+\frac{2n-1}{2}\beta\right)-\sin\left(\alpha-\frac{\beta}{2}\right)$$

$$=2\cos\left(\alpha+\frac{n-1}{2}\beta\right)\sin\frac{n}{2}\cdot\beta$$

故ニ $\sin\frac{\beta}{2}\neq 0$ ナルトキハ

$$\cos\alpha+\cos(\alpha+\beta)+\cdots\cdots+\cos(\alpha+\overline{n-1}\beta)$$

$$=\frac{\cos\left(\alpha+\frac{n-1}{2}\beta\right)\sin\frac{n}{2}\beta}{\sin\frac{\beta}{2}} \qquad (1)$$

上記(1)ニ於テ α ノ代リ $=\frac{\pi}{2}+\alpha$ ノ置キテ後ソ両辺ノ符号ヲ変スレバ、

$$\sin\alpha+\sin(\alpha+\beta)+\cdots\cdots+\sin(\alpha+\overline{n-1}\beta)$$

$$=\frac{\sin\left(\alpha+\frac{n-1}{2}\beta\right)\sin\frac{n}{2}\beta}{\sin\frac{\beta}{2}} \qquad (2)$$

特ニ(1)及ビ(2)ニ於テ $\beta=\alpha$ トオケバ

$$\cos\alpha+\cos 2\alpha+\cdots\cdots+\cos n\alpha=\frac{\sin\frac{n}{2}\alpha\cos\frac{n+1}{2}\alpha}{\sin\frac{\alpha}{2}} \qquad (3)$$

$$\sin\alpha+\sin 2\alpha+\cdots\cdots+\sin n\alpha=\frac{\sin\frac{n}{2}\alpha\sin\frac{n+1}{2}\alpha}{\sin\frac{\alpha}{2}} \quad (4)$$

級數ノ各項ガ同名ノ函數ノ差ニ分タルヽ場合ニハ(1)ヲ求メタルト類似ノ方法ニヨリ其ノ級數和ヲ求メ得ルコトアリ。

例ハヾ

$$S=\operatorname{cosec}\alpha+\operatorname{cosec}2\alpha+\cdots\cdots+\operatorname{cosec}2^{n-1}\alpha$$

ヲ求ムルニ

$$\operatorname{cosec}\alpha=\cot\frac{\alpha}{2}-\cot\alpha$$

ヲ知ルトキハ此αヲ順次 $2\alpha,\ 2^2\alpha\cdots\cdots 2^{n-1}\alpha$ ニテ置キカ

$$\operatorname{cosec}2\alpha=\cot\alpha-\cot 2\alpha$$

$$\operatorname{cosec}2^2\alpha=\cot 2\alpha-\cot 2^2\alpha$$

$$\text{— — — — — — — — — —}$$

$$\text{— — — — — — — — — —}$$

$$\operatorname{cosec}2^{n-1}\alpha=\cot 2^{n-2}\alpha-\cot 2^{n-1}\alpha$$

以上n個ノ式ヲ辺々相加ヘテ

$$S=\cot\frac{\alpha}{2}-\cot 2^{n-1}\alpha$$

(附言) 公式(i)ノ幾何学的証明法ハ次ノ如シ;

単位円ノ周上ニ等間隔ニ順次点 $A_0, A_1, \cdots\cdots, A_n$ ヲトリ相隣レル二点間ノ弧ニ対スル中心角ヲスベテ β ニ等シクス　但シ β ノ正負ニヨリ点ノ排列ノ順序ハ左回リ又ハ右回リトス

直線 A_0X ヲヒキ之ニ対スル弦 A_0A_1 ノ傾角ヲ α ナランム、

A_0X ノ上ニ投スル屈折線 $A_0A_1 \cdots A_n$ ノ射影ハ弦 A_0A_n ノ射影ニ等シ、然ルニ弦 A_0A_1, A_1A_2, $\cdots$, $A_{n-1}A_n$ ノ長サハスベテ $2\sin\frac{\beta}{2}$ ニ等シク, A_0X ニ対スル傾角ハソレゾレ $\alpha, \alpha+\beta, \cdots, \alpha+(n-1)\beta$ ナリ. 又弦 A_0A_n ノ長サハ $2\sin\frac{n\beta}{2}$ ニ等シク, A_0X ニ対スル傾角ハ $\alpha+\frac{n-1}{2}\beta$ ナリ

故ニ

$$2\sin\frac{\beta}{2}\{\cos\alpha+\cos(\alpha+\beta)+\cdots+\cos(\alpha+\overline{n-1}\,\beta)\}$$

$$=2\sin\frac{n\beta}{2}\cos\left(\alpha+\frac{n-1}{2}\beta\right).$$ (証明終)

練習問題

次ノ級數ノn項ノ和ヲ求メヨ。1〜3

1 (1) $\cos\alpha+\cos 3\alpha+\cos 5\alpha+\cdots\cdots$

(2) $\sin\alpha+\sin 3\alpha+\sin 5\alpha+\cdots\cdots$

2 (1) $\sin\theta\cos\theta+\sin 2\theta\cos 2\theta+\sin 3\theta\cos 3\theta+\cdots\cdots$

(2) $\sin\theta\sin 3\theta+\sin 2\theta\sin 6\theta+\sin 4\theta\sin 12\theta+\cdots\cdots$

3 $\cos^2\alpha+\cos^2(\alpha+\beta)+\cos^2(\alpha+2\beta)+\cdots\cdots$

又此結果ヨリ$\cos$ノ代リニ$\sin$トシタル場合ノ結果ヲ導キ出セ。

4 公式(1)(2)ニ於テβノ代リニ$\pi+\beta$トオキ次ノ級數ノ和ノ公式ヲ作レ

(1) $\cos\alpha-\cos(\alpha+\beta)+\cos(\alpha+2\beta)-\cdots+(-1)^{n-1}\cos(\alpha+\overline{n-1}\beta)$

(2) $\sin\alpha-\sin(\alpha+\beta)+\sin(\alpha+2\beta)-\cdots+(-1)^{n-1}\sin(\alpha+\overline{n-1}\beta)$

5、$\tan\theta=\cot\theta-2\cot 2\theta$ヲ用ヒテ次ノ級數ノ$n$項ノ和ヲ求メヨ、

(1) $\tan\theta+2\tan 2\theta+2^2\tan 2^2\theta+\cdots\cdots$

(2) $\tan\theta+\frac{1}{2}\tan\frac{\theta}{2}+\tan\frac{\theta}{2^2}+\cdots\cdots$

5 円周ノ n 等分点ヲ $A_1, A_2, \cdots\cdots, A_n$ トセハ半径 $OA_1, OA_2, \cdots\cdots, OA_n$ ノ任意ノ一直径上ニ投ズル射影ノ和ハ0ナルコトヲ証セヨ、

第三章 逆三角函数

§23 逆三角函数

$\sin\theta = a$ ナルトキ角 θ ヲ名ヅケテ a ノ逆正弦トイヒ，コレヲ $\sin^{-1}a$ 又ハ $\mathrm{arc}\sin a$ デ表ハス．

従ツテ $\sin\theta = a$ ト $\theta = \sin^{-1}a$ トハ全ク同一ノ事実ヲ表ハス．同様ニ，

$\cos\theta = a$ ナルトキハ $\theta = \cos^{-1}a$ 又ハ $\theta = \mathrm{arc}\cos a$

$\tan\theta = a$ ナルトキハ $\theta = \tan^{-1}a$ 又ハ $\theta = \mathrm{arc}\tan a$

$\cot\theta = a$ ナルトキハ $\theta = \cot^{-1}a$ 又ハ $\theta = \mathrm{arc}\cot a$

$\sec\theta = a$ ナルトキハ $\theta = \sec^{-1}a$ 又ハ $\theta = \mathrm{arc}\sec a$

$\mathrm{cosec}\,\theta = a$ ナルトキハ $\theta = \mathrm{cosec}^{-1}a$ 又ハ $\theta = \mathrm{arc}\,\mathrm{cosec}\,a$

デ表ハシ此等ヲ夫々 a ノ逆余弦，逆正切，逆余切，逆正割，逆余割 トイヒ總称シテ a ノ逆三角函数トイフ

次ニ $\sin\theta = a$ ナルトキ，θ ヲ与ヘルト a ノ値ハ唯一ツニ定マルモ逆ニ a ヲ与ヘタトキニハ，θ 即チ $\sin^{-1}a$ ノ値ハ無数ニ求メラレル 例ヘハ

$\sin^{-1}\frac{1}{2}$ ヲ考ヘルニ $\sin^{-1}\frac{1}{2} = \theta$ トオケバ

$\sin\theta=\frac{1}{2}$ デアルガ故ニ $\theta=n\pi+(-1)^n\frac{\pi}{6}$ ヨリ得ラルθハ總テ求メル角デアル、$\cos^{-1}a$, $\tan^{-1}a$ 等ニツイテモ同樣デアル、

コノヤウニ $\sin\theta$, $\cos\theta$, $\tan\theta$ 等ハθノ値ヲ與ヘルト唯一ツノ値ガ定メラレルガ故ニ斯カル函數ヲ**單値函數**トイヒ コレニ反シ $\sin^{-1}a$ $\cos^{-1}a$ $\tan^{-1}a$ 等ノ如キ函數ハ a ノ一ツノ値ニ對シテ無數ニ多クノ値ガ求メラレル カカル函數ヲ**多値函數**トイフ

今 $-\frac{\pi}{2}\leqq\sin^{-1}a\leqq\frac{\pi}{2}$, $-\frac{\pi}{2}\leqq\operatorname{cosec}^{-1}a\leqq\frac{\pi}{2}$

$0\leqq\cos^{-1}a\leqq\pi$, $0\leqq\sec^{-1}a\leqq\pi$

$-\frac{\pi}{2}\leqq\tan^{-1}a\leqq\frac{\pi}{2}$ $-\frac{\pi}{2}\leqq\cot^{-1}a\leqq\frac{\pi}{2}$

ナル制限ヲ設ケルト a ヲ與ヘレバ $\sin^{-1}a$ $\cos^{-1}a$ 等ノ値モ亦一ツニ定メルコトガ出來ル 而シテコノ制限内ノ値ヲ夫々 $\sin^{-1}a$ $\cos^{-1}a$ 等ノ主値ト稱ヘル 逆三角函數ノ主値以外ノ値ヲ表ハスコトハ甚ダ稀デアル 依テ以後 $\sin^{-1}a$ $\cos^{-1}a$ 等ハ

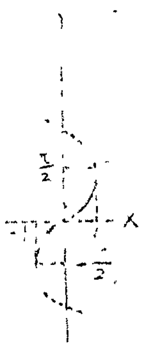
主値ノミヲ表ハスモノト定メル。カク規約ヲ設タルト逆三角函数モ亦単値函数トシテ取扱フコトガ出来ル。

例ヘバ

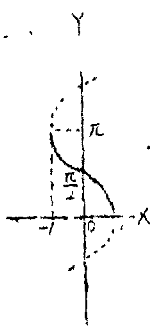
$$\left.\begin{array}{l}\sin^{-1}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)=\frac{\pi}{3},\ \sin^{-1}(-1)=-\frac{\pi}{2},\ \cos^{-1}\left(-\frac{1}{2}\right)=\frac{2\pi}{3}\\ \cos^{-1}(\quad)=\pi,\quad \tan^{-1}(-1)=-\frac{\pi}{4},\ \sec^{-1}(\sqrt{2})=\frac{\pi}{4}\end{array}\right\}\text{ノ如シ.}$$

注意3　$\sin^{-1}a$, $\cos^{-1}a$, $\tan^{-1}a$ ノぐらふヲ画ケバ次ノ通リデアル。但実線ハ主値ヲ表ハス曲線ノ分枝デ、点線ハ主値以外ヲ表ハス曲線ノ分枝デアル。

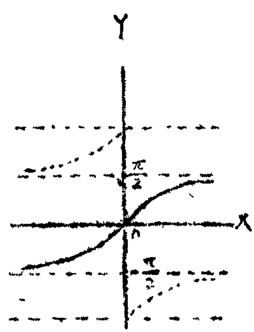
$\sin^{-1}a$ ノぐらふ



$\cos^{-1}a$ ノぐらふ



$\tan^{-1}a$ ノぐらふ



注意 II　逆三角函数ノ定義カラ次ノ事ハ明白デアル.

$$\sin(\sin^{-1}a)=a,\quad \cos(\cos^{-1}a)=a,\quad \tan(\tan^{-1}a)=a$$

$$\sin^{-1}(\sin\theta)=\theta,\quad \cos^{-1}(\cos\theta)=\theta,\quad \tan^{-1}(\tan\theta)=\theta$$

§24. 逆三角函数相互ノ關係

三角函数及ビ逆三角函数ノ定義ニヨツテ或ル三角函数ヲ他ノ逆三角函数デ表ハスコトカ出来ル

(例題)1　$\sin^{-1}x$ ヲ他ノ逆三角函数デ表ハセ

但シ　$0\leqq x\leqq 1$

(解)　$\sin^{-1}x=\theta$ トオケバ $\sin\theta=x$ デアル

シテ　$0\leqq x\leqq 1$ デアルガ故ニ　$0\leqq\theta\leqq\frac{\pi}{2}$ デアリ

仍テ　$\cos\theta=\sqrt{1-x^2}$　　$\therefore\ \theta=\cos^{-1}\sqrt{1-x^2}$

$$\tan\theta=\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}\qquad \therefore\ \theta=\tan^{-1}\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}$$

同様ニ $\cot\theta=\frac{\sqrt{1-x^2}}{x}$, $\sec=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$,

$\operatorname{cosec}\theta=\frac{1}{x}$ デアルヲ以テ

$$\therefore\ \sin^{-1}x=\cos^{-1}\sqrt{1-x^2}=\tan^{-1}\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}=\cot^{-1}\frac{\sqrt{1-x^2}}{x}$$

$$=\sec^{-1}\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}=\mathrm{cosec}^{-1}\frac{1}{x}$$

練　習　問　題

1. 次ノ關係式ヲ証明セヨ

(i) $\cos^{-1}x=\sin^{-1}\sqrt{1-x^2}=\tan^{-1}\frac{\sqrt{1-x^2}}{x}=\cot^{-1}\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}$

$=\sec^{-1}\frac{1}{x}=\mathrm{cosec}^{-1}\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$　但 $0\leqq x\leqq 1$

(ii) $\tan^{-1}x=\sin^{-1}\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}=\cos^{-1}\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}=\cot^{-1}\frac{1}{x}$

$=\sec^{-1}\sqrt{1+x^2}=\mathrm{cosec}^{-1}\frac{\sqrt{1+x^2}}{x}$　但 $x\geqq 0$

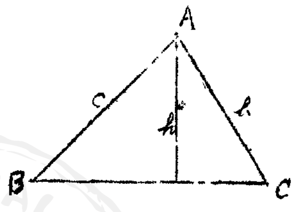
2 $\sin^{-1}x+\cos^{-1}x=\frac{\pi}{2}$ ナルコトヲ証明セヨ　但 $|x|<1$,

$\sin^{-1}\frac{4}{5}+\sin^{-1}\frac{5}{13}+\sin^{-1}\frac{16}{65}=\frac{\pi}{2}$ ナルコトヲ証明セヨ．但角ハ總テ正ノ鋭角ヲ表ハスモノトスル

第四章　三角形ノ辺ト角トノ関係及ビ其應用

§25　正弦法則，餘弦法則　正切法則

(1) 正弦法則



頂点AヨリヒケルR高サヲhトスレバ

$$\frac{h}{c}=\sin B \qquad \frac{h}{b}=\sin C$$

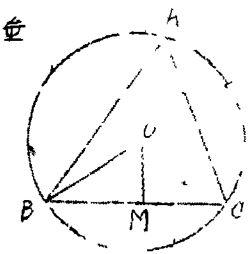
$$\frac{b}{\sin B}=\frac{c}{\sin C}$$

文字ヲ交換シテ又 $\frac{a}{\sin A}=\frac{c}{\sin C}$ ヲ得ベキコト明カナリ。即チ次ノ公式ヲ得タリ

$$\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}=\frac{c}{\sin C} \qquad (1)$$

コレヲ正弦法則トイフ。

此公式ハ又次ノ如クシテ證セラル



三角形ノ外心OヨリBCニ垂線OMヲヒケバ

$$BC=2OB\sin BOM$$

即チ　$a=2R\sin A$

但シRハ外接円ノ半徑ヲ表ハス.

文字ヲ交換シテ次ノ式ヲ得.

$$b = 2R\sin B \qquad c = 2R\sin C$$

$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C} = 2R \qquad (1)'$$

(2) 餘弦法則

辺 DC 上ニ投ズル BA, AC ノ射影ノ和ハ BC

ニ等

$$c\cos B + b\cos C = a$$

文字ノ交換シテ信号ノ公式ヲ得

$$\begin{cases} c\cos B + b\cos C = a \\ a\cos C + c\cos A = b \\ b\cos A + a\cos B = c \end{cases} \qquad (2)$$

コレヲ第一餘弦法則トイフ.

コレヲ $\cos A$, $\cos B$ $\cos C$ ニ就テ解ケバ

$$\begin{cases} \cos A = \dfrac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}, \\ \cos B = \dfrac{c^2 + a^2 - b^2}{2ca} \\ \cos C = \dfrac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab} \end{cases} \qquad (3)$$

或ハコレヲ書キ換ヘテ

$$\left\{\begin{array}{l} a^2=b^2+c^2-2bc\cos A \\ b^2=c^2+a^2-2ca\cos B \\ c^2=a^2+b^2-2ab\cos C \end{array}\right. \qquad (3)'$$

コレヲ第二餘弦法則トイフ

(3) 正切法則

正弦法則ニヨリ

$$\frac{a-b}{a+b}=\frac{\sin A-\sin B}{\sin A+\sin B}$$

$$=\frac{2\sin\frac{A-B}{2}\cos\frac{A+B}{2}}{2\sin\frac{A+B}{2}\cos\frac{A-B}{2}}=\frac{\tan\frac{A-B}{2}}{\tan\frac{A+B}{2}}$$

文字ヲ变換シテ同樣ナル式ナホ二個シ得、即チ

$$\left\{\begin{array}{l} \dfrac{a-b}{a+b}=\dfrac{\tan\frac{A-B}{2}}{\tan\frac{A+B}{2}} \\[2ex] \dfrac{b-c}{b+c}=\dfrac{\tan\frac{B-C}{2}}{\tan\frac{B+C}{2}} \\[2ex] \dfrac{c-a}{c+a}=\dfrac{\tan\frac{C-A}{2}}{\tan\frac{C+A}{2}} \end{array}\right. \qquad (4)$$

コレヲ正切法則トイフ

練習問題

1. $\triangle ABC$ デ $\dfrac{a^2-b^2}{c^2}=\dfrac{\sin(A-B)}{\sin C}$ ナルコトヲ証セヨ。

2. $\triangle ABC$ デ $\dfrac{a-c\cos B}{b-c\cos A}=\dfrac{b}{a}$ ナルコトヲ証セヨ

3. $a=10$, $B=45^\circ$, $C=60^\circ$ ナル三角形ノ他ノ二辺ノ長サヲ求ム。

4. $A=60^\circ$ $B=45^\circ$ ナル三角形ノ三辺ノ比ヲ求ム。

5. 三辺ガ m, n, $\sqrt{m^2-mn+n^2}$ ナルトキ A, B, C ノ中大サガ二番目ニ當ル角ノ大サ如何　但 mキガトスル

6. 三辺ガ m^2+m+1, m^2-1, $2m+1$ ナルトキ最大角ヲ求ム。

§26 邊ノ項ニテ表ハセル半角ノ三角函數

前節ノ公式(3)′ニ於テ $\cos A$ ヲ $\sin\frac{A}{2}$ 又ハ $\cos\frac{A}{2}$ ニテ表ハシソレゾレ次ノ式ヲ得。

$$a^2=b^2+c^2-2bc+4bc\sin^2\frac{A}{2},$$

$$a^2=b^2+c^2+2bc-4bc\cos^2\frac{A}{2}.$$

コレヨリ

$$4bc\sin^2\frac{A}{2}=a^2-(b-c)^2=(a-b+c)(a+b-c)$$

及ビ $4bc\cos^2\frac{A}{2}=(b+c)^2-a^2=(a+b+c)(-a+b+c)$

三角形ノ半周ヲ s ニテ表ハセバ

$$a+b+c=2s,$$

$-a+b+c=2(s-a),\ a-b+c=2(s-b)\ \ a+b-c=2(s-$

トナルユヘ

$$bc\sin^2\frac{A}{2}=(s-b)(s-c)\quad bc\cos^2\frac{A}{2}\cdot s(s-a)$$

$\sin\frac{A}{2}$ 及ビ $\cos\frac{A}{2}$ ノ常ニ正ナルコトニ注意シ

$$\sin\frac{A}{2}=\sqrt{\frac{(s-b)(s-c)}{bc}},\quad \cos\frac{A}{2}=\sqrt{\frac{s(s-a)}{bc}}$$

文字ヲ交換シ $\frac{B}{2}$, $\frac{C}{2}$ ニ對シテモ同樣ノ式ヲ

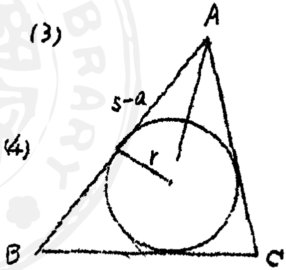
得　即チ

$$\begin{cases} \sin\frac{A}{2}=\sqrt{\frac{(s-b)(s-c)}{bc}} \\ \sin\frac{B}{2}=\sqrt{\frac{(s-c)(s-a)}{ca}} \\ \sin\frac{C}{2}=\sqrt{\frac{(s-a)(s-b)}{ab}} \end{cases} \qquad (1)$$

$$\begin{cases} \cos\frac{A}{2}=\sqrt{\frac{s(s-a)}{bc}} \\ \cos\frac{B}{2}=\sqrt{\frac{s-(s-b)}{ca}} \\ \cos\frac{C}{2}=\sqrt{\frac{s(s-c)}{ab}} \end{cases} \qquad (2)$$

(1)ト(2)トヨリ直チニ

$$\begin{cases} \tan\frac{A}{2}=\sqrt{\frac{(s-b)(s-c)}{s(s-a)}} \\ \tan\frac{B}{2}=\sqrt{\frac{(s-c)(s-a)}{s(s-a)}} \\ \tan\frac{C}{2}=\sqrt{\frac{(s-a)(s-b)}{s(s-c)}} \end{cases} \qquad (3)$$



或ハ

$$\begin{cases} \tan\frac{A}{2}=\frac{r}{s-a} \\ \tan\frac{B}{2}=\frac{r}{s-b} \\ \tan\frac{C}{2}=\frac{r}{s-c} \end{cases} \qquad (4)$$

但シ　$r=\sqrt{\frac{(s-a)(s-b)(s-c)}{s}}$

練　習　問　題

$\triangle ABC$ ニ於テ次ノ等式ヲ證明セヨ

(i) $a\cos^2\frac{C}{2}+c\cos^2\frac{A}{2}=s$

(ii) $(s-a)\tan\frac{A}{2}=(s-b)\tan\frac{B}{2}=(s-c)\tan\frac{C}{2}$

(iii) $\dfrac{a+b}{a+b+c}=\dfrac{1}{2}\left(1+\tan\dfrac{A}{2}\tan\dfrac{B}{2}\right)$

(iv) $bc\cos^2\dfrac{A}{2}+ac\cos^2\dfrac{B}{2}+ab\cos^2\dfrac{C}{2}=s^2$

2 $a\sin^2\dfrac{C}{2}+c\sin^2\dfrac{A}{2}=\dfrac{b}{2}$ ナルトキハ a, b, c ハ等差級数ヲナスコトヲ証明セヨ.

§27 三角形ノ面積ヲ表ハス公式

三角形ノ面積 S ヲ表ハス公式ハ甚ダ多ノ中,代表的ト思ハルモノ幾ツカヲ揭ゲン

(1) 二辺ト其夾角トヲ知レル場合

例ヘバ b, c A ヲ知レリトス、 c ヲ底辺, h ヲコレニ対スル高サトセバ

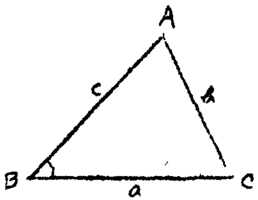
$$S=\frac{1}{2}ch \quad 及ビ \quad h=b\sin A$$

$$S=\frac{1}{2}bc\sin A \qquad (1)$$

文字ヲ交換シテ同様ナル式ナホ二個ヲ得

(2) 二角ト其夾辺トヲ知レル場合

例ヘバ B, C, a ヲ知レリトス 此場合ニハ A ヲモ知ルコトヲ得 然ルトキハ正弦法則ヨリ



$$b = a\frac{\sin B}{\sin A}$$

コノ b ノ式ヲ前條ニ得タル

$$S = \frac{1}{2}ab\sin C$$

ニ代入スレバ

$$S = \frac{a^2\sin B\sin C}{2\sin A} \quad \left(= \frac{b^2\sin C\sin A}{2\sin B} = \frac{c^2\sin A\sin B}{2\sin C}\right)$$

文字ヲ交換シテ同様ナル式ナホ二個ヲ得

(3) 三辺ヲ知レル場合.

公式(1)ヲ $\qquad S = bc\sin\frac{A}{2}\cos\frac{A}{2}$

ノ書キ換ヘコレニ前節(1)及ビ(2)ノ第一式ヲ代入スレハ

$$S = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)} \qquad (3)$$

但シ $\qquad 2s = a + b + c$

此ヨク知ラレタル公式ハ既ニ紀元前約125年ノ昔ぎりしやノ人へろん (Heron) ノ發見セルモノナリトイフ.

(4) 其他ノ場合

§25ノ正弦法則 (1)' ヨリ得タル、

$\sin A = \dfrac{a}{2R}$ 又ハ $b = 2R\sin B$ $c = 2R\sin C$

ヲ上ノ (1) ニ代入シテソレゾレ次式ヲ得、

$$S = \frac{abc}{4R} \tag{4}$$

$$S = 2R^2 \sin A \sin B \sin C \tag{5}$$

即チ外接円ノ半径ト三辺又ハ三角ノ正弦トニヨリ面積ヲ表ハシ得タリ、

次ニ内切円ノ半径ヲ r 傍切円ノ半径ヲ r_1, r_2, r_3 トスレバ

$$2S = ar + br + cr = 2rs$$

$$2S = br_1 + cr_1 - ar_1 = 2r_1(s-a)$$

ナルコト幾何学的ニ容易ニ証セラル 即チ

$$S = rs \tag{6}$$

$$S = r_1(s-a) \tag{7}$$

文字ヲ交換シ r_2, r_3 ニ対シテモ同様ノ式ヲ得

コレ内切円又ハ傍切円ノ半径ト三辺トヲ以テ面積ヲ表ハスモノナリ、

練 習 問 題

1　三角形ノ面積ヲ表ハス次ノ公式ヲ證セヨ，

(1)　$S = s(s-a)\tan\frac{A}{2}$，

(2)　$S = (s-a)^2\tan\frac{A}{2}\cot\frac{B}{2}\cot\frac{C}{2}$

(3)　$S = \frac{1}{4}(a^2\sin 2B + b^2\sin 2A)$

(4)　$S = \frac{1}{4}(a^2\cot A + b^2\cot B + c^2\cot C)$

(5)　$S = Rr(\sin A + \sin B + \sin C)$

角三角形ノ斜辺ガ c ナルトキ $S = s(s-c)$

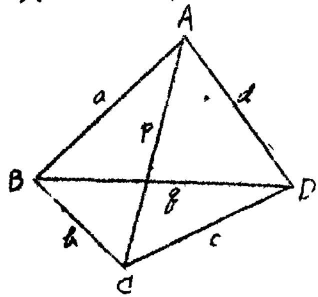
ルコトヲ示セ

3　底辺 a 頂角 A ナル二等辺三角形ノ面積ノ公式ヲ作レ

4　底辺ト他ノ二辺ノ和トガ一定ナル三角形中二等辺ナルモノガ面積最大ナルコトヲ證セヨ（公式(3)應用）

5　三角形ノ面積ト其内切円ノ面積トノ比ハ各ノ周ノ比ニ等シキコトヲ證セヨ（公式(6)應用）

§28 四辺形ノ面積ヲ表ス公式



四辺形 ABCD ノ辺ヲ a, b, c, d; 角ヲ A, B, C, D; 対角線ヲ p, q; 面積ヲ S ニテ表ハス

又簡単ノタメニ

$$a+b+c+d=2s,$$

$$A+C=2\alpha, \quad B+D=2\beta$$

ト置ク　マヅ

$$q^2=a^2+d^2-2ad\cos A=b^2+c^2-2bc\cos C$$

ヨリ $2ad\cos A-2bc\cos C=a^2-b^2-c^2+d^2$

ヲ得　マタ別ニ

$$2ad\sin A+2bc\sin C=4S$$

上ノ二式ヲ自乗シテ辺辺相加フレバ

$$4a^2d^2+4b^2c^2-8abcd\cos 2\alpha=(a^2-b^2-c^2+d^2)^2+16S^2$$

ココニ於テ $\cos 2\alpha$ ヲ $2\cos^2\alpha-1$ ニテ置キ換フレ

Sヲ斯キ形ニ導キ来スコトヲ得. 即チ、

$$16S^2=4a^2d^2+4b^2c^2-8abcd(2\cos^2\alpha-1)-(a^2-b^2-c^2+d^2)^2$$

$$=4(ad+bc)^2-(a^2-b^2-c^2+d^2)^2-16abcd\cos^2\alpha$$

$$=(-a+b+c+d)(a-b+c+d)(a+b-c+d)(a+b+c-d)$$

$$-16abcd\cos^2\alpha$$

$$=16(s-a)(s-b)(s-c)(s-d)-16abcd\cos^2\alpha$$

$$S=\sqrt{(s-a)(s-b)(s-c)(s-d)-abcd\cos^2\alpha} \qquad (1)$$

$\alpha+\beta=180°$ ナルユヘ $\cos\alpha$ ノ代リニ $\cos\beta$ トシテモヨシ　特ニ四辺形ガ円ニ内接スルトキハ $\cos\alpha=0$ ナルユヘ

$$S=\sqrt{(s-a)(s-b)(s-c)(s-d)} \qquad (2)$$

此ノ公式ハ六世紀ノ印度ノ数学者ぶらーめぐぷた(Brahmagupta)ノ発見セル所ナリト云フ.

四辺形ガ円ニ外切スルトキハ $a+c=b+d=s$ ナルユヘ

$$s-a=c,\quad s-b=d,\quad s-c=a,\quad s-d=b$$

$$S=\sqrt{abcd}\,\sin\alpha \qquad (3)$$

練　習　問　題

1. 四辺形 ABCD ニ於テ次ノ恒等式ヲ証セヨ.

(1) $\sin A+\sin B+\sin C+\sin D=4\sin\frac{A+B}{2}\sin\frac{A+C}{2}\sin\frac{A+D}{2}$.

(2) $\cos A+\cos B+\cos C+\cos D=4\cos\frac{A+B}{2}\cos\frac{A+C}{2}\cos\frac{A+D}{2}$

2 四辺ノ長サ一定ナル四辺形ノ面積ハ円ニ内接スルトキ最大トナルコトヲ証セヨ.

3. 四辺形 ABCD ガ円ニ外切スルトキニ他ノ円ニ内接スルトキハ其ノ面積ハ $\sqrt{abcd}$ ニ等シキコトヲ証セヨ.

4. 対角線ノ長サ p q 其夾角 φ ナル四辺形ノ面積ハ $\frac{1}{2}pq\sin\varphi$ ニ等シキコトヲ証セヨ.

第五章　三角形ノ解法ト其ノ應用

§29　三角形ヲ解クコト

三角形ノ三ツノ要素ノ中一辺ト残リノ要素ノ中ノ二ツトヲ知レバ計算ニヨリ他ノ要素ヲ求メルコトが出来ル。カク未知ノ要素ヲ求メルコトヲ三角形ヲ解クトイフ。尚一般ニ要素ニ限ラズ面積内切円ノ半径等三角形ノ形成ニ必要ナダケノモノヲ与ヘテ未知ノ要素等ヲ求メル場合ニモ三角形ヲ解クト称スル

§30　直角三角形ノ解法

本節デハ $\triangle ABC$ ニ於テ $C=90°$ トスル　而シテ直角三角形ノ解法ニハ次ノ四種ノ場合ガアル.

(I) 直角ノ一辺 a ト一鋭角 B トヲ知ル場合

公式　$A=90°-B,\quad c=\dfrac{a}{\cos B},\quad b=a\tan B$

(II) 斜辺 c ト一鋭角 A ヲ知ル場合

公式　$B=90°-A,\quad a=c\sin A\quad b=c\cos A$

(III) 斜辺 c ト他ノ一辺 a ヲ知ル場合

公式 $\sin A=\frac{a}{c}$, $B=90°-A$, $b=\sqrt{(c+a)(c-a)}$

(IV) 直角ノ二辺 a, b ヲ知ル場合

公式 $\tan A=\frac{a}{b}$, $B=90°-A$, $c=\frac{a}{\sin A}$

(注意) I. (III) ニ於テ $\tan\frac{B}{2}=\sqrt{\frac{1-\cos B}{1+\cos B}}=\sqrt{\frac{c-a}{c+a}}$

ヨリ B ヲ求メ然ル後 $90°-B$ トスルモヨイ、要スルニ公式ノ対数計算ニ便ナモノヲ選ブベキデアル、

(注意) II 三角形ヲ解キ得タトキハ一應験算ヲ行フベキモノデアル、直角三角形ノ場合ニハ $c^2=a^2+b^2$、又ハ $b=c\cos A$ 等ノ計算ニ用ヒナカッタ公式ニヨッテ験算ヲ行ヘ 但対数ヲ用フル近似計算デアルカラ全ク一致スルコトハ稀デ略一致スレバヨイトスル

(注意) III 本章デハ總テ五桁ノ対数表ヲ使用スル

(例題) $a=123.4$(米) $c=200$(米) ヲ知ッテ他ノ要素ヲ求ム、

(解) (III) ノ公式ニヨリ

$$\sin A = \frac{a}{c}$$

$$\log\sin A = \log a - \log c$$

$$\log a \doteqdot 2.09132$$

$$\log c = 2.30103 \;(-$$

$$\log\sin A = \bar{1}.79029$$

$$= \log\sin 38^\circ5'53''$$

$$\therefore\; A = 38^\circ5'53''$$

$$B = 90^\circ - A = 51^\circ54'7''$$

$$b = \sqrt{(c+a)(c-a)}$$

$$\log b = \frac{1}{2}\{\log(c+a) + \log(c-a)\}$$

$$\log(c+a) = 2.50944$$

$$\log(c-a) = 1.88423 \;(+$$

$$2\log b = 4.39367$$

$$\log b = 2.19684$$

$$= \log 157.34$$

$$\therefore\; b = 157.34 \;(米)$$

驗 $a = b\tan A$

$$\log a = \log b + \log\tan A = 2.19684 + \bar{1}.89434$$

$$= 2.09128 = \log 123.39$$

故ニ $a = 123.39$ トナッテ大略計算ノ正シイコトヲ知ル.

練 習 問 題

次ノ要素ヲ知リテ三角形ヲ解ケ　但 $C = 90^\circ$

(i) $a = 125.7$　$B = 48^\circ15'42''$　(ii) $a = 493.7$, $A = 69^\circ45'30''$

(III) $b=477.65$, $B=32°47'18''$ (IV) $c=50.487$, $B=38°26'40''$

(V) $b=2514.3$, $c=4320.7$ (VI) $a=60.541$, $b=87.389$

§ 31. 一般三角形ノ解法

要素ノミヲ與ヘテ一般ナル三角形ヲ解クノニ四種ノ場合ガアル　次ニコレ等ノ解法ニツイテ研究セン.

(I) 二角ト一辺ヲ知ル場合

既知ノ二角ヲ A, B 一辺ヲ c トスル

公式 $C=180°-(A+B)$, $a=\dfrac{c\sin A}{\sin C}$, $b=\dfrac{c\sin B}{\sin C}$

驗算式 $c=\dfrac{(a-b)\cos\frac{C}{2}}{\sin\frac{A-B}{2}}$ 又ハ $\dfrac{(a+b)\sin\frac{C}{2}}{\cos\frac{A-B}{2}}$

但コノ第二ノ驗算式ハ a, b ノ差ノ小ナルトキニ用ヒル

(例題) $a=1000$, $B=104°$, $C=24°29'20''$ ヲ知ッテ三角形ヲ解ケ.

(解) $A=180°-(104°+24°29'20'')=51°30'40''$

$$b=\frac{a\sin B}{\sin A}$$

$$\log b=\log a+\log\sin B-\log\sin A$$

$$\log a=3.00000$$

$$\log\sin B=\bar{1}.98690$$

$$-\log\sin A=0.10639\quad(+$$

$$\log b=3.09329$$

$$=\log 1239.6$$

$$\therefore\quad b=1239.6$$

$$c=\frac{a\sin C}{\sin A}$$

$$\log c=\log a+\log\sin C-\log\sin A$$

$$\log a=3.00000$$

$$\log\sin C=\bar{1}.61754$$

$$-\log\sin A=0.10639\quad(+$$

$$\log c=2.72393$$

$$=\log 529.58$$

$$\therefore\quad c=529.58$$

験 $a=(b-c)\cos\frac{A}{2}\div\sin\frac{B-C}{2}$

$$\log a=\log(b-c)+\log\cos\frac{A}{2}-\log\sin\frac{B-C}{2}$$

$$=2.85128+\bar{1}.95456-\bar{1}.80585$$

$$\fallingdotseq 2.99999=\log 999.98$$

故ニ $a\fallingdotseq 999.98$ トナリ大略計算ノ正シイノヲ知ル

練　習　問　題

1. 次ノ要素ヲ知ッテ三角形ヲ解ケ

(i) $a=274$, $A=78°$ $B=54°$

(ii) $a=10$, $A=51°30'40''$ $B=76°$

(iii) $a=4584$. $B=76°33'$, $C=43°18'$

2 前題 (iii) ニ於テル三角形ノ面積ヲ求ム.

3. $B=45°$ $C=10°$, $a=200$ ヲ知リテ, b ヲ求ム.

但シ

$\log 2=0.30103$, $\log\sin 55°=\bar{1}.91336$
$\log 1.726=0.23704$ $\log 1.727=0.23729$ } ヲ與ヘ

ルモノトスル.

(四) <u>二辺トソノ夾角ヲ知ル場合</u>

既知ノ二辺ヲ a b ソノ夾角ヲ C トスル

公式 $\frac{1}{2}(A+B)=90°-\frac{C}{2}$ $\tan\frac{A-B}{2}=\frac{a-b}{a+b}\cot\frac{C}{2}$

$$c=\frac{(a+b)\sin\frac{C}{2}}{\cos\frac{1}{2}(A-B)}$$

験算式 $c=\frac{a\sin C}{\sin A}$ 又ハ $c=\frac{b\sin C}{\sin B}$

(注意) c ヲ求メルニ當リ, $c=\frac{a\sin C}{\sin A}$ ヲ用ヒ

ルモヨイカ実際ノ計算ニハ上式ノ方便デアル (

何故カ）。

（例題）　$a=123,\ b=321,\ C=29^\circ 16'$ ヲ與ヘテ三角形ヲ解ケ。

（解）　$\frac{1}{2}(A+B)=90^\circ-14^\circ 38'=75^\circ 22'$

$$\log\tan\frac{B-A}{2}=\log(b-a)+\log\cot\frac{C}{2}-\log(a+b)$$

$$\log(b-a)=2.29667$$

$$\log\cot\frac{C}{2}=0.58319$$

$$-\log(a+b)=\bar{3}.35262\ (+$$

$$\log\tan\frac{B-A}{2}=0.23248$$

$$\frac{B-A}{2}=59^\circ 39' 4''$$

$$B=135^\circ 1' 4''$$

$$A=15^\circ 42' 56''$$

$$\log c=\log(a+b)+\log\sin\frac{C}{2}-\log\cos\frac{B-A}{2}$$

$$\log(a+b)=2.64738$$

$$\log\sin\frac{C}{2}=\bar{1}.40249$$

$$-\log\cos\frac{B-A}{2}=0.29648\ (+$$

$$\log c=2.34635$$

$$\therefore\ c=222.00$$

又　$c=\frac{b\sin C}{\sin B}$ ヨリ　$\log c=\log b+\log\sin C-\log\sin B$

$$=2.50651+\bar{1}.68920-\bar{1}.84933$$

$$=2.34638=\log 222.02$$

故ニ $c=222.02$ トナリ大略計算ハ正シイ.

練　習　問　題

1. 次ノ要素ヲ與ヘテ三角形ヲ解ケ

i　$a=82471$,　$b=63529$,　$C=43°10'$

ii　$b=21$,　$c=10.5$,　$A=36°52'12''$

2. $a=4572$, $b=3456$, $C=66°6'28''$ ヲ知ツテ三角形ヲ解キ且ソノ面積ヲ求ム

(四) 三辺ヲ知ル場合

公式　$S=\frac{1}{2}(a+b+c)$　$\tan\frac{A}{2}=\sqrt{\frac{(S-b)(S-c)}{S(S-a)}}$

$\tan\frac{B}{2}=\sqrt{\frac{(S-c)(S-a)}{S(S-b)}}$,　$\tan\frac{C}{2}=\sqrt{\frac{(S-a)(S-b)}{S(S-c)}}$

驗算式　$\frac{A}{2}+\frac{B}{2}+\frac{C}{2}=90°$

(注意)　$\sin\frac{A}{2}$ 或ハ $\cos\frac{A}{2}$ 等ノ公式ヲ用ソルモヨイガ三ツノ角ヲ全部求ムル場合ニハ正切ノ公式ニヨル方便デアル (何故カ).

(例題)　$a=15$, $b=16$, $c=17$ ヲ知ツテ三角形ヲ

解 4.

(解) $s = \frac{1}{2}(15+16+17) = 24$.

$s-a=9,\quad s-b=8,\quad s-c=7.$

$\log\tan\frac{A}{2} = \frac{1}{2}\{\log 8 + \log 7 - \log 24 - \log 9\}$

$= \frac{1}{2}\{0.90309 + 0.84510 - 1.38021 - 0.95424\}$

$= \bar{1}.70687$

$\therefore\ \frac{A}{2} = 26°59'4''\qquad \therefore A = 53°58'8''$

$\log\tan\frac{B}{2} = \frac{1}{2}\{\log 7 + \log 9 - \log 24 - \log 8\}$

$= \frac{1}{2}\{0.84510 + 0.95424 - 1.38021 - 0.90309\}$

$= \bar{1}.75802$

$\therefore\ \frac{B}{2} = 29°48'18''\qquad \therefore B = 59°36'36''$

$\log\tan\frac{C}{2} = \frac{1}{2}\{\log 9 + \log 8 - \log 24 - \log 7\}$

$= \frac{1}{2}\{0.95424 + 0.90309 - 1.38021 - 0.84510\}$

$= \bar{1}.81601$

$\therefore\ \frac{C}{2} = 33°12'39''\qquad \therefore C = 66°25'18''$

驗. $\frac{A}{2} + \frac{B}{2} + \frac{C}{2} = 26°59'4'' + 29°48'18'' + 33°12'39'' = 90°0'1''$

故ニ計算ハ大略正

練習問題

1. 次ノ要素ヲ知ッテ三角形ヲ解ケ.

(i) $a=11,\ b=13,\ c=16.$ (ii) $a=25,\ b=26,\ c=27$

(iii) $a=4584,\ b=5140\ c=3624.$

(iv) $a=222,\ b=318,\ c=406$

2、次ノ要素ヲ知ッテ三ツノ角及ビ面積ヲ求ム

(i) $a=73.61,\ b=41.23,\ c=68.95$

(ii) $a=74.8\quad b=102.6\quad c=125$

(IV) 二辺及ビソノ一対角ヲ知ル場合

既知ノ二辺ヲ $a\ b$ トシ a ノ対角 A ヲ與ヘラレタモノトスル

公式 $\sin B=\frac{b}{a}\sin A,\ C=180^\circ-(A+B),\ c=\frac{a\sin C}{\sin B}$

コノ問題デハ $a\ b\ A$ ノ値ノ如何ニヨリ種々ノ場合ヲ生スル

(i) $\frac{b}{a}\sin A>1$ ナル場合

コノトキハ $\sin B>1$ トナリ本問題ハ不能デアル

(2) $\frac{b}{a}\sin A=1$ ナル場合

コノトキハ $\sin B=1$ ∴ $B=90°$ 而シテ

$C=180°-(A+B)$ ヨリ $C=90°-A$ トナルカラ

$90°>A$ ナルコト必要デアル、故ニ $A<90°$ ノト

キニ限リ唯一ツノ解ガアッテ直角三角形ヲ得ル

(3) $\frac{b}{a}\sin A<1$ ナル場合

コノトキハ $\sin B<1$ トナルカラ B ハ一般ニ二

ツノ値ヲ求メ得テ一ツハ鋭角他ハ鈍角デアル 今

コノ鋭角ヲ B_1, 鈍角ヲ B_2 トスルト $B_1+B_2=180°$

デアル, 尚コノ場合ヲ詳細ニ吟味センニ

(i) $b<a$ ナルトキハ $B<A$ ナルベキデアル.

故ニ B ハ鋭角ニ限ル 従ッテ B_1 ノミヲ解トス

ル, 即チ唯一ツノ解ガアル

(ii) $b=a$ ナルトキ $B=A$ ナルベキデアル.

故ニ $A<90°$ ナルトキニ限リ B_1 ヲ採用シ得ル

即チ唯一ツノ解ガアル.

(iii) $b>a$ ナルトキハ $B>A$ ナルベキデアル.

コノ場合ニハBハ鋭角ニ限ルコトヲ要シナイ.
故ニ若シ $A<90^\circ$ ナルトキハBハ B_1 及ビ B_2 ヲ採用シ得ル 即チ二通リノ解ガアル. 故ニコノ場合ヲ両意ノ場合トイフ. 然シ $A \geqq 90^\circ$ デアルトキハ B_2 ハ勿論 B_1 モ採用シ得ナイ. 即チ解ナシ.

コレヲ要スルニ,

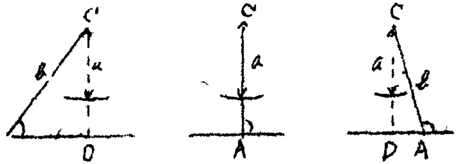
I $b\sin A > a$ ノ場合 解ナシ

II $b\sin A = a$ ノ場合
- $A<90^\circ$ ナルトキ一ツノ解ガアル
- $A \geqq 90^\circ$ ナルトキ解ハナイ

III. $b\sin A < a$ ノ場合
- $b<a$ ナルトキハ一ツノ解
- $b=a$
  - $A<90^\circ$ ナルトキハ一ツノ解,
  - $A \geqq 90^\circ$ ナルトキハ解ナク
- $b>a$
  - $A<90^\circ$ ナルトキハ二ツノ解
  - $A \geqq 90^\circ$ ナルトキ解ナシ

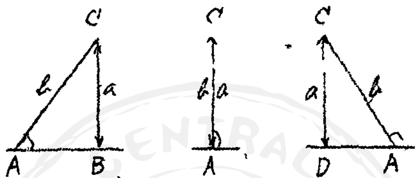
尚コレガ図解ヲスレバ次ノ通リデアル.

I



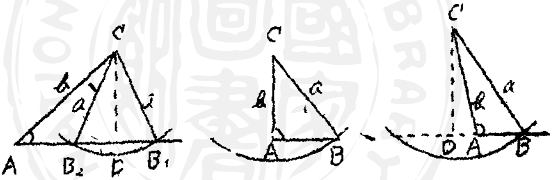
$(CD = b\sin A,\ b\sin A > a)$

II



$(CB = a = b\sin A)$ $(a = b)$ $(CD = a = b\sin A)$

III



$(CD = b\sin A < a\ \ b > a)$ $(b < a)$ $(CD = b\sin A < a\ \ b < a)$

驗算式　唯一ツノ解ガアル場合ハ

$$c = \frac{(a+b)\sin\frac{C}{2}}{\cos\frac{A-B}{2}}$$

ヲ用ヒ、両意ノ場合ニハ c ノ二ツノ値ヲ c_1, c_2 トスレバ c ノ値ハ

$$c^2 - 2bc\cos A + b^2 - a^2 = 0$$

ノ二根デアルベキヲ以テ

$$c_1 c_2 = b^2 - a^2 = (b+a)(b-a)$$

ナル関係ガアル　コレニヨリテ驗算ヲ行ヘバヨイ。

例題1　$a = 255$,　$b = 120$,　$A = 52°$　ヲ知リ三角形ヲ解ケ。

(解)　$\sin B = \frac{b}{a} \sin A$

$\log \sin B = \log b + \log \sin A - \log a$

$\log b = 2.07918$

$\log \sin A = \bar{1}.89653$

$-\log a = \bar{3}.59346$

$\log \sin B = \bar{1}.56917$

$\therefore \quad B_1 = 21°46'$

而シテコノ場合 $b < a$ デ且ツ $b \sin A < a$ デアルカラ解ハ一ツデアル　故ニ B_2 ハ採用シナイ

$C = 180° - (52° + 21°46')$

$= 106$

$c_1 = \frac{a \sin C_1}{\sin A}$

$\log c_1 = \log a + \log \sin C_1 - \log \sin A$

$\log a = 2.40654$

$\log \sin C_1 = \bar{1}.98233$

$-\log \sin A = 0.10347$

$\log c = 2.49234$

$\therefore \quad c = 310.7$

驗　$\log c_1 = \log (a + b) + \log \sin \frac{C_1}{2} - \log \cos \frac{A - B}{2}$

$=$ [illegible] $+\bar{1}.030$ [illegible]

$= 2.47233 = \log 310.69$

故ニ $c_1 = 310.69$ トナリ大略計算ハ正シイ

(例題) 2. $a = 4584,\ b = 5140,\ A = 60°10'$ ヲ知ッテ三角形ヲ解ケ

解 $\log \sin B = \log b + \log \sin A - \log a$

$\log b = 3.71096$

$\log \sin A = \bar{1}.93826$

$-\log a = \bar{4}.33876$ (+

$\log \sin B = \bar{1}.98798$

$\therefore B_1 = 76°35'$

而シテ $b > a$ デ

$b \sin A < a$ 且ツ $A < 90°$

デアルカラ両角ノ場合

デアル. 故ニ

$B_2 = 103°25'$

(I) $B_1 = 76°35'$ ノトキ

$C_1 = 43°15'$

$\log a = 3.66124$

$\log \sin C_1 = \bar{1}.83581$

$-\log \sin A = 0.06174$ (+

$\log c_1 = 3.55879$

$\therefore c_1 = 3620.7$

(II) $B_2 = 103°25'$ ノトキ

$C_2 = 16°25'$

$\log a = 3.66124$

$\log \sin C_2 = \bar{1}.45120$

$-\log \sin A = 0.06174$ (+

$\log c_2 = 3.17418$

又ハ $B_2=103°25'$ $\therefore c_2=1493.4$

験. $c_1c_2=b^2-a^2=(b-a)(b+a)$

$\log c_1+\log c_2=\log(b-a)+\log(b+a)$

$\log c_1+\log c_2=3.55879+3.17418=6.73297$

$\log(b-a)+\log(b+a)=2.74507+3.98784=6.73291$

故ニ大略計算ハ正シイ. 仍テ求ムル解ハ次ニ通リデアル.

$$\left.\begin{array}{l} B_1=76°35' \\ C_1=43°15' \\ c_1=3620.7 \end{array}\right\} \text{又ハ} \left\{\begin{array}{l} B_2=103°25' \\ C_2=16°25' \\ c_2=1493.4 \end{array}\right.$$

練習問題

1. 次ノ要素ヲ知ッテ三角形ヲ解ケ

(i) $a=528$, $b=252$, $A=124°34'$

(ii) $a=1915.2.1$ $b=448.8$, $A=42°16'42''$

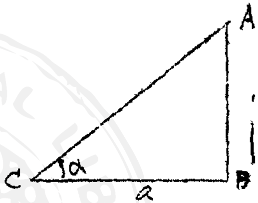
(iii) $a=283.4$, $c=348.5$ $A=32°15'$

§32 高サ,距離ノ測定

三角形解法ノ應用トシテ測量問題ノ主ナモノヲ考究セン。

(I) 水平面上ニ直立スル物体ノ高サノ測定

(第一) 物体ABノ基点Bニ達シ得ル場合

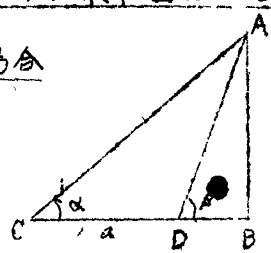


基点Bト同水平面上ニ一点CヲトリBCノ距離ヲ測ツテaトシ,次ニCニ於テ頂点Aノ仰角∠BCAヲ測ツテαトスレバABノ高サハ

$$AB = a\tan\alpha$$

カラ求メルコトガ出来ル.

(第二) 基点Bニ達シ得ザルモソノ水平面上ニBヲ過ル基線CDヲトリ得ル場合



CD, ∠ACB ∠ADB ヲ測ツテ夫々a, α β トスレバ,

△ACD ニヨリ

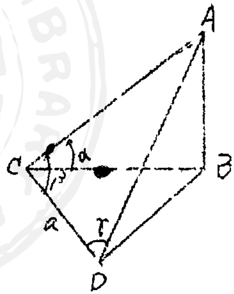
$$AD = \frac{a\sin\alpha\sin\beta}{\sin(\beta-\alpha)}$$

次ニ △ADB ニヨリ

$$AB = AD\sin\beta = \frac{a\sin\alpha\sin\beta}{\sin(\beta-\alpha)}$$

故ニ AB ヲ求メルコトガ出来ル.

(第三) 物体 AB ノ基点ニ達シ得ズ 又ソノ水平面上ニBヲ過ル基線ヲトリ得ナイ場合



先ヅCヨリ任意ノ方向ニ基線CDヲ定メテソノ長サヲ測ツテaトシ又∠ACB, ∠ACD ∠ADCヲ測ツテ夫々α β γトスル. サウスレバ △ACDヨリ

$$AC = \frac{a\sin\gamma}{\sin(\beta+\gamma)}$$

故ニ △A'BC ヨリ,

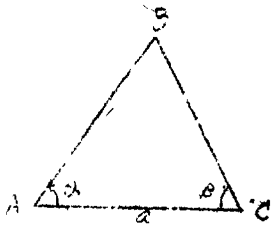
$$AB = AC\sin\alpha \quad \frac{a\sin\gamma\sin\alpha}{\sin(\beta+\gamma)}$$

故ニ AB ヲ求メ得ル

(四) 観測点Aヨリ達シ得ナイ点Bマデノ距離ノ

測定

適宜ノ所ニ基線ACヲ選ビ且ツソノ両端A,CヨリBヲ望ミ得ルモノトスル 今



AC、∠BAC、∠BCAヲ測リテ夫々a, α, βトスル

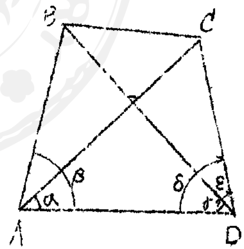
サウスレバ△ABCヨリ

$$AB = \frac{a \sin \beta}{\sin(\alpha+\beta)}$$

ヲ得テABヲ求メルコトガ出来ル。

(四) 観測点Aヨリ達シ得ナイ二点BC間ノ距離ノ測定

適宜ノ所ニ基線ADヲ選ビ且ツソノ両端A,DヨリB及ビCヲ望見シ得ルモノトスル。



今 $AD=a$, $\angle CAD=\alpha$、$\angle BAD=\beta$, $\angle BDA=\gamma$, $\angle CDA=\delta$, $\angle BDC=\varepsilon$ ヲ測ル サウスレバ

△ABD ヨリ $BD = \dfrac{a \sin \beta}{\sin(\beta+\gamma)}$

△ACD ヨリ $CD = \dfrac{a \sin \alpha}{\sin(\alpha+\delta)}$

仍テ △BCD ニ於テ二辺ト~~ソ~~ノ夾角トヲ知リ得タカラコレヲ解クコトが出来ル。故ニ $BD=c$, $CD=b$ トオケバ

$$\tan\frac{B-C}{2}=\frac{b-c}{b+c}\cot\frac{\varepsilon}{2}$$

ヨリ $\frac{B-C}{2}$ ヲ求メ, 次ニ,

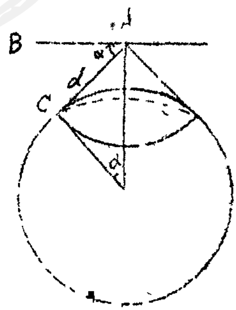
$$BC=\frac{(b+c)\sin\frac{\varepsilon}{2}}{\cos\frac{B-C}{2}}$$

ヨリ BC ヲ求メル

(注意) モシ A, B, C, D が同一平面上ニアル上キハ ε ハ測ルニ及バナイ コノ場合ニハ

$\varepsilon=\delta-\gamma$ デアル.

(IV) 視界半径ノ測定



地球ノ表面ヲ球面ト考ヘソノ半径ヲ r トスル 今地球上ノ一地点カラ h ナル高サニアル点 A ヨリ展望シ得ル範囲ノ限界ハ A ヨリ引イタ切線 AC ノ切点 C

軌跡ナル一ツノ小円デアル. 仍テ AC ヲ d デ表ハシ、コレヲ h ナル高サニ於ケル視界半径トイフ. 又平面 AOC 内ニ於テ AC ト A ニ於ケル水平線 AB トノナス角ヲ α トシコレヲ視界俯角

ブ　サウスレバ

$$\cos\alpha = \frac{r}{r+h} = \left(1+\frac{h}{r}\right)^{-1}$$
$$= 1 - \frac{h}{r} + \frac{h^2}{r^2} - \cdots\cdots$$

r ニ比シ h ハ極メテ小デアルカラ $\left(\frac{h}{r}\right)$ ノ二次及ビソレ以上ノ項ヲ省略シテ

$$\cos\alpha = 1 - \frac{h}{r}$$

スルコトガ出来ル、次ニ

$$d = \sqrt{(r+h)^2 - r^2} = \sqrt{2rh + h^2}$$
$$= r\sqrt{2\frac{h}{r} + \left(\frac{h}{r}\right)^2}$$
$$\therefore\ d = r\sqrt{2\frac{h}{r}} \quad \text{又ハ} \quad d = \sqrt{2hr}$$

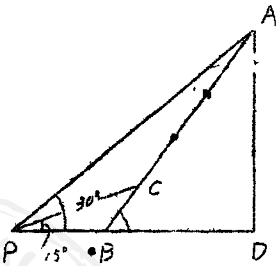
トナシ得ル.

(例題) 1　坂道ノ頂上カラ平地上ニアル一地点ヲ観測シテ俯角 30° ヲ得タ. ソレヨリ坂路ヲ

$\frac{3}{4}$ 下ツテ再ビ同一点ヲ観測シテ俯角 15° ヲ得タ　コノ坂路ノ傾斜ヲ α トスルト，

$$\tan\alpha = \frac{3}{3\sqrt{3}-2}$$

デアルコトヲ証明セヨ



(解) 平地上ノ地点ヲ P, A 及ビ C ヲ第一第二観測点トスル

$\angle APC = \angle CPB = 15^\circ$ ナルガ故ニ

$$\frac{AP}{BP} = \frac{AC}{BC} = \frac{3}{1}$$

又 $\triangle APB$ ヨリ

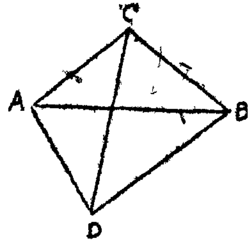
$$\frac{AP}{\sin\alpha} = \frac{PB}{\sin(\alpha-30^\circ)}$$

$$\therefore \quad \frac{\sin\alpha}{\sin(\alpha-30^\circ)} = \frac{3}{1}$$

コレヨリ $\sin\alpha = 3(\sin\alpha\cos30^\circ - \cos\alpha\sin30^\circ)$

$$\therefore \quad \tan\alpha = \frac{3}{3\sqrt{3}-2}$$

(例題) 2　與ヘラレタ三角形ノ二辺ヲ夫々與ヘラレタ角ニ視ルヤウナ点ヲソノ三角形ノ平面内ニ求メルコト。



(解) △ABC ヲ與ヘラレタ三角形トシ、D ヲ求メル点トスル。而シテ D ヨリ二辺 AC BC ヲ視ル角 ADC, BDC ヲ與ヘラレタ角トシ夫々 α β トオク。

次ニ、$\angle DAC = x$, $\angle DBC = y$ トオケバ x, y ヲ決定スルコトニヨリ D ノ位置ハ定マル

サテ $$x + y = 360° - \alpha - \beta - C \qquad (1)$$

又 $$DC = \frac{b \sin x}{\sin \alpha} = \frac{a \sin y}{\sin \beta}.$$

今 $\tan\phi = \dfrac{a \sin \alpha}{b \sin \beta}$ トオケバ $\dfrac{\sin x}{\sin y} = \tan\phi$

故ニ $$\frac{\sin x - \sin y}{\sin x + \sin y} = \tan(\phi - 45°)$$

即チ $$\tan\frac{x-y}{2} = \tan\frac{x+y}{2}\tan(\phi - 45°).$$
$$= \tan(45° - \phi)\tan\frac{\alpha+\beta+C}{2}$$

コレヨリ $x-y$ ヲ求メ得ル カクシテ(1)トヨ値カラ x, y ヲ決定シ得ル。コノ問題ヲ pothenot ノ問題トイフ。

練習問題

1. 或ル地点デ丘上ニ直立スル塔ノ頂点及ビソノ基底ノ仰角ヲ測ッテ夫々α βヲ得タ、又ソレカラ塔ニ向ッテdダケ近ヅイテ再ビ塔頂ノ仰角ヲ測ッテθヲ得タ。丘ノ高サハ

$$\frac{d\sin\theta\cos\alpha\tan\beta}{\sin(\theta-\alpha)}$$

デアルコトヲ證セヨ.

2. 某山頂カラ正東ニ當ッテA地点ヲ瞰ル俯角30°デアッタ 又南30°西ノ方向ニB地点ガアッテソノ俯角45°デアルトキA,B間ノ距離ヲ求ム。但AトBトハ同一水平面上ニアッテ、山頂ノコノ水平面ヨリノ高サヲ246米トスル.

3. 水平面上デ三角形ヲ形成スル三地点A,B,Cカラ或山頂ノ仰角ヲ測ッタニ何レモαデアッタ。サウスルト山ノ高サハ

$$\frac{2}{a}\tan\alpha\operatorname{cosec}A$$

テアルコトヲ証セヨ　但 A, a ハ $\triangle ABC$ ノ一角 A トソノ対辺 a ヲ表ハス

4　海面上ノ高サ h_1 米ナル船上ヨリ海面上ノ高サ h_2 米ナル燈台ノ光ヲ丁度水平線上ニ認メタ　燈台カラ船マデノ距離ヲ求ム

民国三十五年十月十四日

(第一版印刷)

不許複製

編者　台北市宮前町七四号

李偉器

発行者　台北市宮前町七四号

光明新数學普及会

代表者　李偉器

印刷者　台北市宮前町七四号

華林印刷所

王金本