曆算全書

序 總目
三角法舉要 巻一至巻三

第一冊

雍正元年鐫

宣城梅定九先生著

曆算全書

柏鄉魏念庭輯刊

輯刊梅勿菴先生曆算全書小引

勿菴先生當代鴻儒學醇品粹年彌高而德彌劭道益隆而量益虛實得理學正傳更精研於曆算老逢

聖祖知遇以書生而隆坐論

天子前席公卿侍教蓋異數奇榮也先

生冲雅高潔迄以儒素終身大業藏山不輕問世而人爭傳之余獲接見憾晚適嬰塵務不能執經請益歲在戊戌偶攝法司因與諸同人設館白下延致先生訂正所著欲共輸資刊行先生旣以寧澹爲志不樂與俗吏久處而世會遷變雲散蓬飛竟未卒事閱二載僻居海中官齋閒寂復馳函敬求存稿得十餘種雖屢爲雅慕高賢者錄刻然雜遝參錯未成善本筒中尚夥文在耄年靜攝不能遽自校定因嘉許懇懇期爲檢發不意哲

人遂萎矣嗚呼歲月不待時會難逢嘆凋謝乎典型慨朋儔之聚散即一事而百感紛投矣但劍已許君井容自棄於是僂向輪編玉海昆季搆得未刻者將二十種俱以付梓工未得完余亦斥廢更於憂患中竭蹶歲餘

方旋所延致誤之客則咨已彈鋏使門矣竊思曆所著者天之象也算所明者物之數也象數之學天地造化之精微人物理氣之終始也烏容宣洩哉故仙言丹成而魔來史紀字作而鬼泣彼幻異之術文字之迹且然

況上通帝載而下括萬類之書乎宜
其傳之不易易也今雖粗竟心志而
點畫之間縱橫之際動關精要不容
訛舛余之固陋茲始望洋容更訪專
家以就正焉先敘輯刋之鄙意蓋亦
竊有不得已之思也夫治曆明時書

肇唐虞龍圖龜書出於羲禹皆中華
古聖帝之垂教於天下萬世者也術
雖有詳略疎密而理無可淆亂紛滋
況測天者原貴於隨時而稽數者雖
多方亦合一安見法出於古人者必
拙物得於遠至者始貴乎故當今日

明曆算續絕學自有勿庵先生此書具在道不外於歷聖所傳理自存於四海之內法亦備此三十種中也凡好新厭故重遐輕邇者亦可以由中以該西尚目不尚耳弗立異而誌怪將求奇於恒焉庶不負先生九十餘年立言垂訓之意也夫

旹

雍正癸卯歲嘉平月栢鄉魏荔彤念庭氏謹識

兼濟堂纂刻梅勿菴先生曆算全書總目

割圓八線之表 一卷續出

曆學

曆學疑問三卷

曆學疑問補二卷

交會管見一卷

交食蒙求三卷 日食 月食

揆日候星紀要一卷

歲周地度合攷一卷

冬至攷一卷

諸方日軌高度表一卷

五星紀要一卷

火星本法一卷

七政細草補註一卷

二銘補註一卷

曆學駢枝四卷

曆學答問一卷

平立定三差解一卷

算學

古算演略一卷

筆算五卷

籌算七卷

度算釋例二卷

方程論一巻
少廣拾遺一巻

三角法挙要目録

一巻

測算名義

二巻

算例

一句股形

一鋭角形

一鈍角形

三巻

内容

一三角求積

凡例十則

一三代以後治曆者有七十餘家惟郭太史授時曆稱為至精近今西法入中國測筭之理尤備然其布筭之法測驗之根各有專書本論茲編惟於曆筭中廣求大圜之理辨奧析疑刪煩補缺俾上有以發古人未盡之藴下足以為後賢考測之資不敢勦襲陳言以掠美沽名也

一今日而言曆筭必兼中西兩家然拘守中法者每是古而非今過尊西說者又舉末而遺本不知中曆之畧惟藉西法以補之西曆之巧寔原古法而精之一者寔相須而不可偏廢茲於西法如幾何三角割圓八綫以及一切測候之術固必一一詳著其所以然而中法如句股方程平立定差簡儀仰儀之類亦

皆疏其根源以徵古法之精當不敢有拘俗見取此失彼也

一曆算之書昔人多載立成本編惟一一發明其理故凡遇一法必求其根每有一根必究其理且攷訂再三了無疑義方敢採錄徐太史于鉞何原本云有三不必五不能茲取意亦猶是爾

一度數之理最為艱深往往有本論不足以發明而必借他說以明之者茲編遇立術隱奧處不憚旁引曲証宛轉反覆以達其義故圖形論說多有一見再見然意義各有所屬並非複沓細閱自見

一曆算之學頭緒最繁故本編所錄亦非一種然或訂補西法或疏明古曆或兼中西兩家而考其異同辨其得失皆有條理存焉善讀者可合全部而觀其會通亦可由一種而搜其義蘊理數精熟自有左右逢源之樂

一梅勿菴先生大年登享覃精曆筭著撰極富立說純正布筭詳明壬午冬
聖祖仁皇帝徵召顧問恩禮優崇蓋為德業並懋之醇儒不止為曆算家名宿矣其曆算各種如三角舉要曆學疑問方程少廣度筭筆筭等昔年李相國年中丞諸君子已相繼付梓行世今是編仍俱採入不敢遺棄其挽年諸稿壬寅春玉汝肩琳兩君舉以付余約計三十餘種內已成書而待刊者十之四稿略具而未成書者十之六余欲盡付剞劂因延錫山楊君學山至署為之訂補疏剔義之未明者門之圖之未備者增之文之缺略

者補之務使有倫有要首尾貫通既以勿庵所著為宗而復有發明修飾之功庶讀者不煩言而解期於不負勿庵相托之心而學山好古勤求之志亦可嘉尚矣

一勿庵舊刻各種內有可類附者亦增入一二如弧三角舉要舊刻五卷今增為六是也又勿庵言所未及而理數必不可缺者揚君亦為補綴如割圜八線之根一卷是也又如句股測量諸術曆家所重原稿零星散軼今增補為四卷餘編亦多類此庶理數明晰一覽了然

一各種內有簡帙繁重者分為若干卷以便省讀其散見襍出者則數種合為一編該以總名免致煩紊然或分或合皆歸於義蘊所存而已

一曆算之學勿庵尚矣然我
朝聲教洋溢人文蔚起博學多識之彥比屋接廡如吳江王曉庵青州薛儀甫睢州孔林宗桐城方位伯錫山楊定三鮑燕翼諸君子皆深明曆算各有著述惜未得其全書為憾然但有聞見皆於各種內附集其語與勿庵相印證學問之道固無窮也

一本書序次皆有條理蓋曆算之學明理為要理一明能知古人創立之意能為後人因改之資若徒執成法鮮有能通變者言理之書如幾何三角方圓塹堵測量諸編是也故先之然理寓於數理明必徵之數以求寔用割圜八線對數比例紀數之書也故數表次之理數並通矣然後可與言曆曆者理於以精數於以神者也故曆學諸書次之至於治曆必由於算中法有

珠盤籌策少廣方程西法有筆算度算比例等術皆推步之資
而理數藉以顯明者也故以算法終焉

兼濟堂纂刻梅勿菴先生曆算全書

三角法舉要卷一

宣城梅文鼎定九　著

柏鄉魏荔彤念庭　輯　男　乾敩一元

士敏仲文

士說崇寬同校正

錫山後學楊作枚學山　訂補

測算名義

古用句股。有割員弧背弦矢諸名。今用三角。其類稍廣。不可以不知。爰摘綱要。列於首簡

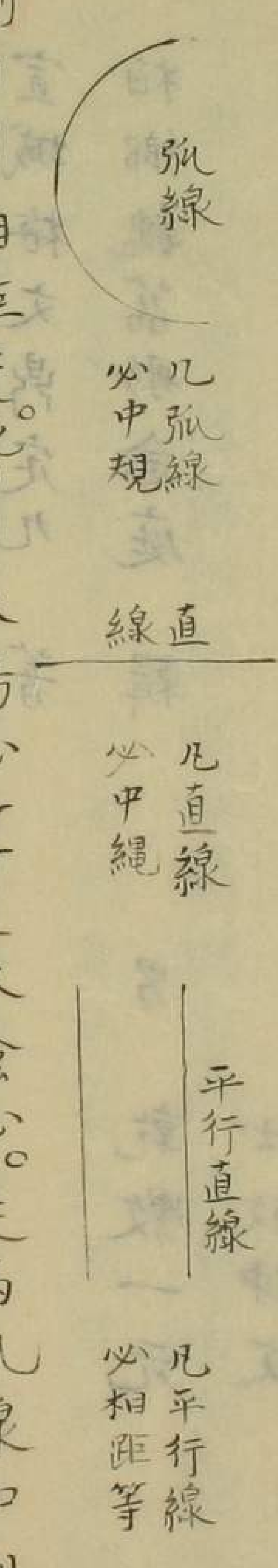
點

點如針芒。無長短闊狹可論。然算從此起。譬如算日月行度。只論日月中心一點。此點所到。即為躔離真度

線

線有弧直二種。皆有長短而無闊狹。自一點引而長之。至又一點止。則成線矣

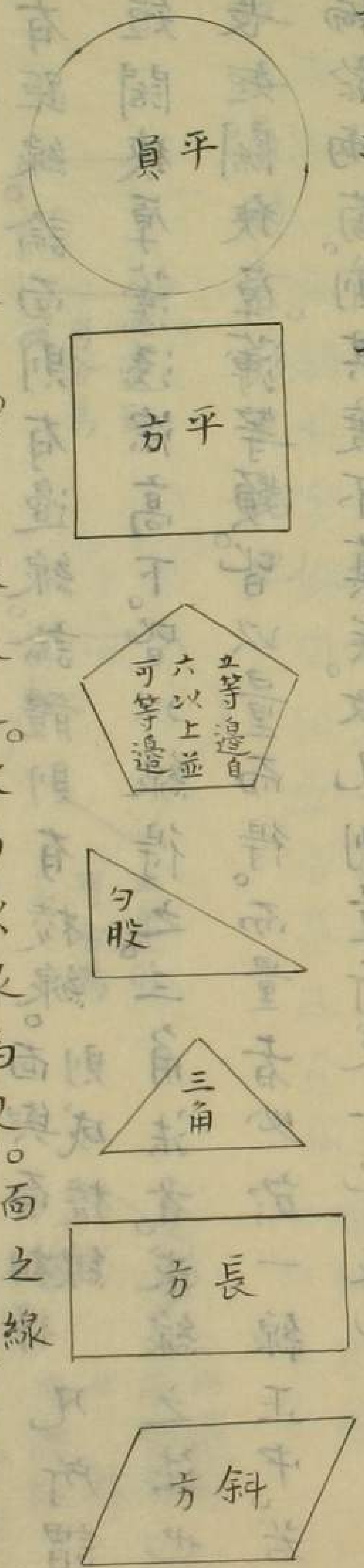
如測日月相距度。皆自太陽心算至太陰心。是為弧線。如測日月去人遠近。皆自人目中一點算至太陽大陰天。是為直線



凡句股三角之法。俱論線。線兩端各一點。故線以點為其界

面

面有方員各種之形。皆有長短。有闊狹。而無厚薄。故謂之冪。冪者所以冒物。如量田疇界域。只論土面之大小。不言深淺



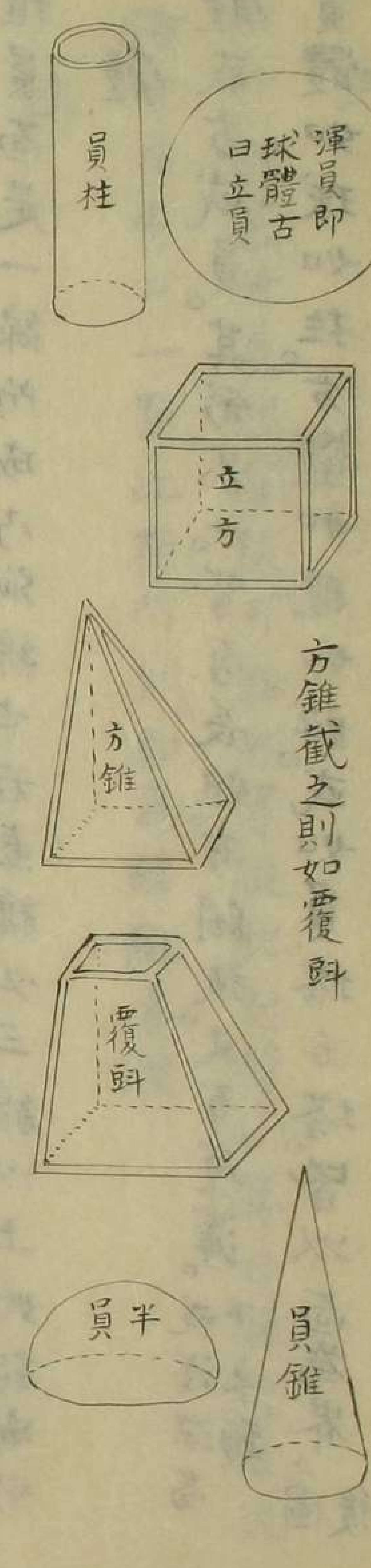
面之方員各類。皆以線限之。故面以線為界。面之線亦曰邊

惟員面是一線所成。乃弧線也。若直線。必三線以上。始能成形

體

體或方或員。其形不一。皆有長短。有闊狹。又有厚薄。或淺深高下之類

員體如球如柱。方體如櫃如斛。或如員塔方塔。皆以面為界。圖後

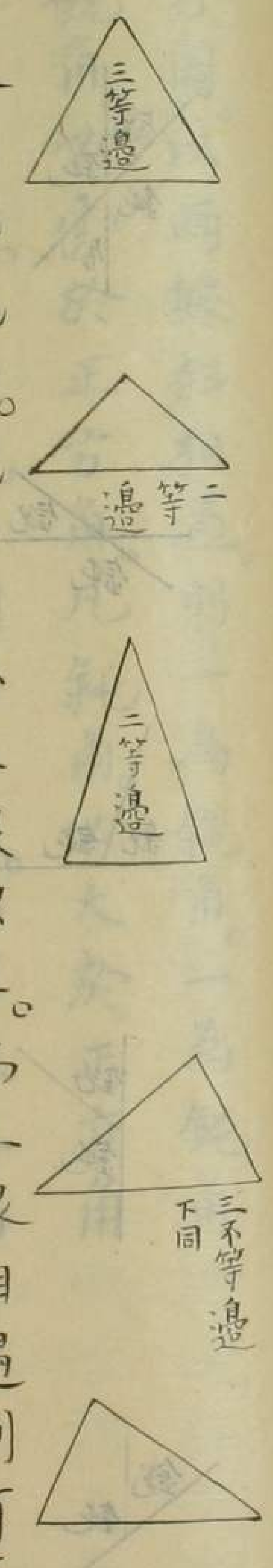


以上四者。謂點線面體略盡測量之事矣。然其用皆在線。如論點則有距線。論面則有邊線。論體則有棱線。面與面相得則成棱線凡所謂長短闊狹厚薄淺深高下。皆以線得之。三角法者。求線之法也

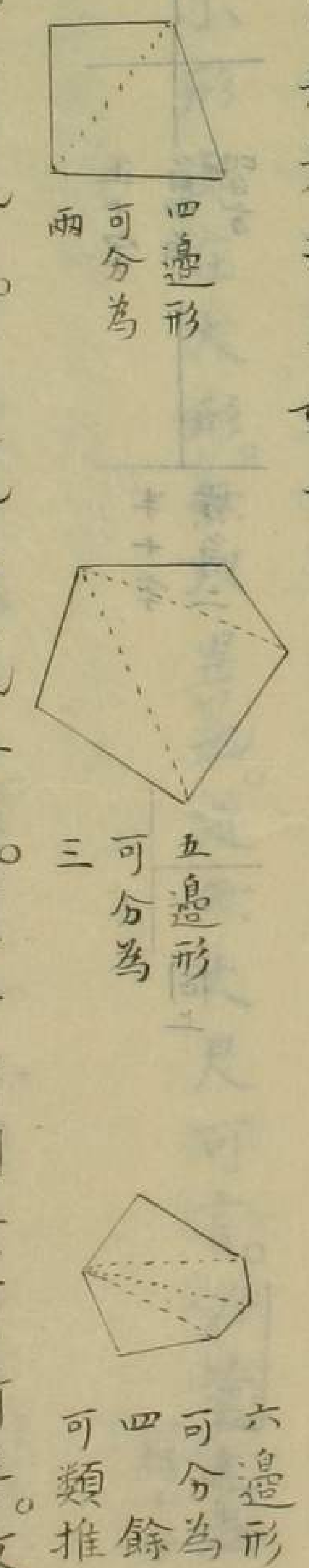
長短闊狹厚薄等類。皆以量而得。而量者必於一線正中。若稍偏於兩旁。則其度不真矣。故凡測量所求者皆線也

三角形

欲明三角之法必詳三角之形



兩直線不能成形。成形者必三線以上。而三線相遇則有三角。故三角形者。形之始也



多線皆可成形。折之皆可成三角。至三角則無可折矣。故三角能盡諸形之理

凡可算者為有法之形。不可算者為無法之形。三角者有法之形也。不論長短斜正。皆可以求其數。故曰有法。若無法之形。折之成三角則可量。故三角者量法之宗也

角

三角法異於句股者。以用角也。故先論角兩線相遇則成角。平行兩直線。不能作角。何也。線既平行。則雖引而長之。至於無窮。終無相遇之理。角安從生。是故作角者必兩線相遇。必不平行也

角有三類。一正方角。一銳角。一鈍角

如右圖。以兩線十字縱橫相遇。皆為正方角。亦曰直角。亦曰方角。

如右圖。以兩線斜相遇。則一為銳角。一為鈍角

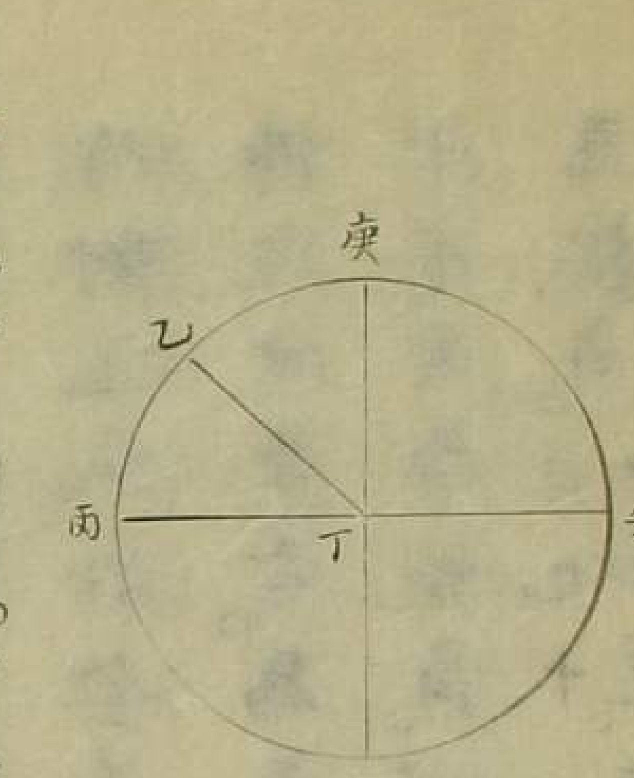
凡銳角。必小於正方角。凡鈍角。必大於正方角

正方角止一。銳角鈍角則有多種。而算法生焉

弧

角在小形與在大形。無以異也。故無大尺可言。必量之以對角之弧

法以角之端為員心。用規作員。員周分三百六十度。乃視本角所對之弧。於全員三百六十度中。得幾何度分。其弧分所對。正得九十度者。為正方角。九十度者。全員四之一。謂之象限。若所對弧分。不滿九十度者。為銳角。自八十九度。以至一度。並銳角也。所對弧分。在九十度以上者。為鈍角。自九十一度。至百七十九度。並鈍角也



如圖。丁為角。即用為員心。以作員形。其庚丁丙角。凡論角度。並以中一字。為所指所之角。此言庚丁丙。即丁為角也對者庚丙弧。在全員為四之一。正得象限九十度。是為正方角

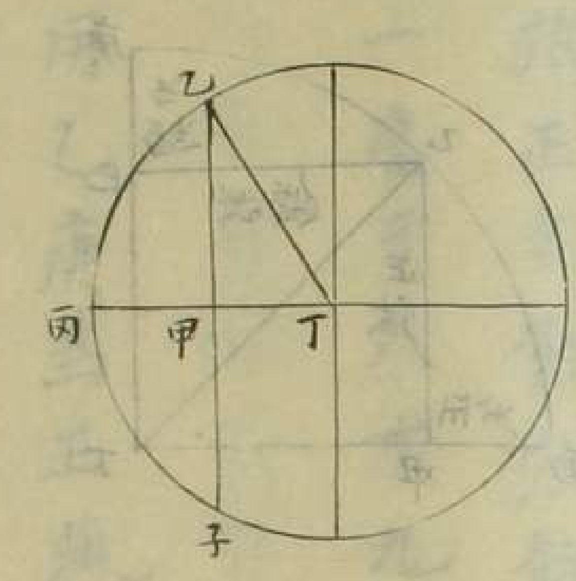
若乙丁丙角。所對者乙丙弧。在象限庚丙弧之內。小於象限九十度。是為銳角

又乙丁壬角。所對乙庚壬弧。過於壬庚弧。壬庚亦象限九十度弧。故庚丁壬亦方角大於象限九十度。是為鈍角

角之度。生於割員

割員弧矢

有弧則有矢。弧矢者。古人割員之法也



如圖。以乙子直線割平員。則成弧矢形所割乙丙子員分。如弓之曲。古謂之弧背。以弧背半之。則為半弧背。如乙丙

通弦正弦

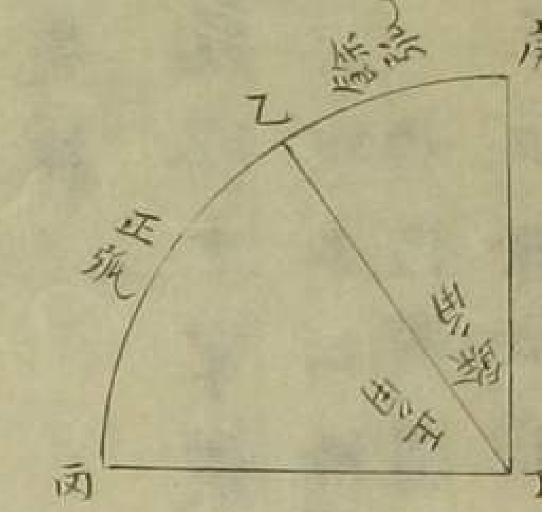
割員直線。如弓之弦。謂之通弦。如乙子通弦半之。古謂之半弧弦。今曰正弦。如乙甲

矢線

正弦以十字截半徑。成矢。如丁丙橫半徑。為乙甲正弦所截。成甲丙矢。謂之正矢

以上二條。俱仍前圖

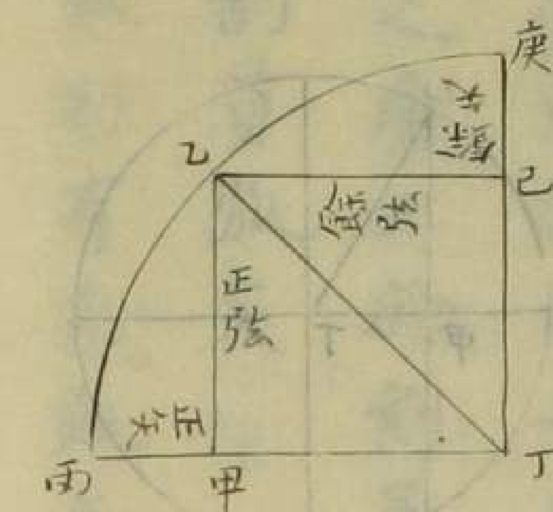
正弧餘弧正角餘角



所用之弧度為正弧。以正弧減象限。為餘弧如庚丙象限内。減乙丙正弧。則其餘乙庚為餘弧

正弧所對。為正角。如正弧乙丙。對乙丁丙角。則為正角

以正角減正方角。為餘角。如以乙丁丙正角。去減庚丁丙方角。則其餘乙丁庚角。為餘角



正弦餘弦正矢餘矢

有正弧正角。即有正弦。如乙甲。有正矢。如甲丙。亦即有餘弦。如乙己。有餘矢。如己庚。

正弦。正矢。餘弦。餘矢。皆乙丙弧所有。亦即乙丁丙角所有

自一度至八十九度。並得為乙丙。並得為正弧。即正餘弦矢畢具

若用乙庚為正弧。則乙丙反為餘弧

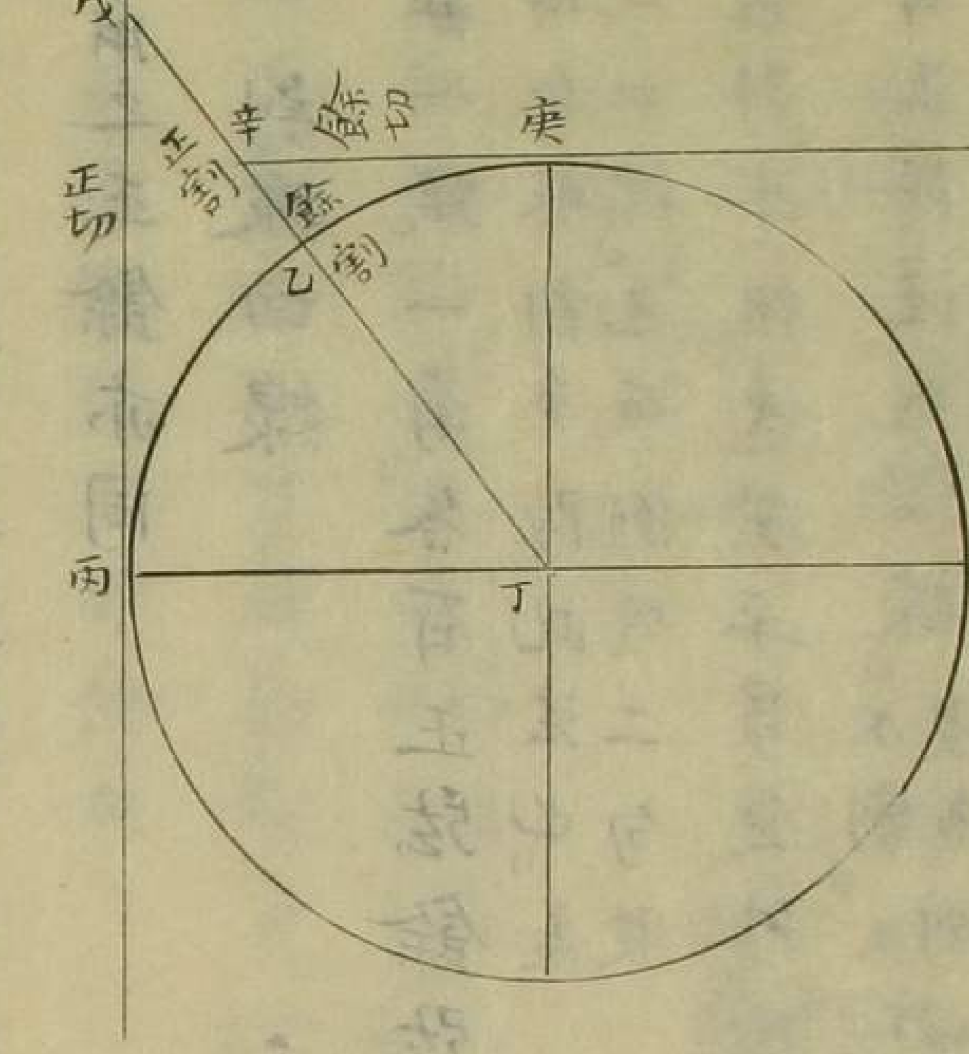
角之正餘亦同

割線切線

每一弧一角。各有正弦餘弦正矢餘矢。已成四線於平員内。古人用句股割員即此法也。蓋此四線。已成倒順二句股

再引半徑。透於平員之外。與切員直線相遇。為割線切線。而各有正餘復成四線。正割。正切。餘割。餘切。復成倒順二句股。共為八線。故曰割員八線也

如圖。庚乙丙平員。切戊丙直線於丙。又引乙丁半徑。透出員周外。使兩線相遇於戊。則戊丙為乙丙弧之正切線。亦即為乙丁丙角之正切線。而戊丁為乙丙弧之正割線。亦即為乙丁丙角之正割線



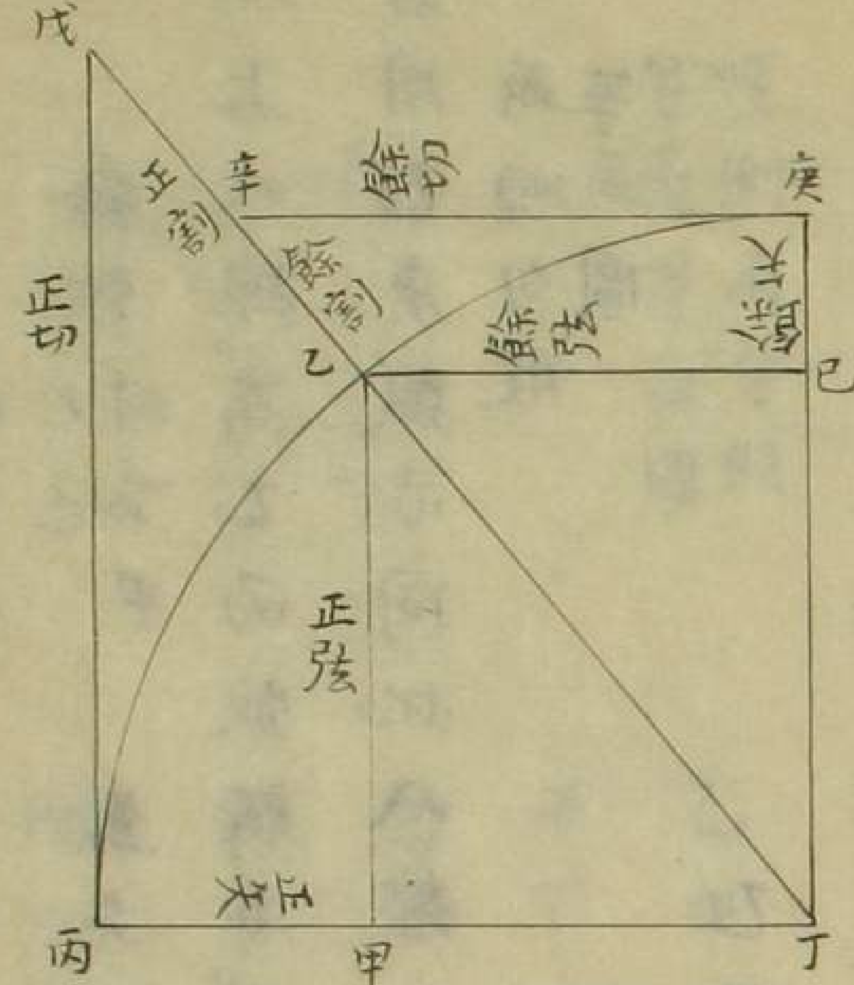
又以平員切庚辛直線於庚。與乙丁透出線相遇於辛。則庚辛為乙丙弧之餘切線。亦即為乙丁丙角之餘切線。而辛丁為乙丙弧之餘割線。亦即為乙丁丙角之餘割線

割員八線

凡用一弧。即對一角用一角。亦對一弧。故可互求

凡一弧。即有八線。正弦。正矢。正割。正切。餘弦。餘矢。餘割。餘切。角亦然。

凡一弧之八線。即成倒順四句股。角亦然。

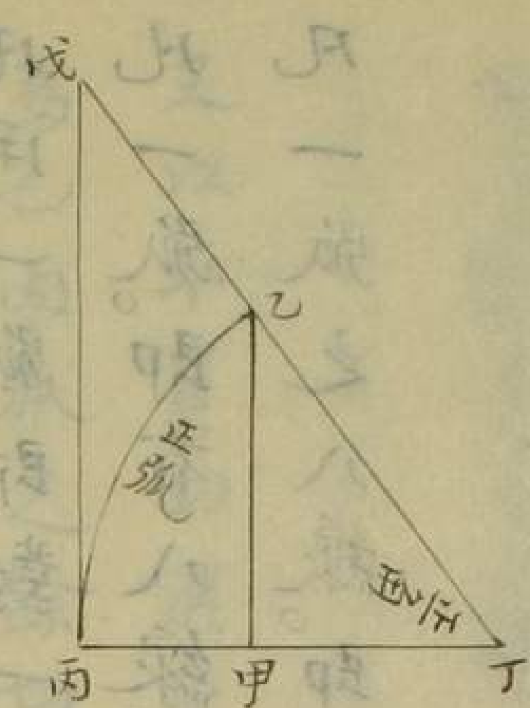


如圖。庚丙象弧共九十度。庚丁丙為九十度十字正方角任分乙丙為正弧。乙丁丙為正角。則乙庚為餘弧。乙丁庚為餘角

正弦 乙甲 同丁己
餘弦 乙己 同丁甲
正矢 甲丙
餘矢 庚己
正切 戊丙
餘切 辛庚
正割 戊丁
餘割 辛丁

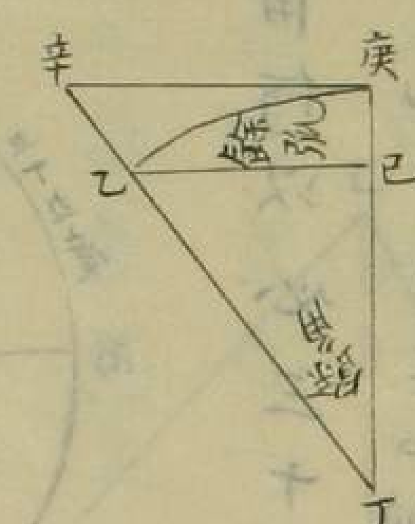
以上八線。為乙丙弧所用。亦即為乙丁丙角所用。自一度至八十九度並同。若用乙庚弧亦同此八線。但以餘為正。以正為餘

兩順句股等角圖

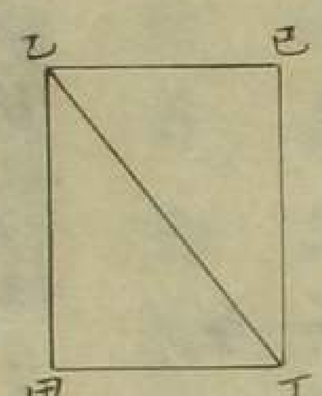


乙甲丁句股形。乙丁半徑為弦。乙甲正弦為股。丁甲餘弦為句 戊丙丁句股形。戊丁正割為弦。戊丙正切為股。丙丁半徑為句 以上兩順句股形。同用乙丁甲角。故其比例等。凡句股形。一角等。則餘角並等

兩倒句股等角圖



順倒兩句股等邊等角圖

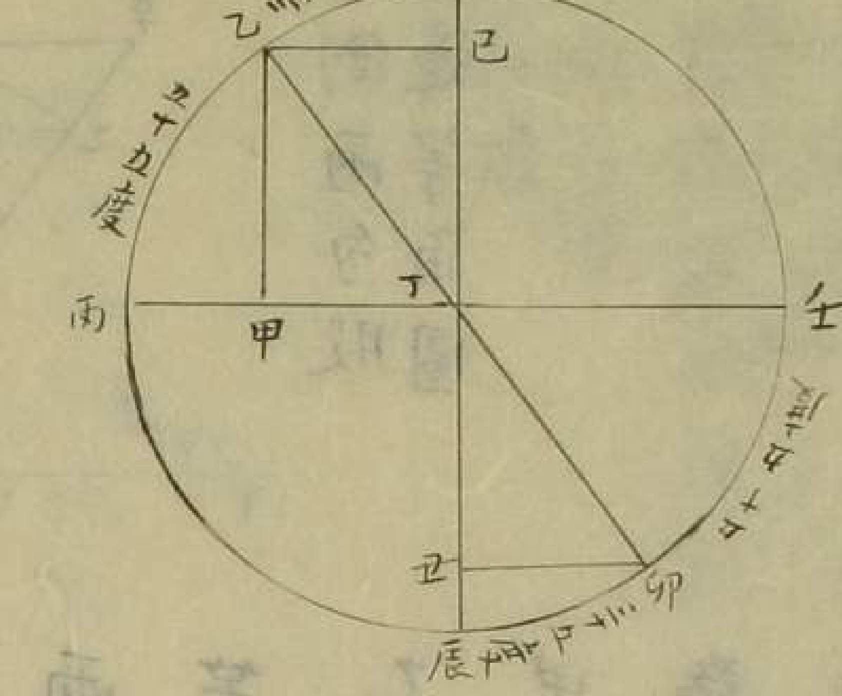


乙己丁倒句股形。乙丁半徑為弦。己丁正弦為股。乙己餘弦為句 辛庚丁倒句股形。辛丁餘割為弦。丁庚半徑為股。辛庚餘切為句 兩倒句股形。同用乙丁己角。故其比例亦等

乙甲丁句股形。乙丁半徑為弦。乙甲正弦為股。甲丁餘弦為句 丁己乙倒句股形。乙丁半徑為弦。己丁正弦為股。乙己餘弦為句 此倒順兩句股形。等邊又等角。倒形之丁角。即順形丁角之餘。倒形之乙角。即順形乙角之餘。竟如一句股也。準此論之。則倒順四句股之比例。亦無不等矣

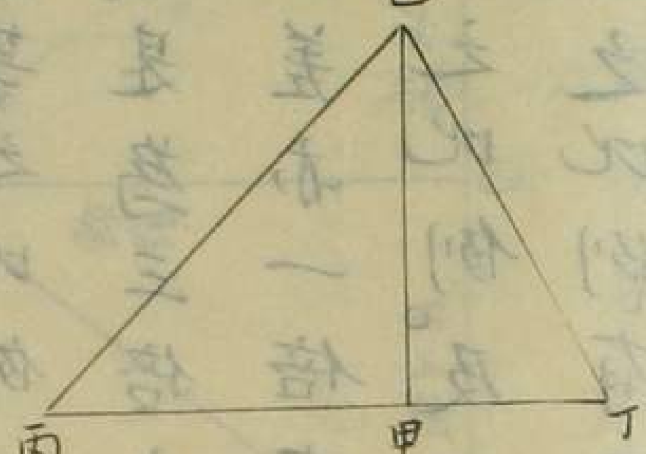
角度

凡二角形。併三角之度。皆成兩象限。共一百八十度



假如乙甲丁句股形。其丁角五十五度。當乙丙弧則乙角必三十五度。當乙庚餘弧兩角共一象限九十度。其甲角正方。原係九十度。合三角。成一百八十度

乙角何以必三十五度也。試引乙丁弦過心至卯。則卯丁丑角。與丁乙甲角等。卯丁乙同為一線。丁丑線又與乙甲平行。則所作之角必等。而卯丁丑固三十五度也。則乙角亦三十五度矣



又假如丙乙丁三角形。從乙角作乙甲直線。至丁丙邊。分為兩句股形。乙甲丁。乙甲丙。準前論。乙甲丁句股形。以乙分角與丁角。合之。成一象限九十度。又乙甲丙句股形。以乙分角與丙角。合之成一象限九十度。然則以乙全角即兩分角之合與丁丙兩角。合之必成兩象限一百八十度矣。乙為鈍角。並同

以此推知三角形。有兩角。即知餘角。併兩角。以減半周一百八十度得之句股形。有一角。即知餘角。句股原有正方角九十度。則餘兩角共九十度。故得一可知其二

相似形

既知角。可以論形。有兩三角形。其各角之度相等。則為相似形。

而兩形中各邊之比例相等謂此形中各邊自相較之比例。亦如彼形中各邊自相較之比例也

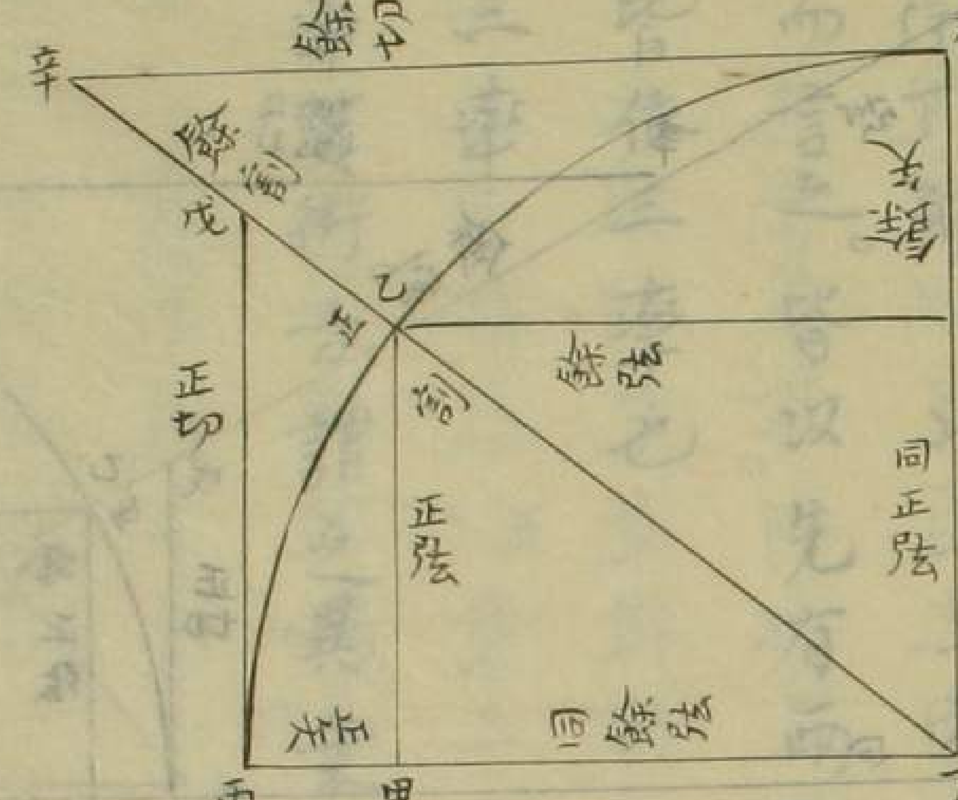
比例

兩數相形則比例生。比例者。或相等。或大若干。或小若干。乃兩數相比之差數也。有兩數於此。又有兩數於此。數雖不同。而其各兩數自相差之比例同。謂之比例等

或兩小數相等。又有兩大數相等。是為相等之比例。數雖有大小。其相等之比例。均也。或兩小數相差三倍。又有兩大數亦相差三倍。是為三倍之比例。或兩小數相差為一倍有半。又有兩大數相差亦一倍有半。是為一倍有半之比例。數雖有大小。其為三倍之比例。及一倍有半之比例。均也

論八線之比例有二

一為八線自相生之比例

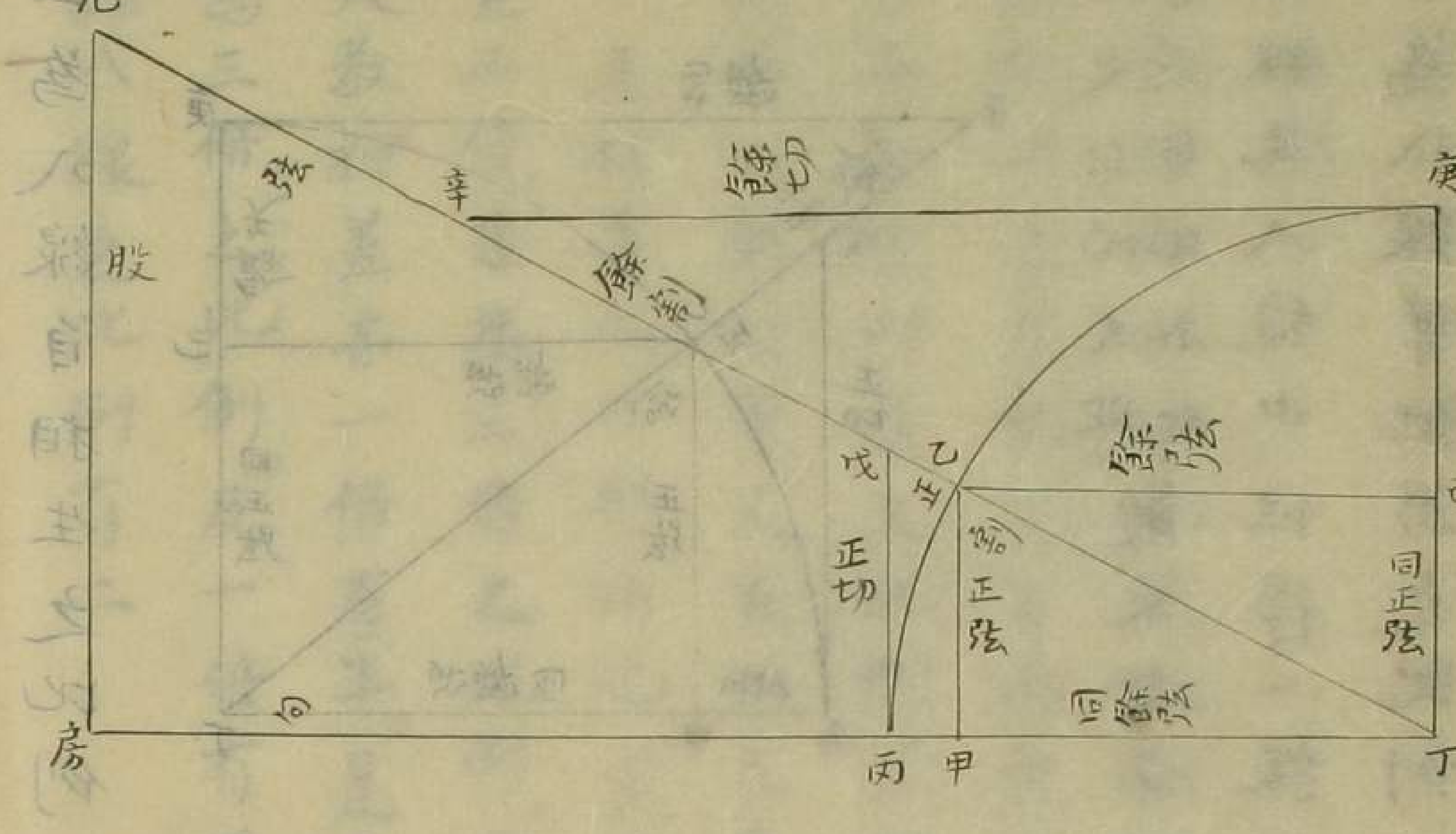


乙甲丁小句股形。與戊丙丁大句股形相似。見前條故以半徑乙丁。比正弦乙甲。若割線戊丁。與切線戊丙之比例也。此為以小弦比小股。若大弦與大股。股求弦亦同

又以半徑丙丁。比正切戊丙。若餘弦甲丁。與正弦乙甲之比例也。此為以大句比大股。若小句比小股。股求句亦同。餘倣此

以故凡八線中。但得一線。則餘皆可求。觀圖自明

一為八線算他形之比例



乙丁甲角所有八線。為表中原設之數。亢丁房句股形。為今所算之數

或先有丁角。有亢丁弦。而求房丁句。則為以乙丁半徑。比甲丁餘弦。若亢丁弦。與房丁句也。以角與句求弦。亦同

以上是用八線以求他形

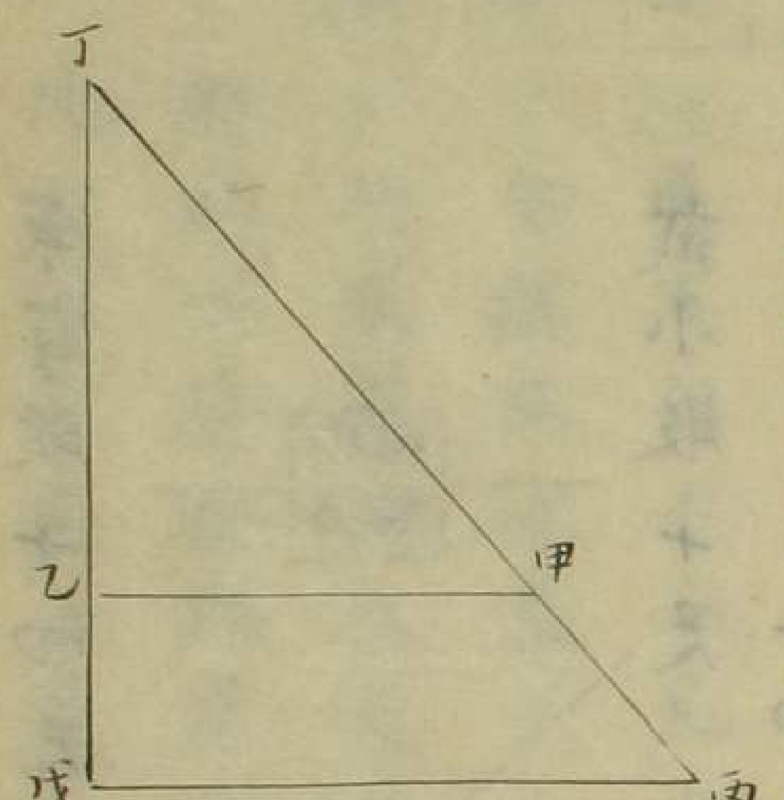
或先有亢丁弦。有亢房股。而求丁角。則為以亢丁弦。比亢房股。若乙丁半徑。與丁角之正弦乙甲也。得乙甲。得一角矣

或先有亢房股。與房丁句。而求丁角則為以亢房股。比房丁句。若丁庚半徑。與庚辛餘切也。得庚辛。亦得丁角。以上二者。是用他形轉求八線

総而言之。皆以先有兩數之比例。為後兩數之比例。其乘除之法皆依三率也

三率

三率筭術。古謂之異乘同除今以句股解之



丁戊大股。十四尺 丙戊大句。十一尺二寸

截丁乙小股。十尺 問乙甲截句

答曰。八尺

術以所截小股乘大句。得數為實。以大股為法。除之。即得截句

異乘同除圖

原有股十四尺　為法

同名相除

原句十一尺二寸

異名相乘

乘得一百一十二尺　為實

截小股十尺

截句八尺　法除實得截句

若先以原股十四尺除原句。十一尺二寸得八寸。為每一尺之句。再以截股十尺乘之。亦得八尺。但先除後乘。多有不盡之數故改用先乘後除。乃古九章中通用之綱要也

先乘後除。何以又謂之異乘同除。曰。今但有截股。而不知句。故以原有之句乘之股與句異名。故曰異乘。然後以原有之股除之。股與股同名。故曰同除

然則又何以謂之三率。曰。本是以原有之股與句。比今截之股與句。共四件也。然見有者只三件。原有之股與句。及今截之股故必以見有之三件。相為乘除。而得所不知之第四件。故曰三率

三率乘除圖式

一率　原有股十四尺　為法

二率　原有句十一尺二寸　相乘為實

三率　今截股十尺

四率　所求截句八尺　法除實得所求

術曰。以原股比原句。若截股與截句也

凡言以者為一率。言比者為二率。言若者為三率。言與者

為四率

二率三率。常相乘為實。一率常為法。法除實。得四率。四率乃所求之數。其三率者。所以求之也

三率與異乘同除。非有二理。但以横列為異。然數既平列。即可以四率為法。除二三相乘之實。而得一率。并可以一率四率相乘為實。用二率為法除之。而得三率。或用三率為法除之。亦得二率。是故一四二三之位。可以互居。四可為一。二可為三。法實可以迭用。二與三。可居一四之位。變動不居。惟用所適。而各有與常於異乘同除之理。尤深切而著明者也

三率互用圖

反之

一 句八尺

二 股十尺

三 句十一尺二寸

四 股十四尺

更之

一 股十尺

二 句八尺

三 股十四尺

四 句十一尺二寸

又反之

一 句十一尺二寸

二 股十四尺

三 句八尺

四 股十尺

右並以二率三率相乘為實。一率為法除之。而得四率

八線表

八線為各弧各角之句股所成。故八線表者。即句股形之立成數也。古人用句股開方。已盡測量之理。然句股弦皆邊線耳。邊之數無方。放之則彌四遠。近之則陳几案。故所傳算術。皆以一端示例而已。不能備詳其數也。今變而用角。則有弧度三百六

十以限之。而以象限盡全周。有合於舉一反三之旨。又析象限之度各六十分。凡為句股形二千七百。角度五千四百。九十度之分。五千四百。而句股形並有兩角。故其形二千七百而角數倍之為正弦。為切線。為割線。共一萬六千二百。三項各五千四百。正餘互用也而句股之形略備。用之殊便也銳角分兩句股。鈍角補成句股。然惟有八線表中豫定之句股。故但得其角度。則諸數歷然。可於無句股中。尋出句股矣。

四 半徑全數

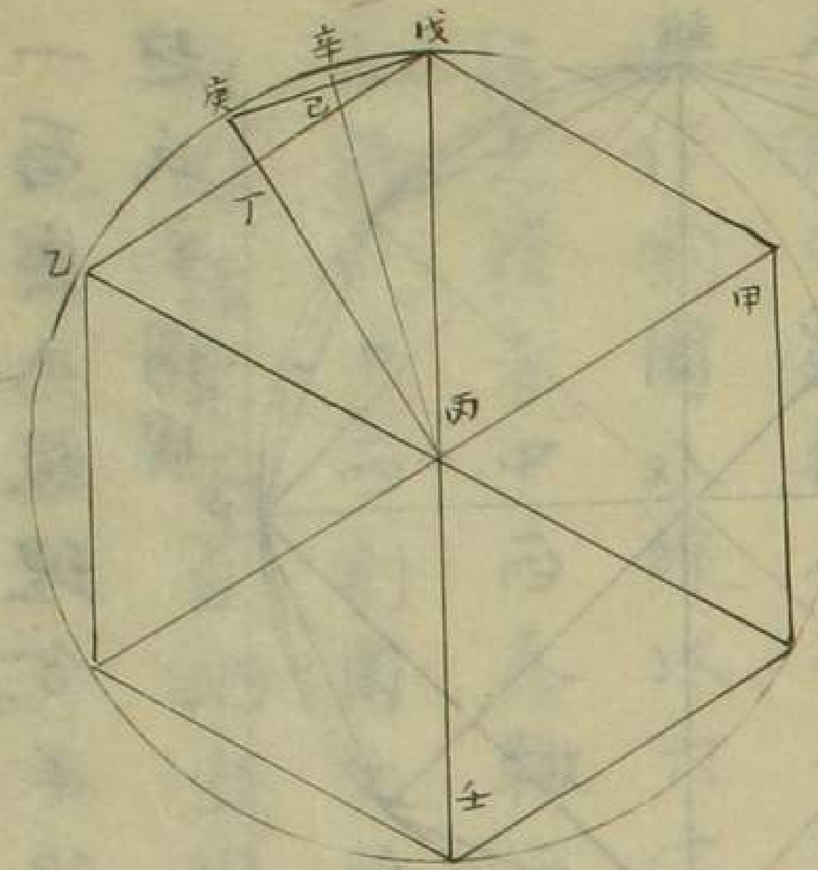
全數即半徑也。不言半徑而言全數者。省文也。凡八線生於角度。而有角有弧。則有半徑。八線之數。皆依半徑而立也。半徑常為一。或五位。則為一萬。或六位。則為十萬。則正弦常為半徑之分。正弦必小於半徑。而不得為全數。惟半徑可稱全數也。割切二線。皆依正弦而生。亦皆有畸零。不得為全數。

用全數為半徑。有數善焉。一立表時易於求數也。一用表時便於乘除也。三率中全數為除法。則但降位。可省一除。若全數為乘法。則但升位。可省一乘。曆書中多言全數。或但曰全。以從省便。今算例中直云半徑。以欲明比例之理。故質言之

一卷補遺

割圜正弦為八線之主

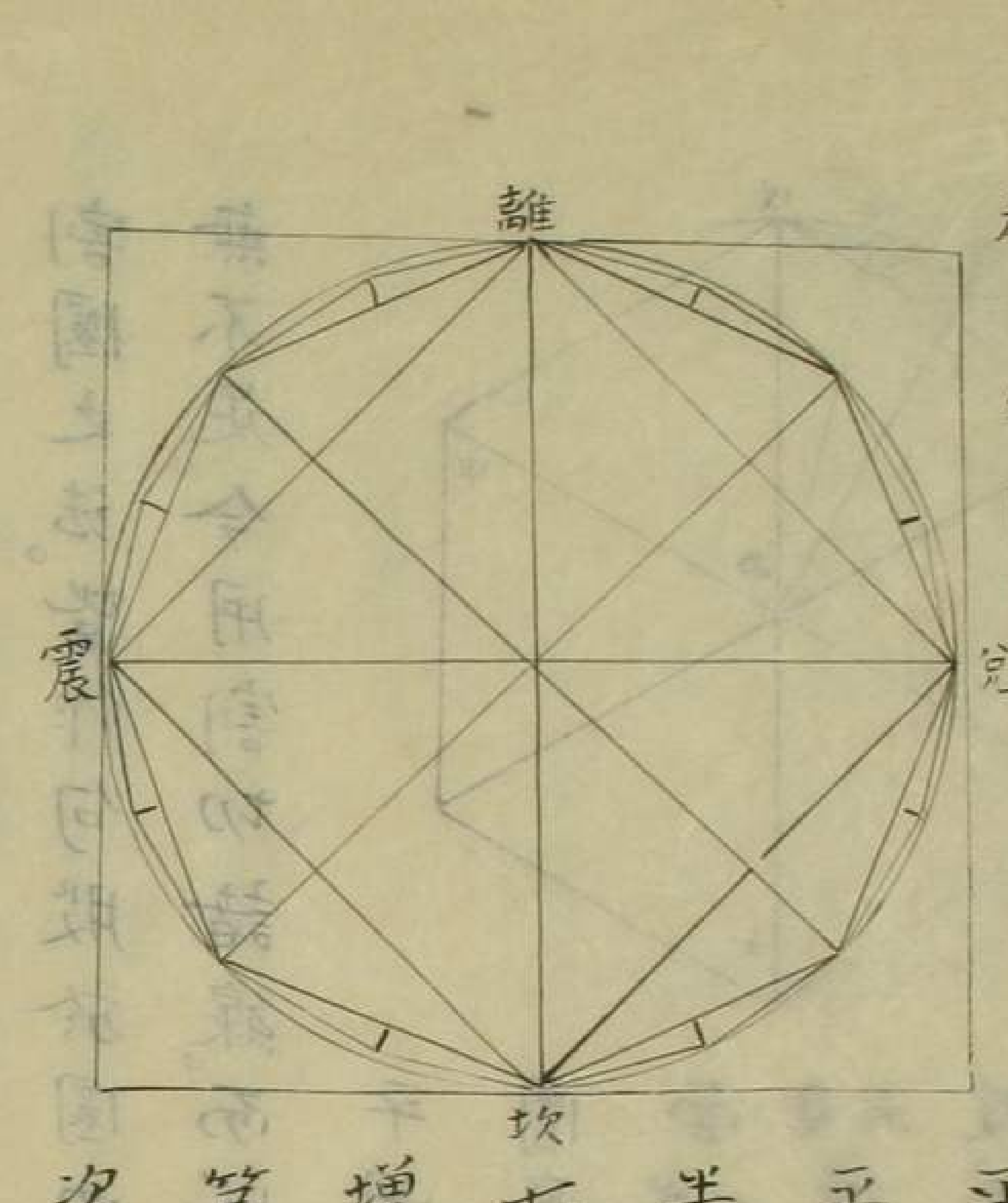
割圜之法。皆作句股於圜內以先得正弦。故古人祇用正弦。亦無不足。今用割切諸線。而皆生於正弦



平圜徑二尺即戊壬半之一尺即戊丙庚丙等為圜裏六弧之一面。即乙戊半徑戊丙為弦。半面戊丁為句。句弦求股。得股。丁丙轉減半徑庚丙得餘庚丁為小句。半面戊丁又為小股。句股求弦。得小弦戊庚是為割六弧成十二弧之一面。如是累析。為二十四弧四十八弧。至九十六弧以上。定為徑一尺周三尺一寸四分有奇

論曰。九章算經載劉徽割圜術。大略如此。其以半徑為六弧之一面與八線理合。半徑恆為一。即全數。半面為股。則正弦也。

趙氏割圜圖



平方徑十寸。其積百寸。內作同徑之平圜。平圜內又作平方。正得外方之半。其積五十寸。平方開之。得七寸七有奇。即離震等四等面之通弦乃自四隅之旁。增為八角曲圜。為第一次。即八等面通弦至第二次則為曲十六。即十六等面通弦第三次為曲三十二。每次加倍。至十二次。則為曲一萬六千三百八十四。於是方不復方。漸變為圜矣。其法逐節以大小句股弦冪相求。至十二次所得小弦。以一萬六千三百八十四乘之。得三十一寸四分一釐五毫九絲二忽為。徑十寸之圜周。與祖冲之徑一百一十三。周三百五十五合。

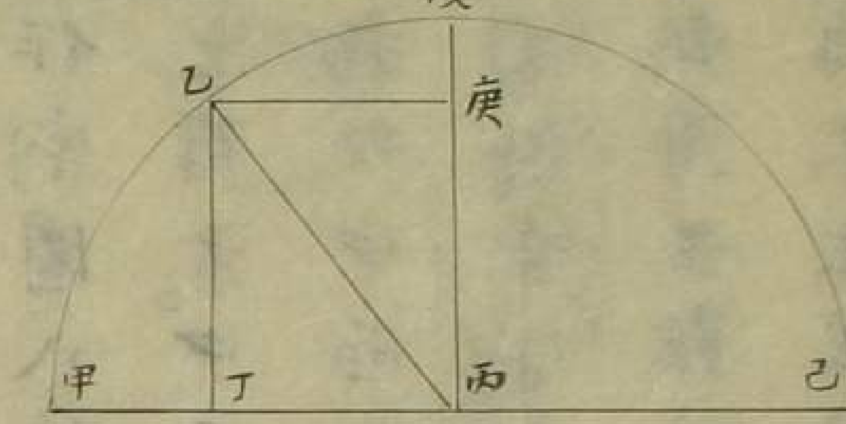
論曰元趙友欽革象新書所撰乾象周髀法。大略如此。所得周徑與西術同。其逐節所求皆通法。所用小股。皆正弦也

又論曰。劉徽祖冲之。以割六弧起數。趙友欽以四角起數。今西術作割圜八線以六宗率。則兼用之。可見理之至者。先後一揆。法之精者。中西人轍西人謂古人但知徑一圍三。未深考也

又論曰。中西割圜之法。皆以句股法求通弦。通弦半之為正弦。割圜諸率。皆自此出。總之為句股之比例而已

鈍角正弦

鈍角不立正弦。而即以外角之正弦為正弦



鈍角之正弦在形外。即外角之正弦也。故乙丙己鈍角。與乙丙甲外角。同以乙丁為正弦。以鈍角減半周得外角。假如鈍角一百二十度。其所用者。即六十度之正弦。乙丁線能為乙丙甲角正弦。又能為乙丙己鈍角正弦。八線表止於象限以此。因鈍角與外角同正弦。故表雖一象限。而實有半周之用

鈍角餘弦

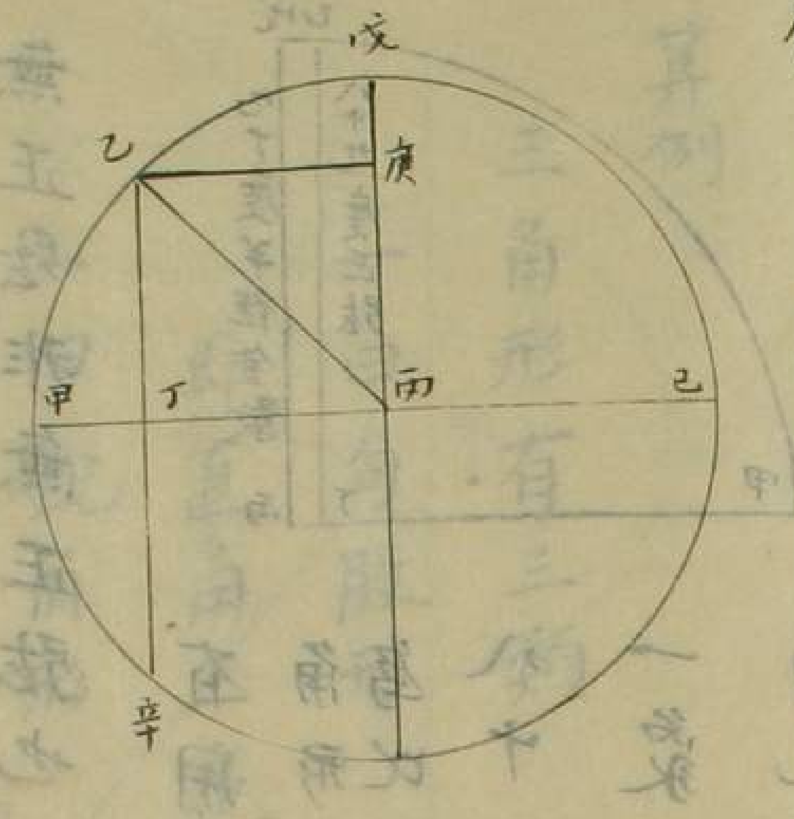
鈍角既以外角之正弦為正弦。即以外角之餘弦為餘弦

如前圖。乙庚為外角乙丙甲餘弦。而即為鈍角乙丙己餘弦

捷法以正角戊丙己減鈍角乙丙己得餘角乙戊丙即得餘弦

過弧

鈍角之弧為過弧



乙戊為象限弧。而乙戊己為乙丙己鈍角之弧。是越象限弧而過之也。故曰過弧

大矢

鈍角之矢為大矢

如前圖。以乙丁辛弦分全圜。即全徑亦分為二。則丁甲為小半圜乙甲辛之徑。謂之正矢。丁己為大半圜乙己辛之徑。謂之大矢。大矢者。鈍角所用也。

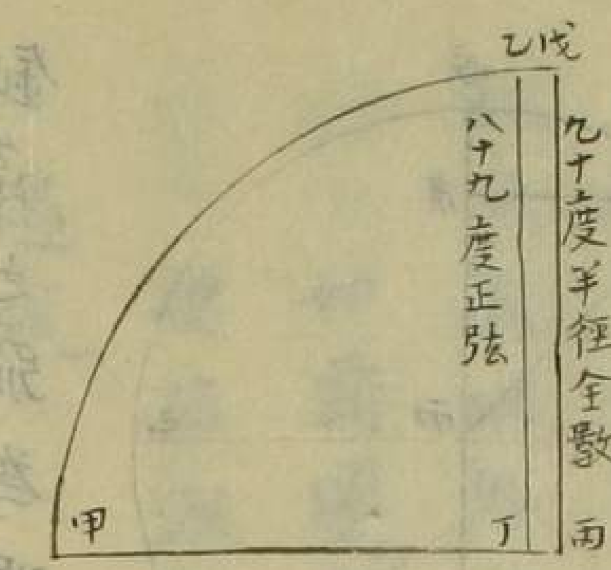
鈍角與外角。同用乙丁正

弦。乙庚餘弦。所不同者惟矢（乙丙己角。用大矢丁己。乙丙甲角。用正矢丁甲）

捷法。以乙庚（即丁丙）餘弦。加己丙半徑。即得己丁大矢。（若以餘弦減半徑。亦得正矢）

正角以半徑全數為正弦

八線起○度一分。至八十九度五十九分。並有正弦。而九十度無正弦。非無正弦也。蓋即以半徑全數為其正弦。故凡算三角。



有用半徑與正弦相為比例者皆正角也。（其法與銳角形鈍角形用兩正弦為比例同理並詳後卷）

八十九度奇之正弦。至九九九九九而極。適滿一象限始能成半徑全數。是故半徑全數者。正角九十度之正弦也。其數為一○○○○○

三角法舉要卷二

算例

三角形有三類

一曰句股形

即直角三邊形也。有正方角一。餘並銳角

一曰銳角形

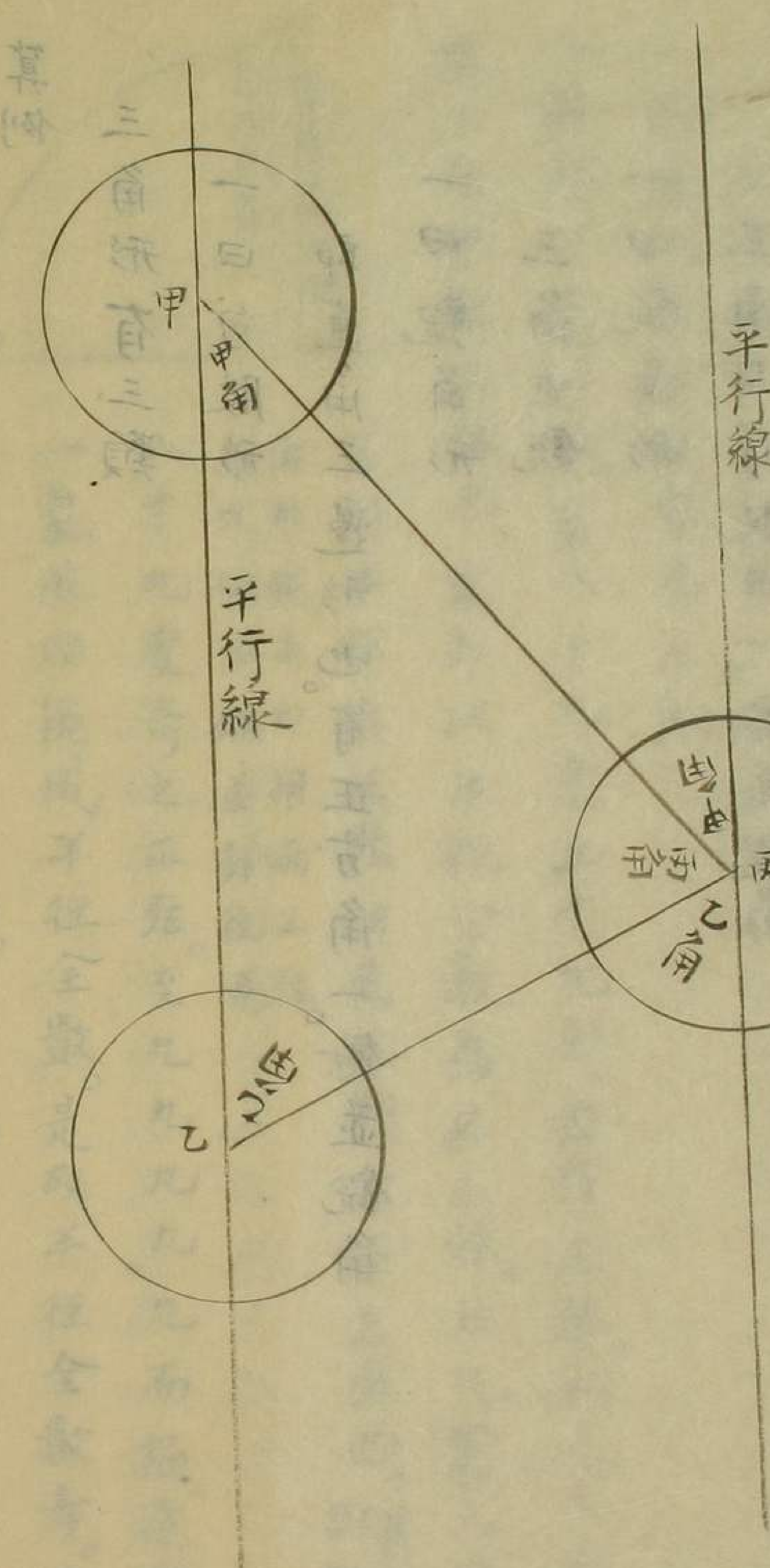
三角並銳

一曰鈍角形

三角內有鈍角一。餘並銳角

以上三類。總謂之三角形。其算之各有術

斜三角形三角相併成半周



長澤保閣之

向股形第一術　有一角一邊。求餘角餘邊

内分二支

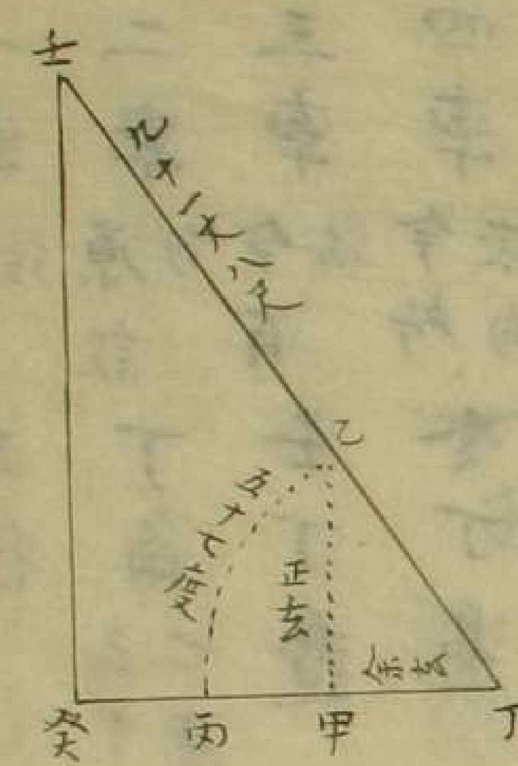
一先有之邊為弦

一先有之邊為向股 或先有亦同

假如壬癸丁向股形。有丁角五十七度。壬丁弦九十一丈八尺。

求餘角餘邊

一求癸丁邊



術曰。以半徑全數。比丁角之餘弦。若壬丁弦。與癸丁句。

丁。半徑。即丁乙。餘弦。即甲丁

以丁乙比甲丁若壬丁比癸丁

一率原設弦半徑　一〇〇〇〇〇　為法
二率原設句丁角五十七度餘弦　〇五四四六四　相乘為實
三率今有弦壬丁邊　九十一丈八尺
四率今所求句癸丁邊　五十丈　法除實得所求

一求壬癸邊

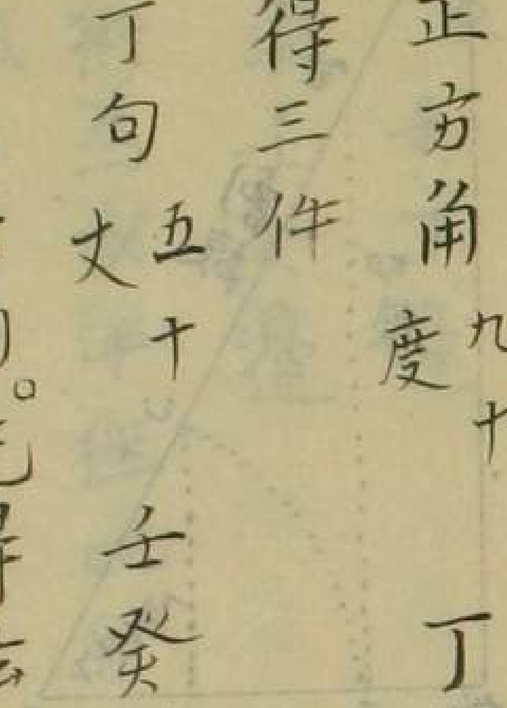
術曰。以半徑比丁角之正弦。若壬丁弦。與壬癸股
一率原設弦半徑　一〇〇〇〇〇　為法
二率原設股丁角五十七度正弦　〇八三八六七　相乘為實
三率今有弦壬丁邊　九十一丈八尺
四率今所求股壬癸邊　七十七丈　法除實得所求

一求壬角

以丁角五十七度與象限九十度相減。得餘三十三度。為壬角

計開

先有之三件
癸正方角九十度
丁角五十七度
壬丁弦九十一丈八尺



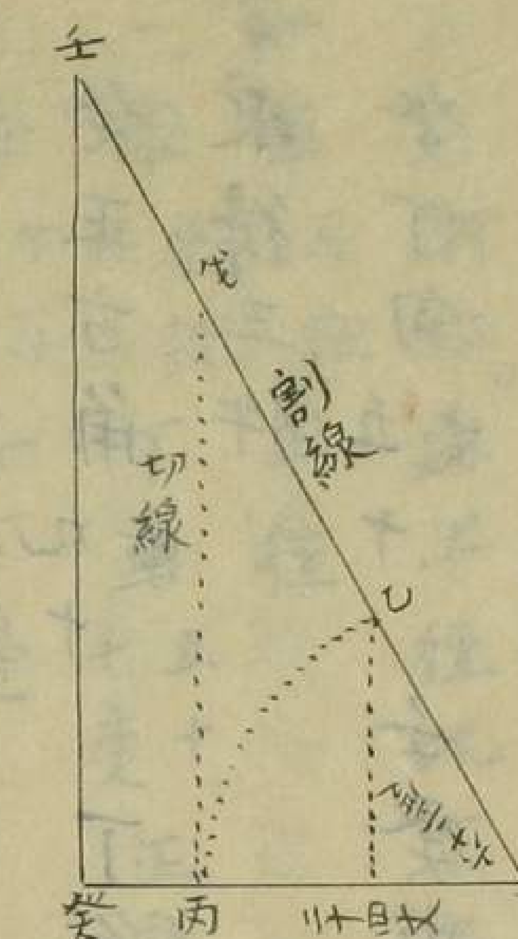
令求得三件
癸丁句五十丈
壬癸股七十七丈
壬角三十三度

右例。先得弦以求句股也。是為句股形第一術之第一支

假如壬癸丁句股形。有丁角六十二度。癸丁句二十四丈。求餘角餘邊

一求壬角

以丁角六十二度。與象限相減。得餘二十八度。為壬角



戊丙丁句股形。以戊丙切線為股。丙丁半徑為句。戊丁割線為弦。是丁角原有之線。既同丁角。則其今壬癸丁句股形。比例等

一求壬丁邊

術為以半徑比丁角之割線。若癸丁句與壬丁弦

一 句 原設半徑 一〇〇〇〇〇 為法

二 弦 原設丁角六十二度割線 二一三〇〇五 相乘為實

三 句 今有癸丁邊 二十四丈

四 弦 所求壬丁邊 五十一丈一尺 法除實得所求

一求壬癸邊

術為以半徑比丁角之切線。若癸丁句。與壬癸股

一 句 原設半徑 一〇〇〇〇〇 為法

二 股 原設丁角六十二度切線 一八八〇七三 相乘為實

三 句 今有癸丁邊 二十四丈

四 股 所求壬癸邊 四十五丈一尺 法除實得所求

計開

先有之三件

癸正方角　丁角六十二度　癸丁句二十四丈

今求得三件

壬角二十八度　壬丁弦五十一丈一尺　壬癸股四十五丈一尺

右例。先得句。以求弦及股也。或先得股。以求弦及句。

亦同。是為句股形第一術之第一支

句股形第二術　有邊求角

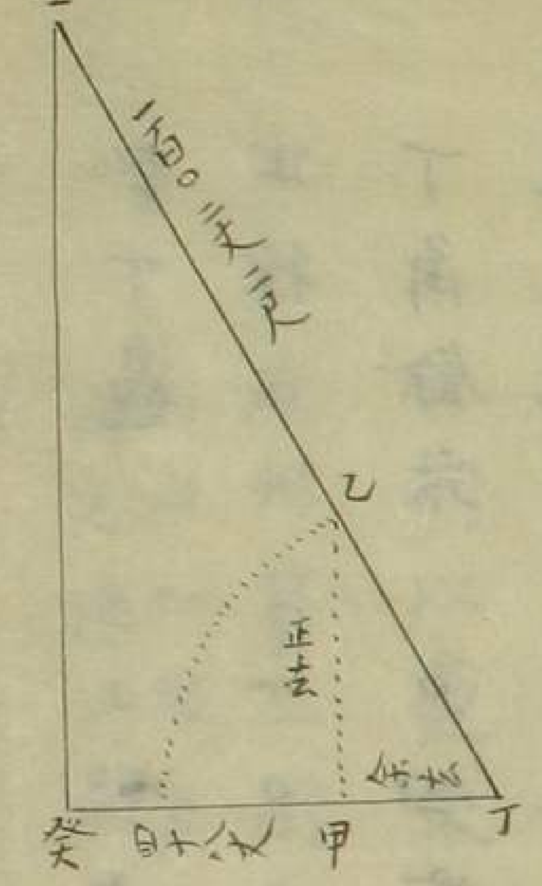
亦分二支

一先有二邊

一先不知正方角而有三邊　新增

假如　壬癸丁句股形。有壬丁弦一百零二丈二尺。癸丁句四十八丈。求二角一邊

一求丁角



術為以壬丁弦比癸丁句。若半徑乙丁與丁角之餘弦甲丁

一 壬丁邊 一百〇二丈二尺 今有之弦為法

二 癸丁邊 〇四十八丈 今有之句 相乘為實

三 半徑 一〇〇〇〇〇 原設之弦

四 丁角餘弦 〇四六九六六 法除實得所求原設句

依術求得丁角六十二度 以所得餘弦檢表即得

一求壬角

以丁角六十二度。與象限相減。得餘二十八度。為壬角

一求壬癸邊

術為以半徑比丁角之正弦。若壬丁弦。與壬癸股

一 半徑 一〇〇〇〇〇

二 丁角六十二度 正弦 〇八八二九五

三 壬丁邊 一百〇二丈二尺

四 壬癸邊 〇九十丈〇二尺三寸

計開

先有之三件

壬丁弦一百〇二丈二尺 癸丁句四十八丈 癸正方角

今求得三件

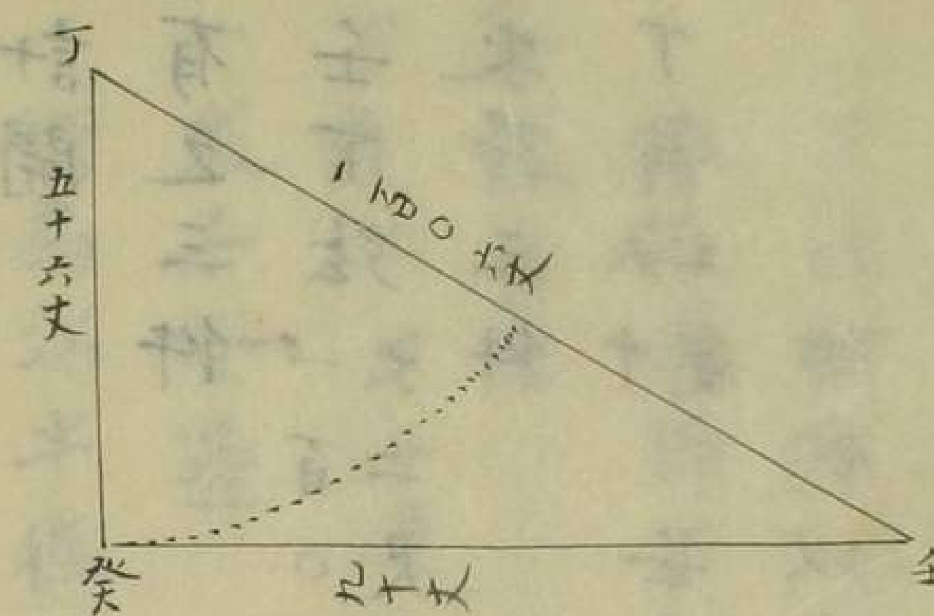
丁角六十二度 壬角二十八度 壬癸股九十丈〇二尺三寸。

右例以邊求角。而先知方角。故只用二邊也。是為句股形第二術之第一支。此先有二邊為弦與句。故用正餘弦。若先有是句與股。則用切線。其比例之理一也。

假如壬癸丁三角形。有壬丁邊一百〇六丈。壬癸邊九十丈。癸丁邊五十六丈。求角

一求癸角

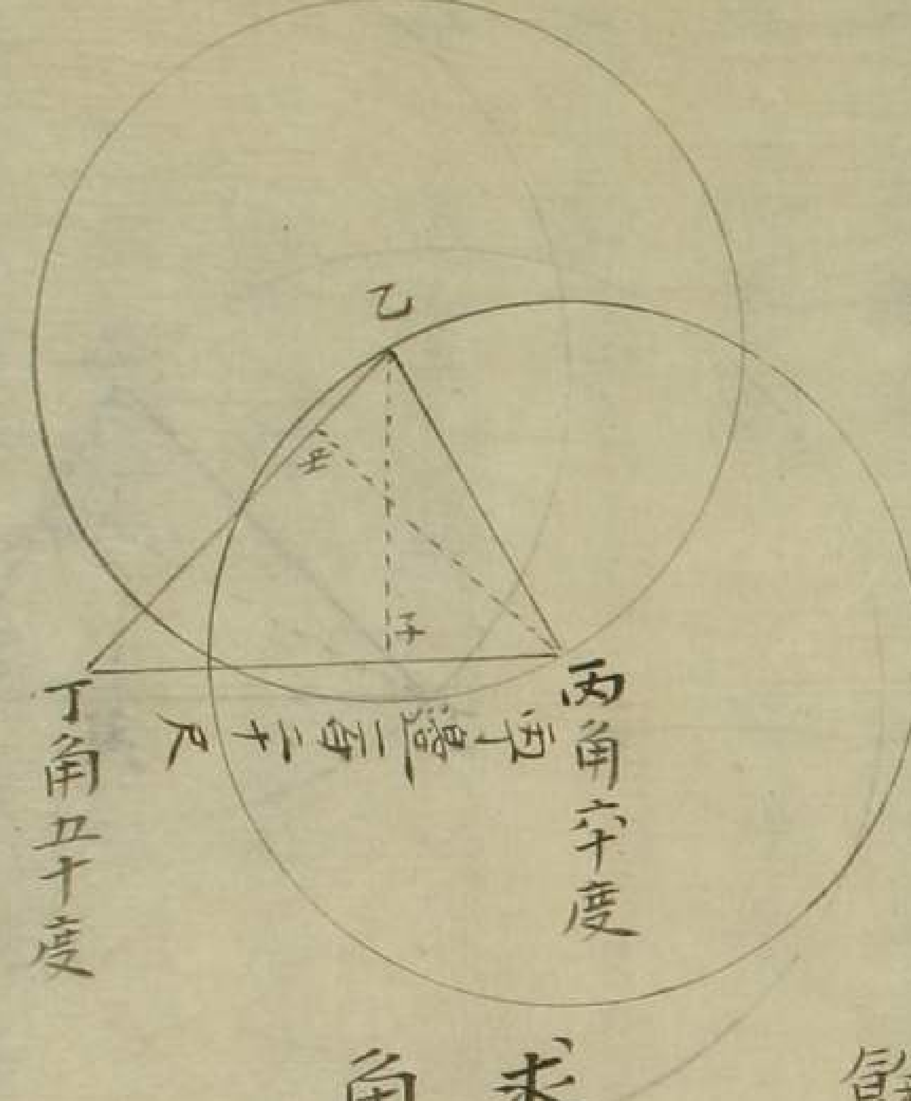
術以壬丁大邊。與丁癸邊。相加得一百六十二丈為總。又相減得五十丈為較。以較乘總得八千一百丈為實。以壬癸邊九十丈為法除之。仍得九十丈。與壬癸邊數等。即知癸角為正方角



依術求得癸角為正方角。定為句股形

一求丁角

銳角形第一術



求乙角術丙角丁角相併以減半周餘七十度為乙角

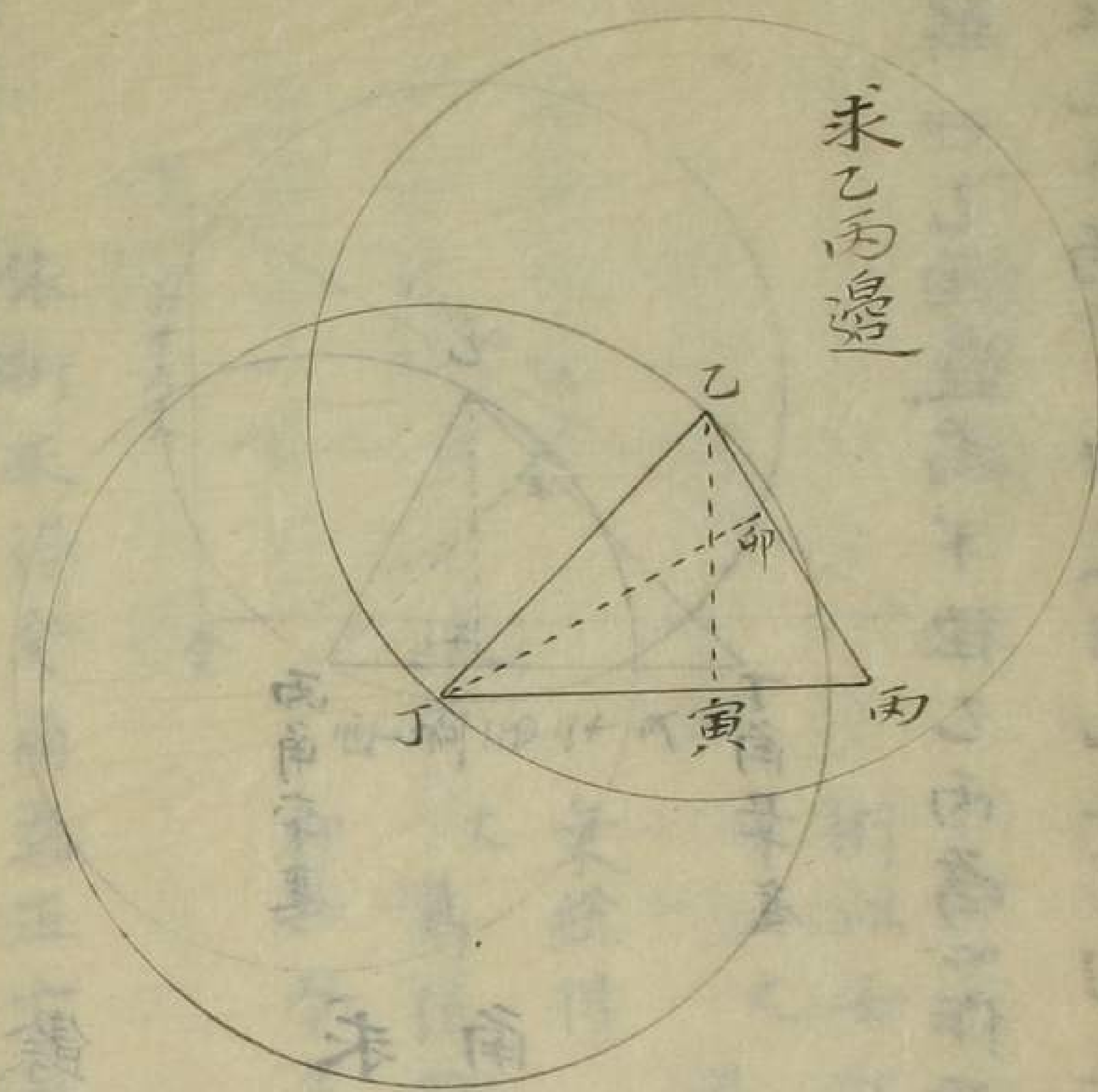
求乙丁邊術 以乙角正玄比丙丁若丙角正玄与乙丁

保解曰乙丙邊為半徑乙丙為心作兩圈見其正玄乙角正玄丙壬丙角正玄乙子丙壬丁句股形乙子丁句股形兩句股依丁角而成 故比例等

先有三邊

假如壬癸丁三角形。有壬丁邊一百〇六丈。壬癸邊九十丈。癸

求乙丙邊術以乙角正玄比丙丁
若丁角正玄与乙丙



保解曰乙丁邊為半徑乙丁為心作兩圈見其正玄乙角正玄丁卯丁角正
玄乙寅丁卯丙勾殳形乙寅丙勾殳形丙勾殳依丙角而成故比例等

術為以丁癸邊比壬癸邊。若半徑與丁角之切線

一　丁癸句　五十六丈
二　壬癸股　九十丈
三　半徑　一〇〇〇〇〇
四　丁角切線　一六〇七一四

依術求得丁角五十八度〇六分　以所得切線檢表即得

一求壬角
以丁角五十八度〇六分。與象限相減得餘三十一度五十四
分。為壬角

計開
先有三邊

壬丁邊一百零六丈　壬癸邊九十丈　癸丁邊五十六丈

求得三角

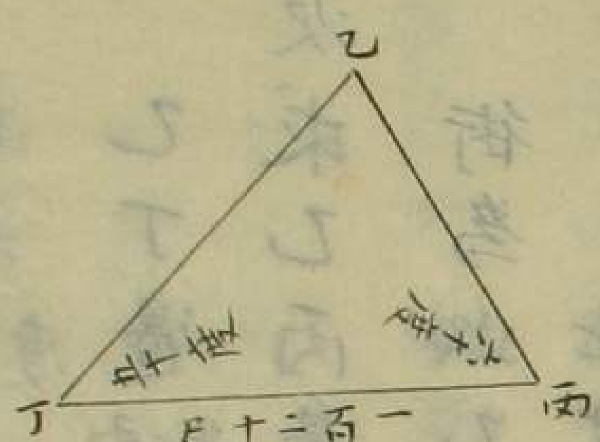
癸正方角　丁角五十八度零六分　壬角三十一度五十四分

右例亦以邊求角而先不知其為句股形。故兼用邊。是為句股形第二術之第二支

銳角形第一術　有兩角一邊。求餘角餘邊

假如乙丙丁銳角形。有丙角六十度。丁角五十度。丙丁邊一百二十尺

先求乙角



術以丙角六十度。丁角五十度。相併。得一百一十度。以減半周一百八十度。餘七十度。為乙角

次求乙丁邊

術為以乙角正弦。比丙丁邊。若丙角正弦。與乙丁邊

一　乙角度七十　正弦　九三九六九
二　丙丁邊即乙角對邊　一百二十尺
三　丙角度六十　正弦　八六六〇三
四　乙丁邊即丙角對邊　一百一十尺〇六寸

次求乙丙邊

術為以乙角正弦比丙丁邊。若丁角正弦。與乙丙邊

一　乙角度七十　正弦　九三九六九
二　丙丁乙角對邊　一百二十尺
三　丁角度五十　正弦　七六六〇四
四　乙丙丁角對邊　〇九十七尺八寸

先有之三件
丙角度六十　丁角度五十　丙丁邊一百二十尺
今求得三件
乙角度七十　乙丁邊一百一十尺零六十　乙丙邊九十七尺八寸

右例。先有之邊在兩角之間也。若先有之邊。與一角相對。亦同。蓋三角形。有兩角。即有第三角。故無兩法。

銳角形第二術　有一角兩邊。求餘角餘邊

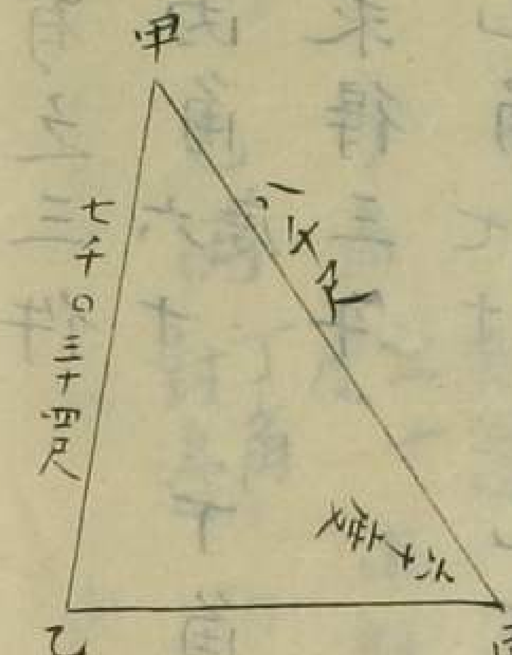
此分二支

一先有之角。與一邊相對

一先有之角。不與邊相對

假如　甲乙丙銳角形。有丙角六十度。甲丙邊八千尺。甲乙邊七千零三十四尺

先求乙角



術為以甲乙邊。比甲丙邊。若丙角正弦。與乙角正弦

一　甲乙　丙角對邊　七千〇三十四尺

二　甲丙　乙角對邊　八千尺

三　丙角六十度　正弦　八六六〇三

四　乙角　正弦　九八四九六

檢正弦表。得乙角八十度〇三分

次求甲角

以丙角乙角相併。得一百四十度〇三分。以減半周。餘三十九度五十七分。為甲角

次求乙丙邊

術為以乙角之正弦。比甲角之正弦。若甲丙邊之與乙丙邊

一　乙角八十度三分。正弦　九八四九六

二　甲角五十九度三十七分　正弦　六四二一二

三　甲丙對乙角邊　八千尺

四　乙丙對甲角邊　五千二百一十五尺

計開

先有之三件

丙角六十度。甲丙邊八千尺　乙甲邊七千〇三十四尺

今求得三件

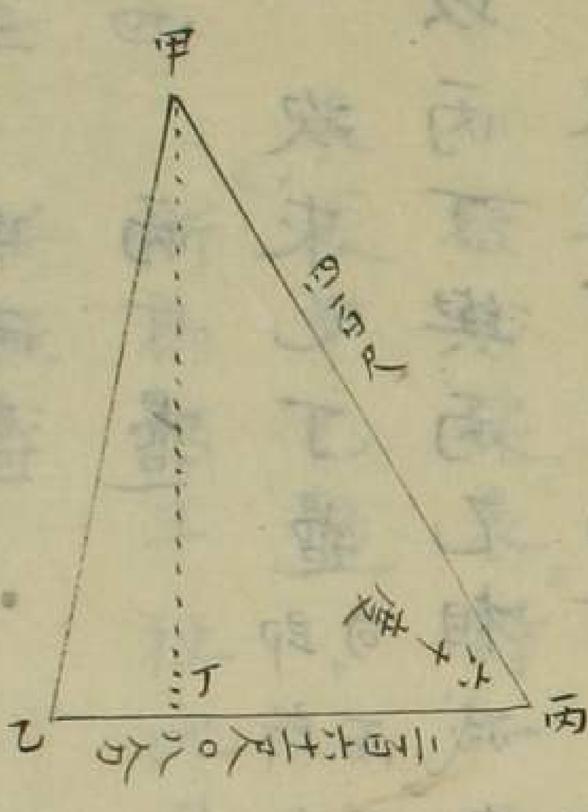
乙角八十度〇三分　甲角五十九度三十七分　乙丙邊五千二百一十五尺

右例有兩邊一角而角與一邊相對。是為銳角形第二術之第一支

假如甲乙丙銳角形有甲丙邊四百尺　乙丙邊二百六十一尺〇八分　丙角六十度　角在兩邊之中不與邊對。求甲乙邊

先求中長線。分為兩句股形

術為以半徑比丙角正弦。若甲丙邊。與甲丁中長線



一　半徑　一〇〇〇〇〇

二　丙角六十度正弦　〇八六六〇三

三　甲丙邊　四百尺

四　甲丁中長線　三百四十六尺四寸一分

次求丙丁邊（即所分甲丁丙形之句。而甲丙為之弦。）

術為以半徑比丙角餘弦。若甲丙邊。與丙丁邊

一 半徑

二 丙角六十度餘弦　〇五〇〇〇〇

三 甲丙邊　四百尺

四 丙丁邊　二百尺

次求乙丁邊（即所分甲丁乙形之句。而甲丁為之股）

以丙丁與丙乙相減。餘六十一尺〇八分。為乙丁

次求丁甲乙分角（即分形甲丁乙句股之甲角）

術為以甲丁中長線。比乙丁分邊若半徑與甲分角切線

一 甲丁中長線　三百四十六尺四寸一分

二 乙丁分邊　〇六十一尺〇八分

三 半徑　一〇〇〇〇〇

四 甲分角切線　〇一七六三三

檢切線表。得一十度為甲分角

末求甲乙邊

術為以半徑比甲分角割線。若甲丁中長線。與甲乙邊

一 半徑　一〇〇〇〇〇

二 甲分角十度割線　一〇一五四三

三 甲丁中長線　三百四十六尺四寸一分

四 求甲乙邊　三百五十一尺七寸五分

求甲全角

以丙角六十度之餘角三十度。即分形甲丁丙之甲分角與求到甲分角一十度。相併得四十度。為甲全角

求乙角

以甲分角一十度。減象限。得八十度。為乙角或併丙甲二角減半周。亦同

計開

先有之三件

甲丙邊四百尺 乙丙邊二百六十一尺〇八分 丙角六十度

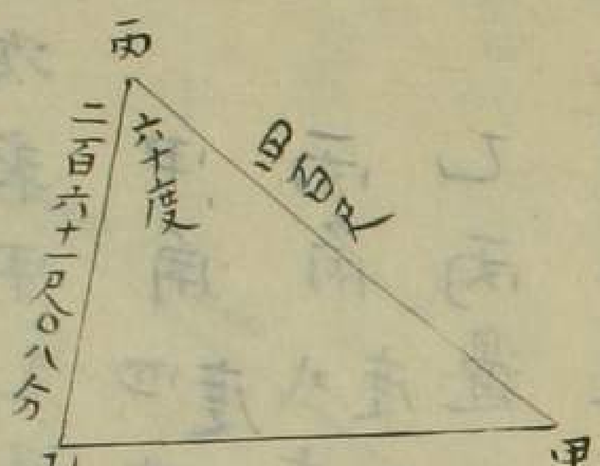
今求得三件

甲乙邊三百五十一尺七寸五分 甲角四十度 乙角八十度

右例有兩邊一角。而角在兩邊之中。不與邊對。故用分形以取句股。是為鈍角形第二術之第二支

又術 新增 用切線分外角

假如甲乙丙銳角形。有甲丙邊四百尺 乙丙邊二百六十一尺〇八分。丙角六十度 此即前例。但徑求甲角



術以甲丙乙丙兩邊。相併為總。相減為較。又以丙角六十度減半周。得外角一百二十度。半之得半外角六十度。檢其切線。依三率法。求得半較角。以減半外角得甲角

一 兩邊總 六百六十一尺〇八分

二 兩邊較 一百三十八尺九寸二分

三 半外角切線 一七三二〇五

四 半較角切線 〇三六三九七

捡切線表。得二十度為半較角。轉與半外角六十度相減

得甲角四十度

次求乙角

併甲丙二角。共一百度。以減半周。得餘八十度。為乙角

次求甲乙邊

一 甲角四十度正弦 六四二七九

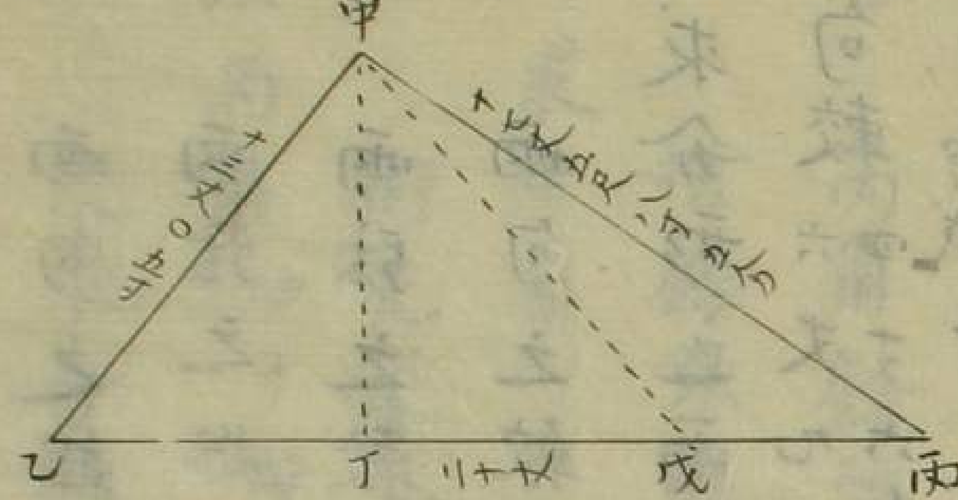
二 丙角八十度正弦 八六六〇三

三 乙丙邊 二百六十一尺。八分

四 甲乙邊 三百五十一尺七寸五分

銳角形第三術 有三邊求角

假如甲乙丙銳角形。有乙丙邊二十丈。甲丙邊一十七丈五尺八寸五分。乙甲邊一十三丈。五寸



術曰。任以乙丙大邊為底。從甲角作甲丁虛垂線至底。分為兩句股形

一甲丁乙形。以甲乙邊為弦。丁乙為句

一甲丁丙形。以甲丙邊為弦。丁丙為句

兩弦相併為総。相減為較 兩句相併即乙丙邊原數為句総 求兩句相減之數為句較

術為以句総比弦総。若弦較與句較也

一　兩句之総 即乙丙　二十丈

二　兩弦之総　三十丈。六尺三寸五分

三　兩弦之較　四丈五尺三寸五分

四　兩句之較 即丙戊　六丈九尺四寸六分

求分形之兩句

以句較 六丈九尺四寸六分 減句総 即乙丙 二十丈。餘乙戊。一十三丈。五寸四分 半之。得
丁乙 即戊丁 六丈五尺二寸七分。為 甲丁乙 分形之句
又以戊丁 六丈五尺二寸七分。加句較。六丈九尺四寸六分。即戊丙 得丁丙一十三丈
四尺七寸三分。為 甲丁丙 分形之句

求丙角

術為以甲丙弦。比丁丙句。若半徑與丙角之餘弦

一　甲丙邊　一十七丈五尺八寸五分

二　丁丙分邊　一十三丈四尺七寸三分

三　半徑　一。。。。。

四　丙角餘弦　。七六六一六

檢餘弦表。得丙角四十度

求甲角

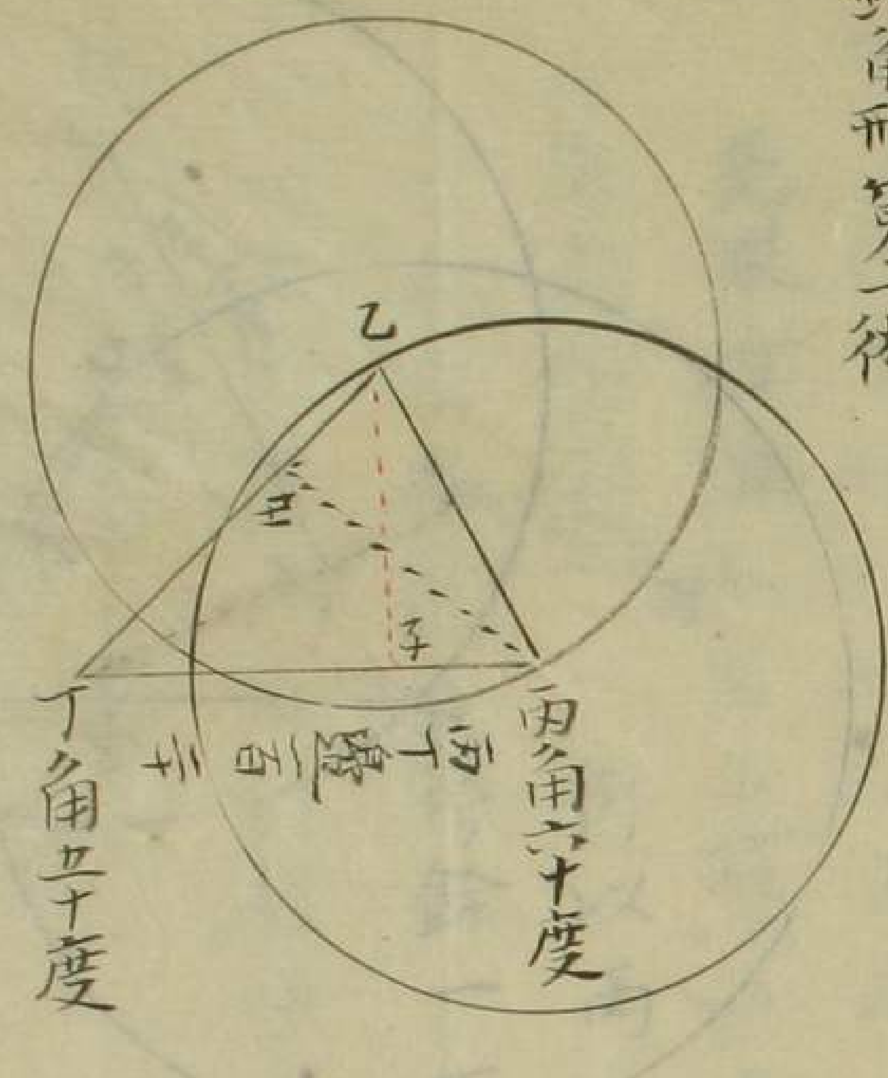
術先求分形大半之甲角
以丙角 四十度。減象限。餘五十度。為 丁甲丙 分形之甲角
次求分形小半之甲角
術為以甲乙弦。比丁乙句。若半徑與分形甲角之正弦

一　甲乙邊　一十三丈〇五寸
二　丁乙分邊　〇六丈五尺二寸七分
三　半徑　一〇〇〇〇〇
四　甲分角正弦　〇五〇〇一五
撿正弦表。得三十度。為丁甲乙分形之甲角
併分形兩甲角。先得五十度。後得三十度得共八十度。為甲全角
求乙角
併丙甲二角。共一百二十度以減半周。得餘六十度。為乙角

計開
先有三邊
甲丙邊一十七丈五尺八寸五分　乙丙邊二十丈　乙甲邊一十三丈〇五寸

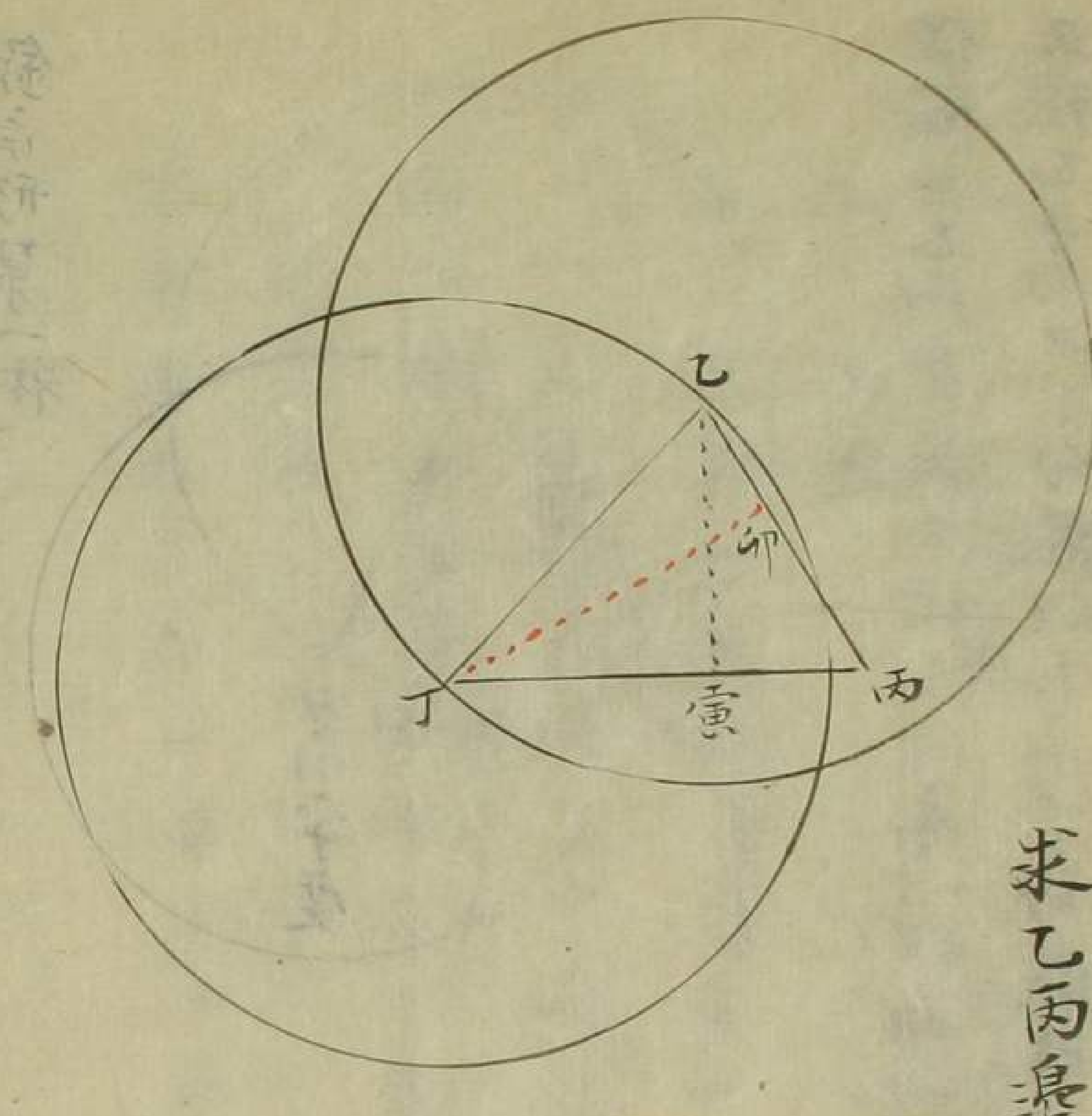
求得三角
丙角四十度　甲角八十度　乙角六十度

銳角形第一術
長澤保圖之



求乙角術丙角丁相併以減半周
餘七十度為乙角
求乙丁邊術以乙角正弦比丙丁邊
若丙角正弦與乙丁邊

保解曰乙丙邊為半徑乙丙為心作兩圈見其正弦乙角正弦丙壬丙角
正弦乙子丙壬丁句股形乙子丁句股形兩句股依丁角而成故比例等



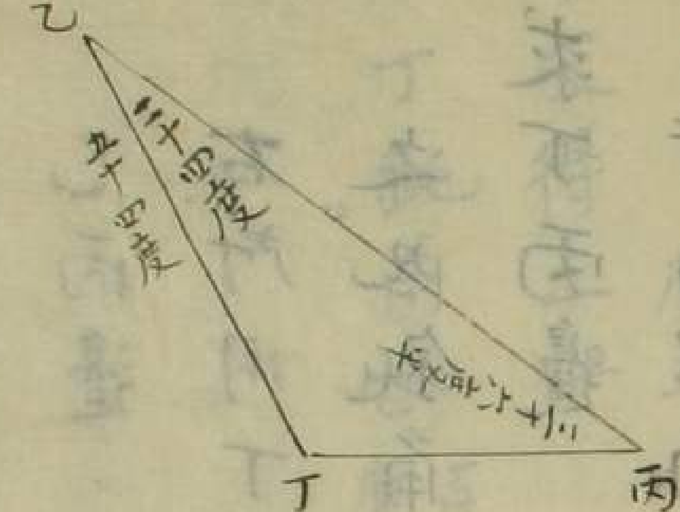
求乙丙邊

求乙丙邊術以乙角正弦比丙丁邊
若丁角正弦與乙丙邊

保解曰乙丁邊為半径乙丁為心
作兩圈見其正弦乙角正弦丁卯
丁角正弦乙寅丁卯丙句股形乙寅
丙句股形兩句股依丙角而成故比
例等

鈍角形第一術　有兩角一邊、求餘角餘邊
假如乙丙丁鈍角形。有丙角三十六度半。乙角二十四度。丁乙
邊五十四丈

先求丁角
術以丙乙二角併之。共六十度半。以減半周。
得餘一百一十九度半。為丁鈍角



次求乙丙邊
術為以丙角正弦。比丁角正弦。若乙丁邊。與乙丙邊

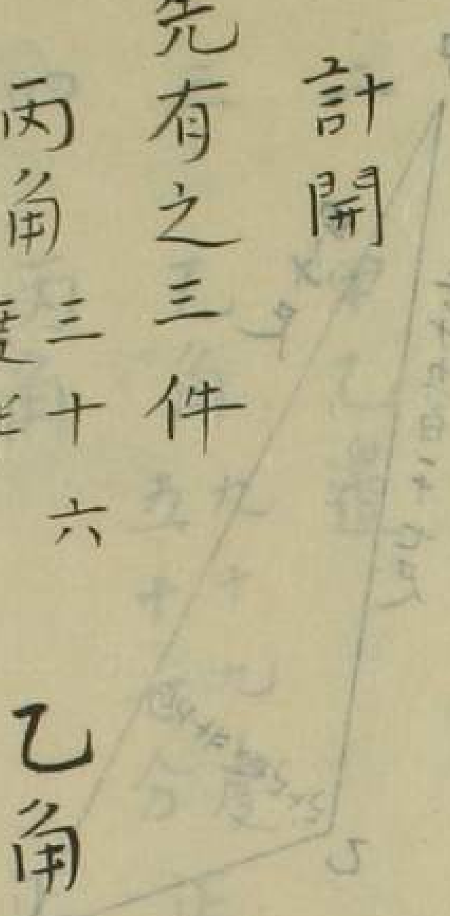
一 丙角三十六度三十分 正弦 五九四八二
二 丁角一百十九度三十分 正弦 八七〇三六
三 乙丁邊 五十四丈
四 乙丙邊 七十九丈〇一寸

右所用丁角正弦。即六十度半正弦。以鈍角度減半周用之。凡鈍角並同

求丁丙邊

術為以丙角正弦。比乙角正弦。若乙丁邊。與丁丙邊

一 丙角三十六度三十分 正弦 五九四八二
二 乙角二十四度 正弦 四〇六七四
三 乙丁邊 五十四丈
四 丁丙邊 三十六丈九尺二寸



計開

先有之三件

丙角三十六度半

乙角二十四度

丁乙邊五十四丈

今求得三件

丁鈍角一百一十九度半

乙丙邊七十九丈〇一寸

丁丙邊三十六丈九尺二寸

鈍角形第二術 有一角兩邊求餘角餘邊

亦分二支

一先有對角之邊

一先有二邊。皆角旁之邊。而不對角

假如甲乙丙鈍角形有乙角九十九度五十七分。甲丙對邊四千尺。甲乙邊三千五百一十七尺

求丙角

術為以甲丙對邊。比甲乙邊。若乙角正弦。與丙角正弦

一 甲丙邊 四千尺

二 甲乙邊 三千五百一十七尺

三 乙角九十九度五十七分 正弦 九八四九六 即八十度三分正弦

四 丙角 正弦 八六六〇三

檢表。得丙角六十度

求甲角

併乙丙二角。共一百五十九度五十七分。以減半周。得餘二十度〇三分。為甲角

求乙丙邊

術為以乙角之正弦。比甲角之正弦。若甲丙對邊。與乙丙邊

一　乙角九十九度零五十七分　正弦　九八四六九

二　甲角二十度零三分　正弦　三四二八四

三　甲丙邊　四千尺

四　乙丙邊　一千三百九十二尺

計開

先有之三件

乙鈍角九十九度五十七分　甲丙邊四千尺　甲乙邊三千五百一十七尺

今求得三件

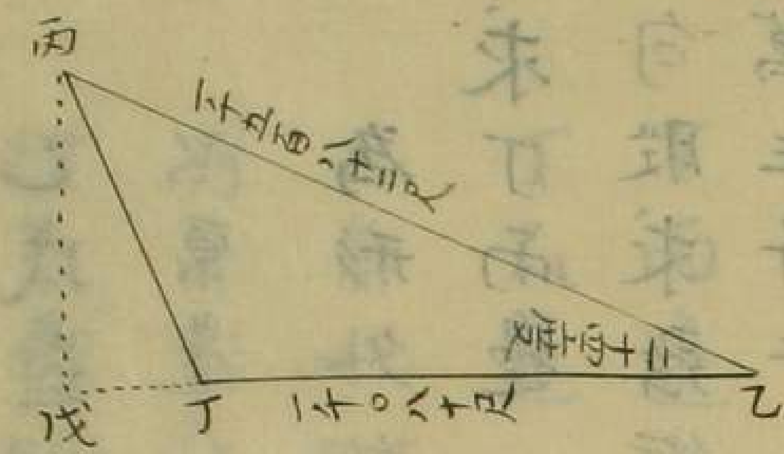
丙角六十度　甲角二十度〇三分　乙丙邊一千三百九十二尺

右例有兩邊一角。而先有對角之邊。是為鈍角形第二術之第一支

假如乙丁丙鈍角形。有乙丁邊一千零八十尺　乙丙邊一千五百八十二尺　乙角二十四度　角在兩邊之中。不與邊對

術先求形外之虛垂線。補成正方角

從不知之丙角。作虛垂線於形外。如丙戊。亦引乙丁線於形外。如丁戊。兩虛線遇於戊。成正方角



術為以半徑比乙角正弦。若乙丙邊與丙戊。

一　半徑　一〇〇〇〇〇

二　乙角二十四度　正弦　〇四〇六七四

三　乙丙邊　一千五百八十二尺

四　丙戊邊即虛垂線　〇六百四十三尺

又以半徑比乙角之餘弦。若乙丙邊與乙戊

一 半徑 一〇〇〇〇〇

二 乙角 二十四度 餘弦 〇九一三五五

三 乙丙邊 一千五百八十二尺

四 乙戊邊 即乙丁引長線 一千四百四十五尺

以原邊乙丁。一千八十尺。與引長乙戊邊相減。得丁戊 三百六十五尺 為形外所作虛句股形之句。而原邊丁丙為之弦 則先得丙戊垂線為股。

求丁丙邊

依句股求弦術。以丙戊股自乘。四十一萬三千四百四十九尺。丁戊句自乘 十三萬三千二百二十五尺。併之。得數 五十四萬六千六百七十四尺 為實。平方開之得弦七百三十九尺為丁丙邊

求丙角

術為以丁丙邊。比丁乙邊。若乙角正弦。與丙角正弦

一 丁丙邊 〇七百三十九尺

二 丁乙邊 一千〇八十尺

三 乙角 二十四度 正弦 四〇六七四

四 丙角 正弦 五九四四二

檢表。得丙角三十六度二十九分

求丁角

併乙丙二角。共 六十度二十九分。以減半周。得餘一百一十九度三十一分。為丁鈍角

計開

先有之三件

乙丁邊一千零八十尺　乙丙邊一千五百八十二尺　乙角二十四度

今求得三件

丁丙邊七百三十九尺　丙角三十六度二十九分　丁鈍角一百一十九度三十一分

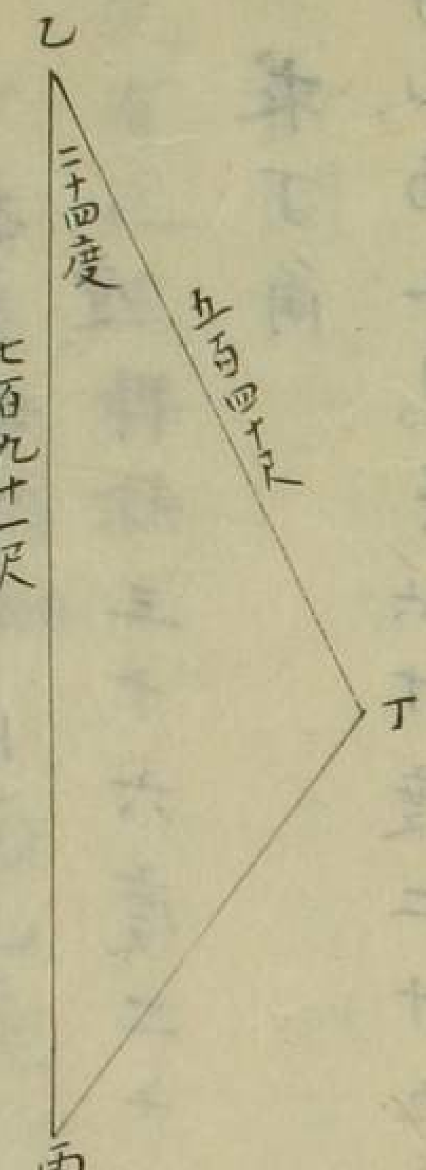
右例。有兩邊一角而兩邊並在角之兩旁。不與角對。

是為鈍角形第二術之第二支

又術　新增　用切線分外角

假如乙丙丁鈍角形。有一乙邊五百四十尺。丙乙邊七百九十一尺。乙角二十四度　角在兩邊之中。不與邊對

求丙角



以丁乙丙乙兩邊。相併為總相減為較。又以乙角二十四度。減半周得外角一百五十六度。半之。得半外角七十八度。撿其切線。得四七〇四六三

術為以邊總比邊較。若半外角切線。與半較角切線

一　兩邊之総　一千三百三十一尺

二　兩邊之較　〇二百五十一尺

三　半外角切線　四七〇四六三

四　半較角切線　〇八八七一九

撿表。得半較角四十一度三十五分。以轉減半外角七十八度。得餘三十六度二十五分。為丙角

求丁角

併乙丙二角。共六十度二十五分。以減半周。得一百一十九度三十五分。為丁鈍角

求丁丙邊

術為以丙角正弦。比乙角正弦。若乙丁邊。與丁丙邊

一　丙角三十六度二十五分正弦　五九三六五

二　乙角二十四度正弦　四〇六七四

三　乙丁邊　五百四十尺

四　丁丙邊　三百六十九尺九寸八分

計開

先有之三件

丁乙邊五百四十尺　丙乙邊七百九十一尺　乙角二十四度

今求得三件

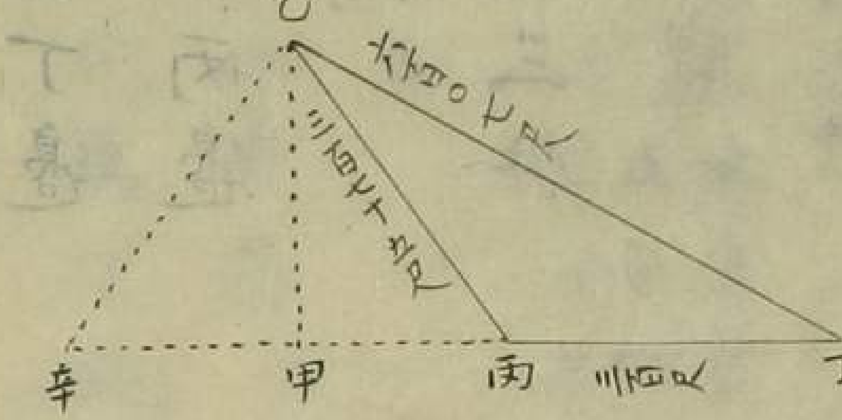
丙角三十六度二十五分　丁鈍角一百一十九度三十五分　丁丙邊三百六十九尺九寸八分

鈍角形第三術 有三邊求角 新式

假如乙丙丁鈍角形。有乙丙邊三百七十五尺。乙丁邊六百七尺。丁丙邊三百尺

術自乙角作虛垂線至甲。又引丁丙線橫出過於甲。而成正方角。則成乙甲丁句股形

又引橫線至辛。便甲辛如丙甲。成乙甲辛句股形。則丁辛為兩句之總。而所設丁丙邊。為兩句之較



一 又乙丁邊為大形丁乙甲之弦。乙丙邊為小形乙甲辛即乙甲丙之弦。兩弦相併為總。相減為較

術為以句較比弦較若弦總與句總

一 句較即丁丙邊 三百尺

二 弦較即乙丁內減乙丙之餘 二百三十二尺

三 弦總即乙丁乙丙二邊相併 九百八十二尺

四 句總 七百五十九尺四寸

以句較三百尺。減所得句總。七百五十九尺四寸。餘數四百五十九尺四寸。半之。得數二百二十九尺七寸。為小形之句甲丙

以甲丙之小形句。加丁丙較。三百尺。得數五百二十九尺七寸為大形之句甲丁

求丁角用乙甲丁大形

術為以乙丁弦。比丁甲句。若半徑與丁角之餘弦

一 乙丁弦 六百〇七尺

二 甲丁句 五百二十九尺七寸

三 半徑 一〇〇〇〇〇

四 丁角餘弦 〇八七二六五

撿表。得丁角二十九度一十四分

求丙角 用乙甲丙小形

術為以甲丙句。比乙丙弦。若半徑與丙角之割線

一 甲丙句 二百二十九尺七寸

二 乙丙弦 三百七十五尺

三 半徑 一〇〇〇〇〇

四 丙角割線 一六三二五六

撿表。得丙角五十二度一十四分。為本形之丙外角以減半周。得丙鈍角一百二十七度四十六分

求乙角

併丁丙二角。所得度分共一百五十七度。以減半周。得餘二十三度為乙角

計開

先有三邊

乙丙邊三百七十五尺 乙丁邊六百〇七尺 丁丙邊三百尺

求得三角

丁角二十九度一十四分 丙鈍角一百二十七度四十六分 乙角二十三度

右例。鈍角形三邊求角。作垂線於形外徑求鈍角。乃

新式也。若以大邊為底。從鈍角分中長線。同銳角第
三術

三角法舉要卷三

內容外切 三角測量之用。在邊與角。而其內容外切。亦所當明。故次于算例之後

內容有二。曰本形。曰他形

一三角求積

積謂之冪。亦謂之面。乃本形所有

一三角容員

一三角容方

以上皆形內所容之他形

外切惟一

一三角形外切之員

三角求積第一術

底與高相乘。折半見積

内分二支

一句股形。即以句股為底為高

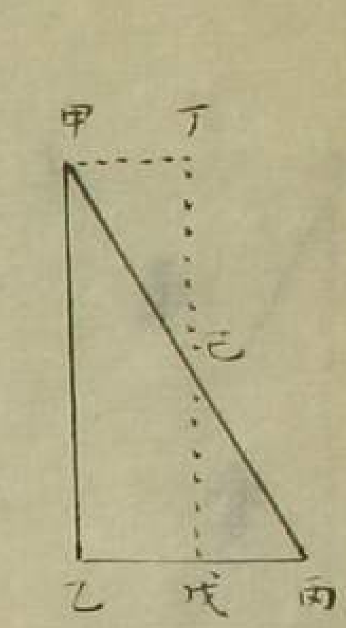
一鋭角鈍角形。任以一邊為底。而求其垂線為高

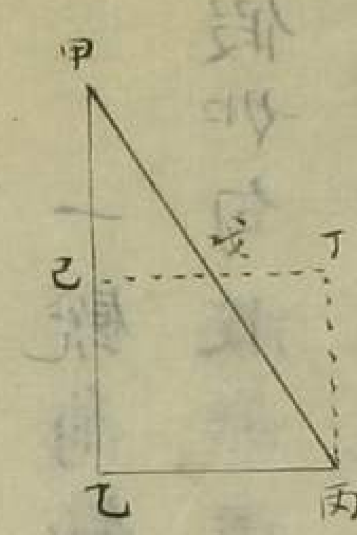
假如句股形。甲乙股一百二十尺乙丙句三十五尺求積

術以甲乙股乙丙句相乘。四千二百尺折半得積

凡求得句股形積。二千一百尺

如圖。甲乙股與乙丙句相乘。成甲乙丙丁長方形。其形半實半虛。故折半見積





或以句折半。十七尺半乘股。亦得積二千一百尺
如圖。乙丙句折半於戊。以乙戊乘甲乙。成甲乙戊丁形。是移丙戊己。補甲丁己也

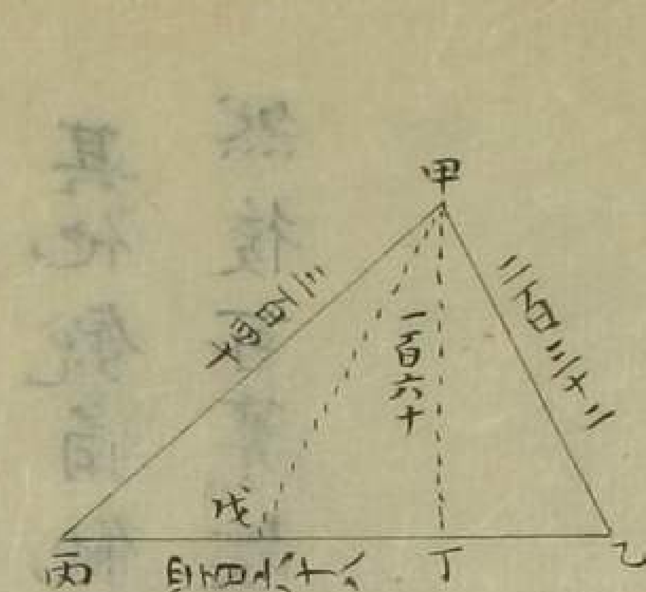
或以股折半。六十尺乘句。亦得積二千一百尺
如圖。甲乙股折半於己。以己乙乘乙丙。成己乙丙丁形。是移甲己戊。補戊丁丙也

右句股形。以句為底。以股為高。若以股為底。則句又為高。可互用也

句股形。有立有平。若平地句股。以句為闊。以股為長。其理無二

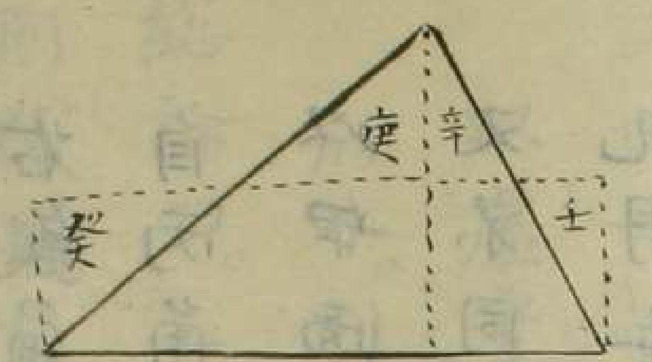
論曰。凡求平積。皆謂之冪。其形如網目。又似窗欞之空。皆以横直相交如十字。亦如機杼之有經緯而成布帛。故句股是其正法。何也。句股者。方形斜剖之半也。折半則成正剖之半方形矣。其他鋭角鈍角。或有直無横。有横無直。必以法求之。使成句股。然後可算。故句股者。三角法所依以立也

假如鋭角形。甲乙邊。二百三十二尺 甲丙邊。三百四十尺 乙丙邊。四百六十八尺 求積



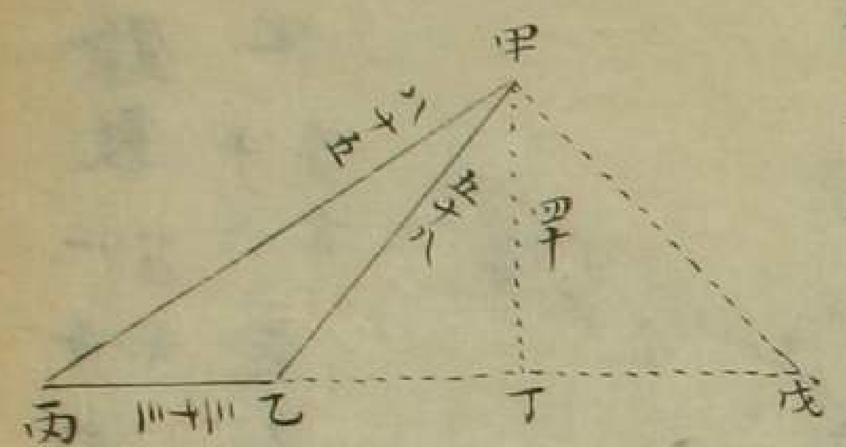
術先求垂線。用鋭角第三術。任以乙丙邊為底。以甲丙甲乙為兩弦。兩弦之較數。一百零八尺 總數。五百七十二尺 相乘 六萬一千七百七十六尺 為實。以乙丙底為法除之。得數。一百三十二尺 轉減乙丙。餘數 三百三十六尺 半之。得乙丁。一百六十八尺 依句股法。以乙丁自乘。二萬八千二百二十四尺 與甲乙自乘。五萬三千八百二十四尺 相減。餘數 二萬五千六百尺 平方開之。得甲丁垂線。一百六十尺 以甲丁垂線折半。乘乙丙底。得積

凡求得鋭角形積。三萬七千四百四十尺



如圖。移辛補壬。移庚補癸。則成長方形。即垂線折半乘底之積。

右鋭角形。任以乙丙邊為底。取垂線求積。若改用甲乙或甲丙邊為底。則所得垂線不同。而得積無異。故可以任用為底。

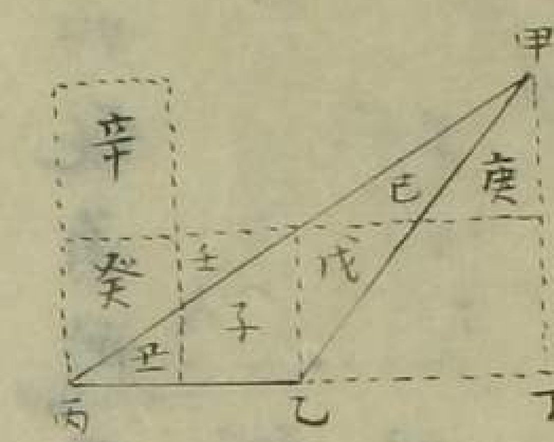


假如鈍角形。甲乙邊。五十八步 甲丙邊。八十五步 乙丙邊。三十三步 求積

術求垂線立於形外。用鈍角第三術。以乙丙為底。甲乙甲丙為兩弦。總數。一百四十三步 較數 二十七步 相乘 三千八百六十一步 為實。乙丙底為法除之。得數。一百一十七步 內減乙丙。餘數 八十四步 折半 四十二步 為乙丁。即乙丙引長邊 依句股法。乙丁自乘。一千七百六十四步 甲乙自乘。三千三百六十四步 相減。

餘數一千六百步平方開之。得甲丁。四十步為形外垂線。以乙丙底折半十六步半乘之。得積

凡求得鈍角形積。六百六十步



如圖。甲乙丙鈍角形。移戊補庚。移庚己補壬癸。

又移壬子補辛。成辛癸丑長方。即乙丙底折半乘中長甲丁之積

右鈍角形。以乙丙為底。故從甲角作垂線。若以甲乙為底。則自丙角作垂線。亦立形外。而垂線不同。然以之求積並同。若以甲丙為底從乙角作垂線。則在形內。如鈍角矣。其垂線必又不同。而其得積無有不同。故亦可任用一邊為底

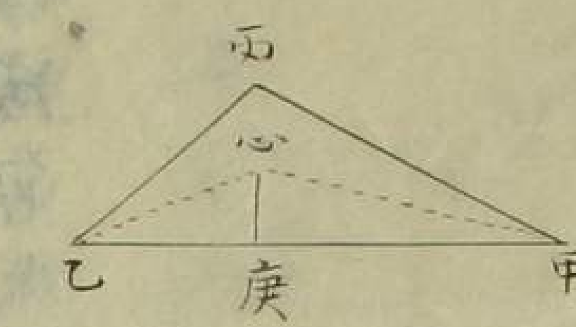
凡用垂線之高乘底見積。必其線上指天頂。底線之橫。下應地平。兩線相交。正如十字。故其所乘之冪積。皆成小平方。可以虛實相補。而求其積數。鈍角形引長底線以作垂線。立於形外。則兩線相遇。亦成十字正方之角矣

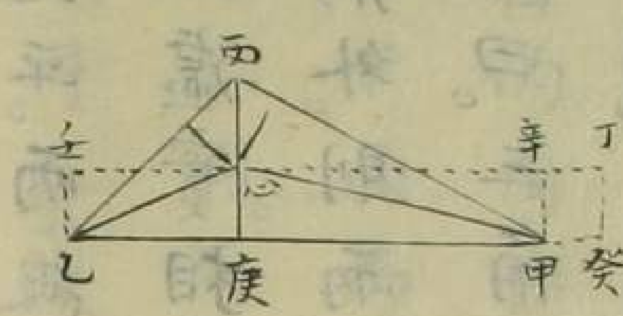
總論曰。三角形。作垂線於內。則分兩句股。鈍角形作垂線於外。則補成句股。皆句股法也

三角求積第二術

以中垂線乘半周得積謂之以量代算

假如鈍角形。乙丙邊五十八步甲乙邊。一百一十七步甲丙邊。八十五步求積





術平分甲乙兩角。各作線會于心。從心作十字垂線至乙甲邊。如心庚即中垂線也。乃量取中垂線心庚得數。一十八步合計三邊而半之一百三十步為半周。以半周乘中垂線。得積

凡求得鈍角形積。二千三百四十步

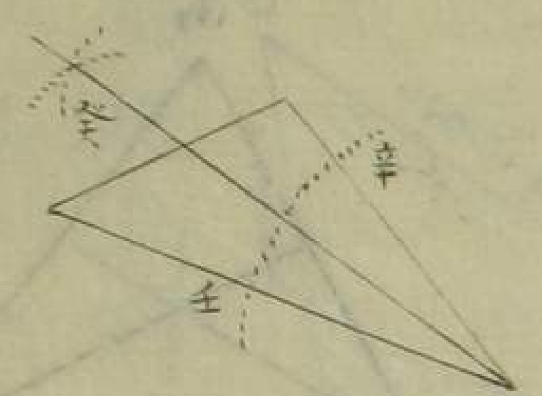
又術。如前取中垂線心庚為闊。半周為長。如乙癸及丁壬別作一長方形。如乙壬丁癸即與甲乙丙鈍角形等積

解曰。凡自形心作垂線至各邊皆等。故中垂線乘半周。為一切有法之形所公用。方員及五等面六等面至十等面以上並同。故以中垂線為闊。半周為長。其所作長方形。即與三角形等積。又解曰。中垂線至邊。皆十字正方角。即分各邊成句股形。以乘半周得積。即句股相乘折半之理

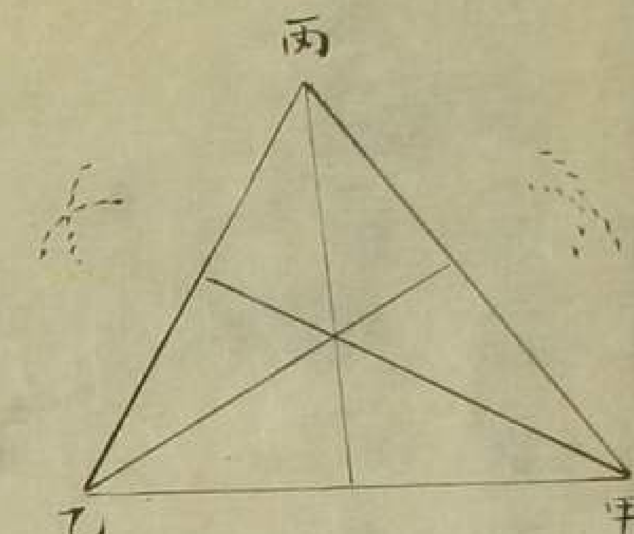
附分角術

有甲角。欲平分之

術以甲角為心。作虛半規。截角旁兩線。得辛壬二點。乃自。辛自壬各用為心。作弧線相遇于癸。作癸甲線。即分此角為兩平分



三角求心術



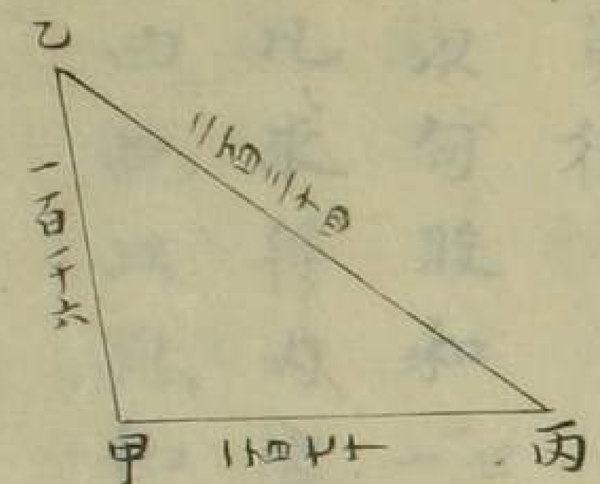
如上分角術。於甲角平分之。于乙角又平分之。兩平分之線。必相遇成一點。此一點即三角形之心

解曰。試再於丙角如上法分之。則亦必相遇於原點

三角求積第三術

以三較連乘。又乘半總。開方見積

假如鈍角形。甲乙邊一百一十六尺甲丙邊。一百七十尺乙丙邊。二百三十四尺求積



術合計三邊而半之。二百六十尺為半總。以與甲乙邊相減。得較。一百四十四尺與甲丙邊相減。得較。九十尺與乙丙邊相減。得較。二十六尺三較連乘。以兩較相乘得數。又以餘一較乘之也又以得數。三十三萬六千九百六十尺又以半總較之。得數。八千七百六十萬零九千六百尺平方開之。

得積

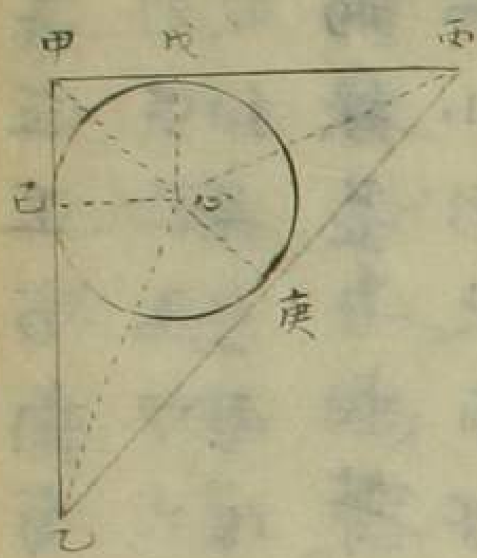
凡求得鈍角形積。九千三百六十尺

若係鈍角同法

解曰。此亦中垂線乘半周之理。但所得為冪乘冪之數。故開方見積。詳或問

三角容員第一術

以弦與句股。求容員徑。此術惟句股形有之。凡句股相併為和。以和與弦併為弦和和。以和與弦相減為弦和較



假如甲乙丙句股形。甲丙句。二十步 乙甲股。二十一步 乙丙弦。二十九步 求容員徑

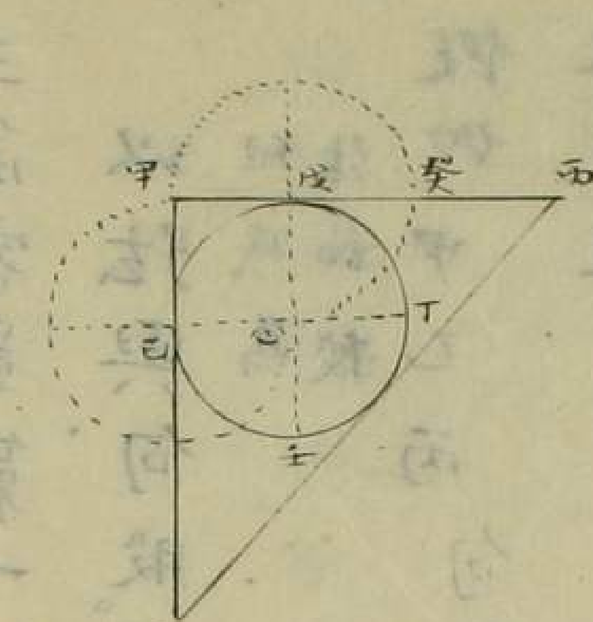
術以句股和。四十一步 與弦相減。得數為容員徑

凡求得內容員徑。一十二步

解曰。此以弦和較為容員徑

如圖。從容員心作半徑至邊。又作分角線至角。成六小句股形。則各角旁之兩線相等。如丙戊丙庚兩線。在丙角旁。則相等。乙庚乙己在乙角旁。甲戊甲己在甲角旁並兩線相等

其在正方角旁者。甲戊甲己乃弦和較也。于乙丙弦內。分丙庚以對丙戊。又分乙庚以對乙己。則其餘為甲戊及甲己。此即句股和與乙丙弦相較之數也。然即為內容員徑。何也。各角旁兩線並自相等。而正方角旁之兩線。又皆與容員半徑等。正方角旁而小形之角皆平分方角之半。則句股自相等。而甲戊等心戊。甲己等心己。然則弦和較者。正方角旁兩線甲戊甲己之合。即容員兩半徑心戊心己之合也。故弦和較即容員徑也



試以甲戊為半徑作員。則戊心亦半徑。而其全徑癸戊甲與容員徑丁心己等。以甲己為半徑作員。則己心亦半徑。而其全徑辛己甲與容員徑戊心壬亦等

三角容員第二術

以周與積。求容員徑

內含二支

一句股形。以弦和和為用亦可用半

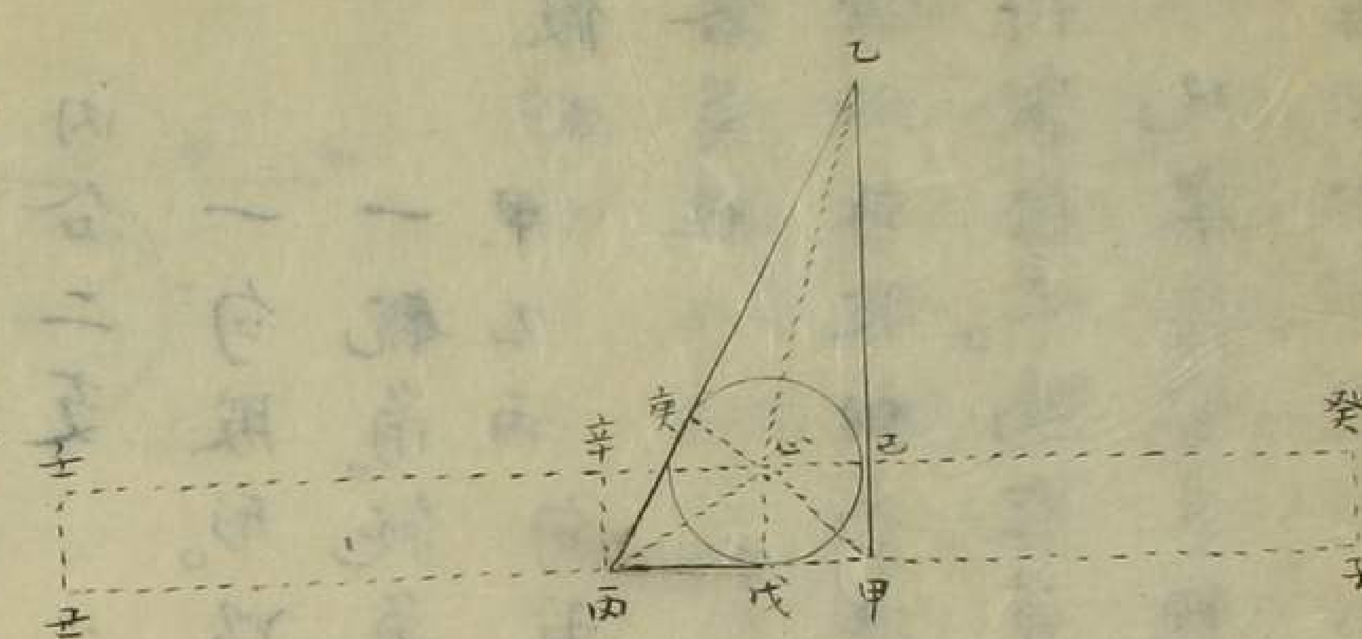
一銳角。鈍角形。以全周半周為用

假如甲乙丙句股形。甲丙句。一十六步甲乙股。三十步乙丙弦。二十四步求容員徑

術以句股相乘得數四百八十步為實。倂句股弦數共八十步為法。除之。得數倍之。為容員徑

凡求得容員徑。一十二步

解曰。此以弦和和除句股倍積。得容員半徑也



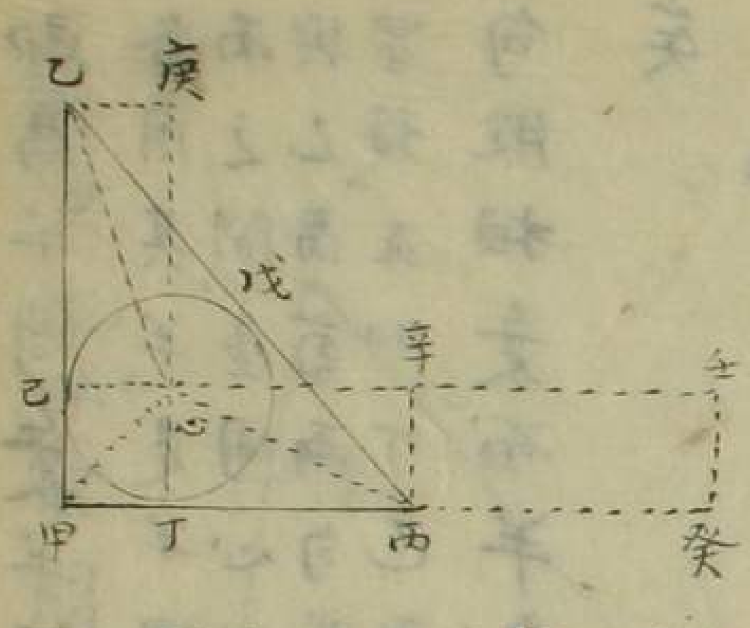
如圖。從容員心作對角線。分其形為三。一甲心丙。一甲心乙。一丙心乙。乃於甲丙句線兩端各引長之。截子甲如乙甲股。截丙丑如丙乙弦。則子丑線即弦和和也。乃自員心作癸壬直線。與丑子平行。兩端各聯之。成長方。又作辛丙線。分為三長方形。其闊並如員半徑。其長各如句如股如弦。而各為所分三小形之倍積。甲辛長方。如甲丙句之長。而以心戊半徑為濶。即為甲心丙分形之倍。甲癸長方。如乙甲股之長。而以同心己之半徑為闊。即為乙心甲形之倍。丙壬長方。如丙乙弦之長。而以同心庚之半徑為闊。即為乙心丙形之倍。合之即為本形倍積。與句股相乘同也句股相乘為倍積。見求積條。故以弦和和除句股相乘積。得容員半徑

假如甲乙丙句股形。甲丙句。八十八尺甲乙股。一百零五尺乙丙弦一百三十七尺。求容員徑

術以句股相乘而半之。得積四千六百二十尺為實。併句股弦數而半之。一百六十五尺為法除之。得數倍之。為容員徑

凡求得內容員徑。五十六尺

解曰。此以半周除句股形積。而得容員半徑也。半周即弦和和之半



如圖。從容員心分本形為六小句股。則同角之句股各相等。可以合之而各成小方形。同甲角之兩句股。成丁己小方形。同丙角之兩句股。可合之成丁辛長方形。以心辛丙形。等丙戊心也。同乙角之兩句股。可合之成己庚長方形。以乙庚心形。等心戊乙也。乃移己庚長方為辛癸長方。則癸甲即同半周。而癸己大長方。

即為半周乘半徑。而與句股積等也。六小形之句。皆原形之周。變為長方。則兩兩相得。而各用其半。是半周也。癸甲及壬已之長。並半周。壬癸及已甲辛丙之間。並同心丁。是半周乘半徑也。辛癸長方。與已庚等積。即與乙角剪兩句股等積。又丁辛長方。與丙角剪兩句股等積。再加丁已形。即與原設乙甲丙句股形等積矣。然則以句股相乘而半之者。句股形積也。故以半周除之。即容員半徑矣

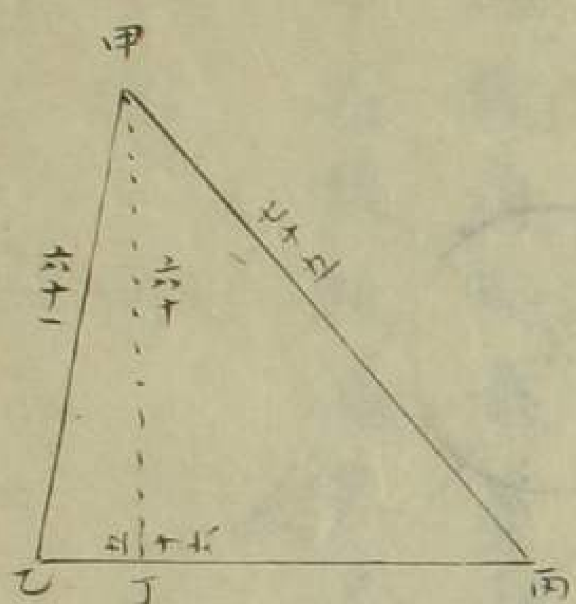
或以弦和和除四倍積。得容員全徑。並同前論

論曰。句股形。古法以弦和較為容員徑。與弦和和互相乘除。乃至精之理。測員海鏡引伸其例。以為測望之用。其變甚多。三角容員。蓋從此出。故為第一支

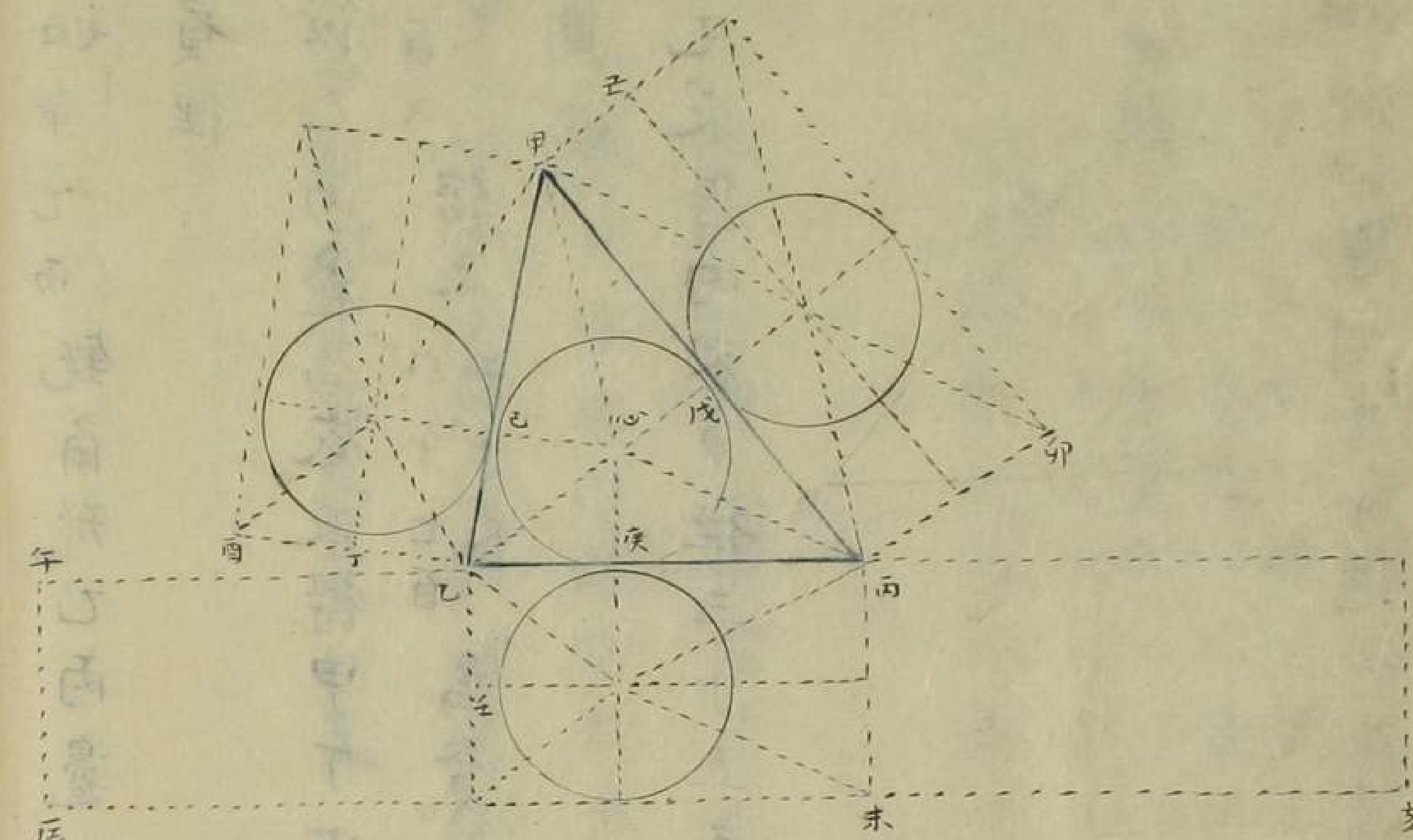
假如甲乙丙銳角形。乙丙邊。五十六尺甲丙邊。七十五尺甲乙邊。六十一尺求容員徑

術以乙丙邊為底。求得甲丁中長線。六十尺。法見求積。以乘底。得數三千三百六十尺倍之六千七百二十尺為實。合計三邊共一百九十二尺為法除之。得容員徑

凡求得內容員徑。三十五尺



解曰。此以全周除四倍積。得容員徑也



如圖。自容員心作對角線。分為小三角形三。各以員半徑為高。各邊為底。若於各邊作長方。而各以邊為長。半徑為闊。必倍大於各小三角形。如壬丙長方。倍大于丙心乙形。丙丑長方。倍大于丙心甲形。甲丁長方。倍大于甲心乙形。又作加一倍之長方。則四倍大於各小三角。如未乙長方。倍大于丙壬長方。必四倍于丙心乙三角。則卯甲亦四倍于丙心甲。而甲酉亦四倍于甲心乙。於是而通為一大長方。移卯甲長方為亥丙。移甲酉為乙辰。則成亥午大長方形矣。必四倍原形之冪。而以三邊合數為長。以容員之徑為闊。然則以中長線乘底而倍之者。正為積之四倍也。以三邊除之。豈不即得員徑乎

或以全周除倍積。得容員半徑

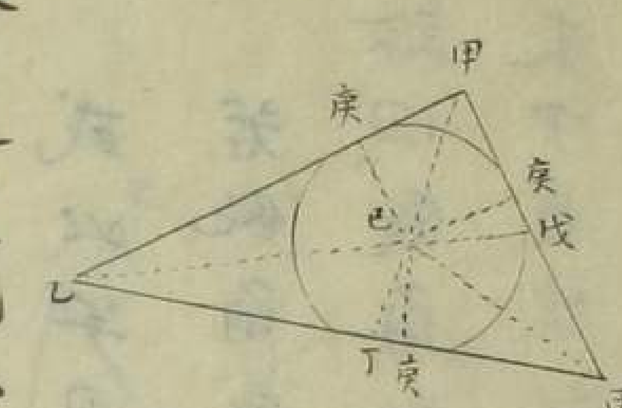
或以半周除積。得容員半徑。並同

若鈍角形。亦同上法

一論曰。銳角鈍角。並以周為法。此與句股形用弦和和同。但必先求中長線。故為第二支

三角容員第三術

以中垂線為員半徑。曰以量代算既不用算故不言邊角之數



假如甲乙丙三角形求容員徑。

如求積術。均分甲乙二角之度。各作虛線交於己。即己為容員之心

次以己為心。儘一邊為界。運規作員。此員界必切三邊

於是從己心向三邊各作十字垂線。必俱在切員之點而等。為員半徑。知半徑。知全徑矣。半徑各如己庚線

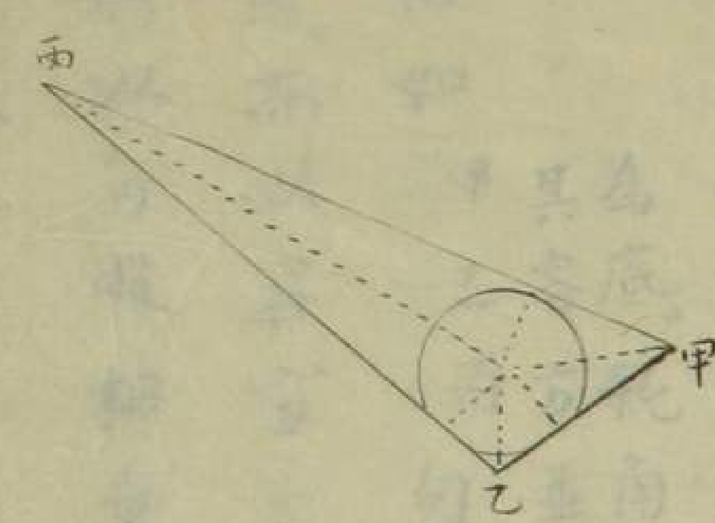
論曰。此容員心。即三角形之心。故以容員半徑乘半總即得積也

又案此術。亦句股及銳鈍兩角通用

三角容員第四術

用三較連乘

假如甲乙丙鈍角形。乙丙邊四百三十二尺甲丙邊五百尺甲乙邊。一百四十八尺求容員徑



術以半總五百四十尺求得乙丙邊較。一百八尺。甲丙邊較。四十尺乙甲邊較。三百九十二尺三較連乘得數一百六十九萬三千四百四十尺以半總除之。得數三千一百四三十六尺因之一萬二千五百四十四尺為實。平方開之。得容員徑

凡求得內容員徑。一百一十二尺

銳角同法

解曰。此所得者。為容員徑上之自乘方冪。故開方得徑

三角容方第一術

合底與高除倍積。得容方徑

内分二支

一句股形。即以句股為底為高。即句股和也。其容方依正方角

一三角形以一邊為底。求其垂線為高。句股形以弦為底。鈍角形三邊皆可為底。鈍角形以大邊為底。其容方並依為底之邊

假如甲乙丙句股形。甲丙股。三十六尺 乙丙句。一十八尺 求容方。依正方角。而以容方之一角切於弦

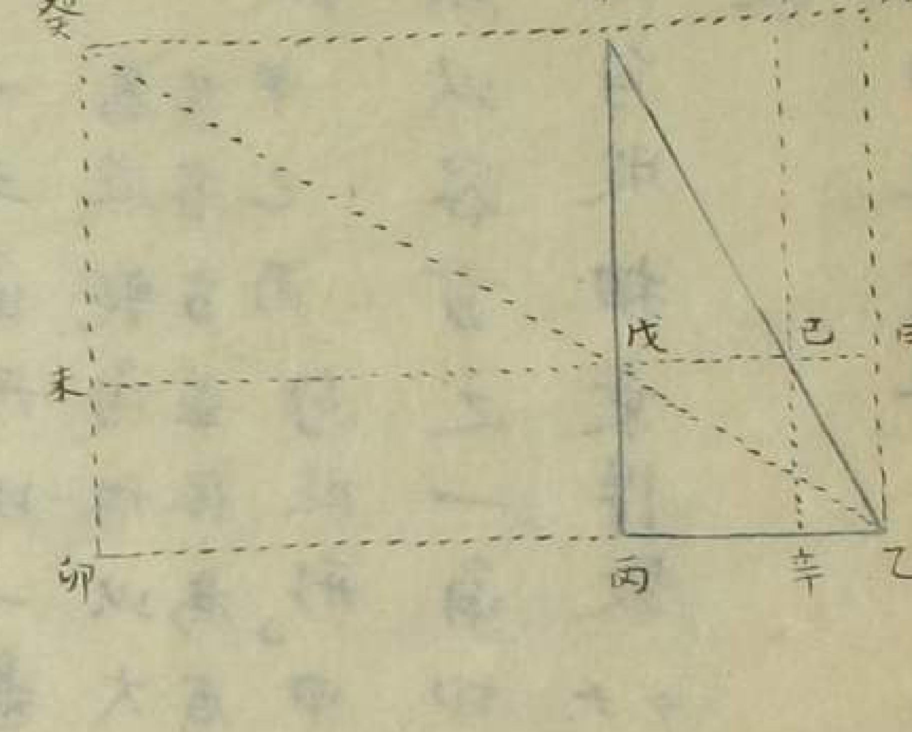
術以句股相乘得數六百四十八尺為實。以句股和五十四尺為法除之得所求

求到内容方徑。一十二尺

如圖。作寅乙線與股平行。作寅甲線與句平行。成寅丙長方。為句股形倍積

次引寅甲線橫出。截之於癸。引乙丙句橫出。截之於卯。使引出兩線甲癸及丙卯皆如甲丙股。仍作卯癸線聯之

乃從癸作斜線至乙。割甲丙股於戊。則戊丙為所求容方之邊。又從戊作申未橫線。與上下兩線平行。割甲乙弦於己。則己戊為所求容方之又一邊。未從己作午辛立線。割丙乙句於辛。則己辛及辛丙又為兩對邊。而四邊相等。為句股形內所容之方



解曰。寅卯大長方。以癸乙斜線分兩句股。則相等。而寅戊與戊卯兩長方等。則寅丙長方與申卯長方亦等。寅丙內。減寅戊而加相等之戊卯。即成甲卯。夫寅丙者。句股倍積。而申卯者。句股和乘容方徑也。乙丙句。丙卯股。合之為申卯形之長。申乙及未卯並同方徑為闊。故以句股和除倍積。得容方徑。

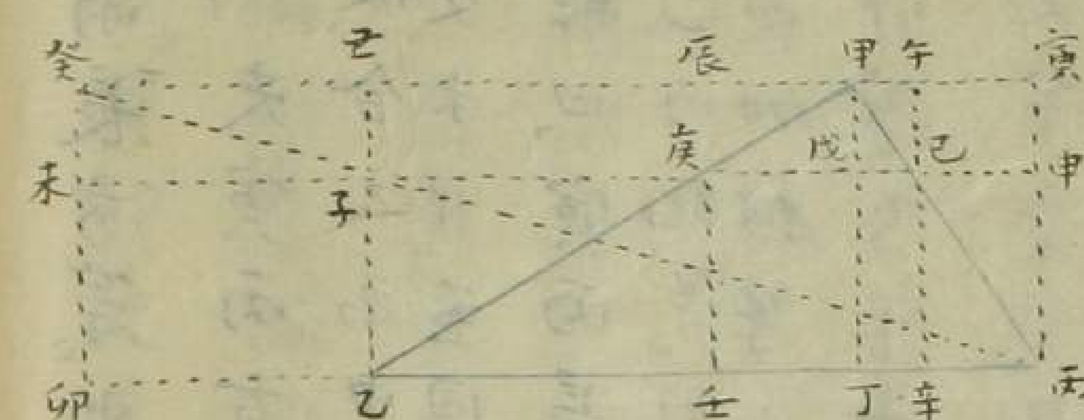
又解曰。寅丙長方。分兩句股而等。則寅戊與午丙兩長方等。寅己與己丙既等。則于寅戊內減寅己而加相等之己丙。即成午丙。而寅戊原等戊卯。則午丙亦與戊卯等。夫午丙形之丙甲。與戊卯形之丙卯。皆股也。則兩形等積又等邊矣。其長等。其闊亦等。甲丙與丙卯既等。則辛丙與戊丙亦等。而對邊悉等。即成正方形

論曰。此以句為底。股為高也。若以股為底。句為高。所得亦同。其容方依正方角。乃古法也。三角以底闊合中長除積。蓋生於此。

是為第一術之第一支

假如甲乙丙句股形。乙丙弦二十八尺。其積一百六十八尺。求容方。依弦線。而以容方之兩角切於句股

術以弦除倍積。三百三十六尺得對角線。一十二尺與弦相併四十尺為法。倍積為實。法除實得所求



求到容方徑。八尺四寸

如圖。作寅壬線與乙丙弦平行。又作寅丙及壬乙。與甲丁對角線平行。成壬丙長方。為句股形倍積

次引乙丙弦至卯。引寅壬線至癸。使癸壬及卯乙。並同甲丁。仍作癸卯線聯之

次從癸向丙作斜線。割壬乙線於子。遂從子作申未線。與乙丙弦平行。割甲乙股於庚。割甲丙句於己。則庚己為容方之一邊。末從庚作辰壬線。從己作午辛線。並與甲丁平行。而割乙丙弦於壬於辛。則辛壬及庚壬及己辛三線。並與庚己等。而成正方

解曰。寅子長方。與子卯長方等積。癸丙線分寅卯形為兩句股而等。則兩句股內所作之方必等。午壬長方。又與寅子等。寅丁形以甲丙線分為兩句股。則寅己與己丁等。又壬丁形以甲乙線分為兩句股。則壬庚與丁庚等。若移寅己作己丁。移壬庚作丁庚。則午丁等寅戊。而辰丁等壬戊。合之而午壬等寅子。則午壬亦與子卯等。而午壬之邊午辛及辰壬子卯之邊。卯乙及未子並等甲丁對角線。則兩形午壬子卯等積又等邊矣。其長等。其闊亦等。辰壬既等卯乙。則辛壬亦等子乙。而庚壬及己辛。亦不得不等。故四線必俱等也

又解曰。寅子既與子卯等。則寅乙必與申卯等。子寅乙內。移寅子居子卯之位。

即成申卯。而寅乙者。倍積也。申卯者。底偕中長兼容方徑也。也。卯乙。乙丙弦
即甲丁對角中長線也。合之為丙卯之長。其兩端之闕申丙及末卯。並同方徑。故合弦與對角線為法。
以除倍積。得容方徑
論曰。此以一邊為底。中長線為高也。既以一邊為底。其容方即
依此一邊。而以兩方角切餘二邊也。句股形。故以弦為底若銳
角形。則任以一邊為底。但依大邊則容方轉小。亦如句股形依
方角之容方。必大於依弦線之容方也。鈍角形但可以大邊為
底。其求之則皆一法也。是為第一術之第二支

三角容方第二術

以圖算

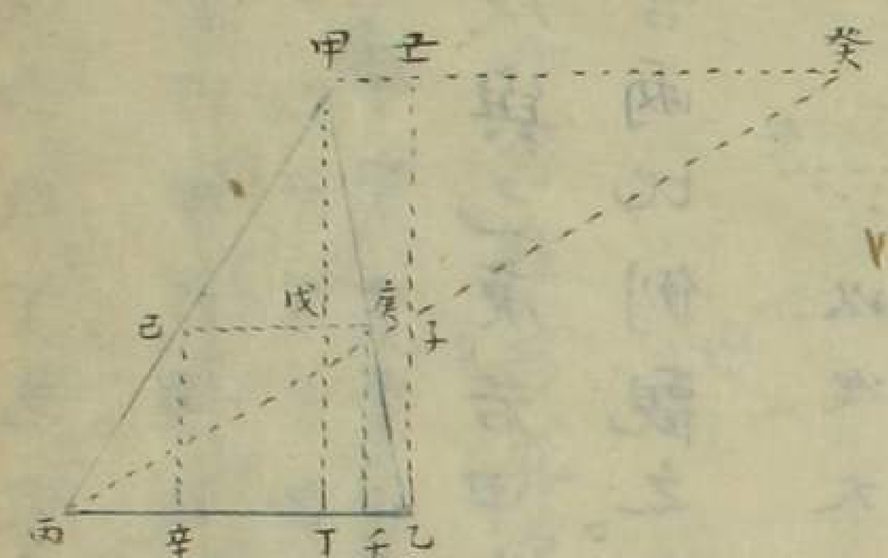
內分二支

一以弦截中長線。得容方徑句股形即截其邊

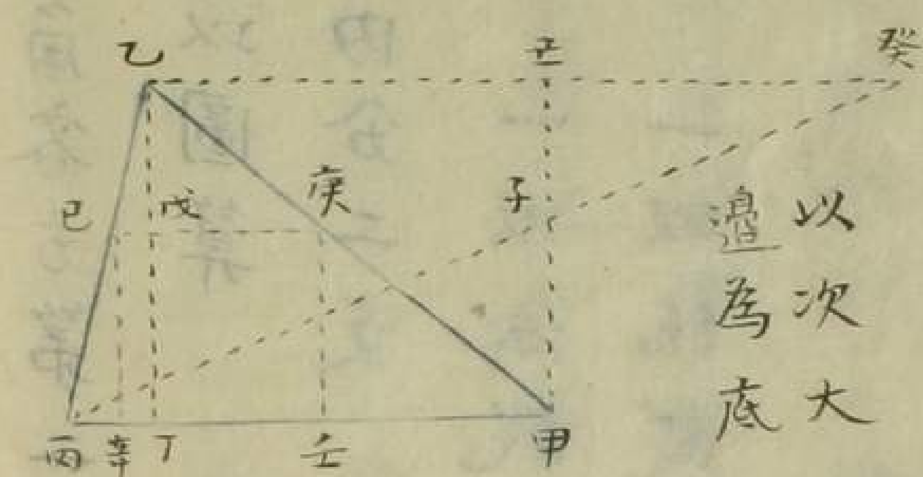
一以弦截兩斜邊。得容方邊句股形即截其弦

假如銳角形求容方。任以一邊為底

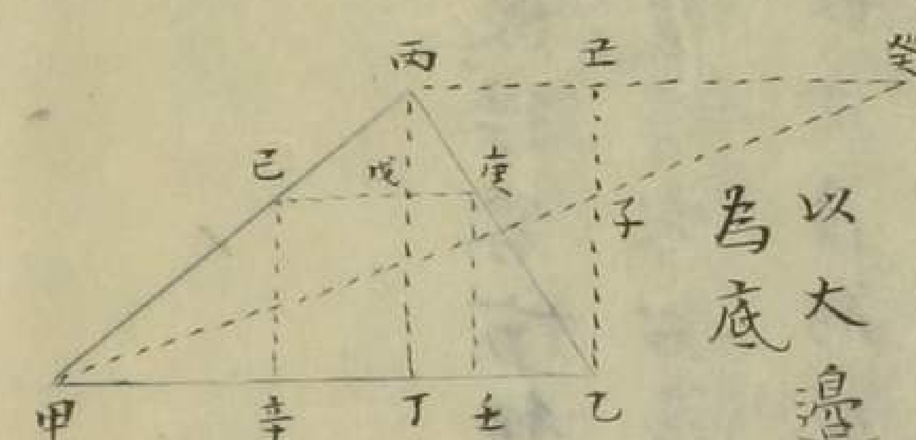
如圖。以乙丙最小邊為底。先從對角甲作中
長垂線至丁。又從乙角作丑乙立線。與甲丁
平行而等。乃從甲角作橫線過丑至癸。截丑
癸亦如甲丁。乃從癸向丙角作斜線。割丑乙
立線於子。末以子乙之度。截中長線甲丁垂線於



戊。即戊丁為容方之徑。從戊作己庚。又從己作線至辛。從庚作線至壬。成庚己辛壬。即所求容方解曰。甲戊與戊丁。若甲丁與乙丙。子壬癸句股。與子乙丙形。有子交角。必相似。則壬子句與子乙句。若壬癸股與乙丙股。而壬子原與甲戊等。子乙與戊丁等。壬癸與甲丁等。則甲戊與戊丁。亦若甲丁與乙丙。又甲戊與己庚。若甲丁與乙丙。甲己庚三角。為甲丙乙之截形。必相似。則甲戊與己庚。若甲丁與乙丙。合兩比例觀之。則甲戊與戊丁。若甲戊與己庚。而己庚即戊丁



以次大邊為底



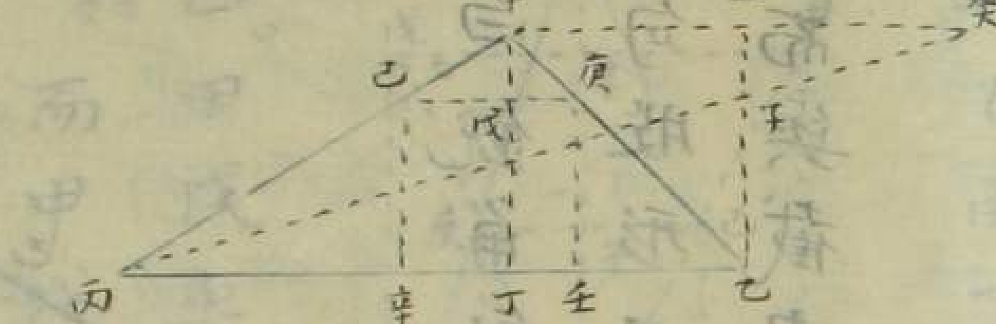
以大邊為底

以上並銳角形

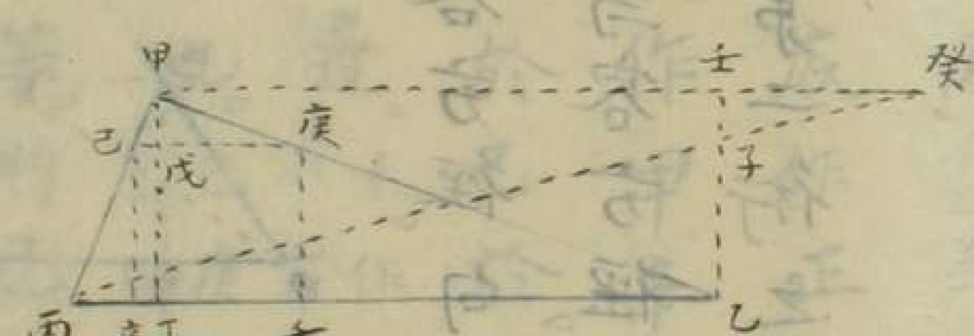
凡銳角三邊並可為底。

而皆一法

假如鈍角形求容方。則惟有大邊可為底。法同銳角

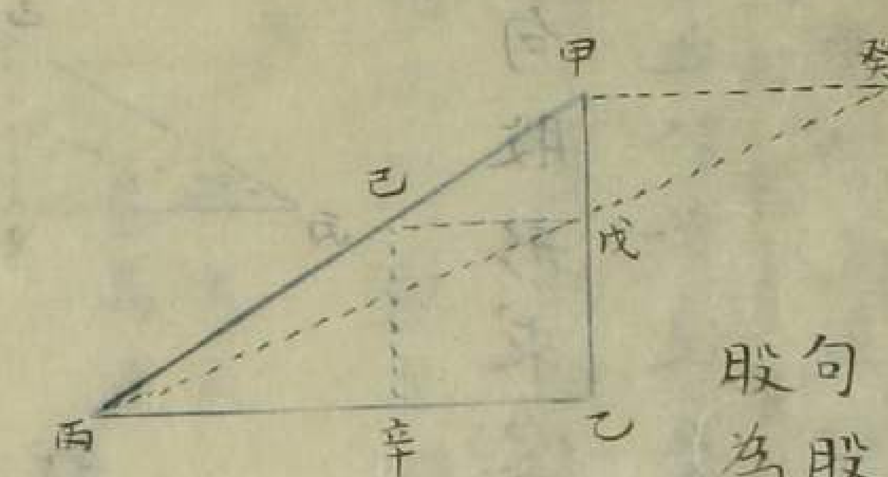


假如句股形求容方。以弦為底法亦同鈍銳兩角

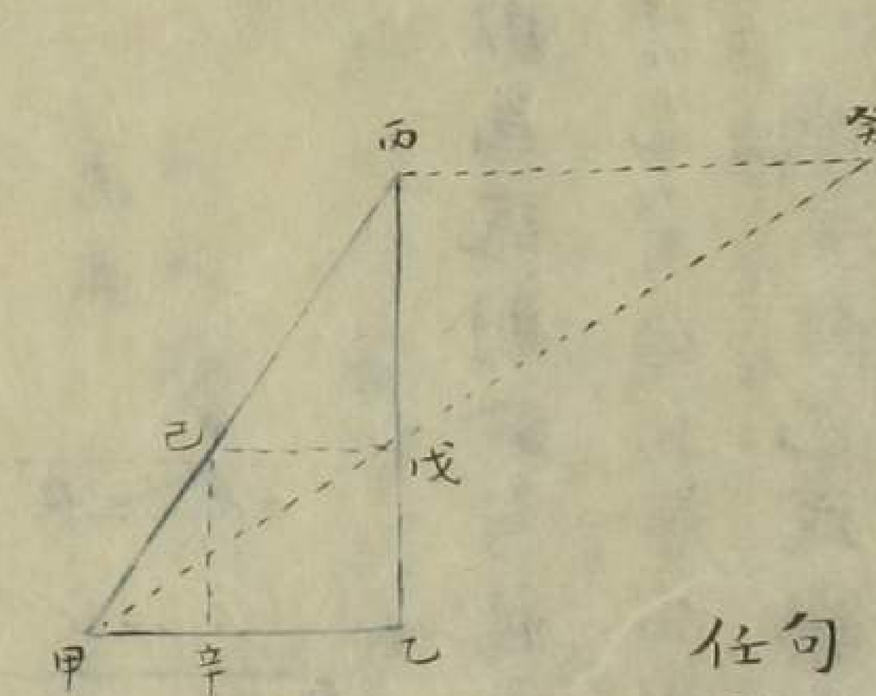


假如句股形求容方。以股為底則於句端甲作橫線。與股平行。而截之於癸。使癸甲如甲乙句。乃自癸向丙作斜線。割甲乙句於戊。則戊乙即容方之一邊。末作己戊與股平行。作己辛與句平行。即成容方。或以句為底。則從股端丙作丙癸橫線與股等。亦作癸甲斜線。割丙乙股於戊。其所得容方亦

同。圖如左



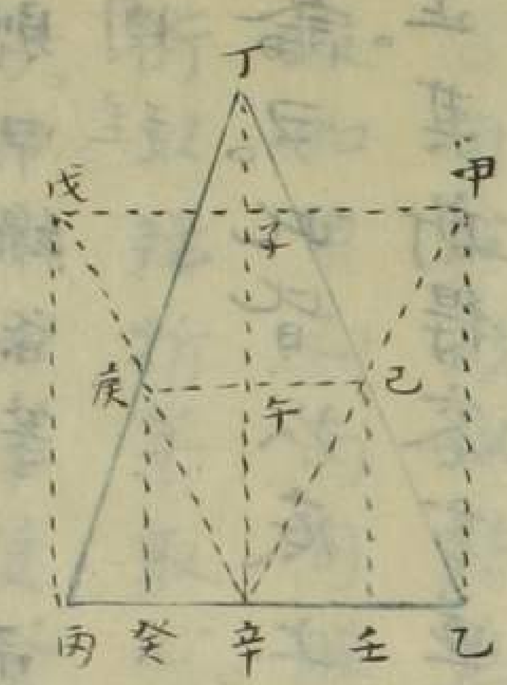
句股形以股為底



句股形以句為底。兩有任用。其所得容方並同

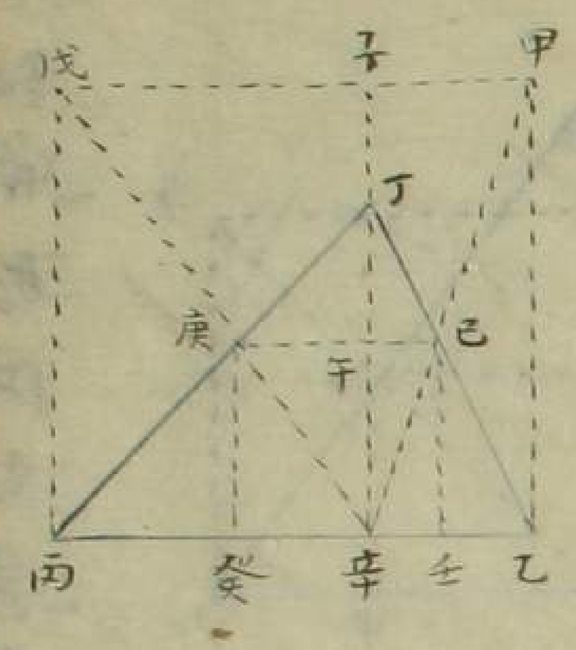
論曰。銳角鈍角。皆截中長線為容方徑。句股形以弦為底亦然。惟句股形以句為底。即截其股為容方徑。用股為底即截句不另求中長。而與截中長之法並同。是為第二術之第一支

假如乙丙丁三角求容方　依乙丙邊為底



如圖。以乙丙底作正方形。即甲乙丙戊方又作丁辛對角線。次作甲辛及戊辛兩斜線。割原形之兩斜線於己於庚。乃作己庚線。為所求容方之一邊。末作己壬及庚癸兩線。成小方形於形內。即所求

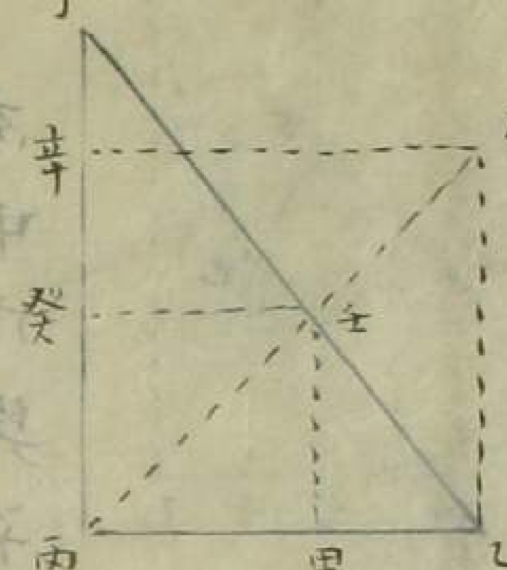
解曰。甲戊與己庚。若子辛與午辛也。己庚辛三角形。為甲戊辛之切形。則其橫與直之比例相等而甲戊與子辛。同為方徑而等。則己庚與午辛亦同為小方徑而等



若底上方形大。則其徑亦大於對角線。則如第二圖引丁辛線至子。其理亦同

有此二法則三邊並可為底

鈍角形用大邊為底。句股形用弦為底。並同第二圖



若句股形以句為底求容方。如圖。即用乙丙句作丙辛庚乙方形。從方角庚向丙作斜線割丁乙弦於壬。從壬作癸壬及甲壬二線即所容方或用股上方。則弦出句疊如股

解曰。庚丙線分丙角為兩平分。則其撗直線自相等。壬癸與癸丙相等。壬甲與甲丙相等。則四線皆等而成正方。嘉禾陳礵菴用分角法求容方與此同理

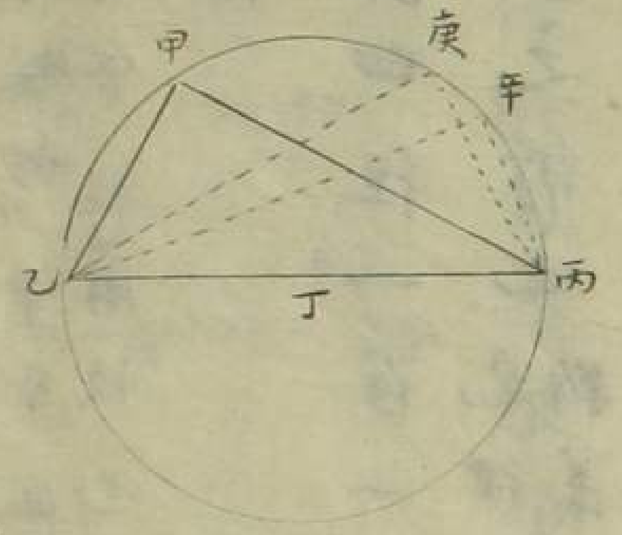
論曰。此皆以底上方形為弦。而得所求小方也。故不論頂之稀正。其所得容方並同。惟句股容方依正方角。則中長線與原邊合而為一。法雖小異。其用不殊。是為第二術之第二支

三角形外切平員第一術

句股形以弦為徑

假如甲乙丙句股形。乙丙弦長四尺五寸二分。求外切員

術以弦折半取心。得半徑二尺二寸六分。其弦長四尺五寸二分。即外切平員全徑。以平員周率三五五乘之。徑率一一三除之。得員周一十四尺二寸



如圖。乙丙員徑。即句股形之弦。折半於丁。即員心也。以乙丁半徑為度。從丁心運規作員。必過甲。而句股形之三角。皆切員周矣

論曰。凡平員徑上。從兩端各作直線。至員周相會。則成正方角。

如乙丙徑之兩端于丙于乙。各作直線會于甲。則甲角必為正角而為句股形。假令兩線相遇于庚。即成庚乙丙句股形。于辛亦然。以其皆正角故也故不問句股長短。而並以其弦為外切員之徑

又論曰。徑一百一十三。而周三百五十五。此鄭端清世子所述祖冲之之術也。見律呂精義按古率周三徑一。李淳風等釋古九章。以為術從簡易。舉大綱而言之。誠為通論。諸家所傳。徑五十。周一百五十七。則魏劉徽所改。謂之徽率。徑七。周二十二。則祖冲之所定。謂之密率。由今以觀。冲之自有兩率。一為七與二十二。一為一一三與三五五。蓋以其捷者為恒用之須。而存其精者明測算之理。亦可以觀古人之用心矣

三角形外切平員第二術

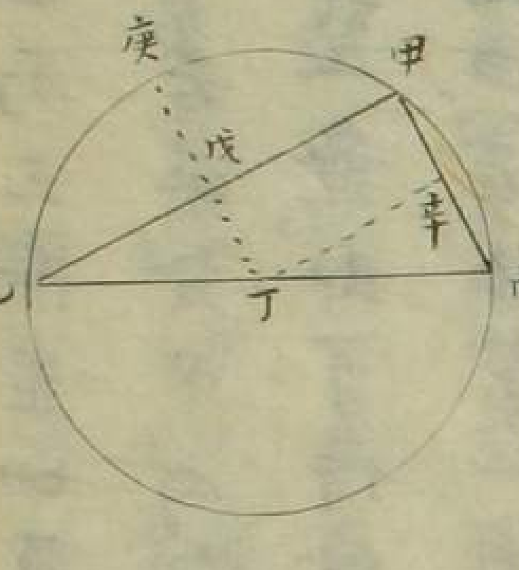
分邊取員心。內分二支。並以圖算

一句股形。但分一邊。即得員心。其心在弦

一銳角形。鈍角形。並分二邊。可得員心。銳角形。員心在形內。鈍角形。員心在形外

假如甲乙丙句股形。求外切員心。

術任於句或股平分之。作十字正線。此線過弦線之點。即為員心。



如圖。甲乙丙形。以甲乙股平分於戊。從戊作庚丁正十字線。至乙丙弦。即分弦為兩平分。而丁即員心。從丁運規作外切員。則

甲乙丙三點並切員周。而乙丁丙丁庚丁皆半徑

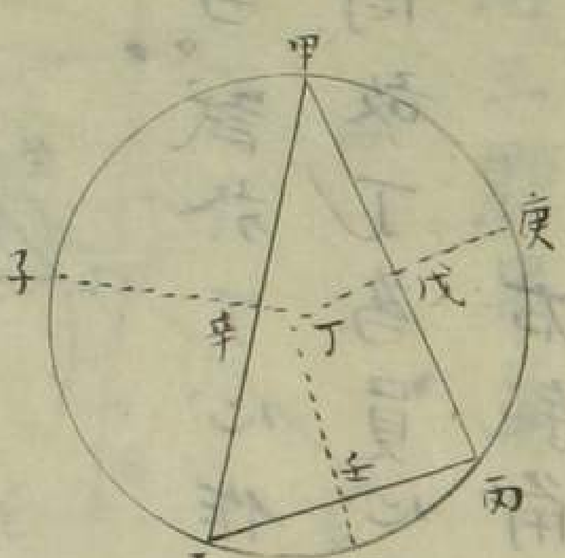
論曰。若平分甲丙句，於辛。從辛作十字正線。亦必至丁。故但任分其一邊。即可得心

又論曰。若依第一術。先得丁心。從丁心作直線與句平行。即此線能分股線為兩平分。如丁庚線與甲丙句平行。過甲乙股。即平分股線于戊 若與股平行而分句線亦然。如丁辛線與甲乙股平行。即分句線于辛

右句股形。外切平員之心。在弦線中央

假如銳角形。求形外切員

術任以兩邊各平分之。作十字線。引長之。必相遇於一點。即為員心

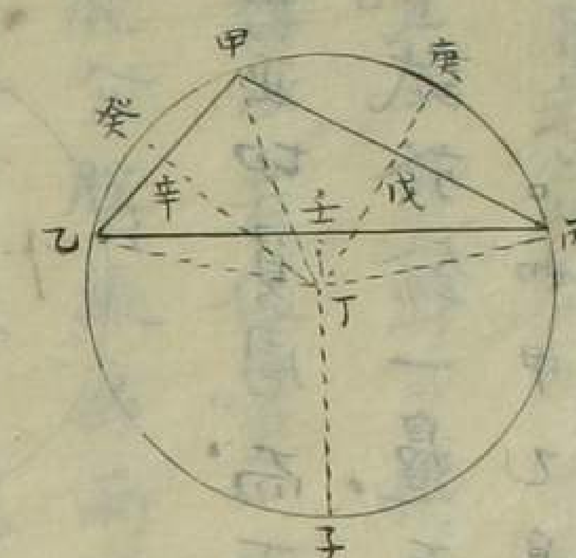


如圖。甲乙丙銳角形。任以甲丙邊平分之於戊。作庚戊丁十字線。又任以乙丙邊平分之於壬。作癸壬丁十字線。兩直線稍引長之。相遇於丁。以丁為心作員。則甲乙丙三角並切員周。而丁癸丁庚皆半徑

論曰。試於餘一邊再平分之。作十字正線。亦必會於此點。故此點必員心。如甲乙邊再平分之于辛。作子辛丁十字線亦必相遇于丁點

右銳角形。外切平員之心。在形之內

假如鈍角形。求形外切員　術同鋭角



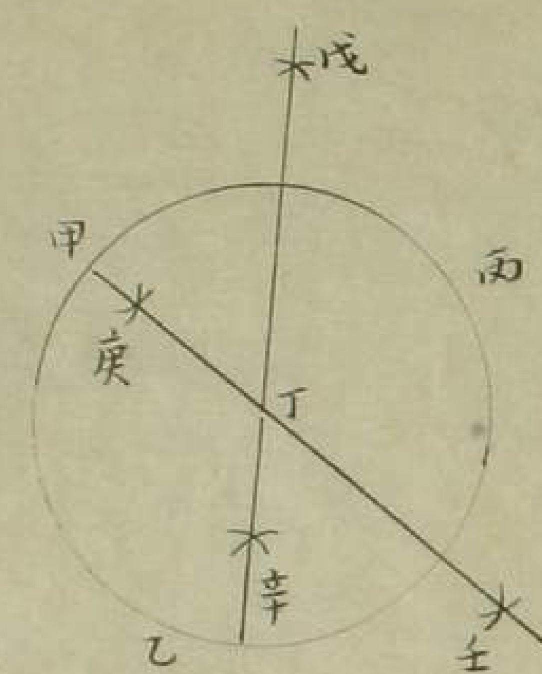
如圖。甲乙丙形。甲為鈍角。任分甲丙於戊。分甲乙於辛。各作十字線。會於丁心。從丁、作員。則丁庚丁癸皆半徑。而三角並切員周。若用大邊。平分于壬。作壬丁子線。亦同

論曰。試於丁心作線至丙至乙至甲。必皆成員半徑。與丁庚丁癸同。故丁為員心也

右鈍角形。外切平員之心。在形之外

總論曰。此與容員之法不同。何也。因容員之心。即三角形之心。故其半徑皆與各邊為垂線。而不能平分其邊。然從心作線至角。即能分各角為兩平分。此分角求心之法。所由以立也。外切員之心。非三角形之心。其心或在形內。或在形外。距邊不等。而能以十字線剖各邊為兩平分。此分邊求心之法。所由以立。蓋即三點串員之法也。

附三點串員



有甲乙丙三點。欲使之並在員周。術任以甲為心作虛員分。用元度以丙為心。亦作虛員分。兩員分相交於戊於辛。作戊辛直線。又任以乙為心。以丙為心。各作同度之虛員分。相交於庚於壬。作庚壬直線。兩直線相遇於丁。以丁為心作員。則三點並在員周

員周有三點不知其心。亦用此法