

文

滿

談漫學數

編譯 敏 志 王 室官審編部生民



版 出

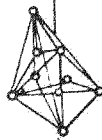
社 會 式 株 書 圖 洲 滿

滿 文
數 學 漫 談

民 生 部 編 審 官 室
王 志 敏 編 譯



出 版
滿 洲 圖 書 株 式 會 社



康德八年十月五日印刷
康德八年十月十日發行

數學漫談

定價壹圓七角（郵費六分）

編譯者 王 志 敏

發行者 新 京 特 別 市 西 七 馬 路 一 四 號
駒 越 五 貞

印刷者 新 京 特 別 市 西 七 馬 路 一 四 號
小 川 三 郎

印刷兼發行處 新 京 特 別 市 西 七 馬 路 一 四 號
滿洲圖書株式會社

總批發處 新 京 特 別 市 西 七 馬 路 一 四 號
滿洲書籍配給株式會社

電話代表(2)六九〇五番
撥替口座新 京 三 二 六 〇 番

有 所 權 版

數 即 藝 術

十九世紀的數學者們自己說、『我們也是藝術家。』不論科學或是藝術、沒有數是不可的。就是音樂和繪畫也都與數學有密切的關係。

說『藝術就是數。』的是雅典的畢達哥拉斯。

畢達哥拉斯這人是學過初等數學的人由畢達哥拉斯定理所熟知的學者。畢達哥拉斯在晚年結成特殊的學派、興起了不論禮儀・吟誦以至於政治都要修養之風。後來這學派隱然與政府對立、有時候指摘苛政、結果畢達哥拉斯受了誤解、不得不逃走。聽到了畢氏的死訊、從後面追來的夫人竟投身船外殉夫、有過這樣一段逸話。畢氏門下生所佩帶的學章是像日本陸軍所用的五角星形的、並且帶有敬禮的字樣。

畢氏是曾經考究過音樂與數的關係的人。完成了音程的就是他。他所完成的音程經過了多少的變遷、進而規定為國際的標準。

米凱蘭采洛堅持着『人類為萬物的尺度。』的思想。將人體的比例原則應用於建築方面的比例觀念。他主張人類是神的創作中最完美的。

(2) 黃金分割

羅馬的建築家威特維斯採取如次的分數。

設身長爲 1、則

頭頂———胸	$\frac{1}{4}$
胸———大腿上部	〃
大腿上部———膝蓋	〃
膝蓋———脚心	〃
頭頂———前髮線	$\frac{1}{40}$
前髮線———胸骨上部	$\frac{1}{8}$
手腕———指尖	$\frac{1}{10}$
男子的脚	$\frac{1}{6}$
女子的脚	$\frac{1}{8}$

設臉長爲 1、則

前髮線———眉毛	$\frac{1}{3}$
眉毛———鼻尖	〃
鼻尖———下頰	〃

黃 金 分 割

將直線 AB 內分於 c、使

$$AC^2 = AB \cdot BC$$

時、叫做 C 將 AB 黃金分割。這樣看來、所謂黃金分割者、就是把一根直線按六十二與三十八的長度比而分割的。

文字的形・偏分髮、禮物上的紅白線（惟日本有之）日本婦女的帶的位置之美、也都由黃金分割得來的。古代和中世的美的概念乃是對稱性的原理、但是黃金分割乃是更複雜的美之規範。希臘巴勒典的建築、再有樹葉的某種排列、也和黃金分割有關係。

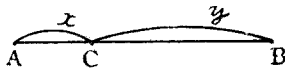
在著名肖像畫家杜勒的自畫像的臉上可找到種種的黃金分割點、結果就着頭頂 A、鼻尖 C' 口 B 來看、C 大體是把 AB 黃金分割的。

$$AB = 6.3, \quad AC = 3.8, \quad BC = 2.5,$$

$$AB^2 = 14.4, \quad AB \cdot AC = 15.8,$$

$$AC^2 \doteq AB \cdot AC \quad (\doteq \text{是「略等」的記號})$$

第 1 圖



現在設 BC, AC 各為 x, y , 則

$$\frac{y}{x} = \frac{x}{x+y}$$

故若設

$$\frac{y}{x} = a$$

則
$$a = \frac{1}{a+1}$$

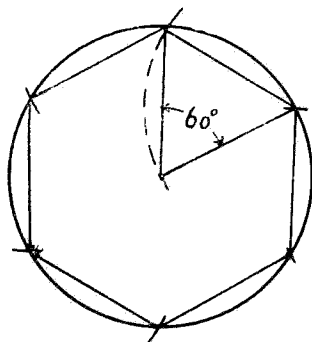
所以
$$a = \frac{-1 \pm \sqrt{5}}{2}$$

正根爲
$$a_1 = \frac{\sqrt{5} - 1}{2} = 0.62$$

六十度與直角

五六千年前巴比倫人用下述的方法作六十度的角。這是最古的數學發現之一。（參看下圖）

第 2 圖



六角形與六十度角的作法

先在圓內畫一個內接的正六角形。這個只要把圓規的開口弄成和圓的半徑一般長、然後用這圓規將圓周繼續截斷即可、這時候截點成爲正六角形的頂點。把這六個截點一連結就可以

了。這樣一來、一個邊在中心所含的角恰是六十度。用圓規把圓周恰好分成六等分的法、若是實地去試做一做是有趣的。

再有自昔即已知道了作直角（九十度）非常簡單的方法。現在若作一個各邊的長為 3, 4, 5 的三角形、對着長為 5 的邊的角就是直角。這法現在木匠仍然利用着。古代埃及的木匠把繩子按這個長度的比而分開、在分開的地點結上疙疸、用這繩做爲直角的準繩、放在地上。邊長各為 5, 12, 13 的三角形也有一個角是直角。據說畢達哥拉斯拿這個做爲基礎而發見定理的時候、喜極而在音樂之神繆絲前獻了許多頭牛。

天文也是數學

古時拿三百六十日當做一年、一年分爲四個等分、一個等分是九十天。三百六十是六十的倍數、和全角的度數相同、九十和直角的度數相同。

在春分（三月二十一日前後）秋分（九月二十三日前後）這兩天、太陽上昇或下降的方向與北極星的方向約成九十度角、縛鉛錘的線吊起來和水面成九十度角。

建築寺院的人就利用這種事實。看一看日曆這種古代

紀念物、夏至（六月二十日前後）或冬至（十二月二十一日前後）的時候，太陽各偏於北或南，所以這時候在太陽出沒的方向釘好木樁，求得這兩個方向的中央方向，做爲正確的東西方向。古時這兩個日子是非常重要的。

最古的幾何學問題，起源就在於使日曆正確的適合季節。真正的正午時刻太陽投影的方向恰爲正南正北。這也就是通過觀測地點的子午線的方向。

埃及的紀念物、關於天體的方向實在建築得正確。看一看吉澤的大金字塔通風坑的方向、也就會承認這事並非虛言。

天狼星通過子午線的時候、大金字塔南部的面恰垂直於那方向。天狼星和太陽一齊上昇的時候、就等於報告年初或是尼羅河的氾濫。

天狼星的光線這時候一直射入通風坑、射入「王室」、照着王的遺骸。

另有一個坑、通到再下面的室內、這坑正指着北極星的光在下南中（星周轉時在下方切着子午線的事）射入的方向。在上南中、有射入上述的王室的第二個坑。

這時候是把龍座的 α 星當做北極星。這比真的北極低三度。因之中世以前所用的緯度值有許多的需要加以這

樣的補正。方尖塔可用做影時計 (Shadow clock)。

金字塔的底邊指着正南正北和正東正西、四邊長度之和與金字塔的高度成二倍圓周率之比。底面差不多純屬水平的、水平的誤差據說不到萬分之一。

埃及人和巴比倫人知道圓周對於直徑總是有着同樣的比。瑞士的大數學者尤拉把這個比用希臘字母 π 字代表。巴比倫人希伯萊人把 π 大體當做3。埃及人使用着較為精密的值。

數 值 計 算

塞姆族拿從中指尖到肘關節的距離當做尺度。叫做肘尺。古代羅馬也用他。叫做 cubit, 日本在德川時代叫 \approx 兒童的手通 \approx 就是小孩生後穿的衣服、拿牠當 \approx 肘尺 \approx 那麼長。

古時土地的價值是按他能出產多少糧穀而定。但是拿這價值來決定面積、則是極不正確的。用同樣大小的方形磚鋪滿在地面上而看他的大小、這比較是好法子。

要想知道複雜的曲線所包圍的面積時、在薄紙或錫上面描下來那曲線、把曲線所圍成的形剪下來、秤這塊紙的重量。若是另外的知道了單位面積紙的重量、容易

易的就能得出答案來。或是在方格紙上畫曲線，查其中所含的格數，也能求出來曲線所包圍的面積。

『將一·二·三·……順次一直到十的整數相加，結果得多少呢？但須用暗算來計算。』若是照下邊那樣算法，這暗算是沒有甚麼困難的。

$$\begin{array}{r} 1+2+3+4+5 \\ +10+9+8+7+6 \\ \hline 11+11+11+11=55 \end{array}$$

這乃是後來以數學之女王的整數論而稱霸於數學界的高斯幼時想出來的算法。人家竟說他是『問題還沒說完就算出答數啦。』

暗算就是盲目也能辦得到的。尤拉晚年雖然双目失明，仍是用暗算計算。暗算是必須獎勵的。

暗算的天才很有特殊的例子。就是動物也能計算，這真是不可小看的。

暗算若是加以研究，能想出來各自獨特的，對於自己最合適的好法子。可以拿十減一替代九、乘五的時候可以先十倍、然後用二除。乘二十五的時候，可以先百倍然後用四除。

用尺量的時候、最小刻度的十分之一是用目測得出來的。寫 6.8 耗的時候、意思說是使用的是耗尺、長度在

6.75 耗與 6.85 耗之間。6.80 耗是用刻有十分之一耗的度數的尺、利用顯微鏡測定所得到的結果、長度在 6.795 耗與 6.805 耗之間。980 和 98，有效數字各為三位和兩位。測量的時候必得像這樣的同時把測定的正確程度也表示出來。

想要把某數的末一位進入上位或是消去的時候、普通採取四捨五入法。這時候末一位數字前面的數字若為奇數、五就成爲十、若前面的數字為偶數、五就成爲零。

算盤和算木

現在我國一般商家所使用的算盤雖是梁上二珠的。但是經研究的結果、還是梁上一珠的爲更便利。日本現在所用的算盤大都是梁上一珠的。將來我國也一定要漸漸使用梁上一珠的算盤吧。

自從計算尺裝入了技術家或是未來的技術家的衣袋裏、再去使用算盤。好像是守舊頑固、然而無論如何、統計或是計算大的數字時、算盤是不可缺少的。希望算盤也流行到西洋去、像似計算尺流行到東洋一樣。若使西洋人看我國熟練的商人打算盤的快法、一定要驚爲神技吧。

中國昔日曾用算木施行開平方和開立方。輸一籌的籌乃是算竹。後來成了算木。算盤問世以後，這算法就衰微了。但是被稱為「日本的牛頓」的數學者關孝和從算木導出了獨特的數學，真算得是和魂洋才了。

所謂算木者，是長四五糎的四稜木柱，把這木柱擺在盤上、換成各種的排列法而表示數和式。關孝和從這裏發展、在紙上寫文字、做爲記號。是日本筆算的起始。點竄術是筆算的代數學、實在是他所創始的。再有角術是關於正多角形的算法、是日本獨創的。關氏又考案了圓和球等的算法、卽是圓理。他的後繼者遂就發明了和西洋的微積分學類似的數學方法。

價 格 指 數

想要表示各種物品價格的漲落、用所謂價格指數。這是把某年的物價不論那一種品都當做一百、用做基準、將其他各年分的物價用百分率（記號爲%）來表示。這樣一來、可以和各物品的測定單位無關係的表示出來物價的漲落。

所謂物價指數者、是求許多種類物品價格指數的總和再用物品的數目去除、所得的商數。有時候顧慮物品的

重要性、特別注重於某種。這是把個々物件每一件算做好幾件然後加在一起、用全體的件數來除。物價指數中有批發物價指數。和零售物價指數。後者當然接近於消費的標準。

在十七世紀、人們對於經濟生活有了認識、所想出來的物價指數以很大的勢力出現於經濟界。

等 差 級 數

數學的問題雖取材於眼前接近的事物、也一樣能包含着深遠的真理。只要能取積極的研究態度就行。

糧米舖屋前堆着米口袋、堆着的次序是從上往下

是 $1, 2, 3, \dots, n$ 袋

現在出一個問題、即是要問這一堆口袋的總數是多少。這應當怎樣求法呢。

若是照下面那樣辦法、可以很有趣的解開。其法先把次序顛倒過來排列一下。

$n, n-1, n-2, \dots, 1$ 袋

把這個和方纔按着正當次序排列的、各項相加、就得

$n+1, n+1, n+1, \dots, n+1$ 袋

而所求的答爲

$$\frac{1}{2}n(n+1) \text{ 袋}$$

這不就是高斯幼年時所想出來的方法麼。

上述的是等差級數（算術級數）的例子。一般，初項爲 a ，公差爲 r 的等差級數。到第 n 項的諸項的總和是多少呢、卽是

$$a, a+r, a+2r, \cdots, a+(n-1)r$$

的和是

$$\begin{aligned} & na + \{1+2+3+\cdots+(n-1)\}r \\ &= na + \frac{1}{2}n(n-1)r \end{aligned}$$

宗教上有所謂宗派。數學方面昔日也曾有過流派、證明法亦各異。但是真理對於各派是共通一貫的。這乃是數學有趣之點。上面所採取的是最容易明白的證明法。

等 比 級 數

數學真是不用錢就可消閑解悶的奇方。現在這裏有一個有趣的問題。

『頭一天出來一隻狸子、敲三回肚子。第二天出來兩隻狸子、一同敲三回肚子。第三天出來四隻、各敲三回肚子。第四天出來八隻、第五天十六隻、每日隻數倍加、每隻各敲三回肚子。若是頭一天是正月初一日、那麼到

了十五日夜、一共出現了多少隻狸子、敲肚子的總回數是多少呢？』前一個問題的答是一萬六千三百八十四隻。

初項為 a 、公比為 r 、項數為 n 的等比級數的末項為 ar^{n-1} 。這級數的總和 S 為

$$S = a + ar + ar^2 + \cdots + ar^{n-1}$$

$$Sr = ar + ar^2 + \cdots + ar^{n-1} + ar^n$$

$$\therefore S = \frac{a(r^n - 1)}{r - 1} \quad (\therefore \text{表示「所以」的意思})$$

狸子敲肚的問題當然是等比級的問題。複利也和這等比級數有關係。

設元金為 a 、單位期間利率為 r 、則到了第 n 期末、成立了下列的級數。

$$a(1+r), a(1+r)(1+r) = a(1+r) \cdot a(1+r)^2, \cdots a(1+r)^n$$

而第 n 期末的元利合計為

$$a(1+r)^n$$

利息為

$$a(1+r)^n - a = a\{(1+r)^n - 1\}$$

為的實際計算這級數、做有現成的複利表。

已給年利率、每半年將利息滾入元金之內的時候、取年率之半為 r 即可。

單 利 法

短期間的貸借不用複利法而用單利法。此法不將利息滾入元金、即利息並不再生利息。元利合計爲

$$a(1+nr)$$

n 叫做期數。

月利的時候、未滿一個月則以三十日做爲一個月來計算、年利的時候、未滿一年則以十二個月或三百六十五日做爲一年來計算。

銀行普通於儲金那天就支給利息、提款那天不算在期間之內。所謂日步者、是對於元金一百圓一日的利息而言之。銀行對於未滿十圓的元金不支給利息、未滿一分錢的利息在每期末捨去。

在日本郵政儲金年利二分七厘六毫、(月利率是他的十二分之一) 在每月十五日以前儲入時、從儲入那月初支給利息、對於十六日以後儲入的元金、當月份不支給利息。提款時、對於所提出的金額、不支給當月份的利息、每年三月末日計算利息、滾入元金內。但是對於未滿一角錢的元金不支給利息。再有捨去未滿一分錢的利息。在十六日以後雖儲金也不支給當月份的利息。雖在十五

日儲金也支給當月份一個月的利息、看着似乎不合理、但那是規定的。

商界習慣上、或是儲入當日、或是提出當日、其中必有一者不算在期間之內。叫做「一端消去法」(兩方面都算在內的叫做「兩端加入法」)若是說從某日起若干日、那是從次日數起。最終日做爲滿期日。

票 據 和 支 票

所謂票據者、是記載有在一定的日期、於一定的地點支付一定的金額諸事項的證券。除支票外爲滙兌票據(滙票)和期限票據(期票)兩種。

(一) 支 票

這是在銀行存有活期存款的人、做成票據、託銀行支給持票人。支付人若一接到取款人的呈示、立即支付、所以叫做一覽支付、在外國滙兌上這叫做持票支付。

(二) 滙兌票據

出票人委託付款人、使之付款給指定的收款人或是指定人。利用於寄錢。

(三) 票 據

出票人自己約定付款給收款人或是指定人的一種票

據。現下不能付現金時，這樣辦法，日後領款人指示出票人，用票據換現金而領取。

於(二)和(三)付款人雖在一覽之後經過一定期間後的日子付款，也叫做一覽後定期付款。

再有票據的日期記明的叫做定期付款。在付款日期之前想得現金的時候，叫做貼現。按着到日期的日數而由票據票面抽出利息(折扣費)按其所餘實款，而買得之。

$$\text{折扣費} = \text{票據票面} \times \text{折扣率} \times \text{期間}$$

票據從出票人傳到收款人，從收款人轉到收買人，最後從付款人或承受人領取現金，這叫做流通的路徑。

有 價 證 券

政府或公共團體一時需用多數金錢的時候，爲的由大眾借入款項而發行(公債)的是國債、省縣債(地方債)等的證書。募集地方按國內或國外而叫做內債或外債。

公債證書表面上寫着按某種年利率每年支給兩回或四回的定期利息。證書的金額叫做票面(票面價格)。和這個成比例而支給利息。

營利會社受政府的許可而發行的是社債券，支給利息。

營利會社將資本金分爲股分（株式）的平等單位。股分的所有者叫做股東（株主）持有叫做股票（株券）的證書。股票不支給利息，每年按兩回或一回的定期、施行決算、將利息按股票或存款額作成比例（分配率）而分配。

合出資本者是合資、在決算期按出資額與出資期間之積的比率而分擔損益。

利 迴

有價證券按時價（市價）而買賣。對於利息或分配的市價的比率叫做利迴。按利迴的大小而決定損益。

由公債・社債的利息中課取資本利息稅、再一想到償還時期、利迴稍少。

問 年利率 7 分、發行價格每 100 圓利息 96.5 圓、償還滿四年後、求現在用發行價格買入時的利迴。

答 一年分的利息

$$100 \times 0.07 = 7 \text{圓}$$

償還額與買入額之差的平均年額爲

$$(100 - 96.5) \div 4 = 0.875 \text{圓}$$

因之平均一年的利潤爲

7.875圓

這個用買入額一除，即得利廻。

現 價 和 折 扣

n 年後支付的金額（若係票據則為票面價格）為 a ，現價（手取金）為 b ，則 $a-b$ 為折扣額。

年利率 r a 年間每年支付的年金，成立下列的等比級數。其和由前述知為

$$\begin{aligned} a &= a_0 \{ (1+r)^{n-1} + (1+r)^{n-2} + \dots + (1+r) + 1 \} \\ &= a_0 \frac{(1+r)^n - 1}{r}, \quad \therefore \frac{ra}{a_0} = (1+r)^n - 1 \end{aligned}$$

a_0 是最初的金額。

今不領取 a 而領取 b 把他按年利率 r 的複利增殖， n 年後成爲

$$b(1+r)^n$$

若使他等於 a 則

$$\frac{rb}{a_0} = 1 - (1+r)^{-n}$$

以上是複利的時候、單利的時候

$$\frac{ra}{a_0} = (1+nr) - 1$$

求 b 的叫做真折扣。

所謂銀行折扣者、複利・單利時各爲下列各情形。

$$b = a(1-r)^n$$

$$b = a(1-nr)$$

設 n, a 爲任意的數、則於

$$(1+a)^n$$

a 比 1 小的很多的時候、即是 $a \ll 1$ 的時候、

$$(1+a)^n \approx 1+na$$

那麼可以說是近似的。

機會與確率

所謂機會 (chance) 或是確率 (probability) 這是甚麼意思呢。不論機會或是確率、都和賭博有關係。打牌或是擲骰子等事都能在確率的思想正確的討論。

期待必勝而往世界著名的賭窟摩納哥的孟托卡洛去的人們、心中或許有着歷々的成算的某體系。但是如果以爲出了許多紅球之後一定出來黑球、那是大錯而特錯。數學的方面『抽剩餘的籤不容易中彩』(後述)。說確率是 $\frac{1}{2}$ 、而這事象乃是完全不決定的、那乃是數學者。所謂確率是 $\frac{1}{2}$ 者、即是那方面也未指定。就是說不一定是成功和失敗那一方面。所謂確率是 1 者、恰是我們所說的「百發百中」。

六面完全相同的理想的骰子、擲他的時候、出來某一個特定面的確率是 $\frac{1}{6}$ 。

這裏有一個箱子、內裝一百個球、其中九十九個是白的、一個是黑的。現在搖動箱子、遮住眼睛而拿出來一個球、那個球未必一定準是白球、或許偏偏是黑球、失足於百分之一的機會。

有兩枚貨幣 A, B。同時擲他們的時候有四種確率。兩方皆表的第一、和兩方皆裏的第四的確率、那一個都是 $\frac{1}{4}$ 、其中一方爲表的第二、第三的確率爲 $\frac{1}{2}$ 。

A, B	共	表	
A	表	B	裏
A	裏	B	表
A, B	共	裏	

2 枚時的確率表

2 枚共表	$\frac{1}{4}$
1 枚表 1 枚裏	$\frac{2}{4}$
2 枚共裏	$\frac{1}{4}$

3 枚時的確率表

3 枚共表	$\frac{1}{8}$
2 枚表 1 枚裏	$\frac{3}{8}$
1 枚表 2 枚裏	$\frac{3}{8}$
3 枚共裏	$\frac{1}{8}$

4 枚時的確率表

4 枚共表	$\frac{1}{16}$
3 枚表 1 枚裏	$\frac{4}{16}$
2 枚表 2 枚裏	$\frac{6}{16}$
1 枚表 3 枚裏	$\frac{4}{16}$
4 枚共裏	$\frac{1}{16}$

四個的機會爲

$$2^2 = 2 \times 2 = 4$$

三枚貨幣的時候爲裏 2,³ 四枚的時候爲表 2^4 。

$$2^3 = 2 \times 2 \times 2 = 8$$

$$2^4 = 2 \times 2 \times 2 \times 2 = 16$$

表示這確率的數、分母都是 2^n 、(n 爲正整數) 分子的排列也很有趣。

巴斯加把他排成三角形、叫做
 巴斯加三角形。

			1		
		1	1		
	1	2	1		
1	3	3	1		
1	4	6	4	1	

看這個可以明白、一般枚數

爲偶數的時候、出來半數裏半數表的 巴斯加三角形
 機會最多。即是相同的分布最易發生。

將一個箱子的底板用白線分爲二等分而放着。箱中放入幾個小球、把箱子水平的搖動、考查球來到左半部、右半部的個數。和他分布的度數 (frequency)。同數分配的機會很大。

若是不把箱子等分、左右的面積不同、則確率隨面積而改變。

在這裏也會有數學的規律、這不是很有趣的麼。

魔 方 陣

4	9	2
3	5	7
8	1	6

三 方 陣

不論橫行、縱行、斜行、三數相加、都恰得十五。感動於這神祕的人們乃是九星的創案者。據說夏禹王治洛水的時候、看見了在神龜的背上有這樣的數字紋理。這乃是三方陣。此外還有四方陣・五方陣・

等々。(參看附圖)

11	24	7	20	3
4	12	25	8	16
17	5	13	21	9
10	18	1	14	22
23	6	19	2	15

五 方 陣

16	3	2	13
5	10	11	8
9	6	7	12
4	16	14	1

四 方 陣

1	63	62	4	5	59	8
56	10	11	53	52	14	15
48	18	19	45	44	22	23
25	39	38	27	29	35	34
33	31	30	36	37	27	26
24	42	43	21	20	46	47
16	50	51	13	12	54	55
57	7	6	60	61	3	2

八 方 陣

4	29	12	37	20	45	38
35	11	36	19	44	27	3
10	42	18	43	26	2	34
41	17	49	25	1	33	9
16	48	24	7	32	8	40
47	23	6	31	14	39	15
32	30	13	38	21	46	

七 方 陣

1	35	34	3	32	6
30	8	28	27	11	7
24	23	15	16	14	29
13	17	21	22	20	18
12	26	9	10	29	25
31	2	4	33	5	36

六 方 陣

魔 一 立 方 形

偶

4	45	29	52
57	24	40	9
53	28	44	5
16	33	17	64

62	19	35	14
7	42	26	55
11	38	22	59
50	31	47	2

63	18	34	15
6	43	27	54
10	39	23	58
51	30	46	3

1	48	32	49
60	21	37	12
56	25	41	8
13	36	20	61

Ⅲ

Ⅱ

Ⅱ

I

Ⅲ

Ⅱ

I

33	89	20	71	102
67	123	29	85	11
76	7	63	119	50
115	41	97	3	59
24	55	106	37	93

2	58	114	45	96
36	92	23	54	110
75	101	32	88	19
84	15	66	122	28
118	49	80	6	62

121	27	83	14	70
10	61	117	48	79
44	100	1	57	113
53	109	40	91	22
87	18	74	105	31

奇

64	120	46	77	8
98	4	60	111	42
107	38	94	25	51
16	72	103	34	90
30	81	12	68	124

95	21	52	108	39
104	35	86	17	73
13	69	125	26	82
47	78	9	65	116
56	112	43	99	5

Ⅲ

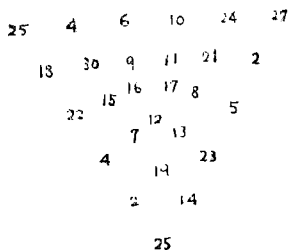
V

上面的數字是由頂上數的切口的號數

想要做奇數魔方陣的時候、可按下下列的規則去做。

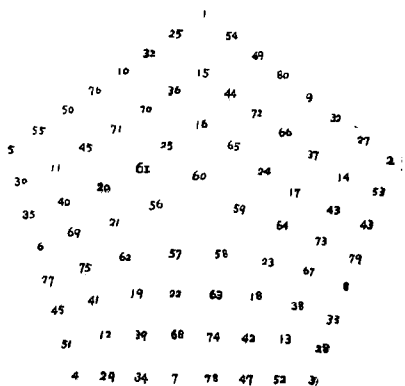
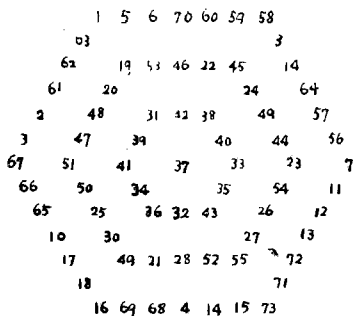
向斜右下方往下寫數、若是出到下方的外面就移到那

(24) 魔 方 陣



魔一三角形

各最外邊數之和九六
其次各邊數之和六一



魔一六角形

各六邊形邊六直徑均給與相同的和

行的最上方、若出到右方的外面就移到那行的最左方、若是斜右下方已被佔領時、折向那格的斜左下方一格寫上、再繼續往斜右下方進行、來到對角線外方的時候、寫在左一行上數第二格、逐次這樣寫下去、用這方法五

方陣・七方陣・九方陣……等都能做出來。

魔方陣也考案有變種的。

上面揭出的是其中特殊的例子、立方形排列的魔方陣寫在玻璃板上、做成透明的魔方陣、那也是有趣的事。

稀 有 現 象

聚會於晚餐的飯桌的七位朋友、想要每天變換順序、約需十四年。爲甚麼呢、因爲這個能拿七的階乘 (factorial) 卽是 $7!$ 來表示、如下式所示。

$$7! = 1 \times 2 \times 3 \times 4 \times 5 \times 6 \times 7 = 5040$$

卽是 5040 日。若是十個人、則爲 3628800 日。

一至十的階乘如下。

$$1! = 1$$

$$2! = 2$$

$$3! = 6$$

$$4! = 24$$

$$5! = 120$$

$$6! = 720$$

$$7! = 5040$$

$$8! = 40320$$

$$9 ! = 362880$$

$$10 ! = 3628800$$

有白・黑球各十個。把這些球按種々の順序排成一行
排法有

$$\begin{aligned} \frac{20 !}{10 ! 10 !} &= \frac{20 \cdot 19 \cdot 18 \cdots 11 \cdot 10 \cdot 9 \cdots 3 \cdot 2 \cdot 1}{10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdots 3 \cdot 2 \cdot 1 \cdot 10 \cdot 9 \cdot 8 \cdots 3 \cdot 2 \cdot 1} \\ &= \frac{20 \cdot 19 \cdot 18 \cdots 13 \cdot 12 \cdot 11}{10 \cdot 9 \cdot 8 \cdots 3 \cdot 2 \cdot 1} \\ &= 183756 \end{aligned}$$

這實在是極大的數。一分鐘排列一回、一日工作八小時
那樣去實驗、也得用約三百八十年的長時間。其中白球
黑球各々全體相隣接的只有一次。其機會爲十八萬分之
一。這真算是稀有現象了。

投針與哥登機械

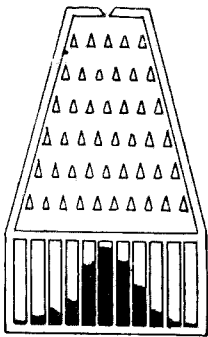
在白紙上面畫許多根平行線、使各線間的距離都等於
一根針的長、蒙上眼睛而往紙上投針、投許多許多回、
把針切着平行線的回數用投的回數來除、所得的數接近
於

$$\frac{2}{\pi} = \frac{2}{3.1416}$$

這叫做普風的針問題。由這個能求 π 的近似值、到過日

本的物理學者門登霍爾氏，每天早晨上大學去之前，在自宅把這實驗做十萬遍，有這樣有趣的逸話。

將偶然的事象反覆非常多的次數，結果得到所謂高斯

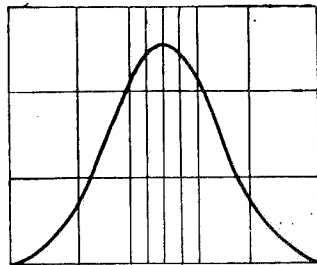


哥登機械

曲線(Gaussian curve)這事可利用有名的優生學者哥登(Galton)所考案的機械來理解。

將小鐵球由器械上部的孔投入，在斜面上滾着落下去。球滾落的時候，撞在小的三角形障碍物上面，而向左或向右，以相等的確率被撞落下去。這些球聚集

到底下小室的行列上面，那聚集的樣式，是上部的孔的正下面的室中最多，往左往右漸々減少，連結各室的頭部，就得到高斯曲線。



高斯曲線

統 計

確率的法則應用於社會學及經濟學問題的實例極多。

想做統計表 (statistical table) 的時候、必須觀察非常多的情形。然後由那個導出來分布法則、統計在今日非常發達、成爲應用數學的獨立的重要分科。保險會社僱用統計學的熟練者、使他做成表、以期會社的發達和事業的鞏固。

一般、於多數的同種事物中可找到規律。(大數的法則)

統計的豫言可由經驗來證實那是不錯的。例如、若是死亡率異常增加、違背了法則、這個結局大都由於發生了流行病等事。

誤 差

誤差論乃是確率論的一種應用、和施行正確測定的一切科學都有關聯。那是觀測的誤差理論 (theory of error)。誤差的理論是高斯所確立的。

在測定上所發生的誤差中、除去能够豫想到的、剩餘的乃是偶然誤差 (accidental error)。不論怎樣熟練的觀測者、在乍一看似乎是完全同條件之下、看兩回器械的度數、也決不能得同一的結果。所以拿所看得的結果的平均做爲最終的結果。

普通必要的並不是觀測值自身、而是由某已知法則從觀測結果計算出來的值。這樣一來、在這裏和測定一致的最確 (most probable) 的值是甚麼呢、這乃是重要的問題、這解法叫做最小自乘法 (method of least square) 這個可看爲一切測定上最重要的處理方法。

遺 傳

生物學 (biology) 上也有研究確率的必要。用確率能够豫言遺傳學的基本事實。

這裏有兩種動植物的純種、假設他們具在某一個能觀察的性質上不同。例如、一方面的豆開紅花、他一方面開白花。這時候、由他們所傳下來的子孫有三種類。即是與紅或白、雙親中之一相同的、再有雙親性質混合的、即是紅白混合成的桃色花瓣的豆。

孟德爾 (Mendel) 的實驗證明了這些形式按 1:1:2 之比而發生。這個比要是把兩個對等變種的東西組合到一起的時候牠的確率是相同、和投兩枚貨幣、看出來的是表是裏的遊戲也相同。

這結果在許多情形之下被人證明了。只是屢屢因爲二次的現象而複雜化、但這仍構成了一切遺傳學研究的基

礎。

生殖乃是將細胞內的要素遺傳質 (gen) 偶然組合的過程。近代生物學說帶有這些遺傳質的東西乃是細胞核 (cellular nucleus) 內的所謂染色體 (chromosome)。

天文學與統計

還有一種學問用統計方法是天文學。

星雲或星團中實在存在有非常多的星、這事是用近代的巨大望遠鏡測知的。這時候、分別研究每一個每一個星差不多是絕對辦不到的事、但是應用統計法則、用多數觀測 (mass observation) 能够探知某種事實。

銀河 (Milky Way, Galaxy) 像發光的領帶似的懸在天空。這星的可驚的排列究竟有甚麼意思呢。根據統計的方法、對這事已有滿足的說明。

我們的太陽屬於呈巨大透鏡狀構造的數億的星之群團。太陽附帶有行星、佔在其內部近於中心的位置。因之我們在中央方面看見多數星的可是在垂直於那處的方向上只看見少許的星。這就是銀河所以呈帶狀的緣故。

據說銀河的赤道面、直徑的長約爲十萬光年、一光年即光一年間進行的距離。

光從太陽達到地球上需時八分鐘。從最近發現的最遠行星冥王星約需五小時半的時間。光疾馳都得十萬年的長時間的距離、那是多麼可驚的呢、請諸位想像一下吧。

類似銀河的星群、即是星雲、在宇宙間為數極多、這些星雲充滿着宇宙、這事是由統計得來的結果。

虛 數

一直到現在的正的整數・零・負的整數・正、負的分數・無理數、若是平方永久得正數或零、現在考究一種平方的結果成為負數的數、把他叫做虛數 (imaginary number)。而將一直到現在的數叫做實數 (real number)。平方的結果成為 -1 的數叫做虛數單位 (imaginary unit)。設他為 i 與 $-i$ 二者。 i 是由 imaginary 的頭一個字母來的。例如

$$\sqrt{-4} = +2i, -2i$$

$$\sqrt{-A} = +\sqrt{A}i, -\sqrt{A}i$$

實數與虛數之和所表示的數叫做複素數 (complex number)。複素數一般為

$$a + bi$$

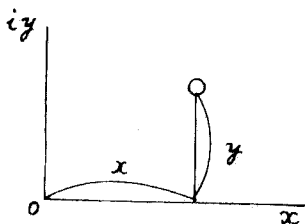
即由實數 a 與虛數 bi 相加而成的。 b, a 爲零時、各成爲純實數・純虛數。

把 $\sqrt{-1}$ 叫做虛數、那是想像的、並非現實的數。乃是擴張的數概念。於電氣工學上、爲的免去與電流的記號混同、用 j 表示他。

藉着這 i 的力量、有向量計算 (vector calculus) 可簡單的施行、就連交流的理論也因爲他而極度的發展。

所謂有向量者、是用自某點向某方向所引線分來表示的量。速度・加速度・力等々都是有向量。若是說速度相等、即是等速直線運動。

替代 y 軸而用 iy 軸、而用 x, y 座標軸記點。這點距原點爲 $r = \sqrt{x^2 + y^2}$ 、在於與 x 軸成正切爲 $\frac{y}{x}$ 的角 θ 的方向上。



這座標面叫做高斯的數平面。

純實數可用橫軸 (實軸) 上的點表示、純虛數可用縱軸 (虛軸) 上的

的點表示。

$$x = r \cos \theta, \quad y = r \sin \theta,$$

$$\therefore x+iy=r(\cos \theta+i \sin \theta),$$

$$\text{又 } x^2+y^2=r^2, \quad \tan \theta=\frac{y}{x}$$

數爲何物？

今於此處沒有能够個々意識的有限個或無限個概念。將這些概念包括爲一個概念而思考時，這叫做集合 (Menge)。構成集合的個々概念叫做原素 (element)。

線上的點的全體、是以點爲原素的一個集合。

所謂元素者、意指集合的一分子、所以稱他爲點也無妨。因之一切集合當然都可以叫做點集合、再有把點集合、叫做空間、其理由也是諸位所首肯的吧。

將點集合看做空間、則能考究連絡・不連絡等性質。

叫做集合論的新的有趣的數學、是詳論關於這集合的、是丹麥的給盧克・堪脫 (Georg Cantor) 所創始的。

集合論上最有趣的是無限集合的問題、在這裏發生了一個重大的背理(一見有如矛盾似的原理、paradox)、連數學的根本都可疑了。即是發生了部分可匹敵全體的事。

所謂連續者、是說不能切斷。

今將某直線、以某一點爲界而分成兩半、則此點必屬於某一方、當然不能發生旁的事情。同理將某數以某一

定數爲界而分成兩半時，這數必屬於某一方的集合。這一類的點或數各々保證線與數的連續。

不論用怎樣銳利的刀想要切斷直線，也切不斷，僅々將直線弄彎曲了而已。狄對金這樣的下了切斷的定義。

群

加法也是操作，減法也是操作。從零到無限大的一切正整數所成的集團(群、group)中，就其兩個分子施行加減的操作，則又得其中一分子。由於分子的有限・無限，而叫做有限群・無限群。

+1, -1 的立方根、即方程式

$$x^3 = +1, \quad x^3 = -1$$

的根？三次方程式有三個根，那是方程式論所證明的。一般 n 次方程式有 n 個根。但是這是包括實根・虛根・複素數根而言。

$$x^3 - 1 = 0$$

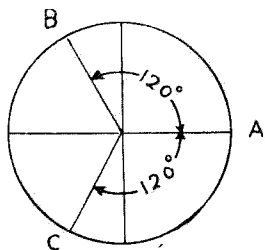
爲 $(x-1)(x^2+x+1)=0$

其根爲

$$\begin{aligned} x=1, \quad x &= \frac{-1 \pm \sqrt{-3}}{2} \\ &= -\frac{1}{2} \pm i\frac{\sqrt{3}}{2} \end{aligned}$$

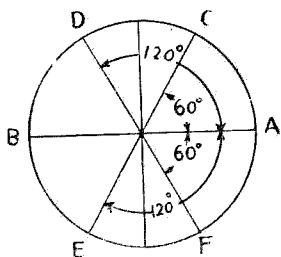
$-\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$ 用文字 ω 來表示、則 $1, \omega, \omega^2$ ($= +\frac{1}{4}$
 $-i\frac{\sqrt{3}}{3} - \frac{3}{4} = -\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}$) 爲 $+1$ 的立方根。

有趣的事是 $\omega^3 = +1$ 。希望諸位注意重覆操作後結果又回來之點。這樣的操作叫做迴轉群、 $\omega^3 (=1)$ 叫做單位操作、這是因爲若施於某數即得其數之故。於加前者法加零之事也是單位操作。



如圖。

若取 ω, ω^2 的座標、則來到如次的 B, C 各點。



$$\theta = 120^\circ, r = 1;$$

$$\theta = -120^\circ, r = 1,$$

因爲甚麼呢？

$$\cos 120^\circ = -\frac{1}{2},$$

$$\sin 120^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\cos(-120^\circ) = -\frac{1}{2}$$

$$\sin(-120^\circ) = -\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$-1, +\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}, +\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}$$

爲 -1 的立方根。

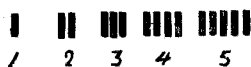
數 字

相當於 0 的身毒語 sunya 是真空的意思。

於印度考案，將一切的數、用十個記號表示的天才的方法。身毒人於五世紀前後發見了位置的原理。

自紀元前五世紀至紀元五世紀之間、中國使用算木。二用 \equiv ，三用 \equiv 表示。「亂算」就是「如亂算木」的意思。

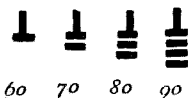
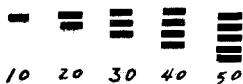
百位的數字和個位、千位的數字和十位相同。把他擺在大塊的布上。零的地方或空着或置棋子。現在的漢字一二三大概是模倣算木而造的吧。從中國經過朝鮮而傳



到日本。



天元術是用細棒爲籌而行計算。先用木，後改用竹。是由於用「元」字表示 x 的一次項而發生的。天元術是元朝的發明、一元·二元的元即由此而來。



在中國所用的數字除一二三四五……之外還有商人所常用

的 0, 1, II, III, X, 8, 上, 十, 百, 千。

羅馬字各以 I, X, C, M 代替 一, 十, 百, 千 而使用。

XXX 是三十。

在未導入零以前、三爲 𠄎 二爲 乙。這個變化爲 3 和 2 字。

鐵錶面上的數字有用羅馬字記號的。但是惟有四字不寫做 1 而寫做 III。這是法國查理五世的命令。

現在世界通用的數字當然是最方便的阿拉伯數字 1, 2, 3.....。

在滙票或轉帳儲金寄款單上所寫的錢數、怕被人塗改所以特意寫做壹、貳、參、肆、伍.....等。

所 謂 數 學

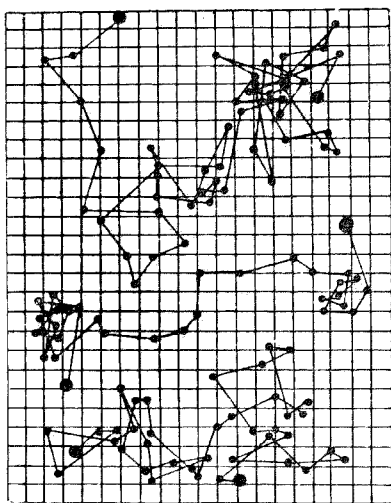
克洛內卡 (Kronecker) 說、『神創造整數 而人類創造剩餘。』畢達哥拉斯派說、『神支配宇宙。』柏拉圖說、『神演幾何。』大雅各比說、『神演算術。』K. 魏爾斯特拉斯 (Weierstrass) 說、『不是詩人的數學者尚不完全。』

畢達哥拉斯最初所用的數學原是指着學習術、今之所謂數學是算術代數幾何三角的混合名稱。

分子、原子的世界

爲理學者所研究的原子和分子，若是一一的來處理他們，數目未免過於小而數目又過於多。

在氣體中有無數的（即一立方糵中約 10^{26} 個）大小相同的分子，像蚊子般的來回亂飛。互相衝撞，也碰到器壁上而反撥。所謂氣體的壓力，就是分子擊壁所生的力的平均結果。從這種看法可以理論的證明爲甚麼氣體的壓力與體積成反比例。溫度一上升，分子的運動就活潑。假定分子的運動和絕對溫度（攝氏度數加上 273 度）成比例。



分子的個數極多，所以確率的豫言比日常生活上甚麼問題都正確。

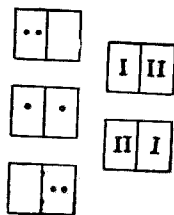
實際上若是空氣分子偶然的幾分鐘間，在人的口部附近沒有了，而分子呈這樣不幸的排列，則人連呼

吸都不能够了。但這樣排列的確率極少，對這事擔心的人，恐怕全世界也沒有一個人吧。

浮在液體中的膠質粒子，若是用倍數極大的顯微鏡來看，可看得到粒子決不是靜止的，而做着猛烈的不規則的運動。這種現象叫做布朗運動(Brownian movement)看這個不但給我們以鮮明的印象，這也是直接的證明了分子運動說。

那是因為粒子力、周圍液體的分子衝突於粒子的力不平均。粒子越少，其運動越近於分子的動作。

將兩顆粒子裝入兩個箱子的時候，若是粒子沒有個性，有三種分配法。但是粒子若有區別，則中央的情形比其他二者確率大兩倍。即是這種等分布狀態的情形成爲二重的。新物理學的量子力學，因為考察到個性，所以產生了新的統計力學 (statistical mechanics)。



趨向人生的數學、確率

魔方陣以及巴斯加或是更嚴格的說 Omar Khayyám 三角數 (triangular number)，乃是形與順序的圖形配置

(figurate arrangement)。一直到現在、對於人生並沒有過甚麼實用性。這不過僅々釀成了神秘的信仰 (mystical belief) 與占星學的迷信而已。占星學家拿這圖做爲背景而大事活動。魔方陣在十六世紀被嵌入銀板內、用做防疫的護身符。

這樣的到了十六世紀、呈了數僅使用於查數的原始狀態。財產以及人口的統計還極幼稚。

但是到了十九世紀、社會學 (sociology) 與經濟學 (economics) 都發達了、於是確率論就漸々關聯着而被使用。

數學者雖傾向於理想主義的世界觀、可是在這裏數學多少的變成了帶一些人間色彩。

紙牌戲始於中國、然而在十四世紀成了歐洲宮廷的流行物。製造紙牌用木版印刷、這是最初將印刷應用於製造。有名的法國大數學者費爾瑪 (Fermat) 與巴斯加之間、在書簡中正々經々の討論紙牌戲的確率論。再有在一六九三年 Phil. Trans. Roy. Soc. 誌發表了布勒士勞市市民的生死統計表。

大洋航海膨脹於歐洲的時候、所謂船舶保險者成了主要的事。這個可以回溯到十四世紀初期。在伊利莎白朝

尼古拉斯·倍根爵士也談過這問題。

十五世紀後半安特瓦比成了世界貿易未曾有的大中心。一流商人的借貸始於迷信、帶有占星性的危險。物價用星位表(horoscope)來豫言。商業不過是賭博而已、據說這是法蘭達人創案這可怕的事情。

也有賭胎兒的性別以及人死的時刻的商業大王。

但是由這個產生了生命保險。

獎金(premium)以及折扣(discount)是保險的起始。

在占星學以上、現在有確切的指路者了、那就是數學的確率論。

確率關於未來的信念之強弱、過去的經驗之評價、和現在知識的廣狹、都有關係。乃是重要的數學。若是說那是沒多大用處、那真是大錯特錯。

工業上的根本思想

爲的發明新製品、美國有一千六百處工業研究所。若有認爲不論何時研究都是不急之務的人、那真如冰炭之差。而美國於工業生產上有了新的根本思想而貯有彈性。

預定乃是所謂記號的表現、製品的檢查是將具體化的

物件與預定比較。二者之間有設計與生產。

人類和動物不同之點在於人類能支配環境、使用器具。一九二一年在倫敦的正北、發見了百萬年前人類所使用的簡單的石具。器具的配合開始於一萬年前。埃及人曾稍々利用過有互換性的弓箭、這乃是五千年前的事。但是互換性的概念真正發達、而能多量生產、那不過百五十年前以降的事。

但是、互換可能的物件、雖想要把他儘量科學的造成正確同一的、結果不但太不經濟、實在說、也完全沒有那個必要。所以容許誤差的概念在一八四〇年前後導入了。

多量生產上的統計技術、使趨向質的經濟學標準之統制可能。因為這能使原料最有效率的使用。

所謂規格的標準、是一九一〇年創始於美國的、一九一七年、這標準成了世界的問題。

想要製出有容許誤差、即在實地作用界限以內的性質的製品的事、有如向目標射擊。製造者是威廉·退耳。這樣的統計與確率的概念由一九二四年以來就發達起來、一直到今日。

製品的化學分析以及破壞實驗也由其一部分的成績能

保證其全體。保險・骰子遊戲・分子現象、不論貴賤、都必得遵行確率之路。

生 命 保 險

每一定期間由加入者繳納一定額的保險費、在規定的期間支付契約保險費。保險費中除去純粹的保險費以外、會社經營上必需的款項也附加其成數。

終身保險在死亡時支付保險費。養老保險、即使在契約期間死亡、或生存到期間末尾、也支付保險費。

死亡率是某年齡的人一年間死多少人的率。

零歲的死亡率與八十歲前後的死亡率相近、為百分之十幾、從一歲起開始急降、十幾歲最低、漸次上昇。二歲為預尖、降到三十幾歲。然後又一味的上昇。

女人特別在四十幾歲的地方一時稍降。乳兒時女子方面低。到了青年時代、女子方面高、四十歲以後女子方面較男子方面為低。

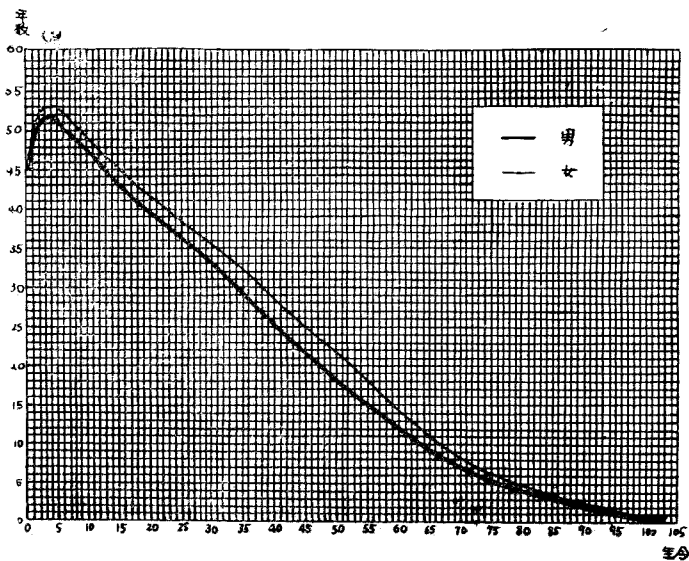
將零歲的死亡數從零歲的人數中減去、剩下的是一歲的生存數。這樣一來、可知零歲的若干人數到了某年齡成了多少人。表示這個的是生命表。

生 命 表

人工動態的調查結局是照着戶籍、但是由生命表所知道的是壽命的消長、與保健・保險・年金等有深切的關係。

日本現在最新的生命表是第五回生命表、乃是就着自大正十五年到昭和五年、五年間內地現住的內地人而作成的。

男女年齡別平均餘命



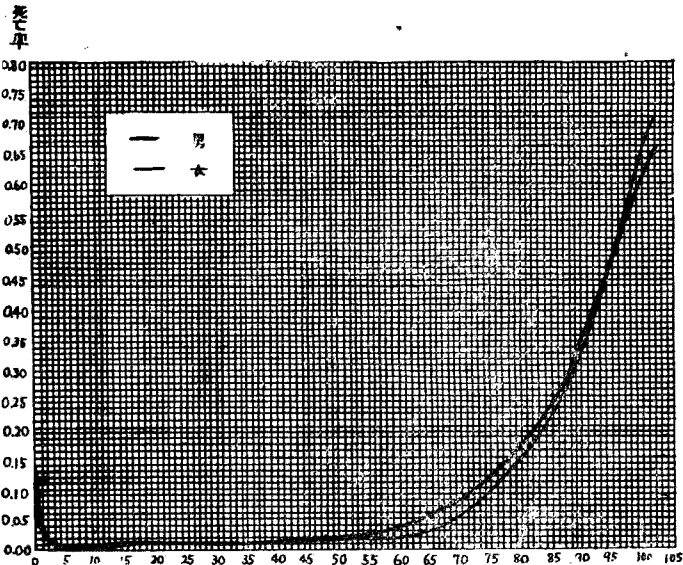
根據內閣統計局第五回生命表 (康徳3年3月)

生存數 (number living)、死亡數 (number dying)、生存率 (rate of living)、死力數 (force of mortality) 及平均餘命 (complete expectation of life) 記在上面。

『噶！死力！真是希奇的話、是甚麼呢？死的力量？』

『哈哈、所謂死力者、是將滿幾歲的瞬間死亡率、表示其一年間的率、即是死亡的速度。

平均餘命是某年齡為 x 的人、將來能够生存的每一個人平均的年數。



根據內閣統計局第五回生命表 (康德 3 年 3 月)

設 l_x 爲出生人十萬人中滿 x 歲的生存數、則平均餘命爲

$$\frac{1}{2} + \frac{l_{x+1} + l_{x+2} + \cdots}{l_x}$$

是一直到死盡、其總人員生存的總延年數的一人平均。

$$\frac{8(l_{x-1} - l_{x+1}) - (l_{x-2} - l_{x+2})}{12l_x}$$

是二歲以上的死力。

那麼請看一看統計圖吧。看啊、粗線是男、細線是女。是假定出生人數爲十萬的。第一圖表示年齡別平均餘命、第二圖表示年齡別死亡率。

而生存率可表爲 $\frac{l_{x+1}}{l_x}$ ，死亡率（rate of mortality）可表爲 $\frac{l_x - l_{x+1}}{l_x}$ ，後者是由前者減一而得的。所以生存率是滿 x 歲的人一年後生存的確率、死亡率是其後一年間死亡的確率。所謂死亡數者、是指着 x 歲以上、未滿 $x+1$ 歲的死亡數。即 $l_x - l_{x+1}$ 。生存數是由零歲的人口十萬人中、生存到各年齡的數。』

數學的確率

數學的確率（mathematical probability）是甚麼呢。某行爲能用 N 種方法辦到、其中 n 個有某種特性、而在這些行爲的發生上並沒有甚麼選擇性。這樣一來、行爲帶有這個指定的特性的數學確率爲 $\frac{n}{N}$ 。一枚貨幣若是投

兩次、發生四種情形。第一、兩回都是表、第二、先表後裏、第三、先裏後表、第四、兩回都是裏。而出來先表後裏的數學確率為 $\frac{1}{4}$ 。再有、兩回出同一面的確率為 $\frac{1}{2}$ 。

於是、將求得方法的數 n 用其數與未求得的方法數 $N-n$ 來除、所得的數是未求得的方法的數學確率。未求的他一方面的數學確率為

$$q = 1 - p$$

$$p = \frac{n}{N}$$

$$q = \frac{N-n}{N}$$

於上例、兩回都出表的確率 p 為

$$n = 1, \quad N = 4$$

而為 $\frac{1}{4}$ ，不出這個的確率 q 為

$$q = 1 - p = \frac{3}{4}$$

從裝着三個白球和兩個黑球的容器中取出一個球、從裝着兩個白球和四個黑球的他一只容器中取出一個球、一回取兩個球、現在考查一下這個問題。這兩個行為各不相干而為獨立的。

從第一器中取出的各球、對於第二器中取出的任意球

可以選擇、所以可知結局有 $5 \times 6 = 30$ 種組合 (次圖)。

○○	○○	○○	○●	●●
○○	○○	○○	○●	●●
●○	●○	●○	●●	●●
●○	●○	●○	●●	●●
●○	●○	●○	●●	●●
●○	●○	●○	●●	●●

其中兩個都是白球的情形有 $2 \times 3 = 6$ 回、兩個都是黑球的情形有 $2 \times 4 = 8$ 回。

原理 (一)

一個結果的數學確率為 n ，另一個獨立結果的確率為 m ，則兩者同時發生的確率為 mn 。

從第一器取出白球的確率為 $\frac{3}{5}$ ，從第二器取出白球的確率為 $\frac{2}{6}$ 即 $\frac{1}{3}$ ，所以從兩容器選出白球的確率為

$$\frac{3}{5} \times \frac{1}{3} = \frac{1}{5} = \frac{3 \times 2}{5 \times 6}$$

從兩器取出黑球的確率為 $\frac{2}{5} \times \frac{2}{3} = \frac{4}{15}$

前例將貨幣投兩回的例子、也可以用同一原理來處理他。即是將一枚貨幣投一回、得表的確率為 $\frac{1}{2}$ ，所以所求的確率為 $\frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{4}$

一家有六個小孩時、那些小孩全都是男孩的確率為

$$\frac{1}{2} \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = \left(\frac{1}{2}\right)^6 = \frac{1}{64}$$

即是因為一家族中的一個人的男子的確率是 $\frac{1}{2}$ 。(一)

三人爲男 三人爲女、(二)二人爲男、四人爲女、(三)一人爲男、五人爲女、(四)六人都爲男。同理兩個孩子都爲女子的確率爲 $\frac{1}{4}$ 。

原理 (二)

兩個結果互相排斥的時候 選擇的確率爲各確率之和。

前例 從兩只容器各取出一球、一球爲白、他球爲黑的確率是多少呢。

現在設第一次取出白、第二次取出黑、這就排斥第一次取出黑、第二次取出白。若設前者選擇法的確率爲 a 、後者的確率爲 b 、則 $a+b$ 與順序無關、是一白一黑的確率。即是選擇前者或後者的時候的確率。

從第一器取出一白球、第二器取出一黑球的確率 a 爲 $\frac{3}{5} \times \frac{2}{3} = \frac{2}{5}$ 、從第一器取出一黑球、第二器取出一白球的確率 b 爲 $\frac{2}{5} \times \frac{1}{3} = \frac{2}{15}$ 。而選擇或此或彼的時候確率爲

$$a+b = \frac{8}{15}$$

這個從三十種方法中有十六種方法來推究、也能明白

問 將一枚貨幣投三回時、求表裏的現出狀況。

答 三次皆表、二表一裏、一表二裏、三次皆裏、確率各爲 $\left(\frac{1}{2}\right)^3$, $3\left(\frac{1}{2}\right)^3$, $3\left(\frac{1}{2}\right)^3$, $\left(\frac{1}{2}\right)^3$

這等於在公式

$$(p+q)^3 = p^3 + 3p^2q + 3pq^2 + q^3$$

中、將

$$p = \frac{1}{2}, \quad q = 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$$

代入時所得的各項。

那麼、 n 種行爲中、於某機會或特定的方式、行爲的確率爲 p 、不如此的確率爲 q 時、則 n 種行爲中、於 n , $n-1$, $n-2$, \dots 回、行爲的確率可由二項式 (binominal series)

$$(p+q)^n = p^n + np^{n-1}q + \frac{n(n-1)}{1 \cdot 2} p^{n-2}q^2 + \dots$$

的相續項給出。不用說

$$(p+q) = 1, \quad (p+q)^n = 1$$

$1, n, \frac{n(n-1)}{1 \cdot 2}, \dots$ 用記號 ${}_nC_0, {}_nC_1, {}_nC_2, \dots$ 來表示。

一般、 n 個同樣的機會中、正確的 r 回做某種行爲的確率爲

$${}_nC_r p^r q^{n-r}$$

問 有袋四只。各裝三個白球一個黑球。從這四只袋中各取出一球。問一個爲白三個爲黑的確率若干。

$$\text{答} \quad {}_4C_1 \left(\frac{3}{4} \right) \left(\frac{1}{4} \right)^3,$$

$${}_4C_1 = 4$$

頻 度

若是全體的回數非常多，確率和相對頻度（relative frequency）相同。數學理論能應用於日常生活的、又限於這樣回數極多的時候。這時候數學確率的極限比是有關係的。

回數雖少，若是假定有着理論的分布、則在這數上乘以數學的確率、就得該當的回數。但是觀測回數必得是整數、這樣乘得的數有時帶有小數、這是無法可想的。

男女出生的相對頻度也有人研究着。

巴列特曲線出現於財富的分布問題。

二項式的若是非常大，能得給與值 x 的確率 y 。這曲線近於高斯曲線即標準曲線（normal curve）。

拉普拉斯（Laplace）完成了誤差論。大的誤差出現的少、小的誤差出現的多，由這曲線可知。拉氏是因學問上的功勳而得到侯爵的法國學者。

從十九世紀起，將確率論應用於自然現象、推究出來

了數學的模型。

遺傳質如同一粒一粒的粒子那樣工作。簡單的假定他們是能組合的、用這個能說明遺傳 (heredity) 上多數的實驗結果。

交配 (cross) 說明遺傳質的簡單理論。各種子孫的比例、在統計的意味上是一定的。

一切的科學法則也都是統計的、最近的物理學方面特別提倡這學說。科學者努力想要達到更近似的境地。

列車運行表

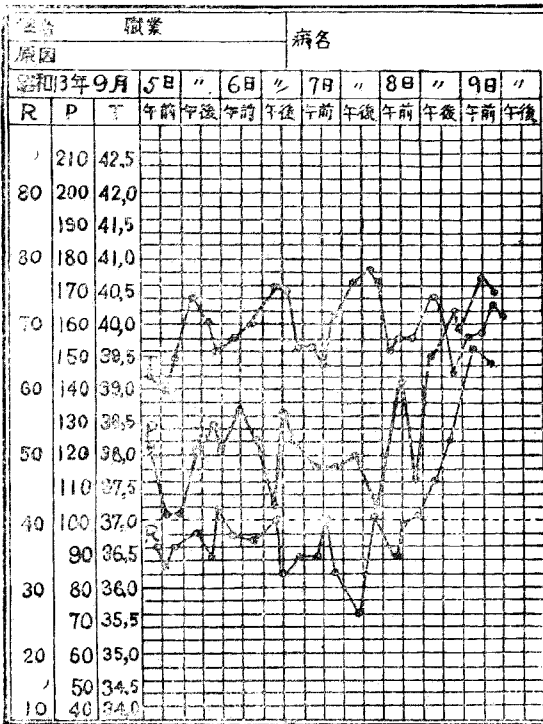
縱軸取爲各主要車站的距離、橫軸取爲時間 (普通把一日分成二十四小時) 在方格紙上可以畫出來列車運行表。這是一種最好的圖表應用例。看這圖表、各列車何時到何處、在何處與那個列車錯車、或是車的快慢等々都可以一目瞭然。這實在十分方便。諸君不妨把哈爾濱 大連間的直通列車畫成運行表試一試看、可取哈爾濱·新京·奉天·大連四個主要車站、方格紙每一格代表十軒或二十軒、時間共取一日、分爲二十四小時、參看最近的火車時間表畫一畫吧。據說這是最初由某西洋人鐵道顧問傳授到日本的、有了這圖表、方纔能夠運行列車

的。

體溫表以及時價表等也都是圖表。

以前是高熱的患者、若是體溫急降、脈搏激增、則兩曲線交差呈「死的十字」。一出來這個、日後大都病勢不佳。可看做九死一生。

普通呼吸數一分鐘平均十八回、脈搏數為其四倍。



用圖表可以避免麻煩的計算、腦力上是經濟的。希望今後特別在日常一切事物上儘力應用。

幾何學的革新、圖表的使用

在回教的世界編纂了可蘭經、同時寺院以外學問也發達。然而在歐洲呢、書籍的研究和尼羅文明的時代一樣、僅々限於僧侶、因之四世紀間甚麼進步也沒有、但是技術的發明給與了數學者以新的課題。到了十五世紀末葉開始了新的時代。齒輪裝置的鐘錶、大砲、航海圖、天文表等都與數學發生了密切的關係。

亞力山大人和中國人發明了替代日時計的巧妙的水時計。齒輪裝置的鐘錶乃是最近的發明、但是我們所知道的、有在十七世紀末葉製作的。鐘錶的英語 clock 這字是從法蘭西語的「鐘」字 cloche 得來的、北歐的教會打鐘的僧侶、像似五千年前埃及的僧侶、乃是農民生活者中所不可缺的人。開始了用蠟燭時計和水時計、在十世紀末葉、用鏈廻轉的齒輪裝置的鐘錶、裝置在比較富裕的修道院或是教會裏。倫敦的聖保羅寺院在 1286 年就裝置了鐘錶。機械裝置的鐘錶在十四世紀差不多要終了的時候以前、寺院以外都未曾用他。這些原始鐘錶非常

簡陋。在加利略做擺的實驗以前，不能夠測定短時間。十七世紀的擺鐘錶是擺原理的應用，這是必須特別表白的事項。用於經度的測定。精密設計的船舶用精密時計是在補正發條發明以後纔做出來的。

擺的原理對於亞力山大的靜力學 (statics) 開了運動學 (kinetics) 的端緒。平衡力等理論，在亞幾米德及其弟子手中發展。1241 年蒙古族侵入匈牙利及波蘭之際，用了火藥。於十四・五世紀的歐洲戰爭上發生了設法計算彈丸位置的問題。

在十六世紀，遠洋航海時船中載有數學者，叫他們做測定時刻和位置的工作。挪威人將中國人所使用的指南針利用於航海。

盧內・狄卡兒在十七世紀初期發展了新幾何學解析幾何學 (analytical geometry)。於曲線的研究上，柏拉圖將尺與圓規的使用擴張。哥白尼・梯克・布拉埃・凱普勒等人一併使用望遠鏡而在圖表上畫星的軌跡。

與柏拉圖的天體在圓周上運動之說相反，知道天體是在橢圓上運動的。托萊卡等製作了帶經緯度的地圖。

從無聊的歐幾里德的證明，移轉於簡易的圖表的使用，學者為何一直到這時期還未知曉這方法的原理，這真是

令人驚奇的事。

解 析 幾 何 學

解析幾何學與歐幾里德幾何學根本不同的地方是、不論甚麼東西都給以位置和方向。即、可表示一根線對於他一根線引於某方向。現在就着在一直線上航海的船來考查。在遠距離必得用所謂球面三角法 (spherical trigonometry)、但是在小的範圍、能夠平面的決定位置。在這裏必得規定一個定點『叫做原點 (origin)』為基準。採取赤道上、即是緯度為 0° 、而格林威治經線通過的、即經度也為 0° 的幾內亞灣。以這點為中心而畫通過緯度和經度 50° 的圓。這圓通過 Nicaea。Nicaea 佔在約為東經 30° 、北緯 40° 的位置。若是連結這地點與中心、則這直線相當於東經 30° 、北緯 40° 、二邊所成的直角三角形的斜邊 (長為 R)。若設地球的周為 1, 則緯度、經度 1° 的長為 $\frac{1}{360}$ 、因之這直角三角形二邊的長各為 $30 \times \frac{1}{360}$ $40 \times \frac{1}{360}$ 。由畢達哥拉斯定理、

$$R = \pm \frac{1}{360} \sqrt{30^2 + 40^2} = \pm \frac{1}{360} 50$$

此處負號表示正反對的位置。

設緯線到赤道的距離為 y 、經線到格林威治線的距離

爲 x , 令

東經 10° 爲 1 單位 ($x = +1$)

西經 10° 爲 -1 單位 ($x = -1$)

北緯 10° 爲 1 單位 ($y = +1$)

南緯 10° 爲 -1 單位 ($y = -1$)

這樣一來、赤道即 $y=0$, 及格林威治線即 $x=0$, 二者的交點即是原點、從原點所引的距離相當於底邊 x 垂線的直角三角形的斜邊。其長可由次式求得。

$$R^2 = x^2 + y^2$$

北西 $R^2 = (-x)^2 + y^2 = x^2 + y^2$

南東 $R^2 = x^2 + (-y)^2 = x^2 + y^2$

南西 $R^2 = (-x)^2 + (-y)^2 = x^2 + y^2$

即於解析幾何學、從圓心到圓周上一點的距離、等於從周上的點到直交直徑的兩距離之平方和的平方根。換句話說、圓的定義可用一個方程式來表示。

$$R = \sqrt{x^2 + y^2}$$

x, y 叫做座標。解析幾何學也叫做座標幾何學。

方程式與曲線

於方程式

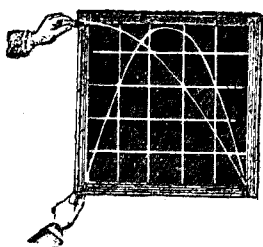
$$x^3 - 5x^2 + 4x = y$$

求一求 x 與 y 的數值關係吧。

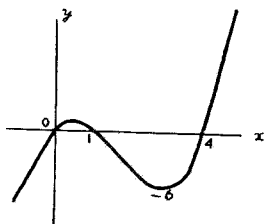
x	x^3	$-5x^2$	$4x$	$x^3 - 5x^2 + 4x$
-2	-8	-20	-8	-36
$-1\frac{1}{2}$	$-\frac{27}{8}$	$-\frac{45}{4}$	-6	$-20\frac{5}{8}$
-1	-1	-5	-4	-10
$-\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{8}$	$-\frac{5}{4}$	-2	$-3\frac{3}{8}$
0	0	0	0	0
$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{8}$	$-\frac{5}{4}$	2	$\frac{7}{8}$
1	1	-5	4	0
$1\frac{1}{2}$	$\frac{27}{8}$	$-\frac{54}{4}$	6	$-1\frac{7}{8}$
2	8	-20	8	-4
$2\frac{1}{2}$	$\frac{125}{8}$	$-\frac{125}{4}$	10	$-5\frac{5}{8}$
3	27	-45	12	-6
$3\frac{1}{2}$	$\frac{343}{8}$	$-\frac{245}{4}$	14	$-4\frac{3}{8}$
4	64	-80	16	0
$4\frac{1}{2}$	$\frac{729}{8}$	$-\frac{405}{4}$	18	$7\frac{7}{8}$
5	125	-125	20	20

把他畫在圖表上,就得如下的圖。左右線爲 x 軸(axis)

上下線爲 y 軸。



噴水的路徑也是拋物線



拋物線 (parabola) 的方程式爲

$$y = ax^2 + bx + c$$

又、一般不論甚麼平滑的曲線、在某範圍內都可用方程式

$$y = a + bx + cx_2 + \dots$$

來表示。 a, b, c, \dots 叫做方程式的常數 (constant)，是一定的。而隨着他們的大小與符號、得出來種々不同的曲線。再有、於

$$y = x^n$$

冪指數 (exponent) 若爲偶數、則對於 x 的正負同樣大小的數、 y 得同樣的正值。因之曲線呈 U 字型。 n 愈大曲線愈陡。 n 爲奇數時、在原點左方的曲線向軸下、右方向上、穿過原點。於

$$y = ax^{2n} + bx^{2n+1}$$

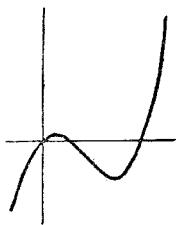
x 大的時候，第二項卓越， x 小的時候第一項卓越。但是 a 若比 b 取的數值大，則在很大的範圍內現出 U 字型的特徵。

一般寫 $f()$ 爲的是甚麼呢。

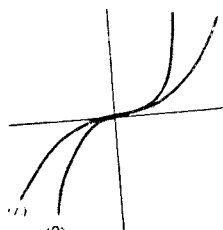
若是寫爲

$$y = f(x)$$

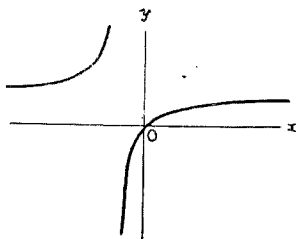
即時意謂對於 x 的值可求 y 的值。這事叫做 y 爲 x 的函數 (function)。



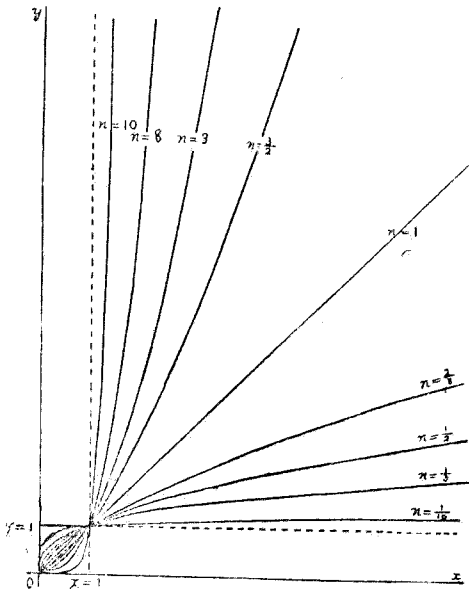
x 之奇、偶冪項之和的曲線一例



(1) $y = x^3$ (2) $y = x^5$



$y = \frac{x}{1+x}$ 的圖表



$x > 0$ 時 $y = x^n$ 的圖表

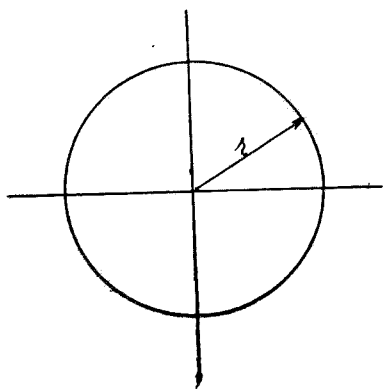
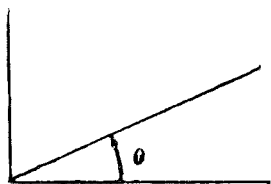
地圖幾何學

用座標的格表示點的位置之法成功後。有人設計了種
 的地圖幾何學 (map geometry) 的方法。

對於球形固體特別有用的為球座標 (spherical co-or-
 dinates), 對於平面的地圖。本質上是用球的方法。

極座標 (polar co-ordinates) 以羅盤針為基礎。用以
 簡單的表示某曲線。即用從某中心 (原點) 的距離和

那線對赤道（通過原點的原線）所成的角——赤道角（equatorial angle）表示位置。



於圓、圓周上的點與中心的距離 r ，無論赤道角 θ 為多少度、常為一定、所以圓的極方程

式（polar equation）為 $r = c$

c 表示一定值（半徑的值）。

通過點的直線、赤道角保持一定值 c' ，故直線的極方程式為

$$\theta = c'$$

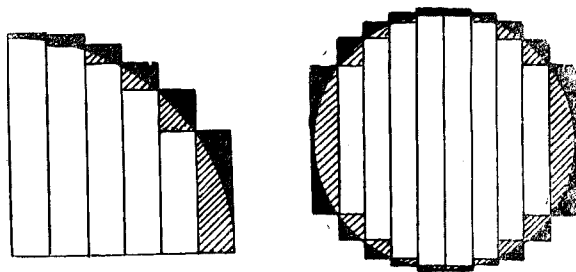
與行舟不同、對於在空間移動的飛機和潛水艇、用三次的狄卡兒座標表示位置。

積 分

據說牛頓與他同時代的萊布尼支（Leibnitz）創造了微分學（differential calculus）。

但是牛頓的先生伊沙克·巴洛 (Isaac Barrow) 造成了這微分學的基礎。萊布尼支導入了寫做 dx 的微分記號。

積分學 (integral calculus) 大部分由於萊布尼支的研究而進展。但是在日本、不受西歐的影響、而獨立的用着、歐洲十七世紀末葉所用的同樣方法。把圓分成的矩形。半徑為 1 的圓、面積為 π ，故可由面積求 π 的值。再有、在亞幾米德稍後一點、中國人所知道的數學中有關於直角的定理 (畢達哥拉斯定理)。決不可輕視我們東洋的數學啊。



牛頓的先生瓦利斯 (Wallis) 發現了表示 π 的值的級數、用的同一的推究方法。

通過曲線的一部分及其兩端、引平行於軸的二直線、則這兩根直線截 x 軸所得出來的部分 (x_1 與 x_2 之間) 間

所包圍的面積可分割為寬為 Δx , 高在軸方向的多數矩形條。所求的面積在內側矩形的面積之和與外側矩形面積之和的中間、其差等於第二次的小矩形片多數的面積之和。然則、使 Δx 無限小、遂達到了 dx , 則矩形的數無限多、上述的差為第一次的無限小。所求的面積由 ydx 的 $x=x_1$ 至 $x=x_2$ 的無限和、可用

$$\int_{x_1}^{x_2} y dx$$

來表示。 \int 為積分記號 那不過是表示和 (sum) 的文字 S 給上下伸長而得的。結局積分乃是將無限小的東西無限多的個數加在一起 其和一般為有限的值。即

$$\text{無限小} \times \text{無限大} = \text{有限}$$

$$0 \times \infty = \text{有限}$$

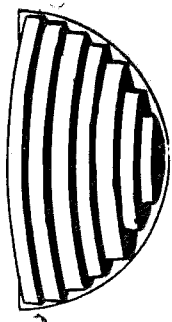
各情形。

上式讀做『將 ydx , 由 $x=x_1$ 至 $x=x_2$ 積分。』

將畫在方格紙上的曲線的面積、查他所包含的方格數而近似的求得、這是數學實驗。

立體圖形的體積也能用積分求得。

古時德莫克里脫士 (Democritus) 業已將金字塔的體積看做為多數截片的體積之和而求得、這是基礎的考案。有的人說埃及人將求金字塔的體積或求圓的面積的



正確公式，在紀元前十八世紀即已知道了。乃是測數學。

將球看做在 x 軸的方向堆積的高為 dx ，半徑為 y （變化）的圓盤的集合，則其體積為

$\int_0^r \pi y^2 dx$ 的二倍。 r 為球的半徑。

中心在原點的圓，方程式為

$$x^2 + y^2 = r^2$$

所以

$$\int_0^r \pi y^2 dx = \int_0^r \pi (r^2 - x^2) dx$$

這個當然是 $\frac{4}{3}\pi r^3$ 的一半。

積分學成爲人生上重要的東西乃是動力發生期以後的事，做工作的能力之「能」漸々成了重要的科學語彙。積分學成了計算能的基礎工事，與微分學在前世紀用於論運動的事相類似。

只是，牛頓雖然創立了微分學，他並沒有加以解說，反倒費了許多能於歐幾里德幾何的證明。這並不是促進

牛頓力學發展的緣故。

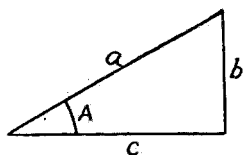
\int_0^a 的 $a, 0$ 各叫做積分的上限・下限。意思說是在這兩個界限之間相加。例如

$$\int_0^a dx = [x]_0^a = a - 0 = a$$

在這裏 $[x]_0^a$ 意思說是先將括弧內的數給以值 a , 其次給以值 0 , 然後由前者減去後者。這種相加叫做積分 (integration)。

三 角 函 數

這裏有直角三角形。若設斜邊之長為 a , 高為 b , 底邊之長為 c , 又夾 a, c 之角為 A , 則表示為



$$\frac{b}{a} = \sin A$$

$$\frac{c}{a} = \cos A$$

$$\frac{b}{c} = \tan A$$

各讀做塞恩 (sine, 正弦) A , 叩塞恩 (cosine, 餘弦) A , 談近特 (tangent, 正切) A 。這記號是尤拉創始的。顯然的

$$\frac{\sin A}{\cos A} = \tan A$$

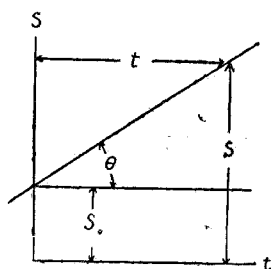
又由畢達哥拉斯定理

$$\sin^2 A + \cos^2 A = 1$$

正弦・餘弦・正切的逆數各叫做 cosec (即西堪特、cosecant), sec (西堪特、secant), cot (即談近特、cotangent)。

這些乃是三角法 (trigonometry) 上的術語。

在方眼紙上不畫 x, y 軸而用 t, s 軸、自 s 軸上在原點上方 s_0 的點、引與 t 軸在上方成角 θ 的直線。這樣一來



$$\frac{s - s_0}{t} = \tan \theta$$

故將式改寫、成爲

$$s = t \cdot \tan \theta + s_0$$

這是直線的方程式。

s_0 若爲 0, 則上式表示由原點所引、與 t 軸成角 θ 的直線。

$$s = t \cdot \tan \theta$$

θ 爲由 t 軸在反時針的方向 (與鐘錶的針的迴轉方向相反的方向) 所測的角。這 θ 能從 0 能變到任何的度數、所以一周則增三百六十度、二周則增七百二十度。

x, y 或 t, s 各在原點的右方・上方測量時、採爲正、取在左方・下方的時候採爲負。

θ 若在九十度以上、一百八十度以下、則直角三角形

含其補角 ($180^\circ - \theta$)，高爲正、底邊之長爲負。以下同理。因之正弦 · 餘弦 · 正切等值也正負變化。

$$\tan 45^\circ = 1$$

又 $\cos 0^\circ = 1,$

$$\sin 0^\circ = 0,$$

$$\sin 90^\circ = 1,$$

$$\cos 90^\circ = 0,$$

$$\tan 0^\circ = 0,$$

$$\tan 90^\circ = \infty \text{ (}\infty\text{爲無限大、原來是「千」}$$

的字。昔日千是極大的數的意思。)

這事就着 0° 或 90° ，比 0° 或 90° 小或大的諸角而考究其三角函數的值就能明白。這個由前述的三角函數間的關係也能明白的。

$$\sin^2 0^\circ + \cos^2 0^\circ = 1,$$

$$\tan 90^\circ = \frac{\sin 90^\circ}{\cos 90^\circ} = \frac{1}{0} = \infty$$

用零無論除甚麼有限的整數(雖是 1 或 2 也是一樣)，也得 ∞ 。那因爲 0 是非常小的數、把無限多的 0 集合在一起、纔能得出來有限的數。

$$0 \times \infty = \text{有限,}$$

$$\frac{\text{有限}}{0} = \infty$$

因之、 θ 爲 45° 和 0° 時、各爲

$$s = t + s_0$$

$$s = s_0$$

後者表示和 t 平行的直線。 θ 爲 90° 時

$$t = \text{const} = t_0$$

這 const 讀做康斯坦特 (常數)。這方程式所表示的是平行於 s 軸的直線。他所截的 t 軸之長爲 (自原點測之) t_0 。

各角的三角函數成爲表而出版。

微 分 學

等到數學者處理運動的問題的時代、和古典幾何學併用的阿拉伯代數學令人感到非常的不便。在這時候就必得考案依屬於革新幾何學的新計算方法。這就是微分學。

微分係數 (differential coefficient) 即是一個曲線在某點的傾斜如何、給與這傾斜的程度的。求微分係數的方法叫做微分 (differentiation)。

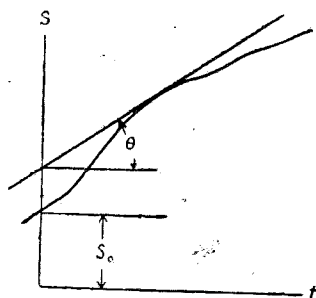
在某點曲線的傾斜、可給爲其點所引曲線切線 (極靠近曲線所引的直線) 與 x 軸所成的角之大小、若用分度

器測量得這角而求出其正切，則那恰是微分係數、巴洛做了微分三角形 (differential triangle) 而找切線。

設 x 軸為時刻 t 軸、 y 軸為距離 s 軸則一樣速度的直線運動 (等速度運動) 可用直線表示。那直線的傾角的正切給出來速度 a 。

因為甚麼把他叫做速度呢。那因為他是單位時間所移動的距離、故在直線上任意二點之縱座標 y 的差 Δy 即

Δs ，把他用橫座標 x 的差 Δx 即 Δt 來除，即得速度。



再有不等速直線運動可用曲線表示、自其一點所引曲線切線的傾角的正切、表示在那點的速度。那是將曲線看做無限段數無限小的直線

之集合、而這小直線和切線一致。即是、不等速直線運動可看做在極短時間繼續的等速運動。因之寫做

$$v = \frac{dy}{dx} = \frac{ds}{dt} = \tan \theta$$

$\frac{dy}{dx}$ 叫做關於 x 之 y 的微分係數。

$\frac{dy}{dx}$ 有時用 y' 表示。

$\frac{ds}{dt}$ 讀做狄埃斯·狄梯。

其次設 x 軸表時刻， y 軸表示在那時刻的速度，則 $\frac{dy}{dx}$ 為在各時刻加速度的大小 a 。 a 乃是速度增加的「速度」。

$$a = \frac{dv}{dt} = \frac{d\left(\frac{ds}{dt}\right)}{dt} = \frac{d^2s}{dt^2}$$

後者念做狄·吐·埃斯·狄·梯·斯塊爾。乃是 s 關於 t 的第二次微分係數。

曲線上向上的地方 $\frac{dy}{dx}$ 為正、向下的地方 $\frac{dy}{dx}$ 為負、水平的地方則 $\frac{dy}{dx}$ 為零。

因之、所謂負的加速度者、即是說速度越來越減少的意思。

微分係數不僅限於直線運動的速度、物體的熱膨脹率（從對於溫度之伸長的曲線）、楊彈性率（從對於錘重之鐵絲的伸長的曲線）等也可應用他而求得。

切線的傾角正切、數學上把他叫做在那點的曲線的坡度 (gradient)。(工事上則為傾角的正弦或正切) 坡度為零時、則其部分為水平的、 y 取極大值或極小值。

求 $\frac{dy}{dx}$ 的事叫做「關於 x 將 y 微分」。由此可明瞭曲線的「自然史」。

直線的方程式、設 a, b 為常數時、可表為

$$y = ax + b$$

$$\frac{dy}{dx} = a$$

傾角一定。項之和的微分係數等於各項的微分係數之和。常數 b 的微分係數爲零。

一般、設 n 爲任意常數、若

$$y = ax^n + b$$

則
$$\frac{dy}{dx} = anx^{n-1}$$

再有
$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{d(anx^{n-1})}{dx} = an \frac{dx^{n-1}}{dx} = an(n-1)x^{n-2}$$

因 an 爲常數、所以出於微分記號之外。

$n = 1$ 時

$$y = ax + b,$$

$$\frac{dy}{dx} = a,$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = 0$$

此事由上面的一般式可以明瞭。那因爲不論甚麼數、他的零次方（即 x^0 ）永久是 1，又在 0 上無論乘甚麼有限的數也得 0。

$$y = a + bx + cx^2$$

$$\frac{dy}{dx} = b + 2cx$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = 2c$$

坡 度

鐵道上爲的連絡高低不同的兩個地點，做成坡道。在鐵道線路的坡度變更點立有標識，上面用黑字註明坡度。這叫做坡度標。每水平一千米上升十米，則叫做 $10/1,000$ ，又叫做 1% 。坡度標上寫做 10。

但是據學者談、坡度的推測倒是易於錯誤的。實際並不怎麼陡的石階、有時一看就覺着發眩、然而相當陡的樓梯、却不在意。人的眼睛實在是容易昏花的。

許提內克 (Sterneck) 說、山的陡看着比實際更甚的原因是、距離目測的時候、眼睛離物體越遠、越覺得把物體看成往下沉、設與眼睛的距離爲 d ，則看着有如 $\frac{cd}{b+d}$ 。所以山頂看着比山麓較爲往下沉、因而看着比實際險峻。

落 下 運 動

物體離手，就向下方加速進行。漸次速度加快。這由於物體受地球的吸引、若不管空氣的抵抗、則這加速度是一定的。這加速度的大小普通拿記號 g 來表示。 g 表示每秒約增加 980 秒種的速度那麼大的加速度。

因之，落下經過 t 秒後，速度（ v 秒率）如下。

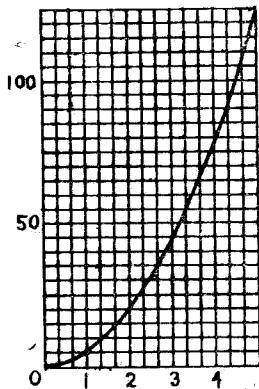
$$v = gt$$

初速爲零，速度像這樣一樣的增加着，所以 t 秒間的平均速度 v_m 秒率爲

$$v_m = \frac{gt}{2}$$

在這期間移動的距離 s 率爲

$$s = v_m t = \frac{gt^2}{2}$$



落下距離的圖表

圖表採取橫軸表示秒，縱軸表示米。若從橋上往河面投石，測取落下時間，就能由這表求得橋的高度。

若是最初給與下方以速度 v_0 ，則

$$v = v_0 + gt$$

$$v_m = v_0 + \frac{gt}{2}$$

$$s = v_0 t + \frac{gt^2}{2}$$

這 g 若用微分記號表示，則爲

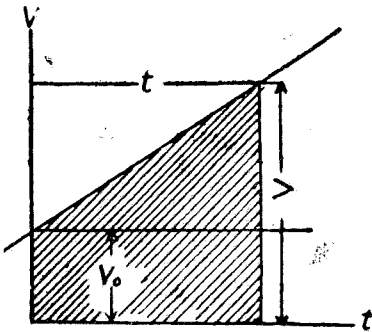
$$g = \frac{dv}{dt}$$

$$v = \int_0^t g dt + v_0$$

g 爲一定、故

$$\begin{aligned} v &= g_0 \int dt + v_0 \\ &= g \left[t \right]_0^t + v_0 \\ &= gt + v_0 \end{aligned}$$

請看下圖。 g 爲 vt 圖中直線的坡度、而知其等於



$$\frac{v - v_0}{t}$$

直線下的面積爲

$$\frac{(v - v_0)t}{2} + v_0 t$$

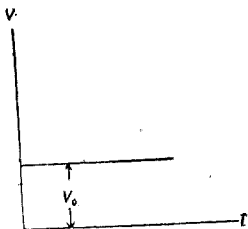
這是

$$v = \frac{ds}{dt}$$

所以 s 等於

$$s = \int_0^t v dt$$

因之這運動可看做落下運動與等速運動的和。



左圖是等速運動（等速直線運動）的 vt 圖。設速度爲 v_0 。

表示速度用若干秒糎、表示加速度的大小用每秒若干秒糎。更進一步的表現是對於前者爲 $cm/秒$ 、對於後者爲 $cm/秒^2$ 。這個也可寫爲 $cm \cdot 秒^{-1}$ 、

者爲 $cm/秒$ 、對於後者爲 $cm/秒^2$ 。這個也可寫爲 $cm \cdot 秒^{-1}$ 、

$cm \text{ 秒}^{-2}$ 、但這種寫法有脫落某字的危險。

不論速度或是加速度的大小，不論是甚麼量，若是忘掉了表明他們的單位，那就完全成了無有意味的東西了。

時速籽數近於秒速呎數。

日 時 計

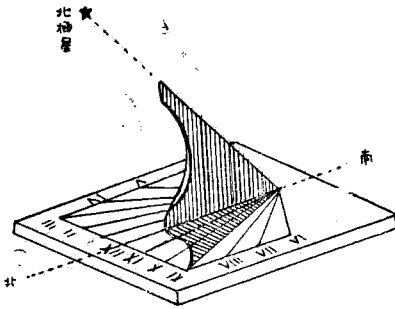
倫敦的喜好修飾者，在十八世紀中葉，腰間帶着重四兩的錶，用長約三十糲的粗的洋白銅練子拖着而步行。左手插在腰上，手拿文明杖，漫步街頭。

庭園的裝置時常用日時計（sun-dial）。在歐西各國舊式教會的牆壁上能看見掛有日時計。在波羅洲現在仍然使用着。

紀元前三世紀在巴比倫有了日時計。但是日時計為擅長數學的阿拉伯人所愛用。這和昔日的影時計大不相同。影時計以及方尖碑是裝置在圓形石台上的鉛直柱。子午線與柱影所成的角乃是太陽的方位角（azimuth）。影所畫的角速度因日而異。

日時計將柱對着北極星的方向。柱影投於水平面上，看柱影與子午線所成的角。這在一年中度數相同，是相

宜的。日時計的柱對於水平的傾角等於那點的緯度。



日 時 計

上述是水平式的。此外還有帶着能鉛直掛於東·西南各牆壁的面日時計。

傾斜式從午前七時到午後五時、鉛直式南壁從午前六時到午後六時、即一整白天、東壁從日出到午後十一時、西壁從午後一時到日入、可以使用。

日時計有由於經度而生的時差，所以時刻差兩三分鐘。也有玻璃製的、裝在玻璃匣內的。

未修好大金字塔以前、埃及和史梅力亞的僧侶關於星熟知兩件重要的事項。

第一是、某兩個星通過子午線的時刻、常為同一的間隔、第二是、各星通過子午線時、常表示一定不變的高度（對於水平的傾角）。

腓尼基的航海者就着天體收集了新知識。希臘的航海者知道在兩個不同地點測得的某二星在子午線上的高度

差爲一定。這因爲星與星之間互相保持着一定不變的關係。

埃拉脫典 (Eratosthenes) 最初測地球的大小。接着做成了天球圖、地圖 從天球圖割出。希巴克士 (Hipparchus) 畫了一千零八十個星的圖。

航海者必需星圖。

亞力山大的文明崩壞、開始了歐洲航海。在這期間星圖的數學即球面三角法大々的發達。

測 花 火

看花火的人中、去測他的是學者。測花火的人在一籽前面的地方就停住積載器械的汽車。急々忙々の往地上搬運。無論花火怎樣美麗壯觀、他也無暇賞玩、只專心於他特殊的工作。

帶有好幾只 stop watch, 可測得花火打上來、開花的聲音到來所需的時間。前者例如爲 $\frac{9}{10}$ 秒、後者爲 $\frac{11}{10}$ 秒。到聽見花火打上來與開花的聲音、其間的時間間隔是 $\frac{9}{5}$ 秒。一方面由寒暑表知道氣溫是二十度、從表求得音速。這就大事告成。若是知道了花火打上的高度、花的重量、用初等力學可以算出來打上的能。那竟是好幾

十萬朱爾 (Joule)。

有叫做測高器的東西，是在一米左右的柄端貼好眼睛，透過刻度玻璃板而看花火，側取仰角，另外求得到放花火的地點的距離，就能決定開花的高度的裝置。

設仰角為 θ ，距離為 d ，則高 h 可由次式求得。

$$h = d \cdot \tan \theta$$

而仰角 θ 由前例知為

$$\cos \theta = \frac{\frac{9}{10}}{\frac{11}{10}} = \frac{9}{11}$$

用三角函數表求 θ 的值，再在其正切上乘以 $\frac{9}{10} v'$ (v' 為音速)，則得 h 。再有由公式

$$v^2 = 2gh$$

可求得花火的初速 v 。

時的分數與千分之一秒

取記錄時、時刻須取到秒的甚麼分數呢、這時常成為問題。預先討論而規定世界共通的章程是便利的、服從這章程是立憲的。

飛行機的到着時刻讀到秒。奧林比克大會的賽跑用

stop watch 決定入決勝點的時刻。用 stop watch 差不多不能決定十分之一秒。據說有人用了光電管更詳細的考察了到着時刻、但是胸的高因選手而異、所以這法不能用、

但是一方面有每秒飛行八百米的彈丸的戰爭。每秒八百米和地球赤道的自轉速度每秒五百米來比較、真是快得可驚。因之時限信管的時計裝置若不像那樣程度的正確、彈丸就歸於無效、所以需要有良好的時計裝置。

統計止於分以及止於秒的時候、必得止於分。但這乃是外行人所常做的事、例如時刻本來應該寫爲十三小時二十一分零秒、可是只寫到二十分。這樣一來、好容易的測到秒、可是結果並沒表出來。

所謂小時者、是觀測星通過當地子午線而定的。若是觀測幾十顆星的子午線通過、可把時刻規定到正確程度達百分之一秒。這時若是不用輕便的觀測器械、器軸的位置變化、因而不能正確求得。再有、將子午線通過電氣記錄時、普通繼電器的能力難以保持到千分之一秒的正確。就是用現字器也難以保持可靠到千分之一秒、這是不可不加以考慮的。因之和改良這些裝置同時、所用的時計也必得是非常正確的。國際無線電報時可靠到千分

之五秒。天文臺的地下恆溫室中多裝置有李弗拉 (Riefler) 會社所製的擺時計、所謂李弗拉時計。這是能調節其氣壓・溫度的。精確度為一日千分之一秒程度。然而就是人體感不出來的地震也給以百分之一秒的誤差、這事是常有的。稍微有點地震他就停止、由於太陽以及月的位置而擺的振動也略有變更。東京天文臺的李弗拉時計、大概是由於重力的變化、每一個月加速的前進百分之三秒。一日有 86400 秒、所以一千分之一秒約為其一億分之一。換句話說、那是很高的精確度。英國的格林威治天文臺有同國辛克倫會社所製的華爾特時計、這時計名為世界第一精確度高的時計。普通的測微時計每一日步程大抵變幾分之一秒、以這測微時計為根據、普通做天文學的觀測。

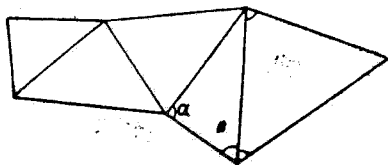
有以車票大小水晶板的水晶擺為主要部分的水晶時計。這用電振動使他振動、反之、電振動也因為這擺而一定、將電振動的周波數遞減、用叫做福尼克發動機的同期發動機而發動的時計。

不受溫度或地震的影響。水晶時計若是工作長了、由於種々原因、振動狀態就變化。但若是工作一小時、能保持百億分之四的正確度。而若是十日、每一日能保持

千分之一秒程度的正確度。

測 地

測地學測量地球的大小以及形狀，地方的則以作成地圖爲工作。



作地圖用所謂三角測量。將地上諸點用直線連結、作成三角網、測其中

一個三角形的一邊之長與其兩端的角而計算其他二邊之長。然後以已知其長的一邊爲基本而重覆做同樣的事。這樣定好諸點的位置。

像這樣、基線的測量和角的測量是重要的、所以基線必得用尺直接測量。

測基線時用每一米處分段的五米長的 invar (鎳鋼的合金) 的尺、與米原器用顯微鏡比較、其次將二十五米長的同樣的鐵絲用五米的尺檢查、而用這鐵絲做長的尺度。

近來這比較用光波長處理、在日本得到了對於一百米爲千分之一耗的精確度。這是一億分之一的精確度、真

是可驚的。

希臘城市中的有閑階級學幾何學的事、有如今日的人們猜十字謎、下象棋一樣。就是柏拉圖也曾說過幾何學是人類精神的最高鍛鍊之道。幾何學取做古典的學生的學科之一而使用於歐洲教育、但是對於測量學、人世社會的應用却一點也沒有理解。

米突制與十分之一秒的世界

法國一八〇〇年前後導入了米突制。但這制度一直到約九十年前方纔在法國爲一般人所通用。這制度是確定的而且簡單。一米的一千倍叫做籽。kilo (啓羅) 是由希臘語的一千來的。現今往歐洲大陸去、可以看見不論鐵路或是國道都是用籽表示着。

米突制的大優點在於他的被通用於全世界和他的簡單。

米的原器保管在法國巴黎附近的國際度量衡局 (International Bureau of Weight and Measure) 的地下室。一八七二年法國爲了這目的捐助了二萬五千平方米的土地和小的舊宮殿。此處不課稅。再有法國官吏不能在此處捕縛。一八七五年建築了二重壁的新實驗場。因爲是

二重壁、所以差不多終年溫度一定。在這實驗場中照着



米 原 器

國際米棒做造米原器、而且施行比較觀測。各米棒係用特殊白金（白金百

分之九十、鈹百分之十）造的、表面永不生鏽而發出光輝來。在標準棒的兩端、表面上有用金剛石刻的界線、棒當攝氏零度時、這兩根界線之間的長度為一米。常用的做造國際米原器有好幾種、這種是保存在實驗場的、標準棒放在地下八米的室內。在這室內每六年開一次會那時打開室門、知道國際米原器和原器是安全的。二十八個國供給這國際局的經費。開這室必須用四把特殊的鑰匙、其中三把在國際委員手中。所以只有在每六年委員集合時纔能開室門。第一次歐洲大戰時有一把鑰匙在德國。那麼若是在大戰中有開這室門的必要時、大概只有把門打壞吧。做造的米原器分布於各文明國間、這些原器和在法國塞佛爾的標準比較、只止於五百萬分之一的誤差、這做造的原器時常運到塞佛爾去再檢、找一找經年變化。

地球上的一切文明國、在日常生活上必然的採用米突

制、在最近的將來更進一步的逐漸採用。

透鏡用米突制製造、電力也是如啓羅瓦特等、是用米突制的。無線電波長也用米來測。工場也是米突制。

像這樣世界的文明各國趨向米突制的事情、是由於近代的電報・電話・無線電而在各國民之間激增了方法以及思想而致、那是無疑的。

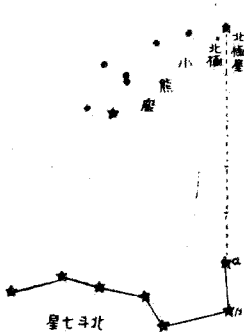
無線電波繞世界半周也用不了十分之一秒。我們就住在這十分之一秒的世界中。這樣短距離的世界、到底不能用各樣多岐的度量衡來支持的。

國際米原器雖在法國、和那個同樣的東西在各國成爲米原器而渡過來。這都是既知其與國際原器的器差的。前圖爲來到日本的、保管在東京商工省中央度量衡檢定所。

北極星與天球

勺柄形的北斗七星的星座是大熊座。連結其 β , α 二星、而在 α 星的外方延長其五倍、就是北極星。較真的北極稍偏。北極星的高度在這裏約爲 44° 度 (新京)。乃是二等星。

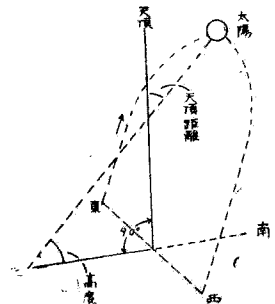
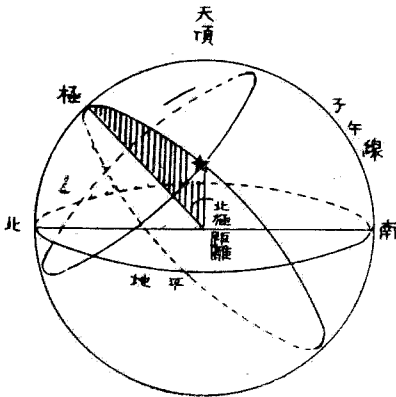
北極星屬於小熊座。



北斗七星每一日順着反時針的方向繞北極星一週。

所謂天球者、乃是這天空的天蓋。將這地球的赤道往這天空延長出去的面叫做天球的赤道。將地軸延長、穿透天蓋的地點是天球的極。全是照方向說的。

平行於天球的赤道的叫做赤緯 (declination) 的小圓與通過天球的極的叫做赤經 (right ascension) 的大圓、用他們能够表示天體的位置。赤經圓與子午圓 (將子午線延長向天球的) 所成的角叫做時角 (hour angle) 這每一小時變化十五度。



通過天頂(頭上的方向)與星的大圓叫做方位圓 (azimuth circle)。方位圓與子午圓所成的角叫做方位角。

天頂與星所成的角叫做天頂距離 (zenith distance)。是高度的餘角。出沒時他是九十度。

極與星所成的角叫做極距離 (polar distance)。是赤緯的餘角。

太陽在春分·秋分時赤緯爲零。這一天不論世界何處，都是日出於正東，沒於正西。

新月在正午前後南中(通過子午線)上弦的月(右半月)在日沒時南中。滿月約在正子(午前零時)南中。日沒時現於東天。下弦的月(左半月)約在天亮時南中。

水星或金星不到黑天以後決不通過子午線。或在日剛沒後沉下、或在日一出前上昇。

火星或木星的外行星黑天後纔通過子午線。

海哩等於大圓上角一分的距離。

直接航路是大圓的路徑。

風 速

風向乃是指着風吹來的方向。例如東風是從東方吹來

的風。

風有風級與名稱。十秒米一類的是強風。在海上颳起來大白浪。十秒米也略稱為十米。

風力的區別從穩靜 (1.5m/秒) 到颶風 (29m/秒)。

名稱	風速(m/秒)	
	2 以上	風 的 方 向 與 強 弱
	4 "	
	6 "	
	10 "	
	15 "	
	20 "	
	25 "	
	29 "	
	35 "	
	40 "	

用風力計測風速。

風力計日本採用洛賓孫式的。在十字桿尖上帶着風盃。一秒間若是轉三回、風速即為 10m/秒。以二十分鐘的平均表為風速。

風用箭頭表示、用羽毛的數表示強度。風向用箭頭的方向表示。在平靜的日子不用箭頭、風信器的箭頭表示方向。

若是南西五秒米則寫為 SW5。

船

節是速度的單位、乃是在 28秒鐘行 47.28 呎的速度。船舶上面畫有吃水線。這是根據積載量、船沉入水內的部分的水平境界的位置、船若輕則淺、船艙若充滿着則深。吃水若過淺則船身易搖動、所以遠洋航海的船吃水

深。但是水面不可到了吃水線以上。

船舶的總噸數用於比較船的大小。排水噸數主要用於軍艦。一萬噸以上的商船若想自由的橫靠，得有五米以上的深度。



左記兩個標識在吃水的地方寫在船腹上。

裝貨時可以沉到的深度拿

布利姆索爾記號表示。

FW : Fresh Water, IS : Indian Ocean in Summer,
S : Summer,
W : Winter, WNA : Winter in North Atlantic

雲量、雲形、降水量

空中無有片雲的時候雲量為零，滿天是雲遮蓋着的時候雲量算做十、分為十一階級。

雲量二以下為响晴、三至七為晴、八以上叫做陰。各以○①○或◎來表示。

雖是雲薄而日照、雲量也單拿面積來定規。

看見雲形能知道高度。

(一) 上層雲 高九籽

a 卷雲 細如白纖維或是羽毛形的雲。這是冰片

集成的。

b 卷層雲 白面紗那樣的雲。造日暈的雲。

(二) 中層雲 高三至七籽

a 卷積雲 無濃淡的白色小片雲。

b 高積雲 有濃淡的雲。

c 高層雲 灰色的薄幕。

(三) 下層雲 高二籽以下

a 層積雲 褐黑色不規則的雲。

b 亂雲 黑色的厚雲。邊不清楚。

(四) 上層氣流造成的雲

a 積雲 圓頂閣狀。下邊平。頭部一・八、底部一・四籽。

b 積亂雲 即所謂山峯起伏的雲。下部混亂不清。頭部三至八籽、底部一・四籽。

(五) 層雲 薄的、灰色、遮於低空。上限一籽。雨量若干耗是說雨水將地上遮蓋了那麼深。

不論霰・雹或是雪、都把落入了雨量計內的、用已知量的開水融化、而當做水測量。所以可以說是降水量為適切。●是雨天的記號。

積雪在無有障礙的寬廣地點立尺來量。

生雲的地點是所謂對流圈。超過對流圈的是所謂成層圈。這境界的高度因地方而異。但大體爲十千。成層圈不發生天氣現象。僅僅是從西方吹來微風那樣的穩靜。有人想拿他做爲將來的航空路。

溫度與濕度

一般人常將溫度與熱混同。例如說身體的熱是少多少度。

但是熱與溫度在學問上是有嚴格的區別的。熱與溫度的關係恰如水量與水位的關係。在粗管與細管內裝等量的水時，前者比後者水位上升的少。熱也同理，給與同一種物質（例如，若是鐵則同爲鐵）以同一的熱量，則重者比輕者溫度上升的少。

水是由水位高的方面往低的方面流。熱也同理，由溫度高的方面往低的方面流。溫度若是流熱的能力，則水位爲流水的原動力。

測溫度的裝置爲寒暑表或溫度計、

水銀寒暑表的兩個定點，零度（冰點）及百度（沸點）是將寒暑表各放在正在融解着的冰中和在一氣壓之下沸騰着的水蒸氣中的時候水銀線頂所取的位置。零度與百

度之間、不問管的內徑粗細是否一樣、沿管壁平均分成一百等分。因之、內徑一樣的寒暑表和內徑不一樣的寒暑表、在定點以外度數當然不一致。因之一般寒暑表有檢查刻度等的必要。

再有玻璃這種東西、在製造後漸次收縮、刻度發生變化、而發生經年變化。因之寒暑表往々必須與標準寒暑表比較而檢查刻度。

寒暑表不單々是玻璃管內裝入液體的。電氣的測溫器也是寒暑表。有叫做熱電對的、是用不同種（例如銅與洋銀）的絲、兩端結合而成的。這個由於兩端溫度的差而電流流在其輪道內。若兩端的溫度相等、則不生電流。一端冷、他端加熱時、則發生電流。這電流叫做熱電流。

熱電流用密力弗打計測其電壓、然後反過來由表求出來其兩端的溫度差、若已知一端的溫度、則他端的溫度即可求得。這僅々是在結合點的溫度、熱電對途中的溫度無論怎樣分布、結果也相同。

接合點小、所以能在小的地方測溫度、有這個方便之點、再有一件長處是能遠距測定。

欲測氣溫時、用叫做百葉箱的東西、那是放在寬廣的

草地上 高一米、帶着四隻脚、一邊長一米的四角木箱。裝有百葉窗、這箱能流通空氣、防止雨雪或直射日光入內。內外部塗上白漆。箱北側掛着寒暑表。

掛在露天、是不能知道真的氣溫的。

每日的最高氣溫與最低氣溫的差叫做較差。這在海岸地方是少的。午前九時的氣溫近於一日的平均。最低為日出之前、最高在午後一時至三時之間。裝瓦斯的電燈的溫度為二千八百度乃至三千度、蠟燭火焰為一千四百度、入浴的溫度為四十五度 開水能喝時的溫度為六十

八度左右。測

濕度時、如養

蠶家所用的、

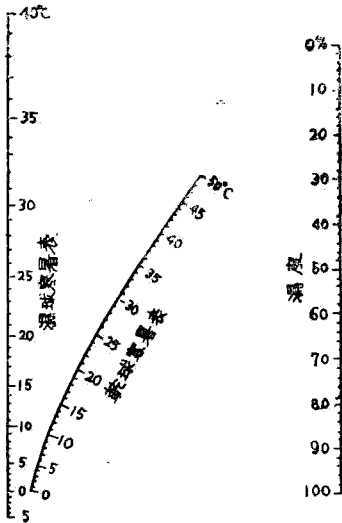
以用乾濕球寒

暑表為簡單。

這是取兩隻普

通的寒暑表、

濕度的共線圖表



只要常使他濕即可。空氣越乾燥、蒸發就越快、由於蒸發發熱的關係、濕球比乾球溫度低。

左圖是由這兩個溫度立即知道濕度的共線圖表 (nomograph)。無須計算。將尺的邊緣對好兩個度數、則在右方的尺上立即可看出濕度。

共線圖表是法國多卡紐 (d' Ocagne) 近年所創案的、是用一根尺就知道數值的便利的圖表、那是圖表的精華、使用甚繁。

導線的電氣抵抗因溫度而變化、利用此理也有測知遠處溫度的抵抗器。

對 數

數學上也有實用的大發明。巴比倫的算術表是古代的發明、再有以速算法聞名的對數 (logarithm) 就是。產生了這法時、天文學者和教師是如何的歡喜、單是想像也足以振撼心胸。藉着他的光、學者的生命當然也增加了好幾倍、全世界文化的能率也因而向上了。

這裏有叫做 a 的數、 a 的冪 (乘冪、同數自乘若干次所得的數) 使之等於 c 。即是

$$c = a^b$$

a 及 c 都是正數。 b 任意。

若已知 a 及 b , 則可算出 c 。例如 a 若為 2, b 為 3, 則

$$c = 2^3 = 2 \times 2 \times 2 = 8$$

於對數論, 把 a 叫做底 (base), 知 a 及 c 而求冪指數 b 即其目的。在已述的普通情形, b 的實數值只有一個, 這是狄對金 (Dedekind) 等用近世理論證明了的。

這個 b 叫做以 a 為底的數 c 的對數。 c 常々叫做 b 的逆對數 (antilogarithm)。

a 選為 1 以上的正數。

若 a 為 1, c 為 1, 則 b 為 1。

底 a 選為兩種值, 其一為 10, 這時對數叫做常用對數 (common logarithm), 或叫做布利格對數 (Briggian logarithm)。其他一個是以 2.718..... 那樣一個麻煩的數為底。這種對數叫做自然對數或是納皮亞對數 (Napierian logarithm) 也有時叫做雙曲線對數。

關於這麻煩的數多談一談。

這數乃是一種超越數 (transcendental number)。普通用文字 e 來表示。

對數是蘇格蘭的男爵約翰·納皮爾 (John Napier) 與

瑞士的鐘錶師約斯特·布爾基 (Joost Bürgi) 各自獨立發明的。他們兩個人的各有差異，與今日所用的也不同。

納皮爾對數在一六一四年發表於哀典巴拉，題名為 *Mirifici logarithmorum canonis descriptio*。

布爾基的出現於布拉哈，題名為 *Arithmetische und Geometrische Progresstabulen*。

納皮爾對數是有名的、差不多全歐到處賞讚。但是從今日看來，其性質實在特異，而且求法也極奇妙。

那麼請看下面對數的定義吧。

今設 b 為正·負·有理·無理的任意實數、而

$$a^b = c$$

則用如次的記號、叫做 b 為對於底 a 之 c 的對數。

$$b = \log_a c$$

然而

$$a^0 = 1$$

故不問 a 的值如何、1 的對數永為 0。

對數最要緊的性質如下。

$$c = a^b, \quad c' = a^{b'}$$

$$C = cc' = a^b a^{b'} = a^{b+b'}$$

$$C' = \frac{c}{c'} = \frac{a^b}{a^{b'}} = a^{b-b'}$$

$$C'' = c^{b''} = (a^b)^{b''} = a^{bb''},$$

$$\log_a C = b + b' = \log_a c + \log_a c',$$

$$\log_a C' = b - b' = \log_a c - \log_a c',$$

$$\log_a C'' = bb'' = b'' \log_a c$$

積或商的對數等於因之對數的和或差、乘冪的對數等於數的對數乘以冪指數。

尤其是以 10 為底的對數寫做 $\log_{10} c$ 。1 的常用對數為 0。10 的常用對數為 1。10—100 中間任意數的對數、其值為 1—2 的數值。10—100 之數的對數、數值為 2—3。而 75 的常用對數在 1 以上、為 1.87506。

對數的整數部叫做指標(characteristic)。由上述的事實可知、以上之數的常用對數的指標、較整數部的數字少 1。

對於 1 以下的小數、指標為負、比小數點以下的 0 的數多取 1。而對數的小數部分、即假數、常取為正數。

$$\log_{10} 10^{-1} = \log_{10} \frac{1}{10} = \log_{10} 1 - \log_{10} 10 = 0 - 1,$$

$$\log_{10} 10^{-2} = -2, \quad \log_{10} 10^{-3} = -3,$$

$$\log_{10} \frac{1}{5} = -0.6990$$

但為方便起見、最後的對數值 -0.6990 為的方便起

見、要將假數改寫爲正數、所以改寫爲 -10.3010 而寫做 $\overline{1.3010}$ 。* 1 可看做對數的整數部分。

假數全都載在所謂對數表上。普通有四·五位就够用、但是七位·八位以及二十七位的對數表、因爲必要的關係也做出來了。

生命表·複利表的算出必需精密的對數值。

常用對數的發明是納皮亞與亨利·布利格 (Henry Briggs) 的共同勞作。於布利格在一六四二年所寫的 *Arithmetica logarithmica* 中詳述着這事。

布利格在倫敦的格雷哈專門學校 (Gresham College) 施行了對數的公開講解。而於某種意見 寫信寄給著者一到假日就往哀典巴拉去、在那裏受納皮亞的歡迎、滯留了一個月。

問 蠶於三十五日間成爲一萬倍。一日平均成爲幾倍呢。

答 $35\sqrt[35]{10000}$

$$\log_{10} C = \frac{1}{25} \log_{10} 10000 = \frac{4}{35} = 0.1428$$

$$C = 1.389$$

問 試計算 $182.3 \div 0.021$

答 $\log_{10} C = \log_{10} 182.3 - \log_{10} 0.021$

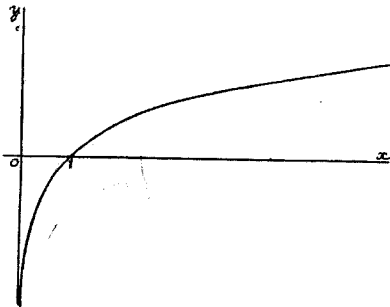
$$\begin{aligned}
 &= 2\ 2608 - (\overline{2.3222}) \\
 &= 2\ 2608 - (-2 + 0.3222) \\
 &= 4 - 0.0614 \\
 &= 3.9386
 \end{aligned}$$

$$\therefore C = 8682$$

計 算 尺

計算尺是根據對數的原理、按照對數間隔而刻度的兩個以上的尺的組合、能計算乘除・平方・立方・平方根・立方根等、雖生有小的誤差、但在實用上這小的誤差是可以忽略的。運算實在迅速。

固定而刻有度數的叫做本尺、能滑動的尺叫做滑尺。

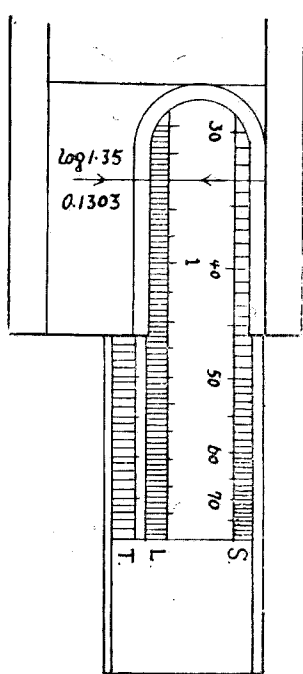
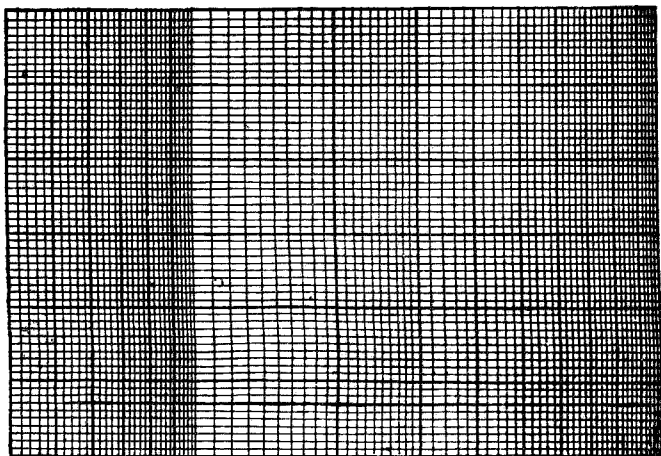


本尺及滑尺內、有刻有由一到一百的度數的上尺和刻有由一到十的度數的下尺。全長相同。上尺的由一到十之長與由十到一百的

長相等的事、由對數的性質上也可明瞭的。四個尺自上

(100) 計算尺

半對數方眼紙



而下、順次叫做A、
B, C, D 尺吧。

那麼、例如計算
 2.45×3 時、將B
(C) 尺的1放在A
(D) 尺的 2.45之
下(上)、相當於B
(C) 尺的3上(下)
的 A(D)尺上的刻
度給出答數 7.35

用下尺時、度數

細、更爲正確。不用端 1 而用他端亦可。欲求

$$8.25 \div 5.5 = 1.5$$

時、將上述的事逆行即可。爲的定刻度、有叫做 casol 的鋁製的櫃、在其玻璃面上中央畫有一根線、叫做 casol 線。將 casol 線放在 D(A) 尺的 8.25 處將 C(B) 尺的 5.5 拿到 casol 線下、對着 C(B) 尺的 1, 在 D(A) 尺讀取答數 1.5。

下尺上的數的平方和上尺相對、所以可求平方·平方根。欲求

$$(1.4)^3 = 2.744$$

時、可如下述的辦法。

將 C 尺的 1 對準 D 尺的 1.4, 將 casol 線放在 B 尺上的 1.4, 則在 A 尺上 casol 線下得 2.744。

逆行之。就能求立方根。

$$\log_{10} 1.35 = 0.1303$$

將 C 尺的 1 對準 D 尺的 1.35, 在對着本尺裏面右方下的 L 尺 (滑尺裏面帶有 L 記號的尺) 上讀對數的值。

某角的正弦和正切也能在滑尺裏面的 S 尺、T 尺讀取。即是將 S 尺上的角度放在本尺之右方或左方的指線處、則對於 A 尺上 100 或 1 的 B 尺上之值即是那角的正弦。

$$\sin 32^\circ = 0.5299$$

再有、將 T 尺上的角度放在本尺裏面左下方的指線、則對於 D 尺上 100 或 1 的 C 尺上之值即是那角的正切。

$$\tan 7^\circ 20' = 0.1286$$

無 理 數

從自然數用加減法能得整數、用四則能得整數或分數。這些數叫做有理數 (rational number)。無理數 (irrational number) 是不能用兩個整數之比來表示。在這裏談一談有理數和無理數吧。

有理數說是整數以及分數、但是 $\sqrt{2}$ ($=1.41421\dots$) 顯然的不是 1 與 2 之間的整數、但又非分數。即是不能用有理數來追究。設這為另一種的數而擴張數的觀念、把他叫做無理數。 $\sqrt{2}$ 不是有理數這事、業已在歐幾里德的「幾何學原本」中證明。夾直角兩腰之長都為 1 的三角形、其斜邊的長為 $\sqrt{2}$ 、用以前所知道的數不能表示這麼長的線分、而事實上他是存在的。這是畢達哥拉斯的發見。在這裏長度測定的可能性都成了問題啦。

木匠所用的曲尺、表面的尺寸度數和裏面的度數之比

爲 $1 : \sqrt{2}$ 。即表面雖然刻着普通的尺寸、裏面的刻度較寬。裏面刻度的使用法是秘傳弟子若非滿徒之後、師傅是不傳授的。也叫裏尺。

從圓柱木材切取角材時、圓柱木材小口的直徑與角材一邊之比爲 $\sqrt{2} : 1$ ，這個可用曲尺求得。圓柱木材的小口的直徑在裏面刻度若爲 C 寸。則在表面能切取一邊 C 寸的角材。這事就着以直徑爲斜邊的二等邊三角形所構成的正方形去推究、即可知之。

據說平方根的記號 $\sqrt{\quad}$ 是根號的英語 radical 的活字 r 變化得來的。

超 越 數

於 $\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$ 若取 $n=10$ ，則成爲 $(1.1)^{10}$ ，若取 $n=100$ ，則爲 $(1.01)^{100}$ 。納皮亞取 n 爲一千、而發見了這式的 n 若很大、則此式的值接近於某極限值 (limit) (收斂)。

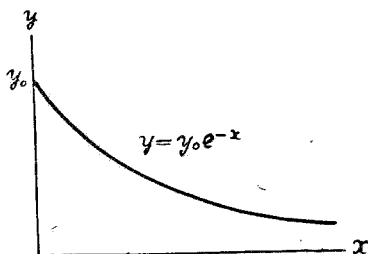
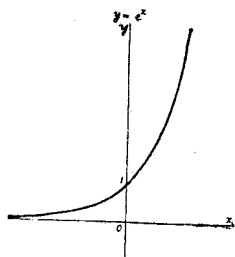
於式 $\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$ 、 n 不論是有理數或無理數都可以、求 n 爲實數、而 n 成爲無限大時此式的值。這值叫做 e 。

$$\begin{aligned} e &= 1 + 1 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \cdots + \frac{1}{n!} + \cdots \\ &= 2.718281828459 \cdots \end{aligned}$$

e 爲無理數。

e^x 或 ea^x (a 為任意常數) 叫做 x 的指數函數。由前述。

$$x = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{nx}$$



這樣一來、

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + \cdots,$$

$$ea^x = 1 + ax + \frac{a^2 x^2}{2!} + \frac{a^3 x^3}{3!} + \cdots + \frac{a^n x^n}{n!} + \cdots$$

以 e 為底的對數、即納皮亞對數或自然對數、若認 e 為數、則普通寫為 $\log_e c$ 或 $\log c$ 。

欲將常用對數改成自然對數、用下列公式。

$$\log_e c = \frac{\log_{10} c}{\log_{10} e}$$

此處

$$\log_{10} e = 0.43429448190325 \cdots$$

圓 周 率

某數的對數一般爲無理數、但 π 也是無理數。證明後者爲無理數的、日本數學遠在西洋數學以前。

中國南北朝時代的技術者祖冲之將 π 置爲 $\frac{355}{113}$ 、這比 3.1416 更近於真值。這是由 1, 1, 3, 3, 5, 5 的數排列而成、所以當然是容易記住的吧。

π 的值常々叫做路多爾夫數、這是因爲一五九六年前後德國的路多爾夫爲了計算 π 費了好幾年的功夫而發表到二十位的值、紀念這個功德、甚至於把那數刻在他的墓碑上面。

德國的李希特於一八五五年求到了五百位。英國的顯克斯於一八七三年求到了七百零七位、但是未曾討論結果。

桶匠用長約爲底徑約三倍的箍來箍桶。

東 洋 數 學

不論中國或是日本、都對於數學上有不可磨滅的功績、不過輓近歐美科學日益昌明、數學的突飛猛進、遠非東洋所及、結果東洋之習數學者、都取材於西書、結果都

以爲東洋人一點也沒有數學上的創造，也沒有數理的才能，這實在是大々的錯誤。

在這裏拿日本做例子來談一談吧。

日本在中世雖流行着從中國輸入的數學，但是不久那數學就衰落，而後發生了純粹的數學，即所謂和算。

在和算方面出現了許多人才，但其中關孝和先生是被尊爲算聖的偉人。

關氏是距今約二百五十年前的人。他發見了叫做點竄術的筆算法，又獨創圓理之數。

所謂微積分學，乃是高深的數學。若學了這種數學，就能解決許多難題，實在是一件莫大的利器。微分學在西洋是大數學者大物理學者牛頓所發見的。然而關氏是與牛頓同時代的人，而且他使用微積分的手段，幾乎可以說在牛頓之前。所以我們決不可小看東洋人，決不可小看自己，今後應該向數學努力，爲東洋人揚眉吐氣。

中國古代也曾有過幾許所謂「疇人」精研數理，以前曾經提過的南北朝的祖冲之，他發見了 π 的近似值爲 $\frac{255}{113}$ ，這個後來在西洋也被發見了，但距祖氏已隔千年之久了。

努力吧，東洋偉大的民族！

極 限 的 概 念

人是好說話的動物，也是計算的生物。

阿其列 (Achilles) 與龜的背理是希臘 哀利亞 (南意大利的海岸) 的哲學者塞農 (Zenon) 提出的。叫做塞農的人有許多、但是這個塞農是背理的名人。亞里斯多德都說他是矛盾辯證法之祖。

韋馱夫阿其列與龜賽跑。阿其列用十倍龜的速度跑、龜在阿其列前百米處。起脚跑。阿其列現在跑了百米、達到龜起脚的地點。在這期間龜跑了阿其列的十分之一即是在阿其列前面十米處。其次阿其列跑了這十米、而龜則在前一米處。阿其列再跑完這一米、龜在前面十分之一米處、阿其列若跑完這個距離、龜在前面百分之一米處、結果如此。

這樣算法、阿其列就捉不着龜。

但是這裏有極限的概念。從起點若是到了如次的地點即能追及。

$$10 + 1 + \frac{1}{10} + \frac{1}{100} + \cdots = 11.111\cdots = 11.\dot{1}$$

(• 是循環的記號)

塞農考究了將空間或運動細分的結果。

由 A 到 B，必得通過其中點。而到中點又得經過其間的中點。而且又得經過其中間點，在有限的時間怎麼能通過這些無限多的點呢，於是否定運動。

飛着的箭在每瞬間佔某位置，因而瞬間的靜止這樣一來，箭是永久靜止的。

於希臘的幾何學或希臘的數語 (number language)，塞農追不上龜。因為甚麼呢，因為希臘的幾何學只由寺院建築家或測量家取空間，而將時間委之於僧侶。直理簡直可看做有兩個，這背理就不可解。革新的幾何學是因商人在遠洋航海多賺錢而發生的。造成地圖、於幾何學上添上了時間。

東洋神祕的數理

紀元前二百五十年頃西提力亞的西拉庫沙的阿幾米德熱心的研究魔方陣，這個一名阿幾米德的方形。在西洋考案有極多種。

中國的洛書（神龜甲殼的紋理）河圖（龍馬的背上紋理）九宮都是魔方陣。唐·宋時代稍々出現複雜一點的。

中國將三方陣的九個數各配以色、一白、二黑、三碧四綠、五黃、六白、七赤、八白、九紫。將他配在日子上。

在此九星之外也用相當於西洋的七曜的六曜循環。先

勝、友引、先負、佛滅、大安、赤口、使用於定日子的吉兇。各月的朔日常配置如下。

月		
1. 7	先	勝
2. 8	友	引
3. 9	先	負
4. 10	佛	滅
5. 11	大	安
6. 12	赤	口

此外有十干十二支。由數年月的目的而生、別無他意。十干與五行說結合、乃是迷信之始。十二支配置於方位月數、而命以動物的名。

丑寅・未申之線成爲魔方

陣的對角線。

中國的陰陽二元哲學說奇數不能二分、故爲剛、或爲陽、用一表示、偶數能被除開、故柔而爲陰、用--表示。

十干	十二支	月
甲 > 木	子 > 北	11
乙 > 木	丑 > 北	12
丙 > 火	寅 > 東	1
丁 > 火	卯 > 東	2
戊 > 土	辰 >	3
己 > 土	巳 >	4
庚 > 金	午 > 南	5
辛 > 金	未 > 南	6
壬 > 水	申 > 西	7
癸 > 水	酉 > 西	8
	戌 >	9
	亥 >	10

爲陰陽兩爻。

象數尙未出現、具有渾然之理、用一圈○表示的是太極之理、分動而生一奇一偶、成陽成陰、成爲兩個一畫、生出兩儀之象。兩儀又生四象。卽兩儀之上生陰陽、成四個兩畫。

一、二、……表示位。

四象生八卦。即四象之上

太陽一二、少陰二二、少陽三二、太陰四二

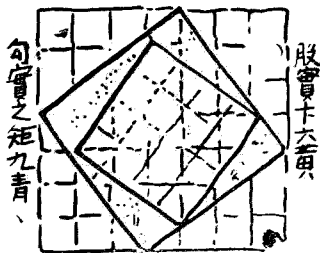
生一奇一偶、成三個八畫者。三方略具而成八卦。

八卦重覆爲六十四卦，這當然是將天地的現象分爲六十四種。

六根纂木、五十根王竹、總而言之。也是算木。

大概是在紀元四十年左右所寫的中國帝王的著作中，有相當於所謂畢達哥拉斯定理者。埃及發見的也很早，但東洋的也在畢氏以前。

直角三角形斜邊的平方等於他二邊的平方和，此即畢達哥拉斯定理，是在中等幾何上總都知道的。在東洋知名爲勾股弦定理。勾股弦各表示水平邊鉛直邊及斜邊。



圖爲周公時代叫做周髀算經的算法天文書中的圖。乃是「畢達哥拉斯以前的定理」。

最外面正方形的面積是在中央的粗線正方形（一邊的長爲 a ）的面積、加上同樣大小的直角三角形（邊長 b 及 c ）的面積四者所得的。

$$a^2 + 4 \frac{bc}{2} = (b+c)^2$$

$$\therefore a^2 + 2bc = b^2 + c^2 + 2bc$$

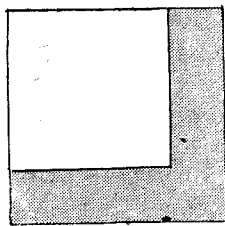
$$\therefore a^2 = b^2 + c^2$$

令人深切的想到古代的偉大。

在埃及據說是在三邊上面的正方形內舖上方磚而比較面積、用方格紙的格數來比較試一試、也是有趣的。

曲 尺

在一個正方形的二邊上、加上一塊對稱的 L 形部分、而又成正方形時、其加上的部分、亞里斯多德把他叫做



gnomon。即是曲尺。歐幾里德把他擴張了而應用於任意平行四邊形。

用這個也能演數學的魔術。這叫做 gnomon 數。下列的是其

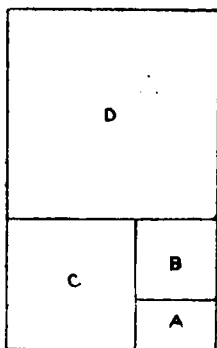
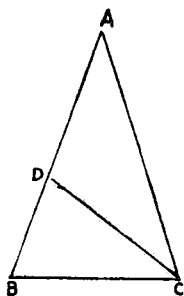
一例。

$$0 + 1 = 1^2,$$

$$1^2 + 3 = 2^2,$$

$$2^2 + 5 = 3^2,$$

$$3^2 + 7 = 4^2.$$



矩形二邊之長成 $1 : \sqrt{2}$ 之比時，將短邊二倍也得完全相似的形。各半爲他半的 gnomon。書的四六格式就是這個。

再有、矩形 A 的邊成 $1 : \frac{1}{2} (\sqrt{5} - 1)$ (≈ 0.618) 之比時，這 A 的 gnomon 是立於長邊上的正方形。

不論甚麼三角形，一部分都是他部分的 gnomon。今有頂角爲三十六度角的二等邊三角形，其一與全體的形相似，他者爲其 gnomon。

柏拉圖的靈世界爲形體世界，是將物質解消的，以等邊三角形爲地、直角三角形爲水精、不等邊三角形爲氣、二等邊三角形爲火之元素。

畢達哥拉斯派以二爲意見，四爲正義，五爲結婚（最初的女性數二與男性數三之和）又六面體爲地、金字塔

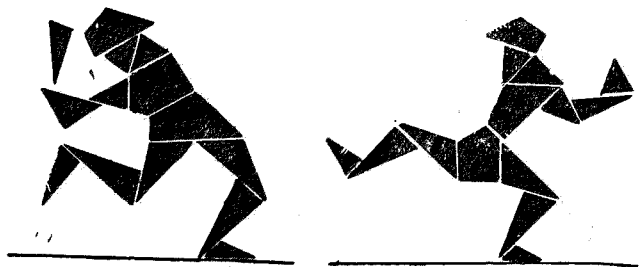
爲火、十二面體保有天之秘密。取三爲男性的事類似東洋。

以五的性質爲色、六爲寒冷、七爲健康、八爲愛之秘密。

智慧板遊戲

智慧板的遊戲——阿幾米德的斯陀馬槍——以前在美國或其他地方，有凌駕十字繼而流行之勢。

這遊戲是阿幾米德發明的。他所發明的這遊戲幾百年間爲希臘人及羅馬人所愛玩 但是進入黑暗時代之後、從世間消失了。近來英國的地質學者 R, D, 奧達姆博士由羊皮紙發見了關於這種遊戲法發明者的敘述。以前僅々

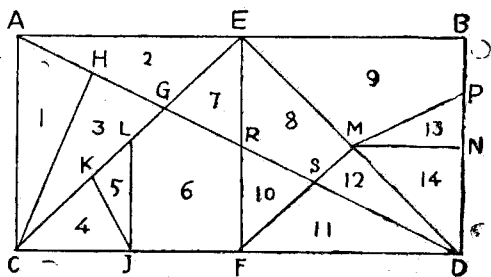


在古數學書和在黑暗時代出版的阿拉伯數學書中散見的、又出現於世界上來。所謂斯陀馬槍者 意思是希臘

語「the thing that drives one wild」(使之趨之若狂的事情)。實際上也真是一旦開始了不到解決問題不止的一類東西。

這遊戲誰都能辦得到 但是實際上需要非常銳敏的精神。這是由十四塊扁平的厚紙或木片做成的。將之密接而適當排列就可做出來無限多的圖形。人・獸・鳥・屋船等可做出來無限多的形象。遊戲的目的是作成最生動的圖形。這需要熟練。

造自己的肖像是遊戲中最有趣的吧。



造這板可取長為寬的二倍的矩形厚紙，設此矩形為 ABCD。其次於頂邊的中點和底邊的中點畫上記號。E 和 F 就是這個。其次引 EF 線與對角線 AD, CE, 及 ED, 決定 G 點。

此時、將矩形分成相等二正方形、先取左方的正方形

將 AG 線二等分而定 H 點。其次引 CH 線。又二等分 CF 而定 J 點。二等分 CG 線而得 K 點然後二等分 KG 線而得 L 點。聯結這些點而引線 JK, JL。這時左方的板已經分完。右方的板、二等分 ED 而決定 M, 引 FM。其次將鉛直線 BD 二等分而定 N, 更將 BN 二等分而得 P。引 MN 與 MP, 於是作圖完成。R 和 S 自然就決定了、所以不入於作圖之內。其次把這些部分標以一至十四的數字而剪開。片大半都是三角形。

規則上、將片翻過來使用也無妨。但是排一個圖形必須將十四塊完全使用。

這斯陀馬槍一名「阿幾米德的洛克拉士」。

懸賞十萬馬克

雖說是懸賞、既不是平々常常的諾貝爾賞、又非法國懸賞五十萬法郎的巴黎・東京間百小時以內的飛行、或是美國懸賞七十五萬圓的多產競爭、而是徵求證明一個數學定理。但是懸賞金額很大、是十萬馬克！而且目下仍在徵求中。怎麼樣、諸位不試一試看麼。

懸賞的內容如下。

「兩個立方之和不爲立方。」即一般的來說、 n 爲正整數、

而且大於 2 時、滿足方程式

$$x^n + y^n = z^n$$

的 x, y, z 之正整數值 (但不含零) 不存在、試說明之。

投件通信處——德國給琴根王立科學協會

截止日期——二〇〇七年九月十三日

應徵條件——應徵論文限於印刷出版後經過二年
以上者。

一說明了來路、讀者之中一定有叩膝而說『啊！原來是有名的費爾瑪²最後的大定理²啊。』一點也不錯。費爾瑪不必說，是十七世紀的人、與巴斯加共同發見了整數之一性質、後來考案定規曲線價值的方法、與狄卡兒論爭、被謳歌為近世整數論之父。本來是法律家。

『光由媒質內一點出發、經反射屈折後、達到媒質內他一點、必採取時間的最小 (或有時最大) 路徑。』他獨創的發見了這一類統一的表現幾何光學根本現象上極重要的法則、與其他許多獨創的定理、寫在給友人的書信上或筆記本的一角上而殘留着、乃是生於法國的天才的大數學者。

不知何故、他對於這些新定理大多數不與以最要緊的證明。大概是直觀家吧。這些定理後來由幾多學者給完

全證明了，然而在狄范脫士的抄本欄外上面，僅々寫着「自己發見了這定理的極巧妙的證明，但是因爲紙沒有多餘空白了，就沒有寫。」這個所謂「最後的定理」部分的 卽 $n=4$ 時由弗萊尼庫（一六七六年）、 $n=3$ 時由尤拉 $n=5$ 時由路先德（一八二三年）、狄利克雷、 $n=7$ 時由盧北克諸人各證明了，但尙無一人給以完全的證明。因之這定理突然成了整數論，不，簡直是近代數學的 X——斯芬克斯（謎），而惹起世界數學者的注目。一八五〇年費盡力氣的巴黎學士院爲了法國數學界的名譽懸賞三千法郎，在江湖上徵求證明。數學者拉美、柯西都各發表了證明，但是都被指摘出來基礎錯了。伯林的庫瑪等人特意的將那些不合答案收集起來，重加研究而發見了新的概念。地下的費爾瑪一定要在微々苦笑吧。三年後又做第二次的懸賞。在由此五十年之後之1907年發表了十萬馬克的懸賞。卽德國達姆希脫的富商、對數學非常有興味的 F. P. 發士凱爾又想起來徵求這證明、而由巨大的遺產中取出十萬馬克、一切都委託給給琴王立科學協會。這在世界數學界上引起更強烈的熱狂、立即有好幾千卷答案來到了該協會。當然世界有名的數學者也有多數應徵、但是未有滿足的答案。就是現在恐怕仍

有迷答珍案來到該協會吧。無論怎樣說、距離截止日期還有七十年之久呢。那麼諸位、從現在起也未為晚、把自己所想到的拿來應徵吧、希望諸位努力。若是寄去完全的答案、十萬馬克就到手、而且那個還不算、同時你的名字就將永遠的留在世界數學界的。

爲了應徵者、在這裏介紹準備用書吧。

P. 巴哈曼著「費爾瑪問題與今日之發達」(1916)

L. J. 模狄著「費爾瑪最後定理三回講義」(1921)

雨果·威利·魏格爾著

「費爾瑪問題的初等解法」(1932)

關於費爾瑪最後的定理1957年證明了 n 爲百以下的情形、1908年狄克孫證明了 n 爲七千以下的素數時、麥士納證明了 n 爲一萬四千以下的素數時。總而言之、是有趣的問題。但是不成立的情形至今尙未發見、如果發見了不成立的情形、那就更有趣了。

代數學發生的晚。所謂幾何學史上的三大問題(後述)由希臘時代開始、但是到了五·六十年前方纔解決。

在代數學上還有像這樣、沒有解決的事項。

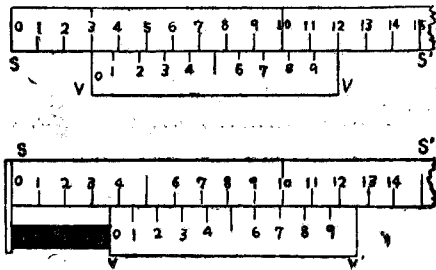
尺 度

規矩準繩，就是尺、曲尺、墨繩這些東西。

直尺是普通的。木匠所使用的疊尺是將好幾根直尺連在一起而便於攜帶的。卷尺是洋服匠人使用的。長約十米。鎖尺是測地時用的，將鐵鎖連結成十米長。

測物長時，尺的度數若不副實物，則生所謂視差 (parallax) 的誤差。眼與物體與度數成一直線，這直線必須與尺垂直。再有用尺測一回再接着測的時候，越是這樣越生誤差。

所謂副尺者，又附於普通尺而用的。普通的尺，最小刻度的十分之一必須由觀測者讀取。但是若用副尺，則不是目測的分量而能讀得最小刻度的分數。因之在測定器具上多數附有副尺。



副尺英名「威尼爾」或「諾紐士」。是照着發明者的姓名而定的名稱。

上圖的 SS' 是

普通的尺（主尺）、 vv' 是副尺。副尺能沿主尺移動。這副尺是將 ss' 的九格之長分成十等分而刻度的。

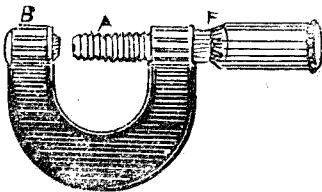
於上圖、副尺的 0 線與主尺的 3 線重合，所以主尺 4 的線與副尺 1 線之間隔相當於主尺的 $\frac{1}{10}$ 。主尺的 5 線與副尺的 2 線之間隔同理相當於 $\frac{2}{10}$ 格、主尺 6 線與副尺 3 線之間隔相當於 $\frac{3}{10}$ 格。

如前圖下方之圖所示、將權測其長的物體、一端使與 ss' 之 0 線一致、移動副尺、使物體的他端與副尺之零線一致。物體的長大於 3 而小於 4。比 3 大多少、可由副尺讀得。

用副尺怎樣讀這分數呢。沿副尺而將眼光向右方移動、則副尺的 6 線與主尺的線（9 線）重合。而主尺的 8 線與副尺的 5 線之間隔相當於主尺的 $\frac{1}{10}$ 格、主尺的 7 線與副尺的 4 線之間隔相當於 $\frac{2}{10}$ 格、順次這樣推下去、主尺的 3 線與副尺的 0 線之間隔相當於 $\frac{6}{10}$ 格、所以物體的長為 3.6。副尺的線與主尺的線是在副尺的 6 線（主尺方面的度數不看也可以）地點相合。將這 6 乘以最小可讀度數（即主尺的 $\frac{1}{10}$ 格） $\frac{1}{10}$ 、加於 3 即可。

一般若想精測至主尺一小格的 $\frac{1}{n}$ 時、可取主尺的 $n-1$ 小格、而將之等分而作副尺。於上例 $n=10$ 。

測角度也有副尺。例如角度主尺每小格爲半度（三十分）時，想要測到一分，則可將主尺的二十九小格等分爲三十格而作成副尺。



螺旋測微器

副尺附於一種工場用的叫做測徑計的測物體的外徑或內徑的器具上面，這或許有人知道吧。但也有不帶副尺的簡單的測徑計。

名爲螺旋測微器（測微針金計）的器如圖所示。這是常用以測鐵絲的直徑、或測薄的厚度的。於帽 G 上附有螺旋、在下邊的周上刻有度數。這是讀螺旋的一週轉的分數的。螺旋的全周轉可由尺 F 求得。這刻度是螺旋轉的圈數越多越多露出來的。通常 F 尺區分到一耗或半耗 G 的刻度爲百格或五十格。因之這器具能讀到百分之一耗。物體夾在 A, B 兩端之間。

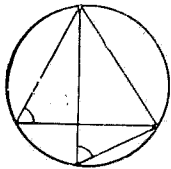
再有爲的拿着方便、帶有把柄的。於有長的螺旋通着 G 遮蔽 F，在其上底的裏面、螺旋的上端是固定的。

測量與幾何學

從肘的彎曲點到手腕的彎曲點、約等於腳長、買襪子時可用這法一試。

兩腕水平展開時、左右手指尖的距離約等於身長。因之全身可以入於正方形之內。

等分布的寬幅時、用尺斜放在上面、在刻度的地方畫記號、這是應用比例原理的。因為好幾根平行線若是用直線斜切、則平行線將所截的直線分割於等比。



同視角

將曲尺的直角頂於在一個圓周上、兩脚若取相同的長度、則那是圓的直徑的兩端。

看一個線分的角度相等的地點在於某圓周上、那角若是直角的時候、則在於以線分為直徑的圓周上。

坐高三角形是以坐高為標準、用幾何學的作圖決定坐椅對桌作業上種々量之關係的。腸管的長、寬各為坐高的十倍和十分之一。

下式表示的是、將書成四十五度角立在桌上、頭對着書、眼的俯角為四十五度的狀況。

$AB = AC = \text{坐高}$,

$AF = FE = EB = \frac{1}{3} \text{坐高}$,

$BE = BG = (\text{所謂}) \text{差尺}$

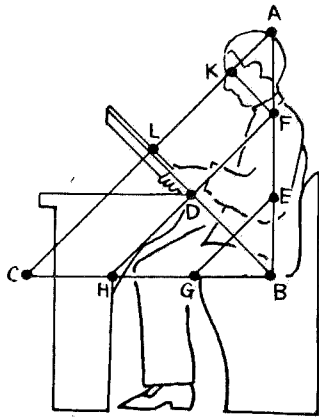
$KL = \text{眼與書的距離}$

KL 為所求的。

角錐或圓錐的體積是將底面積乘高而後用三除。扇形的是弧長乘半徑、再用 2 除。圓錐的側面積為底周乘斜高、再除以 2。量杯・量瓶是側液體體積的。上四

天秤・上四桿秤・自動秤是普通用以側重量的。

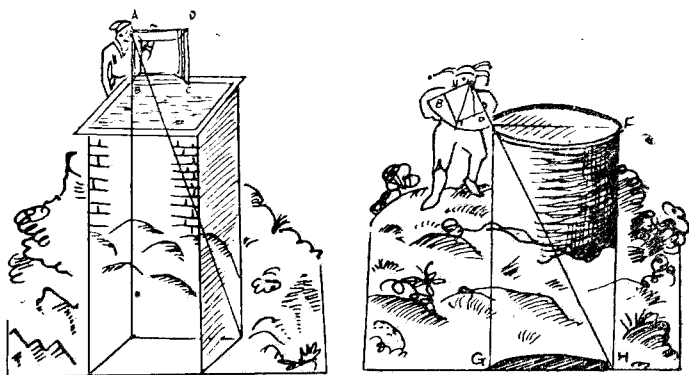
十六世紀的鑛山書裏、應用相似三角形之理、由向側方拉着的繩長而求縱坑的深度。麻雀牌、上古中國用他的影測距離、那



是長約二・四米的棒或管。

塔萊士是米多萊的富商、因商務而往返埃及的途中研究了數學。為希臘七賢之一。是專心看天空而掉入溝裏的人。也有伊索寓言中懲戒懶驢的鹽商。金字塔的高用

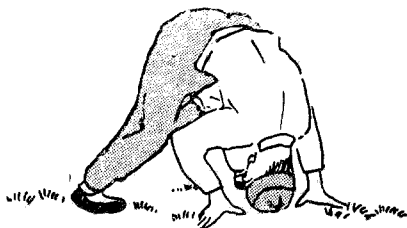
其影與棒影測得。



西洋古書所載的測量法

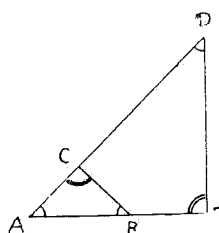
腰成直角，兩手貼地，而彎屈身體，眼與大腿根與樹

尖在一直線上時，
由那位置到樹的距
離等於樹高，是樵
夫的辦法。



腰上腰下的部分
大體等長，可看做成爲直角頂角的二等邊三角形。

地球繞太陽一週所需的時之間爲 365.2422 日。其零數
近於 $\frac{1}{4}$ 日，所以每四年設一閏年，那年一年爲 366 日。
平年 365 日。



$$AC=BC, \angle C=\angle E=\angle R$$

(=直角)

$$\therefore \angle A=\angle B=\angle D$$

$$\therefore AF=DE$$

西曆紀元年數能用四整除者為閏年，但用一百能除盡者之中，用四百能除盡的年為閏年。

千分率是「怕米爾」，以‰表示之。

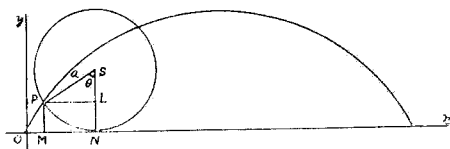
各樣的曲線

(一) 跑 道

現在最普通的跑道是在平行二直線跑道的兩端接上半月形的曲線跑道而成的。類似橢圓形。距離的計算也簡單、再有從直

線部改為曲線部而跑時，即拐彎跑時，姿勢不急改變、

有這樣的長處。



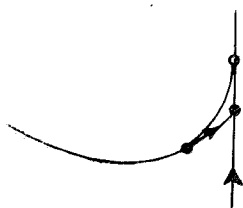
擺 線

直線與曲線之長、普通或是大略相等、或是直線部分

較長。

(二) 追跡曲線

十七世紀有叫做布蓋爾的法國學者，研究了用一定速度追趕在一直線上用一定速度駛行的敵艦時，所畫的路



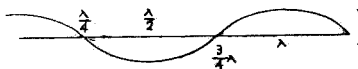
追跡曲線

徑如何。這曲線叫做追跡曲線。

在一直線上用一定速度的敵艦來追時，用一定速度逃跑的我軍艦所畫曲線當然是將前述的曲線逆行。

(三) 懸鎖線

固定繩的兩端，隨意的將繩的中間鬆開，使之下垂，則繩呈叫做懸鎖線（垂曲線、卡地納利、懸錘線）的曲線之形。請注意窗掛的繩等。

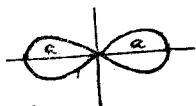


正弦曲線

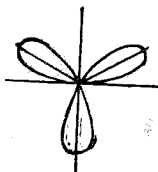
八葉形

三葉形

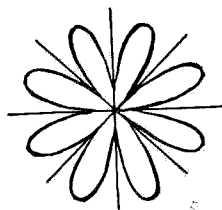
連珠形



$$r^2 = a^2 \cos 2\theta$$



$$r = a \sin 3\theta$$



$$r = a \sin 4\theta$$

橢圓是由其周上任意點到兩焦點距離之和永為一定的曲線。

距離兩定點之差為一定者是雙曲線。

在一直線上圓不滑動而轉動時，圓上一定點所畫的曲線叫做擺線（塞克勞易特）。方程式為

$$x = a(\theta - \sin \theta), \quad y = a(1 - \cos \theta)$$

a 為圓的半徑。 θ 是前面擺線圖中所示的角（弧度法 $a\theta$ 給出弧長）。

正弦曲線是最簡單的波形。

$$y = a \sin \frac{360^\circ}{\lambda} x$$

a 叫做振幅、 λ 叫做波長。若用圖表示則如前圖。

每半波長變一回正負方向。

曲線漸々上昇、昇到極點、而又要移於下坡時、

$$\frac{dy}{dx} D_x y = 0$$

叫做曲線在此處取極大值。

曲線漸々下降、降到極端時、也是

$$D_x y = 0$$

曲線在此處取極小值。

曲線凹面向上時、在那裏

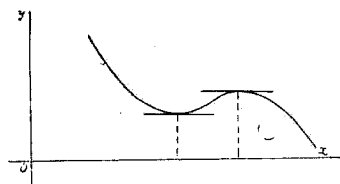
$$\frac{d^2 y}{dx^2} D_x^2 y > 0$$

凹面向下時、

$$D_x^2 y = < 0$$

其中間有所謂變曲點。

$$D_x^2 y = 0$$



極大值時。

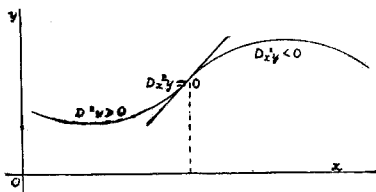
$$D_x y = 0, D_x^2 y < 0$$

極小值時、

$$D_x y = 0, D_x^2 y > 0$$

代數學用式、幾何

學用圖、以使思考節約。



十七世紀中葉狄卡兒提出新方法論、

將代數學與幾何學分併、這在他的方法論中特別注重。

紀元前四世紀雅典的哲學者柏拉圖努力於除尺圓規以外不用他的作圖。但是一般圖形時常不能單用尺與圓規作圖。

不論甚麼三角形、三內角之和都為二直角。巴斯加在十二歲的時候就知道了這事。求多角形內角之和時、將邊數乘二直角、然後減去四直角。

週 期 性

反復一回的間隔叫做週期 (period)。

沒有比統計更可靠的了、但是又沒有比他更容易發生錯誤的。

預言者是可尊敬的。能夠預言的人、有如握有開甚麼秘密之門的鑰匙似的、是可敬的。

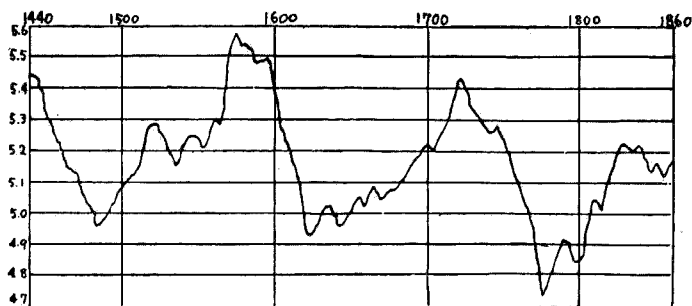
也是應該尊敬的。在這寸步之前都完全是黑暗的人生若能預測瞬時、則一定成爲社會上的大福音。

曆術或是占星古代收於司祭人之手、屬於這階級的人常能保持心的穩靜。希望着雖是捲入於戰爭之內、精神也不動搖。因爲他們相信預言惟有從神一般的心中發出來。

將事件的發生畫爲圖表、表示凸凹、這裏常看到像似週期的東西。若是用數學解析或是週期圖法則這事更顯明。

下一句斷言、是自然現象的週期性、就是在未來也可以預測到。但是人爲現象、社會事件、因爲其原因複雜所以其週期也許發生意外的變動。因之這一類事的判斷到底非人力所能爲。雖然那樣說、人類是盡力於預知的。

(13) 週期性



每百年平滑化的阿里左納巨樹之生長速度的長期變化表示氣候週期的變動。

植物生長對於季節的週期性實在是顯著的、反過來可求年輪成長的速度、而由之可求得過去天氣的變化。

但是樹的大小・年齡一增加、年輪的寬就減狹、所以需要對之加以補正。這大體與年齡成比例。

阿里左納（美國南部州名一譯者一）的氣候約為一百五十年的週期、在過去五百年間消長、這是已知的、那是由於溫度的變化或是由於濕度的變化呢、這主要是由於後者。

經度的變化起於角的 $0.03 \sim 0.06''$ 、實際的移動量在十五米以下。這是以十一・五年為週期。地震的發生也與此相應而消長。

風力大體以三十年為週期而變化、高地與平地相反對

1940年是平地風力極大之年。

太陽的活動大多招來農村的豐收。而鐵道的營業成績也良好。經濟活動的景氣指數也加大。

太陽的吳爾湖黑點的數約以十一·一年爲週期而變化。1939爲其最盛期。火山的爆發也多在這時候發生。

奧地利的 E. Brückner 發見了裏海的面的變化以三十五年爲週期。

數 學 的 本 質

科學・文學・藝術・哲學・宗教。文化實在是這些東西的背後留下來巨大的文獻。

數學實在是世界的近似的敘述。革新數學也還有着這種苦惱。因爲在那裏缺少物之生長與減衰的概念。

拉普拉斯曾向拿坡崙說過『神不是自然科學的必要假設。』但是創造・生成之謎大概是魔的概念吧。

說數學的本質在於自由的是十九世紀的堪特。這是意謂公理可自由選擇。

平行線相交、三角形內角之和不等於二直角的非歐幾里德幾何在這意義之下也成立。但是不論在地上畫大三角形而測其內角或是在天球上取大三角形而測其內角、

其和大約等於二直角。

相對論在大的領域，實證了非歐幾里德幾何學是成立的。即巨大的物質附近的空間變形，因之圓周率比 3.1416 小，光線在那裏一般是彎曲的，最短線不是直線了。加之，宇宙全體也有限而自閉。

次 元

所謂次元 (dimension) 者，為某向的延長或擴張。因之次元的數等於一點之座標的個數。

點為零次元、線為一次元、面為二次元、空間為三次元、這是當然的事、若把他擴張，則可推究出來 n 次元的空間。

阿爾巴·愛因斯坦教授近來為的建設綜合萬有引力與電磁氣等場之理論，而入於五次元的理論。相對論是四次元的、但這是更進一步的。

愛因斯坦 1939 年滿六十歲。曾在給琴根大學的狄奧多·卡魯查 (Theodor Kaluza) 教授也導入了關於同問題的五次元、但這乃是無有數理意味的數學的概念。此次在普林斯敦大學與助手彼特·忌貝格曼 (Peter G. Bergmann) 共著的論文中、給與了第五次元以物理學的實

在性。

於這新五次元論「空間」沿第五座標所示的有向量而封閉。於相對論、渾融時間與普通的空間而形成四次元

「空間」。上下・左

右・前後的三次元

空間由我們的體制

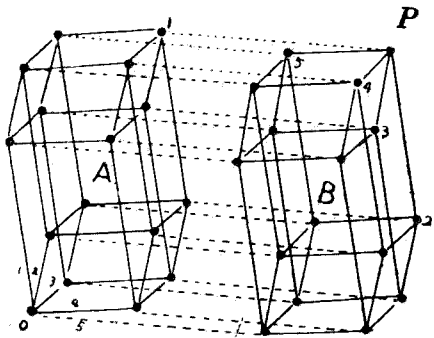
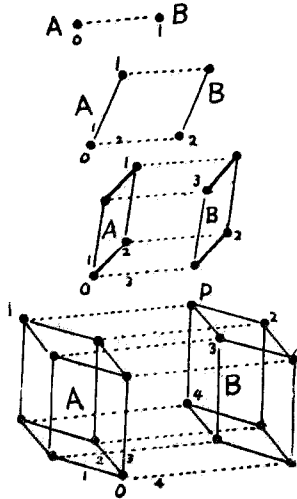
分離為四次的時

間方向、但在物理

學上、則提倡四方

向必須渾一、這是在相對論。在新論

物理學的「空間」一點有五個座標、用十四個不同的函數而論「空間」。而用五次元敘述電磁場的性質。



圖自一次元至五

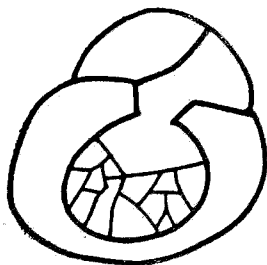
次元、為平行面體。

位 置 解 析

1879年凱利 (Cayley) 在倫敦地理學協會論及四色定理 (Vierfarbensatz)。

地圖着色時，想要一國染一色，但是這樣一來印刷費太貴。因之想要僅々國境相接的兩國染不一樣的色。研

究的結果，所需顏色的少法出乎預料之外。實際上有五種顏色怎麼樣，就着本圖看一看吧。



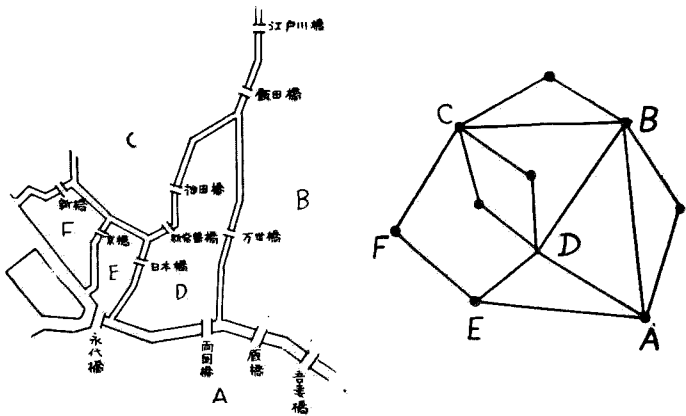
『摩電車會社引單線，使於任意地點上的客人，不論換

幾回車，都能達到其目的地，這至少得設多少根線呢。』

這是通過曲線網的問題。

東普魯士·開希士堡的布來格爾河，河流中間夾着島子而分成兩支。河上架有七座橋。於十八世紀之初，尤拉解決了渡這七座橋，一座只渡一回，而又復歸於出發點，得怎樣走法。這是一筆畫的問題。將河所分開的地點看做點，聯絡各點的橋看做直線。解決問題的一般定理如下。

『欲將一個連結的曲線一筆畫出、必要而且充分的條件是、分岐點之內無有出來奇數枝之點、或是只有兩個這樣的點。』即各分岐點全時偶數交點的網狀圖形、無論由那個交點開始、都能一筆畫出。有兩個奇數交點的圖形、由奇數交點之一開始 到他一個奇數交點 能一筆畫出。有兩個以上奇數交點的圖形不能一筆畫出。而有 $2n$ 個奇數交點的圖形需要 n 筆。於網狀圖形、奇數交點的個數必為偶數。



開希士堡的橋只渡一回是辦不到的。

筆每通過一回、枝增加兩個。一筆畫的時候、因為通過分岐點兩回・三回……、所以分岐點必有偶數個枝。奇數交點僅在開始畫和畫完的地點出現。這兩點若是

一致、則沒有奇數交點。



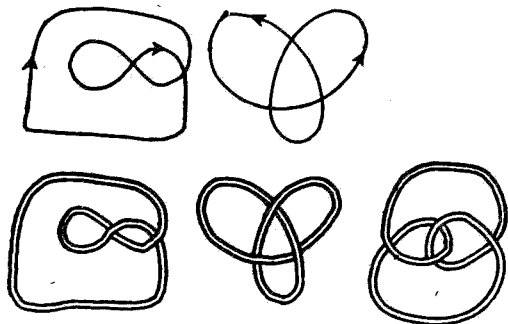
默罕德用偃月劍尖在砂子上一筆畫成的玉璽如左圖。

所謂尤拉的多面體定理是、一個凸多面體、面與頂點的總數等於稜的個數加二、將這面連續的變化時、這關係也成立。

球面被在其上所引的閉曲線分為兩部分。又將一平面上所畫的圖形、使之以在其平面內而又不橫斷這圖形的直線為軸、在其周圍迴轉、則得環面。這圖形不使環面分裂。

上述一類的性質、與形以及大小等、在計量的性質上分明是無關係的。完全是定性的事項。

位置解析 (position analysis) 為純正幾何學之一種、將某領域連續的施行變化轉換時、研究與之無關而停止



不變的性質，是位置關係的學問。

用位置解析知球面與橢圓體相等。將球面撕裂、而連續的變形，則成爲橢圓體。雖成橢圓體、也沒有融合了與前不同的新的面部分。但是球面與環面不相等。位置解析做這樣的研究。

將環面沿一個子午線切開、於此結扣、雖將二切口相連、這個與舊面有另外意味的相等性。這新環面僅在空間連續的變形、不能歸於舊面、欲想歸於舊面、必需自己貫通。

位置解析李曼、毛比阿 (Mobus) 儲伊曼、克利福特、克來因等人大加研究。方法是直觀的看法。以紙或橡皮的面做實驗而貢獻於數學。

面因爲能給以數式、故解析的結果能應用於位置幾何學。

堪特附以基礎的集合論，對於位置解析的正確的建設給以大的手段。

空手舞也對此方面的研究有貢獻。

看這火柴匣的畫吧。

人的脚數？腕數？皮帶若是結反了的時候、皮帶在中途扭轉一回而結上了兩端、結果就會成爲下面那樣的玄

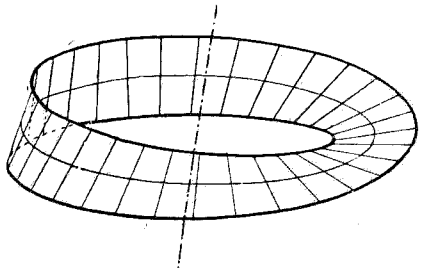


妙的面。

這叫做
毛比阿
帶、是既
無裏又無
表的面、
即順着某

面部分而進行，則到裏面、又出到表面。是位置幾何學一個有趣的對象。

這扭轉一次的條面，表示其面積有限，然而完全沒有境界的不可思議的空間。愛因斯坦的宇宙就是這一類的。



毛比阿帶

在條的兩面向同一方向同時用鉛筆引平行線，則繞條一週之後，則一根來到他根的邊緣上來。在這樣的曲空間，可知普通的平行線公理是行不通的。

若將這紙片用剪子剪成兩條，則得長為原來二倍的空间。

但是距離邊緣、始終距他爲一定距離而剪下去、則剪子復歸於出發點、這裏得到了兩個個別的空間。

以上的空間實驗是很有趣的。希望諸位試一試。

必要與充分的條件

四邊之長相等是正方形的必要條件、但不是充分的。

四個內角皆爲直角、四邊之長皆爲 a 糧、成正方形固屬充分了、但是不必要。

四個內角爲直角、四邊相等、這是成正方形的必要而且充分的條件。

$a=b$ 則 $c=d$ 時、其逆定理「 $c=d$ 則 $a=b$ 」未必一定成立。但是其對偶「 $c \neq d$ 則 $a \neq b$ 」必成立。(\neq 表示不相等)

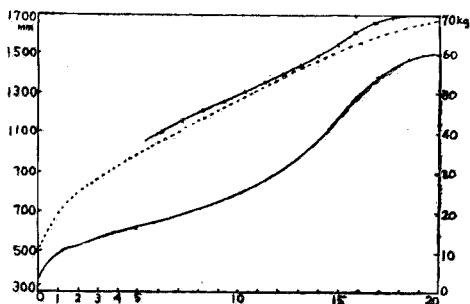
$c=d$ 之事爲 $a=b$ 的必要條件、由上述顯然可知。

$c=d$ 則 $a=b$ 時、 $c=d$ 爲 $a=b$ 的充分條件。

若已給二直線、則可決定一交點、反之、已給二點可決定一直線。這叫做雙對或是二元的原理。是法國的彭士雷所述說的。

生長曲線

比利時的凱多萊(Quetelet)寫在叫做 Anthropométre 的書中，於生物學上創一新紀元。



人類的生長曲線

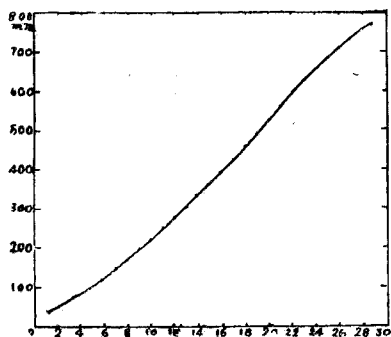
這書被尊敬為最初的生物學統計書。將生物變異用確率論議論之，又表示了人類的生長與形。

生長曲線的例子，就着比利時人，由嬰兒到二十歲的男子的生長曲線如圖。橫軸表示年齡數、點線表示身長、實線表示體重。是有某種特徵的曲線，一看這曲線就知道生長速度隨着時間而變化。

一到了六十歲，就顯然的變短，這是由於科學的原因。

次圖為竹的生長曲線、橫軸表示日數。起初速度小、漸次急激增加。也有變曲點、最終有着負加速度。

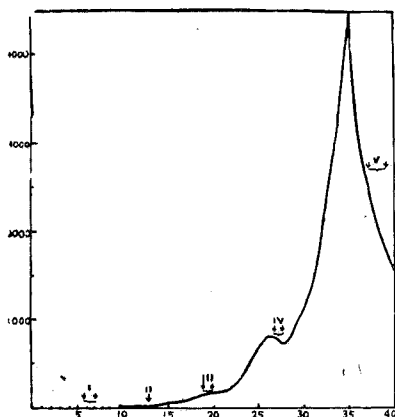
再次圖為蠶到做繭的生長曲線。



竹的生長曲線

蠶蛻四次皮。第一次在孵化後六七日。第三・四次蛻皮的時候生長速度顯著的減慢。

縱軸表示厖、橫軸表示日數。



蠶的生長曲線

加拉士法則與凱多萊法則一樣。即正常分布的法則。凱多萊由生物學的統計得到的這法則。

有丁型・U型如人的體重在最高點的右側陡而右側緩和。

壯丁的身長呈對稱

的分布、但體重則不然。

算出樹幹的形狀也是森林工學上一件問題。

一般、動物飼養得越相宜、其生長愈盛。

生物的生長有着韻律的變化、靜止與活動是在於若干

分鐘或其他的時間間隔而發生的。

印度的有名生物物理學者鮑斯 (Bose) 實驗的表示了植物的生長、以小而又完全韻律的脈動、在幾秒的時間間隔反覆着、這是有名的實驗。這並不限於植物。

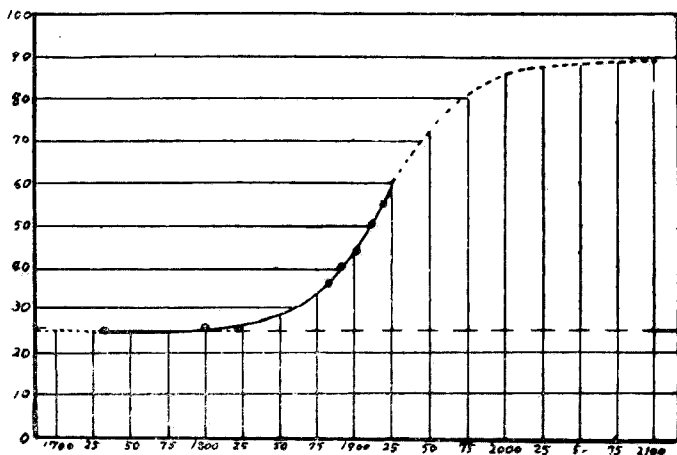
人 口 增 殖

日本的人口怎樣增殖呢？畫成圖表看一看吧。

橫軸取做年號、這樣一來、得到了叫做「西格莫伊特」的曲線。

下限及上限用鎖線表示着。

那麼世界全體的人口增殖狀態如何呢、那仍是屬於

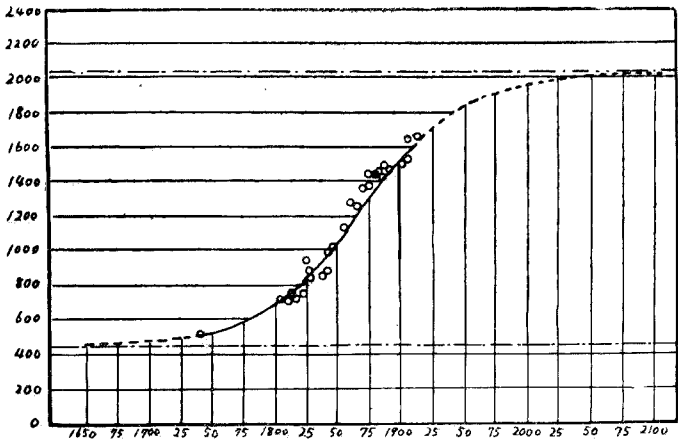


日本的人口增殖

「西格莫伊特」曲線。

等紀元2100年、來到人口增殖的極限、這傾向可由圖表看出來。

處理這樣問題的叫作增殖的生物學 (biology of population growth)。



世界的人口增加

戰爭上也講求數學。一方面由於軍備撤廢、對於條約不滿的結果、也研究着平等的條件、對等的國力等。

對峙的兩個勢力的維持的論究、與生存競爭問題有關係。意大利羅馬的數學者維多·弗爾台拉 (Vito Volterra) 業已發表了叫做「生存競爭之數學論」的長篇論文。

設各種族的個體數為 x 增殖率為 $\frac{dn}{dt}/n$, 則考究反抗此

率的衰減係數。這些是時間的函數，又與各種族的個體數有關。

有爭奪同一食物的許多種族時，由於貪慾，增殖係數小的種族急速衰減。所謂貪慾係數者，是對於一個個體單位時間的食物消費量，這是各種族個體數的函數。若在一定的環境，最初雖有充分的食物，共存的個體數若增加，則食物減少，這也使增殖率減小。

數學像這樣，用物理學的生物學而描寫出來種族消長的歷史。

將甲虫或水蚤飼養在溫度一定的瓶中，時々給以粉末食物，考察繁殖世代，這是生物增殖學的實驗。這個和人口增殖給與出一轍的結果。

生物學並不像以前那樣單々終始於分類。產生了叫做生物測定學 (biometry) 的分科，學者在研究着。

巴爾及李德所考案出來的

$$y = \frac{k}{1 + me^{r(t)}}$$

被採用為人口增殖曲線。 k, m 為常數。 t 表示時間， y 表示人口。

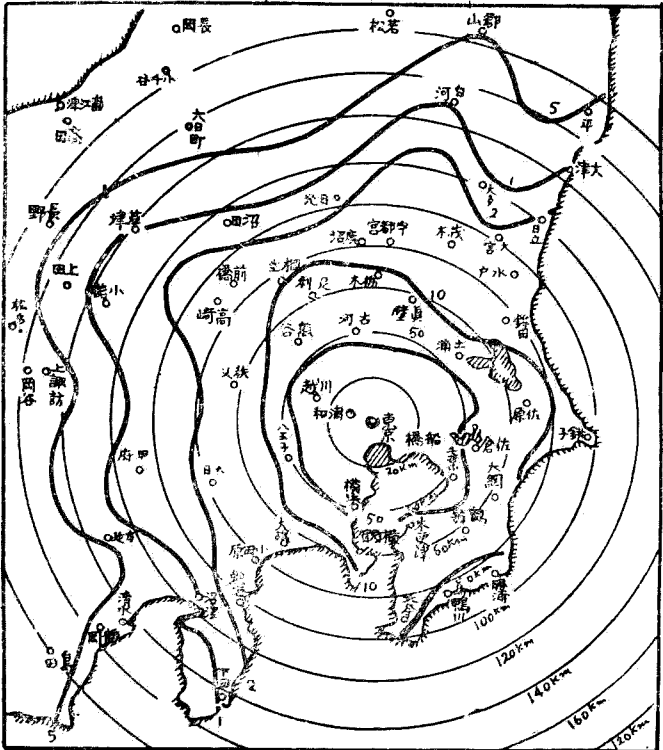
土地有大小的限制，再有人口的增殖當然也有上限。再有、人口增殖的最下限必得為零。人口增殖也有週期

性。 $f(t)$ 取至 t 三次方即可。

圖表表現法

將圓分成若干個扇形、用這些扇形的面積所表示的圖表叫做扇形圖表。

用折着的線所做成的叫做折線圖表。用於不是連續的



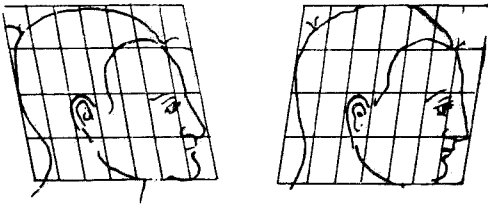
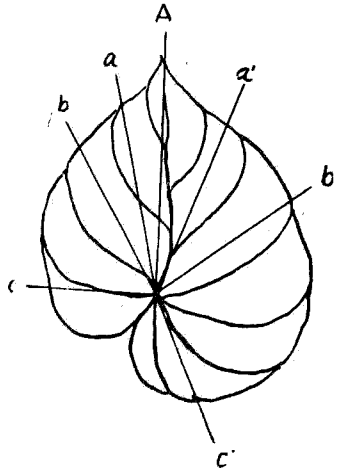
記錄時。

像巴黎或大連那樣放射線與同心的圓道路，定位置用極座標式。左圖是表示東京無線電放送的等感度之點的距離。

用極座標推究，則知道秋海棠的所謂非對稱葉，左右實在成比例。例如，於角

$$\frac{Aoa}{Aoa'} = \frac{Aob}{Aob'}$$

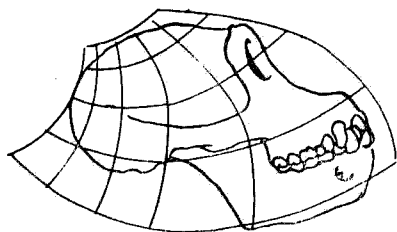
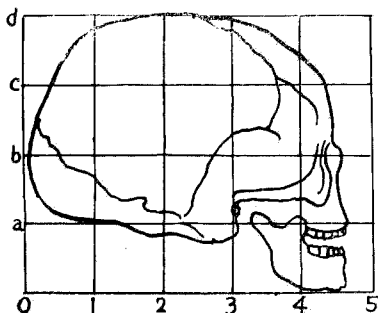
等。



以前提過的杜勒知道了斜交座標，上面右邊的圖是由他的書中取來的。表示面角 (facial angle) 爲一般轉換的指標。

於比較類似形，寫像 (transformation) 是有用的。

下圖爲直角座標的人類頭蓋骨的輪廓、若用曲線交叉的網格來表示、則怎麼樣呢。



下面的圖是猴子的頭蓋骨。這座標是曲線的、間隔也不相等。網格漸次約爲對數的增加。於人類、面角近於九十度。

人類學者比較人類與大猩猩與猩猩的普通方法、軸太少、本質上有弱點。面角的軸最重要、但這不過是座標系的主軸。直線軸僅有效於有最簡單最密切的關係的轉換。

用不良的透鏡看方眼紙、則其格變形而看着像似線軸形、或是變爲樽形。將其一叫做他者的寫像。

一者爲他者的寫像時、是有數學的關係、相當於造這寫像的裝置的函數叫做寫像函數。

若是任意二線間的角度在寫像後仍保持相等角度時、

這寫像叫做等角寫像。

例如、縱的格子和橫的格子、異位而放置如成爲同心圓和放射群、則兩系的線各々互相垂直。

計 算 與 地 圖

紀元前 332 年埃及降於亞力山大大王。亞力山大導入了古代一切的學問、醫術、染色法、航海術。

亞力山大的天才狄奧凡多及台昂 (Theon) 與身毒人、阿拉伯人研究了同樣的問題。

一千五百年前亞力山大的文化引起了數學上大的進步。托萊米與阿波羅尼亞士 (Apollonius) 發見了形成解析幾何學本質的事項。

阿幾米德測圓、台昂考究開平方、這成了微積分學的兩件基礎工程。

阿幾米德考究了近於對數原理的事項。

十五世紀航海術改良、重視計算。對數比阿拉伯數學用更簡單的方法。

對數將乘法・除法各還元爲加法・減法。處理大數時、後者比前者省多少麻煩、可是過於思索了。

布利格的 Logarithmall Arithmetike 的 1631 年版中極

力提倡那種勞力的減輕。開平方・開立方也都極簡單的施行。

航海術上的三角表製作或複利的計算上、可以拿對數當做利器的。

納皮亞是這對數的發明者。這發明爲十六世紀當時的大天文學者梯克・布拉埃及凱布勒所大歡迎。

天文學對於航海術、航海術對於獲得財富上大有貢獻。速算對於財富的速算上有貢獻。

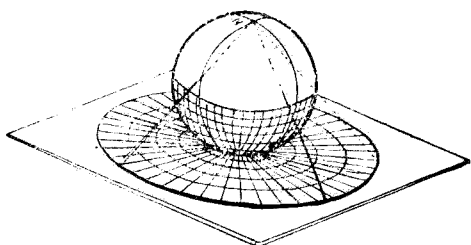
地理學者稱爲弗拉木士梯德 (Flamsteed) 或莫爾維台 (Mollweide) 的投影地圖、是數學者所說的曲線座標 (curvilinear co-ordinate)。

梅卡脫的方法是經線用平行線表示的、失去了實際的比例、離赤道遠的地方過於大了。但是於弗拉士梯德的投影地圖、經線如實際那樣的集於極、而救了這種變形。也用於調查動物的生長。

於五萬分之一的地圖、等高線每高二十米引一根。

投 象

看左面的圖、下半球投在水平面上同一圓內。N 叫做投象的極 (pole)。



將球面投象於圖上

於透視 (perspective) 畫法、視線 (visual ray) 穿過叫做畫面 (picture plane) 的鉛直面的點是投象點。

從眼睛向畫面所下的垂線的足叫做心點 (visual center) 通過心點的水平線是畫面的地平。

平行線透視的看時，集於一點。這點叫做消點 (vanishing point)。

而地平面上平行線集於地平上的消點。

從雲間露出來的日光看着像似發散、實在因為是平行着的緣故。

天空看着如穹狀。探照燈的光追隨着這外觀上的曲率而進行。

有叫做「佛光」者、那實在是平行的太陽光線看着有如聚集、這現象在探照燈也時常看得到。

分 析

法國的數學者弗里哀 (Fourier) 證明了不論甚麼週期曲線 (反復的曲線) 都能把他用適當的振幅·週期·位相的若干正弦曲線之和表示。

而求這正弦曲線的事叫做調和分析 (harmonic analysis)。

人的輪廓 (眼·鼻·口一帶) 也可看做週期曲線的一週期而分析之 能用數字表現出來。

在日本, 舊明信片由昭和十二年四月一日換為新明信片。暫時貼上半分郵票而使用, 那使用量隨着時間而按幾何級數 (對數的) 減少了。

刺激與感覺不成比例, 前者為幾何級數的變化時, 則後者為算術級數的變化。這叫做偉伯·費希納的法則 (Weber-Fechner's Law)。

音階·星的等級·音的強弱都用這法則研究着。

曲 面

近代煙捲狀彈的形與昔日的球彈完全不同。是空氣抵抗最小的形。叫做流線形。

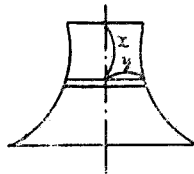
人類棲息於自然法則所支配的環境中。由重力知鉛直與水平、由平衡感覺悟得平衡與對稱性。

印刷與電影與無線電與鐵筋與金屬上、現在充溢着物理學與數學的力量。總而言之、是感覺的近代化。三次元空間與金屬的香味是象徵着我們世界的美。其中螺旋是表示對於達不到的理想的憧憬。

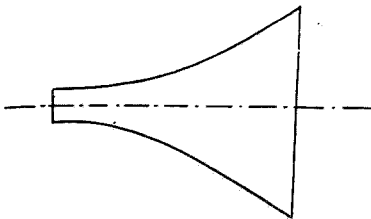
叫做對數螺線 (logarithmic spiral), 像貝殼的螺線那樣的曲線的發見者、竟使人在他的墓上刻這曲線。因為他是永遠繼續的復活曲線。於極座標用

$$r = ba^\theta$$

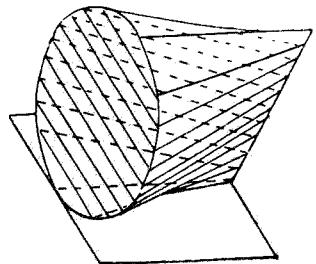
表示。 b, a 為常數。



迴轉指數面



指數型喇叭筒



可諾伊德

不論考究那個切口、對於單位面積的壓力（由上部的重量而生的）都相等的形爲廻轉指數面。應用於石牆或瓦堆。

蓄音機的喇叭的形也是此種面。那種形對於發音上合適、不發其自身所有的音。

看着卽像古代高帽子、又像似魚的尾鰭的曲面在數學上論究着、叫做「柯諾伊德」。

是工業時代。表示空間的愉快圖形是「1940型」另圖爲某高爾夫球名手打球的姿勢、連續照多少回動作而得的像、高爾夫球棒呈曲面的形。

將曲面的曲度定義爲曲率的是高斯。

這是在曲面的某點、畫與之極吻合着的圓、考究這圓的半徑的逆數。尤其是、在一點接觸於曲面的圓有無數多。然而其半徑最大及半徑最小的圓互相垂直。

圓筒面於軸的方向卽縱的方面上無有曲度。曲率圓的半徑爲無限大。但是在其垂直方向、卽橫的方向、曲率圓的半徑等於圓筒的半徑。

惟有球面、不論何處、彎曲都是正而且一定的。反之有負而且一定的面。這叫做擬球面。

又有於其某方向彎曲爲正、而與之垂直的方向爲相等

的負數的彎曲狀態，那形是恰如馬鞍形的面。那叫做「卡狄諾伊德」。

將圓筒面含軸而切斷展開，則成方形的平面。球面無皺紋不能展開。而說是面也有能展開與不能展開的區別。

最 小 面 積

液體表面因為有表面張力，所以給如繃着的橡皮膜。想要儘量取小的面積。體積已給時，表面積最小的面為球面。因之液滴想要成球形，但是大的液體因為受另外的力的作用，有時不呈球形，但是小滴差不多只受表面張力的作用而呈球形。昔日說球是最完全的形。作各種形狀的鐵絲框，浸入肥皂水內而提出來，則得到以框為邊的最小面積的形。是數學者用叫做變分法的難數學解着的事，可以一瞬的實驗，真是一件痛快事。



血 球

將立方形的鐵絲框
浸入肥皂水而提出
來，則十二個層不聚
於一點，而集於小的

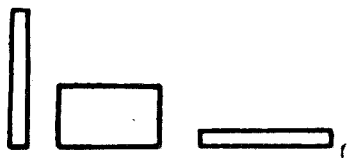
中央的等邊層，得到了這樣的形體。

血球的形是廻轉形，但曲率不定。因之不能單從表面張力一點來解釋。

於血液中略々加水，血球立即變成球形。這時候取安定平衡的最小面積。加入濃食鹽水或甘油則收縮。

極大極小

下圖的矩形，四周的全長都一樣。那一個形面積最大呢。



今設邊長爲 x, y ，則

$$x + y = c = \text{一定周}$$

面積必須爲

$$A = xy = x(c - x) = \text{極大}$$

參照微分表，則

$$\frac{dA}{dx} = c - 2x = 0, \quad \therefore x = \frac{c}{2},$$

$$\frac{d^2A}{dx^2} = -2 < 0 \quad (\text{合於極大的條件})$$

即爲正方形。

看這題『於距支點 2 的地方掛重量爲 100 之錘的槓桿欲在桿端加力 p 將之舉上來。設槓桿每長 1 的重量的 3。求 p 的極小。』

若使槓桿長，則易於舉上來，但這樣槓桿自身的重量大。

因之設槓桿的半長為 x ，則由力之能率的理、

$$2 \times 100 + x \times (2x \times 3) = 2x \times p$$

$$p = \frac{100 + 3x^2}{x}$$

(註：所加的力與錘在支點的同側。)

將 p 就 x 而微分之，則使所得微分係數之值為 0 的 x 值對應於極大極小。

由微分表

$$\frac{dp}{dx} = \frac{-100}{x^2} + 3 = 0 \quad \therefore x = \frac{10}{\sqrt{3}}$$

$$\frac{d^2p}{dx^2} = \frac{200}{x^2} > 0 \quad (\text{合})$$

於極小的條件)

圖為實際計算 p 與 x 之關係而表示的。

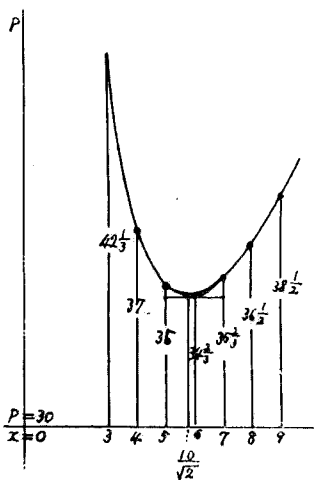
所求的為

$$x = \frac{10}{\sqrt{3}} = 5.77,$$

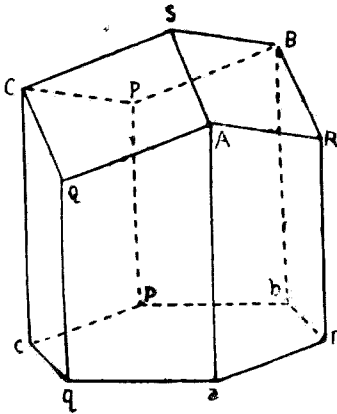
$$p = 34.6$$

將 x 之值代入 p 式，求

所要的 p 值



空間填元圖形之中正六角形邊長之和最小。蜜蜂知道這事。



蜂巢的胞成爲規矩的六面柱、一端爲正六邊形、他端爲對於軸呈同樣傾斜的全等的三個菱形互相等傾、而關閉着。側面爲不等邊四邊形。

馬拉狄 (Maraldi) 劉米 (Réaumur) 等自然

科學者於十八世紀初研究。這是爲的儘量節省表面的蠟、蜂所選的建築。是體積爲一定而面積最小的情形。瑞士的柯尼希 (Konig) 加以數學的討論。

蜘蛛由腹部後端、叫微風吹着、拉出來幾根絲、等到黏到他物上、做爲第一個基礎、漸次張網。或一邊拉絲一邊鞦韆、使絲附着於他物而做成基礎。張縱絲、疎々的作橫絲的基礎、其次將帶有黏液球的橫絲向內側張去。

橫絲雖因附着有動物而切斷、也沒有全體破壞的事。

微積分的規則

兩個函數若有同一的微分係數，則他們的相差為某常數。微分係數若為零，則其數為常數。 x 的函數(u)的常數係數(c)可取出於積分記號之外。即

$$\int c u dx = c \int u dx$$

x 的兩個函數 u, v 之和的積分，等於其積分之和。即

$$\int (u+v) dx = \int u dx + \int v dx$$

$$\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C, \quad \text{但 } n \neq -1$$

c 為任意常數。

將 x^n 積分所得者為右側，反之，若將右側微分，則得 x^n 。由上之定理

$$\begin{aligned} \int (a+bx+cx^2) dx &= \int a dx + \int b x dx + \int c x^2 dx \\ &= a \int dx + b \int x dx + c \int x^2 dx \\ &= ax + \frac{bx^2}{2} + c \frac{x^3}{3} + C \end{aligned}$$

有如次的積分表

$$\int \frac{dx}{x} = \log x + C$$

$$\int e^x dx = e^x + C$$

$$\int \sin x dx = -\cos x + C$$

$$\int \cos x dx = \sin x + C$$

$$\int a^x dx = \frac{a^x}{\log_e a} + C$$

例如欲求

$$\int \sqrt{a+bx} dx$$

時、置

$$a + bx = y$$

$$\frac{dy}{dx} = b, \quad \therefore b dx = dy$$

$$\sqrt{a+bx} dx = \frac{1}{b} y^{\frac{1}{2}} dy$$

$$\int \sqrt{a+bx} dx = \frac{1}{b} \int y^{\frac{1}{2}} dy = \frac{1}{b} \frac{y^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} + C$$

這事看本節起頭的積分就可明白。

$$\therefore \int \sqrt{a+bx} dx = \frac{2\sqrt{(a+bx)^3}}{3b} + C$$

這種求法叫做代入法。

置 $ax = y,$

$$adx = dy,$$

$$\cos ax dx = \frac{1}{a} \cos y dy$$

$$\begin{aligned} \text{則} \quad \int \cos ax \, dx &= \frac{1}{a} \int \cos y \, dy = \frac{1}{a} \sin y + C = \\ & \frac{1}{a} \sin ax + C \end{aligned}$$

還有需要巧妙工夫的事情。

欲求

$$\int \frac{dx}{a^2 - x^2}$$

時、

$$\begin{aligned} \frac{1}{a^2 - x^2} &= \frac{1}{2a} \left(\frac{1}{x+a} - \frac{1}{x-a} \right) \\ \therefore \int \frac{dx}{a^2 - x^2} &= \frac{1}{2a} \int \frac{dx}{x+a} - \frac{1}{2a} \int \frac{dx}{x-a} \\ &= \frac{1}{2a} \left\{ \log(x+a) - \log(x-a) \right\} + C \\ \therefore \int \frac{dx}{a^2 - x^2} &= \frac{1}{2a} \log_e \frac{x+a}{x-a} + C \end{aligned}$$

因為對數之差為商的對數。

$$\frac{dx^n}{dx} = nx^{n-1},$$

$$\frac{dx}{dx} = 1,$$

$$\frac{d(cx^n)}{dx} = cnx^{n-1},$$

$$\frac{dc}{dx} = 0,$$

$$\frac{d(u+v)}{dx} = \frac{du}{dx} + \frac{dv}{dx},$$

$$\frac{d(cu)}{dx} = c \frac{du}{dx},$$

$$\frac{d(uv)}{dx} = v \frac{du}{dx} + u \frac{dv}{dx},$$

$$\frac{d\left(\frac{u}{v}\right)}{dx} = \frac{v \frac{du}{dx} - u \frac{dv}{dx}}{v^2},$$

$$\frac{d\left(\frac{1}{x}\right)}{dx} = -\frac{1}{x^2},$$

$$\frac{d(\sqrt{x})}{dx} = \frac{1}{2\sqrt{x}}$$

欲求

$$\frac{d(ax+b)^n}{dx}$$

時、置

$$y = ax + b,$$

$$\frac{dy}{dx} = a$$

$$\frac{d(ax+b)^n}{dx} = \frac{dy^n}{dy} \frac{dy}{dx} = ny^{n-1}a = na(ax+b)^{n-1}$$

$$\frac{d(\sin x)}{dx} = \cos x,$$

$$\frac{d(ex)}{dx} = ex,$$

$$\frac{d(\log_e x)}{dx} = \frac{1}{x},$$

$$\frac{d(a^x)}{dx} = a^x \log_e a$$

數 學 操 典

乘法九九是印度人作的。巴洛的表記載着由一到一萬的數的平方・立方・平方根・立方根・逆數。

數學表有種々、其中如對數表一類的表是萬人所必用的。表是與圖表一併多加使用，纔有價值。不可死藏他。必須知道用他。

從來我們的教育有輕視他的傾向。這有如使每個人都各作已定的數學表。實屬缺乏效率的教育。

作為數學操典、數表・微積分表・三角法的數式表等必須常々使用。

計算就是不一々用筆算、用計算器也能得到正確無誤的答數。這樣計算用的機械有各種樣式的。加減乘除的四則能極簡單的施行。

每月的電燈費、例如一電字（啓羅瓦特）一角六分、對於電字時的數超過電燈數的部分、則按電燈的數以一角四分的比率徵收、此外徵收布線租金一燈五分、電表租

金兩角 (日本)。

於長十米的地方、每隔一米立一根柱時、需 $10+1=11$ 根柱。又第五根與第十根之間需 $10-5-1=4$ 根柱。含四月十日而到二十日、爲 $20-10+1=11$ 日。

東洋派是把數、每四位分爲一段很合適的。

周代用二進法。

時計也以二十四時式的於打電報上方便。

順 列 與 組 合

由 n 個不同的東西取出 r 個、排成一行、這事叫做順列、其數爲

$${}_n P_r = n(n-1)(n-2)\cdots(n-r+1)$$

而若 n 個全部都取出時爲

$${}_n P_n = n(n-1)(n-2)\cdots 1 = n!$$

由 n 個不同的東西取出 r 個的數爲組合。爲

$${}_n C_r = \frac{n(n-1)(n-2)\cdots(n-r+1)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots r}$$

但 $0!$ 規定爲 1。

數 的 魔 性

普林斯敦發的同盟通信、報的愛因斯坦博士發揮了他

數學者的本領而博得猛烈的喝采。看是甚麼事呢？是普林斯敦的中學高年級學生、先生出了如次的練習題「試找出來各々平方之差爲負五十六的連續奇數。」那樣的數字找不到、就去訪問愛因斯坦、他當時立即答出來那是十三與十五的正負兩方面。次日先生對於學生解答的完全吃了一驚。這樣的問題、既不是值得去問愛因斯坦也不是值得報到外國去的問題。頭腦不良的美國中學生和美國新聞記者們！

如次計算、立即可求得。

$$x^2 - (x+2)^2 = -56$$

$$\text{或 } 4x+4=56$$

$$\therefore x=13$$

$$(x+2)^2 - x^2 = -56$$

$$\text{或 } 4x+4=-56$$

$$\therefore x=-15$$

使對方想一個 1 到 12 之間任意一數、叫他回答那數在那行裏有。然後將兩行的頭數加在一起、就得出來他所想的數。

4 若是用四個、則

$$\frac{4+4+4}{4} = 3, \quad \frac{4}{4} + \frac{4}{4} = 2, \quad \frac{44}{44} = 1$$

這叫做 four fours (四四)。

以前也曾略々提過，將無理數用有理數近似的表出之事時常是必要的。

1	2	4	8
1	2	4	8
3	3	5	9
5	6	6	10
7	7	7	11
9	10	12	12
11	11		

$$\frac{\pi}{2} = \frac{2 \cdot 2 \cdot 4 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 6}{1 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 7}$$

也是有趣的形。

$$\frac{1}{7} = 0.\overline{142857} \quad \overline{142857},$$

$$\frac{2}{7} = 0.\overline{285714} \quad \overline{285714},$$

$$\frac{3}{41} = 0.\overline{07317} \quad \overline{07317},$$

這是循環小數。 $\frac{1}{17}$ ， $\frac{1}{39}$ 等也同樣。試一試看吧。調查一下是從何處開始反復。循環小數是有理數。

有一個人死掉了心愛的兒子、想要修一座方形的墓的二倍面積的正方形墓。這個和用圓規與尺三等分任意角、作與圓面積相等的正方形的作法、知名為幾何學上的三大不能問題。

若是愛財更甚於愛知識、就立刻回去吧。將銀幣交給弟子的是歐幾里德。畢達哥拉斯包裝巧妙。學於狄莫克利脫斯之門。以整數論聞名的加羅亞兩回沒有考上工藝學校。

有着數的梅非斯脫匪劣斯（惡魔）潛藏着、向人類惡作劇麼？

生 產 費

一件商品的生產費爲生產數 x 的函數。單價（Stückkosten） s 是將全價（Gesamtkosten） S 用 x 除得的。

$$s = \frac{S}{x}$$

s, S 都是 x 的函數。

S 爲材料費 ω ，工資 l ，經費 k 之和。 ω, l, k 都是 x 的函數。

現在設

$$S = \omega + l + k,$$

$$\omega = a_1 x,$$

$$l = a_2 x,$$

$$k = a + f(x), \quad a_1, a_2, a > 0$$

希爾狄夫蘭（Hildebrandt）將製造業的利益關係加以數學的及圖的論究、照着他所研究的、可表爲

$$S = a + bx$$

a 爲準備經費。

例如、對於生產量 $x=200$ ，材料費 ω 爲 25,000圓、工

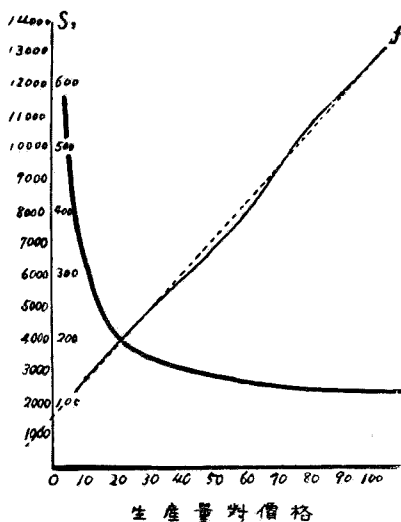
資 l 爲 20,000 圓、經費 k 爲 40,000 圓時、則

$$a_1 = \frac{\omega}{x} = \frac{25000}{200} = 125,$$

$$a_2 = \frac{l}{x} = \frac{20000}{200} = 100$$

依照希爾狄夫蘭爲

$$a = 0.8 xk$$



然則

$$a = 40000 \times 0.8 = 32000$$

$$\therefore f(200) = k - a$$

$$=40000-32000$$

$$=8000$$

若 $f=40x$, 則

$$\therefore S=32000+265x$$

$$\therefore s=\frac{32000}{x}+265$$

圖取自繆拉—柏恩哈特 (Müller-Bernhardt) 的書。

S 的實線是實際求得的、點線是數學的求得的。他一個爲對於 s 的曲線。

賣 價

商品的賣價與其需要之間有函數的關係。商品的賣價 v 若漲了、則需要量 N 自動的減少。

$$N=f(v),$$

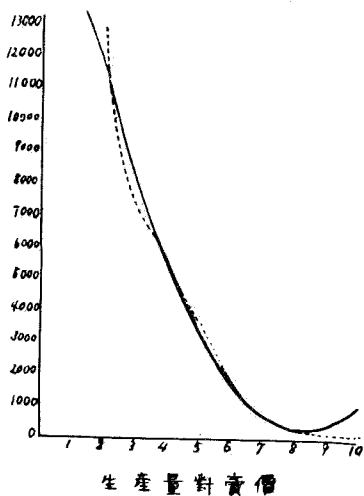
$$v=0, \quad N=\text{有限}$$

大概是這樣吧。就是商品不要代價、 N 也停止在一定的地方、即飽和。 v 若超過某界限、則 N 或成爲 0。

A·馬夏爾 (Marshall) 的彈力是

$$\frac{dN}{N} / \frac{dv}{v} = \eta \quad (\text{讀做「伊塔」}) \quad \eta \text{ 因 } \frac{dN}{dv} \text{ 爲負數、故爲}$$

負。



圖採自福特的「我的生涯·我的事業」。汽車隻數（百單位）取為縱軸、價格的圓數（百單位）取為橫軸。

最簡單的情形可表示為

$$N = -a'v + b',$$

$$a'b' > 0$$

設賣出為 U , 則

$$U = vf(v)$$

即使 v 不要代價、或某限度、則 U 也為零。

若設

$$U = -a^1v^2 + b^1v$$

則設 v 之最高值為 v_0 時、最良的賣價為 $\frac{v_0}{2}$ 。何以言之。

$$\frac{dU}{dv} = -2a^1v + b^1$$

$$= 0$$

$$\therefore v_m = \frac{b^1}{2a^1}$$

$$N = -a'v + b' = 0,$$

$$\therefore v_0 = \frac{b'}{a'},$$

$$\therefore v_m = \frac{v_0}{2}$$

利 益

商人想要儘量獲利。

$$G = U - S$$

叫做利益。

$$N = x = f(v) = -a'v + b'$$

$$G = v(-a'v + b') - (a + bx)$$

$$= v(-a'v + b') - a - b(-a'v + b')$$

若求得 $\frac{dG}{dv} = 0$

則 $v_m = \frac{v_0 + b}{2}$

以上為專賣的時候。

不是專賣而係自由競爭制度時，

取為 $U = px$

即可。

商品的輸送

在與商品的製造中心成某距離的一切販賣地點、市價是在生產費上加上運費。

設 p 為在製造中心的製品單位量的市價、以 p_e 為距中心七籽的地點單位量的市價、則

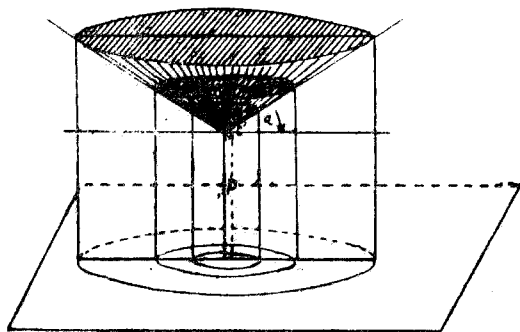
$$p_e = p + fe$$

f 為單位量單位籽的運費。但是假定運費與由製造中心的距離成比例。可以看做在大多數情形之下這是成立的。這假定實際上並不都成立。

若假定運費對為 e 為單調的增加、則

$$p_e = p + f(e)$$

p 中含有生產費 · 利益 · 常數。



將第一式於三次元圖示之、則如左圖

即由中心 c 用半徑 p 畫圓、由此圓點向圓面垂直的立高為 p 的線、則這成爲漏斗形。

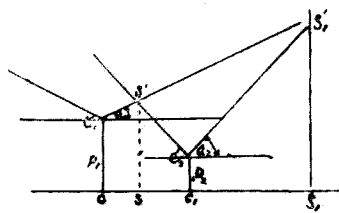
這圓錐的母線對於水平的傾斜爲

$$\tan \alpha = f$$

於 c 、高爲 p 。 c' 爲圓錐的頂點。

商品在兩個或兩個以上的地點製造時、互相競爭擴張消費的領域。

現在考究兩個製造中心點、畫方纔提過的競爭漏斗。由兩個製造中心地來到的製品爲相同價格的一切地點連結所成的曲線可以得到、這叫做競爭限界 (Konkurrenzgrenze)。這也是等價曲線 (Isostante)。是兩個漏斗曲面的交線向水平面上的投影。



如圖、得到 S_1, S_2 兩個。

若 $p_1 = p_2, f_1 = f_2$ 、則兩中心的連結的中點成爲等價點。

數學與經濟有密切的關

係。有人甚至於說數學是由於借貸問題而發展的。

獨佔與競爭、生產的均衡、生產物的分配、彈性等、

再有交換經濟上與件的變化與均衡的條件等、在經濟學徒思考的發展上、也加以數學的討論。

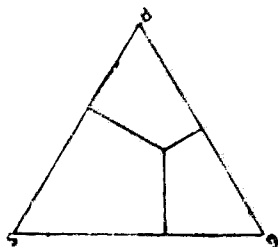
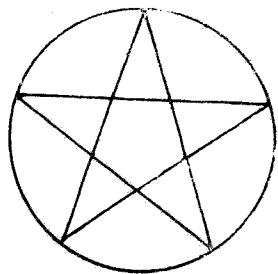
經濟現象可以用數學來討論、實在是值得驚歎的事情。

但這是立脚於將複雜純化的某假定之上、而由之論理的進行。因為假定業經單純化、所以照原樣的承受結論當然不免有時要發生危險的。

不論甚麼學問上都有假定、作為原理。數學上也有叫做公理 (axiom) 的假定。

圖 案 與 色

由二等邊三角形斜邊的中點 M 向斜邊上所立正方形的角上引長為 R 的直線。以 R 為半徑、M 為中心而畫圓、則他二邊上的正方形的對邊皆內接於此圓。



這叫做舊有調和律。在圖案上用這種關係。又名調和

三角形、調和圓。是根據於畢達哥拉斯的教義的。

正三角形的高與底之一半近於黃金比。

「盤塔格拉姆」(Pentagram) 爲五稜形，稜的各頂點在一圓周上、距離相等、每隔一點而用直線連結頂點、則歸於出發點。

在希臘·小亞細亞·北歐使用貨幣護符。考究了奇蹟神符。各部分上表現着黃金比。

將紅·黃·藍三種原色按種々の比率配合、可得一切的顏色。國際的規定是取波長爲 700.0, 546.1, 435.8 $m\mu$ (密利米克郎) 的三種光、選爲三原色。

若設三原色的感覺爲 R, G, B , 則任意色的感覺 C 可表示爲

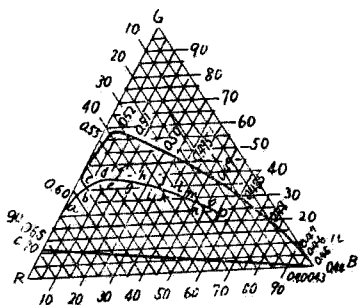
$$cC = rR + gG + bB$$

由 C 向三邊所下垂線之長的和永爲

$$r + g + b = 1$$

C 可用正三角形座標來表示。請看馬克士威爾所畫的色三角形吧。

上圖外周的曲線表示



- a:1000° b: 1400° c: 1600° d: 2000°
- e:2400° f: 2600° g: 3000° h: 3500°
- i:4000° j: 4500° k: 5000° l:6000°
- m:8000° n:10000° o:20000° p:80000°

光帶的色、數字是以 μ (米克郎) 爲單位所表示的波長。連結光帶兩端的直線表示紫色、中央曲線 $a, b, c \cdots 0, p$ 表示各溫度黑體的色。

重心 k 爲白色。通過這點的直線、其兩端上的色互爲餘色。

μ 表示一耗的千分之一、 $m\mu$ 表示 μ 的千分之一。 $m\mu$ 的十分之一叫做 $A. U.$ (昂格斯特朗單位)。是測極短的長度所用的單位。

努力吧、數理青年

被稱爲十九世紀最偉大的數學家的高斯、雖身爲窮措大、遂名震世界、他在二十三歲那年就完成了整數論。一身而兼大數學者、大物理學者、大天文學者、而雄視世界的高斯！我們總要像他那樣、就是百分之一也可、千分之一也可。

牛頓二十三、四歲發明了微積分學。海姆霍支二十五歲確立了能的保存法則、從十八歲就開始發表研究的結果。巴斯加十七歲就弄明白了氣壓與高度的關係。巴金十八歲發明了安尼林色素。馬克尼二十一、二歲就發明了無線電報。而愛因斯坦說是從十九時候起始就發見了

相對性原理。

但是他們的成功並不僅々因爲他們的天資，實在大半是由於他們異乎常人的努力！青年諸位、你們只要努力、就會得到成功的，請翻閱古今大數學家的傳記看一看吧。

誰有天生的數理腦筋麼？這也許有一點。然而若是不努力、這一點天資是無濟於事的。牛頓幼年在學校時若不因受同學欺侮而發奮、也許我們今日誰也不知道他的名字吧。

努力！努力！惟有努力纔是我們成功的大道。豈止是「幾何學無捷徑。」麼、一切的學問都是一樣。

我國所急需的就是數理的人材、趁着年青力壯的時候努力研究數理、預備將來貢獻於國家吧。

