

Grundkurs Mathematik I

Vorlesung 7

Ich will jeden Spieler jeden
Tag ein bisschen besser
machen

Jürgen Klinsmann

In der vorletzten Vorlesung haben wir uns zuerst mit dem Zählen in dem Sinne beschäftigt, dass auf eine natürliche Zahl eine eindeutig bestimmte natürliche Zahl, nämlich ihr Nachfolger, folgt. In dieser und den folgenden Vorlesungen werden wir sehen, dass diese Eigenschaft die natürlichen Zahlen auszeichnet und dass man alle anderen Eigenschaften der natürlichen Zahlen, wie beispielsweise die Rechengesetze, letztlich darauf zurückführen kann. Auf dieser Eigenschaft der natürlichen Zahlen beruht auch das Beweisprinzip der vollständigen Induktion.

Die Dedekind-Peano-Axiome



Richard Dedekind (1831 -1916)



Giuseppe Peano (1858 -1932)

In den natürlichen Zahlen \mathbb{N} kann man addieren, multiplizieren, potenzieren, teilweise abziehen, es gibt die Größergleich-Relation, die Teilbarkeit, usw. Man kann sich nun fragen, welche Abhängigkeiten (logische Hierarchien) zwischen diesen mathematischen Strukturen bestehen und ob man manche davon auf andere, grundlegendere Strukturen zurückführen kann. Dies

führt zum axiomatischen Aufbau der natürlichen Zahlen. Dies ist lediglich eine weitere Präzisierung des Zählvorgangs in der Sprache der Mengen und Abbildungen.

DEFINITION 7.1. Eine Menge N mit einem ausgezeichneten Element $0 \in N$ (die *Null*) und einer (Nachfolger)-Abbildung

$$': N \longrightarrow N, n \longmapsto n',$$

heißt *natürliche Zahlen* (oder *Dedekind-Peano-Modell* für die natürlichen Zahlen), wenn die folgenden *Dedekind-Peano-Axiome* erfüllt sind.

- (1) Das Element 0 ist kein Nachfolger (die Null liegt also nicht im Bild der Nachfolgerabbildung).
- (2) Jedes $n \in N$ ist Nachfolger höchstens eines Elementes (d.h. die Nachfolgerabbildung ist injektiv).
- (3) Für jede Teilmenge $T \subseteq N$ gilt: Wenn die beiden Eigenschaften
 - $0 \in T$,
 - mit jedem Element $n \in T$ ist auch $n' \in T$,
 gelten, so ist $T = N$.

Man mache sich klar, dass diese Bedingungen den Bedingungen der vorletzten Vorlesung entsprechen. Dabei ist N die jeweilige Menge, $'$ bezeichnet die Nachfolgerabbildung und 0 das Startsymbol (dort hatten wir zumeist 1 als Startsymbol gewählt). Jedes Dedekind-Peano-Modell sieht ähnlich aus wie eine der dort aufgelisteten Möglichkeiten. Das heißt, dass die natürlichen Zahlen durch das natürliche Zählen bestimmt sind. Zählen heißt, von einem Startwert ausgehend, nach und nach einen Schritt (einen Strich machen, einen Stab dazulegen, einen Punkt dazumalen, oder ein komplexeres Bildungsgesetz) weiterzuzählen. Das „Weiter“-Zählen ist also fundamentaler als eine bestimmte Benennung von Zahlen. Eine natürliche Zahl repräsentiert, wie oft bis zu ihr gezählt werden musste.

Die erste Eigenschaft legt den Start fest. Die zweite Eigenschaft besagt, dass wenn zwei Zahlen verschieden sind, dann auch die beiden jeweiligen Nachfolger verschieden sind. Die dritte Eigenschaft, die man auch das *Induktionsprinzip für Mengen* nennt, besagt, dass wenn man bei 0 anfängt und keinen einzelnen Zählvorgang auslässt, dass man dann vollständig alle natürlichen Zahlen abzählt.

Es sei erwähnt, dass solche Überlegungen, die natürlichen Zahlen grundlegend zu begründen, manchmal eher verwirrend als hilfreich sein können. Statt des intuitiven Zählens arbeiten wir mit den abstrakten Konzepten Mengen, Abbildungen, Injektivität. Bei den natürlichen Zahlen ist es erfahrungsgemäß

nicht gefährlich, der Zähl-Intuition¹² zu vertrauen und mit einer naiven Vorstellung davon zu arbeiten (dies gilt für die reellen Zahlen nicht in dieser Deutlichkeit³).

Wir benennen explizit die intellektuelle Leistungen, die durch die axiomatische Fixierung der natürlichen Zahlen erbracht wird.

- (1) Es werden kurz und präzise die entscheidenden strukturellen Eigenschaften der natürlichen Zahlen fixiert.
- (2) Diese Eigenschaften werden begrifflich explizit gemacht.
- (3) Die natürlichen Zahlen liegen als ein Konzept vor, das unabhängig von bestimmten Symbolen und Benennungen ist.
- (4) Es kann bewiesen werden, dass durch diese Eigenschaften die natürlichen Zahlen eindeutig festgelegt sind.
- (5) Der Zugang ermöglicht, andere Operationen darauf zurückzuführen, also komplexere Strukturen auf einfachere zurückzuführen.
- (6) Der Zugang (insbesondere die Verankerung im Zählen und die darauf aufbauende Entwicklung der weiteren Rechenoperationen) weist eine große Übereinstimmung mit dem natürlichen Lernprozess auf!
- (7) Die begriffliche Fixierung ermöglicht es, über den Zugang zu reflektieren und sich darüber auszutauschen.

In einem Dedekind-Peano-Modell gibt es die untereinander verschiedenen Elemente

$$0, 0', 0'', 0''', \dots$$

Hier stehen also alle Elemente, die von 0 aus in endlich vielen Schritten (man denke an die Abzählung endlicher Prozesse) erreicht werden können (formalmengentheoretisch ist diese Definition problematisch, da sie Bezug auf eine endliche Ausführung nimmt). Das Induktionsaxiom sichert, dass dies bereits alle Elemente des Modells sind. Die angegebene Teilmenge enthält ja die 0 und mit jedem Element auch deren Nachfolger, also ist es die Gesamtmenge.

Ausgehend von den Peano-Axiomen kann man eine Addition auf der Menge der natürlichen Zahlen definieren, wobei die Nachfolgerfunktion der Addition mit $1 = 0'$ entspricht. Die Definierbarkeit beruht selbst auf dem Induktionsprinzip. Ebenso kann man eine Multiplikation definieren und die üblichen Eigenschaften wie Kommutativität und Assoziativität nachweisen. Dies werden wir in den nächsten Vorlesungen ausführen.

¹Gegenargument: Dies stimmt nicht, wenn man willkürlich ein anderes Startelement als die vertraute 0 festlegt.

²Zu Beginn dieses Kurses sollte man generell der eigenen Intuition misstrauen. Sehr häufig verbirgt sich hinter der sogenannten Intuition nur eine unreflektierte und unbegründete Gewohnheit. Stattdessen sollte man genau beachten, in welchen Sätzen und wie Gesetzmäßigkeiten erarbeitet und begründet werden, und wie sich das mit intuitiven Erwartungen deckt. Dieser Ansatz ist auch sinnvoll, um sich später in Schüler, die eine gewisse Intuition noch nicht entwickelt haben, besser einfühlen zu können.

³Frage: Was ist Ihr intuitiver Unterschied zwischen rationalen und reellen Zahlen?

Isomorphieprinzip

Wir wollen zeigen, dass je zwei Modelle für die Dedekind-Peano-Axiome „isomorph“ sind, dass es also zwischen ihnen eine strukturerhaltende Bijektion gibt. Man stelle sich beispielsweise einerseits das Strichmodell, andererseits das Dezimalzahlmodell der natürlichen Zahlen vor, die beide mit ihren Nullen und ihrer Nachfolgerabbildung die Dedekind-Peano-Axiome erfüllen. Dann gibt es bereits, und zwar allein aufgrund der Tatsache der Dedekind-Peano-Axiome, eine eindeutige Entsprechung zwischen diesen beiden Mengen. Eine Strichfolge entspricht also eindeutig einer Zahl im Dezimalsystem.

	Strichsystem	Zehnersystem	Dreiersystem	Eurosystem
	0	0	0	0
		1	1	1
		2	2	10
		3	10	11
		4	11	20
		5	12	100
		6	20	101
		7	21	110
		8	22	111
		9	100	120
		10	101	1000

Die Entsprechung in der Tabelle entsteht dadurch, dass man in jeder Spalte unabhängig voneinander im jeweiligen System (gleichschnell) zählt.

SATZ 7.2. *Es seien $(N_1, 0_1, \iota)$ und $(N_2, 0_2, \star)$ Modelle für die natürlichen Zahlen. Dann gibt es genau eine (bijektive) Abbildung*

$$\varphi: N_1 \longrightarrow N_2,$$

die das Zählen (also die 0 und die Nachfolgerabbildung) respektiert.

Beweis. Da die Abbildung φ insbesondere die Null respektieren soll, muss

$$\varphi(0_1) = 0_2$$

sein. Da die Abbildung die Nachfolgerabbildungen respektieren soll, gilt generell

$$\varphi(x') = (\varphi(x))^\star$$

für alle $x \in N_1$. Speziell gilt

$$\varphi(0_1') = (\varphi(0_1))^\star = 0_2^\star.$$

Aus dem gleichen Grund muss unter Verwendung des schon Bewiesenen

$$\varphi(0_1'') = \varphi((0_1')') = (\varphi(0_1'))^\star = (0_2^\star)^\star = 0_2^{\star\star}.$$

Ebenso muss

$$\varphi(0_1''') = 0_2^{\star\star\star},$$

$$\varphi(0_1''''') = 0_2^{****},$$

u.s.w. gelten. Hier hat man keine Wahlmöglichkeiten, alles ist durch die Nachfolgerereignis bestimmt. Da jedes Element $\neq 0_1$ aus N_1 von 0_1 aus durch die Nachfolgerabbildung \prime schließlich und genau einmal erreicht wird, ist dies eine wohldefinierte Abbildung von N_1 nach N_2 .

Zum Nachweis der Surjektivität betrachten wir die Menge

$$T = \{y \in N_2 \mid \text{Es gibt } x \in N_1 \text{ mit } y = \varphi(x)\}.$$

Wir müssen zeigen, dass

$$T = N_2$$

ist. Dazu wenden wir das Induktionsaxiom für N_2 an. Wegen

$$\varphi(0_1) = 0_2$$

gehört $0_2 \in T$. Wenn $y \in T$ ist, so ist also

$$y = \varphi(x)$$

für ein $x \in N_1$. Wegen der Verträglichkeit mit der Nachfolgerabbildung ist

$$y^* = \varphi(x'),$$

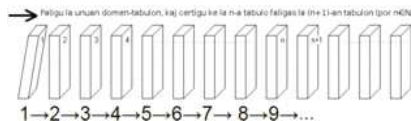
d.h. auch $y^* \in T$. Daher ist T unter dem Nachfolger abgeschlossen und nach dem Induktionsaxiom ist also $T = N_2$. Zum Nachweis der Injektivität seien $x, \tilde{x} \in N_1$ verschieden. und zwar sei \tilde{x} ein (direkter oder) höherer Nachfolger von x . Dann ist $\varphi(\tilde{x})$ der entsprechende Nachfolger von $\varphi(x)$ und insbesondere davon verschieden (siehe Aufgabe 7.11), da das Nachfolgernehmen in N_2 injektiv ist. \square

Es gibt also im Wesentlichen, d.h. wenn man von den Benennungen absieht, genau eine Menge von natürlichen Zahlen. Für das im Wesentlichen eindeutig bestimmte Modell der Dedekind-Peano-Axiome verwenden wir das Symbol \mathbb{N} und sprechen von den *natürlichen Zahlen*.

Es sei bemerkt, dass die Konstruktion der bijektiven Abbildung zwischen zwei Modellen im Beweis zu Satz 7.2 über den Nachfolger für praktische Zwecke nicht gut geeignet ist. Wenn man von einer natürlichen Zahl, die im Zehnersystem gegeben ist, die Darstellung im Dreiersystem ausrechnen möchte, so müsste man gemäß dieser Methode im Dreiersystem so lange zählen, wie es die im Zehnersystem gegebene Zahl vorgibt. Da gibt es deutlich effektivere Methoden, die wir später kennenlernen werden.

Das Induktionsprinzip für Aussagen

Die folgende Aussage und ihr Beweis begründen das Beweisprinzip der *vollständigen Induktion*. Wir schreiben $n + 1$ für den Nachfolger.



Eine Visualisierung des Induktionsprinzips. Wenn die Steine nah beieinander stehen und der erste umgestoßen wird, so fallen alle Steine um.

SATZ 7.3. Für jede natürliche Zahl n sei eine Aussage $A(n)$ gegeben. Es gelte

- (1) $A(0)$ ist wahr.
- (2) Für alle n gilt: wenn $A(n)$ gilt, so ist auch $A(n+1)$ wahr.

Dann gilt $A(n)$ für alle n .

Beweis. Es sei

$$M = \{n \in \mathbb{N} \mid A(n) \text{ ist wahr}\}.$$

Wir wollen zeigen, dass $M = \mathbb{N}$ ist, denn genau dies bedeutet, dass die Aussage für alle n gilt. Nach der ersten Bedingung ist

$$0 \in M.$$

Nach der zweiten Voraussetzung gilt für M , dass aus $n \in M$ stets $n+1 \in M$ folgt. Damit erfüllt M beide Voraussetzungen im Induktionsprinzip für Mengen, so dass $M = \mathbb{N}$ gilt. \square

Der Nachweis von (der Gültigkeit von) $A(0)$ heißt dabei der *Induktionsanfang* und der Schluss von $A(n)$ auf $A(n+1)$ heißt der *Induktionsschluss* oder *Induktionsschritt*. Innerhalb des Induktionsschlusses nennt man die Gültigkeit von $A(n)$ auch die *Induktionsvoraussetzung*. In manchen Situationen ist die Aussage $A(n)$ erst für $n \geq n_0$ für ein gewisses n_0 (definiert oder) wahr. Dann beweist man im Induktionsanfang die Aussage $A(n_0)$ und den Induktionsschritt führt man für alle $n \geq n_0$ durch.

Um dieses Beweisprinzip anhand von substantiellem Material demonstrieren zu können, greifen wir etwas vor und setzen die Addition, die Multiplikation und die Größergleichrelation von natürlichen Zahlen voraus. Das folgende Standardbeispiel für einen Induktionsbeweis verwendet das *Summenzeichen*. Für gegebene (natürliche, reelle) Zahlen a_1, \dots, a_n bedeutet

$$\sum_{k=1}^n a_k := a_1 + a_2 + \dots + a_{n-1} + a_n.$$

Dabei hängen typischerweise die a_k ⁴ in einer formelhaften Weise von k ab. Entsprechend ist das *Produktzeichen* definiert, nämlich durch

$$\prod_{k=1}^n a_k := a_1 \cdot a_2 \cdot \dots \cdot a_{n-1} \cdot a_n.$$

⁴Die Indexschreibweise a_k bedeutet, dass eine Abbildung $k \mapsto a_k$ vorliegt.

AUFGABE 7.4. Beweise durch Induktion die folgende Formel für $n \geq 1$.

$$\sum_{k=1}^n k = \frac{n(n+1)}{2}.$$

Lösung

Beim Induktionsanfang ist $n = 1$, daher besteht die Summe links nur aus einem Summanden, nämlich der 1, und daher ist die Summe 1. Die rechte Seite ist $\frac{1 \cdot 2}{2} = 1$, so dass die Formel für $n = 1$ stimmt.

Für den Induktionsschritt setzen wir voraus, dass die Formel für ein $n \geq 1$ gilt, und müssen zeigen, dass sie auch für $n + 1$ gilt. Dabei ist n beliebig. Es ist

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{n+1} k &= \left(\sum_{k=1}^n k \right) + n + 1 \\ &= \frac{n(n+1)}{2} + n + 1 \\ &= \frac{n(n+1) + 2(n+1)}{2} \\ &= \frac{(n+2)(n+1)}{2}. \end{aligned}$$

Dabei haben wir für die zweite Gleichheit die Induktionsvoraussetzung verwendet. Der zuletzt erhaltene Term ist die rechte Seite der Formel für $n + 1$, also ist die Formel bewiesen.

Aussagen, die durch Induktion bewiesen werden können, können manchmal auch auf andere Art bewiesen werden. Im vorstehenden Beispiel gibt es die elegantere und einsichtigere Lösung, die Zahlen einmal aufsteigend und einmal absteigend untereinander hinzuschreiben, also

$$1 \quad 2 \quad 3 \quad \dots \quad n-2 \quad n-1 \quad n$$

$$n \quad n-1 \quad n-2 \quad \dots \quad 3 \quad 2 \quad 1$$

Spaltenweise ergibt sich $n + 1$, und diese Summe kommt n -mal vor. Also ist

$$2 \left(\sum_{i=1}^n i \right) = n(n+1).$$

AUFGABE 7.5. Zeige durch vollständige Induktion, dass für jedes $n \in \mathbb{N}$ die Zahl

$$6^{n+2} + 7^{2n+1}$$

ein Vielfaches von 43 ist.

Lösung

Für $n = 0$ ist

$$6^2 + 7 = 43$$

ein Vielfaches von 43. Sei nun die Aussage für n bewiesen und betrachten wir den Ausdruck für $n + 1$. Dieser ist

$$\begin{aligned}6^{n+1+2} + 7^{2(n+1)+1} &= 6 \cdot 6^{n+2} + 7^2 \cdot 7^{2n+1} \\ &= 6 \cdot 6^{n+2} + (6 + 43)7^{2n+1} \\ &= 6(6^{n+2} + 7^{2n+1}) + 43 \cdot 7^{2n+1} \\ &= 6 \cdot 43 \cdot s + 43 \cdot 7^{2n+1},\end{aligned}$$

wobei im letzten Schritt die Induktionsvoraussetzung verwendet wurde (nämlich die Eigenschaft, dass $6^{n+2} + 7^{2n+1}$ ein Vielfaches von 43 ist). Daher ist diese Zahl ein Vielfaches von 43.

Abbildungsverzeichnis

Quelle = Dedekind.jpg , Autor = unbekannt (hochgeladen von Benutzer Yerpo auf Commons), Lizenz = gemeinfrei	1
Quelle = Giuseppe Peano.jpg , Autor = unbekannt (hochgeladen von Benutzer Kalki auf Commons), Lizenz = PD	1
Quelle = Domen-indukto.gif , Autor = Joachim Mohr, Lizenz = CC-by-sa 3.0	6
Erläuterung: Die in diesem Text verwendeten Bilder stammen aus Commons (also von http://commons.wikimedia.org) und haben eine Lizenz, die die Verwendung hier erlaubt. Die Bilder werden mit ihren Dateinamen auf Commons angeführt zusammen mit ihrem Autor bzw. Hochlader und der Lizenz.	9
Lizenzklärung: Diese Seite wurde von Holger Brenner alias Bocardodarapti auf der deutschsprachigen Wikiversity erstellt und unter die Lizenz CC-by-sa 3.0 gestellt.	9