統 計 學

陳 善 林 著

統計學目錄

引　言

統計乃根據事實，用科學方法，擷取歸納，從大量得共相，由已知測未知，巧奪天工，蘊義至深。民國二十六年春，作者本教授之經驗，著有統計學一書，於二十八年春由上海中華書局出版，內分十五章，例舉公式二百有二，凡四十餘萬言，各大學多採用為教本。惟以交通困難，無法內運，近感內地教本之缺乏，即由原書中摘取精華，纂編一小冊，復以公式圖表等排印不易，爰即付製石印，因陋就簡，遺漏之處必多，尚冀海內方家，多予指正。

民國三十二年十月

陳善林誌於陪都

統計學

第一章 總論

第一節 統計學之定義

統計學者，乃從大量之社會或自然現象中，用計數或估量方法，以數字表示其動態或靜態，並分析其數字間相互關係之學也。茲將此定義略加解釋之如下：

(一)統計是從大量中觀察真情之科學—社會或自然現象中，常有「大量恒靜」之法則存在。大量恒靜者，非謂大量不變，乃在大量觀察中，其變化常較小量為規則耳。蓋大量觀察事實，其間各種偶然發生之特殊現象，在平均時俱可互相抵銷，其所存者乃僅不甚變異之通常或中庸之現象。此中庸之現象，乃即統計者亟欲知之者也。故欲統計某種事實，應從大量中觀察，不應從小量現象中推求。

(二)統計是研究社會和自然現象之科學—最初研究統計學之對象為國家，故有以統計為研究國家之學者。其後研究之範圍漸次推廣，研究之對象亦漸由國家而推及於社會與自然現象。此種現象或同時同地，或同時異地，或同地異時，均在統計學研究範圍之內。

(三)統計學是計量而不計質之科學—欲比較人之貧富

智愚在統計學內，必須先有可以表示比貧富智愚之數量，方可以言比較，故計數為統計學之主要職務，惟統計學上之數字，未必均由計數而來，有時不得不用估量方法以求其近似之數值，故定義中計數與估量並列。

(四)統計是分析事實間相互關係之科學——統計學不特用數字表示社會與自然現象之動態與靜態，且用種種分析方法，以推求其數字間之關係，此種關係不僅是平均數一種，即離中差、偏態及相關等，亦均在統計學研究範圍之內。

第二節　統計學與其他科學之關係

哥斯有言「統計學為治理世界之科學」，其說甚善，蓋統計乃科學之工具，無論政治經濟社會等科學，無不藉此以闡定原理，施政行政，亦無不藉此以表決方針，是以統計為科學之科學，其與各科學最[illegible]之關係如下：

(一)統計學與政治學之關係

(1)藉定施政行政之方針　(2)藉察立法行政之效果

(3)使國民知國家之現狀及進步之實況，供參政之參考

(二)統計學與經濟學之關係

(1)藉此發見經驗之法則　(2)藉此可得實際之証據

㈢統計學與社會學之關係

⑴藉此商榷社會政策 ⑵藉此制定社會立法 ⑶藉此解决社會問題

㈣統計學與會計學之關係

⑴藉以决定整理記錄 ⑵藉以分析財政狀况

第三節 統計之功用

統計之功用不勝枚舉概括書之約有三點

㈠執簡馭繁以便比較—人類頭腦之組織無論何時僅能記憶簡單之事實而不易想象多數零星之變量若不將繁瑣之數字記爲簡單之總數平均數或統計圖等即不易顯示事實之所在與真情

㈡依據事實探求真情—社會事實參差紛紜不一而足若不加統計而真事雜揉則必昧於真理浮而不實

㈢根據過去預測未來—社會現象本至變而難測然若根據過去之事實亦可預測未來如物價之升降生活程度之漲跌世界人口之增減等若有過去確實之記述即可用統計方法推測未來之变遷

綜觀上述統計之於人群實有深切之關係如政治家多據爲施政之準則科學家多以爲研究真理之工具經濟家以此而立論人口工資及物價之定則社會學家以此而定社會政策社會立法生物學家以此証明變化

與遺傳之定律，教育心理學家以此證實腦力與年齡之關係。凡此種種皆統計學之功用也。

第四節　大量觀察法

宇宙間之現象本極繁複，殊不易明瞭真相者也。然若根據大量觀察法，取其大而遺其小，亦可知其梗概。猶之觀海，近望則波濤萬千，起伏無定；若從遠處望之，自有平線可尋。試就社會現象而言，雖千頭萬緒，繁複難計，然就大量中觀察之，其間恒有一定法則之存在。此法則為何？即所謂大數之法則是也。茲分二項述之如下：

(一)大數有序律——抽樣調查為統計學中最重要之調查法，所謂抽樣，即於一大群複雜之事項中，抽取一小部份作為調查之樣本，由此所得之結果，如抽樣適當，計算準確，即可用以代表全部。譬如調查全國人口之年齡，我人可不必遍查全國人口之年齡，再求其平均數，祇須抽查其中可以代表全体之一小群人口之年齡，而求其平均數，由是所得之平均年齡，與全体人口年齡中所得者，當無巨大出入。設所取之樣本愈多，所得之結果愈能代表全体，此大數有序之定律也。

(二)大數恒靜律——所謂大數恒靜者，乃謂在大量觀察事實時，其間各種偶然發生之現象，恒可互相抵銷，而為通常中庸之現象。例如某城因特種關係，若氏死亡特

多，某城因預防周密，死亡特少，結果互相抵銷，卒至普通常態，故由全國城市之死亡人數上觀之，常無多大變異，此大數恒靜之定律也。惟我人須注意者，所謂大數恒靜，非經常期而不變，不過根據大數觀察之結果較之得諸少數樣本者為有規則耳。

第五節 統計之程序

統計之程序，常因調查目的及範圍之不同而異，大体言之，約可分為下列四步：

(一)事前計劃—在進行統計之先，必須加以計劃及考慮，如統計某種事實，必先研究其是否能藉統計方法以表示現象，果其能也，乃對於調查之目的及範圍等，均應加以規定，即分析及公告等整个計劃，亦應加以周密之考慮，此統計之第一步驟也。

(二)搜集資料—統計之事項既經考慮及計劃後，即進而搜集資料，如需親自調查者，即出發前往調查，如派員調查者，則應委聘調查人員，施以相當訓練，督促進行之，如用通信調查者，則將調查表鉛印寄發，如採用間接資料者，即開始考查是項已有資料之來源，並審慎選取之，此統計之第二步驟也。

(三)整理資料—根據大量觀察法徵集之資料，未必盡屬可用，整理之前，須詳加審核，以別其正誤，若資料中發

現矛盾或可疑之處應即設法覆查或竟棄而不用以免牽累大體審核既畢，方可着手整理其法或將徵集之資料彙錄一處保存其實在情形，備作詳細研究之用或用標記將性質相同之事實彙於一欄以便列表分析。或將所得之資料分記於每一卡片上，以便歸類分析，作種種繁雜之比較或按預定密碼用穿孔機穿孔於特種卡片上，以便用機器分析資料，此統計之第三步驟也。

(四)分析與發表—整理既畢，即開始分析如各種平均數，差異數及相關等之計算，指數之編製等，舉一反三，詳為分析。並酌量情形繪製圖表編註說明，刊印報告公佈社會，此統計之第四步驟也。

問　題

1. 何謂統計？其與各科學之關係如何？
2. 試列舉統計之功用及與人生之關係。
3. 試解釋以下諸名詞：
   (a)大數有序　(b)大數恆靜　(c)樣本
4. 統計之步驟有幾？試略述之。

第二章 統計表

第一節 統計表之功用

統計表之功用要言之約有下列諸點：

(一)易得要領—零乱之數字經分類列表後則類別之間不僅便於比較觀察且易得其要領

(二)易於分析—同類事實彙於一處縱橫分明羅列不混。總計平均自易計算。

(三)易於審查—表中資料既排列有序則數字之謬誤或遺漏自易審察。

(四)易於記憶—凡有關之事實在表中列於一處簡賅清晰自易引起讀者之联念作用而易記憶。

(五)易見事實之規律—統計資料若排列有序自易發見其一定之規律

(六)易見事實之因果—若將全体事實彙錄一表則綱舉目張各事實間之因果関係自易發見。

(七)易省重複之說明—繁瞔之事實若用文字說明則長篇累牘重複說明之處必多若編製統計表自可免除此弊

第二節 統計事項之分類

統計事項之分類可從縱橫二方面述之縱分為縱剖面之分類以經過之時間為標準故亦稱歷史之分類

如歷年人口之增減，貿易之盛衰，物價之漲跌等，俱依時間之先後排列，當歷史之分類也。橫分為橫斷面之分類，以其採用標準之不同，復可分為下列三種：

(一)地理之分類——統計事實之分類，如依統計事實之地域分配為標準者，謂之地理分類，如我國各省面積之大小，產米之多少，各國人口之疏密，軍備之強弱等，俱依地域分列，當地理之分類也。

(二)性質之分類——分類之標準，設為某種特性，謂之性質分類，如某市罷工停業原因之比較，某時期各業工人工資率之比較，某校學生性別之比較，以及某國各種歲入歲出之比較等，俱以統計之某種特性作為排列之標準，故名曰性質之分類。

(三)數量之分類——分類之標準，如依數量之大小而編列者，為數量之分類，例如依年齡之大小，測定全國人口之分配，分數之多少，測驗優劣學生之分佈等，俱以事實之數量，作為排列之標準，故名曰數量之分類。

第三節　原始表與次級表

統計表有原始表與次級表之分，將有關研究現象而搜集之一切原始資料，用彙錄法集於一表，保存其原始情形，備作詳細研究之用者，謂之原始表。此種表之優點，在能將事實之詳細情形顯示無餘，蓋資料一經計算，

編成非原始表格，則不僅數字易失確度，即一部份次要之數字或為隱蔽而不知也。至於次級表，乃就原始表中所載之資料，摘要記述，或加以分析而成之統計表。例如調查某校學生之成績，如將各級各生之成績詳列一表而不加計算與分析者，乃為原始表。若將各級學生成績各求一平均數，以代表各級學生之平均成績，將此計算而得之各級平均成績彙錄一表，即為次級表。此種表式乃即原始表之縮影，當不若原始表之詳盡，然統計之目的，在使讀者領略統計之結果，而不在深究事實之詳情。故統計機關每以次級表為主表，原始表為附表，務使讀者閱次級表而知事實之要領，讀附表可作他種更深之分析也。

第四節　時間數列表，地理數列表及次數表

統計表之編製，如依時間之先後順次排列者，謂之時間數列表。例如去年一月至十二月我國對外輸出入貨值額，乃按月份之先後，將各月之輸出入額填入表中，此種表式乃即時間數列表也。

地理數列表乃以地域別或國別等為分類之標準，而製成表式。例如去年我國輸出入貨值國別表，以國別為列表之主体，乃即地理數列表也。

次數表亦稱頻數表,係將同一時期之事實,無地域關係者,依其性質或數量分成若干類或若干組,而以變量之數值盡納於各類各組中之表式。例如某校各級男女學生數之比較,即將級別分別寫右,再將男女人數逐項列入,此乃質量次數表。若將量數分成若干組,再將變量分別納入各組中者,有之數量次數表,亦稱分組次數表,例如就某級五十生成績之分配,先將五十生之平均成績彙錄一處,而後按下列步驟編製之:

(一)求全距—全距者即資料中最大一項與最小一項之差額也。例如某級五十生之成績最優者為93分,最劣者為45分,全距為 93−45＝48分。

(二)定組距—求得全距後,即須決定組距。所謂組距者,乃分全距為若干組,而各於每組間之距離也。至於組距之大小,則視全距之長短而定。惟不得過大,蓋過大則組中各數相差必巨,其中點當難作為一組之代表,且次數分配之主要情況將因是而被蒙蔽。又不得過小,蓋過小既不便於處理,且不能顯示其分配之趨勢。

(三)定組限—組限有上限與下限之分,如表一第一組為45分至54.99分,54.99分為上限,45分為下限。第二組為55分至64.99分,64.99分為上限,55分為下限。劃定組限時,各組之中點能為整數最佳,蓋次數表之編製,有一

假定即一組中各變量之平均可以該組中值代表之，如中值爲小數則不便以後之計算也。

(四)劃標記—組距組限決定後，再將各变量按其數值之大小用各種標記納入各相當組中，以便計算各組之次數。

(五)計次數—將各組之標記用數字填明之，即成次數表如下

表一　某級學生成績分配表

分數	標記	學生數	以下累積	以上累積
45—54.99	下	3	3	50
55—64.99	正	5	8	47
65—74.99	正正正正	20	28	42
75—84.99	正正下	13	41	22
85—94.99	正下	9	50	9

第五節　累積表

累積表乃將各期量數或各組次數加以累積而製成之表式，以其縱剖與橫斷之不同又可分爲下列二種。

(一)累積時間數列表—累積時間數列表乃將各期量數累積而成之統計表，此種表式更以累積方法之不同，分爲以前與以後累積二種，以前累積時間數列係上向之累積，即示某時期末及某時期前若干時期數值

或次數之總和。例如表二某年某酒精廠在一月卅一日前產酒精三萬加侖，二月二十八日前推至一月一日止，為六萬五千加侖，三月三十一日前推至一月一日止為九萬八千加侖，換言之，即三月及三月前一月二月之總產量是也。以後累積時間數列係下向之累積，即示某時期初級某時期後若干時期數值或次數之總和，例如表二第四列，即示某年某酒精廠在一月初及一月以後至六月三十日止，共產酒精二十一萬一千加侖，二月初及二月以後至六月三十日止，共產酒精十八萬一千加侖，餘類推。

表二 某年一月至六月某酒精廠產量表（單位千加侖）

月次	產量	以前累積	以後累積
一月	30	30	211
二月	35	65	181
三月	33	98	146
四月	37	135	113
五月	36	171	76
六月	40	211	40

(二) 累積次數表——累積次數表乃將各組次數累積而成之表式也。此種表式亦以累積方法之不同，可分為以

下及以上累積二種，以下累積乃由組值最小一端之次數加起，如表一之第四列，其累積次數按「以下」法讀之，如某級學生之成績在五十五分以下（即不滿五十五分）者計3人，不滿六十五分者，計8人是也。以上累積乃由組值最大一端之次數加起，如表一之第五列，其累積次數按「以上」法讀之，如某級學生之成績，在八十五分以上者9人，在七十五分以上者22人是也。

第六節 製表之規律

（一）關於表之標題者：

(1)標題應置於表之頂端，所以顯明表之內容。

(2)標題應簡明易解，切合表之內容。

(3)標題中所舉各点，其次序應與表中所表列之項目一致。

(4)表之內容有地理或時間區別者，標題中亦應註明之。

(5)表之內容甚長，須佔數頁地位者，每頁表首應各註明標題，除第一頁外，其餘各頁之標題後應註明「續」或「續前」等字樣。

（二）關於表之項目者：

(1)表中項目之次序，應按下列各種標準排列之：

(A)重要之程度　(B)等級之高低　(C)時間之先後

(D)數量之大小 (E)地域之位置 (F)筆畫之多少

(G)字母之先後

(2)表中項目,最好一律由左而右橫寫。

(3)大項目之下,可分小項目,小項目之下,可分細目,祇須各依一格用細直線劃分之。

(4)某項目須特別注重時可用較粗之字体排印之。

(5)表之橫幅過長,左端所註項目不便閱覽時,可於右端重註一次。

(三)關於表之線格者:

(1)縱行與縱行間,大項目與小項目間,小項目與細目間,均須用細直線劃分之。

(2)橫行與橫行間不必用直線劃分,惟求易於找尋各行所屬之數字起見,可每五行空一行,俾便閱覽。

(3)表中上部項目之下,左部項目之右,均須用粗直線或細直線劃分之。

(4)表之下部如有總數,平均數或百分數者,應於各數之上用直線劃分之。

(5)表之上下二端應用粗直線劃斷之,左右二邊,則可不必。

(四)關於數字之排列者:

(1)表中數字,須一律用阿拉伯字,以其整齊而便於書

寫。

(2)表中縱行数字之位置應上下相對数字之小数点，尤須同列於一垂直線上，以便核計總計及平均数等。

(3)雖為同一数字而行欄不同時須全部重寫，切忌寫「同上」或「〃」等字樣。

(4)表中数字在四位以上者，每三位應用分位点分点之。

(5)無数字之空格須用短黑線或短虛線充之，免使閱者起漏填之疑慮。

問 題

1. 統計表之功用如何？試略述之。
2. 統計事項之分類如何？試申述之。
3. 何謂「原始表」「次級表」其區別何在？
4. 何謂次数表，編製分組次数表之步驟如何？試詳述之。
5. 累積統計表之種類有幾，試分別畧述之。
6. 統計表內数字之排列及線格之分劃應注意何点？

習 題 一

某機關職員俸給表

$88	$165	$90	$130	$280	$45	$165	$160	$320	$275
240	190	80	205	205	235	120	200	230	120
200	85	245	190	90	190	160	240	195	155
75	70	210	85	115	195	240	125	120	115
120	160	155	140	165	115	120	115	125	155
125	165	115	155	160					

試用上列統計資料編製 (1)分組次數表 (2)以下累積次數表 (3)以上累積次數表

習題二

試搜集各種次級資料編製：

(1)時間數列表 (2)地理數列表 (3)質量次數表 (4)數量次數表 (5)以前以後累積時間數列表 (6)以上以下累積次數表

第十章 統計圖

第一節 統計圖之功用

統計圖為表現統計上數字間關係最有效之科學方法,其功用如下:

(一)易得明確概念——統計圖之目的在表明統計之結果,故檢閱者[illegible]事實之概念.

(二)易得深刻印象——[illegible]表現事實之真相,推[illegible]者得深刻之印象.

(三)易示相互關係——統計圖除表示各數量之大小外,並可將各數量間之相互關係顯示之.

(四)易定分配狀況——統計圖可由抽查之樣本上確定全部之分配狀況.

(五)易使閱者入趣——統計之結果,如用各種圖式繪示之,不僅易使閱者入趣,即繁冗之數字,亦易印入閱者腦海之中.

(六)易於插補——如事實上某變量遺漏時,在表格中須詳加計算,方可得其近似值,然於圖形上,可用插補法推求,藉免計算之煩.

第二節 [illegible]之步驟

(一)選擇材料——一表之內,項目有多至十餘者,然何者

應採作製圖之材料,倘專憑圖而不顧此,乃製圖之先決問題,普通每以表格之統計或手稿作為製圖之唯一材料,然亦有以既有統計用於圖中者,要視製圖之目的何在而定。

(二)選定圖式

(1)表現時間變遷之資料,宜用曲線圖。

(2)表現各項數量之資料,宜用長條、平面或體積圖等。

(3)表現事實在地域上分佈之現象,宜用統計地圖。

(4)表現事實比例之變量,宜用對數曲線圖。

(5)表現事實在某種程度以上或以下,或某時期以前或以後之集體時,宜用累積曲線圖。

(6)表現一組織由各部門權限之關係時,宜用系統圖。

(7)繪圖之目的,在作宣傳或廣告之用者,宜用美術圖或像形圖。

(8)繪圖之目的,在陳列一般人閱覽,引起觀察之興趣者,宜用像形或立體圖。

(三)分析資料——如繪百分數,比較數則應計算百分比,如繪累積曲線圖,則應計算累積數等是也。

(四)定比度——比度之起點通常由下而上,由左而右,縱橫相交之處,比度單位應於規定比度時決定,例如

單位，百萬元，千噸等並應記明於比度數目上，不可遺誤。

(五)繪輪廓線基線及指導線——輪廓線即圖形之外圍線，其粗細隨圖形及圖心之大小而定。基線即係零
度線，指導[illegible]
線之粗細[illegible]。

(六)定坐標——就第三步所求而得之數字，依橫縱軸上之比度定各繪定點，其横坐標係與縱軸距離而
平行於橫軸之点，縱坐標係與橫軸距離而平行於縱
軸之点。

(七)繪曲線與着色——將各繪定点用直線聯繫之，即成
曲線圖，將各主要基点所用粗直線聯繫之，即成長条
圖。若欲表現數種事物可用顏色顯明之。

(八)繪圖例、題名與說明——如圖中用若干種曲線或顏色
表示若干事物，則各線或各色所代表之事項應設
例說明之。[illegible]上方或下方，並
將全圖[illegible]之。

第三節 長条圖

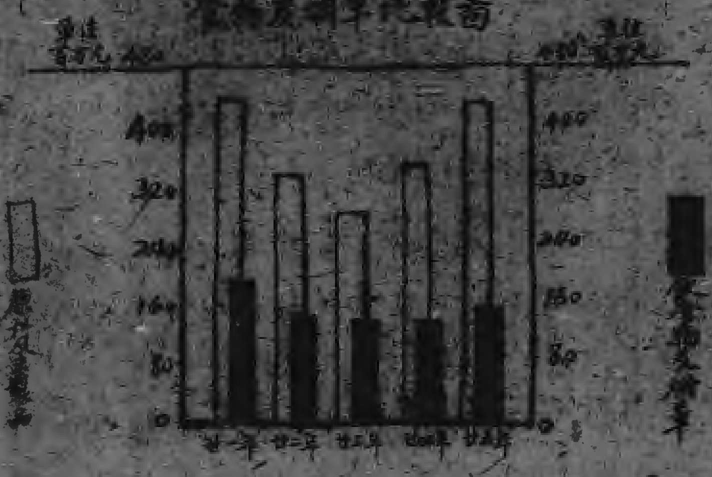
長条圖乃以若干等[illegible]之長短，代表某項數量
或百分比大小之圖形，[illegible]之最[illegible]讀者多用之。
此種圖形又有[illegible]之分，或平行之長條其起点

基於某縱線者,謂之縱條圖,凡豎直之長條,其起點基於某橫線者,謂之橫條圖。縱橫條圖之中,復以其形式之繁簡,又可分為單式長條圖、複式長條圖、分段長條圖、及[illegible]混合等四種:

(一)單式長條圖——單式長條圖乃以若干簡單之長條,代表若干變量[illegible]。

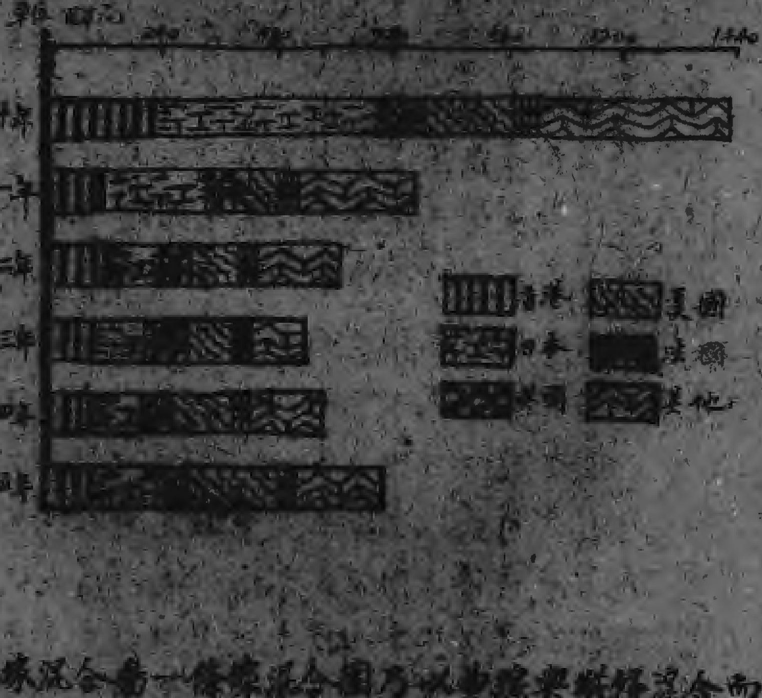
(二)複式長條圖——[illegible]長條圖乃以兩道或兩道以上之長條為一組,代表一大項目,而以每組中各長條表示大項目中[illegible]之各部,此種圖形每以兩道或兩道以上之長條[illegible]為一組,每道長條宜用不同之顏色等區別之。[illegible]圖一乃以各縱條表示輸出原料及半製品[illegible]輸出飲食物及烟草值

圖一 [illegible]年我國輸出原料及半製品與飲食物及烟草比較圖



(三)分段長條圖—分段長條圖乃將各長條內區分為若干段藉以表明各變量之數值者也，例如圖二各條之長短乃示我國歷年輸出貨值之大小，每條之內又分為六段，每段用一種交叉線或顏色標記之，乃示我國歷年輸往各國貨值之消長。

圖二　歷年我國輸出貨值圖



(四)條線混合圖—條線混合圖乃以曲線與長條混合而成，曲線與長條之間係可顯示出某某兩項目之長條間更以曲線聯繫之，即成條線混合圖。

第四節　平面圖與立体圖

平面圖乃以平面之面積代表一事項全體之圖形之謂。面積之計算較為繁難，表示事實之數值時，每感不易，比較與計算之者，較為繁難，以其形式之不同，又可分為下列數種：

(一)圓形圖——圓形圖乃以一圓形或若干圓形之面積代表一全體事實或一事實中若干項目之圖形。其繪法，先計算各項在全體事實中所佔之百分數，次將各部分之百分數乘360度，得各部在全圖內應佔之度數，再用量角器量定各部應佔之度數，並自圓心點起，依照量定之度數，引若干半徑，分全圓為若干扇形，末將各扇形內用交叉線或顏色填塗之，以資區別。惟若以圓形面積之大小表示事實之大小者，則求圓形面積之法，不可不知。

$$圓面積 = 半徑^2 \times 3.1416$$

繪製時應先將最大或最小變量假定其在圖形之半徑為若干，再依上列公式求得代表此最大或最小變量之圓面積，以此圓面積為標準，求各變量之大小，根本此標準其他變量應有之面積，然後用下列公式求其他圓形應有之半徑。

$$圓形之半徑 = \sqrt{\frac{圓形面積}{3.1416}}$$

依上列公式求得代表各變量圓形之半徑後,即可繪製大小不一之圓形圖。

(二)矩形圖—矩形圖者係以各正方或長方之面積代表事實中各數量大小之圖形也,繪製之法,先將最大或最小之變量[illegible]其邊長為若干,然後按下列公式求正方之面積:

正方面積=邊長^2

長方面積=長×闊

依上列公式求得代表各變量之面積後,再用:

邊長=$\sqrt{\text{正方面積}}$

之公式計算其他各方形之邊長,然後繪示之即成矩形圖。

(三)三角形圖—三角形圖乃以各三角面積之大小,或各三角垂直線之長短(底基線之寬)以表示變量大小之圖形也。以面積之大小代表變量之大小者,則三角形面積之求法,可按下列求三角形面積之公式如下:

三角形面積=$\frac{\text{垂直線}\times\text{底基線}}{2}$

如以各三角之垂直線(或底基線)之長短,以代表變量之大小者,則在各三角之[illegible]數一定,使各三角之高低,即視各變量在此限度之高下,[illegible]在底基線上之寬狹,則先規定各三角之底基線為若干,

然後按變量之大小比例分配之即得。

立体畫像以一立体形代表事實之全部,以長闊高與正面面積側面面積之大小,表示變量之多少;或以若干立体之體積表示各變量大小之[illegible]。立体畫之種類甚多,其最普通者有[illegible]方体及球体等數種,其繪法[illegible]亦有[illegible]全視繪圖者之[illegible]。

立体畫[illegible]之大小,代表變量之大小者,則求各立体[illegible]須先知之,茲將求角柱,圓柱,正立方体,長立方体及球体体積之公式示之如下:

(一) 角柱体積 $= \frac{1}{3} \times$ 角柱底面積 $\times$ 角柱之垂直高

(二) 圓柱体積 $=$ 圓柱底面積 $\times$ 圓柱高

(三) 正立方体体積 $=$ 邊長^3

(四) 長立方体体積 $=$ 長 $\times$ 闊 $\times$ 高

(五) 球体体積 $= \frac{4}{3} \times$ 半徑$^3 \times 3.1416$

用面積之大小,表示事實變量之大小,因有長闊二邊,比較困難;立体除長闊之外,尚須計其高度,比較時之困難尤甚,故用者極少。

第五節 象形畫 象景畫及統計地圖

象形畫乃以實体形像之大小,高低,闊狹,多少等表示事實變量之大小者也。例如以大小不同之士兵人表

示兩國陸軍軍力之厚薄，或以一大戰艦與一小兵船表示兩國海軍力之強弱，皆像形圖之例也。像形圖較其他體積圖更富趣味，故除宣傳或廣告外鮮有用之者。

系統圖亦稱[illegible]，凡事實之[illegible]不重數量而重相互關係者，[illegible]如用此種圖則甚為[illegible]。如[illegible]，主管長官之下分[illegible]各科之下復分若干股等。又如某廠製造某種出品之程序，先將若干種[illegible]如何配合，經過初步製造而成第一種半製品，再經[illegible]而成第二第三種半製品，最後經何步工作而成[illegible]，此種製造程序之表現，乃即系統圖也。

統計地圖者，表示統計事項在地域上分佈關係之圖也。其在地圖之本身性質上，地域鄰接之順序本已顯示無餘，如繪圖者在各地域內就其量之大小加以標繪記號，則其在各地集中或分佈之[illegible]及土地形勢及其他之特質，俱能[illegible]表示。[illegible]各省人口之疏密，農產礦產之多寡等，[illegible]之統計地圖之種類，以其繪製法之不同，可分為下列數種：

(一)點示圖——統計[illegible]以點之大小多少或陰影之深淺表示[illegible]者。此點圖[illegible]於地圖上即成[illegible]用

點之大小代表數量之多少者此種地圖名曰單點地
圖如顯示各地人口之疏密,牲畜之多少等,以小點
之疏密表示之者名曰密點地圖[illegible]以文內略影之多
少表示數量之大小[illegible]
(二)掛線地圖—[illegible]表示[illegible]
深淺多少[illegible]之多寡則[illegible]
最深者代表[illegible]影線較淺者代表少量
(三)顏色地圖—[illegible]各種顏色或同一顏色之
深淺表示數量大小[illegible]用異色時暗濃之色代
表大量,輕淡之色[illegible]用同色則著色愈深代
表數量愈大[illegible]此類地圖如着
色巧妙,配合得當[illegible]時費用甚
大印刷亦不甚容易[illegible]
(四)象形地圖—象形地圖乃以[illegible]之形狀分繪
於各地之圖形,例如[illegible]之多寡即可
[illegible]多少,分[illegible]各地等是
也。
(五)標針地圖—[illegible]之多少,或不同之標
識,釘於地圖之上[illegible]之大小,或所屬之類
別地等等。此種地圖之優點在於標針之隨時可以移動,
故適宜於實地上常有變動者,利用此圖最為[illegible]

便利。

第六节 曲線圖

曲線圖為[illegible]之升降，表示統計事項變動之情形，其構造先[illegible]一角，縱線者謂為縱標，横線者謂[illegible]上之點，謂之縱坐標，横坐標上之尺度謂之横坐標[illegible]在任何一點，縱坐標上所測定之數量為該點[illegible]其在横坐標上所測定之數量為該點之横坐標[illegible]縱横坐標上所測定之點，用直線連接之，即成曲線圖，其升降起伏，即可測定統計事項變遷之實況。

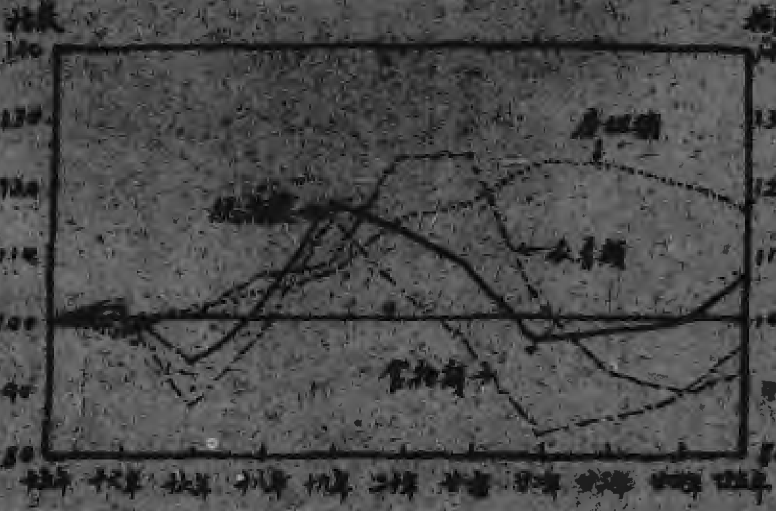
事實之變量，可分為獨立及附屬[illegible]時間數列中，時間為獨立變量，各時期之數量乃[illegible]之經過而不同，故稱附屬變量，在次數表中，[illegible]為獨立變量，次數乃隨之而異，故次數為附屬變量[illegible]獨立變量是置於[illegible]附屬變量之尺[illegible]

曲線圖[illegible]資料之不同，可分為歷史曲線圖[illegible]按縱横尺度其間隔之不同，可分為算術[illegible]曲線圖[illegible]按曲線曲折之不同，又可分為多角曲線圖與圓滑曲線兩種，並分別述之如下：

一等差曲線圖—等差曲線圖又名算術曲線圖，以其在縱橫兩軸上各比度之與比度之間之間隔相等，而其代表數量之差亦相等故名。等差曲線圖以其所用統計材料之不同，又可分為歷史及次數曲線圖兩種：

(1)歷史曲線圖—歷史曲線圖乃為表示歷史上連貫之事實，以觀察其變遷之狀況者也。此種圖形既以時間為基礎，則所集之時期先將各時期之數值順次排列之，而為時間數列，再依時間數列上之變量，立定坐標，繪其曲線，以表明變量與時間間之相互關係。圖三乃為表示上海市工人生活費指數之升降，生活程度之高低，即可一覽無餘。

圖三　上海市工人生活費指數圖



(2)次數曲線圖—次數曲線圖乃用以表示次數分配之狀態，其繪製法大致與普通曲線圖同。惟次數曲線圖以次數之分配為主體，故於繪製之前應將事實之變量編成分組或不分組次數表，以縱坐度劃量次數，橫坐度劃量主體，將各組次數逐一依縱坐度求取縱坐標並順次按橫坐度求橫坐標，再將各坐標用直線聯綴之，即成次數曲線圖。此種圖形普通僅可分為多角次數曲線圖與圓滑次數曲線圖兩種如下：

(A)多角次數曲線圖—此種圖形之繪法先將次數分配表內之次數，依縱坐度劃定各直方之高頂線，再由高頂線之兩端引兩長直線與基線相繼成為直方圖，如圖四之A線。再將各長方頂線之中點，用直線聯綴之，即成多角次數曲線，如圖四之B線。繪製此種曲線圖時應加注意者，即直方圖上代表次數分配之面積，務于可能範圍內應與多角曲線下之面積相等。

(B)圓滑次數曲線圖—繪製圓滑次數曲線圖之目的，欲將各項偶由取樣而發生之不規則現象消去，使準確之分配狀況得以表現。繪製此種圖形時，應以直方圖為曲線上之指導，多角次數曲

線為方向上之指導。美教授威斯康氏，在其所著之數學統計導論中，對於圓滑次數曲線之增長，發有下列三條規律：

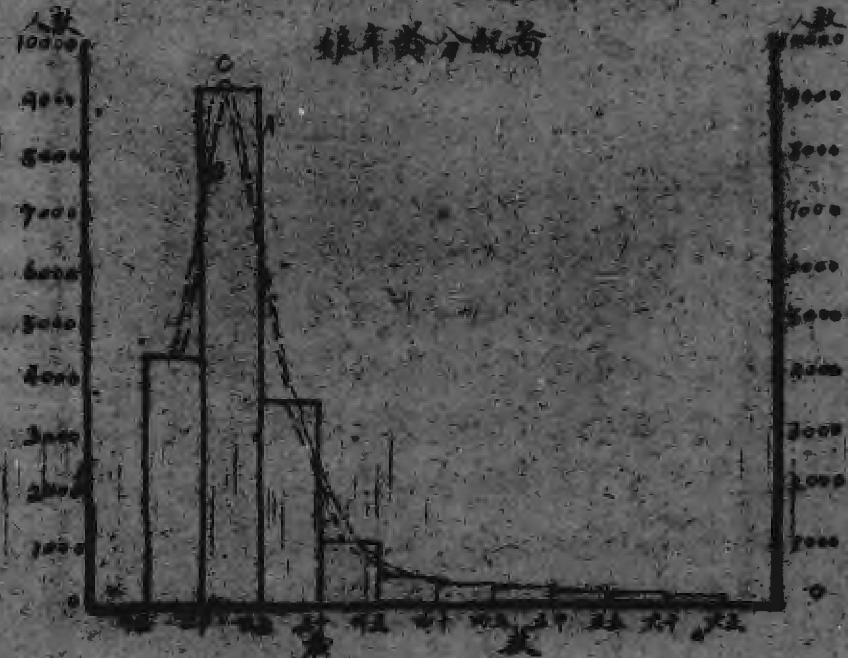
(a)在圓滑次數曲線下包含面積之總和，當等於原來直方圖上各長方形面積之總和。

(b)各個圓滑曲線下之面積，於可能範圍內與各直方之面積相等。

(c)圓滑曲線之轉折應須和緩，並應將多角次數曲線作其方向上之指導。

圖四之C線即為圓滑次數曲線。

圖四　一九一七年美國威士康辛州新娘年齡分配圖



(四)等比曲線圖——等比曲線圖乃以縱軸上相等之距離表示相等比率之增加也。繪製此種圖形之目的，概言之約有三點：

(1)可由同一曲線上觀察各部份之變動率及變動實數。

(2)兩變量相差極大時，在等差曲線圖上往往難於比較，如繪於對數線上，則兩曲線之起伏更顯易於比較。

(3)若數列之變動具有常率者，如用對數紙繪示曲線，則容易推測將來之變動率及實值。

等比曲線圖之縱軸用等比比度，在橫軸上仍用等差比度者，謂之半對數圖。若圖之縱橫軸上俱用對數尺測定縱橫比度者，謂之雙對數圖。繪製半對數曲線圖時應注意之點甚多，茲擇要述之如下：

(1)普通半對數曲線圖之橫比度為等差比度，縱比度為等比比度，然亦有例外者。

(2)半對數曲線圖中無零點，縱線即無基線。

(3)幾何級數繪於半對數圖上，則成一直線表示之，即說明事項之增減率相等。

(4)若在半對數曲線圖上，曲線循直線而向上者，則其增加率不變之，如向下者，則其增加率減，

之。

(5)在對數比度上，兩曲線或一曲線之兩部，倘有相等之垂直升高，表示相等之比例增加，相等之下降，表示相等之比例減少。

(6)兩曲線或同一曲線之兩部份有同樣之斜度時，則兩曲線或同一曲線兩部份變動之百分數亦同。

(7)若繪製者之目的在比較兩變量之增減比率，而不問其絕對數量時，則此種曲線可任意上下移動，使其互相接近，便於比較。

問　題

1. 試比較統計圖與統計表之功用。
2. 繪圖之步驟有幾，試舉述之。
3. 選定圖式應注意何點
4. 基線、輪廓線、指導線及圖示線應如何分別之？
5. 長條圖之種類有幾，試舉述之。
6. 何謂算術比度，橫比度，獨立變量，對應變量，縱坐標，橫坐標，比度尺，試各舉例述之。
7. 試述繪製圖表方式曲線圖之目的及規律。
8. 繪製半對數曲線圖時應注意何點？

習題三

上海市集團結婚新娘年齡分配表

年齡	新娘人數	年齡	新娘人數
16歲—17.9歲	97	24歲—25.9歲	60
18〃—19.9〃	113	26〃—27.9〃	20
20〃—21.9〃	240	28〃—29.9〃	12
22〃—23.9〃	85	30〃—31.9〃	6

試用上列統計資料繪製：

(1)長條圖 (2)[illegible]

習題四

歷年我國[illegible]總值及[illegible]值表（單位百萬元）

年次	[illegible]	[illegible]	年次	[illegible]	[illegible]
民國[illegible]年	[illegible]	226	[illegible]	768	51
[illegible]年	1931	201	[illegible]年	612	48
[illegible]年	1949	237	[illegible]年	536	24
[illegible]年	[illegible]	230	[illegible]年	[illegible]	36
[illegible]年	[illegible]	170	[illegible]年	707	37
二十年	[illegible]	[illegible]			

試用上列統計資料繪製：

(1)[illegible] (2)[illegible]

第四章　平均數

第一節　平均數之特性及種類

統計之目的，在將紛繁之事實，整理而為簡賅之量數，整理之方法為何？即求平均數是。例有兩班學生於此，吾人如欲比較其成績之優劣，於總數求以外，更應就各班中求一代表之平均成績，以為比較之根據。惟此代表全體之平均成績，決非最優之成績，亦非最劣之成績，是為適當中等之成績。故平均數為通常之事項，而非異常之事項；為中心之事項，而非極端之事項。其代表性之高低，須視集中程度之大小而定。

凡一妥善之平均數，應根據全部觀察而得，且應含有簡明之數學性質，並易於計算，不受抽樣變動。蓋平均數既用以代表全體事項者，如果因抽樣變更時即受極度之影響而有大變動者，其代表性亦極低微，不可妥備直論。

統計學上通用之平均數，計有五種：一為算術平均數，二為中位數，三為眾數，四為幾何平均數，五為倒數平均數。茲將求各平均數之方法，以及各平均數之優劣及關係，並分述之如下：

第二節　算術平均數

算術平均數為某事實次數之總和除其項數之商

貳、其計算方法，概別有三，一為普通法，二為簡捷法，三為假定離中差法，茲分別舉例述之如下：

(一)普通法。

(1)由教業表中求算術平均數法

設M為算術平均數。

N為變量項數。

m為變量之數值。

m_1, m_2, m_3, m_n為各變量之數值。

Σ為總和之記號。

$$M = \frac{m_1 + m_2 + m_3 + \cdots\cdots + m_n}{N}$$

$$= \frac{\Sigma m}{N} \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \text{(公式一)}$$

表二 某級學生年齡表

學號	[illegible]	[illegible] (d)	[illegible] (d')	[illegible]	[illegible]	[illegible] (d)	[illegible] (d')
1	16	−0.20	0	12	17	+0.80	+1
2	14	−2.20	−2	13	18	+1.80	+2
3	17	+0.80	+1	14	17	+0.80	+1
4	15	−1.20	−1	15	16	−0.20	0
5	16	−0.20	0	16	16	−0.20	0
6	15	−1.20	−1	17	20	+3.80	+4
7	16	−0.20	0	18	16	−0.20	0

M	f
30	1
35	1
40	1
45	1
50	1

8	13	−3.20	−3	19	17	+0.80	+1
9	16	−0.20	0	20	18	+1.80	+2
10	15	−1.20	−1	總計	320	0	24
11	16	−0.20	0				

應用公式一：$M = $ [illegible]

(2) 由次數表中求算術平均數

設 f_1, f_2, f_3, f_n 為各變量之次數

$\Sigma f = N$ 為各變量次數之總和

$$M = \frac{f_1m_1 + f_2m_2 + f_3m_3 + \cdots + f_nm_n}{f_1 + f_2 + f_3 + \cdots + f_n} = \frac{\Sigma fm}{\Sigma f} = \frac{\Sigma fm}{N}$$

$$= \frac{\Sigma fm}{N} \text{ ……………………（公式二）}$$

表四　某校五十五新生入學數學測驗成績表

分數	組中點 (m)	人數 (f)	fm	離差(m−65) d	fd	以組距為單位之離差(m−65) d′	fd′
30-39.9	35	4	140	−30	−120	−3	−12
40-49.9	45	8	360	−20	−160	−2	−16
50-59.9	55	13	715	−10	−130	−1	−13
60-69.9	65	19	1235	0	0	0	0
70-79.9	75	10	750	+10	+100	+1	+10
80-89.9	85	1	85	+20	+20	+2	+2
總計		55	3285		$\boxed{-290}$		−29

應用公式二：$M = \frac{3285}{55} = 59.73$分

1) $M = \frac{\Sigma fm}{N}$
2) $M = \frac{\Sigma fm}{N}$
Short cut method 3) $\Sigma(m-M)=0$

二簡捷法——欲明瞭用簡捷法來求算術平均數之理論，須先明瞭各變量與其算術平均數之差之和等於零。蓋變量有大於算術平均數者，有小於算術平均數者，此大於算術平均數之差之和與小於算術平均數之差之和[illegible]如下

設 $d_1, d_2, d_3, \ldots$ 為各變量與算術平均數之差

$$M = \frac{m_1+m_2+m_3+\cdots+m_n}{N}$$

$$NM = m_1+m_2+m_3+\cdots+m_n$$

$$0 = (m_1-M)+(m_2-M)+(m_3-M)+\cdots+(m_n-M)$$

$$= d_1+d_2+d_3+\cdots+d_n = \Sigma d$$

表三第三列某級學生之年齡其大於算術平均數者有七，其差額之總和 $\Sigma(+d)$ 為 10.60，其小於算術平均數者有十二，其差額之總和 $\Sigma(-d)$ 為 -10.60，全體變量與算術平均數之差之總和 $\Sigma d = 10.60 + (-10.60)$ 等於零。

各變量與其算術平均數之差之和既為零，如於該計算[illegible]算術平均數，而後將各變量與之比較，其差額之總和[illegible]等於零，是以此[illegible]數[illegible]可得[illegible]算術平均數而得真正算術平均數。

設 M' 為假定算術平均數。

$d_1, d_2, d_3 \ldots d_n$為各變量與假定標準平均數之差，C為假定標準平均數與真正標準平均數之差，求標準平均數

$$M = M' + \frac{\Sigma d}{N} \text{ ------------ (公式三)}$$

例如表三第一列某級學生之年齡與假定標準平均數16歲之差之和為12+(-[illegible])=[illegible]，代入公式。

$$M = 16 + \frac{[illegible]}{[illegible]} = 16.2\text{歲}$$

如由次數表中用簡捷法求標準平均數，則其公式如下：

$$M = M' + \frac{\Sigma fd'}{N} \text{ ------------ (公式四)}$$

例如表四第六列某校五十五新生入學試驗之成績與假定標準平均數65分之差之和為120+(-410)=-290，故其真正標準平均數為：

$$M = 65 + \frac{-290}{55} = 59.73\text{分}$$

(三)假定組中差法

假定組中差法乃以組距為單位，在計算fd'時，俱以組距約之，使fd'之數值較為簡單化，迨求得$\Sigma fd'$後，再乘組距，得其適當之數，或將適當之$\Sigma fd'$為總次數除之，然後以其商加入假定標準平均數，即得真正標準平均數。

設d'為各組中值與假定標準平均數之差被組距除之差。

[illegible]

$$M = M' + \frac{\sum f(m - M')}{N}$$

i 為組距 $\quad d' = \frac{m - M'}{i}$

$$M = M' + \frac{\sum fd'}{N} \times i \quad \cdots\cdots\text{(公式五)}$$

例如表四第八列某校五十五新生入學數學測驗成績其與假定算術平均數65分之假定離中差之和為 $12+(-41)=-29$ 代入上列公式

$$M = 65 + \frac{-29}{55} \times 10 = 59.73\text{分}$$

$\sum(m-M)=0$

$(m-M')$ $\sum(m$ [illegible]

$=\sum(m-M)+\sum(M$ [illegible]

$\sum(m-M')=N(M-M')$ $M-M'=$ [illegible]

$M-M'=\frac{\sum(m-M')}{N}$

$M=M'+\frac{\sum(m-M')}{N}$

第三節 中位數

中位數為全体變量依大小次序排列後中間一項或一點之數值，其求法因量之性質而殊。計算教育人數之中位平均數在教育統計中計算甚簡，在次數[illegible]列中推算較煩。惟中位數與各變量相差絕對值之和為最小。[illegible]附計算中位數之方法分別述之如下：

(一)觀察法——用此法求中位數[illegible]排列其數值之大小，[illegible]用下列公式求之。

設 Mdn 為中位數之地位，

$$Mdn = \frac{N+1}{2} \quad \cdots\cdots\text{(公式六)}$$

求得居中一項之地位後，再察居中一項之數值即得中位數。例有某[illegible]某年某月十五[illegible]之降布量，按其量之多少排列如下：28.4尺，31尺，33尺，37.8尺，39.8尺，42.8尺，43.5尺，45尺，46.2尺，48.8尺，

56.9尺，58.1尺，62.3尺，67.5尺，72.4尺，則其中一項之地位應為：

$$Ml = \frac{15+1}{2} = 8$$

假如數列之任何一端[illegible]第十六項，其數值為[illegible]尺，則中位數是由[illegible]之[illegible]，本條[illegible]新[illegible]一[illegible][illegible]之地位應為：　$Ml = \frac{16+1}{2} = 8.5$

中位數為第八第九兩項之平均數，

$$Md = \frac{45+46.6}{2} = 45.8\text{尺}$$

(2) 次數表數列法——用插法求中位數之公式如下：

設 Md 為中位數，

L 為中位數所在組之下限，

U 為中位數所在組之上限，

F 為中位數所在組以上或以下次數之總和，

f 為中位數所在組之次數，

i 為組距，

$$Md = L + \frac{\frac{N}{2} - F}{f} \times i \text{ ……公式(十四)}$$

$$Md = U - \frac{\frac{N}{2} - F}{f} \times i \text{ ……公式(十五)}$$

例如表四某校五十五新生之入學試驗成績其中位

數應在60分至69.9分一組內，如用上列二公式求得中位數如下。

$$Md = 60 + \frac{\frac{55}{2} - 25}{19} \times 10 = 61.32\text{分}$$

$$Md = 70 - \frac{\frac{55}{2} - 11}{19} \times 10 = 61.32\text{分}$$

(三)四分位數十分位數及百分位數之核計法——中位數之外尚有所謂四分位數者，即將中位數分割為前後二部，於前後二部又各求其中位數，即得四分位數。前半部之中位數名曰第一四分位數，又稱下四分位數。後半部之中位數名曰第三四分位數，又稱上四分位數。第二四分位數即中位數也。此外尚有分數列為十等分或百等分者，名曰十分位數及百分位數。其計算公式如下：

設 Q'_1 為第一四分位數之地位。

Q_1 為第一四分位數。

Q'_3 為第三四分位數之地位。

Q_3 為第三四分位數。

D'_n 為第n十分位數之地位。

D_n 為第n十分位數。

P'_n 為第n百分位數之地位。

P_n 為第n百分位數。

n 為十分位數或百分位數之組數。

L為四分位數、十分位數或百分位數所在組之下限。

U為四分位數、十分位數或百分位數所在組之上限。

F為四分位數、十分位數或百分位數所在組以上或以下次數之總和。

f為四分位數、十分位數或百分位數所在組之次數。

$$Q'_1 = \frac{1(N+1)}{4} \cdots\cdots\text{(公式八)}$$

$$Q'_3 = \frac{3(N+1)}{4} \cdots\cdots\text{(公式九)}$$

$$D_n = \frac{n(N+1)}{10} \cdots\cdots\text{(公式十)}$$

$$P_n = \frac{n(N+1)}{100} \cdots\cdots\text{(公式十一)}$$

$$Q_1 = L + \frac{\frac{N}{4} - F}{f} \times i \cdots\cdots\text{(公式十二甲)}$$

$$Q_1 = U - \frac{\frac{3N}{4} - F}{f} \times i \cdots\cdots\text{(公式十二乙)}$$

$$Q_3 = L + \frac{\frac{3N}{4} - F}{f} \times i \cdots\cdots\text{(公式十三甲)}$$

$$Q_3 = U - \frac{\frac{N}{4} - F}{f} \times i \cdots\cdots\text{(公式十三乙)}$$

$$D_n = L + \frac{\frac{nN}{10} - F}{f} \times i \cdots\cdots\text{(公式十四甲)}$$

$$D_n = U - \frac{\frac{(10-n)N}{10} - F}{f} \times i \cdots\cdots\text{(公式十四乙)}$$

$$P_n = l + \frac{\frac{nN}{100} - F}{f} \times i \text{ ……………（公式十三甲）}$$

$$P_n = U - \frac{\frac{(100-n)N}{100} - F}{f} \times i \text{ ——（公式十三乙）}$$

第四節　衆數

衆數亦稱密集數，其意義最為淺顯，且量數中次數最密集之一點，即衆數也。例如最普通之成績，最普通之工資等，皆係衆數。其計算方法有三：

（一）視察法——從分組次數表中視察衆數，即以次數最多一組之中值為衆數之近似值，例如[illegible]次數最多之一組為[illegible]之衆數。

若[illegible]，則[illegible]之[illegible]相交，[illegible]此相交點在橫[illegible]。

（二）[illegible]

（三）[illegible]——用視察法求得之衆數，多粗率不可靠，且分組時組距之大小縮小，或左右移動，即足左右衆數之數值，故科學家多就衆數兩端次數之多寡定其計算公式如下：

設 M_o 為衆數，

L 為衆數所在組之下限，

U 為衆數所在組之上限。

f_1'為眾數所在組以下一組之次數，

f_1''為眾數所在組以下各組或若干組之總次數。

f_2'為眾數所在組以上一組之次數，

f_2''為眾數所在組以上各組或若干組之總次數。

$$M_o = l + \frac{f_2'}{f_1' + f_2'} \times i \text{ ……(公式十六甲)}$$

$$M_o = U - \frac{f_1'}{f_1' + f_2'} \times i \text{ ……(公式十六乙)}$$

$$M_o = l + \frac{f_2''}{f_1'' + f_2''} \times i \text{ ……(公式十七甲)}$$

$$M_o = U - \frac{f_1''}{f_1'' + f_2''} \times i \text{ ……(公式十七乙)}$$

例如表四某校五十五新生入學試驗成績用上列公式計算眾數如下：

應用公式十六甲 $M_o = 60 + \frac{10}{10+13} \times 10 = 64.35$分

十六乙 $M_o = 70 - \frac{13}{13+10} \times 10 = 64.35$分

十七甲 $M_o = 60 + \frac{17}{25+17} \times 10 = 63.06$分

十七乙 $M_o = 70 - \frac{25}{25+17} \times 10 = 63.06$分

(三)皮爾生公式——皮爾生氏本實驗各偏斜不甚之次數，則是算術平均數與眾數之差甚良，而中位數與算術平均數之差約等於算術平均數與眾數之差之

三分之一.故皮爾生氏定一公式如下:

$$M_o = M - 3(M - M_d) \text{——(公式十八)}$$

例如表四某校五十五新生入學試驗成績之算術平均數59.73分,中位數爲61.32分,應用皮爾生公式求得眾數如下:

$$M_o = 59.73 - 3(59.73 - 61.32) = 64.50\text{分}$$

第五節　幾何平均數

幾何平均數爲N個變量連乘積用N方所得之方根也.在求貨物之平均價格人口之平均增減率及能力之平均增進率等多用之.其計算公式如下:

設 M_g 爲幾何平均數.

W 爲變量之權數.

$$WSA = \frac{\Sigma W \cdot X}{\Sigma W} = \frac{W_1X_1 + W_2X_2 + W_3X_3 + \cdots W_nX_n}{W_1 + W_2 + W_3 + \cdots W_n}$$

W_1, W_2, W_3, W_n 爲各變量之權數.

$$M_g = \sqrt[N]{m_1 m_2 m_3 \cdots m_n} \text{——(公式十九甲)}$$

$$M_g = \text{antilog}\frac{\Sigma \log m}{N} \text{——(公式十九乙)}$$

$$M_g = \sqrt[\Sigma W]{m_1^{W_1} m_2^{W_2} m_3^{W_3} \cdots m_n^{W_n}} \text{——(公式二十甲)}$$

$$M_g = \text{antilog}\frac{\Sigma W \log m}{\Sigma W} \text{(公式二十乙)}$$

[illegible]

[illegible]

[illegible]一倍，戊種跌一倍。

價跌二倍，乙種物價漲一倍，與丁種物價跌一倍，適足相銷，除戊無變動，實際依術平均法求得今年平均物價指數為 $(300+200+100+50+33.33)\div5=136.66$，較其前年漲百分之 36.66。若依幾何平均法求之，則得今年平均物價指數為 $\sqrt[5]{300\times200\times100\times50\times33.33}=100$，適與理想實際情形相符合，此幾何平均數之所以適用於物價指數之統計也。他如複利率、人口增加率及能力增進率之計算，均以幾何平均數求之。

第六節 倒數平均數

倒數平均數為各變量倒數之算術平均數之倒數，在求每小時之平均速率及每元之平均購買量時多用之，其計算公式如下：

設 M_h 為倒數平均數，

則 $$M_h=\frac{1}{\frac{1}{N}\Sigma\left(\frac{1}{m}\right)}\text{ ……………… (公式二十一)}$$

$$M_h=\frac{1}{\frac{1}{\Sigma W}\Sigma\left(\frac{W}{m}\right)}\text{ ……………… (公式二十二)}$$

例有甲乙丙三人，各走一段路，於[illegible]中，甲氣力最大，每小時可行[illegible]，乙次之，可行[illegible]，丙[illegible]

[illegible]里，若[illegible]平均[illegible]，甲乙丙三人[illegible]

可得 $(15+10+8)\div 3=11$ 里，但事實上則不然，蓋以時間為單位則人人所行里數均為十一里，行完了事雖書舟速者亦不能多行，若以工作為單位，則得10.29里，即調和平均數也。

$$M_h = \frac{1}{\frac{1}{3}\times\left(\frac{1}{15}+\frac{1}{10}+\frac{1}{8}\right)} = 10.29\text{里}$$

第七節　各種平均數之比較

一、各種平均數之優劣

(1) 算術平均數——算術平均數係將各變量相加除以變量項數即得，故計算極易，且各變量均參與計算，不僅富有代表性且準確可靠，此其優點也。

如數列中之極端變量多係偶然之現象，計算時應屏棄不顧者，如用算術法則求其平均數反失代表性，且用此種方法求得之平均數往往不合事理，例如每家平均有人口4.2人，在實際上所絕無者，此算術平均數之劣點也。

(2) 中位數——中位數之優點，不僅易於計算且富有代表性，蓋不受極端變量之影響者也，惟中位數僅以數列之中心變量代表全體，如果極端變量與全體事實頗有關係時，中位數即失代表性，且於計算

祇應將各變量依數值之大小，順次排列，整理甚速，乃其本長也。

(3) 眾數——眾數為變量中之最通數，最富有代表性，且甚易求，[illegible]一小[illegible]形之變量中求其[illegible]，且局用此[illegible]算術平均數及中位數，而[illegible]可論。

(4) 幾何平均數——[illegible]各變量之平均，[illegible]方[illegible]，使極端大量之影響稍小，且其計算法可用代數式表示之，合乎數理。但幾何平均數計算繁，殊非常人所能為，且多含抽象之數理性質，不易使人明解，此其缺點。

(5) 倒數平均數——倒數平均數之優點在能改正算術平均數之誤大，且如計算平均時平均速率為元，平均可購物量等，[illegible]用此種平均數。惟[illegible]常人[illegible]，惟倒數平均數常小於算術及幾何平均數，故有時缺乏代表性，且甚費時，在統計分析上，除非不得已，以少用為妙。

(二) 各種平均數間之關係

(1) 在完全對稱之次數分配表中，業得之算術平均數等於中位數等於眾數。

(2)除完全對稱之次數分配外,其他次數分配之算術平均數大於幾何平均數,幾何平均數大於倒數平均數。

(3)次數分配如略呈偏斜,則算術平均數與衆數之差最大,中位數與衆數之差次之,中位數與算術平均數之差,約當算術平均數與衆數之差之三分之一。

(4)兩變量之幾何平均數等於其算術平均數與倒數平均數之幾何平均數。設a為第一變量,b為第二變量

$M=\frac{a+b}{2}$　　$M_h=\frac{1}{\frac{1}{2}\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\right)}=\frac{2ab}{a+b}$

$\because\ \sqrt{ab}=\sqrt{\frac{a+b}{2}\cdot\frac{2ab}{a+b}}$

$\therefore\ M_g=\sqrt{M\cdot M_h}$

(5)次數分配之集中趨勢如依算術定律支配者,衆數與中位數,往往與算術平均數相近;如依幾何定律支配者,則衆數與中位數常與幾何平均數相近。

問　　題

1. 何謂平均數?測定平均數之目的何在?其特性如何?
2. 測定算術平均數之方法有幾?試略述各計算法之核計步驟。
3. 用次數表核計法計算中位數與衆數之步驟如何?
4. 中位數與衆數之代表性如何?試詳述之。
5. 在何種情形下,方可採用幾何及倒數平均數?

6. 各種平均數間之關係如何？試申述之。

習題五

試用習題一統計資料求以下諸平均數。

(1) 用普通法求算術平均數。

(2) 用簡捷法求算術平均數。

(3) 用視察法求中位數。

習題六

玉米穗之長度表

長度（吋）	次數(f)	長度（吋）	次數(f)
3 — 3.99	1	8 — 8.99	62
4 — 4.99	1	9 — 9.99	119
5 — 5.99	3	10 — 10.99	80
6 — 6.99	14	11 — 11.99	19
7 — 7.99	25	12 — 12.99	2

試用上列玉米穗之長度表計算以下諸平均數。

(1) 用普通法求算術平均數。

(2) 用簡捷法或假定離中差法求算術平均數。

(3) 用次數表插補法求中位數第一及第三四分位數第三及第九十分位數第十五及第六十五百分位數。

(4) 用次數表插補法求衆數。

(5)用皮保生公式求[illegible]

習題七

某市七等穀米市價表

等級	每擔市價	每元可購斤數	某年各級購買量
甲	8 13.16	7.6	301市石
乙	12.50	8.0	603
丙	11.76	8.5	1,014
丁	11.24	8.9	1,205
戊	10.31	9.7	1,498
己	10.00	10.0	2,013
庚	9.09	11.0	2,576
總計			9,260市石

試用上列穀米市價表,求以下諸數:

(1)求簡單算術平均市價

(2)求加權算術平均市價

(3)求簡單倒數平均數,(平均每元可購穀米量)

(4)求加權倒數平均數,( )

第五章 離中差與偏態

第一節 離中差之種類

平均數所表示者為一事實全体變量之中心地位，或為平均變量之集中點，而非全体變量之分佈情況，故若干變量之離中差，故僅有平均數之概念，吾人尚不能謂已可窺其全貌，平均數之外，尚須測定離中差與偏態，事實之真相方能顯示。蓋凡平均數之意義，因離中差之大小而定，離中差愈大，平均數之價值愈小，離中差愈小，平均數之價值愈大，故平均數為全体變量之代表數，離中差乃表示平均數之非代表性者也。

測量離中差之方法不一，言其形式，則有用含有度量之數目以表示者，或用一抽象數目以表示者，前者謂之絕對離中差，後者謂之相對離中差，或離中係數。言其原則，則或有以一距離以表示者，或有以各變量與平均數相差之平均數以表示者，或有[illegible]公式之某係數以表示者。因此離中差有全距、四分位差、平均差、標準差及各種離中係數等，茲分述於下。

第二節 全距及四分位差

全距為事實全体變量中最大變量與最小變量之差異數，在枚舉及不分組次數分配中，計算最為簡易，其式如下：

設R_g為全距，[illegible]
[illegible]為數值最小之變量值。
M_a為數值最大之變量值。

$$R_g = M_a - M_i \quad\text{……（公式二十三）}$$

例如表三某級學生之年齡最大者為20歲，最小者為13歲，故全距為20－13＝7歲。

一、在分組次數表內求全距法，亦須將組值最高組之上限減組值最低組之下限即得。設L_i為組值最低組之下限，U_a為組值最高組之上限，則

$$R_g = U_a - L_i \quad\text{……（公式二十四）}$$

例如表四某校五十四新生入學試驗成績，其組值最大組之上限為90分，組值最小組之下限為30分，故全距為90－30＝60分。

二、在次數分配均勻之數列中，全距愈小，集中趨勢愈大；反之，全距愈大，集中趨勢愈小。但此未易有也。以兩極端變量之差，代表全體中離中之高低，其受極端變量影響之巨大，不待智者而後知，故不確，不言可喻。且兩數列之全距相等，而離中之趨勢不等者有之；離中趨勢相等，而全距不等者亦有之。故全距之計算雖極簡便，然以其缺點頗多，精確之統計者棄而不用。

全距受兩極端變量影響之缺點，前已言之，通常為免受

設兩極端變量之影響甚大者，兼取第一及第三四分位數之差之半用以間接表示離中趨勢者，其計算公式如下：

設 Q.D. 為四分位差、

Q_1 為第一四分位數。

Q_3 為第三四分位數。

$$Q.D. = \frac{Q_3 - Q_1}{2} \quad \text{……（公式二十二）}$$

表五 某校教職員月薪分配表

月薪	中值(m)	人數	[illegible]	fd	d''	fd''
30-39.9	35	6	38.16	228.96	4	24
40-49.9	45	8	28.16	225.28	3	24
50-59.9	55	11	18.16	199.76	2	22
60-69.9	65	14	8.16	114.24	1	14
70-79.9	75	19	1.84	34.96	0	0
80-89.9	85	12	11.84	142.08	1	12
90-99.9	95	8	21.84	174.72	2	16
100-109.9	105	5	31.84	159.20	3	15
110-119.9	115	4	41.84	167.36	4	16
120-129.9	125	2	51.84	103.68	5	10
130-139.9	135	1	61.84	61.84	6	6
總計		90		1612.08		159

$$Q_1 = 50 + \frac{\frac{90}{4} - 14}{11} \times 10 = 57.73$$

$$Q_3 = 80 + \frac{\frac{3\times 90}{4} - 58}{12} \times 10 = 87.92$$

$$Q.D. = \frac{87.92 - 57.73}{2} = 15.10$$

設Q_3與Q_1間之數值為 md，則全体变量之半，必在 md ± Q.D. 之距離中，前例 md = 57.73 + 15.10 = 72.83 全体变量之半當在 72.83 ± 15.10 之間。次数分配如完全對称者，則 md 等於 Md，前例略有偏度，故兩者不能相符。

四分位差雖受首尾兩端特殊变量之影響雖小，然以全体变量中一半之差異状態代表全体变量之離中趨勢，其代表性究不充分。且四分位差之計算，僅取第一及第三四分位数核算之，縱使其前其後之变量有極大之变動，而四分位差仍屹然不動，故就感覺性言之，四分位差亦不得謂為善之離中差也。然苟使吾人不欲苛求精確，則全距與四分位差意義既甚顯明，計算又極簡捷，亦僅有其可取之道焉。

第三節 平均差

平均差乃係各变量與其算術平均数、中位数或衆数之差之算術平均数。各項变量有大於平均数者，亦有小於平均数者，故離中差有正有負，然在計算平均差時，不論離中差之為正為負，均須相加以求其平均，其計算

異

統計家俱以中位數為比較之標準，蓋各變量與中位數相差絕對值之和為最小，故取中位數作為比較之標準最為合理。[illegible]計平均數及眾數以計平均差者。茲將其計算公式分列如下：

一、普通法：

(甲) 由核舉表中求平均差法——由核舉表中用普通法求平均差，乃將各變量與中位數比較之，得各變量與中位數之差，[illegible]，以變量項數除之即得。

設 M.D. 為平均差。

Md 為中位數。

N 為變量項數。

m 為變量之數值。

$m_1, m_2, m_3 \ldots m_n$ 為各變量之數值

d 為各變量與中位數之絕對差。

Σ 為總和之記號。

$$M.D. = \frac{(m_1 - Md) + (m_2 - Md) + \cdots + (m_n - Md)}{N}$$

$$= \frac{\Sigma(m - Md)}{N} = \frac{\Sigma d}{N} \text{------(公式二十六)}$$

第廿六表　某市紡織廠平均每日產布量表

組次	產量(m)	x Ma=9981	x M=[illegible]	x²	d M=[illegible]	d²
第一	3675疋	2216疋	-189.77	36012.6529	+221.6	49106.56
第二	3982.6	[illegible]	[illegible]	36198.1089	-190.5	36290.25

第三	[illegible]	[illegible]	−103.47	[illegible]	[illegible]5.3	18,306.09
第四	[illegible]7	[illegible]	[illegible]10.43	[illegible]849	[illegible]21.4	457.96
第五	589.1	0	+31.83	[illegible]489		
第六	613.2	24.1	+55.93	3,12[illegible]	+24.1	580.81
第七	624.4	35.3	+67.13	[illegible]506.[illegible]69	+35.3	[illegible].09
第八	678.1	89.0	+120.83	[illegible]889	+89.0	7,921.00
第九	723.0	133.9	+165.73	27,[illegible]329	+133.9	17,929.21
總計	5,015.1尺	801.尺	0	122,777.7207	−286.5	[illegible]387.77

M[illegible] $= \frac{9+1}{2} = 5$　　$Ma = 589.1$尺

$M.D. = \frac{851.1}{9} =$ [illegible]尺

(2) 由次數表中求平均差法

設 f 為變量之次數。

$$M.D. = \frac{\Sigma f(m-Ma)}{N} = \frac{\Sigma f x}{N} \text{......（公式二十七）}$$

例如表五某校教職員月薪之中位數為 \$73.16，第五列各組中值與中位數相差絕對值乘相當次數之總和為 1,612.08，故平均差為 $\frac{1612.08}{90} = \$17.91$

(三) 簡捷法——用簡捷法求平均差之公式如下：

設 Nb 為中位數大於假定中位數，則 Na 為小於真正中位數各組次數之總和。若中位數小於假定中位數，則 Na 為大於真正中位數各組次數之總和。

Na 若中位數大於假定中位數，則 Nb 為大於真正

中位數各組次數之總和，若中位數小於假定中位數，則N_a為小於真正中位數各組次數之總和。

c 為組距除真正中位數與假定中位數之絕對差。

Σ' 為各組中值與假定中位數之假定絕對差。

i 為組距。

$$M.D.=\frac{\Sigma f|d'|+(N_a-N_b)c}{N}\times i \quad \text{——(公式二十八)}$$

例如表五某校教職員月薪之真正中位數為\$73.16，假定中位數設為\$75，則$N_a=51$，$N_b=39$，$c=\frac{75-73.16}{10}=0.184$，$i=10$，代入公式得

$$M.D.=\frac{159+(51-39)\times 0.184}{90}\times 10=\$17.91$$

(三)校正平均差法——用上列兩法計算平均差，不甚準確。蓋中位數所在組之次數，自與其他各組相同，平均分配於該組之內，若用中值代表該組各變量之平均數值，自不確當。例如表五某校教職員月薪之真正中位數，應含於\$70至\$80一組之中，則該組教職員十九人之月薪，有大於真正中位數者，亦有小於真正中位數者，其數量又不相等，故於計算平均差之校正數時，應分為兩部：一為$(N_a-N_b)c$，一為 [illegible]，其全部之計算公式如下：

設 S_c 為校正平均差。

N_a 若中位數大於假定中位數時，則N_a為中位

数所在组以下各组次数之总和[illegible]若[illegible]假

定中位数[illegible]所在组[illegible]次数之

总和[illegible]

N_2若中位数[illegible]

以上各组次数[illegible]假定中位数,

则N_2[illegible]以下各组次数之总[illegible]

N_2[illegible]

S_c = [illegible]

附加表五某校[illegible]

A [illegible]75 [illegible]

$M =$ [illegible] $\frac{90}{2}-39$ [illegible]

$c = \frac{75-73.16}{10} = 0.184$

$S_m = \frac{158+(51-39)\times 0.184}{90}$ [illegible]

$S_c = \frac{159+(32-39)\times[illegible]}{90}$ [illegible] $=803.12$

[illegible]

[illegible]

[illegible]中位数[illegible]73[illegible]中位数[illegible]

[illegible]之差为[illegible]

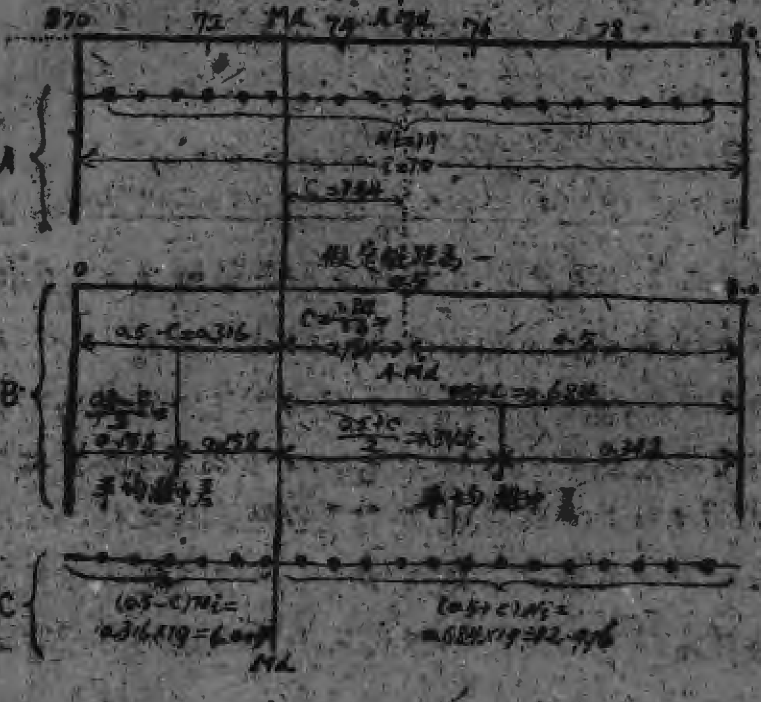
[illegible] $c=0.184$

在假定中位数之右距上限为[illegible],在真中位数之

右距上限为[illegible] $c=0.684$,[illegible]

平均離中差為 $\frac{0.5+c}{2}=0.342$。真正中位數之存距下限為 $0.5-c=0.316$，在此組距内各變量之平均離中差為 $\frac{0.5-c}{2}=0.158$。C 為乃求十九項平均離中之數值，其大於真正中位數者，計 $(0.5+c)\times N_i=(0.5+0.184)\times19=12.996$ 項，小於真正中位數者，計 $(0.5-c)\times N_i=(0.5-0.184)\times19=6.004$ 項。如將B部與C部合併觀之，即知12.996項之平均離中差為0.342，6.004項之平均離中差為0.158。十九項離中差之總數為5.3933，即第二部之校正數也。

圖五　某校教職員月薪七十元至八十元組分析圖



第四節　標準差

平均差乃以各變量與中位數之差不分正負合併計算，就數理上言之，未免牽強，皮爾生氏因而發明標準差，以各變量與平均數之差，各自自乘消除負號，再求平方差之算術平均數之方根，即得標準差。平均差之計算，常以中位數為中心，而標準差之計算則以算術平均數為中心。蓋平均差以從中位數計算為最小，而標準差則以從算術平均數計算者為最小。至於計算標準差之方法約有下列二種：

(一)普通法

(1)由次數表中求標準差——由次數表中用普通法求標準差，乃以各變量與其算術平均數相差平方之算術平均數開方之即得。

設σ為標準差，

M為算術平均數，

d為各變量與算術平均數之差。

$$\sigma = \sqrt{\frac{(m_1-M)^2+(m_2-M)^2+\cdots\cdots+(m_n-M)^2}{n}}$$

$$= \sqrt{\frac{\Sigma(m-M)^2}{n}} = \sqrt{\frac{\Sigma d^2}{n}} \cdots\cdots\cdots\cdots(公式三十)$$

例如表六　某市九市縣平均每日產布量之算術平均數為557.2085，各變量與其算術平均數之差之平方之和為122,717.7205。應用公式三十得標準差

182 差如下：

$$\sigma=\sqrt{122,717.7[illegible]}=116.77$$

(2) [illegible]

[illegible]

[illegible]	[illegible]	30	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]
20–39.9	30	67	[illegible]	−42	1,764	107,8[illegible]	[illegible]	97,6[illegible]	[illegible]
40–59.9	50	84	[illegible]	−22	[illegible]	[illegible]	−20	−1,680	33,6[illegible]
[illegible]	[illegible]	75	[illegible]	−2	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]
[illegible]	[illegible]	79	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	+79	[illegible]
100–119.9	110	58	6,380	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	+116	232
120–139.9	130	20	2,600	+58	3,364	[illegible]	[illegible]	+60	[illegible]
總計	[illegible]	[illegible]	28,800		[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]

$$M=\frac{28,800}{[illegible]}=[illegible]$$

$$\sigma=\sqrt{\frac{[illegible]}{[illegible]}}=[illegible]$$

[illegible]

[illegible]

假定衍術平均數未必適與真正[illegible]術平均數相等，此[illegible]假定[illegible]術平[illegible]數平[illegible]之[illegible]真正[illegible]術平均數非誠者[illegible]有多少錯誤，故於用此求標準差時應先減去此[illegible]之公式列下：

設 C 為假定[illegible]術平均數與真正[illegible]術平均數之差，

d' 為各變量與假定[illegible]術平均數之差。

$$\sigma=\sqrt{\frac{\Sigma fd'^2}{N}-\left(\frac{\Sigma fd'}{N}\right)^2}=\sqrt{\frac{\Sigma fd'^2}{N}-C^2}\text{ ……（公式三十二）}$$

例如表六第六列 $\Sigma fd'$ 為 -2256.3，第七列 $\Sigma fd'^2$ 為 1312839.97，代入公式得：

$$\sigma=\sqrt{\frac{1312839.97}{9}-\left(\frac{-2256.3}{9}\right)^2}=125.27$$

(2) 由次數表中求標準差——由次數表中用簡捷法求標準差之公式如下：

$$\sigma=\sqrt{\frac{\Sigma fd'^2}{N}-\left(\frac{\Sigma fd'}{N}\right)^2}=\sqrt{\frac{\Sigma fd'^2}{N}-C^2}\text{ ……（公式三十三）}$$

例如表[illegible]第九列 $\Sigma fd'$ 為 800，第十列 $\Sigma fd'^2$ 為 $338,400$，代入公式得：

$$\sigma=\sqrt{\frac{338400}{250}-\left(\frac{800}{250}\right)^2}=36.02$$

(3) [illegible]中差[illegible]

[illegible]

可得其組之標準差。

設d'為各組中值與假定均數對于組距之假定離中差。

$$\sigma=\sqrt{\frac{\Sigma fd'^2}{N}-\left(\frac{\Sigma fd'}{N}\right)^2}\times i \quad \text{……（公式二十四）}$$

例如表七第十二列$\Sigma fd'$為40，第十三列則$\Sigma fd'^2$為846，代入公式得

$$\sigma=\sqrt{\frac{846}{200}-\left(\frac{40}{200}\right)^2}\times 20=\text{[illegible]}$$

第五節　離中係數

在比較兩種或兩種以上不同事項之離中程度時，應先計算離中係數。蓋事物之單位不同，如身之長尺寸之與升斗，其間固無比較之可能；即事物單位相同而平均數不同者，亦不能由離中差以比較其離中程度之大小。如大學生與中學生每年費用分配之計，雖大學生每年費用遠過於中學生，其離中差自亦較大，吾人殊不能遽謂大學生每年費用之分配，其離中程度遠較中學生費用之分配為高。故欲比較兩種或兩種以上單位不同或單位相同而平均數不同事物之離中程度時，應將絕對離中差化為相對之離中係數，然後比較之。相對意義至於化絕對離中差為相對離中差之方法，不外以平均數或原來之變量值除絕對離中差，銷除其原有單位而為抽象之數目。有時因欲增大其變異起見，更將離中係數

來100而以百分數表示之者，茲各分述於下：

(一)全距係數——求全距係數之方法甚多，有以論平均數除全距者，有以中位數或眾數除全距者，各不相同，甚繁冗矣。而克雷可斯氏(H. Secrist)乃僅以最大及最小變量值之和除之，其公式如下：

設 V_{Rg} 為全距係數，

$$V_{Rg} = \frac{R_g}{m_1+m_n} \text{……(公式三十五)}$$

例如表三某級學生之年齡最大者為20歲，最小者為13歲，全距為7歲，全距係數為

$$V_{Rg} = \frac{7}{13+20} = 0.212$$

用最大及最小變量值計算全距係數為最簡捷，且不甚用計算平均數、中位數或眾數求係數時須先求各平均數之煩，且此種係數最小為零，最大為一，數值界限分明，故較用其他平均數求得之係數略勝一籌。

(二)四分位差係數——求四分位差係數之方法計有二種，其一為覓司福鼓氏(N[illegible])所創者，其公式如下：

設 $V_{Q.D.1}$ 為甲種四分位差係數，

$$V_{Q.D.1} = \frac{Q_3-Q_1}{Md} \text{……(公式三十六)}$$

其二為鮑萊氏(A. L. Bowley)所創者，其計算公式如下：

設 $V_{Q.D.2}$ 為乙種四分位差係數，

$$V_{Q.D.2} = \frac{Q_3-Q_1}{Q_3+Q_1} \text{……(公式三十七)}$$

如若相關以乙種四分位差係數[illegible]以其[illegible]
[illegible]月薪之分配，Q_1為57.73，Q_3為87.92，代入公式得

$$V_{Q.D.}=\frac{87.92-57.73}{87.92+57.73}=0.207$$

(三)平均差係數——平均差係數[illegible]平均差[illegible]平均差[illegible]中位數為[illegible]以中位數除之[illegible]公式[illegible]

設 $V_{A.D.}$ 為平均差係數，

$$V_{A.D.}=\frac{A.D.}{Md}\text{……(公式三十八)}$$

例如表[illegible]月薪之分配，其中位數為78.16，平均差為[illegible]，代入公式得

$$V_{A.D.}=\frac{20.91}{78.16}=0.268$$

(四)標準差係數——求標準差係數之方法[illegible]即以算術平均數除標準差即得。

設 V_σ 為標準差係數，

$$V_\sigma=\frac{\sigma}{M}\text{……(公式三十九)}$$

例如表[illegible]之分配，其算術平均數為[illegible]，標準差為29.02，代入公式得

$$V_\sigma=\frac{29.02}{[illegible]}=[illegible]$$

第六節 各種離中差之比較

(一)各種離中差之特點

(1)就計算之繁簡言——若論計算之繁簡，各種離中差中以全距及四分位差之計算為最簡便，平均差次之，標準差又次之。

(2)就精確之程度言——若論精度，則全距不如四分位差，四分位差不如平均差及標準差。

(3)就極端之影響言——全距即由兩極端變量中求得——一極端變量之變易，即可改變全距之數值，故全距最不足恃。標準差與平均差之大小與全体變量均有關係，故較穩定。

(4)就數學之原理言——計算平均差時不顧正負號，在數理上殊屬牽強，標準差則合乎數理化。

(5)就取樣之增減言——通常標準差受取樣之影響最小。

(6)就實際上應用言——標準差應用最廣，平均差次之。

(二)各種離中差與變量之關係

(1)全距——全距乃兩極端變量之差，全体變量盡在此距離中。

(2)四分位差——在第三及第一四分位數間之中點，向左右各引取四分位差之距離，則此距離中當有全体變量之半。

(3)平均差——在完全對稱或不甚偏斜之次數分配中，於平均數之左右各取三·卜五倍之平均差則

一個時間

我若同在一個時間，[illegible]

在此距離中，約可包含全体変量百分之九十九。

(ㄙ)標準差——在完全對称或不甚偏斜之次數分配中，從算術平均數之左右，各取一標準差之距離，在此距離中，約包含全体変量之三分之二，若各取二標準差之距離，約可包含全体変量之百分之九十五，若各取三標準差之距離，約可包含全体変量之百分之九十九。故六倍標準差之距離，約等於全距之長。

(三) 各種離中差間之關係

凡統計事實含有量數甚多，且次數分配極為對称者，從中求得各離中差間之關係如下：

$Q.D. = 0.8453\ M.D.$　　$M.D. = 0.7979\ \sigma$

$Q.D. = 0.6745\ \sigma$　　$\sigma = 1.4826\ Q.D.$

$M.D. = 1.1843\ Q.D.$　　$\sigma = 1.2533\ M.D.$

第七節　偏態

表示事實之集中傾向者，為平均數，表示事實之離中趨勢者，為離中差及離中係數，然事實之分配，有右傾者，亦有左傾者，如僅計算其平均數或離中差，則仍不能窺其全豹。偏態與偏態係數，即表示中心數值兩旁次數分配對称或不對称之狀態者也。

偏斜之測定，如用原有單位表示者，謂之偏態，如欲

對其兩種事實偏斜之程度，則應化絕對偏差為相對偏態，度量數字為抽象數目，即所謂偏態係數是也。在次數分配完全對稱之數列中，算術平均數、中位數及眾數俱合於一點，偏態及偏態係數俱等於零，即不具偏態。若次數之分配不對稱而發生或右傾斜者，則三者各不相同，其差數之大小，即足表示偏斜程度之高低者也。

離中係數之測定為離中差與平均數之比，而偏態係數則為偏態與離中差之比。蓋偏態所以表示離中分配之情形，在計算時所用分母當為離中差而非平均數。至於測定偏態之公式，其普通應用者有二：

一、皮爾生公式

皮氏方法係利用算術平均數、中位數及眾數三者之差異為測定偏態係數之標準。蓋次數分配完全對稱者，算術平均數等於中位數，中位數等於眾數。若次數分配略呈右傾斜，則算術平均數因常在重心處受極端數量之影響而向右移動甚多，中位數稍受次數多少之影響而向右移動較少。反之，若次數分配略向左傾斜，則算術平均數與中位數均向左移動，惟算術平均數之移動程度較大於中位數。至於眾數則不為次數分配之向右或向左偏斜，始終能保其原有位置，故其變動最小。茲將皮氏公式列下：

設 S_k 為偏態，V_{sk} 為偏態係數。

$$S_k = M - M_o \text{ ………………（公式四十）}$$

$$V_{sk} = \frac{M - M_o}{\sigma} \text{ ………………（公式四十一）}$$

惟眾數之數值不易確定，故上列兩公式有時頗難應用。然在偏斜不甚之數列中，根據皮爾生氏之實驗，中位數與算術平均數之差，約等於算術平均數與眾數之差之三分之一，故上列兩公式可改為：

$$S_k = M - [M - 3(M - M_d)] = 3(M - M_d) \text{（公式四十二）}$$

$$V_{sk} = \frac{3(M - M_d)}{\sigma} \text{ ………………（公式四十三）}$$

例如表六某鋼鐵廠工人工資之分配，其 $M = \$72.00$，$M_d = \$70.95$，$M_o = \$69.69$，$\sigma = \$29.02$，代入公式求得：

$$S_k = 72.00 - 69.69 = 2.31$$

$$V_{sk} = \frac{72.00 - 69.69}{29.02} = +0.080$$

如用公式四十二及四十三計算則：

$$S_k = 3(72.00 - 70.95) = 3.15$$

$$V_{sk} = \frac{3(72.00 - 70.95)}{29.02} = +0.109$$

該廠工人工資之分配為正偏態，亦即右偏態，其眾數以上之次數多於以下之次數也。

(二)鮑來公式

鮑來氏(A.L. Bowley)計算偏態及偏態係數之方法，係利用第一及第三四分位數與中位數之關係，測

定之。蓋次數分配如系完全對稱者，則中位數與第一四分位數之差，等於第三四分位數與中位數之差。若次數分配略向右偏，則第三四分位數因受偏量數之影響，向右移動甚多，中位數與第一四分位數因受影響較小，向右移動甚微。反之，若次數分配向左偏，則第一四分位數因受偏量數之影響，向左移動甚多，中位數與第三四分位數因受影響較小，向左移動甚微。鮑氏即本此原則定其公式如下：

$$SK=(Q_3-Md)-(Md-Q_1)=Q_3+Q_1-2Md \quad (公式四十四)$$

$$V_{SK}=\frac{(Q_3-Md)-(Md-Q_1)}{Q.D.}=\frac{Q_3+Q_1-2Md}{Q.D.} \quad (公式四十五)$$

例如表五某技數職員月薪之分配，其Q_1為\$57.73，Q_3為\$87.92，Md為\$73.16，$Q.D.$為\$15.10，代入公式求得：

$$SK=57.73+87.92-2\times73.16=-0.67$$

$$V_{SK}=\frac{57.73+87.92-2\times73.16}{15.10}=-0.0444$$

問　　題

1. 試述離中差之重要及種類。
2. 何謂全距及四分位差？試述其計算法及特性。
3. 求平均差之方法有幾？以何種方法為最便捷？試申述其理由。
4. 平均差之缺點何在？校正之方法如何？
5. 用假定離中差法求標準差之步驟有幾？試詳述之。

6.試述[illegible]中差[illegible]及[illegible]中差與全[illegible]之關係。

7.何謂[illegible]中位數？其意義如何？

8.試略述決定各種[illegible]中位數之方法。

9.何謂偏態？測定偏態之方法有幾？

10.標準偏態係數之用時何在？其意義如何？試略述之。

習　題　八

甲乙兩機關職員年齡分配表

年　齡	甲機關人數	乙機關人數
18至21.9歲	151	3
22—25.9	24	6
26—29.9	46	8
30—33.9	61	11
34—37.9	42	18
38—41.9	30	25
42—45.9	[illegible]	[illegible]
46—49.9	[illegible]	[illegible]
50—53.9	[illegible]	[illegible]
54—57.9	7	[illegible]
58—61.9	[illegible]	[illegible]

[illegible]

82 − 65.9 $\frac{3}{285}$ $\frac{15}{300}$

總計

)試用上列分組次數表計算以下諸離中差：

(A)求兩机關職員年齡之全距及四分位差。

(B)用普通法及簡捷法求兩机關職員年齡之平均差及標準差。

(C)求兩机關職員年齡之校正平均差。

(D)試繪示各種離中差在曲線圖中所居之地位。

(E)試繪出求校正平均差之圖式。

)試用上列統計資料計算以下諸離中係數：

(A)全距係數。

(B)甲種四分位差係數。

(C)乙種四分位差係數。

(D)平均差係數。

(E)標準差係數。

(F)試比較兩机關職員年齡之離中程度。

)試用上列統計資料計算偏態及偏態係數。

(A)用皮爾生公式求兩机關職員年齡之偏態及偏態係數。

(B)用鮑來公式求兩机關職員年齡之偏態及偏態係數。

(C)試比較[illegible]兩机關職員年齡之偏態情形。

第六章　相關

第一節　相關之意義及種類

社會現象多是紛紜錯綜,驟視之似各自生滅,風馬牛不相及,然若詳為分析,則其間每有因果關係之存在,例如幣值之漲落,影響物價之升降,雨量之多寡,影響農產品收穫量之豐歉等是也。惟欲知其相關程度之或大或小,為正為負,則需求一簡單之數字以表示之,此簡單之數字為何,即相關係數是也。

相關之種類,若就方向言,約可分為三種:(一)為正相關,例如批發物價漲,零售物價隨之而漲,批發物價跌,零售物價隨之而跌,其漲跌相互感應而同向變動者,謂之正相關。(二)負相關,例如某種農產品產量多,則其價格跌,產量少,則其價格漲,其產量之多少與價格之漲跌相互感應而背向變動者,謂之負相關。(三)無相關,例如人之美醜與學業絕無關係者,乃即無相關也。

相關之種類,如按計算方法之不同,又可分為(一)直線相關(二)非直線相關(三)等級相關(四)相應相關及(五)累積相關等數種。

兩種事實之相關,如屬完全正者,則結果應為+1,如屬完全負者,則結果應為-1,如毫無關係者,則結果為零。然事實之相關程度,無論為正為負,鮮能達完全之地步。

者故相關係數終在+1與-1之間據勒格氏(H.O.Rugg)分析,0至.2為微相關,.2至.4為低相關,.4至.7為顯相關,.7至1為高相關。勒氏之假想分級雖如上述,然在實際應用時,仍須視事實間相互關係之深淺而定。

第二節　直線相關

直線相關係數,通常以r代之,其計算方法,以英人高爾登(F. Galton)發其端,其門人皮爾生竟其成,其計算公式如下:

設r為直線相關係數,簡稱相關係數,

X為甲數列,亦稱自變量。

Y為乙數列,亦稱依變量。

X_1, X_2為甲數列之第一及第二變量。

Y_1, Y_2為乙數列之第一及第二變量。

M_x為甲數列之算術平均數。

M_y為乙數列之算術平均數。

N為次數之總數。

d_x為甲數列中各變量與其算術平均數之差。

d_y為乙數列中各變量與其算術平均數之差。

σ_x為甲數列之標準差。

σ_y為乙數列之標準差。　Σ為總和之記號。

$$r=\frac{\left(\frac{X_1-M_x}{\sigma_x}\times\frac{Y_1-M_y}{\sigma_y}\right)+\left(\frac{X_2-M_x}{\sigma_x}\times\frac{Y_2-M_y}{\sigma_y}\right)+\cdots\cdots\left(\frac{X_n-M_x}{\sigma_x}\times\frac{Y_n-M_y}{\sigma_y}\right)}{N}=\frac{\Sigma d_x d_y}{N\sigma_x\sigma_y}$$

$$=\frac{\Sigma d_x d_y}{\sqrt{\Sigma d_x^2\,\Sigma d_y^2}}\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\text{(公式四十六)}$$

皮氏公式,驟視之,似甚難解,然細審之,乃即甲數列與乙數列各與其算術平均數相差之積之平均離中係數。其計算法分普通及簡捷兩種。

(一)普通法

(1)由非相關表中求相關係數——由非相關表中用普通法求相關係數,應先將自變數(X)按照某種特性順次排列(如自變量係時間數列,則按時間之先後順次排列;如係空間數列,則多按自變量之大小先後排定之)。而附變數(Y)則隨自變數之先後排定。次求自變數與附變數之算術平均數,並核算自變量與附變量各與其算術平均數之離中差。再將各變量之離中差相乘,加註正負符號,得$d_x d_y$;總和之得$\Sigma d_x d_y$。求求$\Sigma d_x^2\cdot\Sigma d_y^2$之方根,以此方根除$d_x d_y$之和,即得相關係數。

表八 歷年我國輸出入貨值相關表(單位百萬元)

年次	輸入淨值 X	d_x	d_x^2	輸出淨值 Y	d_y	d_y^2	$d_x d_y$
民國十年	1,412	−171.67	29,470.59	937	−179.67	32,281.31	+30,843.95

年次	X.	d_x	d_x^2	Y	d_y	d_y^2	d_xd_y
民國十一年	1,472	-111.67	12,470.19	1,020	-96.67	9,345.09	+10,795.14
十二年	1,439	-144.67	20,929.41	1,173	+56.33	3,173.07	-8,149.26
十三年	1,586	+2.33	5.43	1,202	+85.33	7,281.21	+198.82
十四年	1,477	-106.67	11,378.49	1,210	+93.33	8,710.49	-9,955.51
十五年	1,752	+168.33	28,334.99	1,347	+230.33	53,051.91	+38,771.45
十六年	1,578	-5.67	32.15	1,431	+314.33	98,803.35	-1,782.25
十七年	1,863	+279.33	78,025.25	1,545	+428.33	183,466.59	+119,645.42
十八年	1,972	+388.33	150,800.19	1,582	+465.33	216,532.01	+180,701.60
十九年	2,041	+457.33	209,150.73	1,394	+277.33	76,911.93	+126,831.33
二十年	2,233	+649.33	421,629.45	1,417	+300.33	90,198.11	+195,013.28
廿一年	1,635	+51.33	2,634.77	768	-348.67	121,570.77	-17,897.23
廿二年	1,346	-237.67	56,487.03	612	-504.67	254,691.81	+119,944.92
廿三年	1,030	-553.67	306,550.47	536	-580.67	337,177.65	+321,499.56
廿四年	919	-664.67	441,786.21	576	-540.67	292,324.05	+359,367.13
總計	23,755		1,769,685.35	16,750		1,785,519.35	+1,465,828.35

$$M_x = \frac{23,755}{15} = 1,583.67 \qquad M_y = \frac{16,750}{15} = 1,116.67$$

$$r = \frac{+1,465,828.35}{\sqrt{1,769,685.35 \times 1,785,519.35}} = 0.825$$

由相関表中求相関係數——由相関表中用普通法求相関係數之公式如下：

$$r = \frac{\Sigma f d_x d_y}{N\sigma_x\sigma_y} = \frac{\Sigma f d_x d_y}{\sqrt{\Sigma f d_x^2 \cdot \Sigma f d_y^2}} \cdots\cdots\cdots (公式四十七)$$

表九、上海市第五屆至第七屆集團結婚新郎新娘年齡相關表

分組	m	f	d	fd	fd^2	16 17.9	18 19.9	20 21.9	22 23.9	24 25.9	26 27.9	28 29.9	30 31.9	總計	fdxdy
m						17	19	21	23	25	27	29	31		
f						55	59	105	42	30	10	6	2	309	
d						-4	-2	0	+2	+4	+6	+8	+10		
fd						-220	-118	0	+84	+120	+60	+48	+20		
fd^2						880	236	0	168	480	360	384	200	2,708	
38 39.9	39	3	+14.2	+42.6	604.92					+56.8 (1) +56.8		+113.6 (2) +227.2			+284.0
36 37.9	37	1	+12.2	+12.2	148.84								+122.0 (1) +122.0		+122.0
34 35.9	35	5	+10.2	+51.0	520.20			0 (1) 0	+20.4 (3) +61.2				+102.0 (1) +102.0		+163.2
32 33.9	33	12	+8.2	+98.4	806.88		-16.4 (2) -32.8	0 (2) 0	+16.4 (1) +16.4	+32.8 (2) +65.6	+49.2 (3) +147.6	+65.6 (2) +131.2			+328.8
30 31.9	31	11	+6.2	+68.2	422.84	-24.8 (2) -49.6	-12.4 (1) -12.4	0 (1) 0	+12.4 (3) +37.2	+24.8 (3) +74.4		+49.6 (1) +49.6			+99.2
28 29.9	29	27	+4.2	+113.4	476.28	-16.8 (1) -16.8	-8.4 (5) -42.0	0 (8) 0	+8.4 (5) +42.0	+16.8 (6) +100.8	+25.2 (1) +25.2	+33.6 (1) +33.6			+142.8
26 27.9	27	38	+2.2	+83.6	183.92	-8.8 (2) -17.6	-4.4 (5) -22.0	0 (11) 0	+4.4 (10) +44	+8.8 (6) +52.8	+13.2 (4) +52.8				+110.0
24 25.9	25	64	+0.2	+12.8	2.56	-.8 (11) -8.8	-.4 (10) -4	0 (25) 0	+.4 (8) +3.2	+.8 (8) +6.4	+1.2 (2) +2.4				-0.8
22 23.9	23	67	-1.8	-120.6	217.08	+7.2 (13) +93.6	+3.6 (13) +46.8	0 (29) 0	-3.6 (9) -32.4	-7.2 (3) -21.6					+86.4
20 21.9	21	57	-3.8	-216.6	823.08	+15.2 (18) +273.6	+7.6 (12) +91.2	0 (23) 0	-7.6 (3) -22.8	-15.2 (1) -15.2					+326.8
18 19.9	19	23	-5.8	-133.4	773.72	+23.2 (8) +185.6	+11.6 (10) +116	0 (5) 0							+301.6
16 17.9	17	1	-7.8	-7.8	60.84		+15.6 (1) +15.6								+15.6
總計		309			5,041.16										
fdxdy						+460	+156.4	0	+148.8	+320	+228	+441.6	+224		+1,978.8

$$M_x=\frac{6483}{309}=21.0 \qquad M_y=\frac{7667}{309}=24.8$$

$$r=\frac{1978.8}{\sqrt{2708\times 5041.16}}=0.536$$

(二) 簡捷法

(1)由非相關表中求相關係數——由非相關表中用簡捷法求相關係數之公式如下：

$$r=\frac{\Sigma d'_x d'_y - NC_xC_y}{N\cdot\sqrt{\frac{\Sigma d'^2_x}{N}-C_x^2}\cdot\sqrt{\frac{\Sigma d'^2_y}{N}-C_y^2}}$$

$$=\frac{\Sigma d'_x d'_y - NC_xC_y}{\sqrt{(\Sigma d'^2_x - NC_x^2)\cdot(\Sigma d'^2_y - NC_y^2)}}\cdots\cdots(公式四十八)$$

例如表八如先假定民國十六年之輸入淨值1,578及輸出總值1,431為X及Y數列之假定算術平均數M'_x, M'_y，根據此假定算術平均數各求其假定離中差$\Sigma d'_x=+85$, $\Sigma d'_y=-4,715$，再求各假定離中差之自乘方得$\Sigma d'^2_x=1,710,167$，$\Sigma d'^2_y=3,267,601$.末求$d'_x d'_y$之積得+1,439,110代入公式四十八即得相關係數。

$C_x=\frac{85}{15}=5.67$ $\qquad$ $C_y=\frac{-4,715}{15}=-314.33$

$$r=\frac{1,439,110-15\times5.67\times(-314.33)}{\sqrt{[1,770,167-15\times(5.67)^2]\times[3,267,601-15\times(-314.33)^2]}}$$

$$=0.825$$

(2)由相關表中求相關係數——由相關表中用簡捷法求相關係數之公式如下：

$$r=\frac{i_x i_y\Sigma f d'_x d'_y - i_x i_y Nc_xc_y}{N\cdot\sqrt{\frac{i_x^2\Sigma f d'^2_x}{N}-i_x^2c_x^2}\cdot\sqrt{\frac{i_y^2\Sigma f d'^2_y}{N}-i_y^2c_y^2}}$$

$$=\frac{\Sigma f d'_x d'_y - Nc_xc_y}{\sqrt{(\Sigma f d'^2_x - Nc_x^2)\cdot(\Sigma f d'^2_y - Nc_y^2)}}\cdots\cdots(公式四十九)$$

表十　上海市第五届至第七届集团结婚新郎新娘年龄相关表

分組	m	f	d′	fd′	fd′²	16–17.9	18–19.9	20–21.9	22–23.9	24–25.9	26–27.9	28–29.9	30–31.9	總計	$fd'_x d'_y$
m						17	19	21	23	25	27	29	31		
f						55	59	105	42	30	10	6	2	309	
d′						−3	−2	−1	0	+1	+2	+3	+4		
fd′						−165	−118	−105	0	+30	+20	+18	+8	−312	
fd′²						495	[illegible]6	105	0	30	40	54	32	992	
38–39.9	39	3	+6	+18	108					+6 (1) +6		+18 (2) +36			+42
36–37.9	37	1	+5	+5	25								+20 (1) +20		+20
34–35.9	35	5	+4	+20	80			−4 (1) −4	0 (8) 0				+16 (1) +16		+12
32–33.9	33	12	+3	+36	108		−6 (2) −12	−3 (2) −6	0 (1) 0	+3 (2) +6	+6 (3) +18	+9 (2) +18			+24
30–31.9	31	11	+2	+22	44	−6 (2) −12	−4 (1) −4	−2 (1) −2	0 (3) 0	+2 (3) +6		+6 (1) +6			−6
28–29.9	29	27	+1	+27	27	−3 (1) −3	−2 (5) −10	−1 (8) −8	0 (5) 0	+1 (6) +6	+2 (1) +2	+3 (1) +3			−10
26–27.9	27	38	0	0	0	0 (2) 0	0 (5) 0	0 (11) 0	0 (10) 0	0 (8) 0	0 (2) 0				0
24–25.9	25	64	−1	−64	64	+3 (11) +33	+2 (10) +20	+1 (25) +25	0 ([illegible]) 0	−1 (8) −8	−2 (2) −4				+66
22–23.9	23	67	−2	−134	268	+6 (13) +78	+4 (13) +52	+2 (29) +58	0 (9) 0	−2 (3) −6					+182
20–21.9	21	57	−3	−171	513	+9 (18) +162	+6 (12) +72	+3 (23) +69	0 (3) 0	−3 (1) −3					+300
18–19.9	19	23	−4	−92	368	+12 (8) +96	+8 (10) +80	+4 (5) +20							+196
16–17.9	17	1	−5	−5	25		+10 (1) +10								+10
總計		309		−338	1,630										
$fd'_x d'_y$						+354	+208	−152	0	+7	+16	+63	+36		+836

$$C_x = \frac{-312}{309} = -1.010 \qquad C_y = \frac{-338}{309} = -1.094$$

$$r = \frac{836 - 309 \times (-1.010) \times (-1.094)}{\sqrt{[992 - 309 \times (-1.010)^2] \times [1{,}630 - 309 \times (-1.094)^2]}}$$

$$= 0.536$$

X Y兩數列相互關係之程度,乃由相關係數表示之,惟X數列變動時,Y數列所受之影響如何;反之,Y數列變動時,X數列所受之影響如何;統計學家定其迴歸公式如下:

(一)迴歸係數——迴歸係數之公式如下:

設 b_{xy} 為X迴歸Y之係數,

b_{yx} 為Y迴歸X之係數,

$$b_{xy}=r\frac{\sigma_x}{\sigma_y}\text{……………………(公式五十)}$$

$$b_{yx}=r\frac{\sigma_y}{\sigma_x}\text{……………………(公式五十一)}$$

上海市第五屆至第七屆集團結婚新郎(Y)新娘(X)年齡之 σ_y 為4.04, σ_x 為2.96, r為0.536代入公式得:

$$b_{xy}=0.536\times\frac{2.96}{4.04}=0.393$$

$$b_{yx}=0.536\times\frac{4.04}{2.96}=0.732$$

新娘年齡迴歸新郎年齡之係數為0.393,即示新郎年齡有一單位之變動時,新娘年齡即有0.393單位之變動;又新郎年齡迴歸新娘年齡之係數為0.732,即示新娘年齡有一單位之變動時,新郎年齡即有0.732單位之變動。

(二)迴歸方程式

設 m_x 為X數列中之變量,

m_y 為Y數列中之變量,

(1) X迴歸Y之方程式

$$d_x = r\frac{\sigma_x}{\sigma_y} d_y$$

惟 $d_x = m_x - M_x$　　$d_y = m_y - M_y$

故 $m_x - M_x = r\frac{\sigma_x}{\sigma_y}(m_y - M_y)$

$$m_x = M_x + r\frac{\sigma_x}{\sigma_y}(m_y - M_y) \quad \text{……(公式五十二)}$$

(乙) Y迴歸X之方程式

$$d_y = r\frac{\sigma_y}{\sigma_x} d_x$$

惟 $d_y = m_y - M_y$　　$d_x = m_x - M_x$

故 $m_y - M_y = r\frac{\sigma_y}{\sigma_x}(m_x - M_x)$

$$m_y = M_y + r\frac{\sigma_y}{\sigma_x}(m_x - M_x) \quad \text{……(公式五十三)}$$

上列迴歸方程式，即示X數列之變量(m_x)為若干時，Y數列之變量應為若干；或Y數列之變量(m_y)為若干時X數列之變量應為若干。惟於推求之前，應先核計X與Y數列之算術平均數，例如新郎年齡之算術平均數 $M_y=24.81$歲，新娘年齡之算術平均數 $M_x=20.98$歲，設新郎之年齡(m_y)為25歲，推求新娘之年齡為：

$$m_x = 20.98 + 0.536 \times \frac{2.96}{4.04} \times (25-24.81) = 21.05\text{歲}$$

設新娘之年齡(m_x)為20，代入公式五十三，得新郎之年齡為：

$$m_y = 24.81 + 0.536 \times \frac{4.04}{2.96} \times (20-20.98) = 24.09\text{歲}$$

(三)迴歸線——如應用上列迴歸方程式推求之新郎新娘年齡，繪示於相關圖上，即成迴歸線。Y迴歸X之直線與X迴歸Y之直線視相關係數之大小而密接或

疏散者相関係數為1，則為完全相関，而迴歸直線密合為一線，相関係數愈小，與直線之相差愈遠，此乃一定不易者也。

第三節 非直線相関

兩數列之相関表，在相関圖上，散處成一直線形者，此兩數列之相関，為直線相関，前節已略述之。若兩數列之相関點，在相関圖上，呈雜棋佈，不成一直線形者，此兩數列之相関，即為非直線相関，例如表十一，193畝麥田每畝小麥收穫量與所施氮素肥料量之相関，求得各行變數之算術平均數如下：

表十一 一九三畝麥田每畝小麥收穫量與所施氮素肥料量相関表

每畝小麥收穫量(Y)(單位蒲式耳) 分組	每畝所施氮素肥料(X)(單位磅) 0-19.9	20-39.9	40-59.9	60-79.9	80-99.9	100-119.9	120-139.9	140-159.9	160-179.9	總計	每畝平均所施肥料量
32-35.9				5	16	12	4	5	2	44	107.27
28-31.9			1	20	21	8	4	1		55	88.91
24-27.9			16	19						35	60.86
20-23.9			13							13	50.00
16-19.9		12								12	30.00
12-15.9		8								8	30.00
8-11.9	3	5								8	22.50
4-7.9	10									10	10.00
0-3.9	8									8	10.00
總計	21	25	30	44	37	22	8	6	2	193	
每畝平均收穫量	5.05	15.12	24.40	28.73	30.73	32.40	32.00	33.33	34.00		

如以每畝所施氮素肥料為自變數，將各項平均收穫量

繪示於相關圖上，乃成一弓形之曲線，離直線甚遠，於此可知其相關為非直線相關。

非直線相關簡稱相關比，為皮爾生氏所首創，在公式中以η（讀如eta）代表之，其計算公式如下：

設η_{yx}為Y對X之相關比。（即以X數列為自變數，Y數列為附變數之相關比。）

η_{xy}為X對Y之相關比。（即以Y數列為自變數，X數列為附變數之相關比。）

σ_{ax}為X數列中各行變量，對於各行算術平均數之標準差。

σ_{ay}為Y數列中各行變量，對於各行算術平均數之標準差。

σ_x為X數列之標準差。

σ_y為Y數列之標準差。

$$\eta_{yx}=\sqrt{1-\frac{\sigma_{ay}^2}{\sigma_y^2}}\quad\text{……（公式五十四）}$$

$$\eta_{xy}=\sqrt{1-\frac{\sigma_{ax}^2}{\sigma_x^2}}\quad\text{……（公式五十五）}$$

表十二以每畝小麥所施氮素肥料量（X數列）為自變數，每畝小麥收穫量（Y數列）為附變數，應用公式五十四求其相關比如下：

表十二　每畝小麥收穫量表（計算σ_{ay}表）

每畝小麥收穫量分組(單位 斗)	中值 m	畝數 f	各列平均收穫量(斗)	離中差 d	d^2	fd^2
0 — 3.9	2	8	5.05	-3.05	9.3025	74.4200
4 — 7.9	6	10	5.05	0.95	0.9025	9.0250
8 — 11.9	10	3	5.05	4.95	24.5025	73.5075
8 — 11.9	10	5	15.12	-5.12	26.2144	131.0720
12 — 15.9	14	8	15.12	-1.12	1.2544	10.0352
16 — 19.9	18	12	15.12	2.88	8.2944	99.5328
20 — 23.9	22	13	24.40	-2.40	5.7600	74.8800
24 — 27.9	26	16	24.40	1.60	2.5600	40.9600
28 — 31.9	30	1	24.40	5.60	31.3600	31.3600
24 — 27.9	26	19	28.73	-2.73	7.4529	141.6051
28 — 31.9	30	20	28.73	1.27	1.6129	32.2580
32 — 35.9	34	5	28.73	5.27	27.7729	138.8645
28 — 31.9	30	21	31.73	-1.73	2.9929	62.8509
32 — 35.9	34	16	31.73	2.27	5.1529	82.4464
28 — 31.9	30	8	32.40	-2.40	5.7600	46.0800
32 — 35.9	34	12	32.40	1.60	2.5600	30.7200
28 — 31.9	30	4	32.00	-2.00	4.0000	16.0000
32 — 35.9	34	4	32.00	2.00	4.0000	16.0000
28 — 31.9	30	1	33.33	-3.33	11.0889	11.0889
32 — 35.9	34	5	33.33	0.67	0.4489	2.2445
32 — 35.9	34	2	34.00	0	0	0
總計		193				1124.9508

$$\sigma_{ay} = \sqrt{\frac{1124.9508}{193}} = 2.415$$

$$\sigma_y = 9.188$$

$$\eta_{yx} = \sqrt{1 - \frac{(2.415)^2}{(9.188)^2}} = 0.965$$

表十三乃以每畝小麥收穫量(Y)為自變數，每畝小麥所施氮素肥料量(X)為依變數，應用公式計算求其相關比如下：

表十三 每畝小麥所施氮素肥料量表(計算 σ_{ax} 表)

每畝所施氮素肥料量(硫銨，斤)	中值 m	畝數 f	各排平均施肥料量(斤)	離中差 d	d^2	fd^2
60-79.9	70	5	107.27	-37.27	1389.0529	6945.2645
80-99.9	90	16	107.27	-17.27	298.2529	4772.0464
100-119.9	110	12	107.27	2.73	7.4529	89.4348
120-139.9	130	4	107.27	22.73	516.6529	2066.6116
140-159.9	150	5	107.27	42.73	1825.8529	9129.2645
160-179.9	170	2	107.27	62.73	3935.0529	7870.1058
40-59.9	50	1	88.91	-38.91	1513.9881	1513.9881
60-79.9	70	20	88.91	-18.91	357.5881	7151.7620
80-99.9	90	21	88.91	1.09	1.1881	24.9501
100-119.9	110	8	88.91	21.09	444.7881	3558.3048
120-139.9	130	4	88.91	41.09	1688.3881	6753.5524
140-159.9	150	1	88.91	61.09	3731.9881	3731.9881
40-59.9	50	16	60.86	-10.86	117.9396	1887.0336
60-79.9	70	19	60.86	9.14	83.5396	1587.2524
40-59.9	50	13	50.00	0	0	0
20-39.9	30	12	30.00	0	0	0
20-39.9	30	8	30.00	0	0	0
0-19.9	10	3	22.50	-12.50	156.2500	468.7500
20-39.9	30	5	22.50	7.50	56.2500	281.2500
0-19.9	10	10	10.00	0	0	0
0-19.9	10	8	10.00	0	0	0
總計		193				57831.5591

$$\sigma_{ax}=\sqrt{\frac{57831.5591}{193}}=17.311$$

$$\sigma_x=36.812$$

$$\eta_{xy}=\sqrt{1-\frac{(17.311)^2}{(36.812)^2}}=0.882$$

第四節 等級相關

統計事物，有時僅分等級而無實際數值表示者，相關之決定，與前所論者稍有不同例如教師評定成績，

常有給予等級而不予分數者。鑑定各種農產品，亦多給予等級而不予實際數值者。根據事物之等級而計算之相關，謂之等級相關。

計算等級相關之前，應先將X與Y兩事實按變量值之大小，或事物品質之優劣，規定等級，例如表十四以成績最優，分數最多者為第一，(反之若以成績最劣，分數最小者為第一亦可，惟X與Y兩事實之等級，應相互一致，不可互異。)分數最少者為末等。如遇分數相同時則將各變量應佔之等位平均之，例如下表中數學成績得86分者共有四名，其應佔等次為第四，五，六，七名，分級時即將此四級平均之，得5.5級，為四生同有之平均等級。等級分明後，即求兩事物等級之差，代入下列公式即得等級相關係數。

設ρ為等級相關係數(讀如Rho)。

V_x為X數列中各變量之等級。

V_y為Y數列中各變量之等級。

$$\rho=1-\frac{6\Sigma(V_x-V_y)^2}{N(N^2-1)}\text{......(公式五十六)}$$

例如表十四$(V_x-V_y)^2$為242.50，N為20，代入公式得

$$\rho=1-\frac{6\times242.50}{20\times(20^2-1)}=0.818$$

表十四 某校二十生數學及物理成績表

學號	數學成績 X	物理成績 Y	數學等級 V_x	物理等級 V_y	$V_x - V_y$ +	$V_x - V_y$ −	$(V_x-V_y)^2$
1	57	60	18.0	18.0			
2	86	89	5.5	6.0		.5	.25
3	48	27	19.0	20.0		1.0	1.00
4	89	92	3.0	5.0		2.0	4.00
5	96	96	1.0	2.0		1.0	1.00
6	60	77	16.5	12.0	4.5		20.25
7	75	76	12.0	13.0		1.0	1.00
8	76	70	11.0	15.0		4.0	16.00
9	80	87	10.0	8.0	2.0		4.00
10	60	57	16.5	19.0		2.5	6.25
11	71	66	14.0	16.0		2.0	4.00
12	86	79	5.5	11.0		5.5	30.25
13	72	81	13.0	10.0	3.0		9.00
14	86	93	5.5	4.0	1.5		2.25
15	62	86	15.0	9.0	6.0		36.00
16	86	96	5.5	2.0	3.5		12.25
17	83	96	8.0	2.0	6.0		36.00
18	90	88	2.0	7.0		5.0	25.00
19	81	72	9.0	14.0		5.0	25.00
20	45	64	20.0	17.0	3.0		9.00
總計					29.5	29.5	242.50

第五節　相應相關

相關有正負大小之別,前節已言之,若於研究兩事實間之關係時,僅欲知其為正為負,不必詳究其量數之大小者,用相應增減法,求相應相關係數,已足明示一切,茲將計算相應相關係數之公式列下:

設 R' 為相應相關係數。

N為相應分數與不相應分數之總和。

N_L為相應分數。

±為未確定之正或負號。

$$R' = \pm\sqrt{\pm\frac{2N_L-N}{N}}$$ ……………………(公式五十)

相應相關係數之為正為負,全視相應分數之大小而定,若相應分數超過相應與不相應分數總和之半,則為正相關,反之,則為負相關。在時間數列中求此種係數時,應先將數列按時間之先後順次排列,然後各以本期之數值,與上期比較之,若本期之數值大於上期之數值,則為正,在「較上期增減」行下,記載「+」號,反之,則記「−」號。如遇本期數值與上期數值相同時,則記「0」號。次將兩數列對照之正負號相乘,如同為正或同為負,則得相應分數一分。如甲為正,乙為負,或甲為負,乙為正,兩者相乘,得不相應分數一分。如甲乙兩數列中有一零號時,兩者相乘,則得零分。茲設例示之如下:

表廿五　歷年我國輸出入貨值指數表(民國十五年指數=100)

年次	輸入淨值指數	較上年增(+)減(−)	輸出總值指數	較上年增(+)減(−)	輸入增減乘輸出增減	相應分數	不相應分數
光緒元年	6.0		8.0				
二年	6.2	+	9.3	+	+	1.0	
三年	6.5	+	7.8	−	−		1.0
四年	6.3	−	7.8	0	0	.5	.5
五年	7.3	+	8.4	+	+	1.0	
六年	7.0	−	9.0	+	−		1.0

光緒七年	8.2	+	8.3	−	−		1.0
八年	6.9	−	7.8	+	−	1.0	
九年	6.5	−	8.1	+	−		1.0
十年	6.5	0	7.8	−	0	.5	.5
十一年	7.8	+	7.5	−	−		1.0
十二年	7.8	0	8.9	+	0	.5	.5
十三年	9.1	+	9.4	+	+	1.0	
十四年	11.1	+	10.7	+	+	1.0	
十五年	9.9	−	11.2	+	−		1.0
十六年	11.3	+	10.1	−	−		1.0
十七年	11.9	+	11.7	+	+	1.0	
十八年	12.0	+	11.9	+	+	1.9	
十九年	13.5	+	13.5	+	+	1.0	
二十年	14.4	+	14.8	+	+	1.0	
廿一年	15.3	+	16.6	+	+	1.0	
廿二年	18.6	+	15.2	−	−		1.0
廿三年	18.0	0	18.9	+	0	.5	.5
廿四年	18.6	+	18.4	−	−		1.0
廿五年	23.5	+	22.6	+	+	1.0	
廿六年	18.8	−	18.4	+	+	1.0	
廿七年	23.9	+	19.6	+	+	1.0	
廿八年	28.0	+	24.8	+	+	1.0	
廿九年	29.0	+	24.8	0	0	.5	.5
三十年	30.6	+	27.7	+	+	1.0	
卅一年	39.7	+	26.4	−	−		1.0
卅二年	36.5	−	27.3	+	−		1.0
卅三年	37.0	+	30.6	+	+	1.0	
卅四年	35.1	−	32.0	+	−		1.0
宣統元年	37.2	+	39.2	+	+	1.0	
二年	41.2	+	44.9	+	+	1.0	
三年	41.9	+	43.7	−	−		1.0
民國元年	42.1	+	42.9	−	−		1.0
二年	50.7	+	46.9	+	+	1.0	
三年	50.6	−	41.6	−	+	1.0	

民國四年	40.4	−	41.5	+	−		1.0
五年	45.9	+	55.7	+	+	1.0	
六年	48.9	+	53.6	−	−		1.0
七年	49.4	+	56.2	+	+	1.0	
八年	59.6	+	73.0	+	+	1.0	
九年	67.8	+	62.9	−	−		1.0
十年	80.6	+	69.6	+	+	1.0	
十一年	84.1	+	95.8	+	+	1.0	
十二年	82.2	−	87.2	+	−		1.0
十三年	90.6	+	89.3	+	+	1.0	
十四年	84.3	−	89.8	+	−		1.0
十五年	100.0	+	100.0	+	+	1.0	
十六年	90.1	−	106.3	+	−		1.0
十七年	106.4	+	114.7	+	+	1.0	
十八年	112.5	+	117.5	+	+	1.0	
十九年	116.4	+	103.5	−	−		1.0
二十年	127.4	+	105.2	+	+	1.0	
廿一年	93.3	−	57.0	−	+	1.0	
廿二年	76.8	−	45.4	−	+	1.0	
廿三年	58.7	−	39.8	−	+	1.0	
廿四年	52.4	−	42.8	+	−		1.0
總計						35.5	24.5

$N_1 = 35.5$

$N = 35.5 + 24.5 = 60$

$$R' = +\sqrt{\frac{2 \times 35.5 - 60}{60}} = +0.428$$

在空間數列中求相應相關，則先計祘各數列之祘術平均數，然後以此祘術平均數為比較之標準。若變量值大於全体之祘術平均數，則於較平均數大或小行下記載「+」號，反之則記「−」號。若變量值與全体之祘術平均數相同，則記「0」號。求得各記號後，應用前法計祘之，即得相應相關係數。

第六節　異號相關

異號相關為英人薛伯德氏(Sheppard)所創,乃求相關係數極迅速而不甚精確之方法。其核算法與求相應相關者同,即在時間數列中,依時間之先後,先行排列,在空間數列中,先求其算術平均數。次將本期數值與上期比較,或各變量與算術平均數比較,得正,負及零號,再將兩數列之正,負及零號相乘並記其積分。如甲為正,相對之乙亦為正,則得同號分數一分,或甲為負,乙亦為負,亦得同號分數一分。如甲為正,乙為負,或甲為負,乙為正,則各得異號分數一分。如甲乙中有一零號,則得零差分數一分。分別記入同號異號及零差分數行下,末將各分數代入公式,即得異號相關係數。

設 U' 為異號相關係數。

N 為同號異號及零差分數之總和。

N_l 為同號分數。

N_u 為異號分數。

N_o 為零差分數。

$$U' = \frac{N_u + \frac{N_o}{2}\left(\frac{N_u}{N_u + N_l} + \frac{1}{2}\right)}{N} \quad \text{……(公式五八)}$$

例如表十六 N_u 為 3, N_l 為 9, N_o 為 3, N 為 15,代入公式得

$$U' = \frac{3 + \frac{3}{2} \times \left(\frac{3}{3+9} + \frac{1}{2}\right)}{15} = 0.28$$

表十六　某校十五生數學與物理成績对照表

學號	數學成績 分數	數學成績 較平均數大(+)或小(-)	物理成績 分數	物理成績 較平均數大(+)或小(-)	兩種成績較平均數大或小之積	同號分數	異號分數	零差分數
1001	90	+	76	-	-		1.0	
2	94	+	82	+	+	1.0		
3	78	-	84	+	-		1.0	
4	76	-	68	-	+	1.0		
5	75	-	72	-	+	1.0		
6	68	-	66	-	+	1.0		
7	75	-	87	+	-		1.0	
8	80	0	96	+	0			1.0
9	85	+	80	+	+	1.0		
10	82	+	85	+	+	1.0		
11	76	-	78	0	0			1.0
12	74	-	62	-	+	1.0		
13	88	+	85	+	+	1.0		
14	80	0	78	0	0			1.0
15	79	-	75	-	+	1.0		
總計	1200		1170			9.0	3.0	3.0
平均	80		78					

問　　題

1. 何謂相關？其種類有幾？試略述之。
2. 相關度之大小應如何判別之？
3. 試解釋求相關係數公式之意義。
4. 在相關表中用普通法及簡捷法求相關係數之步驟如何？試略述之。
5. 何謂迴歸係數、迴歸方程式、迴歸直線？求迴歸係數迴歸方程式及迴歸直線之公式各如何？試略述之。
6. 測定非直線相關之步驟如何？試申述之。

7. 何謂等級相關，試略述其計算之程序。

8. 在空間數列與時間數列中求相關及其統計相關之方法各如何，並略述其異同。

習 題 九

二〇九人体高與体重相關表

体重分組(Y)(單位磅) \ 体高分組(X)(單位 吋)	30-33.9	34-37.9	38-41.9	42-45.9	46-49.9	50-53.9	54-57.9	58-61.9	62-65.9	總計
140-149.9							1		1	2
130-139.9						3		2	8	13
120-129.9				1	1	6	1	15	4	28
110-119.9					2	12	18	6	3	41
100-109.9				3	8	15	9	4	2	41
90-99.9			2	12	3	4		1		22
80-89.9		1	3	5	5	1	3			18
70-79.9	1	2	8	4	2		1			18
60-69.9		7	4	2						13
50-59.9	3	6	1							10
40-49.9	1	2								3
總計	5	18	18	27	21	41	33	28	18	209

試用上列二〇九人体高体重相關表，計算以下諸數：

(甲)用普通法求相關係數。

(2)用簡捷法求相關係數。

(3)求X迴歸Y及Y迴歸X之係數及方程式。

(4)試根據體重推測體高並根據體高推測體重，並繪迴歸線表示之。

習題十

某銀行行員任職年數及月俸分配表

每月俸給(Y)(單位元) \ 任職年數(X)	0-.9	1-1.9	2-2.9	3-3.9	4-4.9	5-5.9	6-6.9	7-7.9	8-8.9	9-9.9	總計
300-329					1	2	3	4	3	2	15
270-299				1	5	8	5	3	1		23
240-269			1	5	14	3					23
210-239			2	10							12
180-209			3								3
150-179			7								7
120-149		4	2								6
90-119		6									6
60-89	4	3									7
30-59	7	1									8
0-29	3										3
總計	14	14	15	16	20	13	8	7	4	2	113

試用某銀行行員任職年數及月俸之分配，計算以下諸數：

(1)以任職年數爲自變數,月俸爲附變數,求相關比(η_{yx})。
(2)以月俸爲自變數,任職年數爲附變數,求相關比(η_{xy})。

習 題 十 一

三十對新娘新郎之年齡表

新郎之年齡	新娘之年齡	新郎之年齡	新娘之年齡	新郎之年齡	新娘之年齡
32	18	21	19	21	20
24	21	26	22	21	18
29	24	22	20	24	19
25	17	20	16	29	22
34	20	19	21	22	19
22	18	25	20	23	20
29	18	30	23	25	17
23	20	29	24	22	22
31	29	21	21	22	16
20	21	24	17	29	28

試用三十對新夫婦之年齡計算以下諸數:
(1)求等級相關係數。
(2)求相應相關係數。
(3)求異號相關係數。

第七章　指數

第一節　指數之意義及種類

社會現象，錯綜紛紜，奇特繁蹟，本至變而難測，今欲窺其陳跡，定其趨勢，察其真情，溯其根源，則指數尚矣。例如物價，以物品之整千累萬，價格之漲跌無常，每為研者所不能詳，若依一定法則，化一群物價為若干簡單之百分率或千分率，則若干指數之間，即足以概括一切。故其所以名之為指數者，即從英文Index一字譯出，意謂可以指出狀況也。

指數之種類甚多，若依其編制之方法，可分為下列數種：

(一)時間性數字序列指數——時間性數字序列指數，乃以時間為基礎，推算各時期之比率。以其所用基期Base Period之不同，又可分為定基比及環比指數：

(1)定基指數——指數之編製，係用相對數值替代絕對數值，相對數值之計算，則先選定某時期為基期，作為計算時期(Given Period)比較之標準。基期之數值為100，其他各期即以此為標準，求其相當之比率，此種比率為即定基指數也。

(2)環比指數——此指數之計算，以上年之實價，作為本年之基價，本年之實價，作為明年之基價，如此各

以上一年之貴價作為下一年之基價而求得之比率,謂之環比指數。

(3)鎖比指數——鎖比指數係將環比指數之各環連乘而得,例以A代表二十九年基期之物價,B代表三十年之物價,C代表三十一年之物價,D代表三十二年之物價,則三十年之定基環比及鎖比指數,同為$\frac{B}{A}\times100$,三十一年之定基指數為$\frac{C}{A}\times100$,環比指數為$\frac{C}{B}\times100$,而鎖比指數乃即第一與第二環比指數相乘之積$\frac{B}{A}\times\frac{C}{B}\times100$,即等於$\frac{C}{A}\times100$定基指數。依此類推三十二年之定基指數為$\frac{D}{A}\times100$,環比指數為$\frac{D}{C}\times100$,而鎖比指數乃即第一第二及第三環比指數相乘之積$\frac{B}{A}\times\frac{C}{B}\times\frac{D}{C}\times100=\frac{D}{A}\times100$,在計算一種物價之指數時鎖比指數即等於定基指數,若計算之物價不止一種時,則此兩指數之數值並不相同者也。

(二)地域性數字系列指數——此種指數乃以某一地域之變量,作為比較之標準,其指數等於100,推求其他各地域相當於該地域之比率。

(三)事實性數字系列指數——此種指數乃以某一事實之變量作為比較之標準,其指數等於100,推求其他各事實相當於該事實之比率。

指數之分類,若按所用資料之不同,分別有下列六種:

(一)物價指數——在現代經濟制度之下，我人之經濟行為，莫不受物價之支配，而物價參差不齊，常難捉摸，物價指數之編製，遂應需要而起。古時物價變動極微，影響社會經濟極小，今則通貨之漲縮無常，物價之變動至巨，其影響經濟極大。故凡研究人民生活程度之高低，貨幣購買力之大小等，靡不藉物價指數以窺測之，此物價指數之所以重要也。物價指數又可分為下列三種：

(1)批發物價指數——批發物價為商人大宗買賣物品時所議定之價格，以此價格編成指數，即批發物價指數，其效用乃在測定市場上一般物價之漲跌，及商業循環之真相者也。

(2)輸出入物價指數——輸出入物價為國際貿易商人所呈報之價格，或進出口商在貨物通過海關時所報，或海關所估之價格，以此價格編成指數，即輸出入物價指數。編製此種指數之目的，乃在表示國際市場上，一國人民實際所付價格之變動，並可藉以推測國際貿易盛衰之趨勢。

(3)零售物價指數——零售物價係消費者直接購買物品時所付之價格，以此價格編成之指數，即零售物價指數，其效用乃在測定人民生活程度之高低，及貨幣購買力之強弱，研究社會經濟者，俱以此種指

數為立論之根據。

(二)生活費指數——生活費乃維持人類生存最低限度之費用,如衣食住及燃料等費用是。此種指數乃在測定生活費之變遷,表示生活程度之高低者也。

(三)工資指數——工資指數乃以工人工作之報酬編成之指數,其效用在測定工人工作酬勞之變遷,並可作解決勞資糾紛之參考。

(四)外滙指數——以國外滙率編製之指數,謂之外滙指數,其效用乃在測定國外滙率之變遷。

(五)國外貿易指數——如用對外貿易量編製之指數,謂之國外貿易指數,乃表示對外貿易之盛衰者也。

(六)証券指數——此種指數乃以公債券、公司股票及其他有價証券之價格編製之,其效用乃在觀測債券股票暨銀行業務之盛衰,投資利益之大小者也。

指數除上述六種外,又有所謂生產量指數及消費量指數,用以測定供求之是否相應;成本指數,用以預測營業之盈虧,藉為定價之標準。種類之多,不勝枚舉。然物價指數為指數中之最重要者,故以下數節,專以編製物價指數而論,其他指數大体相似,學者舉一反三,不難想象得之也。

第二節　物品及物價之選擇

編製物價指數之原料,則為物價,然市上物品,幾千累萬,究應選取何種物品,其品數若干,各家學說紛歧,迄無定律。惟物以類聚,羣然成群,若細為分析,則不外為製造品與原料品;而原料品中又分為農產,林產,畜產及礦產品;製造品中又分消費品及生產品是也。至於市價之變動,則彼此俱有相互之關係。如原料品價格之漲跌,常反映於製造品成本之高下;故製造品價格之變動,常隨原料品價格之上下而轉移。惟據一般統計數之研究,其變動程度,不若原料品之劇烈。是於選取物品時,若僅取原料品或製造品以編製之,則其影響於最後之指數,想必非吾人所樂意,故將選取物品時應注意之點列下:

(一)採入指數之物品,其價格之變動,彼此愈無關聯愈好。

(二)採入指數之物品,其價格之變動,與未採入指數物品之價格,彼此愈有關聯愈好。

(三)採入指數之物品,其本身之性質,彼此愈遠愈好。

(四)採入指數之物品,其本身之性質,與未採入指數物品之性質,彼此愈近愈好。

世界各國現編之指數,其採用品數,多者逾千餘品,少者僅二十餘品,其品數之懸殊,已可概見。然品數之多寡,對於編製指數時有無巨大之影響,與編指數是否可以表示一般市價之變動,據一般統計專家研究

之結果,以為取樣不在品數之多寡,而在所取貨樣之適當與否。蓋若選之得當,品數愈多,固可易取人信,然若選之失當,則雖多又奚益?惟取樣過少,則料一偏易不能代表一般物價之變動,是應折取中道,視編製指數之目的何在,而定其品數之多寡。

至於物品之價格,普通可分批發及零售二種:零售物價乃消費者購買物品時直接支付之價格,為編製生活費指數之唯一資料。批發物價又可分為下列數種:

(一)市價——市價為製造商或批發商彼此交易之價格,因係同業,對於物品之鑑別能力豐富,市價變動之消息靈通,在測定貨幣之購買力時,市價為最好之資料。

(二)合同價——合同價係購售雙方成交時預定之價格,常較零售價為低,批發價為高,在採作編製指數之資料時,最不足以代表一般之物價。

(三)社團價——社團價為公共機關如學校,醫院,兵站等購買物品時所付之價格,以其種類不甚普遍,品質不劃一,且含有零售價格之性質,故不宜於編製指數之用。

(四)海關價——應用海關價編製指數之優點有三:(1)可以表示一國人民實際上所付或所受價格之變動。(2)即可根據海關貿易報告冊編製,不必另設機關調查。(3)所採用之貨品及價格皆與稅則有直接之關係,故

可用作修正稅則之根據。

綜觀上述物價指數之編製，以市價為最適用。惟物品種類至多，即同一貨物，而品質有高下之分；同一品質，而牌號又有優劣之別，致市價高低不同。即在一日之間，同一貨物，同一品質，同一牌號，而開盤收盤之價格，亦各不同。是欲於一種貨品中找出一代表價，已不勝其煩，若於成千累萬之貨價中尋求數百種之代表價，其實地調查之困難及繁重，不言可喻。近世指數專家如費暄(I. Fisher)等對於此種難題之解決，特規定原則數條如下：

(一)貨物品質不齊，而市價高低不一時，可取最高與最低之市價，而核算其中數，作為編製指數之資料。

(二)代表一月或一年之市價，不宜採取月底月初或年底年初之價格，而宜採用月中(即每月十五日)及年中(即每年六七月之間)之價格，以其不受前月或前年之影響也。

(三)若各交易市場所開之批發價互相不同時，可採用交易最活動者以為標準。

(四)於數種牌號不同之貨品間，欲採取一種牌號時，應取其流行最廣，而最足代表全類物品者為佳。

第三節 基期之規定

指數之作，如用實際價格之形式者，則無須選擇基

價,故亦無所謂基期,如勃蘭突斯脫里指数(Brod-Street's Index of Wholesale Prices)是也。惟若用相对價格者,則於計算時必先選擇一時期以為基期,作為指数時期比較之標準,而此基期中之实際物價定為100,基期前後之物價俱以此基期内之物價除之,再乘100,即得各物價之相对比價,求求比價之平均數即得指数。

指数之基期可分二種:一曰固定基期,二曰連環基期。固定基期即於選定一基期後,各指数時期之物價,俱以此基期之物價為比較之標準,而得各時期之比價者也。至於連環基期則不然,其基期與年俱易,即如上年之物價,作為本年之基價,本年之物價作為明年之基價,如此各以上一年為基期,以比較時期極近,物價漲落較為集中,其变化之測定,亦較容易而準確,此環比指数之優点也。

現今世界各國所編之指数,多為定基指数。然則此基期應為一星期乎?一月乎?一年乎?抑或五年十年之平均乎?解决之法,须視核算指数法之不同而異。如指数之計算係用算術平均法者,則以一年或一年以上者為妥。蓋若基期中有一二項極漲或極跌之價格,則基此推算之比價勢必異常之低或異常之高,其影響於算術平均指数亦必巨大。故就物價漲跌之危險上立論,則一年比一月為佳,而五年十年又勝於一年二年也。若用幾何平

均數,則各時期比價與基期之關係較凌亂,以一年或一月為基期,亦無不可。若用中位數,則品數多者,基期之影響,亦甚微細。

至於指數基期究應選擇何年,何月,何時期,概括言之,乃愈近指數時期愈好。蓋指數基期與指數時期相距愈遠,則比價之趨勢愈形散漫,而物價升降之途愈不明顯,是以連比指數甚為人所歡迎也。至於選擇基期時,應加注意之点如下:

(一)社會經濟界之穩定——基期宜定於一般經濟及社會狀況穩定之時,不宜在戰時經濟及社會狀況劇變之時。

(二)比價離中差之大小——在一般經濟及社會狀況平穩之時,各物比價之離中差自然最小,用作基期最為適宜。

(三)基價供給之詳確——基期必為一時期能供給十分詳盡準確之物價者,譬如調查初始,所得資料較不詳確,若採作基期,易生謬誤。

第四節　權數之重要

貨物交易之大小,與乎民家需要之多寡,常因物品性質之不同而異。大抵需要較大之物品,其價格之變動,普通常較需要小而含有投機性之貨物為穩定,故於編製指數之際,對於此二種貨品,不可不有輕重輕輕之分。

而分别轻重轩轾之方法，即所谓加权(Weighting)是也。

查物价指数本可分为二种：即加权指数与简单指数是也。不问物品之轻重，而使各项物价之变化，有同等之影响者，是曰简单指数。视各项物品轻重轩轾之不同，而权重其变化之影响者，是曰加权指数。然所谓简单指数者，并非绝无权数，盖如勃落实斯脱里指数内包括物品九十六种，各物权度，俱以一磅为单位。其指数乃即各物每磅价格之和。表面上观之，似无权数之可言，然按其内容，各项价格对于最后指数之影响，则随其每磅价格之高低而有大小之不同。故虽曰简单指数，实即无意义之加权指数也。

指数之加权与否，据统计家之试验，其影响于最后之指数，并不甚大。惟在理论上言之，加权指数当胜于简单指数。盖简单指数中无意义之权数，当不若加权指数中合理权数之为美也。兹将权数之种类及权数之制度略述之如下：

(一)权数之种类——如用比价编制指数者，应以物值为权数，盖以其同以元为单位也。惟若用实价编制指数者，应以物品之生产，消费或交易量等为权数。故权数可分为物值与物量两种。

(二)权数之制度——权数之选用，有固定不易者，有与年

俱變者，亦有二者兼用者。固定權數，其優點，即能表示歷年純粹物價之變動。其劣點，使與年俱變之各品重要程度，一視同仁而失其確度。變動權數雖能使各品之重要性，顯示無餘，然指數之變動，恒混雜權數之變動在內，使物價之本變動，不能明示。至於固定及變動權數兼用制，乃取二者之長，去二者之短，每五年十年一變其權數，使指數之價值，益見增高也。

我國現編之批發物價指數，因國內尚無生產消費及交易等統計，故多簡單指數。至於生活費指數及輸出入物價指數，則有用每家消費量及輸出入貨值等作為權數者，惟多採用固定權數制。

第五節 計算指數之方法

計算指數之公式，據費暄教授在指數論(The Making of Index Numbers)一書中列舉共有一百三十餘種，其中計算煩複，義蘊深邃者有之；計算簡賅，瑕疵百出者，亦有之。然略為歸納，不外為綜合比率，比例平均及平均比例等三法，茲請分別述之如下：

(一)綜合比率法——用此法求得之指數名曰綜合指數。

(1)簡單綜合指數——其計算公式如下：

設I為簡單綜合指數(Simple Aggregative Index Numbers)

P_1, P_1', P_1'', P_1''' 為計祘期各種物品之價格。

P_0, P_0', P_0'', P_0''' 為基期各種物品之價格。

Σ 為總和之記號。

$$I_A = \frac{P_1 + P_1' + P_1'' + P_1''' + \cdots\cdots}{P_0 + P_0' + P_0'' + P_0''' + \cdots\cdots} \times 100$$

$$= \frac{\Sigma P_1}{\Sigma P_0} \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \text{(公式五坑)}$$

表十七　民国二十年至二十五年上海市十五品零售物價表

品別	單位	二十年	廿一年	廿二年	廿三年	廿四年	廿五年
粳米	市石	$11.310	$10.300	$9.567	$9.333	$10.872	$9.943
麵粉	包	2.925	2.818	2.425	2.289	2.600	3.448
豆腐	十塊	.074	.070	.066	.063	.061	.072
青菜	市斤	.045	.036	.036	.027	.017	.035
鮮猪肉	市斤	.335	.370	.313	.282	.244	.292
鮮魚	市斤	.216	.180	.192	.173	.149	.163
鮮鴨蛋	個	.032	.027	.024	.024	.021	.024
豆油	市斤	.187	.169	.171	.126	.169	.241
食鹽	市斤	.071	.071	.082	.102	.104	.112
白糖	市斤	.130	.202	.214	.182	.176	.205
細布	市尺	.119	.122	.098	.088	.86	.091
條格布	市尺	.072	.071	.065	.061	.057	.060
唐本煤	市斤	.013	.014	.015	.014	.013	.014
木柴	十担	.130	.104	.099	.094	.092	.100
肥皂	塊	.065	.065	.060	.055	.050	.051
總計		$15.730	$14.619	$11.427	$12.910	$14.711	$14.851

將十五品之綜合價代入公式得簡單綜合指數如下：(以二十年為基期)

民国二十年 十五品綜合價為 15.730　綜合指數 $\frac{15.730}{15.730} \times 100 = 100.00$

廿一年　14.619　$\frac{14.619}{15.730} \times 100 = 92.94$

民国廿二年十五品綜合價$11.427 綜合指數 $\frac{11.427}{15.730}\times 100 = 72.64$

廿三年	12.910	$\frac{12.910}{15.730}\times 100 = 82.07$
廿四年	14.711	$\frac{14.711}{15.730}\times 100 = 93.52$
廿五年	14.851	$\frac{14.851}{15.730}\times 100 = 94.41$

(2) 加權綜合指數

設 I_A 為加權綜合指數 (Weighted Aggregative Index Numbers)

Q, Q', Q'', Q''' 為各種物品之物量。

$$I_A = \frac{P_1 Q' + P_1' Q'' + P_1'' Q''' + \cdots\cdots}{P_0 Q' + P_0' Q'' + P_0'' Q''' + \cdots\cdots} \times 100$$

$$= \frac{\Sigma P_1 Q}{\Sigma P_0 Q} \times 100 \quad \text{......(公式六十)}$$

例如表十七所列十五品據上海市社會局於十八年四月至十九年三月間舉行三〇五家工人家庭之調查，得每家每年消費各品量及各品值如下：

表十八 上海市工人家庭平均每年每家消費各品量值表

品別	消費量	單價	消費值
粳米	5.014 市石	$11.678	$58.553
麵粉	1.122 包	3.202	3.593
豆腐	45.915 十塊	.068	3.122
青菜	304.145 市斤	.025	7.604
鮮豬肉	48.060 市斤	.293	14.082
鮮魚	32.996 市斤	.173	5.708
鮮鴨蛋	84.932 個	.028	2.378
豆油	68.318 市斤	.195	13.322
食鹽	37.575 市斤	.067	2.518
白糖	10.307 市斤	.095	0.979
細布	19.643 市尺	.109	2.141
條格布	20.713 市尺	.067	1.388

磨木柴	493.874市斤	.012	5.926
火柴	9.005大匣	.070	.630
肥皂	50.827塊	.051	2.592
總計			$124.536

如用每年每家之消費量權重各年各品之價格,得各年每家消費十五品之總值,代入公式為加權綜合指數如下:

民國二十年消費總值$134.589 加權綜合指數 $\frac{134.589}{134.589}\times100=100.00$

廿一年　126.301　$\frac{126.301}{134.589}\times100=93.84$

廿二年　109.646　$\frac{109.646}{134.589}\times100=81.46$

廿三年　109.378　$\frac{109.378}{134.589}\times100=81.27$

廿四年　113.754　$\frac{113.754}{134.589}\times100=84.52$

廿五年　125.348　$\frac{125.348}{134.589}\times100=93.13$

公式六十中Q_1可改為Q_c,蓋係民國十八年(既非基期又非計算期)之消費量。惟究應採用基期之物量(Q_0, Q_0', Q_0'', Q_0'''……)為權數乎?抑應採用計算期之物量(Q_1, Q_1', Q_1'', Q_1'''……)為權數乎?學者間主張不一,致加權綜合指數之公式,已成數十種之多。茲舉其最著者六種列下:

設 Q_1為計算期之物量。

Q_0為基期之物量。

W_c為概權。(所謂概權既非基期之物量物值,又非計算期之物量物值,乃任何時期之估計權數。)

(A) 拉斯貝爾綜合法 (Laspeyres Aggregative Method)

$$I_A=\frac{\Sigma P_1Q_0}{\Sigma P_0Q_0}\times100 \quad \text{……(公式六十一)}$$

(B) 派許綜合法 (Paasche Aggregative Method)

$$I_A=\frac{\Sigma P_1Q_1}{\Sigma P_0Q_1}\times100 \quad \text{……(公式六十二)}$$

(C) 愛奇華士馬歇綜合法 (Edgeworth and Marshall Aggregative Method)

$$I_A=\frac{\Sigma P_1\frac{Q_0+Q_1}{2}}{\Sigma P_0\frac{Q_0+Q_1}{2}}\times100$$

$$=\frac{\Sigma P_1(Q_0+Q_1)}{\Sigma P_0(Q_0+Q_1)}\times100 \quad \text{……(公式六十三)}$$

(D) 理想公式 (Ideal Formula) 為費雪氏 (I. Fisher) 所發明

$$I_A=\sqrt{\frac{\Sigma P_1Q_0}{\Sigma P_0Q_0}\times\frac{\Sigma P_1Q_1}{\Sigma P_0Q_1}}\times100 \quad \text{……(公式六十四)}$$

(E) 擴張基期法 (Broadened Base Aggregative Method)

$$I_A=\frac{\Sigma P_1\times\text{若干期平均物量}}{\text{若干期平均物價}\times\text{若干期平均物量}}\times100 \quad \text{……(公式六十五)}$$

(F) 概括綜合法

$$I_A=\frac{\Sigma P_1W_c}{\Sigma P_0W_c}\times100 \quad \text{……(公式六十六)}$$

(二) 比例平均法——比例平均法 (Average of Ratios) 乃將計算期各品價格 (P_1) 以基期各該品價格 (P_0) 分別相除，得各品比價，再綜合各品比價而平均之，即得各年指數。惟此種指數以所用平均方法不同，復可分為五種：

(1) 算術平均比價指數——算術平均比價指數，乃將各

為比價總合數，用算術平均法求得之指數也。

(A) 簡單算術平均比價指數

設 I_M 為算術平均比價指數。

$$I_M = \frac{\frac{P_1}{P_0} + \frac{P_2}{P_0} + \frac{P_3}{P_0} + \cdots\cdots}{N} \times 100$$

$$= \frac{\sum \frac{P}{P_0}}{N} \times 100 \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \text{(公式六十七)}$$

例如表十七民國二十年至二十五年上海市十五品零售物價，化成各品之比價如下表：

表十九　民國二十年至二十五年上海市十五品零售物價比價表
(民國二十年比價＝100)

品別	二十年	廿一年	廿二年	廿三年	廿四年	廿五年
粳米	100.00	91.07	66.91	82.52	96.13	87.91
麵粉	100.00	96.34	82.91	78.26	85.89	117.32
豆腐	100.00	96.59	89.19	85.14	82.43	99.20
青菜	100.00	84.00	80.00	60.00	57.78	77.78
鮮猪肉	100.00	110.45	93.42	84.18	72.84	87.16
鮮魚	100.00	83.33	88.89	80.69	68.78	75.46
鮮鴨蛋	100.00	84.38	75.00	65.63	65.63	75.00
豆油	100.00	90.37	91.44	67.38	90.37	122.88
食鹽	100.00	100.00	115.49	143.66	146.48	157.75
白糖	100.00	148.53	157.35	133.82	129.41	150.74
細布	100.00	102.52	82.35	73.95	72.27	76.47
條格布	100.00	98.61	90.28	84.72	79.17	83.33
廣木柴	100.00	107.69	115.38	107.69	100.00	107.69
火柴	100.00	80.00	76.15	72.31	70.77	76.92
肥皂	100.00	100.00	92.31	84.62	76.92	78.46
總計	1800.00	1469.88	1397.08	1303.97	1278.07	1478.73

根據各年各品比價，求得各年總比價如上表末排，而

後代入公式六十七，據算歷年簡單算術平均比價指數如下：

年次	十五品總比價 $\Sigma\frac{P_1}{P_0}$	簡單算術平均比價指數 $\frac{\Sigma\frac{P_1}{P_0}}{N}$
民国二十年	1,500.00	$\frac{1500.00}{15}=100.00$
廿一年	1,467.88	$\frac{1467.88}{15}=97.86$
廿二年	1,397.08	$\frac{1397.08}{15}=93.14$
廿三年	1,303.97	$\frac{1303.97}{15}=86.93$
廿四年	1,278.07	$\frac{1278.07}{15}=85.20$
廿五年	1,478.73	$\frac{1478.73}{15}=98.58$

(B)加權算術平均比價指數

設 W, W', W'', W''' 為各品之物值

$$I_M=\frac{W'\frac{P_1'}{P_0'}+W''\frac{P_1''}{P_0''}+W'''\frac{P_1'''}{P_0'''}+\cdots\cdots}{W'+W''+W'''+\cdots\cdots}\times100$$

$$=\frac{\Sigma W\frac{P_1}{P_0}}{\Sigma W}\times100\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\text{(公式六十八)}$$

若用表十八上海市工人家庭平均每年每家消費十五品之價值,權重各品之比價後總和之,代入公式六十八,即得加權算術平均比價指數如下:

年次	十五品加權總比價 $\Sigma W\frac{P_1}{P_0}$	加權算術平均比價指數 $\frac{\Sigma W\frac{P_1}{P_0}}{\Sigma W}$
民国二十年	12,453.60	$\frac{12453.60}{124.536}=100.00$
廿一年	11,719.13	$\frac{11719.13}{124.536}=94.10$
廿二年	10,039.47	$\frac{10039.47}{124.536}=80.62$
廿三年	10,202.88	$\frac{10202.88}{124.536}=81.93$
廿四年	10,868.88	$\frac{10868.88}{124.536}=87.28$

民国廿五年　11,733.72　$\frac{11733.72}{124.536}=94.22$

公式六十八中 W, W', W'', W''' 以民国十八年各品之消費值為權數,惟究應採用基期之消費值(P_0Q_0)為權數乎?抑用計核期之消費值(P_1Q_1)為權數乎?或採用基期物價計核期物量之乘積(P_0Q_1)為權數乎?抑用計核期物價基期物量之乘積(P_1Q_0)為權數乎?費暄教授即根據以上各種權數,化加權算術平均比價指數公式為下列四種:

(a) 費暄氏第三公式

$$I_M=\frac{\Sigma P_0Q_0\frac{P_1}{P_0}}{\Sigma P_0Q_0}\times 100 \quad \text{……(公式六十九)}$$

(b) 費暄氏第五公式

$$I_M=\frac{\Sigma P_0Q_1\frac{P_1}{P_0}}{\Sigma P_0Q_1}\times 100 \quad \text{……(公式七十)}$$

(c) 費暄氏第七公式

$$I_M=\frac{\Sigma P_1Q_0\frac{P_1}{P_0}}{\Sigma P_1Q_0}\times 100 \quad \text{……(公式七十一)}$$

(d) 費暄氏第九公式

$$I_M=\frac{\Sigma P_1Q_1\frac{P_1}{P_0}}{\Sigma P_1Q_1}\times 100 \quad \text{……(公式七十二)}$$

(乙) 幾何平均比價指數——幾何平均比價指數乃將N品比價連乘後開N次方,乘100而得。

(A)簡單幾何平均比價指數

設 I_G 為幾何平均比價指數

Π 為各比價連乘之記號。

$$I_G=\sqrt[N]{\Pi\frac{P_n}{P_0}}\times 100$$
$$=\operatorname{antilog}\left[\frac{\Sigma\log\frac{P_n}{P_0}}{N}+\log 100\right]\text{（公式七十三）}$$

年次	十五品比價之總對數 $\Sigma\log\frac{P_n}{P_0}$	十五品比價之平均對數 $\Sigma\log\frac{P_n}{P_0}\div N$	簡單幾何平均比價指數
民国二十年	30.00000	$\frac{30.00000}{15}=2.00000$	100.00
廿一年	29.78018	$\frac{29.78018}{15}=1.98535$	96.68
廿二年	29.39276	$\frac{29.39276}{15}=1.95952$	91.10
廿三年	28.89244	$\frac{28.89244}{15}=1.9$[illegible]16	84.37
廿四年	28.67042	$\frac{28.67042}{15}=1.91136$	81.54
廿五年	29.69110	$\frac{29.69110}{15}=1.9794$[illegible]	95.37

(B)加權幾何平均比價指數

$$I_G=\sqrt[\Sigma W]{\Pi\left(\frac{P_n}{P_0}\right)^W}\times 100$$
$$=\operatorname{antilog}\left[\frac{\Sigma W\log\frac{P_n}{P_0}}{N}+\log 100\right]\text{（公式七十四）}$$

年次	十五品比價之加權總對數	十五品比價之加權平均對數	加權幾何平均比價指數
民国二十年	249.07200	$\frac{249.07200}{124.536}=2.00000$	100.00
廿一年	245.53022	$\frac{245.53022}{124.536}=1.97156$	93.66
廿二年	236.45874	$\frac{236.45874}{124.536}=1.89872$	79.20
廿三年	237.62942	$\frac{237.62942}{124.536}=1.90812$	80.93
廿四年	240.22280	$\frac{240.22280}{124.536}=1.92894$	84.91

廿五年	244.97698	$\frac{244.97698}{124.536}=1.96712$	92.71

(3)倒數平均比價指數——倒數平均比價指數者，乃各品比價倒數之算術平均指數之倒數。

(A)簡單倒數平均比價指數

設I_H為倒數平均比價指數。

$$I_H=\frac{N}{\Sigma\frac{1}{P}}\times 100 \quad \text{(公式七十五)}$$

仍以表十九上海市十五品零售物價之比價為例，求得各年之簡單倒數平均比價指數如下：

年次	十五品比價之倒數總數 $\Sigma\frac{1}{P}$	十五品比價之平均倒數 $\frac{\Sigma\frac{1}{P}}{N}$	簡單倒數平均比價指數 $\frac{1}{\frac{\Sigma\frac{1}{P}}{N}}\times 100$
民國二十年	15.00000	$\frac{15.00000}{15}=1.00000$	$\frac{1}{1.00000}\times 100=100.00$
廿一年	15.68173	$\frac{15.68173}{15}=1.04545$	$\frac{1}{1.04545}\times 100=95.65$
廿二年	16.78074	$\frac{16.78074}{15}=1.11872$	$\frac{1}{1.11872}\times 100=89.39$
廿三年	18.24443	$\frac{18.24443}{15}=1.21630$	$\frac{1}{1.21630}\times 100=82.22$
廿四年	19.29344	$\frac{19.29344}{15}=1.28623$	$\frac{1}{1.28623}\times 100=77.75$
廿五年	16.18928	$\frac{16.18928}{15}=1.07929$	$\frac{1}{1.07929}\times 100=92.65$

(B)加權倒數平均比價指數

$$I_H=\frac{\Sigma W}{\Sigma W\frac{1}{P}}\times 100 \quad \text{(公式七十六)}$$

年次	十五品之加權比價倒數 $\Sigma W\frac{1}{P}$	十五品比價之加權平均倒數 $\frac{\Sigma W\frac{1}{P}}{\Sigma W}$	加權倒數平均比價指數 $\frac{1}{\frac{\Sigma W\frac{1}{P}}{\Sigma W}}$
民國二十年	124.53600	$\frac{124.53600}{124.536}=1.00000$	$\frac{1}{1.00000}\times 100=100.00$
廿一年	133.54454	$\frac{133.54454}{124.536}=1.07234$	$\frac{1}{1.07234}\times 100=93.25$
廿二年	159.79336	$\frac{159.79336}{124.536}=1.28311$	$\frac{1}{1.28311}\times 100=77.94$

廿三年	155.59292	$\frac{155.59292}{124.536}=1.24938$	$\frac{1}{1.24938}\times100=80.04$
廿四年	152.21664	$\frac{152.21664}{124.536}=1.22227$	$\frac{1}{1.22227}\times100=81.81$
廿五年	136.20362	$\frac{136.20362}{124.536}=1.09369$	$\frac{1}{1.09369}\times100=91.43$

(3)平均比例法——平均比例法(Ratio of Average)乃先求計算期及基期各品實價之平均數，而後將基期平均實價除計算期平均實價，乘100即得此種指數。復以平均方法之不同可分為下列三種：

(1)算術平均實價指數——算術平均實價指數乃將各年各品實價綜合後，用算術平均法計算其平均實價，而後以基年之平均價除計算期之平均價，復乘100即得。

(A)簡單算術平均實價指數

設I_m為算術平均實價指數。

$$I_m=\frac{\frac{\Sigma P}{n}}{\frac{\Sigma P}{n}}\times100 \cdots\cdots\cdots\cdots \text{(公式七十七)}$$

(B)加權算術平均實價指數

$$I_m=\frac{\frac{\Sigma WP}{\Sigma W}}{\frac{\Sigma WP}{\Sigma W}}\times100 \cdots\cdots\cdots \text{(公式七十八)}$$

仍以表十七上海重要各品之零售物價及表十八每戶每年消費各品之數值為例，求得各年簡單及加權算術平均實價指數如下：

年次	$\frac{\Sigma P}{N}$	簡單算術平均實價指數	$\frac{\Sigma WP}{\Sigma W}$	加權算術平均實價指數
民國二十年	$1.049	100.00	$5.484	100.00
廿一年	.975	92.94	5.008	91.28
廿二年	.762	72.64	3.703	[illegible]
廿三年	.861	82.07	4.519	82.41
廿四年	.981	93.52	5.256	[illegible]
廿五年	.990	94.40	4.883	88.50

(乙)幾何平均實價指數——幾何平均實價指數為將歷年N品之實價連乘，開N次方，復乘100即得。

(A)簡單幾何平均實價指數

設I_g為幾何平均實價指數。

$$I_g=\frac{\sqrt[N]{\pi P_1}}{\sqrt[N]{\pi P_0}}\times 100=\text{antilog}\left\{\left[\frac{\Sigma\log P_1}{N}-\frac{\Sigma\log P_0}{N}\right]+\log 100\right\}$$ (公式七十九)

(B)加權幾何平均實價指數

$$I_g=\frac{\sqrt[\Sigma W]{\pi P_1^{W}}}{\sqrt[\Sigma W]{\pi P_0^{W}}}\times 100=\text{antilog}\left\{\left[\frac{\Sigma W\log P_1}{\Sigma W}-\frac{\Sigma W\log P_0}{\Sigma W}\right]+\log 100\right\}$$ (公式八十)

茲仍以表十七及十八上海市五品之零售價及每家每年消費各品之數值為例，求得各年簡單及加權幾何平均實價指數如下：

年次	$\sqrt[N]{\Pi P}$	簡單幾何平均實價指數	$\sqrt[\Sigma W]{\Pi P^W}$	加權幾何平均實價指數
民國二十年	$0.175	100.00	$1.071	100.00
廿一年	.169	96.57	1.003	93.65
廿二年	.137	78.29	.848	79.18
廿三年	.126	72.00	.867	80.95
廿四年	.143	81.71	.910	84.97
廿五年	.143	81.71	.993	92.72

(3)倒數平均實價指數——倒數平均實價指數者，乃各品實價倒數之算術平均數之倒數平均實價指數也。

(A)簡單倒數平均實價指數

設I_h倒數平均實價指數，

$$I_h=\frac{\Sigma\frac{1}{P}}{\Sigma\frac{1}{P_1}}\times100 \quad \text{……（公式八十一）}$$

(B)加權倒數平均實價指數

$$I_h=\frac{\Sigma\frac{W}{P}}{\Sigma\frac{W}{P_1}}\times100 \quad \text{……（公式八十二）}$$

茲仍以十五品零售物價為例，求得各年倒數平均實價指數如下：

年次	$\frac{N}{\Sigma\frac{1}{P}}$	簡單倒數平均實價指數	$\frac{\Sigma W}{\Sigma\frac{W}{P}}$	加權倒數平均實價指數
民國二十年	$.0669	100.00	$.1231	100.00
廿一年	.0648	96.82	.1191	96.75
廿二年	.0638	95.25	.1195	97.07

廿三年	1.0593	85.66	.1042	84.68
廿四年	1.0213	76.68	.0898	72.98
廿五年	1.0623	93.12	.1175	95.45

第六節　指數公式之測驗

(一)時間顛倒測驗——我人如欲測定去今二年之物價指數，則二年中任何一年，均可作為基期。如以去年作為基期而編製今年之指數，名曰前進指數。如以今年作為基期而編製去年之指數，名曰後退指數。時間顛倒測驗(Time reversal test)者，即前進指數與後退指數相乘之積是否為一之測驗也。若物品祇有一種，則後退指數即為前進指數之倒數，前進與後退指數相乘之積必等於一。若計算指數之物價不祇一種時，則僅綜合及幾何平均指數能適應此種測驗。至於算術平均指數，因受極端物價之影響，而有偏高誤(Upward bias)，其前進與後退指數之積大於一。倒數平均指數則有偏低誤(Downward bias)，其乘積小於一。此種偏高偏低誤，總稱之曰型偏誤(Type bias)。至於加權指數，則以加權之關係，偏高偏低較小，蓋此種指數，常兼具型偏及權偏(Weighted bias)二種錯誤。惟加權確當，固可減其錯誤，若權重失當，則反增其偏誤也。

(二)量值衡平測驗——量值衡平測驗(Factor reversal test)

乃物價與物量指數之測驗。蓋物價與物量指數之積，理論上應等於物值指數。若計算指數之物品祇有一種時，則物價指數乘物量指數乃等於物值指數。如物品不祇一種時，則除費雪氏之理想公式外，俱不能適應此種測驗，惟理想公式亦不能適應時間顛倒測驗。

時間顛倒測驗及量值衡平測驗二者雖為試驗公式優劣之方法，但優良之公式未必盡能適應此種測驗，適應此種測驗之公式亦未必均為優良之公式，如拉斯貝爾、派許、費雪等之及馬歇爾之綜合公式，雖不合於時間顛倒測驗，然仍不失為優良之公式也。

第七節 各種指數之特性

(一)簡單指數之特性

(1)簡單綜合指數——用綜合比例法求得之綜合指數，表面上似無權數，然究諸實際，常有無意義之權數參入，蓋計價單位無定，譬如秋米如以每石計價與所得之綜合指數，與按升計價所得之指數，互相不同，故性質無定，以少用為宜。

(2)簡單算術平均指數——用算術平均法求得之指數，意義明顯，計算便捷，此其優點，惟在計算與價指數時，亦受計價單位之影響，而性質無定，茲計算此

價指數時則常有上偏誤而不能適應時間顛倒測驗

(3)簡單幾何平均指數——簡單幾何平均指數不僅能適應時間顛倒測驗，且受極端變量之影響極小，所得之平均指數較為準確也。

(4)簡單倒數平均指數——此種指數適與算術平均指數相反，而有偏低誤且不能適應時間顛倒測驗。

(二)加權指數之特性——權數之種類有二：一為物量，二為物值，物值又可分為基期之物值(P_0Q_0)，計算期之物值(P_1Q_1)，基期物價乘計算期物量之物值(P_0Q_1)及計算期物價乘基期物量之物值(P_1Q_0)等四種。其中P_0Q_0及P_1Q_1之二種權數，具有偏誤偏低，而P_0Q_1及P_1Q_0二種權數則有偏高誤，致各種加權指數之偏誤如下：

(1)二重偏低

(A)用P_0Q_0權重之倒數平均比價指數。

(B)用P_0Q_1權重之倒數平均比價指數。

(2)一重偏低

(A)用P_0Q_0權重之幾何平均比價指數。

(B)用P_0Q_1權重之幾何平均比價指數。

(3)無偏誤

(A)用P_0Q_0權重之算術平均比價指數。

(B)用P_0Q_1權重之算術平均比價指數。

(C)用P_1Q_1權重之倒數平均比價指數

(D)用P_1Q_0權重之倒數平均比價指數。

(4) 一重偏高

(A)用P_1Q_1權重之幾何平均比價指數

(B)用P_0Q_0權重之幾何平均比價指數

(5) 二重偏高

(A)用P_1Q_1權重之算術平均比價指數

(B)用P_1Q_0權重之算術平均比價指數

所堪注意者，簡單幾何平均比價指數，本無型偏，惟用P_1Q_1及P_1Q_0權重，則偏高。用P_0Q_0及P_0Q_1權重，則偏低。簡單算術平均比價指數，原有偏高之弊，若用P_1Q_1及P_1Q_0權重，則成双重偏高。倒數平均指數原有偏低之弊，若用P_0Q_0及P_0Q_1權重則成双重偏低。維若用P_0Q_0、P_0Q_1權重算術平均比價指數，用P_1Q_1及P_1Q_0權重倒數指數，則型偏與權偏互消，而成無偏誤指數。指數公式之重要，於此可見一般。

問　題

1. 試述指數之意義及指數之功用。
2. 何謂定基指數，環比指數，類比指數？試略述其編製法。
3. 指數之種類有幾？試分別略述之。
4. 選擇物品及物價時應注意何點？
5. 基期之種類有幾？擇定基期時應注意何點？

6. 試述加權之重要性，及權數之種類。

7. 計算指數之方法有幾？試作一表或述之。

8. 何謂時間顛倒測驗？何種指數公式適用此種測驗？

9. 何謂量值衡平測驗？試申述之。

10. 試述各種簡單及加權指數之特性。

習題十二

民國二十年至二十五年上海輸入十五品物價表

品別	單位	二十年	廿一年	廿二年	廿三年	廿四年	廿五年
棉花(美棉)	担	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]
煤(開灤)	公噸	17.418	14.913	[illegible]	13.253	13.810	15.025
洋燭(長条)	担	19.938	[illegible]	[illegible]	18.875	[illegible]	[illegible]
人造絲(C/150)	公担	257.637	[illegible]	241.433	214.604	[illegible]	[illegible]
鋼鐵([illegible])	噸	19.800	14.287	[illegible]	15.308	14.354	[illegible]
火柴	五十格	5.429	5.300	[illegible]	4.140	4.523	[illegible]
染料(靛油)	担	97.188	119.202	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]
紙(派紙)	令	6.095	5.407	4.693	3.975	3.446	[illegible]
米(西貢米)	石	12.276	10.458	[illegible]	9.364	10.498	[illegible]
麵粉([illegible])	袋	2.943	2.762	2.413	2.241	[illegible]	[illegible]
糖([illegible])	担	14.837	18.673	[illegible]	19.890	[illegible]	[illegible]
紙烟([illegible])	千枝	7.336	[illegible]	[illegible]	[illegible]	6.211	5.916
棉布([illegible])	碼	.257	.380	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]
細斜布	尺	10.289	9.605	[illegible]	[illegible]	6.744	7.119
香水	打	[illegible]	19.407	[illegible]	[illegible]	[illegible]	38.615

試用上列統計資料計算

(1) 簡單綜合指數

(2) 簡單算術平均式作指數

(3) 簡單幾何平均式作指數

(4) 簡單[illegible]平均式作指數

習題十三

民國二十一年至二十五年上海輸入十五品物價比價表

（民國二十年比價＝100）

品別	十四、十五、十六年平均輸入值(單位千元)	二十年	廿一年	廿二年	廿三年	廿四年	廿五年
棉花	126,472	100.00	79.95	85.53	92.02	87.44	[illegible]
煤	34,154	100.00	85.62	71.66	76.09	79.29	[illegible]
砂糖	7,606	100.00	102.91	123.42	94.69	77.72	96.71
人造絲	11,146	100.00	85.75	97.49	86.66	76.67	79.09
鋼鐵	2,603	100.00	74.55	86.82	79.30	74.37	75.28
汽油	8,758	100.00	97.62	79.88	76.26	83.60	78.10
染料	18,738	100.00	116.48	115.25	124.24	114.98	116.27
紙	2,334	100.00	88.71	77.00	64.22	86.54	57.77
米	[illegible]	100.00	54.50	66.69	75.58	86.04	88.74
麵粉	31,121	100.00	93.85	86.49	76.15	86.44	114.37
[illegible]	50,171	100.00	125.85	144.29	152.03	120.15	146.29
紙烟	26,640	100.00	81.15	80.[illegible]	85.08	80.29	76.30
棉布	14,268	100.00	98.04	77.83	78.71	73.67	72.27
細斜布	16,333	100.00	93.63	72.18	67.32	65.74	72.32
香水	4,950	100.00	104.44	118.62	130.46	149.62	194.38

試用上列統計資料計算以下諸指數：

(1) 簡單算術平均比價指數。

(2) 簡單幾何平均比價指數。

(3) 簡單倒數平均比價指數。

(4) 加權算術平均比價指數。

(5) 加權幾何平均比價指數。

(6) 加權倒數平均比價指數。

(7) 加權算術平均實價指數。

(8) 加權幾何平均實價指數。

(9) 加權倒數平均實價指數。

(10) 用時間顛倒測驗法測驗各指數。

第八章 長期趨勢與季節變動

第一節 長期趨勢之意義及種類

長期趨勢乃係一種變量在一長時期內繼續向上或向下變動之傾向，此種傾向，或受自發之變動，或受外界之影響所形成，其保持時期間，或短至數年，或長至數十百年。生殖率之增高，死亡率之減低，足使世界人口與年俱增；耕種之改良，施肥之研究，足使五穀之收成年有增加；建築之改善，消防之精進，足使火災之發生遞年減少；機關組織之完善，勞資情感之協調，足使罷工糾紛事件遞年減少。凡此種種，俱非一朝一夕所能成者也。

事態之變動，忽高忽低，忽急忽緩，初無一定規律，然就大體觀之，其長期之進展，未始不可以平滑有規則之曲線表示之，譬之狂潮高漲，雖高低不平，然從遠處觀之，仍有一線可尋。長期趨勢乃即測定此一線之傾向也。至於長期趨勢之種類，概有下列數種：

(一)算術級數式長期趨勢——數列連續每年作同額有規律之增減者，謂之算術級數，在算術格度紙上繪示之，成一直線，此種趨勢線即算術級數式長期趨勢。

(二)幾何級數式長期趨勢——數列之變動，每年作同百分率有規則之增減者，謂之幾何級數，在對數格度紙上繪示之，成一直線，此種趨勢線即幾何級數式長期趨勢。

(三)S形長期趨勢——S形曲線為企業發展之特殊現象，當企業開辦之初，盈餘較少，其後努力經營，盈餘劇增，驟如直線上升，迨至成年，商品市場已到飽和之点，雖謀進展，開支若大，盈餘之增加漸緩，曲線又漸平坦。此種趨勢線，以其形似S形，故名曰S形長期趨勢。

第二節 測定長期趨勢之方法

(一)移動均數法——移動均數法將各期之數值，每若干期求一均數，再將均數繪示之，即得平滑之長期趨勢線，例如表二十，第三列係每五了期之均數，第四列係每八了期之均數，如繪示之，即得平滑趨勢線，惟求此均數之時期，應為五年四年乎，抑為八年十年乎，則須視商情輪迴期之長短而定，如商情每五年一輪迴，則長期趨勢線應採用五年之均數繪示之，若商情十年一輪迴，則應選用十年之均數，其目的乃在平均之時丢掉其循環變動也。

表二十 民國元年至二十五年上海[illegible]米市價比較表

年次	每石市價	五年之移動均數	八年之移動均數
民國元年	$7.37		
二年	6.80		
三年	6.10	$6.77	
四年	7.07	6.48	
五年	6.52	6.27	$6.59
六年	5.93	6.37	6.84
七年	5.75	6.68	7.23

八年	6.57	7.26	7.64
九年	8.63	8.04	8.03
十年	9.42	8.85	8.52
十一年	9.85	9.55	9.31
十二年	9.78	9.89	10.26
十三年	10.47	10.80	10.74
十四年	[illegible]	11.53	10.97
十五年	13.99	11.44	11.51
十六年	13.51	11.93	12.00
十七年	9.32	10.92	12.17
十八年	12.55	12.57	12.08
十九年	15.25	11.94	11.76
二十年	12.21	11.80	11.43
廿一年	10.38	11.38	11.34
廿二年	8.61	10.70	
廿三年	10.47	10.17	
廿四年	11.83		
廿五年	9.54		

(二)最小平方法——測定長期趨勢之最好方法為最小平方法。此法以最小平方名者，蓋以此法求得之趨勢直線或曲線為最小平方線，亦即各變量與此趨勢線離中差之平方為最小。用此法求得之趨勢線有直線與曲線二種，茲分述之如下：

(1)直線趨勢——時間數列中各變量之變動，與年俱增或逐年跌減者，則其長期趨勢係為一直線，其求法如下：

設X為各時期與中央年相差之年數。

Y為各時期之長期趨勢值。

a為常數，即中央年之長期趨勢值，亦即時間數列之算術平均數。

b為趨勢直線之斜度。

$$Y = a + bX \quad \cdots\cdots\cdots\cdots (公式八十三)$$

$$\Sigma Y = Na + b\Sigma X \qquad \Sigma XY = a\Sigma X + b\Sigma X^2$$

設X為各時期與中央年相差之年數，其總和為零時，則

$$\Sigma Y = Na \qquad \Sigma XY = b\Sigma X^2 \text{。}$$

$$a = \frac{\Sigma Y}{N} \quad \cdots\cdots\cdots\cdots (公式八十四)$$

$$b = \frac{\Sigma(XY)}{\Sigma X^2} \quad \cdots\cdots\cdots\cdots (公式八十五)$$

表二十一　民國十年至二十四年上海華商銀行存儲額之長期趨勢表

年次	存儲額 單位千元 Y	年份離差 X	ΣXY +	ΣXY −	X^2	長期趨勢值 單位千元 Y=a+bX
民國十年	12,180	−7		85,260	49	−19,598.75
十一年	13,940	−6		83,640	36	−3,077.50
十二年	21,460	−5		107,300	25	13,443.75
十三年	22,630	−4		90,520	16	29,965.00
十四年	40,150	−3		120,450	9	46,486.25
十五年	45,360	−2		90,720	4	63,007.50
十六年	48,500	−1		48,500	1	79,528.75
十七年	63,000	0			0	96,050.00
十八年	94,620	1	94,620		1	112,571.25
十九年	117,940	2	235,880		4	129,092.50
二十年	147,990	3	443,970		9	145,613.75
廿一年	185,920	4	743,680		16	162,135.00
廿二年	183,590	5	917,950		25	178,656.25
廿三年	211,630	6	1,269,780		36	195,177.50
廿四年	225,780	7	1,580,460		49	211,698.75
總計	1,440,750	0	5,286,340	664,390	280	

$$a = \frac{1,440,750}{15} = 96,050 \qquad b = \frac{5,286,340 - 664,390}{280} = 16,521.25$$

$$Y = 96,050 + 16,521.25X$$

(2)二次拋物線——二次拋物線之計算公式如下：

設c為趨勢線之第二斜度。

$$Y=a+bX+CX^2 \quad \cdots\cdots\text{(公式八十六)}$$

設 $\Sigma X=0$，$\Sigma X^3=0$ 則

$$a=\frac{\Sigma Y\cdot\Sigma X^4-\Sigma(X^2Y)\cdot\Sigma X^2}{N\cdot\Sigma X^4-\Sigma X^2\cdot\Sigma X^2} \quad \cdots\cdots\text{(公式八十七)}$$

$$b=\frac{\Sigma(XY)}{\Sigma X^2} \quad \cdots\cdots\text{(公式八十八)}$$

$$C=\frac{\Sigma(X^2Y)\cdot N-\Sigma Y\cdot\Sigma X^2}{\Sigma X^4\cdot N-\Sigma X^2\cdot\Sigma X^2} \quad \cdots\cdots\text{(公式八十九)}$$

(3)三次拋物線——三次拋物線之計算公式如下：

設d為趨勢線之第三斜度。

$$Y=a+bX+CX^2+dX^3 \quad \cdots\cdots\text{(公式九十)}$$

設 $\Sigma X=0$，$\Sigma X^3=0$，$\Sigma X^5=0$ 則

$$a=\frac{\Sigma Y\cdot\Sigma X^4-\Sigma(X^2Y)\cdot\Sigma X^2}{N\cdot\Sigma X^4-\Sigma X^2\cdot\Sigma X^2} \quad \cdots\cdots\text{(公式九十一)}$$

$$b=\frac{\Sigma(XY)\cdot\Sigma X^6-\Sigma(X^3Y)\cdot\Sigma X^4}{\Sigma X^2\cdot\Sigma X^6-\Sigma X^4\cdot\Sigma X^4} \quad \cdots\cdots\text{(公式九十二)}$$

$$C=\frac{\Sigma Y\cdot\Sigma X^2-\Sigma(X^2Y)\cdot N}{\Sigma X^2\cdot\Sigma X^2-\Sigma X^4\cdot N} \quad \cdots\cdots\text{(公式九十三)}$$

$$d=\frac{\Sigma(XY)\cdot\Sigma X^4-\Sigma(X^3Y)\cdot\Sigma X^2}{\Sigma X^4\cdot\Sigma X^4-\Sigma X^6\cdot\Sigma X^2} \quad \cdots\cdots\text{(公式九十一)}$$

茲特設例示之如下：

表二十二 民國二年至二十四年我國國際貿易
淨交易率指數表

年次	累計指數 Y	X	XY	X^2	X^2Y	X^3Y	X^4	X^6	長期趨勢
二年	100.0	-11	-1100.0	121	12100.0	-133100.0	14641	1771561	91.4
三年	103.3	-10	-1033.0	100	10330.0	-103300.0	10000	1000000	104.4
四年	104.8	-9	-943.2	81	8488.8	-76399.2	6561	531441	114.2
五年	104.6	-8	-836.8	64	6694.4	-53555.2	4096	262144	121.3
六年	123.4	-7	-863.8	49	6046.6	-42326.2	2401	117649	125.8
七年	128.4	-6	-770.4	36	4622.4	-27734.4	1296	46656	128.1
八年	134.1	-5	-670.5	25	3352.5	-16762.5	625	15625	128.6
九年	155.6	-4	-622.4	16	2489.6	-9958.4	256	4096	127.6
十年	142.3	-3	-426.9	9	1280.7	-3842.1	81	729	125.4
十一年	117.7	-2	-235.4	4	470.8	-941.6	16	64	122.3
十二年	109.1	-1	-109.1	1	109.1	-109.1	1	1	118.6
十三年	105.4	0	0	0	0	0	0	0	114.7
十四年	103.5	1	103.5	1	103.5	103.5	1	1	110.8
十五年	98.7	2	197.4	4	394.8	789.6	16	64	107.5
十六年	108.6	3	325.8	9	977.4	2932.2	81	729	104.8
十七年	100.4	4	401.6	16	1606.4	6425.6	256	4096	103.2
十八年	93.1	5	465.5	25	2327.5	11637.5	625	15625	103.0
十九年	102.5	6	615.0	36	3690.0	22140.0	1296	46656	104.5
廿年	116.0	7	812.0	49	5684.0	39788.0	2401	117649	108.1
廿一年	128.6	8	1028.8	64	8230.4	65843.2	4096	262144	114.0
廿二年	127.5	9	1147.5	81	10327.5	92947.5	6561	531441	122.6
廿三年	145.4	10	1454.0	100	14540.0	145400.0	10000	1000000	134.2
廿四年	131.0	11	1441.0	121	15851.0	174361.0	14641	1771561	149.1
總計	2684.0	0	+380.6	1012	119717.4	94339.4	79948	7499932	

$$a=\frac{2684\times79948-119717.4\times1012}{23\times79948-1012\times1012}=114.681$$

$$b=\frac{380.6\times7499932-94339.4\times79948}{1012\times7499932-79948\times79948}=-3.912$$

$$c=\frac{2684\times1012-119717.4\times23}{1012\times1012-79948\times23}=0.046$$

$$d=\frac{380.6\times79948-94339.4\times1012}{79948\times79948-7499932\times1012}=0.054$$

$$Y=114.681+(-3.912)X+0.046X^2+0.054X^3$$

第三節　季節變動之意義

農產品之種植及收穫，均隨季節而異。農產品收穫之時，供給增多，價格較低；青黃不接之時，價格自貴。此農產品種植、收穫、供給及價格等受季節之影響而高下不等也。工業製品之原料，多半為農產品，農產品之供給既受季節之影響而互異，則製品之多寡，亦將受其影響而各季不同。此工業製品受季節之影響而有變動也。人民消費習慣不同，冬裘夏葛，物品之需要互異，物價之漲跌不同，此消費品價格受氣候之寒暖而變動也。他如鮮魚等食品，暖則易腐，冷則易藏，價格漲落，亦因此而異。凡此係因氣候之寒暖，雨量之多寡，及其他自然現象之變動，而使時間數列發生變動，即米丘爾氏(M.C.Mitchell)所謂自然因子是也。自然因子之外，更有人為之因子，有時亦可造成季節變動。例如我國之端午、中秋及農曆年節，歐美之聖誕節等，各民均趁此購買貨物，或以饋贈，或備自用，致商店營業極盛。此雖不受自然之影響，然以人類習慣如此而造成季節變動也。

季節變動之原因已如上述，至於測定此種變動之重要性，亦請論之。製品銷路之暢滯，影響工業之盛衰，工業之盛衰，常足形成失業工人之多寡。某物暢銷於冬，則冬季加工製造，夏季解雇停工。某物暢銷於夏，則夏令雇

工廠建造，冬季減工，紫絨凡此工人失業之事，實係受季節之影響所致，不得謂為經濟盛衰之現象。故於研究各種經濟原理時，如不將季節變動之狀況分析清楚，其立論必致謬誤可知也。

第四節　季節變動之測定

測定季節變動之方法甚多，其最便捷者為平均增減數，據戴維斯(Prof. G.R. Davies)之立論，凡每一年內劇烈之變動，或成直線之趨向者，可用平均數測定之。其法先求各月之平均數，再以各月之長期趨勢值除之，即得季節指數。茲以民國十九年至二十一年上海市粳米逐月零售價為例，先求三年各月之平均價，如下表第二列。若以民國二十年為中心，求得其長期趨勢公式為 $Y=10.776+(-0.321)X$，各月之長期趨勢值如下表第三列。以第三列之趨勢值除第二列之各月平均零售價，即得季節指數，如下表第四列。

表二十三　上海市粳米零售價季節指數表

月次	各月平均價	各月長期趨勢值	季節指數
一月	$10.477	$11.124	94.2
二月	10.686	11.097	96.3
三月	10.662	11.070	96.3
四月	10.618	11.043	96.1
五月	11.033	11.016	100.1

六月	11.31[illegible]	10.989	102.9
七月	11.517	10.962	105.0
八月	11.[illegible]72	10.[illegible]3[illegible]	10[illegible].5
九月	11.579	10.908	106.3
十月	11.06[illegible]	10.681	101.[illegible]
十一月	10.521	10.854	97.[illegible]
十二月	10.[illegible]40	10.827	9[illegible].6
平均	10.976	10.976	100.0

問題

1. 試述長期趨勢之意義及其種類。
2. 何謂移動平均數？用移動平均數法求長期趨勢之步驟如何？
3. 何謂最小平方法？用此法求直線趨勢之步驟如何？
4. 何謂二次及三次拋物線？測定二次及三次拋物線之步驟如何？
5. 試述季節變動之原因及測定季節變動之重要性。
6. 用平均法測定季節指數之步驟有幾？試詳述[illegible]

習題十四

民國十年至三十二年某實業股生產值及其純益表

年次	生產值 單位萬元	純益 單位萬元	年次	生產值 單位萬元	純益 單位萬元
民國十年	21	15	民國二十年	179	160
十一年	28	21	廿一年	263	230
十二年	29	28	廿二年	271	264
十三年	43	36	廿三年	230	290
十四年	62	47	廿四年	239	212
十五年	73	52	廿五年	250	207
十六年	79	64	廿六年	268	219
十七年	102	82	廿七年	299	193
十八年	144	172	廿八年	301	172
十九年	166	140	[illegible]	412	209

三十年　508　180　　卅三年　653　18[illegible]

卅一年　612　182

試用上列統計資料,求以下各長期趨勢值。

(1) 用五年移動均數,測定某電器廠生產值之長期趨勢,並繪示其趨勢線。

(2) 用最小平方法求某電器廠生產值之長期趨勢並繪示趨勢直線。

(3) 用八年移動均數,測定某電器廠純盈餘之長期趨勢,並繪示其趨勢線。

(4) 用最小平方法,求某電器廠純盈餘之三次拋物趨勢線並繪示其拋物線。

練習題十五

試調查本市最近十年來各月雞蛋之零售市價,並計算其季節指數。