三角公式比類

三角公式比類

三角

三角測量必以邊角相求諸法爲體宣城梅氏已詳言之自代數術興乃以代數馭三角而錯綜互變愈盡其妙且以式代圖可省圖說之繁其對角對邊及兩邊夾一角三邊求角各公式用於測量爲尤便茲將其各要式彙而輯之由淺入深迄於邊角相求各公式詳其理如下

凡度數以○別之分數以丿別之秒數以り別之皆記於右角之上

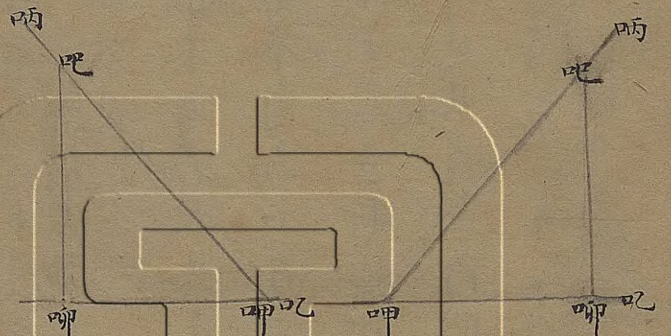
設如其角為十四度九分三十七秒十分秒之四則可作一四〇九三七四是也

無論何角若從其為界之兩條直線上任取一点自此点作線與彼線為垂線或與彼線引長之線為垂線則能成直三角形有界說王則如左

對正角之邊與對本角之邊比為$\frac{高}{斜}$是為本角之正弦

本角所依之底邊與本角所對之邊比為$\frac{高}{底}$是為本角之正切

本角所倚之底邊與對正角之邊比為$\frac{斜}{底}$是為本角之正割



如圖令呷呐線從呷叱之方位起繞呷点旋轉成叱呷呐角又在呷呐線上任吧点自此点作直線吧唧與呷叱成垂線或與呷叱引長之線成垂線則呷角之比例數能以簡式明之

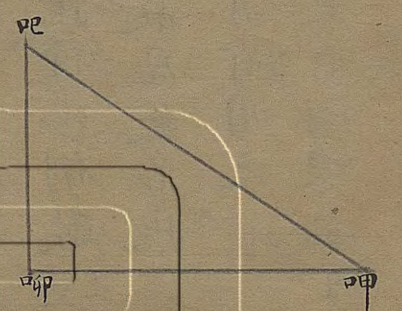
呷幅

$$正弦呷=\frac{吧唧}{呷吧}$$

$$正切呷=\frac{吧唧}{呷唧}$$

$$正割呷=\frac{呷吧}{呷唧}$$

有他角與本角相加而能成正角者則名其他角曰餘角
如本角為四十五度則餘角亦成四十五度本角為三十度則餘角為六十度本角為十二度二十分則餘角為七十七度四十分是也
惟本角若大於九十度則餘角為負
如本角為一百二十七度則餘角為負三十七度本角九十一度十五分則餘角為負一度十五分是也
可見凡直三角形之二銳角彼此互視為餘角
餘角之正弦正切正割即本角之餘弦餘切餘割



得

餘弦呷＝正弦呷吧唎＝$\frac{\text{呷吧}}{\text{呷唎}}$＝$\frac{\text{斜}}{\text{底}}$

餘切呷＝正切呷吧唎＝$\frac{\text{吧唎}}{\text{呷吧}}$＝$\frac{\text{高}}{\text{斜}}$

依上各例得

餘弦呷＝正弦(九°丅呷)

餘切呷＝正切(九°丅呷)

餘割呷＝正割(九°丅呷)

依前例得

餘弦(九°丄呷)＝正弦(丅呷)

餘切(九°丄呷)＝正切(丅呷)

餘割(九°丄呷)＝正割(丅呷)

又從呷幅之例

由此可知凡本角之餘弦餘切餘割即為其正割正切正弦之倒數

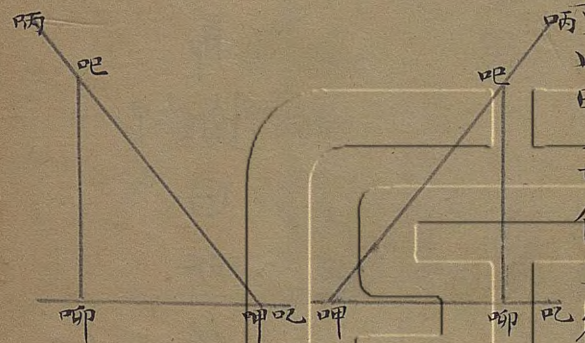
因 $\frac{呷正割}{一} = 呷餘弦$　$\frac{呷正切}{一} = 呷餘切$　$\frac{呷正弦}{一} = 呷餘割$　故也二之倒數式係從正餘弦切割各線與半徑所成各同式直角三角形比例而得

此種比例數即弦切割三六惟正弦餘弦正切為三角法中用之最廣故名此三線為第一類比例數其餘三線為次類比例數亦有用之

更有兩線亦可用以定角之大小即正矢餘矢是也

其呷正矢　呷餘矢可用以明一丅呷餘弦　一丄呷餘弦兩式

茲欲以任何角之正弦明其餘弦之式且欲以任何角之餘弦明其正明其餘又欲以任何角之正弦餘弦明其切線割線之各式



如圖呷吧叩為直三角形其 $呷吧 = 呷叩丄吧叩$ 故 $一 = \left(\frac{呷吧}{呷叩}\right)^{二} 丄 \left(\frac{呷吧}{吧叩}\right)^{二}$

即 $正弦^{二}呷 \perp 餘弦呷 = 一$ ㊀

所以知

$餘弦呷 = \pm\sqrt{一\top正弦呷}$

$正弦呷 = \pm\sqrt{一\top餘弦呷}$

其正弦餘弦為正負之故俟

後再解依同理得

$正切呷 = \frac{\frac{呷吧}{呷叩}}{\frac{呷吧}{吧叩}} = \frac{餘弦呷}{正弦呷}$

㊁ 準前倒數例得

$正割呷 = \frac{餘弦呷}{一}$

㊂

若本角之正弦餘弦已知則可用前㊂至㊄各式而求其正切正割之數

$餘切呷 = \frac{正切呷}{一} = \frac{正弦呷}{餘弦呷}$

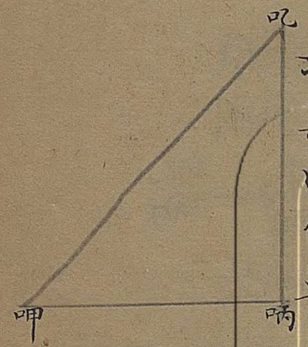
㊃

$餘割呷 = \frac{正弦呷}{一}$

㊄

(叱)幅

一題 求其比例數

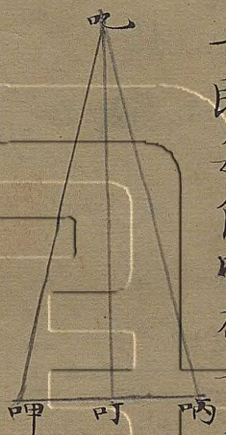


設有呷叱呐三角形呐為正角其呷角為四十五度欲

此為兩等邊直三角形其銳角之和為等於正角而呷叱二角又各等於半箇正角

二題

設有呷𠮙𠰳等邊三角形各角皆等於三分兩正角之一即每角皆為六十度求其比例之數



任從何角作線與對邊為垂線則𠮙叮平分呷𠰳邊故有比例

惟因 $呷叮=\frac{二}{呷𠮙}$

而 $正弦呷𠮙叮=\frac{呷𠮙}{呷叮}$

則 $正弦呷𠮙叮=\frac{呷𠮙}{呷叮}=\frac{呷𠮙}{\frac{二}{呷𠮙}}=\frac{二}{一}$

故 $正弦三〇°=餘弦六〇°=\frac{二}{一}$

準乙幅之理得

$餘弦三〇°=\sqrt{一丅正弦^{二}三〇°}=\sqrt{一丅\frac{四}{一}}=\frac{\sqrt{四}}{\sqrt{三}}=\frac{二}{\sqrt{三}}$

惟因 $呷𠰳=𠮙𠰳$

故 $呷𠮙^{二}=呷𠰳^{二}\perp𠮙𠰳^{二}=二𠮙𠰳^{二}$

即 $呷𠮙=\sqrt{二𠮙𠰳^{二}}=\sqrt{二}\sqrt{𠮙𠰳^{二}}=\sqrt{二}\,𠮙𠰳$

所以得

$正弦四五°=\frac{呷𠮙}{𠮙𠰳}=\frac{\sqrt{二}}{一}=\frac{\sqrt{二}\sqrt{二}}{\sqrt{二}}=\frac{二}{\sqrt{二}}$

$餘弦四五°=正弦(九〇°丅四五°)=正弦四五°=\frac{二}{\sqrt{二}}$

$正切四五°=\frac{餘弦四五°}{正弦四五°}=\frac{\frac{二}{\sqrt{二}}}{\frac{二}{\sqrt{二}}}=一$

$餘切四五°=正切(九〇°丅四五°)=正切四五°=一$

$正割四五°=\frac{餘弦四五°}{一}=\frac{\frac{二}{\sqrt{二}}}{一}=\frac{\sqrt{二}}{二}=\frac{\sqrt{二}\sqrt{二}}{二\sqrt{二}}=\frac{一}{\sqrt{二}}$

$餘割四五°=正割(九〇°丅四五°)=正割四五°=\sqrt{二}$

故

$餘弦三○=正弦六○=\frac{二}{\sqrt{三}}$

又因

$正切三○=\frac{餘弦三○}{正弦三○}=\frac{\frac{二}{\sqrt{三}}}{\frac{二}{一}}=\frac{\sqrt{三}}{一}=\frac{\sqrt{三}\sqrt{三}}{一\sqrt{三}}=\frac{三}{\sqrt{三}}$

故

$正切三○=餘切六○=\frac{三}{\sqrt{三}}$

又因

$餘切三○=\frac{正弦三○}{餘弦三○}=\frac{二}{\frac{二}{\sqrt{三}}}=\sqrt{三}$

故

$餘切三○=正切六○=\sqrt{三}$

又因

$正割三○=\frac{餘弦三○}{一}=\frac{\frac{二}{\sqrt{三}}}{一}=\frac{\sqrt{三}}{二}=\frac{\sqrt{三}\sqrt{三}}{二\sqrt{三}}=\frac{三}{二\sqrt{三}}$

故

$正割三○=餘割六○=\frac{三}{二\sqrt{三}}$

又因

$餘割三○=\frac{正弦三○}{一}=\frac{\frac{二}{一}}{一}=\frac{二}{一}=二$

故

$餘割三○=正割六○=二$

前所得乙幅五箇公式為各比例數相求之本凡有祇論一角之比例數皆能從五式得之茲擇其變式之如下

準乙幅三式

$正切呷=\frac{餘弦呷}{正弦呷}$

兩邊各自乘得

$正切^{二}呷=\frac{餘弦^{二}呷}{正弦^{二}呷}$

兩邊以一加之得

$一\perp正切^{二}呷=一\perp\frac{餘弦^{二}呷}{正弦^{二}呷}=\frac{餘弦^{二}呷}{正弦^{二}呷\perp餘弦^{二}呷}$

惟因

$正弦^{二}呷\perp餘弦^{二}呷=一$

則

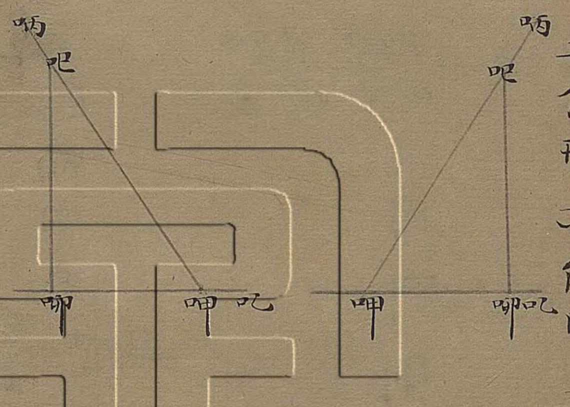
$\frac{餘弦^{二}呷}{正弦^{二}呷\perp餘弦^{二}呷}=\frac{餘弦^{二}呷}{一}=正割^{二}呷$

所以知

$一\perp正切^{二}呷=正割^{二}呷$

其條段之理觀呷吧唎

三角形亦能明之



$\frac{呷㖶}{呷吧} = 正割呷$

$\frac{呷㖶}{㖶吧} = 正切呷$

因 $呷吧^{二} = 呷㖶^{二} \perp 㖶吧^{二}$

則 $\frac{呷㖶^{二}}{呷吧^{二}} = \frac{呷㖶^{二}}{呷㖶^{二} \perp 㖶吧^{二}}$

即 $\frac{呷㖶^{二}}{呷吧^{二}} = 一 \perp \frac{呷㖶^{二}}{㖶吧^{二}}$

即 $\left(\frac{呷㖶}{呷吧}\right)^{二} = 一 \perp \left(\frac{呷㖶}{㖶吧}\right)$

所以 $正割呷^{二} = 一 \perp 正切呷$

惟

若以九°丅呷代其呷則得 $\left(\frac{吧㖶}{呷吧}\right)^{二} = 一 \perp \left(\frac{吧㖶}{呷㖶}\right)$

即 $餘割呷^{二} = 一 \perp 餘切呷$

總論之任何等角其六種比例數即正弦正切正割餘弦餘切餘割是也有任一種爲已知之數則從前𠮙幅中五箇根本之式必能求得其他五種比例數惟須解開一二次式即可得之

假如某角已知其正切之數正其正弦餘弦則必將

$正弦呷^{二} \perp 餘弦呷 = 一$ (一)

$$\text{正切呷} = \frac{\text{餘弦呷}}{\text{正弦呷}}$$

㈢從㈡式得

$$\text{正弦呷} = \text{正切呷餘弦呷}$$

則

$$\text{正弦}^{二}\text{呷} = \text{正切呷餘弦呷}$$

乃將正弦^{二}呷之同數代入一式中得

$$\text{餘弦}^{二}\text{呷正切呷丄餘弦呷} = 一$$

即

$$\text{餘弦}^{二}\text{呷}(一丄\text{正切呷}) = 一$$

故得

$$\text{餘弦呷} = \frac{一丄\text{正切呷}}{一}$$

開平方得

$$\text{餘弦呷} = \pm\sqrt{\frac{一丄\text{正切呷}}{一}}$$

即

$$\text{餘弦呷} = \pm\frac{\sqrt{一丄\text{正切呷}}}{一}$$

㈢凡

正切乘餘弦必等於正弦故得

$$\text{正弦呷} = \text{正切呷餘弦呷} = \text{正切呷}\pm\frac{\sqrt{一丄\text{正切呷}}}{一}$$

即

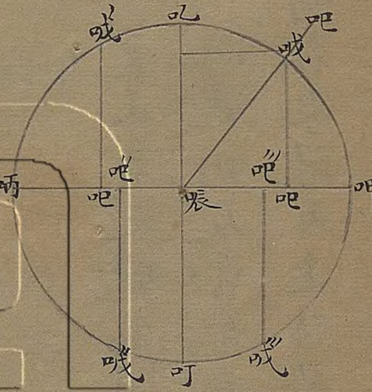
$$\text{正弦呷} = \pm\frac{\sqrt{一丄\text{正切呷}}}{\text{正切呷}}$$

㈣此㈢㈣兩式

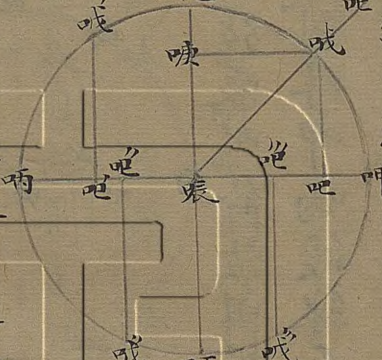
中正負之號並用之意因有兩箇正弦兩箇餘弦其數相等

兩號相反皆能與已知之正切故也故也

申明各象限內正弦餘弦正弦餘弦遞變之理



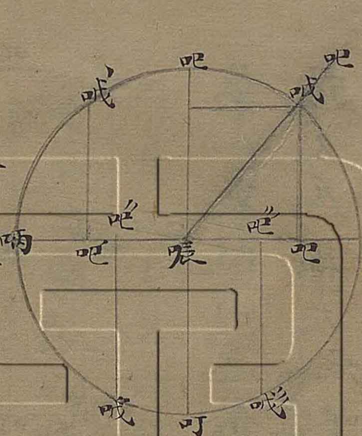
如呷哦弧因喉哦半徑漸離喉呷之位而向吃呐叮行則其漸變大而哦吧正弦本等於〇者亦漸變大至弧變為象限以後則哦吧正正弦漸變小至弧增至半周而正弦又變為〇若其再增大則正弦哦吧又能再生惟其向方必與第一象限內哦吧相反如是則正弦漸長至變第三象限以後又漸變小及弧滿四象限之時正弦仍為〇若其喉哦半徑再行第二轉成呷吃呐叮呷哦弧比全周更大則又成正弦哦吧其餘各象限內此類推總之無論繞至幾周其在各象限內所成之正弦均與第一周相同



凡弧之餘弦其方向及變大變小之法亦可與正弦同理推之其呷哦弧自〇增至第一象限之時其餘弦喉吧本等於半徑者漸變小至不見若其弧再增至第二象限內之任弧呷吃哦則又成餘弦喉吧而方向必與第一象限內之餘弦相反所以其弧增至滿二象限時其餘弦又為極大如喉呐等於喉呷是也惟方向必與前相反若其弧再增至呷呐哦則餘弦之漸小如喉吧至弧大至呷吃呐叮為三箇象限則餘弦再變〇其第四象限內餘弦喉吧復生而仍與第一象限內之方位同至一周圓滿之時而餘弦喉呷如

再行第二匝其理仍同

設將哦哏半徑繞哏而旋與前相反自呷而叮而㖕而吧逆行其所成之弧呷哦″其餘弦之方向及變大變小之法亦必一例



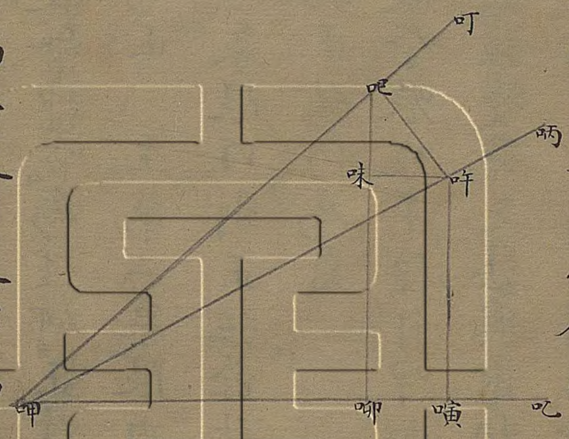
依代數幾何之理呷哦弧呷哦″弧其哦吧正弦哦″吧正弦之方向與呷哦″弧呷哦″弧之哦″吧″正弦及哦″吧″正弦之方向相反此可以丄丅二號記之其哏吧″餘弦哏吧″餘弦與哏吧″餘弦之方向亦然

識别得呷㖕經線兩邊卽上下之弧其正弦之正負皆相反而吧叮經線兩邊之餘弦亦必正負相反如呷哦弧為正則在第一象限內之正餘弦不論以為正以為負俱可至變小為○而復生之後其方向必與前相反故其正負之號必變

設命呷哦為任何正號之弧則其正弦餘弦在第一象限內皆為正　至第二象限內其正弦仍為正而餘弦變為負　至第三象限內則正弦餘弦皆為負　至第四象限內其餘弦變為而正弦仍為負

設令哏哦半徑自呷向叮㖕而旋則所成之弧為負而觀其正餘弦變號之法與前相比則見正弦在下半箇平圓中皆為負號至上半箇平圓內皆為正號其餘弦在右邊半圓內皆為正號而至左半箇平圓內皆為負號莫不一例

求任兩角和較所成之角
以兩角之正弦餘弦明和角之正弦餘弦



如圖令叱呷㖸角為呷令㖸呷叮角為叱則叱呷叮角等於呷叱兩角之和於呷叮線內任取吧点作吧⿰口卯與呷叱為垂線作吧吘與呷㖸為為線又作吘味吘⿰口寅與呷叱一為平行一為垂線則味⿰口寅為矩形而吘吧味角為吧吘味之餘角所以必等味吘呷角即等於呷角

因 吘吧味丄吧吘味＝吧吘味丄味吘呷＝九〇 甲

味吘呷丄呷吘⿰口寅＝呷吘⿰口寅丄吘呷⿰口寅＝九〇 乙

所以甲式同減去吧吘味角則得

味吘呷＝吘吧味

乙式內同減去呷吘⿰口寅角則得

味吘呷＝吘呷⿰口寅＝呷

所以

吘吧味＝味吘呷＝呷

既知

吘吧味＝呷

則易求和角正弦餘弦矣

惟因 正弦(呷⊥乙) = 呷吧/吧啣 = 呷吧/(啣味⊥味吧) = 呷吘嗔/呷吧 ⊥ 吧味/呷吧 ㊁

若將 呷吧/吘嗔 變為 (呷吘 X 呷吧)/(呷吘 X 吘嗔) 又將 呷吧/吧味 變為 (吧吘 X 呷吧)/(吧吘 X 吧味) 則㊁式變為

正弦(呷⊥乙) = 呷吘/吘嗔 X 呷吧/呷吘 ⊥ 吧吘/吧味 X 呷吧/吧吘 ㊂

惟

呷吘/吘嗔 = 正弦呷

呷吧/呷吘 = 餘弦乙

呷吧/吧吘 = 正弦乙

準

同式句股例 吧吘/㖹 = 呷吘/呷嗔 = 餘弦呷 以此四同數代入㊂式得

正弦(呷⊥乙) = 正弦呷 X 餘弦乙 ⊥ 餘弦呷 X 正弦乙 ㊀式

因 餘弦(呷⊥乙) = 呷吧/呷啣 = 呷吧/(呷嗔⊤嗔啣) = 呷吧/呷嗔 ⊤ 呷吧/嗔啣 ㊃

若將 呷吧/呷嗔 變為 (呷吘 X 呷吧)/(呷吘 X 呷嗔) 又將 呷吧/嗔啣 變為 (吧吘 X 呷吧)/(吧吘 X 吘味)

則(丁)式變為

餘弦(呷丄吃)$=\frac{呷吽}{呷嗩}\times\frac{呷吧}{呷吽}$丅$\frac{吧吽}{吽吽}\times\frac{呷吧}{吧吽}$ (戊)

惟

$\frac{呷吽}{呷嗩}$=餘弦呷

$\frac{呷吧}{呷吽}$=餘弦吃

$\frac{呷吧}{吧吽}$=正弦吃

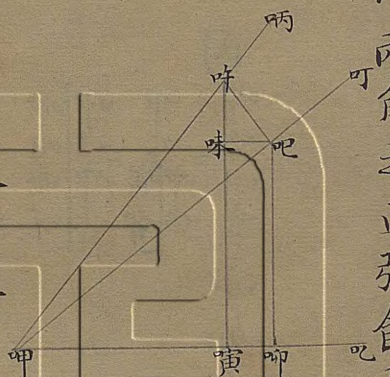
準同式句股例

$\frac{吧吽}{吽味}$=正弦呷

以此四同數代入(戊)式得

餘弦(呷丄吃)=餘弦呷餘弦吃丅正弦呷正弦吃 (二)式

以兩角之正弦餘弦明較角之正弦餘弦



如圖令吃呷呥角為呷令呥呷叮角為吃則吃呷叮角等於呷吃兩角之較於呷叮線內任取吧点作吧咖為呷吃之垂線又作吽嗩吧味為呷吃之垂線及平行線則味咖為矩形而吧吽味為呷吽嗩之餘角所以必等於吽呷嗩角即等於呷角

因

吧吽味丄呷吽嗩=九〇=呷吽吧

而

吽呷嗩丄呷吽嗩=九〇=呷嗩吽

故

吽呷嗩丄呷吽嗩=吧吽味丄呷吽嗩

兩邊各減去呷吽嗩所以得

吽呷嗩=吧吽味

即

吧吽味=呷

惟因 正弦(呷丅吚)＝呷吚/吚呷＝呷吚/吘嗔丅吘味＝呷吚吘味丅呷吚吘嗔

如前法化之得

正弦(呷丅吚)＝呷吘/吘嗔 乂 呷吚/呷吘 丅 呷吚/吘味 乂 呷吘/吚吧

＝正弦呷餘弦吚丅餘弦呷正弦吚

(三)式

因 餘弦(呷丅吚)＝呷吚/呷卯＝呷吚/呷嗔＝呷吚/卯嗔＝呷吚/卯嗔丄呷吚味

亦如前法化之得

餘弦(呷丅吚)＝呷吘/呷嗔 乂 呷吚/呷吘 丄 吚吘/吚味 乂 呷吚/吚吘

＝餘弦呷餘弦吚丄正弦呷正弦吚

(四)式

如前(一)(二)(三)(四)四式和角較角之正餘弦能變為多式便於用

將兩式相加減得

二正弦呷餘弦吚＝正弦(呷丄吚)丄正弦(呷丅吚)

(一)

二餘弦呷正弦吚＝正弦(呷丄吚)丅正弦(呷丅吚)

(二)

二餘弦呷餘弦吚＝餘弦(呷丅吚)丄餘弦(呷丄吚)

(三)

二正弦呷正弦吚＝餘弦(呷丅吚)丅餘弦(呷丄吚)

(四)

(四)(丙)幅從此

能得兩角之正弦與兩角之餘弦相乘之積或兩正弦或兩餘弦相乘之積亦能得和角較角之正弦餘弦相和相較之式也

如以呷代(丙)幅中之呷丄吚以吚代其呷丅吚則可以二(呷丄吚)代其呷以

代其乙以此四箇同數代入丙幅㈠㈡㈢㈣式內則得

$$\text{正弦甲丄正弦乙}=\text{二正弦½(甲丄乙)餘弦½(甲丅乙)}$$ ㈠

$$\text{正弦甲丅正弦乙}=\text{二餘弦½(甲丄乙)正弦½(甲丅乙)}$$ ㈡

$$\text{餘弦甲丄餘弦乙}=\text{二餘弦½(甲丄乙)餘弦½(甲丅乙)}$$ ㈢

$$\text{餘弦甲丅餘弦乙}=\text{二正弦½(甲丄乙)正弦½(甲丅乙)}$$ ㈣

丁幅則能得任兩角之正弦餘弦之同數

若將丁幅四式以約法即除法除變之又以約法及

$$\frac{\text{餘弦}}{\text{正弦}}=\text{正切}=\frac{\text{餘切}}{\text{一}}$$

$$\frac{\text{正弦}}{\text{餘弦}}=\text{餘切}=\frac{\text{正切}}{\text{一}}$$

之理變之即得

$$\frac{\text{正弦甲丅正弦乙}}{\text{正弦甲丄正弦乙}}=\frac{\text{餘弦½(甲丄乙)正弦½(甲丅乙)}}{\text{正弦½(甲丄乙)餘弦½(甲丅乙)}}=\text{正切½(甲丄乙)餘切½(甲丅乙)}=\text{正切½(甲丄乙)}\frac{\text{正切½(甲丅乙)}}{\text{一}}$$

$$=\frac{\text{正切½(甲丅乙)}}{\text{正切½(甲丄乙)}}$$ ㈠

$$\frac{\text{餘弦甲丄餘弦乙}}{\text{正弦甲丄正弦乙}}=\text{正切½(甲丄乙)}$$ ㈡

$$\frac{\text{餘弦甲丄餘弦乙}}{\text{正弦甲丅正弦乙}}=\text{正切½(甲丄乙)}$$ ㈢

$$\frac{\text{餘弦甲丅餘弦乙}}{\text{正弦甲丄正弦乙}}=\text{餘切½(甲丅乙)}$$ ㈣

$$\frac{\text{餘弦呷丅餘弦叱}}{\text{正弦呷丅正弦叱}}＝\text{餘切三(呷丄叱)}$$ ㈤

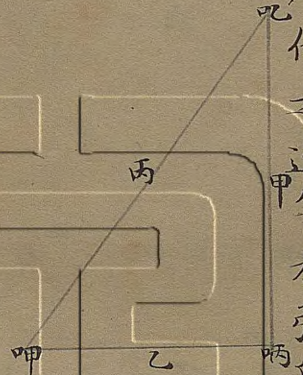
$$\frac{\text{餘弦呷丅餘弦叱}}{\text{餘弦呷丅餘弦叱}}＝\text{正切三(呷丄叱)正切三(呷丅叱)}$$ ㈥

幅此六式用處甚廣即如㈠式可見兩角正弦較與正弦和之比等於較角正切與和角正切之比尤為有用

以後所論邊角恆用呷叱哂代其角用甲乙丙代其對角之邊

若直三角形則恆以哂代正角而哂代其弦邊

凡直三角形對銳角之邊等於弦與本角正弦相乘之數　銳角所倚之邊等於弦與本角餘弦相乘之數



如圖呷叱哂為直三角形哂為正角呷為銳角之一其又一角為叱銳甲為其所對之邊乙為其所倚之邊

惟因 $\frac{丙}{甲}$＝正弦呷　$\frac{丙}{乙}$＝餘弦呷

所以 甲＝丙正弦呷　乙＝丙餘弦呷

凡直三角形銳角所對之邊等於所倚之邊與本角正切相乘之數　銳角所倚之邊等於本角餘切與對邊相乘之數

惟因

正切呷＝$\frac{\text{乙}}{\text{甲}}$

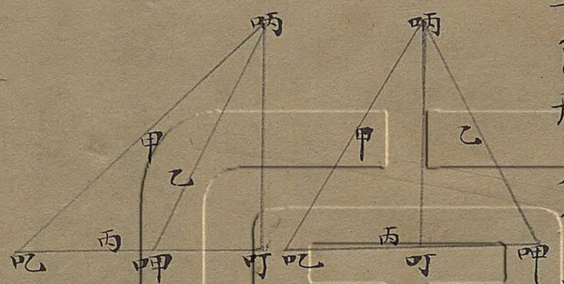
餘切呷＝$\frac{\text{甲}}{\text{乙}}$

所以

甲＝乙正切呷

乙＝甲餘切呷

凡三角形各角正弦相比如其對邊相比



如圖呷吃哂為任何三角形呷吃為其任兩角因呷吃二角內至少必有一角為鋭則令吃角恆為鋭乃從哂点作哂叮線與吃呷為垂線或與吃呷引長之線為垂線因其呷角或為鋭或為鈍而異

垂線若在三角形之內則從分得之兩箇直三角形呷哂叮與吃哂叮得

呷叮＝乙餘弦呷

吃叮＝甲餘弦吃

惟因

呷吃＝吃叮丄呷叮

所以

丙＝甲餘弦吃丄乙餘弦呷

垂線若在三角形之外因哂呷叮角為哂呷吃之外角則從其補出之哂呷叮直三角形得

呷叮＝乙餘弦哂呷叮

＝丅乙餘弦哂呷吃

＝丅乙餘弦呷

又從其補成之吃哂叮直三角形得

吃叮＝甲餘弦吃

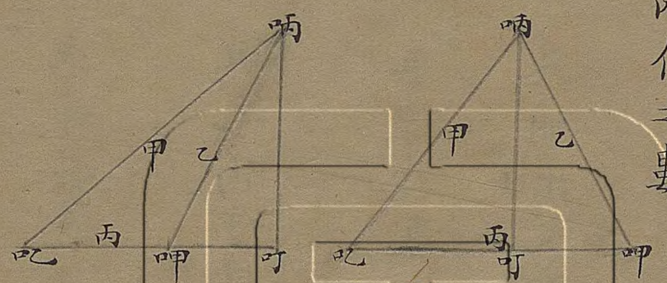
惟因

吃呷＝吃叮丅呷叮

所以得

丙＝甲餘弦吃丄乙餘弦呷

凡三角形任取一邊為本邊其所對之角為本角則本邊之平方恆等於餘兩邊平方之和數內減去本角餘弦與餘兩邊連乘積兩倍之數



如圖呷叱呥為任何三角形因其呷叱兩角至少必有一為銳角今其銳角為叱從呥点作呥叮線與叱呷為垂線或與叱呷引長之線為垂線因呷角之為銳為鈍故其垂線或在三角形之内或在三角形之外

若呷角為銳則依幾何原本十三卷第十三題得

$$\text{叱呥}^{2} = \text{呷呥}^{2} + \text{呷叱}^{2} - 2\,\text{呷叱} \times \text{呷叮}$$

即

$$\text{甲}^{2} = \text{乙}^{2} + \text{丙}^{2} - 2\,\text{丙} \times \text{呷叮}$$

又從呷叮呥直三角形得

$$\text{呷叮} = \text{乙}\,\text{餘弦呷}$$

所以

$$\text{甲}^{2} = \text{乙}^{2} + \text{丙}^{2} - 2\,\text{乙丙}\,\text{餘弦呷}$$

若呷為鈍角則依幾何原本十二卷第十二題得

吃呐^{二} ＝ 呷呐^{二} 丄 呷吃^{二} 丄 二呷吃乂呷叮

即

甲^{二} ＝ 乙^{二} 丄 丙^{二} 丄 二丙乂呷叮

又從呐呷叮直三角形得

呷叮 ＝ 乙餘弦呐呷叮

＝ 丅乙餘弦呐呷叮

＝ 丅乙餘弦呷

此因呐呷叮為呐呷吃之外角故也所以亦得

甲^{二} ＝ 乙^{二} 丄 丙^{二} 丅 二乙丙餘弦呷

上式若不藉幾何原本之例從邊角相比所得之各式亦易得之因已知

丙 ＝ 甲餘弦吃 丄 乙餘弦呷

○ ＝ 甲正弦吃 丅 乙正弦呷

若以此兩式之平方相加即可從四幅之

列得

丙^{二}＝甲^{二}丄乙^{二}丄二甲乙（餘弦呷餘弦吔丅正弦呷正弦吔）

惟因

呷丄吔丄㖨＝一八〇°

則

餘弦呷餘弦吔丅正弦呷正弦吔＝餘弦（呷丄吔）

＝丅餘弦㖨

所以

丙^{二}＝甲^{二}丄乙^{二}丅二甲乙餘弦㖨

㔾幅

然則無論㖨角之為銳為鈍必得

餘弦㖨＝$\frac{二甲乙}{甲^{二}丄乙^{二}丅丙^{二}}$

所以有例如下

凡三角形任取一角為本角則夾本角之邊兩平方之和以對本角之邊之平方減之又以夾本角之兩邊相乘減之二倍約之必得本角之餘弦

所得㖨角餘弦其數恆在一與負一之間若㖨角為〇則

甲＝乙

而

餘弦㖨＝一

其餘弦之數為最大若

丙＝甲丄乙

則

餘弦㖨＝丅一

其餘弦為負數之最大

凡三角形共有六事若其已知之三事中非三者俱為角而其數為能成三角形之數則其餘三事即可求得

茲且論所知之三事非俱為角而其數為不能成三角形之數共有三種

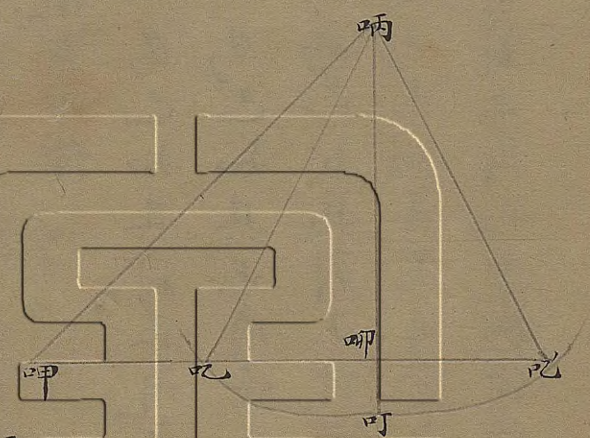
一為所知之兩角其和大於一百八十度則不能成三角形

二為所知之三邊中有一邊不小於他兩邊之和者亦不能成三角形

三為有兩邊又有其兩邊内任一邊所對之角而此角之正弦與角旁之邊相乘大於其所對之邊者亦不能成三角形

以上三種内其第一第二種不能成三角形之故易從幾何原本之理知之

其第三種不能三角形之故特解之如下



如圖於呷吃無定長之直線内任取一点如呷作吃呷呐角等於所設之角又作呷呐等於其角旁之一邊作呐唧為呷吃之垂線則呐唧線之長必等呷呐正弦呷所以不可大於其又一邊呐吃或呐吃否則以呐為心以呐吃＝呐吃＝呐可為半徑所成之平圓不與呷吃線相遇而不能成三角形所以呷呐正弦呷不可大於呐吃或呐吃

凡三角形若但知其三角則不能定其各邊之數若干惟亦能定

其各邊彼此相比之率

解直三角形邊角相求之法

凡解直三角形其正角恆為已知之一事此外只須知其兩事即可求其餘三事　惟所知之兩事中至少必有一為邊所以其題祇有四種

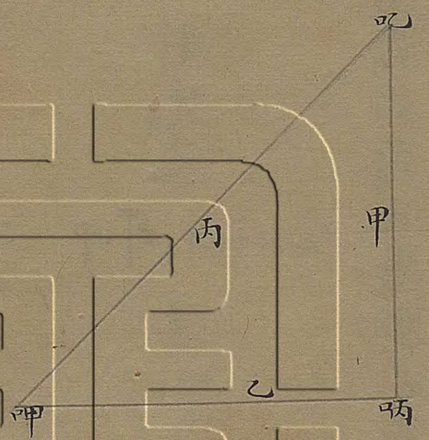
一為已知其對正角之邊與任一銳角

一為已知其正角旁之任一邊與任一銳角

三為已知其對正角之邊與正角旁之任一邊

四為已知其正角旁之兩邊

有對正角之邊與任一銳角求其餘三事



如圖呷吃呧為直三角形已知其弦丙又知其呷角欲求其吃角與甲乙兩邊之數

則先從

吃＝九〇－呷

得吃角　又因

$\frac{甲}{丙}$＝正弦呷

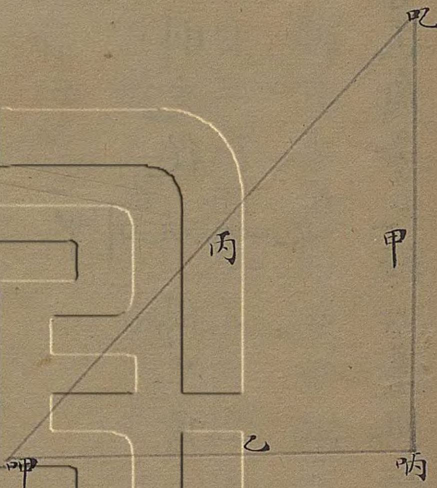
$\frac{乙}{丙}$＝餘弦呷

所以

甲＝丙正弦呷

乙＝丙餘弦呷

有正角旁之任一邊與任一銳角求其餘三事



如圖呷吇呐直三角形已知其正角旁之甲邊又知其對角呷欲求其他角吇他邊乙與丙

則先從

$吇 = 九〇 - 呷$

得吇角

又因

$\frac{丙}{甲} = 正弦呷$

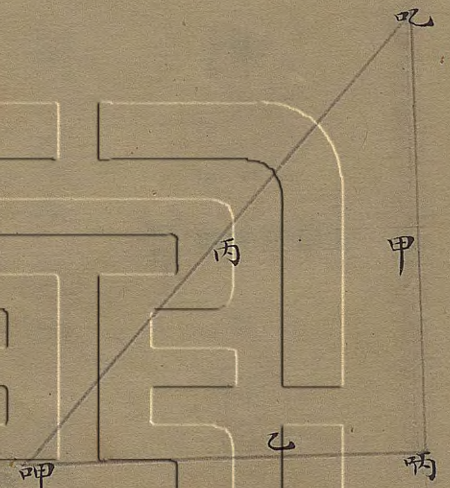
$\frac{乙}{甲} = 正切呷$

所以

$丙 = \frac{正弦呷}{甲}$

$乙 = 甲以\frac{正切呷}{一} = 甲餘弦呷$

有對正角之邊與正角旁之任一邊求其餘三事



如圖呷吇呐直三角形已知其弦丙又知其正角旁之甲邊欲求其他邊乙他兩角呷與吇

則先從

$正弦呷 = \frac{丙}{甲}$

而得呷角則

$吇 = 九〇 - 呷$

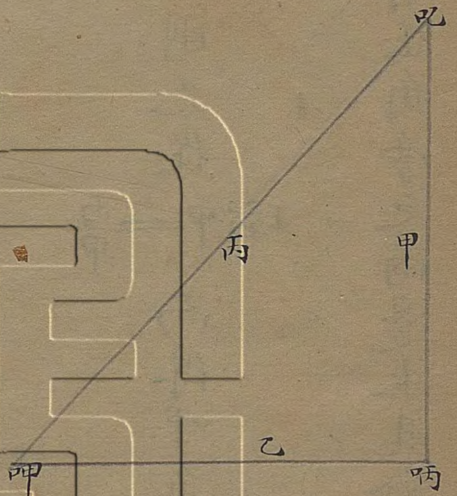
又因

$\frac{丙}{乙} = 餘弦呷$

所以

$乙 = 丙餘弦呷$

有正角旁之兩邊求其餘三事



如圖呷吃呐直三角形已知其正角旁之甲乙兩邊欲求其他邊丙他兩角呷與吃

則先從 正切呷＝$\frac{乙}{甲}$ 而得呷角則 吃＝九〇丅呷

又因 $\frac{丙}{甲}$＝正弦呷 所以 丙＝甲乂$\frac{正弦呷}{一}$＝甲餘割呷

又法從 丙＝$\sqrt{甲丄乙}$ 而先得丙邊又從 $\frac{乙}{甲}$＝正切呷 則 吃＝九〇丅呷

解一角為鈍或三角俱為銳之三角形

因三角形之六事中必有三事已知而其所知之三事中至少必有為邊所以此種三角形其題亦祇有四種

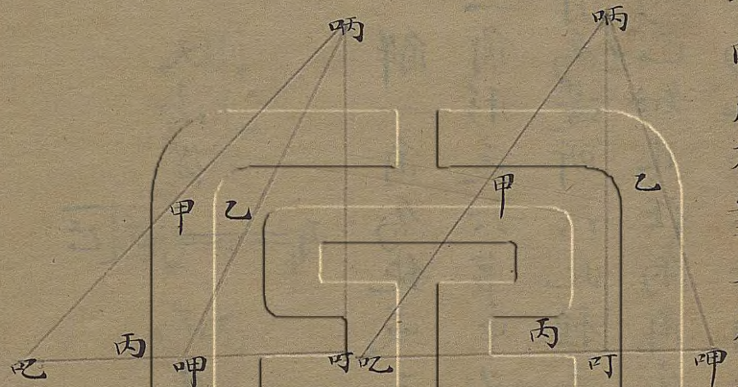
一為已知其任兩角及對所知任一角之邊

二為已知其任兩邊及對所知任一邊之角

三為已知其任兩邊及兩邊所夾之角

四為已知其三邊

有兩角及對其所知任一角之邊求其餘之一角兩邊



如圖呷吃呐為任何三角形已知其呷角及甲邊又知其吃呐二角之任一角欲求其他角及乙丙兩邊

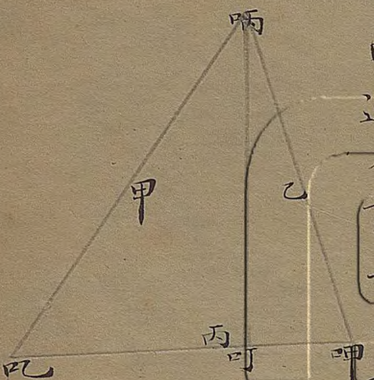
將已知之兩角相加以減一百八十度即得其又一角

從 $\frac{\text{正弦呷}}{\text{正弦吃}}=\frac{\text{甲}}{\text{乙}}$ $\frac{\text{正弦呷}}{\text{正弦呐}}=\frac{\text{甲}}{\text{丙}}$

則 $\frac{\text{正弦呷}}{\text{正弦吃}}\text{甲}=\text{乙}$ $\frac{\text{正弦呷}}{\text{正弦呐}}\text{甲}=\text{丙}$ 得其乙與丙兩邊

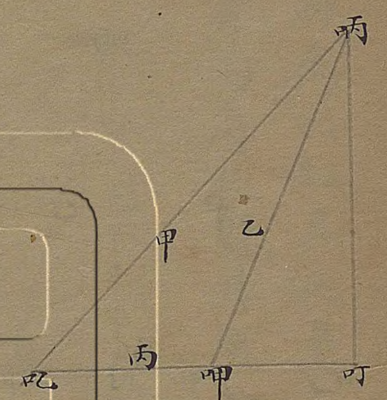
此條為有對角求對邊之公式

有兩邊及對其所知任一邊之角求其餘之一邊兩角



如圖呷吃呐為任何三角形已知其甲乙

兩邊又知其呷角欲求𠮙⿰口丙二角及丙邊



先求𠮙角準

$\frac{正弦呷}{正弦𠮙}=\frac{甲}{乙}$

得

$正弦𠮙=\frac{甲}{乙}正弦呷$

乃得

$⿰口丙=一八〇丅(呷丄𠮙)$

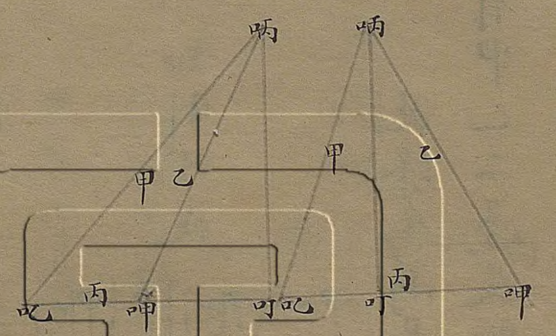
則

$丙=甲\frac{正弦呷}{正弦⿰口丙}$

此條為有對邊求對角之公式

有三角形之任兩邊及以此兩邊為界所成之角求其對所知兩邊之角及對所知角之邊

如圖呷𠮙⿰口丙為任何三角形已知其甲乙兩邊及所夾之角⿰口丙欲求其𠮙呷二角及丙邊



從

$\frac{乙}{甲}=\frac{正弦𠮙}{正弦呷}$

得

$\frac{乙}{甲丄乙}=\frac{正弦𠮙}{正弦呷丄正弦𠮙}$

得

$\frac{乙}{甲丅乙}=\frac{正弦𠮙}{正弦呷丅正弦𠮙}$

所以

$\frac{甲丅乙}{甲丄乙}=\frac{正弦呷丅正弦𠮙}{正弦呷丄正弦𠮙}$

準戊幅一式

$\frac{正弦呷丅正弦𠮙}{正弦呷丄正弦𠮙}=\frac{正切\frac{一}{二}(呷丅𠮙)}{正切\frac{一}{二}(呷丄𠮙)}$

故得

$\frac{甲丄乙}{甲丅乙}=\frac{正切\frac{一}{二}(呷丄吧)}{正切\frac{一}{二}(呷丅吧)}$ 惟因 $\frac{一}{二}(呷丄吧)=九〇^{\circ}丅\frac{一}{二}呐$ 所以得 $正切\frac{一}{二}(呷丄吧)=餘切\frac{一}{二}呐$ $正切\frac{一}{二}(呷丅吧)=\frac{甲丅乙}{甲丄乙}餘切\frac{一}{二}呐$ 其 $\frac{一}{二}(呷丅吧)$ 及 $\frac{一}{二}(呷丄吧)$ 之同數已知則可從 $呷=\frac{一}{二}(呷丄吧)丄\frac{一}{二}(呷丅吧)$ $吧=\frac{一}{二}(呷丄吧)丅\frac{一}{二}(呷丅吧)$ 而得呷與吧其丙可從 $丙=乙\frac{正弦呐}{正弦吧}$ 式而得之

此條為兩邊夾一角求邊角之公式

有甲乙二邊及所夾之角呐而欲逕求丙邊

從吧幅 $丙=\sqrt{甲^{二}丄乙^{二}丅二甲乙餘弦呐}$ 式開平方而得丙邊

此仍為兩邊夾一角求邊角法前式特為先求角之公式

此為逕求邊之公式

有三角形之三邊求其三角

從吧幅之理 $餘弦呷=\frac{乙^{二}丄丙^{二}丅甲^{二}}{二乙丙}$ 得其呷角既得呷角可推吧呐二角所以

此條爲三邊求角之公式

以上五題之公式最切於用其第一第二兩題爲角求邊邊求角之公式第三第四兩題爲兩邊夾一角求角求邊之公式第五題爲三邊求角之公式有此五公式以御三角形可不煩心而解矣