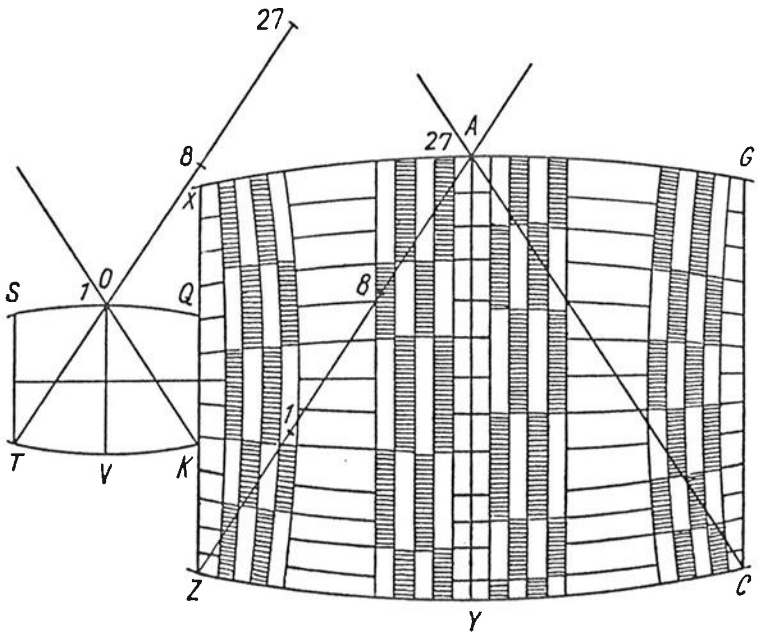
W I J N R O E I E N

1 4 0 0   1 8 3 9

een inleidende studie
over de theorie en de praktijk
van de inhoudsbepaling van vaten
aan de hand van primaire teksten

door J.M. Muller



scriptie Geschiedenis van de Wiskunde
docent: prof. dr. H.J.M. Bos
Mathematisch Instituut
Rijksuniversiteit Utrecht

1 9 8 5

INHOUD

Figuur titelpagina ontleend aan Kepler: Nova Stereometria Doliorum..(1615)[5], pagina 115; zie ook pag. 62, deze scriptie.

Vahet an das ander büch=
leyn welchs lernet die außteylung der Visyr
ruhten mit sambt dem brauch.

Figuur(1)

Titelblad van het gedeelte over wijnroeien in : Heinrich Schreyber (Grammateus), Eynn kurtz newe Rechenn unnd Visyr buechleynn... Erfurt 1523 (illustratie uit Folkerts 1974)[6]

2. Inleiding

2 a. Wijnroeien

Onder wijnroeien verstaat men - en dit zal na het Voorspel niet meer verbazen - het met een wijnroede (roede = stok, hier dus met schaalverdeling) bepalen van de inhoud van een vat of een deel ervan; synoniemen zijn peilen en pegelen[7,16].
Wijnroeien was een in West-Europa wijd verbreide meetmethode, die vanaf de late middeleeuwen tot in de negentiende eeuw werd toegepast.[74]
De oudste bekende zelfstandige tekst over wijnroeien dateert van 1347 [8] en daar de laatste die mij bekend is van 1857[9] is, mag men aannemen dat tenminste gedurende vijf eeuwen wijnroeiers aan het werk zijn geweest; dit is een lange periode, waarin deze techniek een evolutie heeft ondergaan.
De inhoudsmeting voor natte waren - voor het gemak steeds met de term wijnroeien hier aan te duiden - wordt in primaire teksten soms in een adem genoemd met het meten van oppervlaktes, landmeten dus[10]; het kwam vanaf de zeventiende eeuw vaak voor, dat de beroepen van landmeter en wijnroeier door een persoon in een gebied werden uitgeoefend.[10a] In beide gevallen gaat het om een toegepast wiskundig ambacht, dat in de late middeleeuwen en de renaissance door de nieuwe behoefte aan techniek en exacte wetenschap is opgekomen.
Een nu nog bekende wijnroeier was Anthoni van Leeuwenhoek (1632-1723) te Delft, de beroemde microscopist.[11]
De ontwikkeling van de landmeetkunde werd gestimuleerd door de behoeften van de krijgskunst : aan de hand van uit Italië overgewaaide technieken werden door "ingenieurs" verdedigingswerken ontworpen, in Nederland aanvankelijk vooral door de wiskundigen van prins Maurits (1567 - 1625): Simon Stevin[12] (1548 - 1625) en Adriaan Anthoniszoon[13] (1527 - 1607), wiens zoon we als auteur van een tekst over wijnroeien nog zullen ontmoeten. Verder was er de behoefte aan civiele techniek: kunstwerken als kanalen en stadsuitleg.[14]
De kunst van het wijnroeien had een kleinschaliger terrein, en staat in sommige algemene leerboeken daarom enigszins in de schaduw van het landmeten[10]; het wijnroeien was meer van commercieel nut - al zullen we zien dat de wijnroede ook de kanonnier[15] van pas kwam - het diende ter vaststelling van de hoeveelheid te verhandelen natte waar, van belang voor de koper en de verkoper en ook voor de belastingambtenaar.

2 b. Opzet van deze scriptie

De bedoeling van deze scriptie is om met het overzichtsartikel van M. Folkerts (1974)[6] als uitgangspunt een aantal primaire teksten over de theorie en de praktijk van het historische wijnroeien te behandelen, zowel teksten die Folkerts noemt als latere uit de zeventiende, achttiende en negentiende eeuw. De nadruk komt te liggen op zeventiende eeuwse nederlandse teksten, terwijl ook een overzicht wordt gegeven van Keplers Messekunst Archimedis[17] uit 1616. Deze scriptie is zodoende enerzijds een uitwerking van Folkerts' artikel, dat de ontwikkeling tot aan Kepler schetst, als een uitbreiding ervan naar latere eeuwen. Deze latere teksten zijn opgespoord met behulp van de bibliografie van Bierens De Haan [18]. Alleen primaire bronnen die betrekkelijk gemakkelijk te raadplegen waren komen in deze scriptie aan bod, zodat van volledigheid geen sprake is (zie voor een lijst van niet besproken teksten Bijlage I).
Daar enerzijds door de wetenschapsgeschiedenis tot nu toe weinig

aandacht is geschonken aan wijnroeien als vroege tak van toegepaste wiskunde in Europa[19] en anderzijds de bestudering van het wijnroeien zoveel raakvlakken heeft met andere terreinen van historisch onderzoek, is een zekere afpaling van het onderwerp van deze scriptie onontbeerlijk.
Aan de hand van figuur 2 kunnen we de volgende lijst van verwante onderwerpen opmaken. Op de eerste plaats is er

---1. de wijnhandel,
die de techniek van het wijnroeien in de late middeleeuwen in het leven riep, of althans er behoefte aan deed ontstaan. Vele vragen kunnen gesteld worden over de aard, omvang en geografische verbreiding van de Europese middeleeuwse wijnhandel en ook over de evolutie ervan in de tijd. Als men de maatschappelijke positie van wijnroeiers wil begrijpen, zal men eerst onder andere inzicht op dit terrein moeten verwerven.
In verband met deze sociaal-economische achtergrond staat

---2. de bemoeienis van de overheid, die lokaal trachtte de handel te bevorderen door het scheppen van orde en zekerheid en een van haar maatregelen was vaak het aanstellen van wijnroeiers op de markt. Dit was welbegrepen eigenbelang, want ook voor de belastingheffing op koopwaar en vooral wijn was een juist inhoudsmeting nodig.
Dan is bijvoorbeeld de vraag naar

---3. de wijnroeiers zelf, wie waren deze dragers van maatschappelijk relevante wiskundige kennis ? Men wordt nieuwsgierig naar hun biografie, maatschappelijke achtergrond, status en opleiding. Was er sprake van families van wijnroeiers, zoals bij landmeters voorkomt ? Het zou wenselijk zijn om over een lijst van alle nederlandse wijnroeiers sinds de middeleeuwen te beschikken, zoals deze voor landmeters al wel bestaat[20] daarmee zou ook iets kunnen worden opgemerkt over het relatieve belang van wijnroeien ten opzichte van landmeten.

---4. Het instrumentarium van wijnroeiers in verschillende tijdvakken en geografische gebieden zou eveneens een onderwerp van een studie kunnen zijn. Primaire teksten, afbeeldingen (iconografie) van historische instrumenten en in musea bewaarde instrumenten moeten daarbij betrokken worden.
In bijlage II wordt een korte beschrijving van vier achttiende eeuwse roeistokken gegeven. Zie ook bijlage III.

---5. Het kuipersambacht en zijn geschiedenis in Europa is verder van belang; de aard en de soort van het wijnvat bepaalde de inhoud die de roeier probeerde te meten , en ook de onnauwkeurigheid: er bestond een aantal beruchte kuiperslisten om de onnozele pegelaar te misleiden. Vanwege de internationale handel in wijn had men in de zeventiende eeuw bijvoorbeeld in Nederland te maken met typen vaten uit heel Midden- en Zuid-Europa en uiteraard veel Franse vormen.
Het is bekend dat in sommige gevallen de wijnroeiers zelf uit het kuipersgilde afkomstig waren [21] , een voor de hand liggende verandering van beroep.

---6. De maatstelsels[22] waar de wijnroeiers hun bevindingen mee moesten uitdrukken zouden ook beschreven moeten worden. Deze waren in principe van plaats tot plaats verschillend, hetgeen het werk van de roeier en ook de handel er niet eenvoudiger op maakte; vandaar dat aan vele wijnroeiboekjes een vergelijkingstabel van inhoudsmaten werd toegevoegd. Tot aan de Franse tijd ontbrak het aan standaardisatie,[23] al zijn er wel eerder pogingen in die richting gedaan.

2 c. Oudere methoden van inhoudsmeting.[6]

Om de wijnroeikunst in het juiste perspektief te plaatsen, moet aandacht geschonken worden aan de methoden voor inhoudsbepaling die al vóór 1400 na Christus werden voorgesteld, zonder dat er een meetstok aan te pas kwam met een kwadratische of kubische schaalverdeling. Die vondst bleef voorbehouden aan de eerste wijnroeiers, zoals we zullen zien.

In de hellenistische periode had Hero van Alexandrië (1^e eeuw na Christus 26) in de aan hem toegeschreven paragrafen van de Metrika - een werk gewijd aan stereometrie - op drie plaatsen recepten gegeven hoe men de inhoud van een vat kon bepalen.

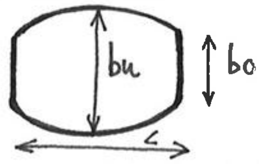
Op de eerste twee plaatsen wordt het vat aan een cilinder gelijkgesteld, met als doorsnee het gemiddelde van de doorsneden van buik en bodem van het vat (zie figuur 3), dus

$$\text{Inhoud} = ((bo + bu)/2)^2 \; p \; L \;/4 \qquad [1]$$

waarin p een benadering voor pi is; de andere grootheden worden in de figuur gedefinieerd.

bu = buik
bo = bodem

figuur [3] : vat



Op de derde plaats wordt de inhoud van een ton met verschillende diameters aan het grondvlak en aan de bovenrand berekend als een halve bol met de gemiddelde diameter als diameter, zonder dat de kromming en de lengte van het vat in rekening worden gebracht.

Folkerts vermoedt dat er gedurende de middeleeuwen en algemeen gesproken vóór de vijftiende eeuw geen zelfstandige geschriften over het bepalen van de inhoud van vaten bestaan.

De volgende werken moeten, gezien hun grote verspreiding, bijzonder populair zijn geweest in die periode: de aan Gerbert toegeschreven Geometria, het Tractatus Quadrantis van Robertus Anglicus en de Practica Geometriae van Dominicus de Clavasio.

In het eerste werk, de Geometria incerti auctoris dat uit het begin van de elfde eeuw stamt en ten onrechte aan Gerbert (overleden in 1003 27) werd toegeschreven, wordt het voorschrift

$$\text{Inhoud} = (\,3\,bu^2 + bo1^2 + bo2^2)\;\frac{22/7}{4}\;\frac{h}{3} \qquad [2]$$

gegeven; dit is op te vatten als de inhoudsformule voor een dubbele kegelstomp met een spondsdiameter die gelijk is aan de som van de bodemsdiepten dus - spondsdiameter is de diameter van de buik -

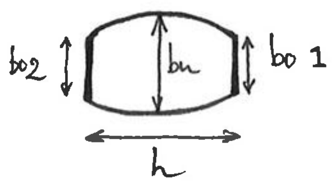
$$bu \;=\; bo1 + bo2 \qquad [3]$$

$$\text{Inhoud} = \frac{22/7}{24}\,h\,(\,2\,bu^2 + bo1^2 + bo2^2 + bu\,(bo1 + bo2)$$

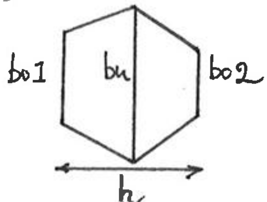
$$= \frac{22/7}{24}\,h\,(\,3\,bu^2 + bo1^2 + bo2^2)$$

waarbij de factor 4x3 in de noemer van [2] dan een vergissing is.[6]

figuur [4]



of

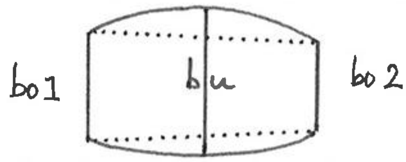


De uitdrukking [3] geeft althans voor zeer buikige vaten een redelijke benadering van de inhoud. Voor pi is hier de Archimedisch waarde[28] 22/7 genomen.
Ook in de Geometria wordt het volgende rekenvoorschrift voorgesteld:

$$\text{Inhoud} = (bo1^2 + bo2^2 + bo1 \times bo2)\ \frac{22/7}{4}\ \frac{h}{3} \qquad [4]$$

Deze formule geeft de inhoud van de kegelstomp tussen de bodems binnen het vat, terwijl de doorgaans toch dikkere buik buiten beschouwing wordt gelaten, met een veel te klein resultaat.

figuur [5]



In een van de laatste paragrafen van het Tractatus Quadrantis van Robertus Anglicus [29], dat omstreeks 1276 geschreven is, wordt dezelfde vergissing gemaakt, zowel in de latijnse originele versie als in duitse vertalingen (zie bijlage IV)
Dan biedt Dominicus de Clavasio ons in zijn Practica Geometriae - dat in 1346 te Parijs ontstond - een bruikbaarder methode aan: omdat het vat niet overal even dik is, moeten we het"reduceren", dat wil zeggen de diameters van doorsnedes middelen.
Daarna wordt het gemiddelde oppervlak vergeleken met het oppervlak van de bodem van een standaardvat - dit moet dus een cilinder zijn - en na in rekening brengen van de lengteverhouding van het te meten vat en het standaardvat vinden we het volume, dus

$$\text{Inhoud} = \frac{((bu + bo)/2)^2}{\text{oppervlak maat}} \times L_{vat} / L_{maat} \qquad [5]$$

Daarna gaat Clavasio over tot de berekening van de inhoud van een half vat, door de oppervlakken van de halve doorsneden aan bodem en buik te middelen en dan te vermenigvuldigen met de lengte. Op een andere plaats in hetzelfde werk wordt de berekening van gedeeltelijk lege vaten algemeen uitgevoerd: al eerder was langs een dubieuze weg de oppervlakte van een cirkelsegment berekend. Hieruit volgt direkt de methode voor het deels lege vat: vind het cirkelsegment van de bodems dat nog nat of juist droog staat en vermenigvuldig die oppervlakte met de lengte van het vat. In bijlage IV wordt hier dieper op ingegaan.
De **opvatting** van het vat als dubbele kegelstomp en de juist genoemde methode voor het gedeeltelijk lege vat zullen we nog herhaaldelijk ontmoeten. Het is opvallend dat dit laatste onderwerp al zo vroeg aan de orde werd gesteld. Verder mag uit de diversiteit van voorgestelde methoden, die de middeleeuwse wiskunde in het algemeen vreemd is, worden afgeleid[6] dat het hier om theoretische bespiegelingen ging zonder praktische toepassing.

2 d. Historische achtergrond

2 d.1. Wijnhandel en -consumptie

Voordat we overgaan tot het nader bekijken van een aantal primaire teksten over het wijnroeien, moet in het kort iets opgemerkt worden over de sociaal-economische achtergronden van het wijnroeien: de opbloeiende wijnhandel en -consumptie in het Europa van de late middeleeuwen die de behoefte deed ontstaan aan een redelijk betrouwbare methode van inhoudsmeten, het wijnroeien.
Omdat in het kader van dit kleine onderzoek geen plaats was voor een systematische en afdoende behandeling van de in de titel van dit hoofdstuk genoemde onderwerpen, beperk ik me hier tot een korte weergave van wat Folkerts (1974)[6] en Craeybeckx (1958)[30] hierover te vertellen hebben; in de noten worden nog wat losse aanwijzingen gegeven die me toevallig bereikten.
Folkerts(1974) benadrukt het verband tussen de opbloei van de wijnhandel in de veertiende en vooral vijftiende eeuw en de opkomst van het wijnroeien in Duitsland. In de voorafgaande periode was het probleem van de inhoudsmeting niet van groot praktisch belang; het bleef een vraagstuk binnen de stereometrie.
In de genoemde eeuwen kwam daar verandering in; met de handel steeg de grootte van de bevolking in de duitse steden en het verkeer nam toe, verder gestimuleerd door een verbeterde infrastruktuur van kanalen, bruggen en wegen. Zo ook het transport van wijn, die sinds de Romeinse tijden aan de Moezel en in de Palts in houten vaten werd opgeslagen.
Elke stad waar in wijn, bier, honing, olie en vis werd handelgedreven, kende kuipers, die vaak in gilden georganiseerd waren.
In het belang van de koper, verkoper en de plaatselijke overheden, die op alle handelswaar belasting hieven, ontstond er omstreeks de dertiende eeuw behoefte aan een methode om de inhoud van vaten te bepalen.
Aanvankelijk was in Zuid-Duitsland Regensburg de voornaamse handelsstad, op het kruispunt van twee handelsroutes: van Vlaanderen over Keulen naar Wenen en Hongarije, en vanuit Frankrijk over Neurenberg naar Bohemen en Kiev. Regensburg bezat al van voor het jaar 1000 het stapelrecht, zodat alle handelswaar die de stad passeerde daar verplicht op de markt moest worden gebracht en eerst aan burgers van die stad te koop moest worden aangeboden.
Maar omdat Regensburg en omgeving zelf geen wijn voortbracht, werd deze stad in de veertiende eeuw overvleugeld door Neurenberg, dat het centrum vormde voor de produktie van de wijn uit het Frankenland; uit de archieven van kooplieden blijkt een omvangrijke handel met het Rijngebied en Oostenrijk. De koopman Ulman Stromer uit Neurenberg vermeldde rond 1400 voor het eerst de wijnroede, zoals we onder zullen zien.
De raad van Neurenberg vaardigde al vroeg vele bepalingen uit, waar de handel, het transport, de tap en de verkoop van wijn binnen de stad aan gebonden was. De accijns op wijn werd berekend door twee wijnroeiers die van stadswege waren aangesteld; op marktdagen waren zij bij de handel ieder behulpzaam die van hun diensten gebruik wilde maken, op andere weekdagen moesten zij de wijnkeurmeesters (Weintadelsmeister) assisteren. Alleen door de officiële wijnroeiers gemeten en verzegelde vaten mochten verhandeld worden: overtreding werd met geldboetes bestrafd.
Voor het wijnroeien werd een vastgesteld bedrag in rekening gebracht: op de markt laten roeien was goedkoper (1 halblink per emmer inhoud) dan bij de mensen thuis (1 Heller per emmer). Uit de eed die de wijnroeiers als stadsdienaren moesten afleggen - die Folkerts citeert - blijkt dat de wijnroeier een technisch beambte was ten behoeve van de belastingheffing (Ungelt) : hij diende

steeds op dezelfde manier te roeien ("on geverde") en de Ungelter (accijnsmeesters) op de hoogte te stellen van zijn bevindingen, maar hij mocht zelf dit Ungelt niet innen.
Eens in de maand werd hem zijn loon op het raadhuis uitgekeerd na berekening aan de hand van het boek, dat hij van zijn werkzaamheden moest bijhouden.
In Ulm bestond een soortgelijke regeling, maar hier hingen de kosten van het roeien ook nog van de soort wijn af.
Ook in de oudst bekende verordening voor wijnroeiers - die van Parijs uit de dertiende eeuw, met vertaling weergegeven in bijlage V - waren de roeikosten afhankelijk van het soort natte waar: honing laten roeien was het duurst. In deze verordening worden de aanstelling, het roeiloon,de beslechting van geschillen, het geografische werkterrein en de burgerplichten van de wijnroeier van Parijs geregeld. 31
Langs de Rijn, die volgens Folkerts in de middeleeuwen de voornaamste handelsweg voor wijn vormde, beheerste Keulen de wijnmarkt Deze was ook hier door de stedelijke overheid strikt georganiseerd de stad zag er scherp op toe, dat bijvoorbeeld nederlandse kooplui niet rechtstreeks met de wijnproducenten in contact kwamen.
Vanaf 1370 waren er vier "Rheinmeister", die door de raad der stad werden aangesteld; daarnaast had sinds 1378 de "Weinschule" het toezicht op de handel. Vier "Unterkäufer" moesten toezien op de naleving van de verordeningen, terwijl twee wijnroeiers alle wijn die in Keulen kwam en te koop werd aangeboden verplicht roeiden. Per hoeveelheid wijn werd hiervoor een "Rutenpfennig" in rekening gebracht, die voor de stad een aardige extra bron van inkomsten betekende.
De wijnroeiers beschikten over wijnroedes van een voorgeschreven type, waarvan er twee als standaarden op de "Rentkammer" lagen; het was de roeiers streng verboden zowel om er een particuliere wijnroede op na te houden, als om zelf aan de wijnhandel deel te nemen; wel mochten zij toetreden tot de Weinschule.
Ter aanmoediging kregen de roeiers de helft van de boetes op overtredingen die zij aan het licht brachten.
De voornaamste handelspartners van Keulen waren stroomopwaarts Straatsburg en stroomafwaarts Deventer, Dordrecht - dat ook een stapel had - Brugge en Antwerpen, waar ook de handelsroute van de Franse wijnen, vooral vanuit La Rochelle eindpunten had.
In al deze steden waren van overheidswege wijnroeiers aangesteld met een soortgelijke positie als in Neurenberg en Keulen; dit gold ook voor Frankrijk en Engeland. Vaak waren wijnroeiers volslagen ambachtslieden.
Folkerts merkt op, dat de historische bronnen - archieven vooral - meestal niets vermelden over de meetmethoden; vaak wordt zelfs niet aangegeven of een wijnroede gebruikt werd, maar ligt het accent uitsluitend op het financiële en bestuurlijke aspekt.
Soms vindt men in nederlandse stadsrekeningen opmerkingen over de wijnhandel 32 ; in die van Deventer over 1394 - 1400 staat dat de accijnsmeesters bij ieder in- en uitslaan van wijn aanwezig dienen te zijn en onthaald moeten worden. Zij moeten de wijn "roden"(roeien), er aantekening van houden en de wijn versizen (belastingheffen); een vergelijkbare situatie met de Duitse die Folkerts schetst dus.
Craeybeckx 30 is erin geslaagd door vergelijking van archiefmateriaal tot een kwantitatieve schatting van de wijnhandel vanuit Frankrijk naar Nederland in de 13^{e} tot de 16^{e} eeuw te komen; een soortgelijke studie die de latere periode behandelt is mij op dit moment niet bekend. Craeybeckx doet ook mededelingen over de gang van zaken op stedelijke wijnmarkten en komt tot soortgelijke conclusies als Folkerts: de wijnroeiers kwamen op alle grote wijnmarkten voor en hun aanwezigheid wijst op een meer dan lokaal belang van de stapel. In het algemeen moeten alle vaten

Naar de historische context van het wijnroeien in Nederland van de zeventiende tot de negentiende eeuw heb ik geen onderzoek gedaan.
Dat politieke strijd op het wijnroeien van invloed kon zijn, bewijzen de gebeurtenissen in Gelderland van 1704: rivaliserende facties in de Staten maakten de belastinginning onmogelijk 38 .
Tot in de achttiende eeuw werd door overheden en wijnroeiers pijnlijk ervaren, dat men met de methode van het wijnroeien de inhoud van vaten slechts bij benadering kon vaststellen 40 .
Hoe stond het met de opleiding tot wijnroeier ?
Het is bekend dat men aan de universiteit van Franeker kon studeren voor ingenieur, landmeter en wijnroeier, waarschijnlijk al ten tijde van Adriaan Metius, die hoogleraar was van 1598 - 1635. Van zijn opvolger Bernardus Fullenius staat het vast dat hij wijnroeiers afleverde; deze was hoogleraar te Franeker van 1636 - 1657. 39
In de stad Utrecht werd aan de Fundatie van Renswoude, een opleidingsinstituut voor wezen, van 1761 tot 1792 door Laurens Praalder in wijnroeien lesgegeven. 40,41
De procedure van admissie en aanstelling van wijnroeiers door de overheden verdient nader onderzoek 42,53 .

2 d.2. De Duitse wijnroeiteksten

Folkerts (1974) geeft een kort overzicht van de duitse primaire bronnen over wijnroeien, zowel van manuscripten als van gedrukte teksten uit de late middeleeuwen en renaissance tot in de 17e eeuw. Hij ziet de stereometrische werken van Kepler uit 1615 en 1616 (Stereometria Doliorum en Messekunst Archimedis) als een eindpunt van de ontwikkeling. Daarvoor zijn er gedurende drie eeuwen wijnroeiteksten geweest, die uit de laatste 150 zijn overgeleverd : Folkerts telt de ietwat duistere tekst van Ulman Stromer - rond 1400 - niet mee. Uit de periode 1445 - 1520 zijn meer dan 30 uitvoerige verhandelingen bewaard gebleven; vanaf 1485 neemt de boekdrukkunst langzamerhand de rol van de pen over 43 .
Waar lag de geografische oorsprong van deze teksten ?
Folkerts komt onder andere op grond van de verspreiding van de boekjes en manuscripten over bibliotheekkollekties tot de conclusie dat Zuid-Duitsland, en mogelijk het klooster St. Emmeram bij Regensburg, rond 1350 de geboorteplek van de wijnroeikunst vormde. Verder worden de universiteiten van Erfurt en Wenen, waar wiskundigen als Johannes von Gmunden (1382 - 1442), Georg Peurbach (1423 - 1461) en Johannes Regiomontanus (1436 - 1476) actief waren, genoemd als centra van wijnroeipublicaties vanaf omstreeks 1450. Aan het begin van de zestiende eeuw verschenen ook dergelijke teksten in de handelssteden Brugge en Antwerpen; een ervan, door Gielis van den Hoecke, zullen we nader bespreken.
Met de boekdrukkunst kwam er ook meer duidelijkheid over de auteurs: vaak zijn zij rekenmeesters, dat wil zeggen leraren in handelswiskunde die zelf aan een universiteit gestudeerd hadden. Zij gaven kooplui les in rekenen, breuken, rente, omrekenen van maten en gewichten, munten , boekhoudkunde en dergelijke; geen wonder dat juist zij over wijnroeien gingen publiceren.
Folkerts noemt Jakob Köbel (circa 1460 - 1533), Heinrich Schreyber (voor 1496 - 1525) = Grammateus, die een axiomatische opzet van de doliometrie (de vatmeting) beoogde, maar hierin niet slaagde, Ulrich Kern, auteur van het "grosse Visierbuch" van 1531 dat alle vorige publicaties in omvang overtrof en anderen 44 .
Verder bewogen zich ook in de Nederlanden auteurs op dit terrein: Michiel Coignet (1549 - 1623) te Antwerpen en Martin van den Dijcke (circa 1549 - 1600), eveneens te Antwerpen. 45
In Duitsland waren er ook artsen die over wijnroeien publiceerden:

Eynn kurtz newe Rechenn vnnd Visyr buechleynn gemacht durch Heinricum Schreyber võ Erffurdt der Sieben freyenn kunsten meyster.

Gedruckt zu Erffurdt durch Matthes Maler.

Figuur(6)
Titelblad van Heinrich Schreÿber (Grammateus): Eynn kurtz newe Rechenn unnd Visyr buechleynn, Erfurt 1523. Rechts is een kubiekroede afgebeeld.
(Illustratie uit Folkerts 1974)

Burchard Mithob (Mithoff) (1501 - 1564) en Johann Hartmann Beyer (1563 - 1625) die tevens met Kepler over wijnroeien correspondeerde.46
Een aantal illustraties uit duitse wijnroeiboekjes is hier overgenomen uit het artikel van Folkerts.

2 d 3. Meetmethode in de duitse wijnroeiteksten

"Liber maister fisirit mirs recht" (1485)(zie figuur 8)

Omdat de teksten die Folkerts in vogelvlucht behandelde maar voor een klein deel overeenkomen met de hier te bespreken teksten, volgt hier nog een korte samenvatting van Folkerts opmerkingen over de meetmethode van de wijnroeiers zoals die uit zijn teksten blijkt. Deze kunnen dan vergeleken worden met de aanpak in de hier te bespreken teksten.
Folkerts geeft alleen een uiteenzetting van de wezenlijke ideeën, zonder in te gaan op de verschillen tussen primaire teksten onderling. Deze zijn niet bijzonder groot, "omdat de methoden van de wijnroeikunst al in de vroegste handschriften in hun geheel optreden en daarna niet fundamenteel veranderen. Daarom mag men van "de wijnroeiboeken" spreken." 47
Voor de inhoudsmeting heeft men een wijnroede (virga visoria, Visierrute) nodig, waarvan de wijnroeiboeken twee hoofdtypen onderscheiden: de kwadraat-roede, die in alle teksten aan bod komt, en de kubiek-roede, die vaak ontbreekt.
Het principe van de kwadraatroede bestaat hierin, dat het vat wordt opgevat als een cilinder, waarvan de inhoud berekend kan worden na meting van de oppervlakte van de doorsnee haaks op de as en van de lengte; daarom bezit de kwadraat-roede zowel een niet-lineaire kwadratische schaalverdeling voor de diepte van

Figuur(7)
Meting van de lengte van een cilinder.
Bynczendorffer : Ein fysier büchlein auff allerley eych, Bamberg 1485
(Illustratie uit Folkerts 1974)

Figuur(8)
Houtsnede op titelpagina van zowel het anonieme Visierbüchlein, Bamberg 1485 als Bynczendorffer: Ein fysier büchlein auff allerley eych, Bamberg 1485. De tekst luidt : liber maister fisirit mirs recht
(illustratie uit Folkerts 1974)

Figuur(9)
Voltooide wijnroede.

Jakob Köbel : Eyn New geordent Vysirbuoch,

Oppenheim 1515 (illustratie uit Folkerts 1974)

het vat (de diameter) als een lineaire voor de lengte. De inhoud van het vat volgt dan door vermenigvuldiging van de op de schalen gevonden getallen. In de praktijk wordt deze roede vervaardigd en daarmee geijkt op een cilindrisch standaardvat, dat men al dan niet een diepte = 1 geeft.
Om de roede van de kwadratische schaal te voorzien - de aanduiding 1, 2, 3, 4 enzovoorts komt te staan bij $1^{\frac{1}{2}}$, $2^{\frac{1}{2}}$, $3^{\frac{1}{2}}$, $4^{\frac{1}{2}}$ enzovoorts maal de eenheidsdiepte op de schaal voor de diepte van het vat - moet men dus beschikken over deze wortels.
Deze vindt men ofwel meetkundig door gebruik te maken van de stelling van Pythagoras en de hypotenusa's van rechthoekige driehoeken met een passer af te zetten en een rechthoekszijde steeds 48 te verlengen tot de lengte ter grootte van de voorafgaande wortel is - men heeft dan een iteratief proces

$$(n + 1)^{\frac{1}{2}} = (1^2 + (n^{\frac{1}{2}})^2)^{\frac{1}{2}} \qquad [6]$$

ofwel men vindt de wortel algebraïsch en hanteert een numerieke tafel.
In vroege teksten worden de wortels in de vorm van breuken opgegeven; de tweede diameter wordt in 19 delen verdeeld, zodat

$$2^{\frac{1}{2}} = 1 + 8/19 \qquad 3^{\frac{1}{2}} = 1 + 14/19 \qquad (7)$$

in goede - beter dan ½ % - benadering.
Voor de volgende wortels $2 \quad 5^{\frac{1}{2}} \quad 6^{\frac{1}{2}} \quad 7^{\frac{1}{2}} \quad 8^{\frac{1}{2}} \quad 3$ deelt men de derde diameter in 20 delen, zodat dan

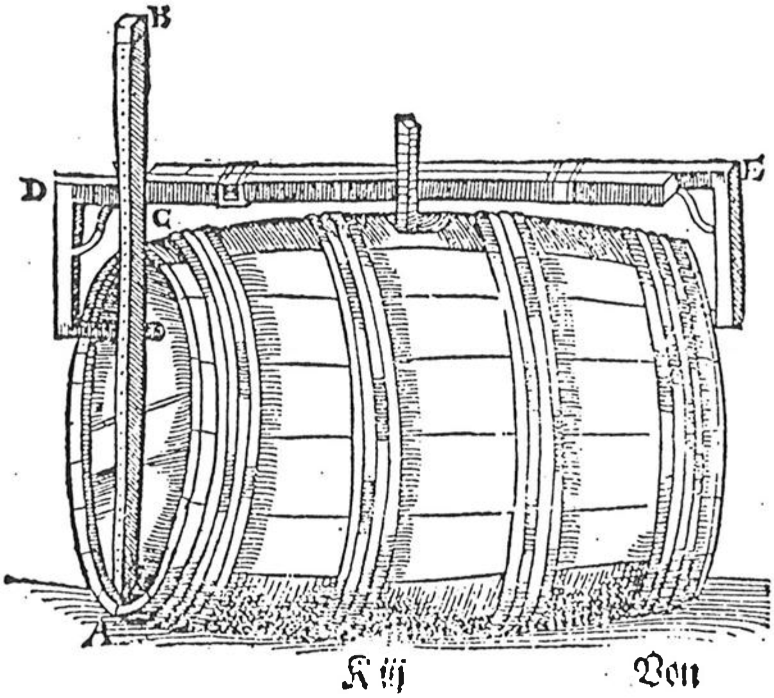
$$5^{\frac{1}{2}} = 2 + 4\tfrac{1}{2}/20 \qquad 6^{\frac{1}{2}} = 2 + 8\tfrac{3}{4}/20 \qquad (8)$$

$$7^{\frac{1}{2}} = 2 + 12\tfrac{3}{4}/20 \qquad 8^{\frac{1}{2}} = 2 + 16\tfrac{1}{2}/20$$

Ook hier is de benadering weer beter dan tot op een ½ %.
Wortels van grotere getallen dan 9 worden benaderd met

$$(n^2 + m)^{\frac{1}{2}} = n + m / (2n - 1) \qquad [9]$$

door te beginnen met de vierde diameter ($n = 3$, $m = 1, \ldots, 6$ voor de wortels $10^{\frac{1}{2}}$ tot en met $15^{\frac{1}{2}}$) het stuk schaal tot het volgende kwadratische getal in $2n - 1$ gelijke delen te verdelen. Dit levert betere resultaten dan een Taylor-ontwikkeling tot op eerste orde.
Om de roede te ijken kan men in plaats van een cilinder ook een vat met een bekende inhoud v gebruiken. Er zijn dan twee mogelijkheden; de eerste is dat men een willekeurige schaal voor de diepte d gebruikt. Men deelt de lengte van het vat door v / d om de lengte-eenheid te vinden.
De andere methode bestaat hierin, dat men uitgaat van een willekeurige lengte-eenheid. Men meet de lengte van het vat l in die eenheden en deelt dan het volume v door de gevonden lengte: men vindt dan het oppervlak van de gemiddelde doorsnee.



Figuur (10)
Meting van de lengte van een vat met behulp van haken. Georg Galgemair: Kurtzer gruendlicher gebesserter ...underricht...der...mathematischen Instrumenten... benebens dem fundament des visierens, Ulm 1615. (Illustratie uit Folkerts 1974)

Dus deelt men de werkelijke diepte van het vat door $(\underline{v} / \underline{l})^{\frac{1}{2}}$ of, als dit geen geheel getal is, door $(100^2\ \underline{l})^{\frac{1}{2}}$ delen, vaak nog zo vermenigvuldigd, dat de wortel een geheel getal wordt. In verschillende teksten wordt opgemerkt dat de diepteschaal ook lineair verdeeld mag zijn, maar dan moet men zelf nog kwadrateren, zodat een groter beroep op de rekenvaardigheid van de wijnroeier wordt gedaan. Een enkele maal zullen we dit ook bij de in deze scriptie te bespreken teksten tegenkomen (de la Rose, 1639).
Het gebruik van een wijnroede is eenvoudig : men meet de doorsnede van de beide bodemen van het vat en middelt zonodig de uitkomsten op de kwadratische diepte-schaal. Daarna wordt ook de doorsnede van het vat bij het spongat midden op de buik gemeten en de middeling met vorige uitkomsten herhaald: men heeft de "corrigirt tieffe" van het vat gevonden. In formule-vorm:

$$\text{inhoud} = \frac{\frac{bo1^2 + bo2^2}{2} + bu^2}{2} \times L \times pi/4 \qquad [10]$$

Het gemiddelde kan gevonden worden met een mediaal (zie bijlage III).
Bij het meten van de lengte moet men rekening houden met de kimmen - de overstekende einden duig bij de bodemen - en ook de dikte van de bodemen. Bovendien kan de kromming van de duigen het meten van de lengte bemoeilijken. Voor de dikte van de bodemen, die men alleen kan schatten, wordt vaak de vuistregel gehanteerd[3]

$$2 \times \text{bodemsdikte} = 1 \text{ kim} \qquad (11)$$

Het probleem van de lengte-meting kan worden opgelost door twee haken te gebruiken, waar het vat tussen wordt geklemd(zie figuur 10).
Een verdere vereenvoudiging van de berekening is mogelijk, als de roede met zogenaamde wissels is uitgerust; is de diepte een geheel getal, dan kan de inhoud onmiddelijk worden afgelezen (zie bijlage III). De wisselroede is dus een combinatie van meetstok en rekenlineaal, zouden we tegenwoordig zeggen, waarop de vermenigvuldiging van diepte en lengte wordt uitgevoerd.
Mij is maar een nederlandse tekst bekend, waarin van wisselroeden sprake is: Willem Raedts, Practycke om lichtelijc te leeren visieren alle Vaten metter Wisselroede, Antwerpen 1580 (herzien door Michiel Coignet)[49]
Zo'n vermenigvuldiging is overbodig als men het andere, minder vaak gepropageerde type wijnroede hanteert: de kubiekroede, die de diagonaal van een halfvat van spongat midden op de buik tot aan de onderkant van een van de bodemen meet.
Een groot nadeel is wel, dat de schaalverdeling alleen op een soort van gelijkvormige vaten van toepassing is. Het is duidelijk waaraan deze roede zijn naam dankt: de diagonaal groeit met de derdemachtswortel van het volume van het vat.
Bij het gereedmaken van de roede stuit men weer op het probleem van het vinden van de wortels: de oplossing is weer meetkundig of algebraisch. In het eerste geval gebruikt men de methode van de kubusverdubbeling die in de Oudheid voor het Delische probleem werd toegepast; door proberen met rechte lijnen[176] vindt men de beide middenproportionale getallen (eigenlijk lengten dus) in de betrekking

$$a : x = x : y = y : b \qquad [12]$$

Figuur (11)
Aantekenen van de inhoud op het vat
en meten van een bodemsdiameter.
Uit : Jacob Köbel, Eyn New geordent Vysirbuoch,
Oppenheim 1515 (illustratie in Folkerts 1974)

Daar $(a^2b)^{1/3} = x$ en $(ab^2)^{1/3} = y$ kan zo elke derdemachtswortel worden gevonden.
Soms werd een lineaire stok aanbevolen, waarna de gevonden diagonaal tot de derde macht moet worden verheven: dan hebben we te maken met een gewone meetstok.
De kubiekroede komt steeds voor in traktaatjes, die in Oostenrijk ontstonden; daarom mag men volgens Folkerts aannemen - hetgeen ook Kepler beweerde in zijn Messekunst Archimedis[50] dat deze roede in Oostenrijk ontstaan is en ook daar voornamelijk werd gebruikt. We zullen zien dat hij ook in Nederland in de zeventiende eeuw vrij populair was .
Helmreich[51] beschreef nog een variant : meet met een leren riem de gemiddeel de omvang van het vat en ook de lengte van het vat en tel de gevonden getallen op; als de riem als een kubiekroede geijkt is, vindt men zo een maat voor de inhoud.

3. Vroege wijnroeiteksten (1400 - 1600)

3 a. Ulman Stromer (circa 1400)[52]

In zijn Puechel von meim geschlechet und von abentewr beschreef de Neurenbergse koopman Ulman Stromer (1329 - 1407) familieaangelegenheden en tevens politieke gebeurtenissen (onder andere de jodenvervolgingen in Zuid-Duitsland) naast commerciële zaken uit de jaren 1349 - 1407. Het 36^e hoofdstuk is gewijd aan een bondige samenvatting van het wijnroeien, die met vertaling is weergegeven in bijlage VI . Deze tekst vormt de oudste overgeleverde beschrijving van de methode van de wijnroede, in dit geval een kwadraatroede.
Er wordt gewerkt met een maatcilinder en een passer, tussen de benen waarvan de diameter van de cilinder wordt genomen, nadat deze eerst met een maatstokje is afgepast. Met de passer wordt een cirkel getrokken, waarin de straal het eerste vierendeel voorstelt voor de diepte-schaal.
Door nu de hypotenusa van de rechthoekige gelijkbenige driehoek met deze straal als zijde te nemen tussen de benen van de passer vindt men de schaalafstand voor het tweede vierendeel. Iteratief kan dit proces worden voortgezet; "dat is de diepte van het vat". De lengte van een vierendeel wordt eenvoudig gevonden : deze afstand en zijn veelvouden worden ook lineair op de stok aangebracht. Na een vermenigvuldiging van lengte en diepte van het vat vindt men de inhoud.
We zien dus dat de meetkundige wortelconstructie gebruikt wordt, waarbij opeenvolgende hypotenusa's met de passer tot de volgende zijde van de driehoek worden gemaakt.

3 b. Codex 3083, Wenen (15^e eeuw ?)[55]

In een Weense Codex uit de vijftiende eeuw bevindt zich een korte tekst over wijnroeien; op grond van filologische kenmerken kan de tekst gedateerd worden rond het einde van de veertiende eeuw. Zijn herkomst lijkt Keulen te zijn; eventueel is de tekst overgeschreven door een Zuid-Oost- Duitse schrijver, bijvoorbeeld te Regensburg[54] .
De tekst wordt met vertaling in bijlage VII weergegeven.
Ook hier wordt de lezer geleerd hoe hij een wijnroede voor diepte en lengte - weer een kwadraatroede dus - moet maken, waarbij een kleine tobbe als ijkvat dient en de schaalverdeling voor de diepte door een meetkundige konstructie gevonden wordt.
De diameter van de maattobbe wordt tussen de passerbenen genomen;

met de passer wordt een cirkel getrokken die in vieren wordt gedeeld, en vier gaatjes worden in de omtrek op gelijke hoekafstanden geprikt. Dan wordt met een tweede, grotere passer door vanuit twee diametrale gaatjes een kruis te maken een lijn haaks op de diameter gekonstrueerd. Met een meetsnoer wordt de lengte van de roede afgezet. Daarna wordt de meetkundige wortelkonstruktie met de eerste passer uitgevoerd.
De schaalverdeling voor de lengte wordt op een tweede stok aangebracht: de roeier moet dus met twee roeden werken, een kortere voor de lengte en een langere voor de diepte.

3 c. Tractaetken vander Vergierroede (begin 16e eeuw)[56]

Hoewel ik dit manuscript uit Brugge [57] niet zelf onder ogen heb gehad, is de beschrijving door Verlé zo uitvoerig, dat een vergelijking met de overige hier besproken teksten toch mogelijk is.
In de tekst wordt eerst een numerieke poging gedaan om het cirkeloppervlak om te zetten in een rechthoek ("quadratura circuli").
Als de diameter 7 eenheden groot is, komt voor het oppervlak - met pi = 22/7 - $38\frac{1}{2}$ en voor het omschreven vierkant 49. Hoe lang is nu de zijde van een vierkant met dezelfde oppervlakte als de cirkel ?
Stilzwijgend wordt de volgende benadering voor de wortel gebezigd:

$$(38\tfrac{1}{2})^{\frac{1}{2}} = (36 + 5/2)^{\frac{1}{2}} < 6 + \frac{5/2}{2 \times 6} = 6 + 5/24$$

$$\geq 6\ 1/5 = 31/5 \qquad [13]$$

Maar

$$38\tfrac{1}{2} - (31/5)^2 = 3/50$$

zodat

$$(38\tfrac{1}{2})^{\frac{1}{2}} = (\ (31/5)^2 + 3/50)^{\frac{1}{2}} \leq 31/5 + \frac{3/50}{2 \times 31/5}$$

$$= 3847/620 \qquad [14]$$

[de relatieve fout in dit resultaat bedraagt slechts 3×10^{-7}]
In de tekst worden alleen enkele tussenresultaten vermeld; eerst werd uitgegaan van een vierkantszijde van 4340. Tenslotte wordt in de tekst nagegaan dat het verschil tussen het oppervlak van de gevonden cirkel en het vierkant zeer klein is (9/384400).
"Ende aldus houde die 3847/620 pro quadratura circuli, tot dies dat ic yement vinde die mij naerder bewijst".
Na deze theoretische uiteenzetting komt de auteur toe aan de "vergierroede" (verge = roede, verger = roeien) zelf. Dat met de lokale inhoudsmaten van Brugge (pint, vierendeel, stoop, zester, quarteel enzovoorts[58] in de verhouding 1 : 2 : 4 : 64 : 352) bevestigt dat het manuscript daar ontstond.
Tot het noodzakelijke instrumentarium behoort:

1. een vergierroede van 13 voet lang - een voet = 27.5 cm hier - met een vast haakje aan een uiteinde
2. een losse haak, die over de schaalverdeling van 1. kan glijden
3. een "tintroede", die aan de vaste haak van de roede haaks op 1 gemonteerd kan worden, zodat dan de tintroede de diepte-schaal draagt en de vergierroede (1.) de lengte-

schaal. De tintroede is een smal stokje van vijf voet lang, met bijvoorbeeld een zilveren knop 59 .
4. een loden pijp, die aan een uiteinde dicht is: een cilinder met een binnendiameter van 2 duim en een lengte van ongeveer 25 duim, die gebruikt wordt om de roede te ijken; zijn inhoud bedraagt ½ stoop Brugs. We zien dat de lengte dus 12 1/3 maal de binnendiameter is.
5. een koperen draad, even lang als de binnenlengte van de loden pijp.
Op de zogenaamde korte kant van de roede wordt met de koperdraad de binnenlengte van de pijp twee of drie maal afgezet; de lange kant dient om de lengte van het vat te meten.60
Gezien de inhoud van de pijp - ½ stoop - wordt de lengte van 1 stoop op twee maal de lengte van de pijp, dus op 50 duim gesteld. Zeer omslachtig wordt daarna uitgerekend wat de inhoud van de pijp zou zijn als deze een diameter had ter grootte van de lengte van 1 stoop bij gelijke hoogte; de diameter wordt gedefinieerd als 7, zodat

$$\text{diameter pijp} = 7 \;;\; \text{lengte pijp} = 12\ 1/3 \times 7$$

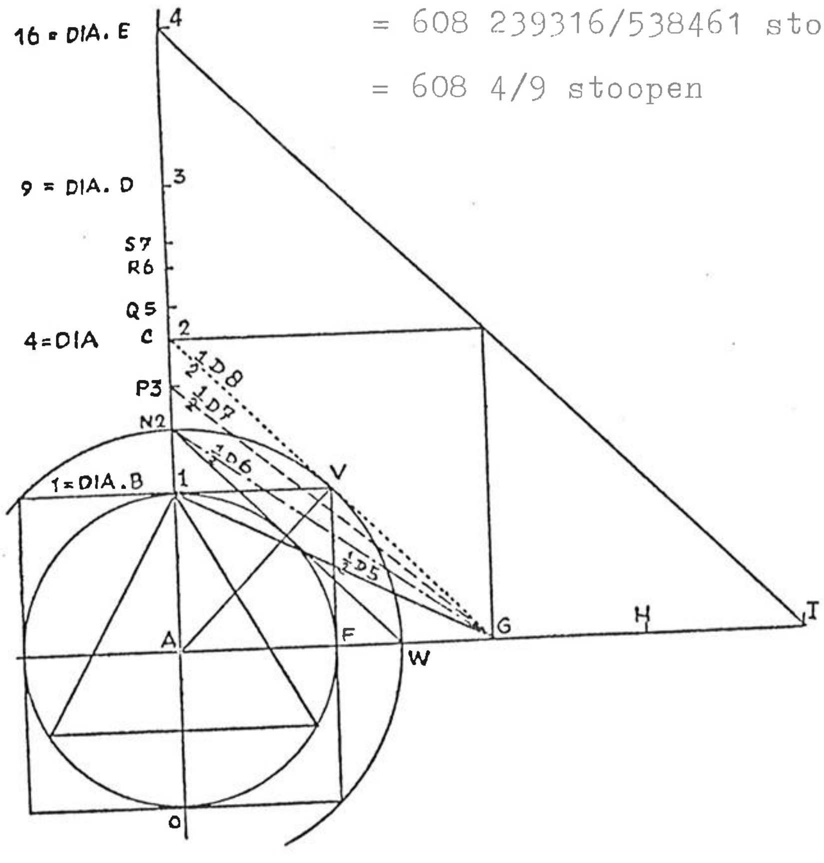
$$\text{lengte stoop} = 2 \times \text{lengte pijp} = 2 \times 12\ 1/3 \times 7 \equiv l_s$$

$$\text{inhoud 1 stoop} = 11/14 \times 7^2 \times l_s = I_1$$

$$\text{inhoud vergrote pijp} = 11/14 \times l_s^3 / I_1 \qquad [15]$$

$$= 608\ 239316/538461 \text{ stoopen}$$

$$= 608\ 4/9 \text{ stoopen}$$



Figuur[12]
Meetkundige wortelkonstruktie in het Tractaetken vander Vergierroede (Brugge, begin 16^{e} eeuw)
(Illustratie uit Verlé 1960)56

Ook langs de weg van een andere inhoudsmaat wordt in het manuscript dit antwoord nogmaals gevonden. Tevens worden inhoudstabellen gegeven, waarbij de diameter van 7 tot 21 loopt.
Op de derde zijde van de vergierroede staat een schaalverdeling van 28 maal 2 duim - de binnendiameter van de pijp.
De laatste aanduiding op deze lingaire schaal (28) komt overeen met het merk voor 49 zesters = 28^2 stopen = 224 stopen op de korte kant van de vergierroede, de diepte-schaal dus.
Om de tussenpunten tussen de kwadraten te vinden in de kwadratische verdeling van de diepte-schaal, wordt de meetkundige konstruktie toegepast; uitgegaan wordt van een cirkel, die de diameter van de pijp als diameter heeft.
Met behulp van een omgeschreven vierkant en de cirkel daaromheen geschreven wordt de lengte $2^{\frac{1}{2}}$ voor het merk "2" op de roede gevonden (zie figuur 12). $3^{\frac{1}{2}}$ is de lengte van een zijde van de ingeschreven gelijkbenige driehoek. De verdere konstruktie is standaard.
Voor de praktijk van de roede bestaan er twee handschriften met bijna dezelfde inhoud.[57]
Men meet de diameter bij spongat en bodemen en tekent hun maten op de kwadraatroede met krijt aan, en middelt ze. Na vermenigvuldiging met de lengte krijgt men de inhoud. Als de buik niet rond is, kan men op een kwart omtrek van het spongat af een tweede gat in het vat boren en ook daardoorheen de diameter meten en middelen. Bij het spongat trekt men 1 duim af voor de dikte van de duigen; in formule-vorm:

$$\text{Inhoud} = (((bu1 + bu2)/2 - 1'' + (bo1 + bo2)/2)/2)_{\text{korte kant}} \times L \qquad [16]$$

hetgeen neerkomt op het middelen van de in- en omgeschreven cilinder in en om het vat, met een korrektie voor de duigdikte.
In het andere Brugse handschrift[61] uit het einde van de 16^e eeuw wordt een recept gegeven voor het geval dat de tintroede niet kan worden gebruikt, bijvoorbeeld als de inhoud bevroren is. Met een leren riem ("bast") meet men de omtrek bij de spon O en vindt als diameter :

$$d = (O - 8 \times \text{dikte hout}) / 3 \qquad [17]$$

dus men heeft voor pi 3 genomen.
De lengte van het vat kan worden gemeten met de lange kant van de vergierroede met het glijhaakje, terwijl de vaste haak tegen een van de bodemen rust.
Het oudere manuscript H[57] vat de inhoudsberekening samen in 9 regels die uit het hoofd moeten worden geleerd; ook kan de regel van drieën - evenredigheden - worden gebruikt; tevens zijn tabellen aan het handschrift toegevoegd.
Voordat de gevonden inhoud op het vat gegraveerd wordt[62], moet eerst nog een korrektie worden afgetrokken: men heeft gerekend met watermaten, maar wijn bevat ook droesem, waarvoor ongeveer 4% wordt afgetrokken.

Regels voor de inhoudsberekening (Tractaetken vanden Vergierroede)

regel	diepte van vat	lengte van vat	inhoud
1	zester	1/16 stoop	1 stoop
2	4 stoop	1/16 stoop	1 pint
3	8 stoop	1/16 stoop	2 pint
4	12 stoop	1/16 stoop	3 pint
5	1 stoop	1/16 stoop	1/64 stoop
6	1 pint	1/16 stoop	1/16 stoop
7	willekeurig=D	1/16 stoop	D/16 stoop
8	willekeurig=D	1 stoop	D stoop
9	willekeurig=D	1 stoop	D stoop

zester = 16 stoop   pint = 1/4 stoop

3. d. Gielis vanden Hoecke: Een sonderlinghe boeck (1537) 63

In zijn rekenboek: Een sonderlinghe boeck in dye edel conste Arithmetica...........Antwerpen 1537 besteedt Gielis van den Hoecke ook aandacht aan wat in de uitvoerige titel heet: De fabrike van der wijnroeden oft visierroeden en het useren van dien.
Op folio 164 verso tot en met 171 recto geeft hij aan, hoe een kwadraat-roede gemaakt met worden - zowel met een worteltabel als met een meetkundige constructie - terwijl voorschriften voor de berekening van de inhoud van vaten en van vierkante bakken worden gegeven.
Vanden Hoecke begint met drie soorten van maten te onderscheiden: twee soorten van de diepte (= diameter) van het vat, namelijk "metten langhen cirkel", genaamd profunditas geometrica, en "metten corten cirkel", arithmetica genoemd omdat hij door worteltrekking wordt gevonden - uit "radicum extractum": Gielis vanden Hoecke heeft het vak zelf geleerd met de latijnse termen.
In de derde plaats is er nog de manier om de lengte die bij iedere diepte hoort te vinden.
Om een schaalverdeling van ghelten of stopen te maken voor de diepte van het vat wordt eerst de meetkundige wortelconstructie onderwezen (zie figuur 13). Vanden Hoecke realiseert zich, dat $(a + b)^{\frac{1}{2}}$ de lengte van de hypotenusa is van een rechthoekige driehoek met zijden $a^{\frac{1}{2}}$ en $b^{\frac{1}{2}}$, ook als a en b $\neq$ 1, anders dan in de boven besproken teksten.
Uitgaand van dit principe geeft hij aan, hoe de constructie te controleren is door de wortels tussen meer paren punten af te zetten; "ende comet so niet/so schijnet dat den winckelhaeck niet oprecht en is".
Ook voor de schaalverdeling in pinten (4 pint = 1 ghelt of stoop) wordt de meetkundige manier gegeven.
Daarna wordt ook de algebraïsche weg aangegeven: zet eerst op een vlak stuk metaal of hardhout de lengte van 1 stoop af, en verdeel die tweemaal achtereenvolgens in tienen, dus totaal in honderd gelijke delen. Aan de hand van een worteltabel worden de wortels van 1 tot en met 50 gevonden ("R quadrata"), die als "puncten" voor de schaal dienen; de wortels worden met 4 cijfers opgegeven, waarvan de laatste vaak onbetrouwbaar is, zo blijkt bij narekenen; waarschijnlijk is de worteltrekking met staartoperatie toegepast. Zo wordt $18^{\frac{1}{2}}$: 4 spacien 242 puncten.
De verdeling in pinten volgt analoog, en wordt met voorbeelden verduidelijkt; voor ieder ghelt worden de puncten van het eerste, tweede en derde pint gegeven.

Gedrukt by Simon Cock te Antwerpen 9 Febru-ary 1537. (Zie de laatste regelen van het werk)

Figuur (13)
Titelpagina en fol 165v en 166 van Vanden Hoecke (1537)

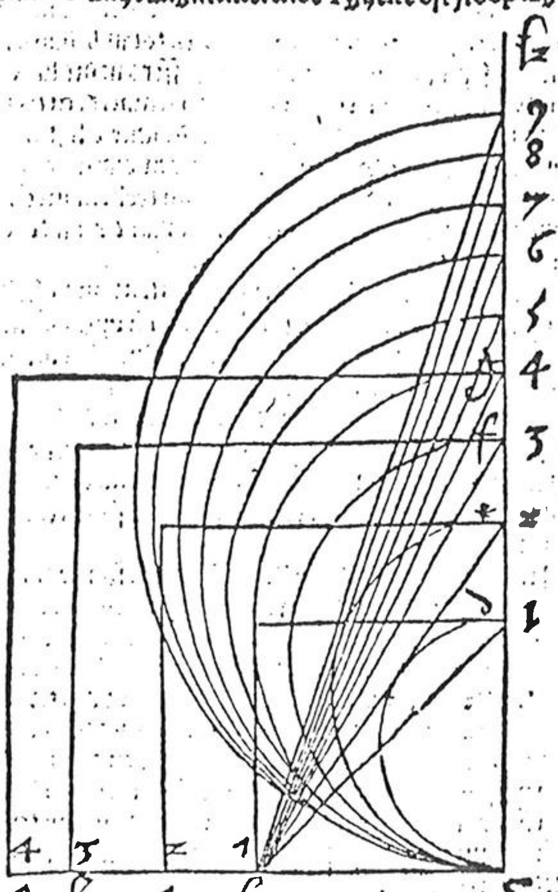
523481. 1537.

Een ſonderlinghe

boeck in dye edel conſte Arithmetica/met veel ſchoone perfecte regulen/ als Die numeracie vanden ghetale metten ſpecië int gheheele/eñ int ghebroken.
Die regule van drijen int gheheele eñ int ghebroke.
Die regule van een valſche poſitie/ eñ twee valſce poſitien van diueerſchen ghewichte/mate/ eñ ghelde.
Ooc hebdy die edel regule Cos/ die lanighe verborghen heeft gheweeſt/ welcke regule is die dore van allë queſtien. Deſe regule hebdy met haer ſpecien/ als Numeratio/ additio/ ſubtractio/ multiplicatio/ eñ diuiſio/ eñ met haer egallacie oft ghelijkinghe/eñ met die regule der quantiteyt/annex der regulen Cos.
Itë van alle coopmäſcappë/als van lakē/ſpecerië/eñ mercerië/diemē vercoopt bi gewichte/mate/ eñ nõmer/ eñ dat ſelue ooc te werckë doer die regule van practikë
Die regule van gheſelſcap/ met diuerſchen inlegge.
Ooc die ſelue regule met diuerſcen inlegge/ met diuer ſcë tide
Die regule van ſmaeldeelnige oft om ſtellingen bidë tranſpoorten vanden landen/ profitelijc voer alle ontfangheers vä ſubuencien.
Die regule van mangelinge/van aſſayen van goude/ eñ van ſiluer/eñ van mannen van wapenen.
De fabrike vand wijnroedë oft viſier roedë/eñ het viſë
De practike van eenen ſtucke lants te me- tën vä diē ten alſo wel dat onbegangelijc is nudes den water/oft anders/als dat beganghelijc is.
Ghecalculeert eñ verſaemt met grooter naerſticheyt/ bi Gielis vandë hoecke. Eñ gheprent Thantwerpen op die Lombaerde veſte. Bymi Symon Cock.

A° 1537

Item ghi mocht ooc wercken den diameter van alſo veel ghelten als ghi wilt inder manieren voerſ. op dat punct h altijt augmenterende 1 ghelte oft ſtoop läger



alſo lanc oft langher dan eenighë vaten die ſijn oft diep weſen moghen.

Ghemaect hebbëde die diameters van alle de ghelten oft ſtoopë op die maniere voerſ. ſo mocht diſe ooc makë op deſe maniere ſo maect aldus/ telt in elcke linie van c voerwaert alſo veel ghelte als ghi dë diameter makë wilt/eñ neëet die diſtancie vandë 2 puncten ſo hebdi den diameter van alle de gheltë van beyde de ſiden. Exëpel ic wil hebben den diameter der dieptë van 5 gheltë/ſo telle ic 3 matë van ſtoopë van c na k te weten tot f dan telle ic 2 matë van ſtoopen te weten van c na a tot 1 onder 2 want 3 eñ 2 maken 5/daer om opët den paſſer van f tot 1 ſo hebdi den diameter van 5 ghelten oft ooc opent den paſſer van e welcke ſijn 2 gelten/ tot l in die ander linie wele is ooc van 3 ghelten coemt ooc den diameter van 5 ghelten/ daer om neemt in beyde de linien alſo veel ghelten als ghi den diameter maken wilt/eñ die diſtancie van dien ſal weſen den diameter van dien/als wildi hebben den diameter vä 6 ghelten ſo telt ouer elcke ſide 3 ghelten af als tot f eñ die ander ſide tot l maect 6/nu die diſtancie van f tot l is dë diameter van 6 ghelten oft ſtoopen/oft telter 2 van de een ſide eñ 4 van die ander ſide als e eñ a oft ooc g eñ 1 ſo hebdi den diameter van 6 ghelten &c. alſo mocht di elcken diameter van elcken ſtoope maken in vier oft in vijfderhande manieren.

Item om te deelen elcke ſpacie van een ghelte inder diepten in vier deelen als in pinten/ſo deelt die ſpacie van c d in twee deelen te wetë in p/ ende dat wert den diameter van eender pinte. Nu om voert te gaen deelt ooch c b in twee deelen/ als in dat punct 3. Dan opent den paſſer van p tot dat

Na deze voorbereiding zijn we toe[64] aan het maken van de roede; we hebben nodig: een grote kuip in de vorm van een middendoor gezaagd vat, een "roeyken of stocken" iets langer dan de kuip wijd is en verder een tweede stok die op de diameter van de bodem van de kuip wordt afgesneden.
Stap voor stap wordt de procedure voor de berekening van de inhoud weergegeven: de diameter van 1 ghelt wordt bekend verondersteld zodat "op de roede die ghemaect is vander diepten" de diepten van bodem en buik in inhoudsmaat kunnen worden afgelezen.
In formule-vorm komt dit neer op:

$$\text{Inhout} = \text{lingde} \times \left[\left[\left\{ - \left(\frac{\sqrt{\text{ghelt buik}} - \sqrt{\text{ghelt bodem}}}{2} + \sqrt{\text{ghelt bodem}} \right)^2 + \frac{\text{ghelt buik} - \text{ghelt bodem}}{2} + \text{ghelt bodem} \right\} \times 1/3 + \left(\frac{\sqrt{\text{ghelt buik}} - \sqrt{\text{ghelt bodem}}}{2} + \sqrt{\text{ghelt bodem}} \right)^2 \right]\right] \quad [18]$$

(Vanden Hoecke geeft een correct uitgewerkt voorbeeld.)
Dit is een ingewikkelde schrijfwijze voor de formule van de kegelstomp

$$\text{Volume} = \frac{L\ pi}{12} \left(bu^2 + bu \cdot bo + bo^2 \right) \quad [19]$$

Het getal, dat vermenigvuldigd met de lengte van het vat de inhoud oplevert, noemt Vanden Hoecke de "gheequieerde diepte", een term die we vaker zullen tegenkomen.
Voorkomende middelingen worden zonder mediaal, maar met een "crijtstreke" uitgevoerd, zo blijkt in de paragraaf over het "useren" van de roede.
Eerst heeft men nog de leng~~te~~schaal gevonden: men deelt het aantal ghelten dat na spoelen - om drab uit het vat te halen - in het vat kon te delen door de" rechte diameter" (= "gheequieerde diameter", zie boven), waarbij de dikte van het vathout geschat wordt naar de afmeting van het vat en afgetrokken.
"So hebdi de roede om te meten de lingde gedeelt bi ghelten beghinnende van aen den haec / mer ghi moet laten een seker spacie voer de dicte vanden bodem binnen den haecke".[65]
Vanden Hoeckes roede is dus uitgerust meteen haak.
Om ook niet cirkelronde vaten te kunnen meten, beveelt Vanden Hoecke ons aan, de bodemen in twee haakse richtingen te meten, en de uitkomsten te middelen.
Maar omdat "dat seer arbeydelic is dies voers is ende ooc van cleynder importantie" wordt uiteindelijk gekozen voor een methode die neer komt op:

$$\text{Inhoud} = \frac{\text{diepte aan buik} + \text{diepte aan bodem}}{2} \times L \quad [20]$$

Dit is het gemiddelde van de in- en omgeschreven cilinders, maar dat verklapt Vanden Hoecke uiteraard niet.
Het exempel volgens deze methode - telkens werden voorbeelden gegeven - wordt afgebroken.
Als een vat langer is dan de roede: breng dan de helft van de lengte en de breedte op de roede, en vermenigvuldig de uitkomst met 8 enzovoorts. Er volgt een exempel voor een vat van 9600 ghelten, waar de faktor $4^3 = 64$ is. Zo kunnen steenputten, brouwerskuipen en andere grote ronde vaten gemeten worden, ongeacht hun formaat.
Voor vierkant vaten als stenen bakken en loden bakken werkt de methode ook, maar dan moet vermenigvuldigd worden met de faktor 14/11, het geen de Archimedische benadering is voor 4/pi.

Außzug auß der Vralten

MesseKunst Archimedis

Vnd deroselben newlich in Latein außgangener Ergentzung / betreffend

Rechnung der Cörperlichen Figuren / holen Gefessen vnd Weinfässer / sonderlich deß Oesterreichischen / so vnder allen anderen den artigisten Schick hat.

Erklärung vnnd bestättigung der

Oesterreichischen WeinVisierRuthen / vnd deroselben sonderbaren gantz leichten vnd behenden Gebrauchs an den Landfässern: Erweitterung dessen auff die außländische / so auch auff das Geschütz vnnd Kugeln.

Sampt einem sehr nutzlichen

Anhang

Von vergleichung deß Landtgebräuchigen Gewichts / Elen / Klaffter / Schuch / Wein- vnd TraidMaaß / vnder einander / vnd mit andern außländischen / auch Alt Römischen.

Allen vnnd jeden Obrigkeiten / Beampteten / KriegsObristen / Handelsleuten / Büren- Müntz- Baw- vnd RechenMeistern / WeinVisierern / Haußwürthen / vnd meniglichen in vnd ausser Lands / fast dienstlich: sonderlich aber dem Kunst- vnnd Antiquitetliebenden Lesern annämlich.

Gestelt durch

Johann Kepplern / der Röm. Kays. Mt. vnd Dero getrewer Löbl. Landschafft deß Ertzhörtzogthumbs Oesterreich Ob der Enß Mathematicum.

Prov. XVI.

Rechte Waag vnd Gewicht ist vom Herren / vnd alle pfunde im Sack sind seine Wercke

Vom Authore verlegt / vnnd gedruckt zu Lintz durch Hansen Blancken.

ANNO

M. DC. XVI.

Mit Kays. Freyheit auff XV. Jahr nicht nachzudrucken.

Figuur (14). Titelpagina van Kepler: Messekunst (1616)

4. Johannes Kepler : Messekunst Archimedis (1616)[25,17]

Kepler was een veelzijdige wiskundige, hemelmechanicus, numericus, opticus en astroloog, met een voorliefde voor mystieke speculaties over de bouw van het zonnestelsel. Hij nam de manen van Jupiter waar en ook de zon met een teleskoop, schreef over zeskantige sneeuwkristallen en deed meteorologische waarnemingen; hij heeft zelfs een science-fiction-achtig werk op zijn naam staan.
Kepler (1571 - 1630) was een lutheraan met onafhankelijke godsdienstige opvattingen.
Hoe hij kort na zijn tweede huwelijk, met Susanna Reuttinger, op 30 november 1613 kennis maakte met de wijnroeier en zijn stok, hebben we al in het Voorspel gelezen.[80] Zijn plan om de grondbeginselen van het wijnroeien te achterhalen voerde hij grondig uit, hetgeen leidde tot de Stereometria Doliorum (Linz 1615) en de populaire duitse versie met bijzondere uitbreidingen Messekunst Archimedis (Linz 1616). Dit laatste werk noemde Kepler zelf zijn "Visierbuchlin"; het is dit tweede boek, dat zich richt op een lezerspubliek van practici en wijnroeiers, dat ons hier vooral interesseert, hoewel het voor vele bewijzen - die in de Messekunst uiteraard niet worden gegeven, zoals in geen enkel wijnroeiboek - afhankelijk is van de Stereometria.

De Stereometria Doliorum - voortaan hier kort aan te duiden als Stereometria - vormt vaak de enige aanleiding voor handboeken over de geschiedenis van de wiskunde om het wijnroeien te vermelden[19], want het wordt gezien als een mijlpaal in de prehistorie van de integraal- en differentiaalrekening; Kepler neemt in dit werk afstand van de ingewikkelde exhaustie-methode van Archimedes en hanteert een nieuw, flexibel begrip van het oneindig kleine bij de berekening van oppervlakken en inhouden. Was het boek De Methode van Archimedes, dat pas in deze eeuw werd teruggevonden [66] Kepler bekend geweest, hij had zijn vatberekening waarschijnlijk anders uitgevoerd; het gaat hierbij vooral om de voor Keplers betoog essentiële berekening van de inhoud van een cilinderhoef, die Archimedes in De Methode al was gelukt langs een andere weg. De kegelsneden, die in de Stereometria en de Messekunst zo'n grote rol spelen, had Kepler in 1604 al behandeld bij zijn onderzoek in de optica in verband met parabolische spiegels (Ad Vitellionum paralipomena (1604)).
Kenmerkend voor Keplers abstractie-vermogen is zijn opvatting van de samenhang van de kegelsneden: anders dan Apollonius in diens Kegelsneden [67] beschouwde Kepler de kegelsneden als een continue familie van krommen, waarbij de relatieve positie van de brandpunten - de term focus is door Kepler ingevoerd - het type bepaald. Zo ontstaat een continue reeks van kegelsneden: eerst vallen de brandpunten samen - twee snijdende lijnen -, daarna scheiden zij - hyperbool -, zodat we nadat oneindig veel hyperbolen zijn doorlopen, een parabool krijgen als een van de brandpunten oneindig heeft bereikt. Het reizende brandpunt komt van de andere kant terug, en na oneindig veel ellipsen, ontstaat de cirkel.
In de Astronomia Nova (1604) was Kepler tot een rudimentair soort integraalrekening gekomen, waarbij van infinitesimale driehoekjes gebruik werd gemaakt - de tweede wet van Kepler, die voor het eerst duidelijk werd geformuleerd in 1621 (Epitome astronomiae Copernicanae).
Voor de cirkel leidt een dergelijke redenering tot het korrekte resultaat, dat Archimedes zorgvuldig bewezen had:

oppervlak cirkel = halve straal x omtrek

of eigenlijk

= halve omtrek x straal [21]

(Kepler legt de punten van de driehoeken in het cirkelmiddelpunt.)
Via een analogie-redenering - waarvan we er bij de bespreking van de Messekunst vele zullen ontmoeten - besluit Kepler dan ook (vgl Messekunst paragraaf 15) dat de oppervlakte van de ellips("ablenge Cirkel") gevonden wordt uit die van de cirkel door een as uit te rekken; zijn uitdrukking voor de omtrek van de ellips is niet juist: hier faalt de analogie.
In het latijnse werk Stereometria voerde Kepler een systematische analyse uit van de omwentelingslichamen van kegelsneden, waarvan hij er liefst 92 onderscheidt; van een aantal lichamen en segmenten ervan die voor het wijnroeien relevant zijn, weet Kepler de inhoud te berekenen of te benaderen. De redeneertrant is geheel meetkundig, al worden ook vele numerieke voorbeelden en tabellen gegeven.[79] Het is voor ons spijtig, dat Kepler de algebraische aanpak van de Cossisten, waarmee hij via Jost Bürgi[69] (1552 - 1632) en Adriaen van Roomen (1561 - 1615) in aanraking was gekomen, van de hand wees op grond van fundamentele bezwaren: die methode raakt het wezen van de natuur niet en leidt daarom tot vergelijkingen voor de regelmatige zevenhoek, die echter niet te construeren is, en daarom voor Kepler niet bestaat: het is een "Nicht-Ding".[68,70] In Messekunst nummer 9 vinden we nog een ander bezwaar. Met de titel Messekunst Archimedis lijkt Kepler te suggereren,

dat hij de eerste is die aanknoopt bij de stereometrie van Archimedes; maar hoewel Archimedes de omwentelingslichamen bol sferoïde en konoïde berekende, was het na hem Pappus [71] die in het zevende boek van zijn Collectiones de stelling formuleerde, dat omwentelingslichamen zich tot elkaar verhouden als de produkten van de genererende oppervlakken en de afstand van hun zwaartepunt tot de draaiings-as. Hierin herkennen we zonder moeite een van de regels die Paul Guldin [24] later, mede gestimuleerd door Keplers Stereometria, zou opstellen.

Kepler schijnt over de bewuste passage in Pappus heengelezen te hebben, want hij kende de Pappus-uitgave (1588) van F. Commandino wel.

Voor zijn gevoel sluit Kepler dus rechtstreeks bij Archimedes aan, maar hij legt een nieuw gebied open in de stereometrie voor zijn opvolgers (Guldin, Cavalieri[72], Torricelli, Gregorius a St. Vincentio, Anderson en anderen).

In betrekkelijk korte tijd (december 1613; juni-juli 1615) wist Kepler een oplossing voor het stereometrische probleem van de vatberekening met behulp van omwentelingslichamen van kegelsneden te vinden . Op de Frankfurter Buchmesse van 1615[75] lag de Stereometria te koop, maar 'n boekhandelaar uit Augsburg had al eerder geklaagd, dat een latijnse verhandeling niet zou verkopen.

Daarom werkt Kepler daarna aan een Duitse versie, waarin ook latere resultaten worden ondergebracht met betrekking tot het gedeeltelijk lege vat.

De Messekunst Archimedis is rond kerstmis 1615 klaar en kan op de voorjaars boekenmarkt van Frankfurt worden aangeboden.

Beide boeken schijnen niet snel van de hand te gaan; het bleef bij een eerste druk van de Stereometria, die A.G. Kästner in de achttiende eeuw niet te pakken kon krijgen ter bespreking in zijn Geschichte der Mathematik.

Collega's en tijdgenoten als Briggs, Anderson en Guldin klagen over de moeilijke passages in de Stereometria. Ook tegenwoordig nog heeft de lezer hier en daar grote moeite Keplers bedoeling te achterhalen; bovendien is er geen over de hele linie betrouwbare vertaling van de Stereometria, zodat men bij twijfel het beste zelf de latijnse tekst moet raadplegen.[76]

De opbouw van de Messekunst (1616) loopt parallel aan die van de Stereometria waar steeds expliciet naar verwezen wordt, maar in de Messekunst ontbreken bewijzen. Behalve een popularisering van de Stereometria bevat de Messekunst nog:

- de inhoudsberekening voor het gedeeltelijk gevulde vat; de methode van de Circulus Metator, die in Stereometria III:V ontwikkeld was, wordt door een betere vervangen.
- een appendix ("Anhang"), waarin Kepler stelsels van (inhouds)maten en van gewichten bespreekt, en suggesties doet voor standaardisatie[77]; in deze scriptie wordt hier niet op ingegaan. In de Anhang wordt tevens aangegeven hoe de wijnroede gebruikt kan worden voor het berekenen van het gewicht van kogels (Messekunst nummer 100).

De Messekunst is een fraai staaltje van popularisering[78] van wetenschap, met vele voorbeelden ontleend aan het dagelijkse leven.

Eerder had Kepler geschreven:

"Es gibt Leute, die ihre Wissenschaft mit gestrenger Miene vortragen, um dadurch ihren Behauptungen Gewicht zu verleihen; dabei machen sie sich aber oft genug nur lächerlich, ohne es zu wollen. Mir scheint, dass ich von Natur dafür geschaffen bin, die schwere Mühe wissenschaftlicher Arbeit durch aufgelockerte Darstellung zu mildern".

Hoewel de Messekunst inderdaad de leukste van de hier besproken wijnroeiteksten is, met veel humor geschreven, moet men zich toch afvragen, of de inhoud de "eenvoudige lezers" niet boven de pet ging. Kepler is er zich van bewust met een gemengd lezerspubliek te maken te hebben: de "teutschen kunstliebenden Lesern" - wis-

kundigen dus - en de "mehr einfältige Leser"; deze laatsten moeten zich door geleerde uitweidingen niet uit het veld laten slaan "sondern die uberhuppfen / biss sie im andern Theil zu der Visier-Ruthen selber kommen" (Messekunst nummer 5).
De opbouw van de Messekunst is als volgt:
- Opdracht
- Deel I (nummer 1 - 67)bevat de nodige meetkunde
- Deel II (nummer 68-79) gaat over cilinders en vaten
- Deel III (nummer 80 - 90)beschrijft de wijnroede
- Aanhang (nummer 91 - 100) gaat in op maatstelsels

De opdracht van de Messekunst Archimedis is aan de burgemeesters, rechters en raden van de steden in het aartshertogdom Oostenrijk stroomafwaarts en aan de Enz. (Kepler was provinciaal wiskundige en zodoende in dienst van de lokale overheid; deze funktie was speciaal voor hem geschapen om hem de Rudolfinische tabellen voor de posities van de planeten te laten afmaken).[81]
In een renaissancistische fantasie laat Kepler het "Uralte Mütterlein aller ... Obrigkeiten ... und Handwerker / namens Geometria mein gebiettende Fraw" zijn werkgevers groeten; ze woont in een Oostenrijks wijnvat en deelde al eerder haar bezit uit aan ambachtslieden, kunstenaars en ijkmeesters. Maar uit haar schat heeft ze nog een spaarpenning opgediept, die zij met een wijnroede in haar huis heeft gevonden - Kepler heeft deze "auff ein Teutsche Manier" opgepoetst en biedt deze hierbij aan.
Daarna begint de hoofdtekst van deel I, die in genummerde paragrafen is verdeeld.

1. Een wijnroede is nodig als een vat nieuwe duigen worden ingezet, het ingebouwd is of te groot om door vulling direkt te meten of wanneer het niet geijkt is of de ijk niet erkend wordt.

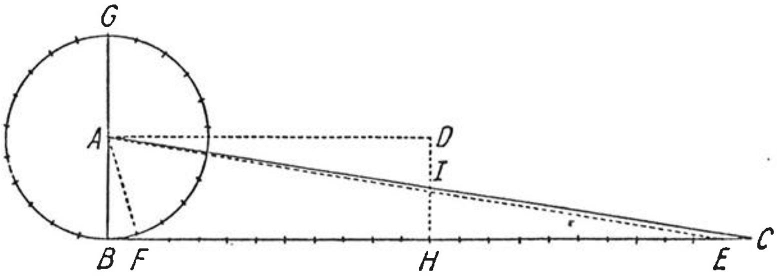
2. Aan de Rijn gebruikt men een moeizame methode met een wijnroede; hier wordt een verbeterde methode ingevoerd, ongeacht het verzet van practici "von ihres langen undencklichen brauchs willen"; Kepler doelt hier op de ruim tweehonderd jaar dat de wijnroede wordt toegepast. Anders dan langs de Rijn hanteert men in Oostenrijk een kubische standaard-wijnroede; door de uitkomsten langs de diagonalen van het halve vat op de stok te middelen vindt men de inhoud en dus de prijs van het vat.

3. Het doel van dit boek is de resultaten van de Stereometria Doliorum binnen het bereik van de duitse lezer te brengen; het voornaamste resultaat is dat de Oostenrijkse kubiek-roede een betrouwbaar instrument is. Kepler hoopt dat "beydes glehrte und Idioten (=leken) werden mit meinem wolgemeinten fleiss zufrieden sein / unnd dessen geniessen beim Oesterreichischen kühlen Wein." Tevens wordt een poging gedaan om tot een Oostenrijks stelsel van maten en gewichten te komen.

4. Wil een wijnvat te meten zijn met een wijnroede, dan moet het een cirkelronde doorsnede hebben. Het vat heeft een cirkelronde bodem en lijkt tot aan de buik op een kegel, maar aan de buik op een cilinder.

5. Voor de liefhebber wordt in het eerste deel de theorie behandeld, die het onnodig maakt om elk vat te vullen als zijn inhoud gemeten moet worden. De"eenvoudige lezer" kan dit alles overslaan.

6. Het is niet altijd mogelijk de omtrek van een cirkel of wiel direkt te meten door hem om te rollen; het irrationale verband tussen omtrek en diameter (dat men sinds de achttiende eeuw pi noemt[82]) wordt met 16 korrekte decimalen gegeven, en tevens de Archimedische benadering 22/7.



figuur (15)
Illustratie bij Keplers Messekunst Archimedis (1616), paragraaf 6

7. De formule die Kepler hier impliciet geeft voor de omtrek van een ellips ("Eylini") - voor het geval dat de bodem van het vat een ellips is- is onjuist; hij komt neer op:

$$\text{omtrek ellips} = \frac{r_1 + r_2}{2} \times 22/7 \qquad [22]$$

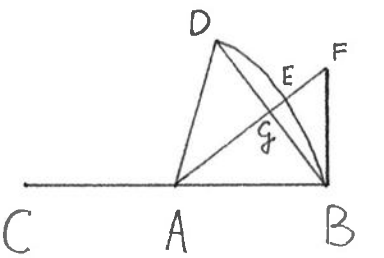
Korrekt is met een elliptische integraal, maar dat kon Kepler niet weten.

8. Kepler filosofeert over de achtergrond van de diverse maten en proporties van voorwerpen.

9. Cirkelbogen en koorden zijn meetkundig te berekenen of met behulp van "die Cossa" - algebra, vergelijkingen met onbekenden - maar deze is onbetrouwbaar: "welche uns den weg weiset / wie einem blinden sein führer / oder zwo enge wände in der finstere / wann ich den Kopff zur lincken anstosse / so weiss ich / das ich mich zur rechten wenden soll / den weg aber sehe ich nicht / kan auch das rechte mittel von mir selber nicht treffen."[84]
Diverse sinus-tafels worden aanbevolen; deze worden al sinds $1\frac{1}{2}$ eeuw door duitse geleerden opgesteld en eerder al door Ptolemaeus en de Arabieren. De nieuwste zijn van Adriaen van Roomen, Pitiscus[83], Rheticus en Otho. Die van Lanspergius is makkelijker te begrijpen, maar niet steeds "subtil" genoeg. De allerbeste, die van Jost Bürgi, moet nog uitkomen.
De sexagesimale verdeling van hoeken wordt ingevoerd en de terminologie van sinus, sinus complementi, tangens en secans ; dit aan de hand van een figuur en voorbeelden.

10. De berekening van een cirkelkoorde wordt ons hier geleerd, met verschillende voorbeelden, waarin Kepler een rekenfout maakt, toegelicht. Alle optredende lijnstukken worden achtereenvolgens als onbekende genomen. In formulevorm zou dat er zo uitzien :

$$GB = \left((CB - EG) \times EG \right)^{\frac{1}{2}} \qquad [23]$$



figuur [16]
Koorde in een cirkel; $\phi = CB = 2\,AB = 2\,AD$

11. Aan de hand van voorbeelden worden de drie "quantiteten" lengte, oppervlakte en volume ingevoerd.

12. Met behulp van de "regel detri" (de regel van drieën, evenredigheden van de vorm a : b = c : x dus) kan een sinustafel dienen om de boog van een cirkelsektor te berekenen of bij verschillende cirkeldiamters de omtrek. Met een vernuftige tabel kunnen we een hoek in een booglengte omzetten, en een straal in een omtrek, waarbij korrekte afrondingen zijn aangehouden. Deze tabel is als volgt opgebouwd:

	I	II	..	VI	
10 pi	360^o			12"	$[= 11{,}7" = 9 \times 10^{-6} \times 360^o]$
:	324^o				
.	.				
.	.				
pi	36^o			1"	$[= 10^{-6} \times 360^o]$

De verhouding tussen de oppervlakken van vierkant en ingeschreven cirkel is 14/11 - dit is een juiste benadering van 4 / pi.

13. We leren de "Regel decinque" of "regula cinque" - de regel van vijf dus - die geldt voor de vergelijking van oppervlakken en lengtes en de "Regel desept" voor volumina en lengtes. De regel van drieen geldt alleen voor getallen van dezelfde soort maat, waarschuwt Kepler - van dezelfde dimensie zouden wij zeggen. Een praktisch voorbeeld van het gewicht van kogels en van het vergulden van een zilveren kogel wordt gegeven. In formule-vorm zouden de regels er zo uitzien:

$$Opp_2 = (l_2 / l_1)^2 \, Opp_1 \qquad \text{regel van vijf}$$

$$Vol_2 = (l_2 / l_1)^3 \, Vol_1 \qquad \text{regel van zeven} \qquad [24]$$

$$Vol_2 = (O_2 / O_1)^{3/2} \, Vol_1$$

De Regel desept is vantoepassing op gelijkvormige wijnvaten.

14. De oppervlakte van een cirkel is 11/14 diameter x diameter. Voor een cirkelsector kan de tafel van 12 gebruikt worden ter berekening van de oppervlakte.

15. Het oppervlak van een ellips ("Ablenge Circkel") is

$$\frac{2\,d_1 \times 2\,d_2}{14} \times 11 \qquad [25]$$

16. We leren hoe we diverse oppervlakken moeten berekenen : die van een rechthoek stemt overeen met die van een ruit, die van een rechte driehoek met die van een schuine. Verder wordt het oppervlak van een bij een cirkel in- en omgeschreven twaalfhoek uitgerekend met korrekte afrondingen.

omgeschreven twaalfhoek:

$$\text{oppervlak} = r \times \tan 15^o \times 24 / 2 \qquad [26]$$

ingeschreven twaalfhoek:

$$\text{oppervlak} = \frac{\text{oppervlak omgeschreven twaalfhoek}}{\cos^2 15^o}$$

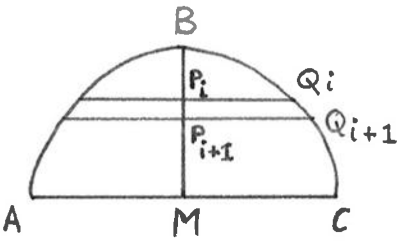
17. Het voor het vervolg belangrijke onderwerp van het cirkelsegment wordt aangesneden ("Circkelschnitz, als da ist die Orttafel von einem Fassboden, alhie DEBG" (zie de figuur bij nummer 10)) en wel langs drie "wegen". 85

Eerste weg: met de tafel van nummer 12. Uit de boog (hoek) BD is de sector ADEB te berekenen en de driehoek ADB = sin BG x sin AG - de straal van de cirkel is 10^5 genomen - moet dan worden afgetrokken.

Tweede weg: deze is niet zo precies, zegt Kepler. Een hulptafel wordt ons aangeboden, die overeenkomt met die uit Stereometria III : V. De procedure is als volgt: schaal de breedte van het segment op de straal, en gebruik de tabel, waarbij in de voorbeelden stilzwijgend lineaire interpolatie wordt toegepast.

De editeur Franz Hammer maakt in een noot aannemelijk, dat Kepler de oppervlakte van cirkelsegmenten met rechthoeken benaderde, waarbij voor het "kapje" van de cirkel in plaats van zo'n rechthoek een paraboolbenadering gebruikt wordt, dat wil zeggen:

$$L_i = 2\, P_iQ_iQ_{i+1}P_{i+1} \qquad BM = 100$$
$$S_i = \sum_{j=1}^{i} L_j \qquad P_iP_{i+1} = 1 \qquad [27]$$
$$S_{i+1} = S_i + P_iQ_i + P_{i+1}Q_{i+1}$$
$$S_1 = 4/3\, P_1Q_1 \quad \text{(parabool)}$$



Figuur [17]
Iteratieve rekenmethode voor cirkelsegmenten

De waarden van P_iQ_i kan men met goniometrie uitrekenen:

$$P_iQ_i = (\,200\,i - i^2\,)^{\frac{1}{2}} \quad , \; i = 1,\ldots,100 \qquad [28]$$

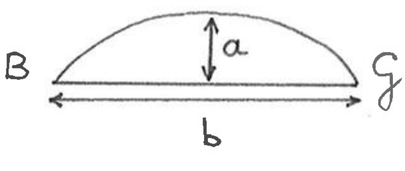
Aan de hand van een voorbeeld wordt de nauwkeurigheid van de eerste en de tweede weg vergeleken.

Derde weg: Omdat de tweede weg een onderverdeling van de straal in maar 100 delen gebruikte, is hij te grof voor kleine bogen. Voor een klein cirkelsegment geldt: (zie figuur)

$$2/3\ ab \;<\; \text{oppervlakte segment} \;<\; 11/14\ ab \qquad [29]$$

De ondergrens komt dus neer op een paraboolbenadering, maar nu voor het gehele cirkelsegment; deze benadering is bruikbaar voor **BG** $< 25^{\circ}$.

figuur [18] : cirkelsegment



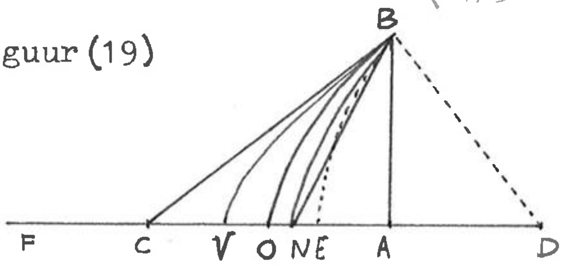
a = "boltz" = sinus versus
b = "senne" = subtensa

18. Het oppervlak van een parabool wordt korrekt gevonden door 4/3 maal het oppervlak van de ingeschreven driehoek te nemen. Segmenten met een gelijke koorde hebben, net als bij de cirkel, gelijke oppervlakten.
Voor het oppervlak van een hyperboolsegment, "dessen rechte Messekunst noch nicht erfunden ist", volstaat Kepler met een ongelijkheid te geven, waarbij het rechtlid resulteert door vergelijking met het oppervlak van een parabool - dan geldt het gelijkteken -

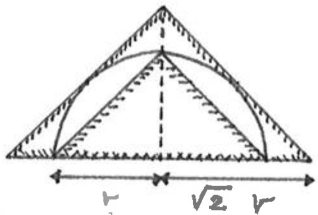
2/3 oppervlak omschreven driehoek < hyperbool segment

< 4/3 driehoek in hyperbool 87 [30]

figuur (19)



BV = hyperbool BO = parabool
BN = cirkel BE = ellips



ingeschreven en omgeschreven kegels bij een halve bol

19. Hier behandelt Kepler het oppervlak van de kegel - maar niet zo een als de koning van het kegelspel - dat te ontwikkelen is tot een cirkelsektor, vandaar het recept dat neerkomt op:

oppervlak kegel = 22/7 x straal grondvlak x lengte schuine zijde [31]

Zonder de schuine zijde te meten weten we, als de kegel haaks is, dat hij $(2 \text{ pi } r^2)^{\frac{1}{2}}$ groot is - hier vergist Kepler zich: hij bedoelt $2^{\frac{1}{2}} \text{ pi } r^2$.
Het oppervlak van de kegel om een halve bol op hetzelfde grondvlak is tweemaal dat in een halve bol.

20. Het oppervlak van een bol is vier maal het oppervlak van de centrale doorsnede; dit is voor Kepler aanleiding om erover te speculeren hoeveel ossen er nodig zijn om de maan te ploegen, als haar oppervlak voor de helft uit water bestaat !

21. Het oppervlak van een bolsegment ("Huetlin"= hoedje) wordt vergeleken met het oppervlak van een cirkel; er geldt:

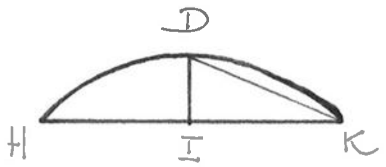
oppervlak bolsegment = oppervlak cirkel met straal koorde DK

dus = pi DK^2 [32]

Het oppervlak van een gordel om een bol volgt dan door aftrekking van geschikte bolsegmenten.

22. Met deze kennis kunnen we nu uitrekenen welk deel van het aardoppervlak in de Zona Torrida (tropische gordel) ligt, waar de zon in het zenith komt - en tevens welk deel van de aarde 's winters niet door de zon beschenen wordt; Kepler doet dit korrekt.
Het oppervlak van een hoedje kan met de regel detri en de tabel van nummer 12 gevonden worden:

oppervlak hoedje = DI x oppervlakte bol / diameter bol [33]



Figuur (20)
Hoedje of bolsegment

23. Het oppervlak van een cilinder, die even hoog is als breed, heeft een manteloppervlak dat even groot is als het oppervlak van de ingeschreven bol.
Bij een doorsnijding haaks op de as worden van de oppervlakken van cilinder en bol gelijke oppervlakken afgesneden.

24. In deze paragraaf worden de inhouden van vierkante zuilen en van cilinders vergeleken, waarbij de kubus als eenheidsmaat gehanteerd wordt. Er geldt - ook voor de "gedruckte Seule" (= zuil met elliptische doorsnede) -

inhoud ronde zuil = 11 / 14 b^3 [34]

waar b de zijde is van de omgeschreven vierkante zuil.

25. Terecht merkt Kepler op, dat de inhoud van een zuil 3 maal de inhoud heeft van de ingeschreven kegel of pyramide.

26. Het volume van een cilinder, even hoog als breed (h = 2 r) is 3/2 maal de inhoud van de ingeschreven bol.

27. Het volume van een bol is 2 maal dat van een even hoge kegel die het equatorvlak van de bol tot grondvlak heeft.

28. Het volume van een kubus bedraagt 6 / pi maal dat van de ingeschreven bol.
Onder verwijzing naar Villalpandus 88 wordt een tabel gegeven van de relatieve volumina van lichamen, die men in een kubus kan inschrijven:

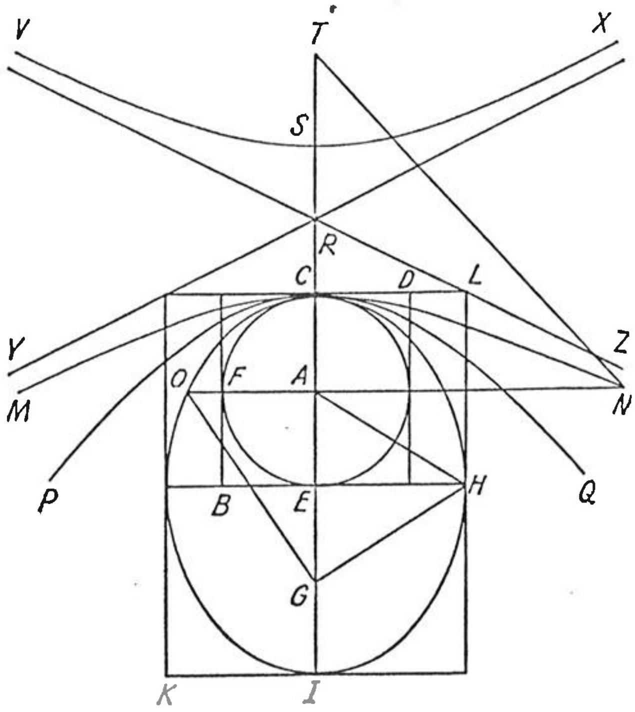
Kegel	Bol	Cylinder	Cubus
11	22	33	42

(Dit klopt, want de verhouding luidt : 2/3 pi r^3 ; 4/3 pi r^3 ; 2 pi r^3 en 8 r^3).

29. De cilinder- en kegelsnedes zijn minder volmaakt dan de bovengenoemde figuren; zij worden behandeld volgens Apollonius, want dat is begrijpelijker dan volgens Archimedes. Na vergelijkingen met deurduimen ("Thürangel") en worsthoorntjes van papier worden aan de hand van een figuur de ellips of "Aylini", parabool en hyperbool ingevoerd. Serenus 89 wordt geciteerd voor de ellips als cilindersnede (zie figuur 21).

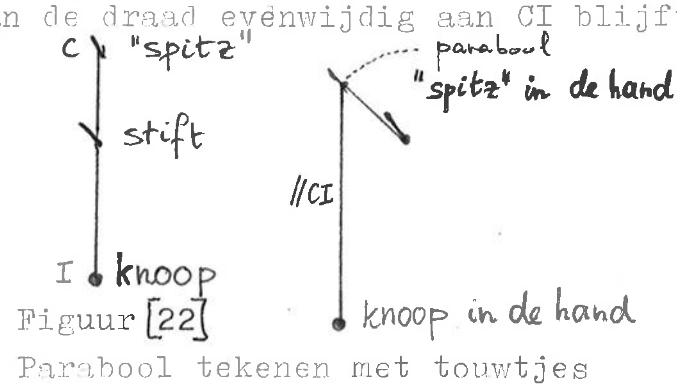
30. Zonder over brandpunten te spreken geeft Kepler zijn eigen indeling van kegelsneden : er is maar een cirkel, dan heb je oneindig veel ellipsen, vervolgens precies een parabool, dan oneindig veel hyperbolen, en een rechte lijn besluit de reeks. De asymptoten van de hyperbool worden gedefiniëerd.

31. Hoe kun je met touwtjes de verschillende kegelsneden tekenen 90 ? De constructie van de ellips was al in Keplers tijd bekend.

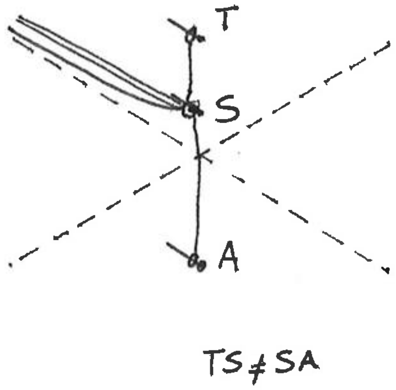


Figuur(21)
Kepler, Messekunst, nummer 29.
Definitie van de verschillende kegelsneden:
ellips : CHIO
parabool : PCQ
hyperbool : MCN en VSX

Vandaar dat Cavalliero - Kepler spreekt van "ein Cavaliero" die in Italië zoveel van wiskunde heeft opgestoken; er zal een edelman bedoeld zijn - een veeg uit de pan krijgt: "Wann ein Cavalliero wider auss Italia kompt / und hat in Mathematicis soviel proficirt, dass Er ein solche Oval- unnd etwas ein spiral lini darzu / reissen kan / lesset er sich die raise desto weniger dauren.."
De parabool- en hyperboolconstructies die Kepler hier beschrijft, zijn wel origineel.
In figuur 22 is de ellipsconstructie met vaste stiften in A en G - de brandpunten - weer gegeven.
Voor het trekken van een hyperbool moeten op de tekenplank stiften in de punten A en T worden gezet, met aan iedere stift een draad. Verdeel de afstand AT in twee ongelijke delen bijvoorbeeld in AS en ST. Zet een "spitz" tussen beide draden in S. Trek nu beide uiteinden van de draden met een hand aan, en laat de "spitz" uitlopen tot aan de hand en je hebt een hyperbool.
Voor de parabool moet de lijn CI getrokken worden, zo lang je belieft; zet een stift in A, zet in C een "spitz", sla de draad eromheen en maak een knoop in I; neem deze knoop in de ene, en de"spitz" C in de andere en trek met beide handen de curve zo, dat een stuk van de draad evenwijdig aan CI blijft.



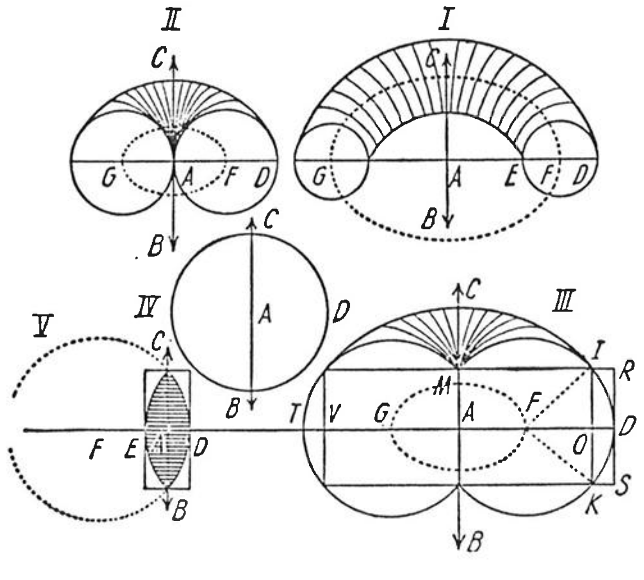
Figuur [22]
Parabool tekenen met touwtjes

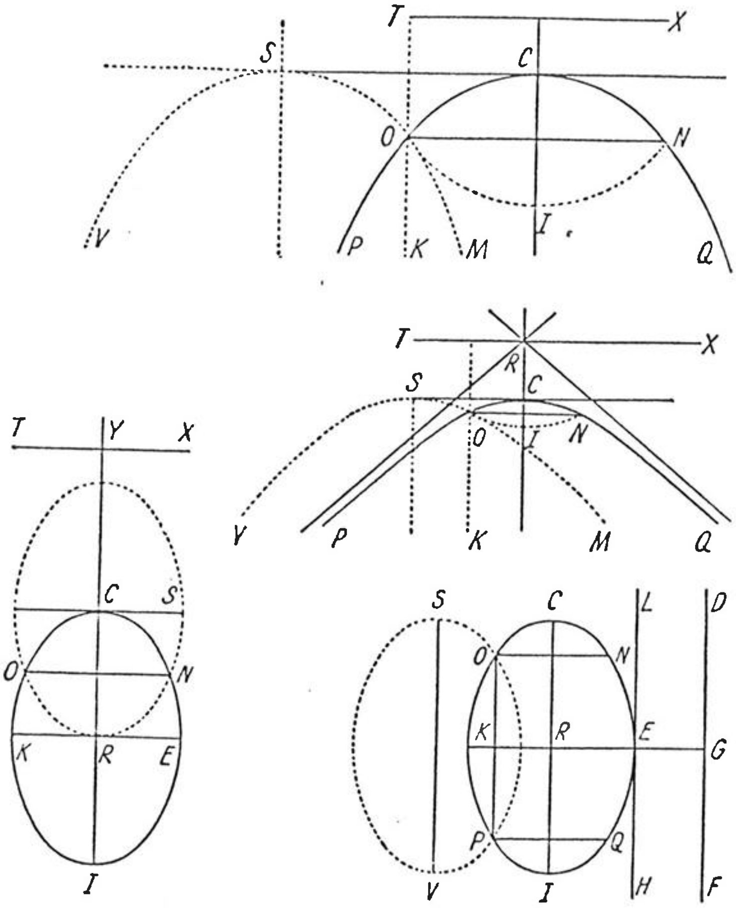


Figuur[23]
Hyperbool tekenen met touwtjes
Kepler, Messekunst nummer 31

32. Met de kegelsneden als mal kan men diverse omwentelingslichamen maken, afhankelijk van de plaats van de rotatie-as; voor ieder van de vier kegelsneden zijn ten minste 5 typen te bedenken. Kepler komt totaal tot 92 soorten, die in de Stereometria alle genoemd worden; dan zijn afgedraaide stukken als "spältlin" en complementaire figuren nog niet eens meegerekend.
Alleen de vormen die voor het wijnroeien van belang kunnen zijn worden in de Messekunst besproken.
De ellips bijvoorbeeld kan om zijn lange as worden gedraaid ("nach der leng angeslagen") en levert dan de ellipsoïde (sphaeroides longum) op; de draaiing kan ook om een lijn evenwijdig met de korte as: dan kan de "gedruckte Kugel" (Sphaeroides latum, een lens of kiskassteen uit een beek) ontstaan; de rotatie-as snijdt dan de halve lange as halverwege (zie figuur(25)).
Als de rotatie-as zich op meer of minder dan de helft bevindt krijgt men een Kriek; bij draaiing evenwijdig aan de lange as een Olijf.
De cirkel - zie figuur 24 - levert diverse figuren op:
I de open ring, II de gesloten ring, III de appel, IV de bol en V de citroen die later voor de vatvorm gekozen zal worden.
Parabolen en hyperbolen om hun lengte-as gedraaid leveren Conoidea op; bij rotatie om een haakse as ontstaat een soort spoel.
Ook voor de overige lichamen heeft Kepler fraaie namen verzonnen.

Figuur(24)
Omwentelingslichamen met de cirkel als genererend oppervlak; verschillende posities van de rotatie-as.





Figuur(25)
Omwentelingslichamen van ellips, parabool en hyperbool

Het Conoides Parabolicum noemt Kepler een hooiberg, de hyperboloïde wordt gezien als "ein runder Bergkülbel".
Meer vormen hebben we niet nodig voor de beschrijving van de vatvorm; al kunnen wel alle overige "künstlich" berekend worden, zo bluft Kepler, zodat het niet nodig is om ze te wegen of in het water te gooien en te kijken hoe hoog ze in het water liggen.

33. De inhouden van de langwerpige bol (de ellipsoïde) en de ingedrukte bol, ei en lens/lins worden "Kugelart", dus naar analogie van de bol berekend, dat wil zeggen: twee maal het volume van een kegel op hetzelfde grondvlak. Voor ei en lins betekent dit:

$$\text{Inhoud} = 2/3 \times \text{hoogte} \times \text{oppervlak middendoorsnee} \qquad [35]$$

34. De inhoud van een conoïdes parabolicum of hooischelf wordt gevonden als:

$$\text{Inhoud hooischelf} = 3/2 \times \text{ingeschreven kegel}$$

$$= \tfrac{1}{2}\ \text{hoogte} \times \text{grondvlak} \qquad [36]$$

De oppervlakte van het grondvlak wordt gevonden met nummer 6 en 14. Stilzwijgend is uiteraard ook nummer 18 toegepast.

35. Het volume van de berg of "Arbishauffen" (Conoïdes hyperbolicum) wordt met de regel detri gevonden als:

$$\text{Inhoud berg} = \text{grondvlak} \times h/3 \times 3\ \frac{3\ CV + AV}{2\ CV + AV} \qquad [37]$$

Zie figuur 19 .
Dit resultaat is exact, zo blijkt bij kontrole met behulp van integraalrekening.[91]
Bij een berg kan uit de hoogte van de zon de tangens van de helling berekend worden, als de zon net over de top van de berg heenkomt en zichtbaar wordt voor een waarnemer aan de voet van de berg. De hoogte volgt dan met de "kunst altimetra".
Daarna berekent Kepler met de gevonden inhoudsformule de inhoud van een berg en vraagt zich af hoeveel mandagen het afgraven van de berg kost - hij maakt een rekenfout. Zijn conclusie is: "Ich halte man lass ihn stehen."

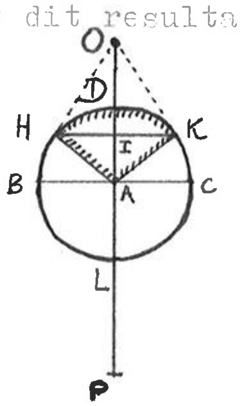
36. Het volume van een bolsector ("Zaan") bestaande uit een bolsegment en een kegel met de top in de middelpunt van de bol, laat zich berekenen als:

(HAKD) Bolsector = DI / DL x inhoud bol

= 2/3 x DI x oppervlak grote cirkel [38]

Vergelijk figuur 26 .
Bij integratie blijkt dit resultaat juist te zijn.[93]

figuur(26)



37. Het volume van een bolsegment[92] wordt verkregen door van de juist gevonden sector een kegel af te trekken: dit is de eerste weg. Het oppervlak van het grondvlak wordt met de regel detri uit dat van de grote cirkel gevonden.
Als de bolsegmenten klein zijn, geeft de paraboloide van nummer 34 een betere benadering:

inhoud paraboloïde = oppervlak grondvlak x hoogte/2 [39]

Het grootste bolsegment - de halve bol - vult 2/3 van de omgeschreven cirkel, terwijl de paraboloïde de helft vult (de tweede weg)

38. De derde weg om de inhoud van een bolsegment te vinden bestaat uit het omvormen ervan tot een kegel met gelijke inhoud.[94] Met een eenvoudige konstruktie (zie figuur 26) vindt men - de kegel heeft hetzelfde grondvlak als het bolsegment -

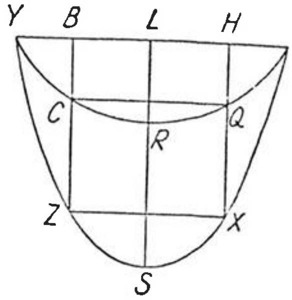
ID x DA / IL = DO [40]

zodat dan

inhoud bolsegment = inhoud kegel [41]

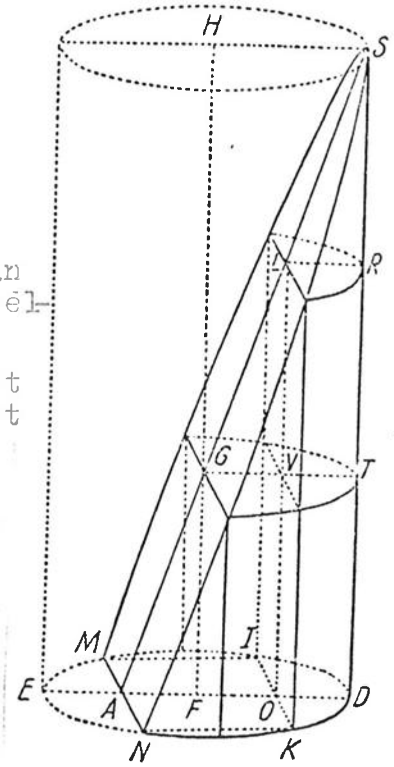
= (ID + DO) / 3 x oppervlak cirkel HK

Met voorbeelden wordt dit toegelicht. Men kan ook uitgaan van het komplementaire bolsegment HLK: dan wordt de hoogte van de equivalente kegel:



ingeschreven cilinder van het bollichaam af te trekken. Deze cilinder is weer gelijk aan 6 maal een kegel, met de punt in het bolcentrum.
Bij anachronistische integratie blijkt de formule voor de inhoud van een gordel met koorde B

$$\text{Inhoud gordel} = \frac{pi}{6} B^3 \qquad [45]$$



Figuur(29)
Een cilinderhoef

Als de hoedjes ongelijk zijn, moeten we een kegelstomp onder de gordel uitrekenen.

44 Cilindersegmenten verhouden zich bij gelijke hoogte als hun grondvlakken; er worden praktische voorbeelden gegeven van loden waterpijpen met verschillende middellijnen aan de uiteinden.

45 Als een cilinder schuin op de as wordt afgesneden, is het volume van het segment

volume segment = [46]

volume cilinder x stuk as/hele as

46 Als een cilinder van het ene uiteinde naar het andere schuin over wordt gezaagd, ontstaat een segment met een grondvlak in de vorm van een ellips ("ablenge cirkel") en uiteraard:

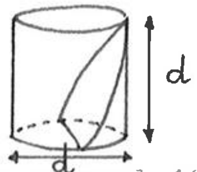
volume segment = grondvlak x hoogte /2 [47]

Weer komt Kepler met praktische voorbeelden: hoeveel aarde moet er afgegravenworden als men een kanaal wil graven voor de Donau over de Kalenberg, met een bevaarbaar verval van 80/1600 of 80/2000. Ook kunnen toepassingen bedacht worden van "Schantz- und Lauffgraben", "auffgeworffene Schantzen / halbe Monde ....die pianta" (=grondvlak, horizontale projectie bij het ontwerp), maar dat voert hier te ver, vindt Kepler terecht.

47 Nu zijn we toe aan de berekening van kleinere, schuine cilindersegmenten : de bekende cilinderhoeven van Kepler. Als het segment van een uiteinde van de cilinder tot aan de helft van het grondvlak reikt - zie figuur , GTS - kunnen de verhoudingen van segmenten gegeven worden.
Archimedes wist al dat

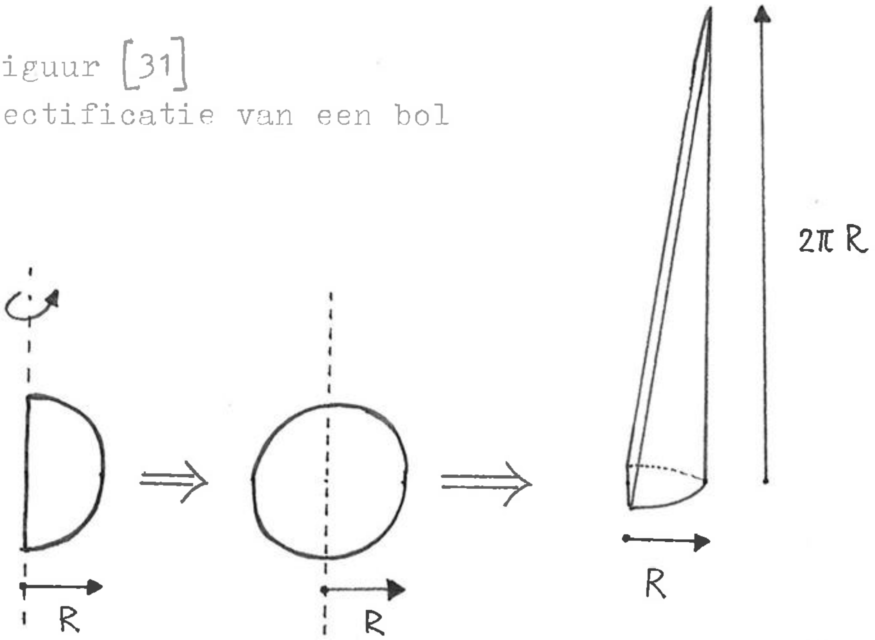
figuur [30]

inhoud hoef = $d^3/6$ [48]



maar de tekst van de Methode werd pas rond 1900 teruggevonden,[66] zodat Kepler zelf iets moest bedenken. Zijn methode wordt in de Messekunst niet uiteengezet, zoals wel in de Stereometria; zij berust op de rectificatie van omwentelingslichamen met behulp van infinitesimale plakken.

Figuur [31]
Rectificatie van een bol



halve cirkel   bol   rectificatie   cilinderhoef

Het volume van de cilinderhoef kan nu vergeleken worden met dat van een cilinder van gelijke hoogte op hetzelfde grondvlak:

$$\frac{\text{hoef}}{\text{cilinder}} = \frac{4\ \text{pi}\ R^3/3}{2\ \text{pi}\ R \times \text{pi}\ R^2} = \frac{2}{3\ \text{pi}} \sim 14/66 \qquad [49]$$

Kepler geeft de laatste benadering op.
Als de cilinderhoef niet niet tot aan het halve cilindergrondvlak reikt, maar een kleiner grondvlak heeft, zoals LRS in figuur moet de figuur worden doorgetrokken tot wel het halve grondvlak van de cilinder wordt afgesneden (GTS). Bereken daarvan het cirkelsegment ITK.
Daarna moet de inhoud van de gordel met breedte IK om een bol met straal GT berekend worden: dat geeft de inhoud van LVTS.
De inhoud van het gezochte hoefje volgt dan

LVTS - LVTR = LRS [50]

Hebben we te maken met een andere hoogte TS ? Schaal dan met de faktor

LRS x TS / (2 pi R) [51]

Er wordt een aantal numerieke voorbeelden gegeven.
Analytisch zou dit tot de volgende formule leiden:

$$LR = a\ R$$

$$LVTS - LVTR = \frac{\text{pi}}{6}\left(2R\,(2a - a^2)^{\frac{1}{2}}\right)^3 - 2\ \text{pi}\ (1-a)R \times$$

$$\left(\text{pi}\ R^2/2 - R\,(1-a)(a\,R(2R - aR))^{\frac{1}{2}}\right.$$

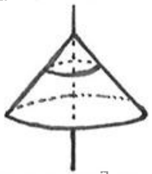
$$\left. - R^2\ \text{asin}\ (1 - a)\right) \qquad [52]$$

$$= 4/3\text{pi}R^3(a^{3/2}(2-a)^{3/2} - 3/4(1-a)\text{pi} + 3/2(1-a)^2(a(2-a))^{\frac{1}{2}}$$

$$+3/2(1-a)\text{asin}(1-a))$$

48. Het kegelsegment werd al in nummer 29 gedefiniëerd. Wordt de kegel door de top gespleten, dan is nummer 44 van toepassing: de stukken verhouden zich als hun grondvlakken. Als beide stukken naar hetzelfde punt uitlopen, evenzo, maar nu moet met de hoogte gedeeld door de faktor 3 gerekend worden, anders dan bij cilinders.

49 Kegelsegmenten met evenwijdige snijvlakken, haaks op de as, verhouden zich als de derde machten van hun snijvlakken. Er wordt een voorbeeld voor gewichten gegeven.



figuur [32]

50. Maar als de kegelsegmenten schuin worden afgesneden, moet men de afstanden langs de schuine zijden tot de top meten en middelen en verder nummer 49 volgen. "Willtu nicht trawen (wie ich dich dann zur zeit nit auff alle scherffe zuversichern habe)", vergelijk dan het grondvlak van het segment en de hoogte met die overeenkomstige dimensies van de hele kegel, dus met een derde van de hoogte x oppervlak snijvlak.

51 Als een zuil, cilinder of pyramide wordt aangesneden en er een stomp ontstaat, dan is de inhoud ervan:

Inhoud = (boven- + onderoppervlak + (boven-Xonderoppervlak)$^{\frac{1}{2}}$)x hoogte / 3 [53]

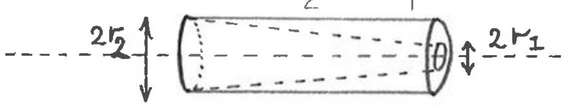
52 Als je van een kegelstomp de ingeschreven cilinder aftrekt, hou je een klokrok over. Er worden weer twee numerieke voorbeelden gegeven.

53. Hier worden de ronde schillen van kegel en cilinder behandeld: Kepler geeft de faktoren, die met pi x hoogte vermenigvuldigd het volume van de rok van een kegelstomp en het volume van een door een kegel uitgeboorde cilinder opleveren:

rok van kegelstomp : $((r_2 - r_1)/3 + r_1)\ (r_2 - r_1)$ [54]

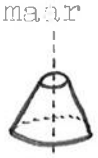
restant van cilinder: $((r_2 - r_1)2/3 + r_1)\ (r_2 - r_1)$

figuur [33]

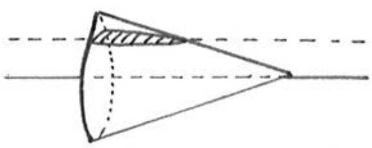


Als ze bijvoorbeeld een schuin bovenvlak hebben, neem dan de kleinste diameters aan het snijvlak; maar dan heeft de kegel wáármee de cilinder geschild of uitgeboord is een andere as dan de cilinder en is de kegel bovendien nog "getruckt".

54 Kegelstompen met onderling gelijke onder- en bovenoppervlakken verhouden zich als hun hoogte - in feite komt dit op nummer 51 neer, maar dat zegt Kepler niet.



figuur [34]

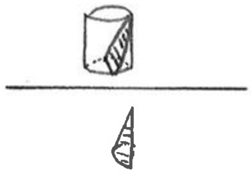


55 Kegelsegmenten met het snijvlak evenwijdig aan de hoofdas moeten voorzichtig worden aangepakt: "..müssen noch zur zeit von aussen herumb gehen wie die Katz umb ein haisses Koch".
1. Allereerst is duidelijk, dat

grondvlak x hoogte / 3 < kegelsegment [55]

Het verschil van beide termen wordt kleiner naarmate het grondvlak van het segment dichter de halve cirkel benadert. Kepler maakt hier de eigenaardige opmerking, dat in de andere limiet, als het grondvlak juist heel klein wordt, de afwijking groter wordt "sollte es am meisten fählen / ist aber alsdann der gantze Schnitz klein / unnd derohalben auch der fähl unachtsam". Blijkbaar is Kepler alleen in absolute fouten, niet in relatieve geïnteresseerd.

2. De inhoud van het segment wordt anderzijds weer overschat, als men uit de hoogte en het grondvlak van het segment een cilindersegment à la nummer 47 berekend - alsof bij gelijke hoogte de segmenten van kegel en cilinder gelijk waren. De grootste fout treedt op als het grondvlak een halve cirkel is:



$$= \frac{(2/(3\mathrm{pi}))\mathrm{pi}\ R^2 \times h}{\mathrm{pi}\ R^2 \times h/3 \times \frac{1}{2}} = 4/\mathrm{pi} \sim 14/11 \qquad [56]$$

in plaats van 1 !
Dus deze methode alleen voor segmenten met kleine grondvlakken gebruiken.

3. Ten derde kan men opmerken, dat de kegelsnede aan het snijvlak, de zijkant van het segment dus - een hyperbool (nummer 29) is. Het oppervlak van een hyperbool kun je berekenen door hem tot een driehoek om te vormen op dezelfde basis, maar met een grotere hoogte. Neem

$$\text{inhoud} = \text{hoogte driehoek} / 3 \times \text{grondvlak segment} \qquad [57]$$

"Wie aber das Feld in einer Hyperbola zumessen sey / das lehret Archimedes im buch quadratura Paraboles, in der uneins ersten und eins mehr dan der letzten proposition : besihe No 18", merkt Kepler humoristisch op: Archimedes berekende deze oppervlakte niet.

56. Om de inhoud en het gewicht van ringen te bepalen, moet je op de doorsnede en de symmetrie van het lichaam letten:

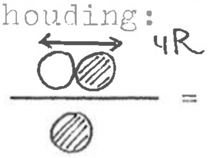
$$\text{inhoud ring} = \mathrm{pi}\ (d_{buiten} + d_{binnen}) / 2 \times \text{oppervlak doorsnede} \qquad [58]$$

Daarmee kan worden uitgerekend hoeveel erts er nodig is voor de gouden ring in de muil van een gebeeldhouwde leeuw op een zuil.

57 De inhoud van een gesloten ring (zie figuur 24 II) is

$$\text{inhoud} = \text{oppervlak doorsnee} \times \text{omtrek cirkel door centra} \qquad [59]$$

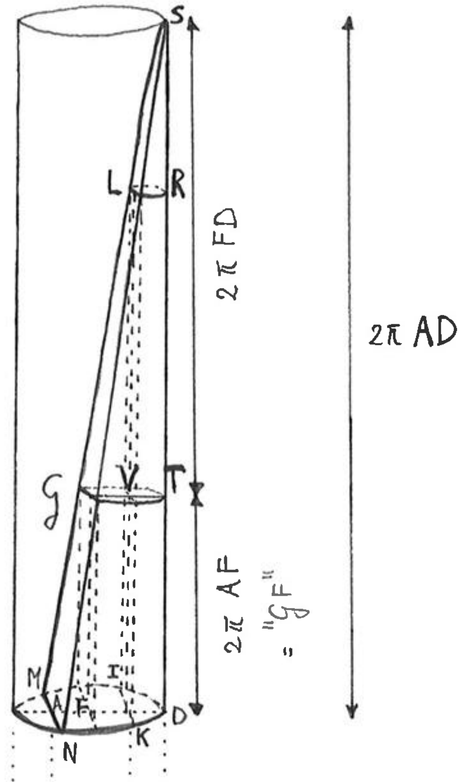
Tot de inhoud van een bol met dezelfde straal staat dit in de verhouding:

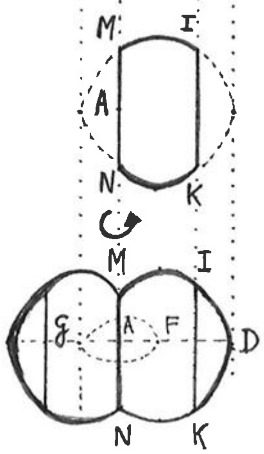


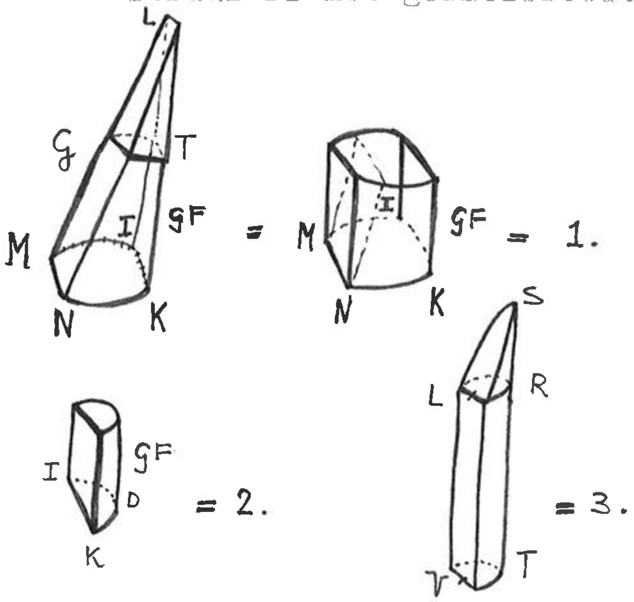
$$= \frac{2\ \mathrm{pi}\ R^3}{4\ \mathrm{pi}\ R^3/\ 3} = \frac{3\ \mathrm{pi}}{2} = 33/7 \qquad [60]$$

58. De inhoud van de appel en de andere vruchten die in nummer 32 zijn ingevoerd, kan exakt berekend worden (zie figuur 35).
De appel bestaat uit drie delen:

1. cirkelsegment MNKI x hoogte GF
2. cirkelsegment IDK x hoogte GF
3. LVTRS = gordel om de bol met straal FD met gordelbreedte VT





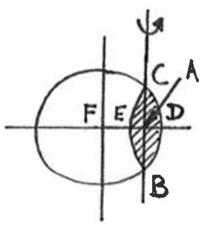


Figuur [35]
De Appel

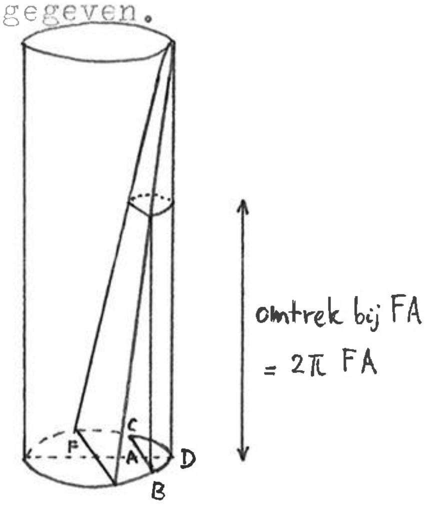
De inhouden van "Küttenrundung" en "Kurbisrundung" volgen analoog, maar met respectievelijk een ei en een ingedrukte bol in plaats van de normale bol.

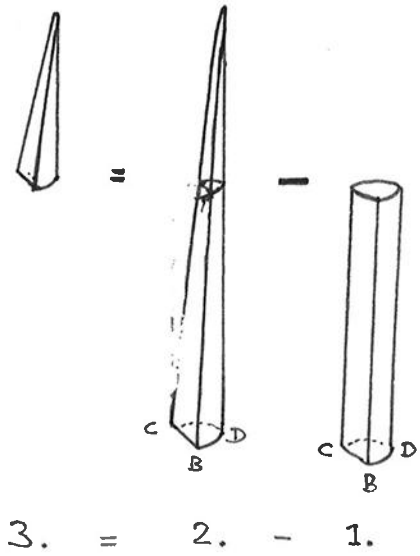
59. Deze paragraaf gaat over de citroen: "aus diser Figur folgt die Fassrechnung zum guten Thail und ist bishero fast umb dise zuthun gewest: wird gerechnet wie die Apffelrunde / doch kürzer / nämlich also."

Zie de figuur. . Uit de halve dikte van de citroen EA volgt de straal van de cirkel FD. De volgende stappen moeten nu gezet worden:
1. Neem de omtrek bij FA x cirkelsegment CBD
2. Zoek volgens nummer 43 de hele gordel om de bol met straal FD
3. citroen CEBD heeft volume = 2. - 1.
Er volgt een numeriek voorbeeld. Een snellere methode zal in nummer 63 worden gegeven.



Figuur [36]
De Citroen





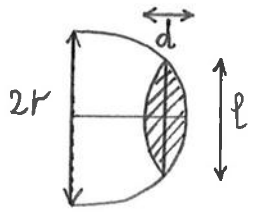
Analytisch kunnen we nu de volgende formule voor de citroen vinden:

$$r = (d^2 + l^2) / (4 d)$$

$$FA = r - d/2 = (l^2 - d^2) / (4 d) \qquad [61]$$

$$\text{citroen} = \text{gordel} - \text{moot} = 2. - 1. =$$

$$= pi\, l^3/6 - 2pi\frac{l^2 - d^2}{4d}\left(\left(\frac{l^2+d^2}{4d}\right)^2\left(pi/2 - asin\left(\frac{l^2-d^2}{l^2+d^2}\right)\right) - l\left(\frac{l^2-d^2}{8d}\right)\right)$$



Figuur [37]
Citroen en kromtecirkel

60 Berekening van een tweezijdig als een vat afgeknotte citroen. Zie figuur 37.
Eerst wordt de straal van de grote cirkel waaruit de citroen gevormd wordt gevonden door:

$$2\ R = CF^2 / \ CO \qquad [62]$$

Als we R schalen op 10^5, berekenen we met nummer 17 het oppervlak van het cirkelsegment GFC. Dan wordt de citroenstomp:

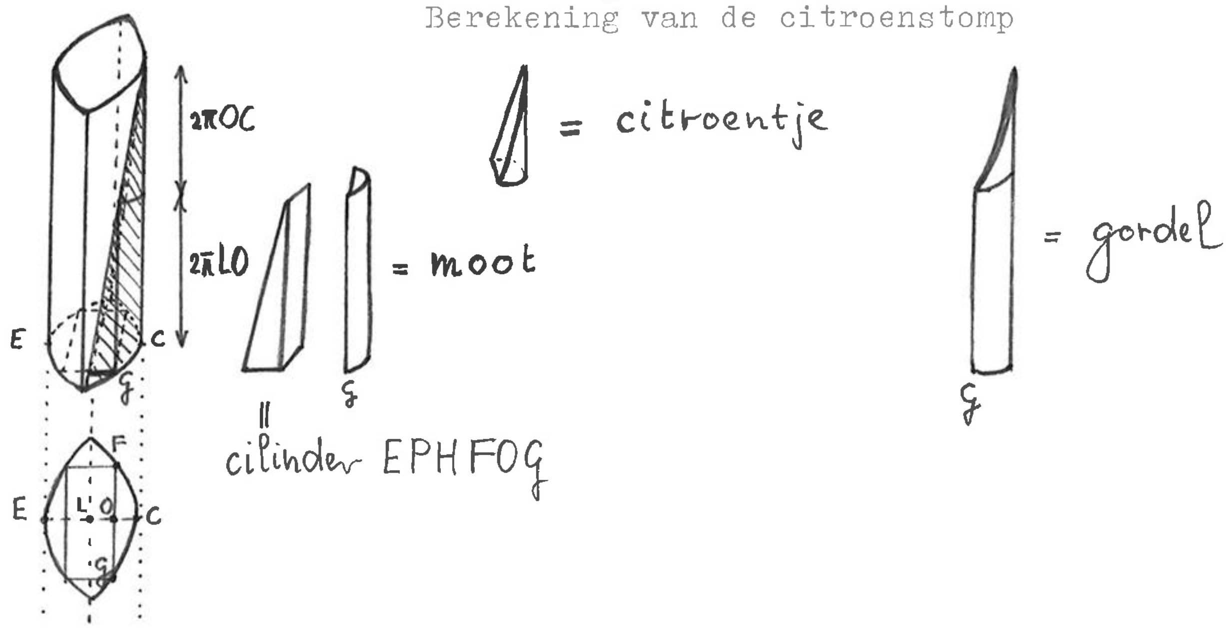
citroenstomp EAHFGC = cilinder EPHFOG + gordel EPHA,GOFC [63]

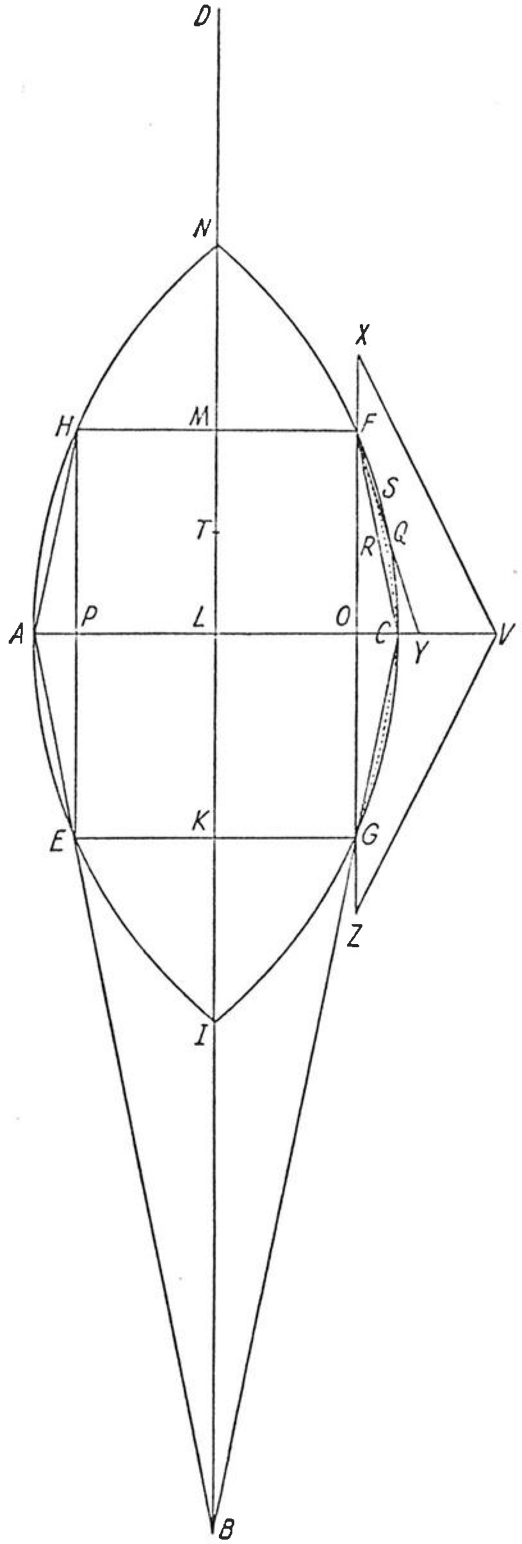
maar

gordel = moot + kleine citroen [64]

Deze gordel loopt dus niet om een bol, maar om een citroen !
De cilinder wordt berekend met nummer 24, de moot met nummer 24 of 44 en de kleine citroen met nummer 59.

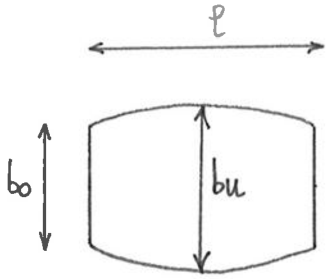
Figuur [38]
Berekening van de citroenstomp





Figuur(39)
Een wijnvat EKGCFMHA als stomp van de citroen EIGCFNHA.

Met behulp van na Keplers tijd ontwikkelde analyse vinden we voor deze citroenstomp:



figuur [40]

$$R = \frac{(l/2)^2 + \left(\frac{bu - bo}{2}\right)^2}{bu - bo} \qquad [65]$$

$$\text{citroenstomp} = \pi\, l\, bo^2/4 + 2\pi\left(R - \frac{bu - 3bo}{2}\right)\left(\pi R^2/2 - \left(R - \frac{bu - bo}{2}\right)\left(\frac{bu - bo}{2}\left(2R - \frac{bu - bo}{2}\right)\right)^{\frac{1}{2}} - R^2 \operatorname{asin}\left(1 - \frac{bu - bo}{2R}\right)\right)$$
$$+ 4\pi R^3/3 - 2\pi/3\,(R - l/2)^2 (2R + l/2) - \pi\, l \left(R - \frac{bu - bo}{2}\right)^2$$

$$= \text{cilinder} + \text{moot} + \text{kleine citroen}$$

Kepler geeft numerieke voorbeelden die aansluiten op eerdere. In het bijzonder wijst hij erop, dat decimale breuken erg handig kunnen zijn; een voorbeeld werkt hij van begin tot eind uit. "..weil ich kurze zahlen brauche/derohalben es offt Brüche geben wirdt;so mercke das alle ziffer/welche nach dem zeichen (.folgen/ die gehören zu dem Bruch/als der Zehler/der Nenner darzu wirt nicht gesetzt/ist aber allezeit eine runde zehnerzahl/von so vil Nullen/als vil ziffer nach dem zeichen kommen. Dise art der Bruchrechnung ist von Jost Bürgen zu der sinus rechnung erdacht/ und ist darzu gut/das ich den Bruch abkürzen kan/wa er unnötig lang werden wil/ohne sonderen schaden der uberigen zahlen;kan ihne auch etwa auff erhaischung der notdurft erlengern. Item lesset sich also die gantze zahl unnd der Bruch mit einander durch alle species arithmeticae handlen wie nur ein zahl." Volgt een eenvoudige vermenigvuldiging als bewijs voor deze "behende Bruchrechnung".
In het voorbeeld van de berekening van de citroenstomp worden herhaaldelijk rekenfoutjes (afrondfouten ?) gemaakt.
Als de methode van andere wijnroeiers wordt toegepast, die uit het middelen van in- en omgeschreven cilinder bestaat, wordt, merkt Kepler op, een kleiner resultaat gevonden:

$$\text{Inhoud} = \pi\, l\, \frac{bo^2 + bu^2}{2} \qquad [66]$$

De methode van de dubbele kegelstomp, die volgens Clavius[96] goed was voor de Romeinse vaten met hun scherpe buik,

$$\text{Inhoud} = \frac{bu^2 + bu \times bo + bo^2}{3} \times l \qquad [67]$$

geeft nog minder, rekent Kepler ons in een voorbeeld voor. Hij erkent dat zijn methode toch wel erg lastig is; daarom wordt voor nummer 63 een eenvoudiger aanpak beloofd die bolsegmenten toepast.

61 De verhouding van kegelvolumina, waarbij de straal van de basis en de hoogte verwisseld zijn, is de verhouding van deze stralen.

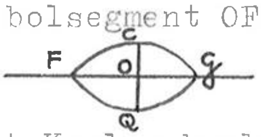
62. De verhouding tussen de volumina van de normale bol, de "gedruckte" bol, de "ablenge" bol en de daarin geschreven kleine bol zijn - als de straal van de grote bol b is en van de kleine c:

$$b^3 : b^2 c : b c^2 : c^3 \qquad [68]$$

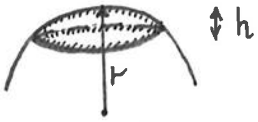
De middelste verhoudingen zijn dus de "media proportionalia".

63. Dan volgt hier de toegezegde vereenvoudigde berekening van het volume van de citroenstomp. Kepler begint met de citroen te vergelijken - in voorbeelden - met twee gelijke bolsegmenten die aan hun snijvlak op elkaar gelegd zijn. Uit deze voorbeelden blijkt, dat

bolsegment OFCG : citroen QFCG/2 = OF : OC [69]



waaruit Kepler besluit: "Ich achte du mögest diser Lehr wol trauen/obschon sie noch ihren rechtmessigen beweiss nicht hat". Achteraf blijkt nu, als we integraalrekening gebruiken, dat, als het volume van een bolsegment met hoogte h



figuur [41]

volume bolsegment = pi h^2 (3 r - h) / 3 [70]

hetgeen met de l en d-notatie van [61] wordt:

= pi $d(d^2 + 3\,l^2)/48$

Keplers veronderstelling leidt tot:

OF : OC=l : d $\stackrel{?}{=}$ 2 bolsegmenten : citroen

= pi $d(d^2+3l^2)/24$: citroen

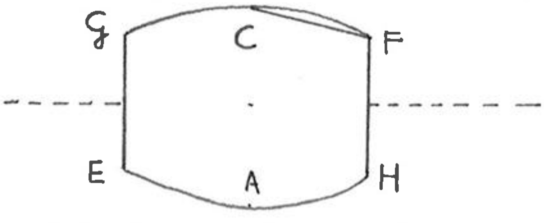
Als we [61] invullen en stellen

$h = a\,(\,h(2\,r - h))^{\frac{1}{2}}$, a = vrije parameter [71]

en dit omwerken en invullen, dan volgt a=1 en h=r, dus Keplers veronderstelling kan hoogstens als benadering gelden.
Voor drie soorten vaten met verschillende verhouding buikdiameter/bodemdiameter, waarbij de gordel steeds een dikte 1 heeft, geeft Kepler een inhoudsberekening van de citroenstomp volgens de laatste methode.
Steeds wordt

$CF^2 = FH^2 / 2$ [72]

genomen (zie figuur); dit is een eigenschap van het Oostenrijkse vat zullen we later zien (nummer 75).



figuur [42]

Met behulp van de parabolische benadering van nummer 17 wordt het cirkelsegment FOGC berekend; vermenigvuldigd met de omtrek van de cirkel FH vinden we de moot, het grotere deel van de gordel enzovoorts. Het bolsegment FCG uit de bol NCJ wordt, omdat het segment klein is, volgens nummer 37 de tweede weg bepaald - dus weer een parabolische benadering van de cirkel. Volgens de benadering van nummer 63 moet dit dus nog maal CO/OF om de kleine citroen

te geven, na vermenigvuldiging met een factor 2 - deze was in de Stereometria vergeten.
De ingeschreven cilinder tussen FG en HE wordt eerst als vierkante zuil uitgerekend

$$FH^2 \times 2 \times OF \qquad [73]$$

en daarna met nummer 24 en 12 tot cilinder omgevormd. Het vat bestaat uit deze cilinder, plus de moot en het citroentje. De resultaten met de citroen-stomp-methode 97 worden vergeleken met die van twee andere methoden, die in nummer 60 werden genoemd: deze geven een kleinere inhoud: 98

buik/bodem	10/9	15/14	18/17
citroenstomp = 100 %	7453(89	26768(08	47112(73
dubbele kegel-stomp	- 3.3 %	- 2.3%	- 1.9 %
cilindermidde-ling	- 3.2 %	- 2.2%	- 1.8 %

Kepler konkludeert dat de laatste methode - die zoveel werd toegepast - niet betrouwbaar is; maar we zien dat hij wel beter is dan de kegelstomp-benadering.

64 De figuren van de olijven, "zwespen" en krieken komen alle bij vaten voor: zie de nummers 34, 35 en 40.
De olijf heeft de boog uit het middenstuk van een ellips; hij wordt dus berekend met het "gedruckte" bolsegment volgens nummer 40, maal een lijn iets korter dan EA (zie figuur 19).
De citroen is als gezegd als een cirkel gekromd; dan wordt het bolsegment met nummer 37 en 38 berekend volgens nummer 63; het oppervlak moet met de hoogte NA vermenigvuldigd worden (zie figuur 19).
De kriek volgt uit het langwerpige bolsegment (nummer 40) maal iets meer dan dan de hoogte AI; de paraboloïde met nummer 34: vermenigvuldig hier het oppervlak met AC. De hyperboloïde gaat analoog, maar is iets hoger. In het algemeen:

$$\text{volume} = \text{grondvlak segment} \times \text{hoogte} \;/\; (AB/2) \qquad [74]$$

Voorbeelden zijn te langdradig en te "spitsvondig" voor dit duitse boek, vindt Kepler, en dat zal de reden zijn dat hij hier zo oppervlakkig deze lichamen behandelt.

65. Door de buik van een vat op papier te tekenen, vind je uit de verhoudingen en de hoeken van de lijnstukken, met welk soort lichaam je van doen hebt.

66. Als de inhouden van deze lichamen met elkaar vergeleken worden, dan blijkt dat[99]

dubbele kegelstomp < hyperbool < parabool < kriek

< citroen < olijf [75]

67. Wat segmenten evenwijdig aan de as van deze lichamen afgesneden betreft: "Ob wohl diss im lateinischen Werck (dus in de Stereometria) auff einer blossen frag oder Rätsel beruhet das ich andern Kunstmessern (namelijk Snellius, Stereometria I:XXX) auffzulösen fürgelegt" toch komen hier nummers 55, 63 en 64 ons van pas.
Bij elk segment moeten we er ons nog twee anderen voorstellen, met dezelfde lengte en hoogte en dezelfde boog van het omwentelingslichaam waaruit de segmenten gesneden zijn. Het gaat ons hier om het middelste segment, dat het kleinste grondvlak heeft; het is kleiner dan een bol/paraboloïde/hyperboloïde maar groter dan een halve citroen, kriek, olijf of spoel.[100]
Met hetzelfde argument als in nummer 64 worden geen voorbeelden gegeven, wel een recept:
1. bereken met behulp van de hoogte van het segment de straal van de grote cirkel die bij de afgeknotte figuur hoort, dan vind je het volume van het bolsegment (nummer 37 & 38), van het olijf- of krieksegment (nummer 40) of dat van de conoidea (nummer 34 & 35).
2. het volume van de figuur onder het segment vinden we met nummer 59, 63 en 64.
3. uit de hoogte van het segment zijn de vlakke cirkelsegmenten te berekenen uit 1. de cirkel met de hoogte als straal = de halve cirkel
2. de middelste om de snede heen : de diameter hiervan is de dikte van de figuur.
4. volume segment, gesneden uit de grotere ronding
= volume van de kleinere ronding x(3.2) / (3.1)

Deze methode kan wel op de kegelsnede die langs de as van de kegel wordt afgekapt toegepast worden; vergelijk nummer 55, dit wordt dan de vierde weg: zoek het volume van een andere, kleinere kegel die op een grondvlak van een halve cirkel staat.
Dan :

$$\text{volume segment} = \text{volume halve kegeltje} \times \left[\frac{\text{halve cirkel}}{\text{grondvlak segment}}\right]^{-1}$$

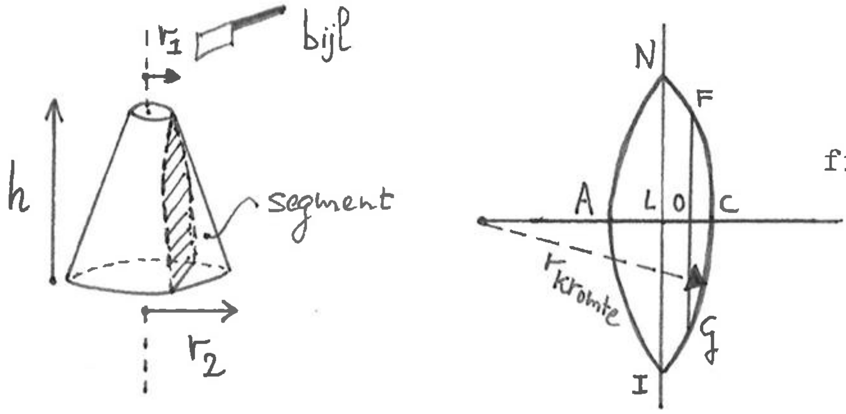
[76]

Dit komt neer op: (zie figuur)

$$\text{volume segment} = h/3 \times (pi/2)(r_2-r_1)^2 \times \left[(pi/2)(r_2-r_1)^2\right]^{-1} \quad [77]$$

$$\times \left(r_2^2(pi/2 - asin(r_1/r_2)) - r_1((r_2-r_1)(r_2+r_1))^{\frac{1}{2}}\right)$$

Dat dit inderdaad veel te klein uitkomt - door een rekenfout in het numerieke voorbeeld wordt het resultaat nog kleiner - schijnt Kepler niet op te merken.
Bij de citroen, vervolgt Kepler, hebben we het voordeel, dat de kleine halve citroen overbodig is geworden; het recept wordt:



figuur [43]

1. vind bij de hoogte van het segment het bolsegment bij de grootste cirkel, waarin de citroen naar de lengte gebogen is
2. vind het bijbehorende grote cirkelsegment
3. bepaal het buikcirkelsegment

Dan :

volume citroensegment = volume bolsegment x

buikcirkelsegment / grote cirkelsegment [78]

Het voorbeeld uit nummer 63 wordt te hulp geroepen en hierop toepasselijk gemaakt.
In figuur [43] zien we wat [78] betekent:

$$\text{citroensegment FCGO} = \text{bolsegment FCGO} \times \frac{\text{cirkelsegment}(h = OC, r = CL)}{\text{cirkelsegment}(h = OC, r = r_k)}$$

In formules komt dit neer op:

$$r_k = h/2 + l^2/(8h) \qquad l = FG \ ; \ h = OC$$

$$\text{citroensegment} = \frac{\text{pi } h^2}{3} (3\, r_k - h) \times$$

$$\frac{r^2\ (\text{pi}/2 - \text{asin}((r-h)/r) - (r-h)(h(2r-h))^{\frac{1}{2}}}{\text{idem, maar voor } r = r_k} \qquad [79]$$

II : 68 Hier begint het tweede deel van de Messekunst. Voor de toepassing van bovenstaande methoden moeten we weten van welke gedaante het vat is; zo zijn Italiaanse vaten dubbele kegelstompen. Alle soorten komen in feite voor, al is de olijf zeldzaam. Dat de duigen heel vlak zijn, zodat het vat op een cilinder gaat lijken, komt vaak voor: het Oostenrijkse vat, dat een citroenvorm heeft, valt in deze categorie. Met de Oostenrijkse roede wordt de dwarslijn ("zwerlini" = diagonaal van het halve vat) vanuit het spongat gemeten.

69 In deze paragraaf besteedt Kepler aandacht aan de maximale inhoud van lichamen: in twee dimensies heeft de cirkel bij een gegeven omtrek de maximale oppervlakte; denk aan Dido's ossehuid en aan het opbinden van korenschoven. De cirkel wordt opgevat als oneindige veelhoek. Als een vat ingedrukt wordt tot een ellipsvorm barst het : het had al een maximale inhoud. Als je veel gegeten en gedronken hebt, ga je op je rug, niet op je buik liggen,

wist Delrio [101] .

70. Bij een gegeven omtrek heeft de bol van alle lichamen het grootste volume: het volume neemt toe met het aantal wanden dat een veelvlak heeft. De bol heeft dan ook oneindig veel wanden: "hat gliechsamb unendtlich viel Wände/also das ein jeder punct für eine Wand zuschätzen".

71 Een bol heeft oneindig veel hoekpunten.

72. Welk zes-vlak ingeschreven in de bol heeft het grootste volume ? Uit symmetrie-overwegingen besluit Kepler dat dit de cubus moet zijn. In een tabel worden de hoogten, breedten, diagonalen en inhouden van in een bol ingeschreven rechthoekige lichamen opgegeven.

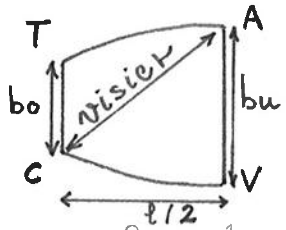
73 Welke cilinder heeft bij een voorgeschreven diagonaal ("Visier" een maximale inhoud ? Antwoord: die cilinder, waarvan de hoogte zo groot is "da man mit der höche ein quadrat oder vierung auff den runden Boden machen kan/das mit allen vier spitzen an den umbkreiss reichet."
Dat wil zeggen :

$$\text{diameter} = 2^{\frac{1}{2}}\ \text{hoogte} \qquad [80]$$

- vergelijk [72] ; dit verklaart de maten van "Metzen", van vele "Bottungen" (= kuipen, kegelstompen) en van het Oostenrijkse vat, als men het splijt bij het spongat.

74 Hier wordt de inwendige lengte van het vat berekend, zowel als de dwarslijn ("zwerlini"=diagonaal van het halve vat) bekend is, als in het geval dat het vat niet mag worden aangestoken . Deze berekening maakt het roeien van het vat mogelijk als de dikte van de duigen onbekend is.
In het eerste geval beveelt Kepler ons aan:

figuur [44]



$$l/2 = \left(CA^2 - (AV + CT)^2/4 \right)^{\frac{1}{2}} \qquad [81]$$

In het tweede geval is de dwarslijn:

$$AC = \left(AT^2 + CT \times AV \right)^{\frac{1}{2}} \qquad [82]$$

75 Het Oostenrijkse vat heeft door de kuipers vastgelegde verhoudingen. Met een passer wordt de lengte van een duig in drieën verdeeld; dan wordt de afmeting van de bodem gevonden :

$$bo = 2/3 \ \text{duiglengte} \qquad [83]$$

Bij het in elkaar zetten van de duigen worden deze ingekort: de kimmen steken over zodat dan

$$\text{duig} < 3/2 \ \text{bodem} \qquad [84]$$

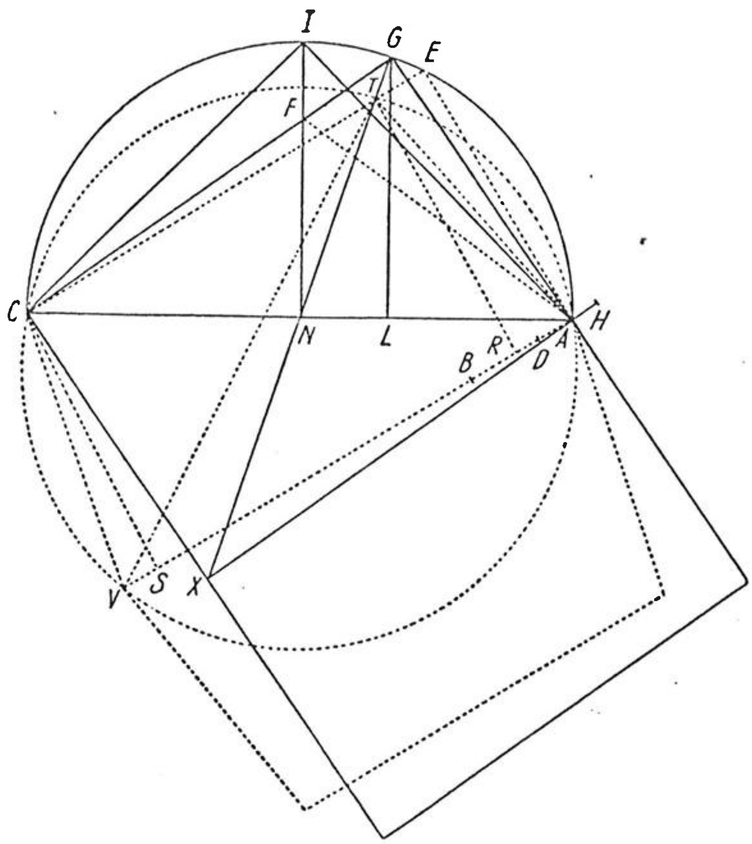
Tenslotte wordt bij een Oostenrijks vat

$$AT^2 = \tfrac{1}{2}\, CT^2 \qquad [85]$$

Aan de eis

$$bo^2 \leq 2/3 \ \text{Visier}^2 \qquad [86]$$

moet voldaan zijn, anders is het vat niet Oostenrijks.



figuur (45) : constructie van verschillende vat vormen

Met bovenstaande formules volgt :

$$\frac{AC^2 - CT^2/2}{CT} = AV \qquad [87]$$

Als alleen de verhouding buik/bodem = AV/CT en de dwarslijn AC bekend zijn, vindt men de bodem TC met nummer 74 en de regel de-tri (nummer 13). Dit wordt voorgerekend voor bu/bo = 8/9, 9/10, 14/15 en 17/18 als de dwarslijn op 100 genormeerd is.

76 De eerste "wonderbaarlijke" eigenschap van het Oostenrijkse vat is, dat de inhoud van dit vat maximaal is; het is langer dan de meeste Rijnvaten, maar korter dan vele Hongaarse. De tabel van nummer 72 is zo ingericht, dat hij voor in een bol ingeschreven cilinders dienst kan doen. Omdat het Oostenrijkse vat maximaal is, doet een kleine afwijking in de afmeting er niet veel toe.
In de tafel van nummer 72 kunnen we de hoogte van de cilinder vinden, de straal van de cirkelronde bodem en de inhoud. Uit een voorbeeld blijkt inderdaad dat een afwijking van de juiste maten weinig invloed op het volume heeft - bijvoorbeeld als de visier = 20, dan moet volgens [86] de bodem 16 1/3 zijn; neemt men 16, een afwijking van 2%, dan is de afwijking in het volume maar $3^{o}/oo$. Voor een korter vat met dezelfde visier valt dit ongunstiger uit: een rijnvat, met

$$l_{rijn} = 2\ bo_{rijn} \qquad [88]$$

heeft bij dezelfde visier van 20 8% minder volume dan het Oostenrijkse vat. Zelfs als je met een speciale stok voor rijnvaten roeit, is de afwijking groot als de kuiper de verhouding 88 niet goed getroffen heeft.

77. Omdat rijnvaten en Oostenrijkse vaten bijna geen buik hebben, is tot dusver bijna niets over de buik opgemerkt. Als we het vat als een dubbele kegelstomp opvatten - zo'n vat komt weliswaar in"Duitsland"niet voor- kunnen we deze vorm gebruiken als "die Richtsnur/nach welcher die Fässer sich arten muss vom grund auss disputirt werden .... dieweil doch das meiste (wiewohl nicht alles) an den Fässern und sonderlich an den Botungen zusehen ist." Als we de visier konstant houden, maar de buik vergroten, gaat de inhoud naar nul: het vat klapt in en de buik werkt schadelijk. Vaten korter dan het Oostenrijkse bevatten **juist** het meest als de duigen recht zijn, alles bij een konstante visierlijn.
Langere vaten, zoals die van de Rijn, houden hun visier beter als ze een aangescherpte buik hebben, tenzij de buik bijzonder groot wordt: dan neemt de inhoud weer af.
Zoals uit nummer 74 blijkt, maakt zo'n scherpe buik voor het Oostenrijkse vat niet uit: dit is de tweede wonderbaarlijke eigenschap van het Oostenrijkse vat; daarom kan dit vat ook gemakkelijk geroeid worden.
Voor het volgende is het misschien wel overzichtelijk om even de eigenschappen van het Rijn- en Oostenrijkse vat, die Kepler impliciet gebruikt, op een rijtje te zetten :

Rijnvat: halve duig AI ; bodem CI (vergelijk figuur 45)

$AT^2 = CT^2 \quad ; \; L^2 = 3bo^2+2bo\times bu-bu^2$

$visier^2 = bo \; (bo+bu)$

Oostenrijks vat: (ronde buik) halve duig AG;bodem CG

$AT^2 = \frac{1}{2}\, CT^2 \quad ; \; L^2 = bo^2+2bo \times bu - bu^2$ [89]

$visier^2 = bo/2(bo+2bu)$

Kromtestraal: $R_{kromte} = bo^2 \,/\, (k^2(bu-bo))^{-1}$

met $k^2 = 1$ voor het Rijnvat

$= 2$ voor het Oostenrijkse vat

78. Als men de Oostenrijkse wijnroede gebruikt voor het roeien van andere soorten vaten, wel met dezelfde soort buik, dan treden afwijkingen op. Als men "Lust zur Kunst" heeft, kan men het bewijs voor wat volgt in het latijnse werk nalezen.
"Dieweil aber doch dise demonstration mit sampt den gebrauchten Terminis auch im Lateinischen gantz new und ungewohnlich/dahero ich mich besorgen müssen/es werde für den Teutschen Leser noch viel schwärer unnd alzu spitzfindig sein; als hab ich sie nicht nach der leng einführen/sondern allein die Summen dessen/was durch solche demonstration albereit gerechnet unnd gefunden worden/hieher ubersetzen wöllen."
Uit de maximaliteit van de Oostenrijkse vaten volgt, dat juist dat vat met buik, dat even lang is als de Oostenrijkse cilinder, van alle vaten van zijn soort de grootste inhoud heeft; dit alles bij een konstante visierlijn.
Hoe groter de buik, des te groter de inhoud van een soort vat; maar deze blijft altijd achter bij het Oostenrijkse met dezelfde visier. Voor Rijnvaten geldt:

$$\frac{\text{inhoud vat met aangescherpte buik}}{\text{inhoud cilindries vat zelfde soort}} < \frac{4}{3} \qquad [90]$$

Daarna volgt een vergelijkingstabel voor Oostenrijkse en rijnvaten, met de diameters van buik en bodem

$$bu\ /\ bo = (N + 1)/\ N \quad ,\ N = 1,\ldots,19$$

die uit de Stereometria Doliorum is overgenomen. De inhouden van beide soorten vaten zijn berekend voor twee gevallen, namelijk met een rechte buik en met een scherpe buik: de kegelstomp-benadering; de eerstgenoemde is een cilinderbenadering.
Om de vergelijking van Oostenrijkse en rijnvaten met gelijke visier mogelijk te maken, is de herschaling

$$\text{Volume}'_{\text{rijns}} = (\ \text{visier}_{\text{Oostenr.}} / \ \text{visier}_{\text{rijns}})^3\ \text{Volume}_{\text{rijns}} \qquad [91]$$

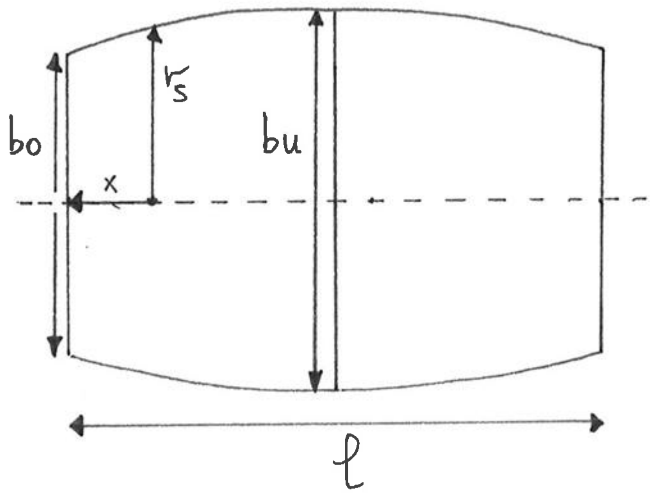
gebruikt.
In de laatste kolom worden dan de kegelstomp-versies van beide typen vaten vergeleken.

79. In deze paragraaf worden vaten met een verschillende ronding aan de buik met elkaar vergeleken; er wordt gekeken welke het beste "die Visierruthen halte", dat wil zeggen met de schaalverdeling overeenkomt.
Er is geen algemene regel te geven. Na enkele voorbeelden uit nummer 60 besluit Kepler, dat de inhoud van vaten die dezelfde sponds- en bodemsdiepte hebben en steeklijn, toch nog 1/11 = 9% kan verschillen !Bij langere wijnvaten geldt dit nog sterker.
Wanneer alleen de visierlijn gelijk is, gaat de redenering van nummer 77 niet op: een groot en gebuikt wijnvat kan meer bevatten dan een minder buikig Oostenrijks vat.
Kepler geeft een tabel hoeveel een dubbele kegelstomp naar inhoud verschilt van een Oostenrijks en Rijnlands vat met dezelfde sponds- en bodemsdiepte en bij gelijke visierlijn.
De tabel is opgemaakt voor de verhoudingen

$$bu/bo = (n + 1)/n \quad ,\ n=1,\ldots,24$$

Het is niet duidelijk hoe Kepler deze tabel heeft berekend; de beide suggesties die de editeur Franz Hammer doet gaan niet op:

1. als Kepler een soort numerieke integratie met schillen heeft uitgevoerd (vergelijk figuur 46), zal hij iets hebben gevonden als het volgende.



Figuur [46]
Integratie van het vat.

Een anachronistische integratie kan als volgt gedaan worden:

$$r_s = r_{schil}$$

$$\text{Volume} = 1\ \text{pi}\ bo^2/4 + 4\ \text{pi} \int_0^{1/2} (1/2-x) r_s\ d\ r_s(x)$$

$$r_{k(romte)} = bo^2/\ (k^2(bu-bo)),\quad k^2=2 \text{ Oostenrijks vat}$$
$$\qquad\qquad =1 \text{ Rijnvat}$$

$$r_s(x)\ d\ r_s(x) = (\ (1/2-x)+(r_k-bu/2)(1/2-x)/(r_k^2-(1/2-x)^2)^{\frac{1}{2}}).$$
$$.\ dx$$

zodat

$$\text{volume} = 2\ \text{pi}(\ 1\ bo^2/8 + 1^2/6 + (r_k-bu/2)(r_k{}^2-1^2/4)^{\frac{1}{2}}$$
$$-\ r_k{}^2(r_k-bu/2)\ \text{atan}(1/r)) \qquad [92]$$

en bij benadering (ontwikkel de atan tot op tweede orde)

$$= \frac{\text{pi}\ 1}{8}\ (\ bo^2 + bu^2 + 1^2\ bu/r_k) \qquad [93]$$

In Keplers tabel staat volume / (volume - dubbele kegelstomp) getabelleerd; met [93] en de verhoudingen bu/bo en de verschillende kromtestralen leidt dit tot formules, die alleen nog een funktie zijn van n, waarmee de verhoudingen bu/bo gegeven worden.

$$\frac{\text{volume}}{\text{volume-kegelstomp}} = \frac{3bo^2/4+3bu^2/4+1^2bu/(8r_k)}{(bu-bo)^2/4 + 1^2bu/(8r_k)} = V \qquad [94]$$

Dit levert niet de resultaten van Kepler op; bijvoorbeeld:

$bu/bo = 4/3 \Longrightarrow V_{Oostenrijks} = 9.65 \qquad V_{Rijn} = 9.43$

(Kepler: 11) $\qquad$ (9)

$= 25/24 \Longrightarrow \qquad = 71.69 \qquad = 71.66$

(80) $\qquad$ (83)

2. De ongelijkheid

$$bo < L^2(bu\ /\ bo^2)\ k^2 < bu \qquad [95]$$

suggereert de benadering

$$k^2L^2bu/bo^2 \sim (bu + bo)/2 \qquad [96]$$

die leidt tot

$$\text{volume} = \text{pi}\ 1^2/\ 12 \cdot (\ bo^2 + 2\ bu^2) \qquad [97]$$

waarbij de kromtestralen en dus het verschil tussen de Oostenrijkse en Rijnlandse vaten uit de formule zijn gevallen.
Deze laatste formule, die in de achttiende eeuw nog door Lambert (1765) 102 wordt voorgesteld, voldoet dus ook niet.
Kepler rekent ons ook de grensgevallen voor, waarin de citroen overgaat in de appel: bij een rijnvat voor bu/bo = 2, en bij een Oostenrijks vat bij $bu = \frac{1 + 5^{\frac{1}{2}}}{2} bo$, door Kepler benaderd met 2/1.23607; dit alles volgt uit de eis $r_{kromte} = bu/2$ en de definities van de vaten [89].

Von zubereitung vnnd gebrauch der Oesterreichischen Weinvisierruthen.

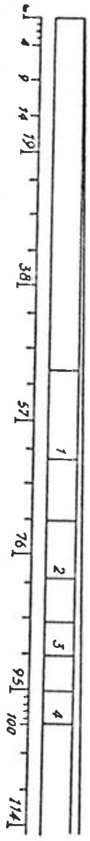
80. Wie ein jeder Haußwirt eine gerechte Visierruthen nach dem gerechten Lintzer schuch oder caementirten Maaß bereitten / oder ein andere probiren möge: item von dem Oesterreichischen Emmer vnd Achtering.

Mach dir eine gerade Ruthe von Lerchenbaum / oder sonst einem geraden Holtz / mehr breit dann dick / spitze dieselbe gegen dem einen Ende nach der breitte gemählich zu / also das sie vnden fast eine gerade schneide gewinne / wie ein gerades Schrott- oder Stem Eysen / verware die schneid vnden mit einem Silbernen oder messinen Schuch / damit dise schneide durch das vilfeltige stüren vnnd stupffen sich nicht bald abnutzen könde.

Von diser schneide / mache die Ruthen einer Lintzer Klaffter / das ist / sechs Lintzer Schuh lang / dessen dir hieneben in beygefügter Figur ein gerechter halber Schuh / beim Stattgericht zu Lintz caementirt, vnnd in seine 6. Zölle abgetheilt / fürgestelt wirdt. Einen jeden Zoll theile ferners in 19 gleicher puncten / sovil seind Jar in einem Monds-Circkel / oder inn der gulden Zahl / die Järlich vornen an die Calender / gleichwol nicht Gulden / sondern nur roth gesetzt wirt / das mercke von besserer gedechtnus wegen. Also wirt dise gantze Ruthe in 1368 puncten gehen. Diese gleiche vnd kleine thaile soltu auff die eine schmale seiten der Ruthen ordenlich nach einander verzaichnen / also daß der vnderste punct nechst an der schneide / mit der ziffer 1, der nechste drüber mit 2 gezeichnet werde / vnnd so fort an / biß zu dem aller obersten / da sol die ziffer 1368 fallen. Ein verstendiger waißt jhme wol zu thun / wann er gleich nicht alle 1368 puncten mit jren ziffern zaichnet / darzu dann die ruthe viel zu eng sein wurde.

Hierauff nun / hab ich dir ein Täfelin hienach gesetzt / auß welchem du sehen kanst / auff welche puncten die zeichen fallen / zu einem jeden Seidl / Achtering / vnd Emmer / welche zaichen gerad gegen vber auff der einen braitten seitten müssen eingeschnitten werden. Vnd mercke / das dir ein-jede ziffer nach dem zaichen .(. bedeutte den zehler zu einem Bruch / dessen Nenner ist allweg 10.

Ferners ist zumercken / warumb ich dreyerley Emmer setze. In dem vergleich der 5 N.O. Landen Anno 1542. getroffen / werden 8 Achtering auff ein viertel gezehlet / dahero die Achtering den namen bekommen / vnd 4 viertel oder 32 Achteringe für einen Emmer / diß ist die rechte (so genennte) alte Maaß. Wie nu hernach vngefahrlich vor 70. Jaren erst-



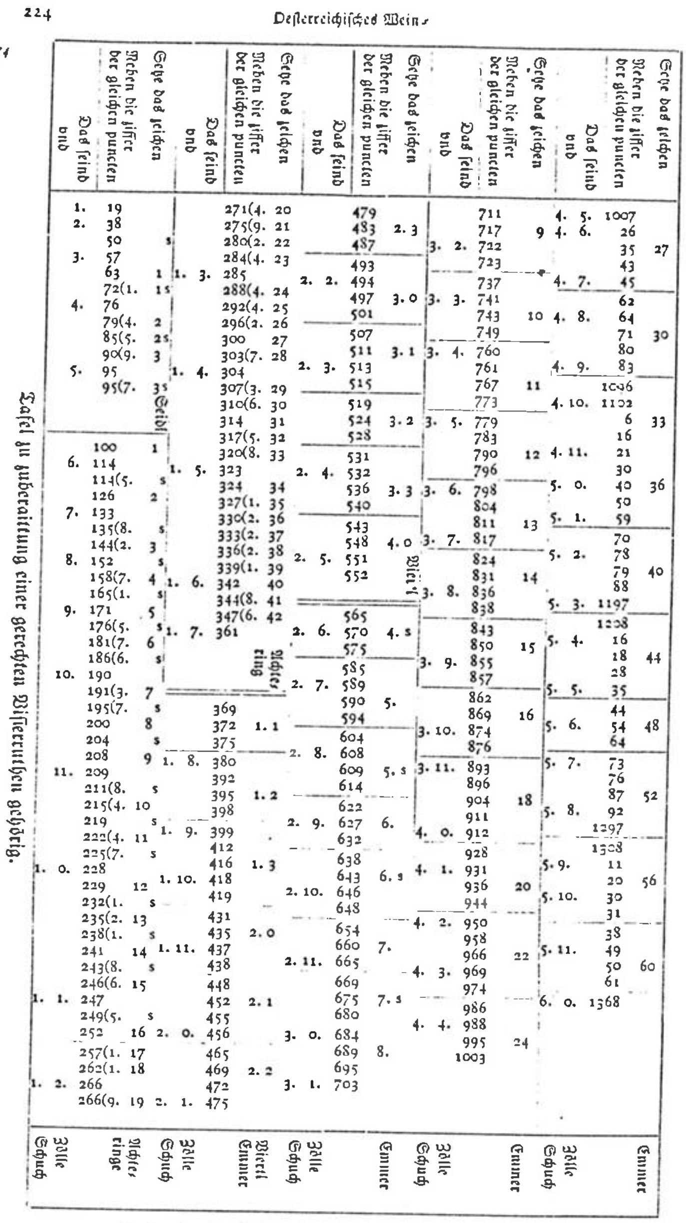
Gulden zahl.

Figuur (47)
Begin van het derde deel van Keplers Messekunst (1616)

Tot slot waarschuwt Kepler de wijnroeiers, dat bij Oostenrijkse en kortere vaten de schrale, scherpe buiken zoveel minder bevatten dan de hoge, cirkelvormige buiken. De Rijnlanders moeten bij hun lange vaten vooral datzelfde type buik in ere houden. Maar hun middelingsmethode met de in- en omgeschreven cilinder geeft een te grote inhoud voor scherpe buiken en een te kleine voor ronde ! Deze opmerking komt ook de arts Hartmann[103] uit Frankfurt, die met een gemiddelde kegel rekent, van pas, schrijft Kepler.

III. 80 Met dit nummer begint het derde deel van de Messekunst, waarin het maken en gebruiken van de visierroede wordt geleerd. De stok moet een brede en een smalle kant hebben, aan de brede kant aan het eind toegespitst en daar beslagen met zilver of messing om de spits te beschermen tegen stoten en schuren. De lengte van de stok moet 1 Linzer Klaster zijn: dat is 6 Linzer voet (6 x $\pm$ 30 cm); de lengteschaal wordt verdeeld in 1368 punten op de smalle kant - dat is 6 voeten x 2 halve voeten x 6 duimen x 19 punten. Er ontstaat dus een fijne, bijna millimeter schaalverdeling.
Op de brede kant komen de inhoudsmaten te staan. Uit eigenbelang komt het wel voor dat er 40 of 42 Achteringe in een Emmer gaan, maar het juiste aantal is 41. De inhoudsverdeling is in Seidl, Achteringe en Emmer.
Bij deze paragraaf is een halve voet afgedrukt; in nummer 94 schrijft Kepler, dan deze bij het drukken te klein is uitgevallen[104]: omgerekend komt dit neer op $\frac{1}{2}$ Linzer voet = 15,3 cm.

81 Op wat voor soort vat is de traditionele Oostenrijkse roede vroeger geijkt ? (Tenslotte richt Kepler zich met dit boek ook op de "Antiquitetliebende" - zie de titelpagina, figuur 14).



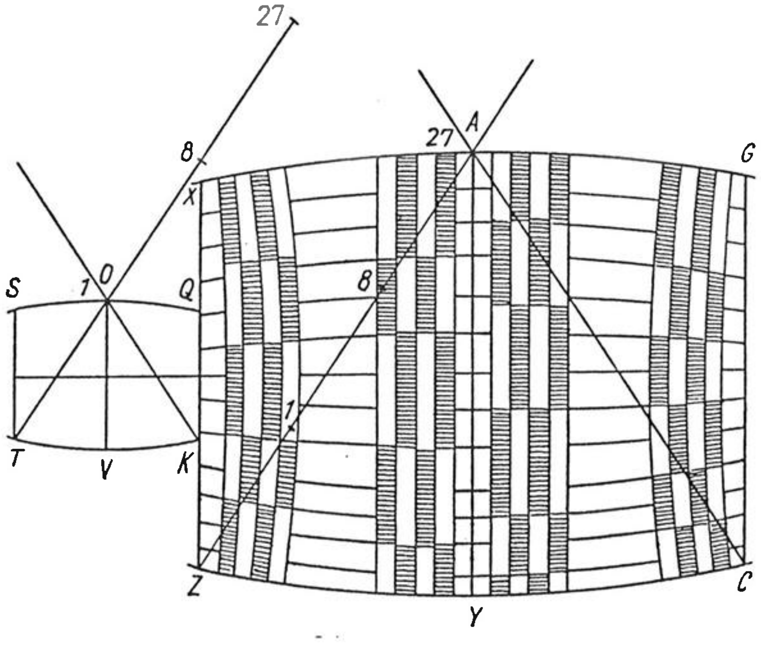
Figuur (48)
Door Kepler aanbevolen schaalverdeling voor de kubiek-roede, Messekunst (1616) paragraaf 80 .

We hebben gezien dat vaten waarop de roede van toepassing is, gelijkvormig moeten zijn (nummer 13), en verder dat een kuipers regel een vat tot een Oostenrijks vat maakt. Of het vat nu recht is - dus een cilinder - of een buik heeft, maakt niet uit, zolang de visier behouden blijft. Deze overwegingen zijn van belang, omdat er in Oostenrijk geen standaard vat bestaat, alleen een standaard wijnroede. Terugrekenend met de standaard ½ Achtering-maat van Linz komt Kepler tot de konklusie, dat het "oervat" een buik/bodem-verhouding van 21/20 gehad moet hebben. Was het vat para- of hyperbolisch geweest, deze verhouding was 13/12.
Het is ook mogelijk dat het oervat vrijwel een cilinder geweest is, zoals men in andere landen ter ijking van wijnroedes gebruikte. In Oostenrijk komt dan de grote Dreyling, die met het oog op rollen een kleine buik heeft, als oorspronkelijk ijkvat in aanmerking. Maar Kepler heeft geen zin, schrijft hij om zo precies te werken: de meeste vaten hebben een bu/bo-verhouding van 6/5 à 11/10.

82 Hoe moet een vat eruit zien wil de roede ons niet misleiden ? Kepler stelt voorop dat niemand tot op een Achtering nauwkeurig kan meten en haalt uit tegen de "ihres aignen bedunckens subtile Rechenmeister" die het wagen de inhoud van een vat tot op een "glasslin" uit te rekenen, terwijl ze niet eens de buikvorm van

het vat kennen, als het vat maar "nicht brait gedruckt, nicht bodenhol sondern innen glat" is.
De volgende eisen moeten aan het vat worden gesteld - en meetregels:
1. duig + kimmen = 3/2 bodem
2. 21/20 bo < bu < 13/12 bo
3. zie voor de correctie bij een lang rijnvat nummer 79
4. zit er een deuk in de bodem of in een duig ? Doe op het oog wat van de gevonden inhoud af. Als het vat op een van zijn bodems gezet wordt, kan de inhoud van een deuk in de andere bodem gemeten worden door hem te vullen met water.
5. diepbuikige vaten moeten rondom het vat dezelfde buik hebben, anders wijst de stok teveel aan
6. is het spongat naar binnen gebogen, dan wijst de kubiekroede te weinig aan
7. zowel aan bodem als aan spon moet het vat rond zijn: de wijnroede is niet voor "Wälsche Lägeln"
8. als de duigen dik zijn - vooral bij de bodem, zodat het vat vanbinnen niet glad is - : dat is de verantwoordelijkheid van de kuipers, "die Messkunst nimpt sich umb das nicht an/was unordentlich ist/wann mans weder sehen noch greiffen kann."

83 Het gebruik van de wijnroede is als volgt. Pas op: omdat het spongat geen punt is en de wijnroede ook geen lijn, kan men al gauw een duim verschillend uitkomen op de stok, hetgeen drie Emmer betekent in een grote drieling. Teken daarom een punt aan in het spongat en meet de dwarslijn steeds vanaf dat punt. Middel de aflezingen voor de dwarslijnen in de twee richtingen op de roede,

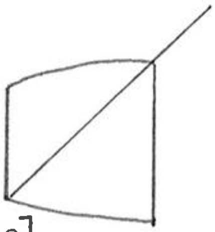


Figuur (49)

De inhoud van een wijnvat neemt toe met de derde macht van de dwarslijn. (Kepler, Messekunst (1616)).

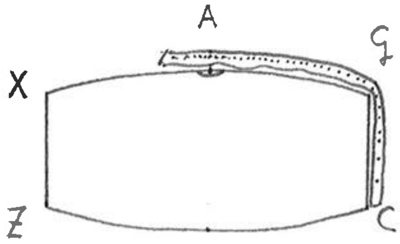
en middel vooral niet de lengtes van de dwarslijnen om dat gemiddelde op de verdeling van de stok over te brengen ! Bij kleine vaten ontstaat anders een grote fout. Het probleem van de ongelijke oppervlakken van bodems, waar andere "Visierrechnungen" zoveel moeizame berekeningen aan wijden speelt bij het Oostenrijkse vat geen rol, vanwege de bijzondere eigenschappen van dit vat. Voor "Bottungen" (=kuipen) geldt de methode ook, maar men moet de helft van de aflezing nemen, daar het halve vaten zijn.

Botung



figuur [50]

Figuur



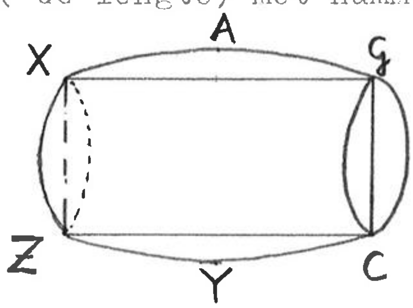
Meten met perkament

84 Als je geen wijnroede bij de hand hebt, neem dan de dwarslijn op en zoek de waarde van de lengte op in de tabel van nummer 80 (figuur 48) en interpoleer lineair. Een voorbeeld van een te groot vat is het grote vat van Heidelberg, dat een bodem heeft van 16 voet en een duiglengte van 26 voet. Overigens kan ook van de kubieke evenredigheid van het volume en de lengte van de dwarslijn gebruik gemaakt worden.

85 Als het vat niet mag worden aangestoken ("aufgebeyhelt"), meet men de bodemen - eventueel 2 x overdwars - en de omtrek van de buik. Hieruit vindt men met nummer 6 de spondsdiepte, als men de duigdikte aan de kimmen er nog tweemaal vanaf haalt.
Meet de afstand van spon naar bodem, trek de dikte weer af, dan vindt men met nummer 74 de dwarslijnen, waarna nummer 83 of 84 kunnen worden toegepast.
Velen gebruiken perkament, waarop een schaalverdeling in emmers staat.
Kannoniers ("Büchsenmeister") gebruiken een dergelijke methode ook om het gewicht van grote stukken te berekenen. Meet van mond tot zundgat de afstand in emmers, weeg het kleinste stuk dat je hebt, en vindt het gewicht van de andere stukken (=kanonnen) met de regel detri.

86 Hier wordt een samenvatting van de vatrekening gegeven;"dessen bedarff man inn Oesterreich zu den Landfässern gar nicht; die Visierruthen ist so richtig als kein rechnung nimmermehr sein kan". Maar voor het roeien van buitenlandse vaten is een aparte bespreking op zijn plaats: elke dag komen vele buitenlandse vaten Oostenrijk binnen en brengen Rijnwijn, of moeten worden gevuld met Oostenrijkse wijn. Bovendien kan dit deel van het boekje ook buitenlanders dienen.
Het meetvoorschrift luidt (zie figuur):
1. meet AC en AZ : de diagonalen
2. meet GC en XZ (nummer 85): de bodem
3. meet AY (nummer 85): de buik
4. ga na of de omtrek rond is; kontroleer de omtrek met de diepte met behulp van een grote kromme passer of met parallele lijnen.
5. kontroleer XG (de lengte) met nummer 74 aan de hand van AY, AC en GC.

figuur [51]

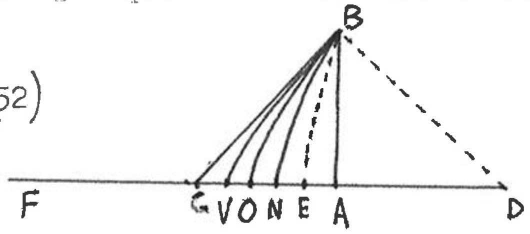


Het grootste deel van het volume bestaat nu uit een cilinder op het grondvlak GC (zie nummer 24). Resteert een gordel, die moeilijk te berekenen is, zoals we in nummer 64 zagen. Er staan ons twee wegen open:

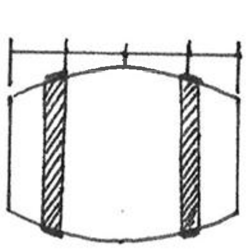
1e weg: gordel van een dubbele kegelstomp (nummer 52)	<	gordel van het vat	<	2e weg: gordel van een citroen (nummer 63)

6. De ronding van het vat kan met een speciaal instrument bepaald worden, bestaande uit een vierkante gladde stok, zo lang als het vat met 5 of 7 beweegbare stiftjes erin, die uit de stok kunnen worden geschroefd. De middelste zit vast, en moet iets langer zijn dan de grootste band die om een vat voorkomt. Zo kan de ronding van een vat worden opgenomen en met 5 of zeven punten worden getekend; tussen de punten nemen we rechte lijnstukken. De kromming bepaalt de rekenmethode die wordt toegepast voor de inhoud.

figuur(52)



figuur [52a] krommings-meting met instrument



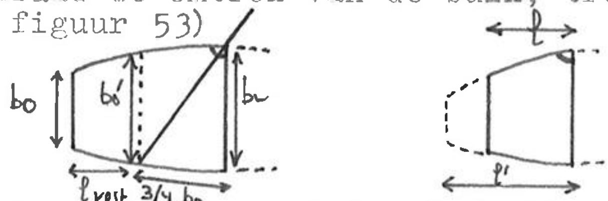
Teken in de figuur52 de zo gevonden kromming van het vat (vergelijk nummer 65). Komt de kromme uit op N, volg dan de tweede weg (citroen). Valt hij hoger uit (I,O of V) bijvoorbeeld X, bereken dan:

$$\text{tweede weg} - NX / NC \cdot (2^e \text{ weg} - 1^e \text{ weg}) \qquad [99]$$

een lineaire interpolatie dus in de asafsnede.
Kepler beseft, dat dit maar een benadering is, maar "Gewiss ist es /das diser process nach der rechten scheiben ziele / dann je kleiner CI,CO oder CV, je nehener es bey dem ersten facit bleiben muss: das aber hierdurch eben das schwartze getroffen werde/nach gründlicher Geometrischer Kunst/das wil ich nit für gewiss aussgeben haben. Andere Geometrae mögen aber suchen/ich hab im Lateinischen Werck mit erfindung viler newer demonstrationum meinen ehren gnug gethan."

87 Hier geeft Kepler aan, hoe men met de Oostenrijkse wijnroede allerlei buitenlandse vaten kan roeien onder vermijding van de meeste van bovenstaande "verdriessliche raittungen".
-----Als het vat langer is dan een Oostenrijks vat, zet dan met een passer 3/4 van de bodemsdiepte af vanaf het spongat en meet met een ijzerdraad de omtrek van de buik; trek tweemaal de duigdikte af (zie figuur 53)

figuur [53]



Neem ze op papier over en roei dan de beide dwarslijnen - dit komt dus neer op een reductie van het vat tot het Oostenrijkse model met de juiste verhouding van bodem en duiglengte, maar dat vindt Kepler overbodig om uit te leggen kennelijk.
Behandel de rest van het vat - de uiteinden - als kegelstompen (gebruik nummer 24,49 en 52). Maar als je niet "allzusubtil" wilt zijn, volg dan Keplers voorstel en neem voor de resterende uiteinden:

$$l_{rest} \times \frac{\text{aantal emmers in hoofdmoot volgens diagonaal}}{3/4 \text{ bo}} \qquad [100]$$

Dit geeft ongeveer hetzelfde resultaat als nummer 79 voor een rijnvat met bu/bo = 8/7.
----- Is het vat korter dan een Oostenrijks vat, teken dan weer het vat in overlangse doorsnee (zie figuur 53) en verleng de duigen in dit geval tot de Oostenrijkse verhoudingen bereikt zijn. Dat vat is dan met de Oostenrijkse wijnroede te roeien; de echte inhoud wordt:

$$\text{Inhoud}_{\text{kortere vat}} = (l/l') \times \text{Inhoud}_{\text{Oostenrijks},l'} \qquad [101]$$

l

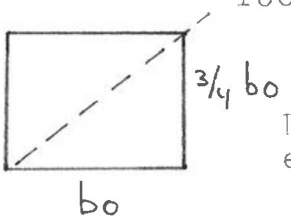
----- Zogenaamde Lägeln van Oostenrijkse proporties hebben een

$$\text{Inhoud} = \text{Inhoud}_{\text{roede}} \times \text{bodembreedte} \,/\, \text{bodemshoogte} \qquad [102]$$

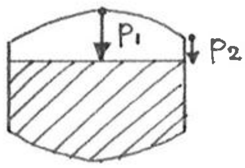
Doe dit met nummer 24 en 25.
----- Stäntner van tin worden overgetekend en op papier geroeid (zie figuur 54); de inhoud is:

$$\text{Inhoud} = \text{Inhoud}_{\text{roede}} \times \frac{\text{hoogte} \,/\, 2}{3/4 \text{ bodem}} \qquad [103]$$

Figuur [54]



Roeien van een Stäntner



Coignets methode

88. Over de berekening van de inhoud van een deels leeg vat merkt Kepler op:
"Diss sol ein Kunst sein/dann dem rechten grund nach prangen die Messkünstler so sehr damit/das es meinens wissens noch nie an tag kommen/unnd ist zwar wol ein rechtes Kreutz für die Künstler/und gar nicht jedermans ding". Maar Kepler waagt zich er toch aan. Een bekende methode van M. Coignet **105** voor vaten zonder veel buik bestaat hierin, dat (zie figuur 54)

$$\text{peil}_{\text{gereduceerd}} = (p_1 + p_2)/2$$
$$\text{diameter}_{\text{red.}} = (bo + bu)/2 \qquad [104]$$

wordt berekend en peil_{red} de hoogte van het cirkelsegment met $\text{diameter}=\text{diameter}_{\text{red}}$ de lege fractie bepaalt volgens

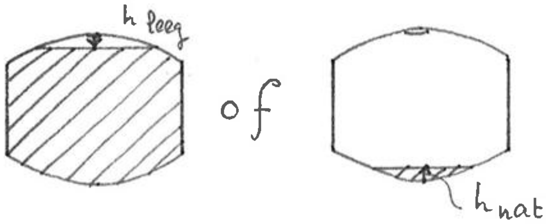
$$\text{volume leeg} = \frac{\text{cirkelsegment}}{\text{cirkeloppervlak}} \times \text{volume vol} \qquad [105]$$

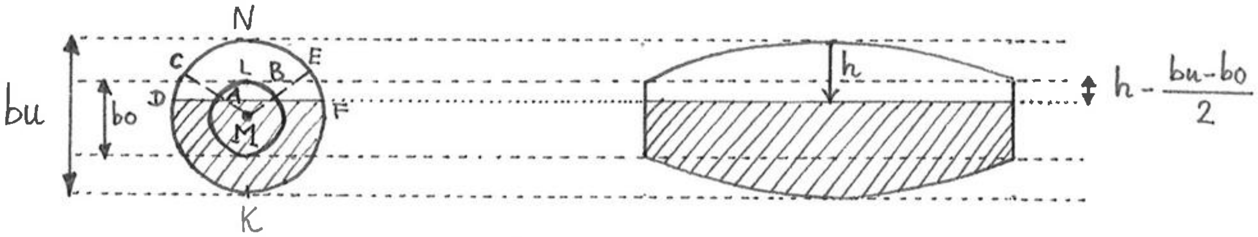
een cilinderbenadering dus (nummer 17). Deze werkt niet als het nat boven of onder de bodem staat, merkt Kepler op. Daarom slaat hij een andere weg in - de Circulus Metator, die hij in de Stereometria invoerde, ontbrak het aan een bewijs.
Steeds moet gerekend worden met de hoogte van de spon boven de bodemen oftewel (bu-bo)/2. Men kan twee gevallen onderscheiden:
-----1^{e} geval:

$$\text{hoogte}_{\text{nat of leeg}} < (bu - bo)/2 \qquad [106]$$

Met behulp van nummer 10 (cirkelsegment), nummer 38(bolsegment) en nummer 67 (citroensegment) wordt de lege ruimte gevonden - of het nog volle deel als het nat onder de bodem staat.
In formule-vorm betekent dit - de exacte integraal is niet te berekenen -

Figuur [55]
1^{e} geval





Figuur [56] berekening van het deels lege vat: 2^e geval.

volume segment = $\pi h^2(3r_k-h)/3$ x

$$\frac{bu^2 \operatorname{acos}((bu/2-h)/bu) - bo/2\ (h\ (bo+bu)/2)^{\frac{1}{2}}}{r_k^2 \operatorname{asin}(L/(2r_k)) - L/2\ \ (r_k - h)} \qquad [107]$$

Vergelijk [79].
----- 2^e geval:

$$h_{\text{nat of leeg}} > (bu - bo) / 2 \qquad [108]$$

Nu hebben we nodig:
- de inhoud van het volle vat
- de inhoud van de cilinder tussen de bodems (nummer 24)
- cirkelsegment van de buik(nummer 17)
- cirkelsegment van bodems, hoogte = h-(bu+bo)/2 (nummer 17)
- boog cirkelsegment van de bodem

hiermee vinden we een Zaan of sector volgens nummer 17.
Dit valt uiteen in
1. segment MCNE - segment met driehoekige doorsnee ABM
2. segmenten ACD en BEF, de"zugespitzte stücklin" die Kepler verwaarloosbaar acht, maar toch "umb der Künstler willen" meerekent, "und wil erwarten/ob jemand mir den grund hierzu umbstossen/oder einen gewissern fürbringen wölle."

$$\text{oppervlak ACD + BEF = buikcirkelsegment DFN + driehoek ABM - cirkelsector CNEM} \qquad [109]$$

Met de regel detri wordt de bijdrage[106] van de "stücklin":

$$(\text{oppervlak ACD + BEF}) \times \frac{\text{citroensegment}}{\text{buikcirkelsegment}}$$

$$= (\text{opp. ACD + BEF}) \times \frac{\text{bolsegment}}{\text{grote cirkelsegment } (r=r_k)} \qquad [110]$$

Er wordt een voorbeeld van deze methode gegeven. Als de vlijtige lezer de uitkomsten in het latijnse werk - de Stereometria - vergelijkt met deze, moet hij bedenken dat daar met een dubbele kegelstomp gerekend werd maar hier met een citroen.
Bij benadering kan men deze methode aanzienlijk vereenvoudigen omdat "sie mit dem grossesten theil dess abrinnenden Weins... was obern Böden stehet/gähling verslinget(so bald die Böden ein wenig herfür stechen) und nur ein wenig zu beiden seitten uberlesset / und zwar je mehr gähling/je seycher der Bauch".
Om verwarring te voorkomen, biedt Kepler een uitgewerkte tabel aan, die "beiläuffig proprotionirt" is, dus ruwweg geldt.

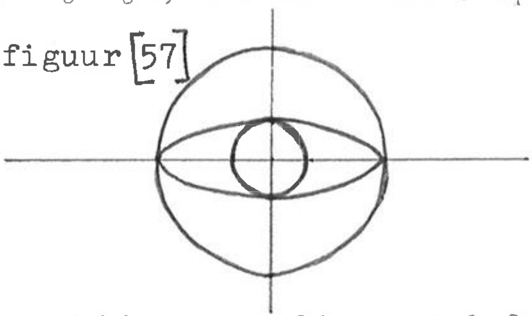
In deze tabel wordt voor vaten met een buik/bodem verhouding van (n+1)/ n , n = 1,..,24 de fraktie van de totale inhoud gegeven die boven de bodemen tot aan de spon staat als het vat vol is. Dit blijkt neer te komen op een lineaire interpolatie en extrapolatie van voorbeelden uit nummer 63, 67 en 88. Kepler geeft numerieke voorbeelden hoe de tafel gebruikt moet worden - weer aan de hand van juist diezelfde voorbeelden waarmee de tabel is opgemaakt.

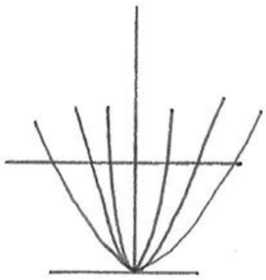
89 Kepler geeft aanvullingen op nummers in deel I en gaat tevens in op het bovenstaande "process".
---bij nummer 15 en 17:(zie figuur)

$$\frac{\text{oppervlak cirkel}}{\text{oppervlak ellips}} = \text{oppervlak segment uit cirkel/id. ellips} \qquad [111]$$

--- bij nummer 18 : de oppervlakken van paraboolsegmenten uit een schaar parabolen verhouden zich als de afgesneden stukken van de snijlijn, als deze haaks op de as staat

figuur [57]





--- bij nummer 34 : paraboloïden verhouden zich als hun grondvlakken als ze even hoog zijn - dus net als de kegels van nummer 48

--- bij nummer 40 : als een ei in een bol staat, en beide worden gesneden door een vlak haaks op hun as, dan

$$\text{volume segmenten} \propto \text{oppervlakken bases} \qquad [112]$$

dus net als de zuilen van nummer 24 of 44.
Kepler gaat hier in op zijn benaderingen van de volumina van segmenten met behulp van hun snijvlakken, zoals hij die in nummer 63 voor de grote citroen en algemener in nummer 67 ook voor andere lichamen heeft toegepast.
De verhouding tussen inhouden van segmenten en hun snijvlakken, zoals in noot 100 uitgeschreven, geldt exact voor elliptische of parabolische bogen (in noot 100 boog ABC), maar slechts bij benadering voor de cirkelboog waar men bij de vatberekening het meest mee te maken heeft.
De kleine citroen - zie figuur 38 - wordt overschat als hij uit bolsegmenten berekend wordt, want hij loopt spits toe, als een kegel, waar een bolsegment rondloopt.

--- bij nummer 28:

$$\frac{\text{kubus}}{\text{bol}} \text{ met gelijke diameter} = \text{pi} / 6 \qquad [113]$$

90 Hoe je zonder moeilijke berekening maar alleen met een wijnroede, een trekpasser en een tafel kunt bepalen hoeveel Achteringe er afgaan van elke Emmer als het vat niet geheel vol is.

Met de wijnroede kan het vat in een cilinder en een gordel gescheiden worden. Teken het vat na - gebruik de binnenmaten - en roei volgens de nummers 83-85 en 87 de tekening, dan vind je het aantal Emmer tussen de bodems: de cilinder. Door het volle vat te roeien vindt men

$$\text{volume}_{\text{gordel}} = \text{volume}_{\text{vat}} - \text{volume}_{\text{tekening}} \qquad [114]$$

Meet de hoogte van de wijn bij het spongat, eventueel met een glazen staaf en vind zo het peil; de bodem wordt in 200 gelijke delen verdeeld (dat wil zeggen: de diameter van de bodem). Met de speciale tabel vinden we dan hoeveel er uit de gordel en uit de cilinder weg is. In formule-vorm:

$$\text{Inhoud}_{\text{weg}} = \text{inhoud}_{\text{gordel}} \times \text{lege fractie}(\text{peil}_{\text{bodem}}) \qquad [115]$$
$$+ \text{ inhoud cilinder} \times \text{lege fractie cilinder}(\text{peil bodem})$$

Als 1 Eimer = 41 Achteringe, leidt dit tot de formules:

lege fractie cilinder in Achteringe /Eimer =

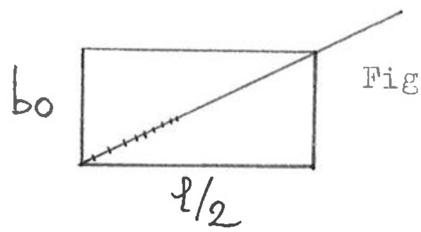
41 x cilindersegment/cilinder =

$$\frac{41}{\text{pi}}\left(\text{hoek} - \frac{100-h}{100}\left(\frac{h}{100}(2 - h/100)\right)^{\frac{1}{2}}\right) \qquad [116]$$

met hoek = acos ((bo/2 - h)/(bo/2)); en

lege fractie gordel = 41 hoek / pi [117]

waarbij de "spitzlein" verwaarloosd zijn; deze formules geven resultaten die goed met Keplers tabel overeenstemmen.



Figuur [58]

Als het vat groot is, en een bodemen zijn nog niet blootgekomen - dus er is niet veel uit het vat- dan kan men zonder de derde weg van 88 het volgende doen; indien het vat aan de spon niet dieper is dan de wijnroede lang is, meet dan de hoogte van de lege ruimte met een andere stok, breng deze afstand over op de wijnroede en meet ook (bu - bo)/2. Lees beide afstanden af op de wijnroede en herschaal met de regel detri:

$$\text{lege volume} = \frac{h_{\text{leeg; aflezen op CR}}}{(\text{bu-bo})/2_{\text{aflezen op CR}}} \times \text{deel buikcirkelsegment tafel nummer 88} \qquad [118]$$

Dit is niet juist, want bij het opmaken van tabel van nummer 88 is niet gerekend met de "spitzlein" die bij kleine peilen van belang worden. Over de nauwkeurigheid van zijn methodes merkt Kepler op: "Lasse dich nicht irren/dass diser process nicht allerdings richtig/wann man ihme nachraitten/und das Facit gegen dem obern process halten wolte/dann der Visierstab mit seinem Nutzen gehört under die handgriffe/die bedürffen keiner solchen Subtilitet, wie die Rechnungen". Kepler is dus ook niet geïnteresseerd in een exakte theorie.
Als het vat wel een diepere buik heeft dan de wijnroede lang is, laat dan de wijnroede omgekeerd in het vat zakken.
Als voorbeeld geeft Kepler het Heidelbergse vat, dat we al in nummer 84 tegenkwamen; het heeft een buik van 18 voet en een bodem van 16 voet. Voor (bu-bo)/2 = 1 voet geeft de roede van nummer 80 (zie figuur (48)) 12 Achteringe. Is het vat vol, dan staan volgens de tabel van nummer 88 37 Emmer boven de bodems.
Stel het vat is voor 3 duim geleegd; maal 3 geeft 5 Achteringe op de roede. Vanwege de kubieke schaalverdeling: $5/3^3$ is minder dan 1/5 Achtering. Met de regel detri vindt Kepler dat bijna 23 Achteringe uit het vat zijn (exakt is: 23,4 Achteringe).
"Unnd were hiemit für dissmal gnugsam gehandlet von dem Visierstab/wöllen ihne auff ein seitt legen/unnd dafür den Heber brauchen/dann ich mit endung dises theils durstig worden bin. Aber hinweg/ der Heber möcht nicht gereichen:auss dem vorigen obern Bauchschnitz ist leichter zuheben", grapt Kepler.

91-99 In het bijvoegsel ("Anhang") bespreekt Kepler de verschillende metrische eenheden die in Oostenrijk en daarbuiten in gebruik waren. Vele maten zijn geijkt op het menselijk lichaam; het tientallig stelsel ontstond omdat we tien vingers hebben. Het apothekersgewicht is overal gelijk en waarschijnlijk nog hetzelfde als in de Romeinse tijd, Toen waren lengte- en inhoudsmaten met elkaar verbonden in de "quadrantal": een kubus met zijden van 1 Romeinse voet en een inhoud van 3 schepels korenmaat = stattpfund 80 zoet water. Aan de hand van Romeinse munten kan men de gewichten en dus de maten van de Romeinen terugvinden - of opgegraven munten zwaarder zijn geworden in de aarde moeten alchemisten maar uitmaken. Villalpandus 107 kon zo een munt van Vespasianus ijken. Langs deze weg kunnen oude en nieuwe voetmaten met elkaar vergeleken worden, en via de wijnroede aan inhoudsmaten worden gekoppeld. Maar waren de mensen vroeger niet groter, vraagt Kepler zich af ? Ook de Europese gewichten - ponden - worden onderling vergeleken en in een tabel gezet, net als de munten. Omdat wijn zowel zwaarder als lichter kan zijn dan water, neemt Kepler een zelfde gewicht voor beide aan. Met 5 gewichtjes - die zich verhouden als machten van drie en gemerkt zijn A,I,S,T,V - kan men handig wegen; Kepler kan het niet laten een tabel toe te voegen. Ook de korenmaten en de schiprekening - hoeveel kan men waarvan laden ? - worden onderzocht. Tot slot worden de gewichten van metalen behandeld en de waterproef van Archimedes experimenteel toegepast.

100 In het laatste nummer van de Messekunst legt Kepler uit, hoe een visierroede gebruikt kan worden voor het wegen van stukken geschut en kogels van steen of metaal (in nummer 85 is al op het gewicht van stukken ingegaan). "Wie der Gast/also der Becher unnd der Trunck/ein schlechter Kellner/der sich nicht waisst nach eins jeden Gasts humor zu accomodirn. Derhalben auch dem Visierstab nicht für ubel zu haben/ob er sich schon bissweilen ausser-

halb des Kellers und Weinfasses auch zum ernst brauchen lesset/ und auss einem grossen Canon einen Ob der Enserischen Märtinsberger/Spitaler/Eisenärtzter zu Steir abgezogen/oder auch einen Edlen Polnischen Trunck einschenckt".
(Ens enzovoorts: mijnsteden).
Omdat bij een kogel het halve gewicht aan kruit moet worden gebruikt dient men met de wijnroede de diameter van de mond van het kanon te meten. Uit de diameter van de stenen kogel volgt het gewicht:

$$\left(\frac{\text{diameter}_{\text{stenen kogel}}^{3}}{\text{gewicht}_{\text{stenen kogel}}}\right)^{1/3} = \text{diameter}_{1\ \text{pond steen}} \quad [119]$$

Kepler geeft daarna vuistregels voor het verband tussen de inhoudsmaten zoals die op de Oostenrijkse wijnroede staan en de gewichten van verschillende gesteenten en metalen.
De Messekunst besluit met een lijst van gebruikte stereometrische termen in het duits en het latijn en een register van alle paragrafen.

5. Zeventiende eeuwse noord-nederlandse wijnroeiteksten

5 a. Adriaan Metius : Manuale Arithmeticae et Geometriae Practicae (1634)[108]

In dit uitvoerige "Handt-boecxken", blijkens het "Tot den Leser" bedoeld voor jonge landmeters en ingenieurs, wordt in het ruimere kader van de stereometrie en de inhoudsmeting van allerlei regelmatige lichamen[113] ook aandacht besteed aan het wijnroeien en het pegelen van deels lege vaten. Bovendien wordt in het genoemde voorwoord direkt al een proportionaalpasser voor lege vaten behandeld: dit is een nieuwe inventie waarvan in de titel sprake is. De auteur Adriaan Metius[109] (Alkmaar 1571 - Franeker 1635) is de tweede zoon van de bekende ontwerper van verdedigingswerken in Nederland Adriaen Anthoniszoon,[120] die burgemeester van Alkmaar was en de bekende, naar hem genoemde benadering van pi = 355/113 heeft gevonden.
In 1598 werd Adriaan Metius als opvolger van J. Roggius benoemd tot professor extra-ordinaris, en in 1600 tot professor ordinaris aan de Universiteit van Franeker;[114] hij gaf les in wiskunde, zeevaartkunde, landmeetkunde, vestingbouwkunde en astronomie. Zijn lessen hield hij niet alleen in het latijn, maar ook in het nederlands. Het is waarschijnlijk dat al in zijn tijd te Franeker landmeters, wijnroeiers, ingenieurs en vestingbouwkundigen werden opgeleid. Tevoren was dit alleen mogelijk aan de opleiding van de Duytsche Mathematique, die op advies van Stevin te Leiden in 1600 werd opgericht.
Getuige de opdracht aan de gedeputeerde staten van Friesland, gedateerd 26/9/1634 ziet Metius dit boek als vooral geschikt voor vestingbouwkundigen, maar in het voorwoord ligt de nadruk op een "naerder inventie",[115] waarmee men zonder berekening"door een proportionale passer/alle soorten van vaten/bestaende uyt twee afgecorte conos - kegelstompen dus - / generalicken ende veerdich af te pegelen hare wannigheden/te weten hoeveel nats noch

in het vat behouden is". Dit zal "alle constbeminners aenghenaem wesen" : hier, net als bij Kepler, een beroep op de wiskundige liefhebbers. De bespreking van deze proportionaal passer in het voorwoord wijst erop, dat deze passer een latere toevoeging aan het boek is, toen de hoofdtekst al voltooid was.
Om de logische volgorde bij de behandeling van het wijnroeien en wat Metius erover te vertellen heeft, niet te verbreken, zullen we eerst nagaan wat de hoofdtekst over wijnroeien zegt, en daarna terugkeren tot het voorwoord.
Het eerste capittel behandelt de arithmetica, het tweede de praktijk van de geometrie, waar inhoudsberekening een belangrijke plaats inneemt. Na methoden te geven voor het vinden van de inhoud van een regenbak en het bepalen van het aantal stenen dat je bij metselwerk nodig hebt, komt Metius toe aan het vervaardivan een "pegel quadraet roede" voor "alle ronde vaten".
(In het voorbijgaan had hij al eerder voor een wijnvat de formule

$$\text{Inhoud} = ((bo1 + bo2)/2 + bu)/2 \times (1 - 3\ \text{kim}) \qquad [120]$$

gebruikt in een numeriek voorbeeld.)
Bij de pegelroede zijn twee soorten van maten nodig - vergelijk Vanden Hoecke, die er drie onderscheidde - het produkt geeft de inhoud:

$$\text{inhoud} = \text{diepte in ongelijke quadraet delen} \times \text{lengte vat in gelijke delen} \qquad [121]$$

Als eenheid wordt gewerkt met een speciale voetmaat, die in scr. (=scrupula) prima en sec. (=secunda) is verdeeld volgens het tientallig stelsel. Als de scr.sec. op 10 worden geschat,is de lengte van de hele voetmaat 1000. Dit komt overeen met de zijde van een kubus die 1 Friese kan = 1/80 aam bevat.
Dit wordt gelijk gesteld aan de kwadraat wortel van 8 Friese kan = 1/10 aam.
Zo vinden we de eerste"mensure" op de diepteschaal ter lengte van:

$$(1000^2 \times 14/11)^{\frac{1}{2}}$$

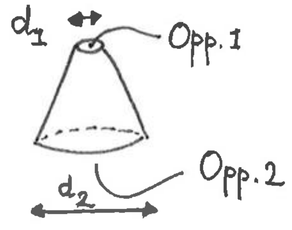
De volgende mensuren volgen met behulp van een kwadraat worteltabel voor 1 - 100, terwijl de wortels van 1/10 - 19/10 apart worden opgegeven. De mensuren worden op een andere kant van de stok overgenomen; de eerste kant draagt kennelijk de lengteschaal. Bij het op de stok afzetten van de wortels wordt een passer gebruikt. Er wordt een voorbeeld gegeven hoe een wijnvat met deze stok geroeid moet worden: de diepten bij spon en bodemen worden op de roede gemiddeld met behulp van een krijtstreep, tenslotte wordt het resultaat met een passer van de roede overgenomen en vermenigvuldigd met de lengte:

$$\left(\left(\frac{bo1_{QR} + bo2_{QR}}{2} + bu_{QR} \right)/2_{QR} \times L \qquad [122]$$

zodat de uitkomst de middeling is van 3 cilinders, met als grondvlakken de bodems en de buik.
Metius tekent hierbij aan dat dit wel"perfect"is voor cilinders en "conos", maar niet voor bier-en wijnvaten: die doen we zo te kort, omdat de bodemen kleiner zijn dan de buik; we hebben te maken met een "dubbelde afgekorte conus", denkt Metius.
Als hiervoor gekorrigeerd wordt met behulp van de eerder besproken afgeknotte kegel,

$$\left(\frac{2}{3} \left((\text{diam}_1 + \text{diam}_2)/2 \right)^2 + 1/3\ (\text{Opp}_1 + \text{Opp}_2)/2 \right) \times L \qquad [123]$$

figuur[59]



wordt dit euvel opgeheven. Beter, maar niet strikt nodig is de volgende manier om een kwadraat-roede te ijken.
Neem een wel gefatsoeneerd wijnvat, niet al te buikig, bijvoorbeeld pijpen of Bordeause vaten van bekende inhoud. Zet de lengte van het vat op een bert (stuk hout). Deel de inhoud van het vat door de geëqueerde diameter die de roede opgeeft (dus kwadratisch)

$$\text{Inhoud} / d_{eq} = \text{lengtemaat} \qquad [124]$$

Verdeel de lengte van het vat op het bert in deze eenheden. Als de zo gevonden schaalverdeling op een kant van de stok aangebracht wordt, beschikken we over een stok voor gelijkvormige vaten.
Bij het maken van een "cubus wijnroede" - dus met een kubieke schaalverdeling - die zonder berekening onmiddelijk de inhoud van een vat oplevert, vormt het vinden van de "eerste mensure" weer de grootste "swaricheydt".
Dit kan als volgt worden opgelost: neem een normaal vat en zet een krijtstreep in het midden van het spongat. Meet met een ijzerdraad de "dweerslijnen"; als we deze middelen hebben de "latus cubi", de zijde van de kubus. De eerste mensure volgt dan uiteraard met

$$(\text{dweerslijn}^3/\text{inhoud})^{1/3}$$

figuur [60]

Met een passer wordt deze eerste maat op een stok aangebracht; de schaalverdeling wordt kubisch voltooid. Metius geeft ons daarvoor een tafel van derdemachtswortels lopend van 1 tot 200 en van 1/10 tot 3 voor de tienden. Deze eerste mensure kan op een "bert ofte Messchen plaet"(messing plaat) in 100 delen worden verdeeld.
De"wannicheyt" (= leegte) van ongelijkvormige vaten is heel moeilijk te meten, want men kan alleen door het spongat pegelen. Zelfs bij Bordeuase Oxhoofden zijn de spondsdiepten niet konstant, maar verschillen van vat tot vat. "Soo moet ghij daerom/voor U gemeene pegelroede/bij gissinge arbeyden."
Men kan door ondervinding te werk gaan, en steeds een volume-eenheid in een vat erbij gieten en zo de schaalverdeling opmaken, of met een tafel werken en de "schala", de voetmaat die gekoppeld is aan de Friese kan.
Daarvoor biedt Metius 8 tafels aan voor de verschillende soorten vaten: half anker, anker, half aam, aam, 2 soorten oxhoofden, en pijp en tot slot de"toelast" in volgorde van inhoud. Telkens wordt de volle inhoud en de spondsdiepte opgegeven, en een tafel van de natsdiepte voor verschillende hoeveelheden nat.
Voor de Toelast van 18 ankers krijgen we bijvoorbeeld:

1	17	32
2	16	56½
3	15	73
4	14	90
5	13	105
6	12	121
7	11	134
8	10	147½
9		160
Anckers		gedeelten

spondsdiepte = 320

In bijlage 2 zullen we zien hoe dergelijke tafels op wijnroedes werden aangebracht.
Mocht het vat wel dezelfde inhoud hebben als in een van de tafels, maar niet dezelfde spondsdiepte, proportioneer dan de tafel in kwestie wat betreft de natshoogten. Na enkele voorbeelden bespreekt Metius de "generale afmetinge van wannicheden van alderhande vaten" met de tafel van "Sibrant Hans Cardinael".[110]

De tafel zelf wordt door Metius in de hoofdtekst niet overgenomen, maar uit zijn voorbeelden blijkt dat de tafel uit het voorwoord, die hieronder besproken wordt, gebruikt is.
Om deze methode te gebruiken, moeten we weten:
1. de ge-aequeerde diepte of diameter(hier(bu + bo)/2)
2. de volle inhoud
3. de hoogte van het nat
4. de spondsdiepte
Er volgen numerieke voorbeelden hoe deze aanpak in zijn werk gaat als het nat niet onder de onderste of boven de bovenste kimmen uitstijgt, dus

$$h = \min(h_{nat}, h_{leeg}) > (bu - bo)/2$$

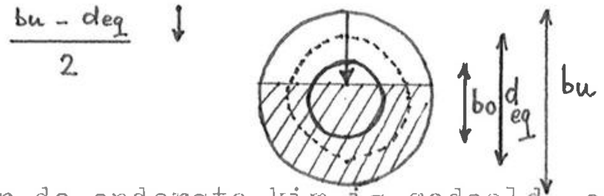
Het rekenrecept komt neer op:

$$(h \quad - (bu-d_{eq})/2) \times 1000/d_{eq} \dashrightarrow \text{tafel kolom A} --$$

$$\dashrightarrow \text{tafel kolom B} \times \text{inhoud vat} /1000 \qquad [125]$$

Toelichting van de gebruikte methode ontbreekt. Uit later te bespreken wijnroeiteksten blijkt, dat Cardinael de tafel heeft gemaakt voor een cilinder met inhoud = 1000 en diameter = 1000 en de inhoud van cilindersegmenten met opklimmende hoogte h= 1, 2, 3, ... 500 heeft getabelleerd.
Uit figuur   blijkt waarom de hoogte van het nat gereduceerd moet worden.

figuur [61]



Als het nat tot onder de onderste kim is gedaald, of boven de bovenste kim staat, dus

$$h = \min(h_{nat}, h_{leeg}) < (bu - bo)/2$$

moet men als volgt rekenen:

$$\frac{h}{2} \times \frac{1000}{bu - h} \dashrightarrow \text{tafel kolom A} \rightarrow \text{kolom B} \times \frac{\text{inhoud vol}}{1000} \qquad [126]$$

zo blijkt uit voorbeelden; er wordt geen achtergrond van dit rekenrecept gegeven. Bij **Eversdijck(1655)** zullen we nader op deze methode ingaan.
Daarna bespreekt Metius het pegelen van metalen kogels: "neemt uyt het bushuys een groote yseren Cogel/ van een kertou.." (kertou = kartouw= soort kanon) van een bekend gewicht en meet zijn diameter op. De diameter van n pont is dan, zo blijkt,

$$(\text{diameter}^3 \times n \;/\; \text{gewicht})^{1/3}$$

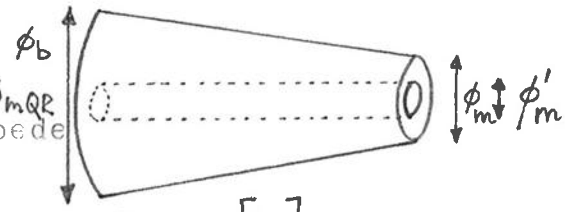
dit is een "latus cubi". Met een kromme gebogen passer kunnen we de dikte van de kogel bepalen. De diameters van kogels van hetzelfde gewicht, maar van verschillende metalen worden in een tabel opgegeven: ijzer, goud, kwikzilver, lood, zilver, koper en twee soorten tin, zodat we als we de schaalverdeling voor een metaal weten - die voor ijzer bijvoorbeeld - we ook die voor de andere metalen kunnen vinden. In een "Nota" wijst Metius erop dat zelfs metalen van 1 soort verschillen van gewicht, naar de mate van fijnheid; maar gegoten loden of ijzeren kogels hebben meestal wel eender gewicht. (Slecht goud is lichter dan zuiver goud : het

bevat veel koper.)
Om het gewicht van een geschut te roeien - dat door Metius weer wordt opgevat als een afgekorte conus - is weer een "pegelstock" met twee schaalverdelingen nodig: een lineaire voor de lengte en een kwadratische voor de diepte. Men moet de omvang zowel van de "mont" als van de "broeck" (= achtereinde kanon, bij laadgat) meten en de aanwijzingen op de stok middelen.
In het eerste numerieke voorbeeld wordt deze methode gebruikt om de stok te ijken:

$$L_1 = G\left((d_{mQR}+d_{bQR})/2 + 1/3\,((d_{mQR}+d_{bQR})/2 - ((d_m^{\frac{1}{2}}{}_{QR}+d_b^{\frac{1}{2}}{}_{QR})/2)^2) - d'_{m\,QR}\right)^{-1} \qquad [127]$$

waarin (zie figuur)

L_1 = lengte-eenheid roede
G = gewicht geschut
d_{mQR} = aflezing bij diameter mond $= \phi_{mQR}$
van het geschut op kwadraatroede
d_{bQR} = aflezing bij diameter broek
van het geschut idem $= \phi_{bQR}$
d'_{mQR} = diameter gat idem $= \phi'_{mQR}$



figuur [62]

Het is duidelijk dat Metius termen verwisseld heeft; hij bedoelt de uitdrukking voor de cilindrisch uitgeboord kegelstomp:

$$\left[\left(\frac{\sqrt{\phi_{mQR}}+\sqrt{\phi_{BQR}}}{2}\right)^2 + \frac{1}{3}\left(\frac{\phi_{mQR}+\phi_{bQR}}{2} - \left(\frac{\sqrt{\phi_{mQR}}+\sqrt{\phi_{bQR}}}{2}\right)^2\right) - \phi'_{mQR}\right] \times L \qquad [128]$$

Het tweede voorbeeld is dan ook met de laatste formule berekend - de procedure van middelen op de kwadraatstok is in 127 en 128 met wortels aangegeven - want al eerder had Metius in dit boek korrekt de inhoud van een afgeknotte kegel berekend.
Metius verklaart nog, dat de dikte aan de mond de dubbele inhoud (= oppervlakte) van het gat heeft, en aan de laadzijde driemaal de inhoud van het gat. Wil de kogel vrij kunnen spelen, dan moet zijn diameter 96½/100 van de diameter van het gat zijn.
Hierna wordt het oppervlak van een bol behandeld, en de inhoud ervan met behulp van "mijn Saliger Vaders proportie"[124] dus 113 geven 355. De inhoud van een bol kan ook met een pegelroede gevonden worden, daar het volume met de derde macht van de diameter toeneemt en men over een tafel van derdemachtswortels beschikt.
Hiermee is het gedeelte over de wijnroede afgesloten: Metius vervolgt met de berekening van cirkelsegmenten ("schibben"), waarvan de figuur ook de titelpagina siert.
Nu terug naar het voorwoord, dat bijna geheel aan de proportionale passer voor deels lege vaten gewijd is.
Neem een passer met benen van 3 of 3½ voet lang en twee duim breed. Op de ene zijde van de passer wordt een lineaire schaalverdeling op beide benen aangebracht, lopend van 1 tot 200.
Met een ijzeren of koperen "roeyken" (=staafje) moet de "geaequeerde" diepte van het vat en van het nat gevonden worden. Aan de hand van een figuur wordt verduidelijkt hoe men deze gegevens vindt uit sponds- en bodemsdiepte en de hoogte van het nat:

$$\begin{aligned} d_{eq} &= (bu + bo)/2 \\ p_{eq} &= \text{hoogte nat} - (bu - d_{eq})/2 \end{aligned} \qquad [129]$$

waarin p_{eq} de geaequeerde natshoogte is.
Uit voorbeelden blijkt hoe de toegevoegde tafel voor de "wannigheden van ronde vaten" gebruikt wordt (de tafel is van Cardinael,[110] zo hebben we in de hoofdtekst al gezien; hier vermeldt Metius zijn bron niet). In feite vervangt de proportionaal passer hier de regel van drieën:

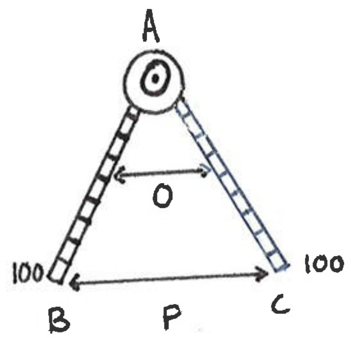
$$p_{eq}' = (p_{eq} / d_{eq}) \times 1000 \text{ --- tafel -- } \times \text{ inhoud vol}/1000$$

waarbij beide stappen links en rechts met de passer worden uitgevoerd.
Er worden voorbeelden gegeven voor natshoogten boven of onder de helft van het vat; het nat blijft steeds tussen de kimmen.
Als de gezochte "pijl" (=peil) tussen getabelleerde waarden inligt, moet men de "regel der proportien" toepassen : lineaire interpolatie. Metius rondt breuken korrekt af in zijn voorbeelden.
Ook de andere zijde van de passer kan gebruikt worden: daar kan de niet-lineaire tafel van de wannigheden in een schaalverdeling op worden aangebracht, zodat men alleen de passer nog maar nodig heeft bij het werk. Stilzwijgend interpoleert Metius de tafel van Cardinael om ronde waarden van inhoudsdelen te vinden, en geeft daarbij de hoogten van het nat op; in Cardinaels tabel wordt bij een natshoogte een inhoudsdeel opgegeven.
Omdat vooral het begin van de schaal - als bijna niets of haast alles uit het vat is - niet-lineair zal zijn, geeft Metius een extra tabel voor de inhoudsdelen 1 tot 10; verder loopt de tabel op met vijftallen tot 50, de helft van het vat is bereikt (de inhoud van het vat is op 100 genormeerd). Voorbij 10 moet men de tussenliggende schaaleenheden zelf lineair invullen.
Metius geeft numerieke voorbeelden, hoe de deze tafel als schaalverdeling op de achterkant van de passer moet worden aangebracht en stelt vast, dat voor ieder vat een pegelroede te maken is, onder verwijzing naar zijn behandeling in de hoofdtekst, die we al besproken hebben. Tot slot in het voorwoord nog voorbeelden, hoe bij een vat van bekende inhoud de gereduceerde natshoogte (= de geaequeerde natshoogte) voor een bepaalde inhoud gevonden wordt.
Voor een oxhoofd van 30 vierendeel = 120 Friese kan = 96 stopen geldt bijvoorbeeld:

$$\text{peil voor n-de vierendeel} = n \times \text{inhoud}/100 + (bu - d_{eq})/2 \qquad [130]$$

hetgeen volgt uit de tweede vergelijking van [129].

figuur (63): de meetpasser van Metius (1634)



figuur (64)
titelpagina van
De la Rose (1639);
pagina's 62 en 63

Meet en Pegel-Conſt,

Om het in-houd

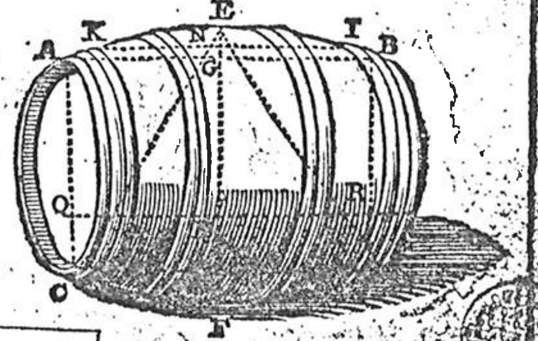
van allerhande ronde Vaten

perfectelijck te meten ende te pegelen / op driederhande manieren.

Geneuchlijck en profijtlijck voor yder een.

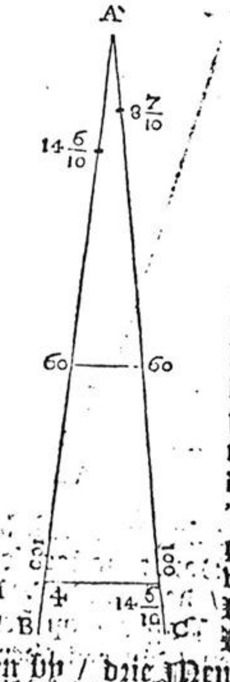
Met noch een vergelijckinge der natter Maten op verſcheyden Plaetſen ghebruycklijck, tegen 10. Frieſche halve Kannen.

Geſtelt door R. de la Roſe, *Mathem.*



Gedruckt tot Leeuwarden,
By Claude Fonteyne, Boeckdrucker Ordinaris der Heeren Staten van Frieſlant. 1639.

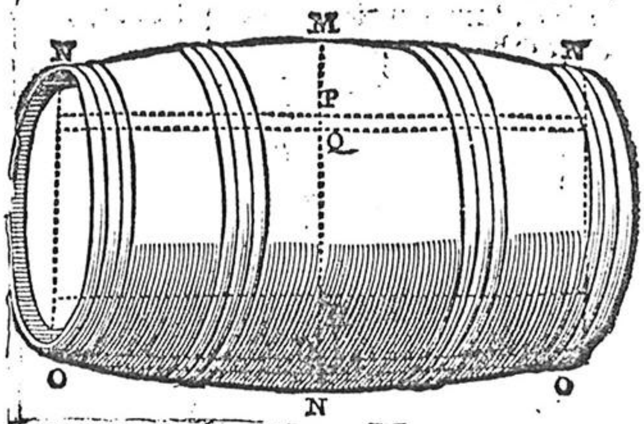
aen wijſen datter uyt het Vat manqueren $\frac{146}{1000}$ van des ghehcelen Vats in-houdt / om dan dit te brenghen tot Kannen / ſoo doet als volght :



Neemt met een Hant-Paſſer de voor-gevondene deelen $14\frac{6}{10}$, op de zijde der ghelijcke gedeelten ABC, te weten van A centro tot $14\frac{6}{10}$ ſet deſe diſtantie A: $14\frac{6}{10}$; tuſſchen 100 en 100 op beyde beenen des Paſſers / de Paſſer in deſe openinghe latende / ſoo neemt de dweers-lenghde tuſſchen 60 en 60 / te weten de groote des Vats / deſe ghemeten van A, 'teynde compt op $8\frac{7}{10}$ gedeelten / welcke gheven de wannicheyt 8 Kannen ende $\frac{7}{10}$ van een Kan / ofte / ten naeſten by / drie Menghelen : telt voorder van $8\frac{7}{10}$ op de Paſſer tot 66, ſoo hebt ghy 5 1 Kannen ende $\frac{3}{10}$, dat is een weynich meer

meer als een Mengelen / voor 't gene noch in 't Vat reſteert.

Tweede Exempel.



Een Vat / gemeten na d'eerſte / tweede / ofte derde Reghel des eerſten Capittels / is in't gheheel groot bevonden 11 Ankers / ofte 110 Kannen / welckers diepte by 't ſpond-gat laet zijn M N 2: 8: 7 op de Lenghde-Stock / de ghetallen hier by voegende / (om ſeeckerheyts halven) de diepte aen de eynden N O 2: 5: 1, de helfte van deſe twee 'tſamen-ghevoeghde lanckten ofte diepten M P ofte P O, 2: 6: 9: is de

5 b. R. de la Rose : Meet- en Pegel-Const (1639)[111]

R. de la Rose , ook wel Rosaeus geheten,[112] leefde rond 1647 te Leeuwarden en schreef naast dit wijnroeiboek (zie figuur 64) ook werken over meetkunde, sterrekunde en landmeetkunde.
In de voorrede van dit wijnroeiboek geeft de la Rose het nut van het wijnroeien aan: het komt thuisdrinkers, kopers en verkopers van natte waren van pas en dient om de gelijkheid tussen de "pachters"van de natte waren en de "gemeene ingeseetenen" te bewaren. Een juiste meetmethode bewaart de vriendschap. "Derhalven houdt Mate; ende vaert wel."
In het eerste capittel wordt onmiddellijk vastgesteld, dat het vat een "dobbelde affgecorte Conus, welcke door aequatien tot de forme van een Cylinder ghebracht zijnde/worde doorgaens sijn grootte op Cylinders wijse ghecalculeert" is. Natuurlijk wordt uitgegaan van de plaatselijke Friese maten (aam,anker, friese kan, mengel, pegel; oxhoofd en toelast).
Eerst wordt de inhoud van een cilinder berekend: vul een recht vat met een kubiekgetal - een derdemacht van een geheel getal - halve kannen; de zijde van de kubus die deze hoeveelheid kan bevatten volgt door het trekken van de derdemachtswortel uit de cilinderinhoud: hiermee hebben we dan de"eerste kubiekmate" van de gebruikte hoeveelheid vloeistof.
Daarna wordt een stok om de lengte van een vat te meten gemaakt: de "Lengdestock", verdeeld in 10 primen, die ieder weer uit 10 seconden bestaan. Ter gerustestelling verklaart de la Rose dat deze maat perfekt is bevonden, net als de beide nog te bespreken kwadraat- en kubiekroeden, met behulp van bovenstaande methode. Bovendien hebben dr. Adriaen Metius zaliger en anderen dit met vele experimenten bevestigd. Op dit punt van zijn betoog spreekt de la Rose zich uit voor de decimale notatie: "yder zij gesecht dat wij onse rekeninghen aenstellen na de thiende rekeninghe/als de beste/in desen ghevalle/ende de lichtste". Tussen de cijfers in deze notatie plaatst de la Rose : bijvoorbeeld 2:4:6 voor 246 of 2,46.
Als we de inhoud van een bekend vat delen door zijn lengte - neem de dikte van de bodems gelijk aan 1 x een uitstekende kim - dan vinden we het kwadraat van de inhoudseenheid die we gebruiken. Als we ook nog de "ge-equeerde of vergelijkte diepte", het gemiddelde van de sponds- en de gemiddelde bodemsdiepte, bepalen, kunnen we met de regel van drieën en de middenproportie de diepte op de lengtestok voor een willekeurige diepte bepalen:

$$d_{eq} = bo + (bu-bo)/2$$

Het kwadraat van de volume-eenheid op de lengte-stok wordt dan de middenproportie van d_{eq} en $d_{eq}/$ (volume/lengte), dus de wortel uit het produkt.
Dit wordt dan uitgedrukt in gehelen, primen, secunden en tertien, bijvoorbeeld 1:7:4:5.
Voor een willekeurige andere inhoud i vindt men op de kwadraatroede de bijbehorende diameter door

$$d_i = (d^2_{eenheid} \quad x \quad i \ / \ eenheid)^{\frac{1}{2}} \qquad [131]$$

uit te rekenen. We worden aangespoord om twee stokken te maken, van ongeveer 3½ houtroeden lang, ieder in 100 gelijke delen verdeeld, om voor vaten van 10 friese kan en 4 friese kan te dienen. Een worteltabel wordt daarna aangeboden lopend van 1/10 tot 2 in stappen van 1/10; 1 = 100 gesteld. Hiermee kan men dan de "Cylinder Visier/ofte Quadraet-Roede" maken, door de wortels uit te zetten op de stokken. Het gebruik van de term Visier zou kunnen wijzen op bekendheid met duitse wijnroeiteksten. De la Rose geeft de

voorkeur aan de benaming "Quadraet-Roede", want om de inhoud van cirkels (=oppervlakte van cirkels) te meten kwadrateert men de diameter, in overeenstemming met stelling 2 van boek 12 van Euclides, verklaart de la Rose.
Daarna kunnen voorbeelden van het gebruik van deze "pegel-roeden" gegeven worden, met illustraties van vaten en schema's hoe de maten van spondsdiepte en bodemsdiepte op de stok worden genomen; deze doet denken aan het werken met de mediaal in duitse teksten, maar de la Rose vertelt niet hoe we zonder berekening het gemiddelde van twee lengten kunnen vinden.
In een enkel geval wordt de beschreven methode aangepast, "doordien dat de deelen der Quadraet-Roede wat ongelijck zijn/moeter noch een equatie in ghetalen geschieden"; impliciet blijkt de la Rose hier de kegelstomp-benadering toe te passen:

$$(((bu_{QR}+bo_{QR})/2)_{QR} + 1/3((bu_{QR}+bo_{QR})/2-((bu_{QR}+bo_{QR})/2)_{QR})xL_{LS} \qquad [132]$$

met QR= Quadraet-Roede en LS = lengdestock; de middelingen op de QR zijn weer met$()_{QR}$ aangeduid.
In moderne formulevorm staat hier:

$$(\frac{pi}{4}\ ((bu+bo)/2)^2 + 1/3(\frac{pi}{4}(bo^2+bu^2)/2-\frac{pi}{4}((bo+bu)/2)^2))\ x\ L \qquad [133]$$

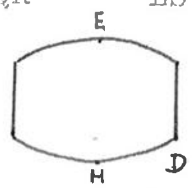
$$= pi\ L/12\ (bo^2 + bo\ x\ bu\ x\ bu^2)\ :\ \text{de kegelstomp.}$$

In een exempel wordt aangetoond, dat werken met de roede voor 4 kan dezelfde resultaten geeft als voor 10 kan.
Omdat de binnenlengte moeilijk te vinden is, wordt een methode om deze te bepalen voorgesteld, die stilzwijgend op de stelling van Pythagoras berust:

$$((ED_{QR} - EH_{QR})\ x\ 2)_{LS} = L_{inwendig} \qquad [134]$$

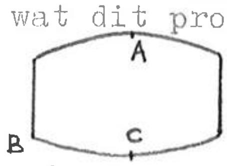
(zie figuur)

figuur [65]



De tweede manier om vaten te roeien is de volgende - mits de vaten wel geproportioneerd zijn : de steeklijn en de spondsdiepte, gemeten met een lineaire schaalverdeling geven een maat voor de inhoud van het vat, als we eenmaal weten wat dit produkt voor een vat met bekende inhoud is (ijking):

$$AB_{LS}^2\ x\ AC_{LS} \propto \text{inhoud} \qquad [135]$$



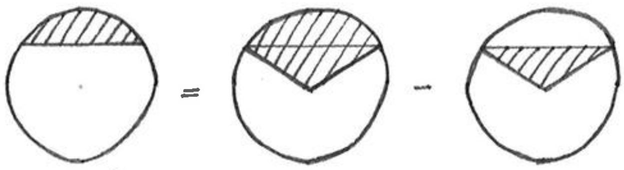
Hier wordt de inhoud dus algebraisch berekend.
De derde manier is die met de kubiekroede, waarbij geen berekeningen nodig zijn. Bij een vat van bekende inhoud wordt de steeklijn - dit is de diagonaal van het halve vat - gemeten. De kubiekmaat voor een volume-eenheid (hier de anker = 10 kannen) wordt dan bepaald door

$$\text{cubiekmaat van volume-eenheid} = (\text{steeklijn}^3/\text{inhoud})^{1/3} \qquad [136]$$

te berekenen.
Deel deze kubiekmaat in 100 gelijke delen en maak de stok af met een derdemachtswortel-tafel, die voor 1/10 - 3 en voor 1 tot 40 gegeven wordt met stappen van 1/10 respectievelijk 1.
Vaak wordt in de tabel afgekapt in plaats van afgerond: dit is

begrijpelijk want de wortels zullen met de staartoperatie gevonden zijn: een moeizaam karwei, waarvan het resultaat tot de laatst verkregen decimaal wordt weergegeven. Als de steeklijnen ongelijk zijn,middel dan hun aflezingen op de stok.
Een waarschuwing dat ee kubiekroede alleen voor een soort vaten, namelijk gelijkvormige, kan dienen , is hier opzijn plaats: wie tot op"seconden" precies wil roeien, moet ten minste twee verschillende kubiekroeden hebben.
Het tweede capittel is gewijd aan het pegelen van gedeelten van vaten. Eerst wordt de "fondamentele rekeninghe", maar de la Rosé merkt op, dat dit "moeyelick/nochtans doenlijck/ (is) aenghesien een Vat is een ongeschikt Lichaem/bestaende van circulaire Elliptische/ende andere cromme Linien."
Het besef dat hier een theoretisch,stereometrisch probleem ligt bleef dus niet beperkt tot een Kepler.
Uit de voorbeelden blijkt welke methode bedoeld wordt: de diepte bij spon en bodem wordt op de lineaire lengtestok gemeten en gemiddeld tot wat weer "gheequeerde diepte" heet.
Door stilzwijgende toepassing van de stelling van Pythagoras wordt de halve koorde van de vloeistofspiegel in het gemiddelde vat berekend - zie figuur .
In een sinustafel, die hier ontbreekt, moet de bijbehorende hoek worden opgespoord, waarmee het oppervlak van de cirkelsektor gevonden wordt; hiervan moet nog een driehoek worden afgetrokken om "des vats wannigheydt" te vinden.

figuur [67]



In formule-vorm zou dit neerkomen op:

$$\underbrace{(((bu+bo)/2-(wan-(bu-bo)/4))\times(wan-(bu-bo)/4))}_{\text{halve koorde}} \times 10^5/((bu+bo)/4) \qquad [137]$$

$$\text{-----sinustafel voor } r=10^5\text{-----}\times \frac{\pi/2.((bu+bo)/2)^2}{90^\circ} = \text{oppervlak}$$

cirkelstuk.

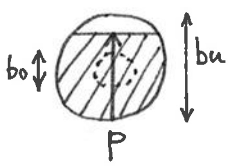
$$\text{Des vats wannigheydt} = \text{Inhoud}_{vol}/(\pi((bu+bo)/2)^2)\times$$

$$(\text{oppervlak cirkelstuk} - \text{halve koorde}\times((bu+bo)/4-(wan-(bu-bo)/4)))$$

[138]

Aan twee voorbeelden wordt de procedure toegelicht. Ook als het nat juist de kimmen raakt is er geen probleem, maar stijgt het hierbovenuit of staat het aan de onderkant van de bodems, dan is een andere methode nodig, die er informulevorm als volgt uitziet:

$$\text{Inhoud}' = P_{QR}\,\frac{L\,(bu-p)}{(bu-bo)/2} \qquad [139]$$



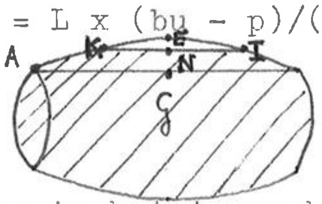
$$\sim \frac{bu-p}{(bu-bo)/2}\times \text{Inhoud}_{vol} = \text{Inhoud}'' \qquad [140]$$

Deze Inhoud' of Inhoud" wordt gebruikt om het "wanne"deel van het vat uit te rekenen, en wordt in plaats van Inhoud_{vol} in de rechterleden van formules [138] of [125] en [126] gebruikt.
Als enige achtergrond wordt een twee-dimensionale benadering van het vat als kegelstomp aangegeven: (driehoekbenadering)

$$EG : AG = NE : KN \qquad [141]$$

of

$$KI = L \times (bu - p)/((bu-bo)/2)$$



figuur(69)

Nog beter is het te werken met

$$\text{Inhoud}''' = \text{Inhoud}'' \; (1 + f(\text{Inhoud}'')) \qquad [142]$$

waarin f de korrektiefaktor is; uit een tabel die de la Rose hier voor deze korrektiefaktor geeft, blijkt dat

$$1/30 < f < 11/80 \qquad [143]$$

(Inhoud"=20 kan 140 kan)

- hierdoor wordt stilzwijgend de onderschatting, die de kegelstompbenadering met zich mee brengt, te niet gedaan.
In een voorbeeld met bu=236, bo=186, zodat d_{eq}=(bu+bo)/2=211 en p=220 voor een vat met volle inhoud van 39 kannen wordt dit gedemonstreerd: p_{QR}=159 op de stok voor 10 kannen, hetgeen leidt tot Inhoud' = 25,3 kannen; Inhoud"=25,25 kannen en Inhoud'''= 25,31 kannen.
Nu wordt het cirkelsegment met hoogte 8 =(bu-p)/2 van een cirkel met diameter 220 = p uitgerekend. Het resultaat is 25,3 kannen maal de oppervlaktefractie van het cirkelsegment is 0,3 kan of 5 pegels. Dus

Wanne inhoud = Inhoud' x fractie cirkelsegment (hoogte=(bu-p)/2, straal = p/2) [144]

De la Rose vindt het kennelijk niet de moeite waard hier zijn verbeterde waarde Inhoud''' te gebruiken.
Om de "operateur" te verlossen, zijn de cirkelsegmenten nodig voor de lege inhoud in een "pegheltafel" getabelleerd.
Een cirkel met doorsnede 100 heeft oppervlakte ("inhoud") 785400 - de la Rose was precieser geweest, als hij het getal van Metius had gebruikt : 355/452 leidt tot 7853982. Weer wordt de methode van cirkelsector en driehoek gebruikt om het cirkelsegment uit te rekenen, maar hier zonder impliciet gebruik van de stelling van Pythagoras: de driehoekszijden worden met een sinustabel uitgerekend.
De pegheltafel geeft bij een "pijl" lopend van 20 - 500 (de straal van de genormaliseerde cilinder is 500) de oppervlakte van de bijbehorende cirkelsegmenten als de genormaliseerde inhoud 1000 is. Met voorbeelden wordt aangetoond dat dit tot vrijwel dezelfde uitkomsten leidt als directe berekening van de cirkelsegmenten; stilzwijgend wordt lineaire interpolatie toegepast bij het hanteren van de pegheltafel.
Het recept voor de berekening van de inhoud als het nat onder of boven de kimmen staat, luidt nu:

[145]

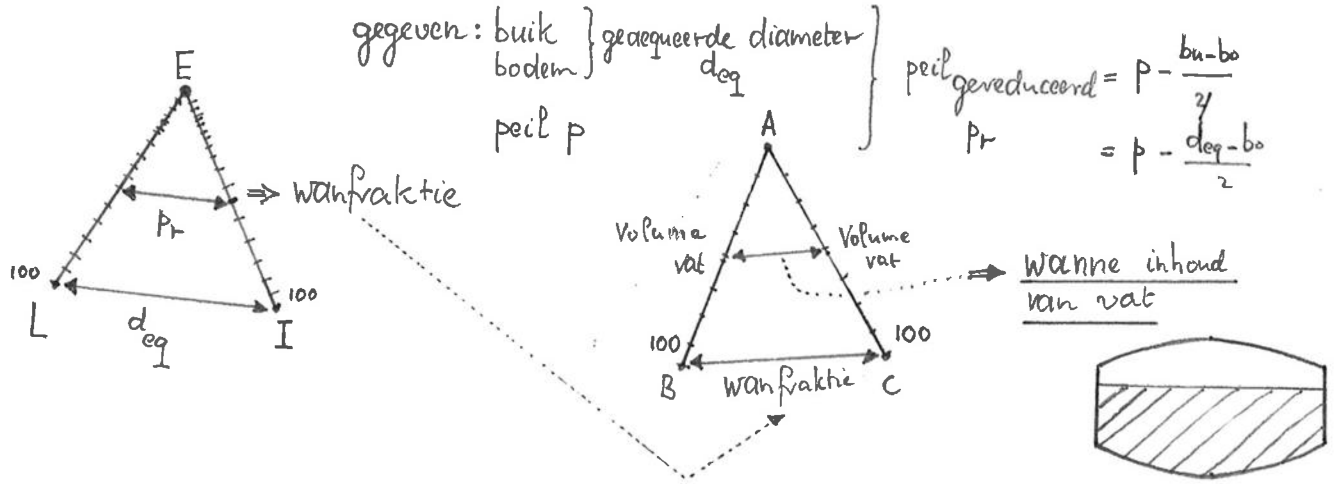
$$\frac{1000}{\text{nats hoogte}} \times \frac{\text{wan}}{2} \longrightarrow \begin{array}{l}\text{tafel}\\ 2R=1000,\text{Inhoud}=1000\end{array} \longrightarrow \times\text{Inhoud}'$$

= Wanne inhoud

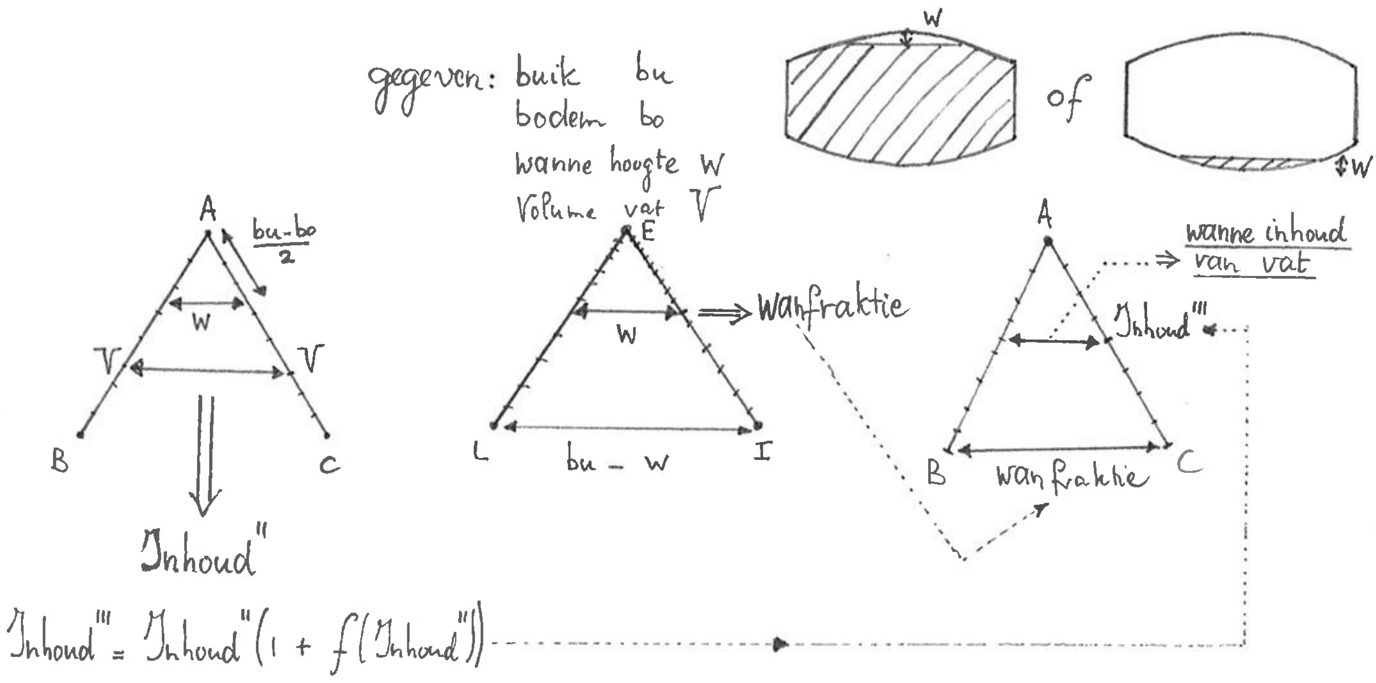
Om te pegelen zonder berekening, wordt nu de konstruktie van een meetpasser besproken - enerzijds om nieuwsgierigen te bevredigen die zich afvragen hoe dat mogelijk is, anderzijds om diegenen te hulp te komen die hun eigen rekenvaardigheid wantrouwen. Met deze passer is het mogelijk om te pegelen, al heb je nooit Arithmetica geleerd.
Waarschijnlijk heeft de la Rose deze passer van Metius, wiens "inventie" in deze scriptie eerder besproken is, overgenomen, maar de la Roses bron wordt niet vermeld. De la Rose beschrijft de passer uitvoeriger en past ook zijn korrektiefaktor, die ik eerder - vergelijking 143 - f noemde toe. De tabellen nodig voor het maken van de passer, met benen van minstens 3 houtvoet, zijn vrijwel dezelfde als bij Adriaan Metius.
De passer bestaat weer uit 2X2 schaalverdelingen, op elke zijde van een been een; de benen AB en AC dragen een lineaire schaalverdeling 1 - 100 en worden gebruikt om de regel van drieën toe te passen, de andere kant van de benen EL en EI dragen de niet-lineaire verdeling die uit de pegeltafel is afgeleid.
De la Rose geeft drie soorten toepassingen van de passer:

1. wanmeting als het nat tussen de kimmen staat
2. wanmeting als het nat onder of boven de kimmen staat
3. vervaardiging schaalverdeling voor een pegelstok voor een vat met bekende volle inhoud en sponds- en bodemsdiepte; dit komt neer op "conversie en ontbindinge" van de vorige methoden.

In figuur 70 is het gebruik van de passer geïllustreerd.

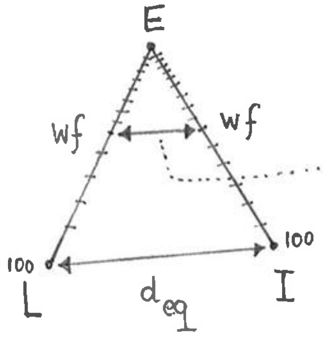


figuur [70]: het gebruik van de la Roses meetpasser (1639)



gegeven: buik bu, bodem bo $\Big\}$ $d_{eq} = \dfrac{bu + bo}{2}$

gewenste wanfractie wf



$\Longrightarrow$ peil gereduceerd Pr

$Pr + \dfrac{bu - bo}{4}$ = echte peil $\longrightarrow$ schaalverdeling pegelstok.

Met de derde toepassing van de passer kan voor ieder bijzonder vat een pegelstok gemaakt worden - er worden enkele voorbeelden gegeven - maar ook met perfekte pegelstokken zijn veel vergissingen mogelijk -, "ick laet staan d'onperfecte/daer veel nochtans haer op vertrouwen". De la Rose noemt de volgende valkuilen:

- vaten met dezelfde inhoud kunnen verschillende spondsdiepten hebben; toch is de stok maar voor een diepte gemaakt.
- vaten van verschillende inhoud kunnen toch dezelfde spondsdiepte hebben.

Daarom wordt er door sommigen een reductie toegepast, die, merkt de la Rose op, niet geheel juist kan zijn, daar de verdeling van de pegelstok niet-lineair is.

Pas dus op met pegelstokken ! Dit dient ook tot een waarschuwing aan hen "die scrupuleus begeeren te gaen in't pegelen/datse haer op gheen Peghel-Stocken betrouwen:Want/ die perfect seght/verstaet 'tselve nae de Konst:Mathesis nu/en laet geene alderminste onperfectheyt toe: Derhalven macher aen 't perfect oock niet een hayrken failleren."

Het boekje besluit met een omrekentabel van West-Europese wijnmaten naar de Friese kan; we zull en deze later bij Klaas Piekes de Graad terugvinden.

Omdat de laatste bladzij in het door mij gebruikte exemplaar ontbrak, is niet duidelijk hoe de voorbeelden van het gebruik van deze tafel aflopen.

5 c. C.F. Eversdijck : Tafelen van de Wanne-mate (1655)[116]

Cornelis Fzn Eversdijck (1586 - 1666)[109] was rekenmeester te Middelburg en als zodanig een leerling van Jan Coutereels; hij is burgemeester van Goes geweest en examineerde voor de Staten van Zeeland landmeters tot 1666. Er zijn 8 publicaties van hem bekend, waaronder Tractaet vander Wijnroede, Middelburg 1613, dat niet in deze scriptie besproken wordt.

Het werkje dat ons hier interesseert, gaat uitsluitend over het peilen van gedeeltelijk lege "Kantighe Vaten", zoals de titelpagina onthult (zie figuur 71). In de toelichting[117] bij de tabellen wordt uitgelegd hoe een vat met een bekende sponds- en bodemsdiepte tot de gedaante van een "pilaer" (cilinder) kan worden teruggebracht, "hoewel dat er nochtans wat op te zeggen valt", voegt Eversdijck hier aan toe. Een nadere bestudering van de vatvorm zal elders geschieden, belooft hij. De lengte van het vat speelt geen rol bij de middeling.

Daarna wordt ingegaan op de meetroede van de wannemate. Eversdijck definieert een "wijnroyersvoet" als de zijde van een "teerlinck" die 10 stopen bevat. Elke voet wordt in 100 gelijke delen onderverdeeld. Experimenteel vindt men deze voet door een haakse bak te nemen, te meten hoeveel "teerlinck deelkens" erin gaan, dit aantal

2

TAFELEN,
VANDE
WANNE-MATE,
WAER DOOR
Met weynigh moeyte, ghevonden kan werden de *Reste* en *Wannigheydt* van alle Kantighe Vaten.

DOOR
CORNELIS FR. EVERSDYCK, Reken-meester 's Landts ende Graeffelijckheydts van ZEELANDT.

TOT MIDDELBURGH,
Ghedruckt, By JAQUES FIERENS, Boeck-verkooper, woonende inde Gist-straet, inde GLOBE, Anno M DC LV.

Figuur (71)

Titelpagina van Eversdijcks pegeltabellen. (1655)
In het vignet zien we onder andere het gebruik van de kubiekroede

met 10 te vermenigvuldigen - een teerlincks voet is immers 10 stopen - en de derdemachtswortel te trekken. Er volgen uitvoerige numerieke voorbeelden, waarin met Bloysche roeden, Goese, Middelburgse en Rijnlandse voeten en Middelburgse stopen korrekt gerekend wordt om deze wijnroeiersvoet te vinden. De fijnere berekening met kubussen van 1 stoop inhoud leidt tot een te kleine verdeling.
In de paragraaf gewijd aan het gebruik van de tafelen geeft Eversdijck, na een meetvoorschrift voor de sponds-, bodems- en natsdiepte met de verdeling van de gelijke delen, diverse voorbeelden. Het recept blijkt te zijn:

$$\frac{4\ p - (bu - bo)}{bu + bo} \times 1000 \dashrightarrow \text{tafel} \dashrightarrow \times \text{ inhoud vol}/1000 \qquad [146]$$

De tafel voor de oppervlakte van cirkelsegmenten is genormeerd op een volle inhoud van 1000 stopen bij een diameter van 2000 delen; zo is [146] in overeenstemming met de formules [125], [155] en [163] van de andere auteurs van wijnroeiteksten, die een ander genormeerd vat in hun tabel gebruikten.
Voor het bijzondere geval dat er bijna niets of haast alles uit het vat is, moet een andere weg bewandeld worden; gaat het om vaten die praktisch cilindrisch zijn, als de Franse en "Rijnse" vaten, dan is de speciale methode nauwelijks "de pijne" waard, maar voor Spaanse wijn- en olievaten met een grote buik en kleine bodems scheelt het veel.
Dus als

$$\text{natshoogte} < (bu-bo)/2$$

of

$$\text{natshoogte} > (bu+bo)/2 \qquad [147]$$

neem dan

$$p/(bu-p) \times 1000 \dashrightarrow \text{tafel} \dashrightarrow \times \frac{p \times \text{Inhoud vol}}{(bu - bo)/2} \times 1/1000$$

als "de reste".
Onder verwijzing naar Euclides, 12^{e} stelling van het 12^{e} boek, wordt dit kort toegelicht; de inhoud van het "verminderde of afgekortte vat" - zie figuur - is gedefiniëerd als

$$\text{Inhoud}' = p / (\ (bu-bo)/2) \quad \times \text{ volle inhoud}$$

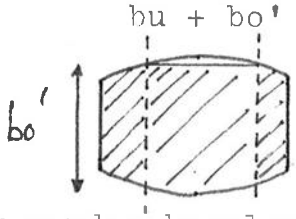
$$= (bu - nat)/\ ((bu-bo)/2) \times \text{Inhoud} \qquad [148]$$

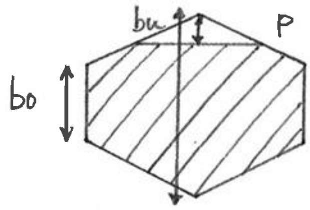
De nieuwe bodemshoogte van dit vat "tussche twee ge-imagineerde perpendiculaer-linien" is dan

$$bo' = bu - 2\ p$$

zodat met [146]

$$\frac{4\ p - (bu - bo')}{bu + bo'} = p / (bu - p) \qquad [149]$$





figuur [72]

Er worden komplementaire voorbeelden gegeven, de ene keer met een kleine wanshoogte, de andere met een kleine natshoogte.
De komplementaire formule luidt dan:

$$(bu - nat) / nat \times 1000 \dashrightarrow \text{tafel} \dashrightarrow \times \text{ inhoud}'/1000$$

Hoe goed is deze benadering ? Eversdijck spreekt in de titel en ook later van kantige vaten, zonder dat duidelijk is wat hij hier precies onder verstaat; laten we aannemen kegelstompen, die aan hun grondvlak zijn samengevoegd.
Aan de hand van figuur [72] kunnen we de volgende formules afleiden

We hebben in dit geval

$$p < (bu-bo)/2 = bu(\tfrac{1}{2}-\tfrac{1}{2}(1-t)) = bu\ t\ /\ 2 \qquad [150]$$

als

$$bo = (1-t)bu \qquad 0 < t < 1 \qquad \text{(t is een vat-parameter)}$$

De verhouding van de inhouden van kantig vat en afgekort kantig vat wordt:

$$\frac{\text{afgekort}}{\text{gewoon}}\ \text{vat} = \frac{p}{(bu - bo)/2}\ \frac{3\ bu^2 - 6\ bu\ p + 4\ p^2}{bu^2 + bu\ bo + bo^2}$$

$$= \frac{2\ p}{t\ \ bu}\ \frac{1 - 2\ p/bu + 4/3\ (p/bu)^2}{1 - t + t^2\ /\ 3}$$

$$= s\ \frac{1 - s\ t + t^2\ /\ 3}{1 + t + t^2\ /\ 3} \quad \text{als } p = stbu/2, 0<s<1 \text{ (s is een vullingsparameter)}$$

$$= s + st(1 - s) + O\ (t^2) \qquad [151]$$

$$= s \text{ volgens Eversdijck } [148] \ .$$

Dit is dus zelfs niet in eerste orde van s korrekt; bij een bijna cilindrisch vat is t klein en draagt de tweede term in [151] weinig bij zodat Eversdijcks benadering in de limiet t=0 geldt; maar dan is zijn benadering overbodig. De procentuele fout is het grootste voor kleine s (20% voor s=1/10, t=4/25):

	t=2/25	t=4/25
s=.1	.11	.12
.25	.27	.29
.50	.52	.54
.75	.77	.79
1.	1.	1.

De meest linkse kolom geeft Eversdijcks benadering; de andere kolommen geven de exacte verhouding van het afgekorte en het gewone vat. **Dus voor kegelstompen die bijna cilindrisch zijn toch een redelijke benadering.**

Met behulp van een tweede tafel kunnen de "resten" van alle kantige vaten met iets minder grote nauwkeurigheid worden afgelezen voor drie soorten vaten: buik/bodem = 21/25, 22/25 en 23/25 ; de laatste verhouding hebben de Orleaanse en Tossaanse oxhoofden. De tafels zijn genormeerd op een inhoud van 100 stopen bij een spondsdiepte (buik) van 1000 delen.
Uiteraard worden voorbeelden gegeven; de spondsdiepte en de natshoogte worden met de gelijke delen opgenomen. Gedeeltelijk zijn dit al eerder door Eversdijck gegeven voorbeelden; er wordt lineaire interpolatie toegepast.
Tevens worden voorbeelden gegeven hoe ronde putten en ronde brouwerskuipen geroeid moeten worden. Deze tweede tafel is een uitwerking van de eerste. Eversdijck zegt dat de nauwkeurigheid ½ of 1/4 stoop is op de 100 , dus beter is dan ½ %. De procedure is weer

$$p/bu \times 1000 \text{ --- tafel --- } \times \text{inhoud}/100 \qquad [152]$$

Het boekje besluit met een vergelijkingstabel van de natte maten in verschillende steden.

5 d C.M. Anhaltin : Oprecht,Grondich en Rechtsinnigh Schoolboeck van de Wijn-Royerijen (1663)[118]

Christiaan Martinii Anhaltin (1603 - na 1676) was wiskundige en zeevaartkundige te Embden en Amsterdam; in de laatste plaats gaf hij als rekenmeester les. Diverse boeken verschenen van zijn hand, vooral over navigatie en ook dit wijnroeiboek, dat deel uitmaakt van de polemiek waarin hij en andere Amsterdamse wiskundigen gewikkeld waren met hun collega Cornelis Saskersz. van Leeuwen.[119] Ook de drie zonen van Anhaltin waren in Nederland en Duitsland in het onderwijs en de toegepaste wiskunde actief.[109]
Op de titelpagina (zie figuur 73) blijkt de oorsprong van het boekje: het is gericht tegen "dat verbrodde Schoolboeck van Wijnroeyerijen...door Cornelis van Leeuwen" , dat in deze scriptie niet besproken wordt. Anhaltins boek bevat tevens een antwoord op van Leeuwens Bril voor de Amsterdamsche Belachelijke Geometristen. Bij wijze van reclame meldt Anhaltin dat hij les geeft in een karakteristieke kombinatie van vakken (zie figuur(73)). Net als zijn concurrent van Leeuwen is hij gevestigd op de Zeedijk te Amsterdam.

figuur(73)

Oprecht, Grondich en Rechtsinnigh
SCHOOL-BOECK
Van de
WYN-ROYERYEN.
Waer inne geleert wordt:
Het meeten van alle Soorten van Vaten / door de Quadrat en Cubicq-roeden / met de Wannigheydt van alle soorten der ronde Vaten / noch oock mede den inhout van Regen-backen / Brouwers-kuypen / Bekers en swaerte van Ysere Kogels / met het maken van den Roep en Duymstok tot Bosschieterye.

Als oock
Den *Quadrat* en *Cubicq-Tafel*,
Tegens dat verbrodde, valsch en niets doogende, den Maker selfs niet verstaende Schoolboeck van Wijnroeyeryen, onlanghs uytgegeven door *Cornelis van Leeuwen*, Geswooren, &c. op de Zeedijck. Met een antwoordt op sijnen BRIL voor de Amsterdamsche Belacchelijcke Geometristen.

Door
CHRISTIAEN MARTINII ANHALTIN,
Oprecht School-houdende in de Konst van Cijfferen / Geometrie / Landtmeeten / Fortification op Landt af te steecken / Italiaens en Scheeps-Boeckhouden: tot Amsterdam, op de Zeedijck daer de Konst-School uythanght en de Stuurman op de Stock staet.

Met naerder uytschrijvinge van Oost en West-vindinge.

t'AMSTELREDAM,
By HENDRICK DONCKER, Boeckverkooper en Graetboogh-maker, in de Nieuwebrugh-steegh, in 't Stuurmans Gereetschap. ANNO 1663.

Het wijnroeiboekje is opgedragen aan 7 kooplieden en wijnhandelaars die buren van de auteur zijn: hun nering vormde de inspiratie. Daarna volgt een lofdicht op dit boek door "Le Theodore", en dan komt een Halfslapende Aenspraecke over de Bril voor de Amsterdamsche Brillachende Geometrist.
Voor ons is het volgende van belang: we leren hoe we wortel moeten trekken ; in de eerder besproken werken werd dit niet expliciet uitgelegd. Onder elke even plaats van een cijfer van achteren af wordt een stippel gezet, waarna de staartoperatie wordt toegepast. Met een omslachtig verhaal wordt zo ook de derdemachtswortel behandeld, met uiteraard nu onder elk derde cijfer van achteren een stip.
Dan kunnen we de kwadraatstok maken, met behulp van een langwerpig vat waarvoor we de gemiddelde diameter nemen. Voor pi wordt 314159265358979, dus tot 13 cijfers korrekt.
Uit het kwadraat van de gemiddelde diameter vinden we met deze waarde de "midde lronts quadraet puncten". Na vermenigvuldigen met de lengte van het vat vinden we het aantal kubische puncten behorend bij de inhoud van dit vat; dit was geijkt op 1 amsterdamse steekan = 16 mengelen. Maar we moeten het volume van de stok aftrekken !
Door deling van de kubische punten door het aantal kwadratische voor het eerste mengel vinden we de "langhe mate" diè bij de inhoud van een vat van 1 steekan = 16 mengelen hoort.[122]
Met de methode van de transversalen wordt het aantal kwadraatpunten voor het eerste mengel in 100 gelijke delen verdeeld; een passer dient om uit een worteltabel de juiste afstanden voor 1, 2, 3 en 4 enzovoorts mengelen op de stok aan te brengen.
Op de andere zijde van de stok wordt de"langhe mate" aangebracht; de eerste kwadraatmaat moet overigens groot gekozen worden om fouten te minimaliseren.
Anhaltin gebruikt soms . of : als scheider van het gehele getal en zijn decimale breuk.
Het roeien zelf met deze kwadraatstok geschiedt door de lineaire maat van bodems en spondsdiepte te middelen - Cornelis van Leeuwen middelt de kwadraat-maten, merkt Anhaltin minachtend op -deze gemedieerde diepte op de kwadraatstok te nemen, en het afgelezen bedrag met de juiste lengte van het vat te vermenigvuldigen; het recept luidt dus:

$$\text{Inhoud} = (((bo1+bo2)/2+bu)/2)_{QR} \times (L-(K1+K2+2BD) \quad [153]$$

waarin QR = aflezen op de kwadraatroede
Ki = de i-de kim, i = 1,2
BD = bodemsdikte (het gaat om de binnenlengte van het vat)

Ook Adriaan Metius leerde deze methode: "doe als Adriaan Metius", beweert Anhaltin; mogelijk doelt hij op vergelijking 120 .
Uit de voorbeelden blijkt dat Anhaltin lager uitkomt dan van Leeuwen, ook in het geval dat de roede te klein is voor een vat dat wel gelijkvormig is met de voorgaande exempels, schrijft Anhaltin.
Om een"Wijnroede, door den Cubicq-wortel" te maken, neemt men een groot vat - stel van 308½ mengelen - waarvan men de inhoud met de kwadraatroede te weten is gekomen. Met wat wij de stelling van Pythagoras zouden noemen, vindt Anhaltin uit de lengte en de gemiddelde diepte van het vat door kwadrateren en worteltrekken de lengte van de diagonaal vanuit het spongat.
Na vermenigvuldiging met het aantal puncten voor 1 mengel op de "langhe maat", krijgen we het aantal punten dat met de diagonaal correspondeert. Anhaltin neemt 14 cijfers achter de decimale punt mee, maar maakt geen rekenfouten, blijkt bij kontrole ! Met de

Tot slot wordt de zwaarte van ijzer en van ijzeren kogels behandeld: het soortelijk gewicht van ijzer = .243 pond Amsterdams/kubieke duim.
Met behulp van de kubiektafel kan met de passer een "talstok" gemaakt worden voor ijzeren kogels met een schaalverdeling in ponden.

5. e. K. P. De Graad : De Nieuwe en vermeerderde Roykunst (1679)[123]

Blijkens de titelpagina (zie figuur 74)is de Graad "ingenieur, Geadmitteerde Landmeter en Wijnroyer". In zijn "Tot den Leezer" wordt ons een indrukwekkende fresco geschilderd van de achtergrond waartegen de wiskunde zich afspeelt: zij berust op onbeweeglijke fundamenten en in on misbaar voor:
"..Handwerken:timmerlieden, metselaars, steenhouwers etc;Coopmanschappen";zeevaart,tijden en stonden te onderscheiden; zelfs om het vaderland te beschermen tegen vijanden - bedoeld is de vestingbouwkunde. De "Roykonst" dient ervoor dat koper noch verkoper schade lijdt. Met behulp van oude en nieuwe, onder andere latijnse "auteuren" is dit boekje samengesteld, verklaart de Graad, met vermelding van "fondamenten" als bewijzen van Archimedes en de transformaties van figuren. De Graad laat ook weten dat hij school houdt in: cijferen, navigatie, wijnroeien, fortificatie,"bosschieterij", astronomie en de aankleve van dien, waarmee een overzicht is gegeven van wat men in het algemeen onder wiskunde in de zeventiende eeuw verstond.
De hoofdtekst opent met een recept voor het trekken van de kwadraatwortel: telkens worden twee "letters" van achteren af in het getal apart gezet, waarna via de bekende staart-operatie de wortel gevonden wordt. Voor het maken van de kwadraat-tafel is ook de regel van drieën nodig; de Graad noemt verschillen tussen zijn tafel en die van C.M. Anhaltin: die nam 1^e mengel = 10 delen, in tegenstelling tot de Graad, die 1^e mengel = 1000 neemt.
Voor het maken van de kwadraatstok is door de stadspegelaar een "cubic" van 3/2 x 3/2 x 3/2 houtvoet gevuld met 43 3/4 halfkan Fries. Als de proportie van A. Metius vader: "113 geven 355" voor pi gebruikt wordt, is het mogelijk de inhouden van cilinders en van vaten te bepalen. Uit de voorbeelden blijkt dat:

$$\text{Inhoud} = (((bo1+bo2)/2+bu)/2)_{\text{Quadraat Roede}} \times (L-(D+K1+K2) \qquad [157]$$

met D = bodemsdikte
Ki= lengte uitstekende kim i , i = 1,2
Deze vergelijking stemt overeen met [153] van Anhaltin, die de Graad naar eigen zeggen bestudeerd heeft.
Er wordt gewerkt met mingels der diepte - met de kwadraatstok te vinden - en mingels der lengte. Voor het bepalen van de "wannigheid" wordt de tabel van "Sybrandt Hanzen Cardinaal"[110] te hulp geroepen - opgemaakt voor de cirkelsegmenten met een hoogte lopend van 1 tot 500 (de halve straal) bij een cirkeloppervlak van 1000 eenheden. Ook de Graad legt met een voorbeeld uit hoe je zo'n cirkelsegment met "synus" en driehoeken vindt - zie pagina .
Weer wordt vaak afkapping in plaats van afronding toegepast.
Er volgen voorbeelden voor vaten, waarin het nat onder en boven de helft van het vat staat; er wordt opgemerkt dat dit komplementaire situaties zijn. Voor de situatie dat het nat onder de onderste of boven de bovenste kimmen staat wordt stilzwijgend de methode van vergelijking [155] en [156] gevolgd.
Voor het maken van een pegelstok moet de volle inhoud van het te pegelen vat bekend zijn. Er wordt een voorbeeld uitgewerkt hoe zo'n stok gemaakt moet worden voor een vat van 10 vierendeel.

DE
Nieuwe en vermeerderde
ROYKONST,
Inhoudende de Grond, en Fundament, om alderhande Vaten te Royen, zoo Vol als Wan-Vaten; en dat door de Cubic en Quadraat en Wan-stokken,

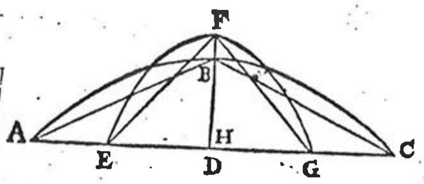
En ook

Door de Voet-maat, alderhande inhouden te vinden, zoo van Bakken, Brouwers-kuipen, Bekers, Fluyten, &c.

MITSGADERS, Alles

Met verscheidene *Demonstratien* verklaart; zoo van *Archimedes*; als nieuwe inventen, zoo *Ovalen*, *Parabols*; en *Cirkels*, *&c.*

By een-gestelt
DOOR
KLAAS PIEKES de Graad, *Ingenieur*, *Geadmitteerde Landmeter en Wijn-Royer* In HARLINGEN.



t'AMSTELREDAM,
By HENDRICK DONCKER, Boekverkooper en Graadboogmaker, in de Nieuwebrug-steeg, in 't Stuurmans Gereedschap. ANNO 1679.

Figuur(74)
Titelpagina van het wijnroeiboek van K.P. deGraad (1679).[123]
Het is door dezelfde uitgever, Hendrick Doncker uitgebracht die Anhaltins tekst in 1663 publiceerde.

Bij elk vierendeel wordt het bijbehorende cirkelstuk gevonden, en daarbij een "Pijl", zodat Cardinaals tafel nu in de andere richting gebruikt wordt. Bij deze peil vindt men de schaaldelen van de stok als:

$$\text{pijl} \times \frac{(bu + bo) / 2}{1000} + (bu - bo)/4 \qquad [158]$$

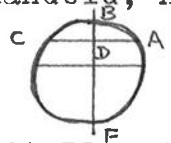
(Vergelijk hoe de la Rose hiervoor zijn proportionele passer gebruikte.) Bijvoorbeeld: inhoud = 40 halfkan = 10 vierendeelen; buik = 360, bodem = 320; voor het eerste vierendeel 1000/10 = 100 dit in tabel opgezocht, geeft pijl = 156; 156 x((360+320)/2)/1000 +40/10 = 63.
Hierna wordt geleerd hoe men een derdemachts- of "cubic" wortel moet trekken met de staart-operatie: net als bij Anhaltin in groepjes van drie de cijfers groeperend. Met de regel van drieën kan men een cubictafel maken uitgaande van 1 vierendeel = 1000 delen. Daarna geeft de Graad een tafel van derdemachtswortels van 1 tot 100. "De Cubic-stokken te gebruiken/is een veerdig werk: Maar dient grote voorsichtigheid toe/om te gebruiken:Want tot elke soorte van Vaten diende wel een stok gemaakt te worde/of soude lichtelijk kunnen abuseren." De Graad konkludeert dat de kwadraatstok handiger is om voor verschillende soorten vaten te gebruiken. "Ende het is ook te beklagen/dat die niet meer gebruikt wort. Maar in de Provincie van Zeeland wort die noch gebruikt." Kennelijk heeft de kubiekstok - voor zover de Graad weet - de kwadraatstok in Nederland verdrongen !

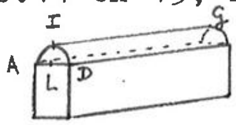
Daarna bewijst de Graad met een cilinder dat de kubiekstok inderdaad niet geschikt is om alle soorten vaten te roeien. Als de verhouding lengte/diameter verschilt, wordt aangetoond dat dan op een stok van 20 halfkan een andere schaalverdeling nodig is - hierbij wordt Euclides I,47 aangehaald en de stelling van Pythagoras gebruikt.
Bij het gebruik van de kubiekstok moet men tweemaal de inhoud bepalen, langs beide steeklijnen, en de inhouden middelen.
Hierna bespreekt de Graad enkele stellingen van Archimedes die hij ook bewijst. Eerst wordt de "tweede propositie van de Cirkelmetinge" behandeld:

$$(3 + 10/71) \text{ diameter} < \text{omtrek} < 22/7 \text{ diameter}$$

[159]

Het bewijs verloopt in twee stappen met in- en omgeschreven 94-hoeken en verscheidene stellingen uit Euclides (5:8, 13:12 Cor. 3, 6:3, 1:47, 5:8, 3:27, 6:4). Dan wordt een voorbeeld gegeven hoe de inhoud van een cirkel gevonden wordt met pi=22/7.
Vervolgens wordt de oppervlakte van een cirkelsegment nogmaals behandeld, nu met Euclides 6:11 en 13; in de cirkel





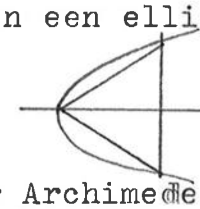
figuur (75)

geldt BD : AD = AD : DF ; verder wordt goniometrie toegepast.
Ook een bak met "verwulft" (gewelf) kan berekend worden, als de boog van het verwulft een halve cirkel is: vermenigvuldig dan

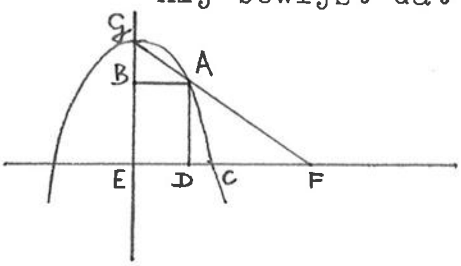
AD/4 x LI x AG

waarbij een waarde voor pi vergeten wordt. Als het verwulft minder dan een halve cirkel was, moet met cirkelsegmenten gerekend worden. Ook fluiten (soort glas) en tobben kunnen nu berekend worden, maar voor delen van de fluit zij verwezen naar het Handboek van G. Melder.
Dan volgt het wiskundige bewijs, hoe men een ellips tot een cirkel

AEDF : ABCD = EF : AD



met gelijk oppervlak kan omvormen, naar Archimedes, Conoidibus Spaeroidibus propositie 5 eerste boek. Het bewijs is uit het ongerijmde. Voor de transformatie van een scheve in een rechte ellips wordt verwezen naar "Frans van Verschoten" (= Frans van Schooten (1615 - 1660))"Mathematisschen oeffeninge". De bak met ovale verwulft - neem voor de straal de middenproportie $(ab)^{\frac{1}{2}}$ van de halve assen en doe als voren - kan nu ook berekend worden.
De Graad vervolgt zijn boekje met enkele stellingen over de parabool, die nergens bij het wijnroeien of de inhoudsbepaling aansluiten; hij geeft geen reden op voor de toevoeging hier.
Hij bewijst dat



1. abscis en ordinaat "dubbelevenredig"zijn (kwadratisch) naar Apollonius 1:20
2. CE^2 = DE x FE = de "rechthoekige figuur DEF"
3. ABG x AG = ("parabel" ABG)^2
4. de parabool heeft een oppervlakte die te benaderen is met in- en omgeschreven driehoeken
5. het oppervlak van een parabool is 4/3 maal de ingeschreven driehoek
6. de oppervlakken van verschillende parabolen verhouden zich als de ingeschreven driehoeken

Dan weer praktische zaken: de inhoud van een put wordt berekend uit die van een cilinder en van een halve bol; in het voorbeeld

wordt gerekend met wijnmaten, omdat de watermaat (de ton) van vaten berekend wordt met de maten aan de buitenkant, ongeacht de dikte van de duigen !
Ten slotte wordt het gewicht van kogels en stukken metaal - hiervoor is een talstok te maken - behandeld aan de hand van een tabel van Adriaan Metius, die we al gezien hebben in het Manuale Arithmeticae; de Graad vermeldt zijn bron, althans de auteur. De diameters van "gelijk-wigtige" kogels van 8 soorten metaal worden opgegeven.(maar De Graad laat de alchemistische symbolen, die Metius opgaf, weg). Een tabel van natte maten die in West-Europa in gebruik zijn, vergeleken met een anker (10 Friese kannen) besluit dit boekje ; het is dezelfde tabel als de la Rose (1639) opgaf.

5 f. Abraham de Graaf : De Geheele Mathesis of Wiskonst, Herstelt in zijn natuurlijke gedaante (1694)[124]

In dit grote, algemene leerboek voor wiskunde (zie figuur 78) wordt onder andere aandacht besteed aan wijnroeien, waaraan samen met landmeten een hoofdstuk is gewijd.[125] Nadat eerst proportiën, arithmetica, geometria en trigonometrie zijn behandeld, komen toegepaste onderwerpen aan de orde: astronomia, landmeetkunst, navigatie, fortificatie, gevolgd door gnomonica (zonnewijzers), perspectiefleer, dioptrica en katoptrica (lenzen en spiegels) en mechanica. Het laatste hoofdstuk is aan algebra gewijd.
Abraham de Graaf (1635 - 1717)[109] was een Amsterdams doopsgezind rekenmeester afkomstig uit de kring van wevers; hij gaf les te Amsterdam en was auteur van vele publicaties. Tevens examineerde hij stuurlui. Met gezaghebbende leerboeken droeg hij bij aan de verbreiding van Descartes' analytische meetkunde; verder schreef hij over sterrekunde en boekhouden. Net als Anhaltin was hij betrokken in de polemiek met Cornelis Saskerszn van Leeuwen.[119]
De Graafs zoon Isaac (1667 - 1743) was eveneens wiskundige en de auteur van de bekende Atlas de Graaff.
In zijn voorrede gaat de Graaf in op het nut van de wiskunde voor het dagelijkse leven; hij heeft getracht met dit werk "zo veel doenlijk was, dese naukeurige eeuw te voldoen ".
Aan hoofdstuk VI, dat over de landmeetkunst gaat, is een bijvoegsel over het wijnroeien toegevoegd. De Graaf stelt de landmeter en de wijnroeier op een lijn: "Een landmeter vint de Inhoud van de vlakke superficien, en ook van zoodanige lichamen, en een Wijnroyer van de bultige lichamen, hoedanig een Vat is."
"De Lantmeetkonst, of de konst van het Lantmeten, is het Practice daarvan een Lantmeter moet kundig weezen : vindende de groote van alle landen, wateren en moerassen, begankelijk of onbegankelijk zijnde 126 , en de deyling van dien op een begeerde wijze : en daarenboven noch de groote van alle ronde vaten, en de quantiteijt van het nat dat daar in is wanneer het niet vol is : dit laatste wert Roykonst, of ook Pegelkunde genaamt."
De Graaf hanteert de notatie $\sqrt{c}$ voor de derdemachtswortel, en $\sqrt{q}$ voor de tweedemachtswortel; $\square A = A^2$.
Hij steekt van wal in de paragraaf over wijnroeien door op te merken dat de inhoud van gelijkvormige lichamen evenredig is met de cubicqen van de dimensies ("gelijkstandige zijden"). Daarom is de kubiekroede kubieks verdeeld. Dit wordt met voorbeelden toegelicht, waarbij de lengte van de steeklijn (de halve diagonaal van het halve vat, vanuit het spongat) wordt opgegeven.
"Laat ons dan zoodanigen stok berijden". Maar hoe maak je zo'n stok ? Neem een zo groot mogelijk vat van het type waarvoor je de stok wilt maken; verdeel de stok in gelijke delen, steek hem schuin naar beneden - dat is beter te treffen dan recht naar beneden - vanuit het spongat tot onder de kimmen.[3] Als het vat 100 mingelen bevat - 16 mingelen = 1 steekan - en 1 mingelen voor 107 delen staat, is de lengte op de stok voor de eerste mingele

DE GEHEELE MATHESIS OF WISKONST,

Herstelt in zijn natuurlijke gedaante:

Door ABRAHAM de GRAAF.

t'AMSTERDAM,
Gedrukt, by JACOBUS de VEER,
Voor JAN ten HOORN, Boekverkooper over 't Oude Heeren Logement, in de History Schryver, 1694.

figuur (78)

$\sqrt[3]{c}\ 10^7 = 215{,}44$ (de kubiekzijde voor 1 mingelen = 10^3); het tweevoud hiervan is de maat voor 8 mingelen en zo verder met de regel van drieën en c tot de stok klaar is.
Als de steeklijnen ongelijk zijn, middel dan de uitkomsten op de stok; dus

$$\left(\frac{s1_{CR}^{\ 1/3} + s2_{CR}^{\ 1/3}}{2} \right)^3 = \text{Inhoud} \qquad [160]$$

met

si_{CR} = aflezing bij lengte van steeklijn i; i=1,2 ; op de Cubicq Roede

Maar ongelijkvormige vaten worden gemeten met de Quadraat Roede, waarmee in het algemeen de "inhoud" (=oppervlak) van cirkels bepaald kan worden. Om deze roede te maken moet men een holle cilinder nemen. Hoe groot is de diameter, als er bij hoogte = 1 1 mingele in de cilinder zit ? Door de bekende inhoud te delen door de lengte van de cilinder, en de oppervlakte van de doorsnede zo te kiezen, dat de hoogte van 1 mingele 1 wordt, vindt men via worteltrekken de diameter: teken deze op de andere zijde van de stok aan - de stok had ook al een verdeling in gelijke delen. De verdeling wordt kwadratisch afgemaakt.
De andere wortels kunnen algebraisch gevonden worden, of met de meetkundige wortelkonstruktie.
Het is handig om de maat van 1 mingele in 100 of een hogere macht van 10 gelijke delen te verdelen. In de praktijk meet men de bodem en het midden van het vat met de gelijke delen, middelt eerst de bodems:

$$\text{Inhoud} = (((\ bo1 + bo2)/2 + bu)/2)_{QR} \times L_{binnen} \qquad [161]$$

Er volgen voorbeelden, eerst voor een vat, dat op deze wijze gemiddeld, overgaat in de cilinder die voor de ijking van de stok gebruikt was. In een later voorbeeld wordt toegelicht hoe men de juiste lengte van het vat vindt:

$$L_{binnen} = L_{buiten} - (\ K\,1 + K\,2 + 2 \times BD\ ) \qquad [162]$$

waarin Ki = de lengte van de overstekende i-de kim
BD = bodemsdikte
(vergelijk [153]).
Net als Anhaltin middelt de Graaf[127] dus lineair bodems en buik, anders dan van Leeuwen en de la Rose bijvoorbeeld, die kennelijk de middeling van in- en omgeschreven cilinders toepassen.
Dan de meting van een vat dat "wan"- dus deels leeg is.
"Dewijl alle Vaten, van hoedanigen fatsoent dat ze ook zijn, herleyt konnen werden in de gedaante van een Cylinder, gelijk nu alrede aangewezen is, zoo zullen wij de wanheyt van een Cylinder onderzoeken..".
Als bij de vorige auteurs wordt met goniometrie de oppervlakte van een cirkelsegment uitgerekend - eerst een cirkelsector, waarvan een driehoek met de koorde van het segment als basis en de top in het middelpunt van de cirkel, wordt afgetrokken. Als waarde van pi gebruikt de Graaf hier 314159, en een straal van 500. Bij de berekening van het wannecirkelstuk maakt de Graaf een rekenfout. (Zie figuur[67]).
Na vermenigvuldiging met de lengte van het vat resulteert de lege inhoud.
De bekende procedure:

$$(\ p - (bu-d_{eq})/2\ ) \times 1000/((bu+bo)/2) \dashrightarrow \text{tafel} \dashrightarrow$$

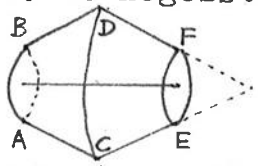
$$\dashrightarrow \frac{\text{aantal quadraatmingelen diepte}}{1000} \times \text{lengte} = \text{lege inhoud} \qquad [163]$$

waarbij de regel van drieën is gebruikt voor het schalen naar de tafel voor de cirkelsegmenten, die genormeerd is voor een cirkel met diameter 1000 en oppervlakte 1000.
Het volgende hoofdstukje tracht een verbeterde methode aan te geven vanwege de onvolmaaktheid die de middeling van de sponds-diepte met zich meebrengt. Als de duigen recht waren, kon men het volgende recept gebruiken:

$$\text{Inhoud} = (((bo1+bo2)/2)^2+bu^2+(bo1+bo2)/2 \times bu)/3 \times L_{binnen} \,/\, d^2_{\substack{1\ \text{mingele} \\ \text{hoogte} = 1}} \qquad [164]$$

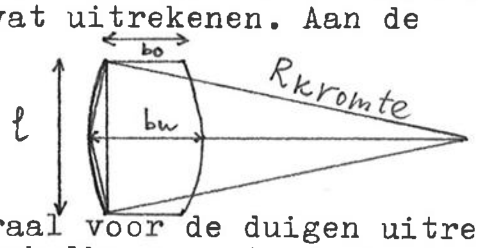
met $d_{\substack{1m \\ h1}}$ = de diameter van de cilinder die bij hoogte 1 1 mingele bevat.
Dit is dus de inhoud van de dubbele kegelstomp. Een zelfde voorbeeld als boven wordt doorgerekend; nu wordt de inhoud iets groter bevonden. Daarna volgt een bewijs voor deze kegelstomp-methode, dat Euclides 12 stelling 7 en 2 over de inhoud van de kegel en de oppervlakte van de cirkel gebruikt. De kegelstompformule wordt zo gegeven:

$$\frac{c\,c + a\,c + a\,a}{3}\,,\ b = \text{Inhoud} \qquad (165)$$



in de Graafs notatie, waarin a a het vierkant van AB is, en c = CD (zie figuur); de evenredigheidsfaktor pi is weggelaten.
Daarna worden verschillende methoden in een uitgewerkt voorbeeld met elkaar vergeleken:
- de lineaire middeling van buik en bodemsdiepten
- de middeling van de kwadraten van die diepten, dus de middeling van in- en omgeschreven cilinders (maar dat zegt de Graaf niet
- de kegelstompmethode: "de ware" volgens de Graaf.

De Graaf realiseert zich, dat deze laatste methode uitgaat van een rechtlijnig vat; daarom gaat hij het inhoudsverschil tussen het "kromlijnig" en het "rechtlijnig" vat uitrekenen. Aan de hand van een figuur [80]



laat de Graaf zien hoe hij de kromtestraal voor de duigen uitrekent - hij ziet hun boog dus als een cirkelboog, net als Kepler -

$$R_{kromte} = (l^2/2) \,/\, (bu - bo) + (bu - bo)/4 \qquad [166]$$

De Graaf geeft deze formule niet, maar rekent met konkrete getallen. Met goniometrie wordt de sector OBD gevonden, waarvan de driehoek OBD wordt afgetrokken, zodat de kapjes overblijven - de doorsnede van de gordel, zou Kepler zeggen. De bijdrage van deze kapjes aan de inhoud van het vat is volgens deGraaf:

$$\Delta\ \text{Inhoud} = 22/7 \times (bu+bo)/2 \times \text{oppervlak kapje} \qquad [167]$$

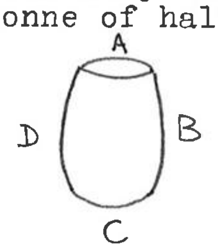
5 g. 10 B 5 (1694)[128]

Dit anonieme handschrift, gedateerd Rotterdam 25 juli en 20 en 27 september 1694, gaat grotendeels over landmeten en waterbouwkunde, vlakke meetkunde en stereometrie. Daarnaast worden berekeningen gewijd aan de zonnewijzer en het handschrift eindigt met een pagina over het vervaardigen van een "cubic-roede".
Aan de hand van een pentekening wordt betoogd, dat men een stok met een lineaire schaalverdeling van 1000 delen door het bong- of spongat schuin tot aan de kimmen van het vat van de gewenste soort moet steken; de bodems van het vat moeten wel gelijk zijn. Men vindt dan dat 812 schaaldelen corresponderen met 62 Bredasche kannen; hoeveel is dan de lengte die met 1 kan overeenkomt ?
De auteur vindt 46 delen - ik 205,16 - en geeft verder aan, dat de inhoud kubisch groeit met de lengte van de stok. De tafel waarnaar verwezen wordt ontbreekt.

5 h. D.B. Anemaet : Handschrift (vóór 1690 of 1690)[129]
"Om de wortel te trecken..."

Dit uitvoerige manuscript, deels geschreven door D.B. Anemaet - op pagina 39 staat "Geeyndigt den 12 april 1690" en door Hubertus Anemaet in 1726-1727, bevat in het eerste gedeelte aantekeningen over oppervlakte- en inhoudsmeting met een uittreksel van Euclides' Elementen - het heeft het karakter van een tekst voor zelfstudie geschreven.
Gezien de datering moet de passage over de inhouden van vaten vóór de laatste twee teksten in de chronologische volgorde geplaatst worden.
Nadat de inhoud van een kuip (afgeknotte kegel) is bepaald, wordt de inhoud van een "tonne of halfvat" - zie figuur 82 -

figuur(82)

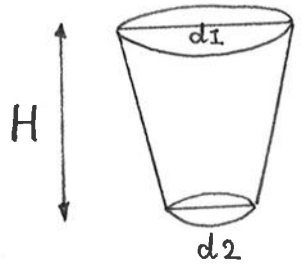


Inhoud =(22/7 DB + oppervlakte A)x halve diepte [171]

gevonden; dit is onjuist.
De inhoud van de kuip werd berekend met:

$$\text{Inhoud}_{kuip} = 22/7\ (r_1^2 + r_2^2)/2 \times H \qquad [172]$$

er worden rekenfouten gemaakt: "er is hier fout geschreven hoe welt werck eender is".
[172] is de middeling van in- en omgeschreven cilinders.



figuur(83)

6. Achttiende- eeuwse noordnederlandse wijnroeiteksten

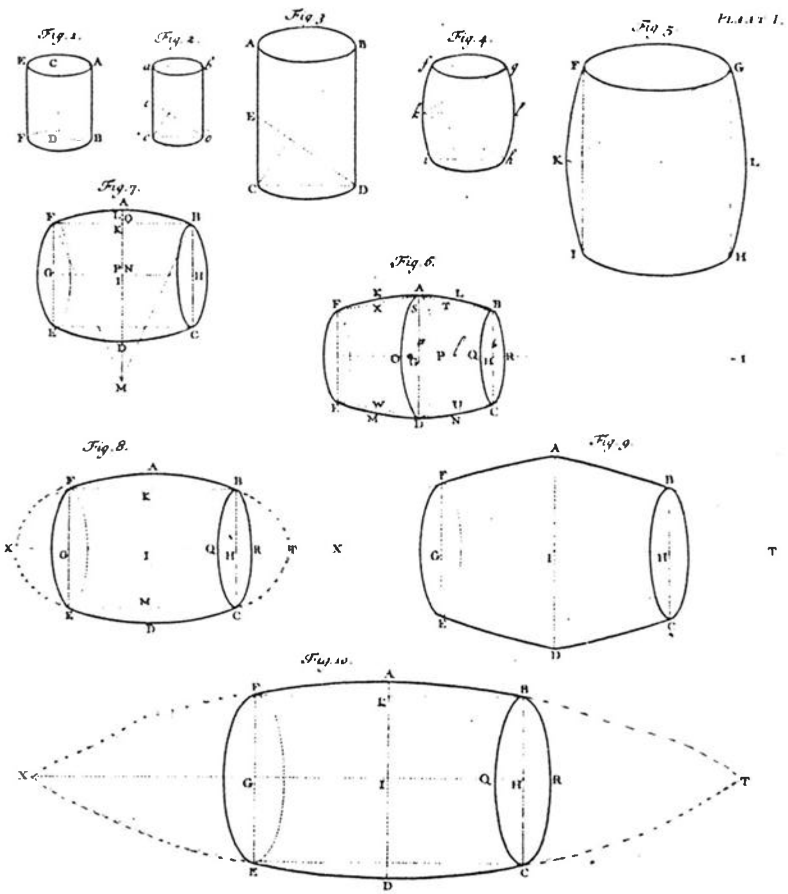
6. a. J. Lulofs : Grondbeginselen der wijnroey- en peilkunde, ten dienste der Landgenooten...Leiden 1764. 130

Johan Lulofs (1711 - 1768) was hoogleraar in de wijsbegeerte (vanaf 1744), wis- en sterrekunde (vanaf 1742) aan de universiteit van Leiden en tevens "ordinaris adviseur van de Gecommitteerde Raaden in alle zaaken de roeyingen en peilingen concernerende", blijkens de titelpagina (zie figuur 84). Van der Aa meldt onder andere dat hij in waterstaat en aardrijkskunde bedreven was; hij was een leerling van 's Gravesande.[112]
Het leerboek dat ons interesseert moet vrij populair geweest zijn: zo vinden we in de Acquitten van de Fundatie van Renswoude te Utrecht dat in 1766 en 1767 een exemplaar werd aangeschaft [131] .
In de Voorrede van de Grondbeginselen vertelt Lulofs, dat hij door de Gecommitteerde Raden van Zuid-Holland verzocht is om de ware grootte van de Amsterdamse stoop te bepalen en tevens een nieuwe ijking voor de roey- en peilstokken uit te voeren, daar er in de steden van Zuid-Holland op uiteenlopende manier gepeild werd. Aan dat verzoek voldeed Lulofs, en zijn nieuwe schaalverdeling werd door"Jan Paauw" op staven van mahoniehout en op koperen platen vastgelegd.
Verder moest een eenvoudige en betrouwbare meetmethode gevonden worden, maar wiskundige nauwkeurigheid bleek onmogelijk.
Om de Hollandse wijnroeiers en peilers van dienst te zijn heeft Lulofs geen "fluxie-reekeningen" (= differentiaal- en integraalrekening) toegepast, al kan men die wel in de kleine letters van het boek vinden. Decimale breuken zijn onontbeerlijk bij het roeien, vindt Lulofs, maar in het Nederlands is er weinig op een duidelijke manier over geschreven !
De door Lulofs verbeterde schuifschaal - ook van der Boot[148] had er een voorgesteld - een rekenlineaal voor wijnroeiers, wordt in dit boek beschreven en is bij Jan Paauw te verkrijgen. Het trekken van wortels kan vermeden worden door gebruik van logarithmen. Lulofs besluit zijn voorwoord met de verklaring, dat hij liever duidelijk, dan sierlijk heeft willen schrijven.
De hoofdtekst is in drie afdelingen verdeeld :
1. Over de Wijnroeykunde
2. Over de Peilkunde
3. Over de Schuifschaal en deszelfs gebruik.
De eerste afdeling bestaat weer uit 7 hoofdstukken. Eerst wordt de eenvoudige rekenkunde behandeld (optellen, aftrekken, vermenigvuldigen, delen), met speciale aandacht voor "onbepaalde" (=repetente) breuken. Daarna komen tweede en derde machtswortels aan bod, die op de gebruikelijke manier - met staartoperatie - bepaald worden in de voorbeelden. Als ook de meetkundige evenredigheden, de meetkundige en rekenkundige reex zijn ingevoerd, is Lulofs toe aan het behandelen van de logarithme, die ons "verlost van den lastigen en tijdverslindende arbeid" van het worteltrekken, mits men natuurlijk over een logarithme-tafel beschikt. Over de meetkunde wil Lulofs kort zijn: hij voert de cirkel en het langwerpige rond (de eillips) is. De cirkel wordt gezien als een oneindige veelhoek - het standpunt van Kepler, zoals we gezien hebben -, zodat de uitdrukking

$$\text{oppervlakte cirkel} = \text{omtrek} \times \text{middellijn} / 4 \qquad [173]$$

volgt. Pi mag dan"onbenaderbaar" zijn, voor de toepassing is dat geen bezwaar: neem 22/7 of 355/113; men zij verwezen naar Euler 132 . Het oppervlak van een cirkel vindt men gemakkelijker met logarithmen.
In het algemeen geldt voor lichamen van gelijke vorm, dat hun inhouden in een kubische verhouding staan. De cilinder wordt ver-

figuur(84)
titelpagina van Lulofs (1764) en
plaat I



GROND-BEGINSELEN
DER
WYNROEY-
EN
PEIL-KUNDE,
TEN DIENSTE DER LANDGENOOTEN.

BESCHREEVEN

DOOR

JOHAN LULOFS,

HOOG-LEERAAR IN DE PHILOSOPHIE, WIS- EN STER-REKUNDE OP 'S LANDS UNIVERSITEIT TE LEYDEN; INSPECTEUR GENERAAL DER RIVIEREN VAN HOLLAND EN WESTVRIESLAND; ORDINARIS AD-VISEUR VAN H. ED. MOG. DE HEEREN GECOM-MITTEERDE RAADEN VAN H. ED. GR. MOG. IN ALLE ZAAKEN DE ROEYINGEN EN PEILINGEN CONCERNEERENDE.

Te LEYDEN,

By de Wed. A. HONKOOP EN ZOON,

MDCCLXIV.

verkregen door een rechthoek om een as te wentelen.
Sommigen benaderen het vat met twee afgeknotte kegels, maar dat levert een te kleine inhoud op; trouwens, het vat heeft helemaal geen scherpe rand in het midden. Beter is het daarom het vat te benaderen als het gemiddelde van in- en omgeschreven cilinders; dan gebruikt men de rekenkundig middelevenredige van de doorsneden aan spon en bodem:

$$\text{Inhoud} = \frac{oa^2 + ob^2}{4} \times \frac{2l}{2} = o\, l((\,(a^2 + b^2)/2)^{\frac{1}{2}})^2 \qquad (174)$$

$$= \text{Inhoud}_{\text{cilinder}}$$

waarin o = de omtrek van een cirkel met middellijn 1 (= pi)
a = bu   l = halve lengte vat
b = bo

Vergeleken met de inhoud van twee afgeknotte kegels

$$\text{Inhoud}_{\text{kegelstompen}} = \frac{ol}{12}\ \overline{a^2+ab+b^2}$$

-net als de Graaf gebruikt Lulofs een streep over een term in plaats van haakjes- is er het verschil

$$\frac{o\,l}{12} \times \overline{a - b}^{\,2} \qquad (175)$$

Dit lijkt op de formule van Gregory[133] (Treatise of practical Geometry) merkt Lulofs op; Gregory gebruikte voor het vat

$$\text{Inhoud}_{\text{vat}} = \frac{o \times 2\,a^2 + b^2}{4} \times \frac{2\,l}{3}$$

$$= \frac{o \times 2\,a^2 + b^2 \times l}{6} \qquad (176)$$

in Lulofs notatie; de diameter van de equivalente cilinder wordt gegeven. Deze formule overschat de inhoud van een echt vat, merkt Lulofs op.
Daarna bespreekt Lulofs verschillende benaderingen voor de kurve van de duigen: de curva elastica, de cirkel, de ellips en de "brandsneede" of parabool.

--De curva elastica of "veerige kromme" was door Jacob Bernoulli[134] voorgesteld als benadering voor de krommingvan de duigen van een wijnvat in 1705, maar Lulofs is het hier niet mee eens op grond van de fysische overweging,dat de duigen hun vorm niet door druk of gewicht aannemen, maar door hun behandeling in vuur en de spanning van de hoepen, die opzij wordt uitgeoefend. Christiaan Martini[135] heeft terecht gevonden, vindt Lulofs, dat deze benadering tot een niet-integreerbare uitdrukking leidt, ook indien reeksontwikkeling wordt toegepast; zelfs Euler[137] is het niet gelukt!

--De benadering door een cirkel, door Kepler in zijn Stereometria Doliorum[136] toegepast, wijst Lulofs af op grond van de praktijk.Als men de regel van Guldin[138] toepast moet men dan het zwaartepunt van een cirkelsector bepalen, waarvoor Lulofs enkele formules geeft. Nee, Keplers aanpak is zelfs met differentiaal- en integraalrekening niet handig. Een numeriek resultaat van Lulofs geeft aan dat

$$\text{Inhoud}_{\text{cirkelbenadering}} > \text{Inhoud}_{\text{dubbele geknotte kegel}}$$

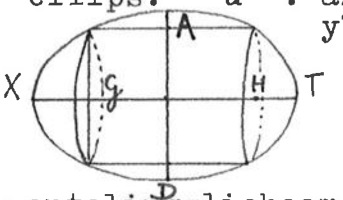
- we zagen in Messekunst nummer 66 en 86 dat Kepler dit zelf ook vond.

--Daarentegen noemt Lulofs de benadering met de ellips "zeer na aan de waarheid"; deze is voorgesteld door Clavius, Keplerus, en later Wallisius en Gregory.[139] De berekening kan zonder fluxieintegralen - alleen met Archimedes, maar dat is "langweylig". Op dit punt geeft Lulofs een voorbeeld van de berekening van een ellipsoidaal vat met behulp van de fluxie (het infinitesimale volume) en de Fluent (de integraal); weer is met o pi of liever 22/7 of 355/113 aangeduid:

AD = a
GH = 2l
TH = x
BC = 2y
TX = 2x + 2l = u

ellips: $u^2 : a^2 = x\ \overline{u-x} : y^2$

$y^2 = xu - xx\ \ a^2/u^2$



figuur 85

Fluxie van het omwentelingslichaam : $oy^2dx = \frac{oa^2}{u^2}\ dx\ \ \overline{ux - xx}$

Fluent hiervan : $\frac{oa^2}{u^2}\ \frac{1}{2}ux^2 - 1/3x^3$

$= oa^2u/6 = \underline{2/3 \text{ cilinder}}$ (AD,TX)

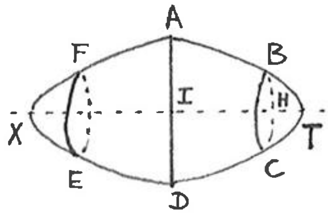
Inhoud vat = $oa^2\ u/6 - \frac{2}{u^2}\ \ \frac{1}{2}ux^2 - x^3/3$ (177)

Maar Lulofs kiest toch voor de methode met de x-coordinaat (de "Afgesneedene") gerekend vanuit de oorsprong en vindt dus

Inhoud $= \frac{oa^2}{u^2}\ \ \frac{uux}{4} - \frac{x^3}{3}$ (178)

--De "Brandsneede of Parabel" is in de literatuur vóór Lulofs op drie verschillende manieren gebruikt om het vat mee te benaderen: in de eerste plaats kan men het vat opvatten als twee parabolische kegels, aan de top geknot en met de grondvlakken tegen elkaar: dit is de aanpak van Pézenas (1754)[140]; deze leidt tot de volgende formules

AI = $\frac{1}{2}$a TI = x figuur 86
BH = $\frac{1}{2}$b TH = x - l
HI = l x = aal/(aa-bb)



Met fluxie-rekening vindt men het resultaat van Archimedes[141] terug:

Inhoud ABHCD = $oa^2x/8$ (179)

Na aftrekking van het kapje BHC = $\frac{ob^2\ x - l}{8}$
houden we over:

Inhoud geknotte kegel = $\frac{o}{8}.(a^2x - b^2x + b^2l)$ (180)

dit betekent dat de gemiddelde middellijn is

$\varnothing$ gemiddeld $= \frac{\sqrt{a^2x - b^2x + b^2l}}{2\ l}$ (181)

Dit scheelt maar weinig met de gewone uitkomst met in- en omgeschreven cilinders : we komen zelfs te laag uit. Weer geldt het bezwaar dat het echte vat geen scherpe randen aan de spon heeft; bovendien is hij niet bij de bodemen sterker gekromd dan in het midden. Maar we kunnen de top van de parabool ook bij het spongat leggen:

$$
\begin{array}{lll}
XI = y = f & & y^2 : t^2 = z : x \\
AK = x & & \\
FK = t & & y^2 = t^2 z/x = f^2 \\
AI = z & & \text{cirkel } GF^2 = \dfrac{o\,z^2}{f^4} \cdot (f^4 - 2f^2t^2 + t^4)
\end{array}
$$

zodat de fluxie is:

$$\frac{oz^2\ dt}{f^4} \times (f^4 - 2f^2t^2 + t^4)$$

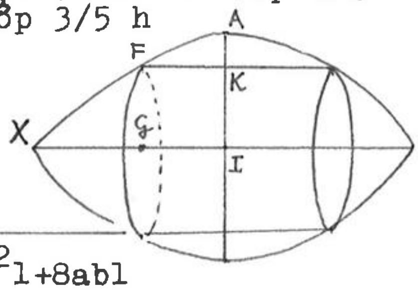
en de fluent[142] $\dfrac{oz^2}{f^4} \times (f^4t - 2/3 f^2t^3 + t^5/5)$ (182)

Ook hier kan de regel van Guldin gebruikt worden. Dan moet eerst het zwaartepunt gevonden worden; omdat in alle brandsneden de parameter 1 is geldt het volgende. De inhoud van het vat is dan gelijk aan een cilinder en een parabolische ring.

$x^m = y^r$ zwaartepunt op $(m+r)/(m+2r)$. h(in een segment met hoogte h) van de top af. dus voor parabool[143] op 3/5 h

Met de definities leidt dit tot
- zie figuur -

figuur(87)



AI = a KF = 1
FG = b
AK = a - b

$$\text{Inhoud}_{vat} = 2\ o\ b^2\ l + \frac{o}{15}\ \overline{16a^2l - 24b^2l + 8abl}$$

$$= \frac{ol}{15}\ \overline{16\ a^2 + 8\ ab + 6\ b^2} \qquad (183)$$

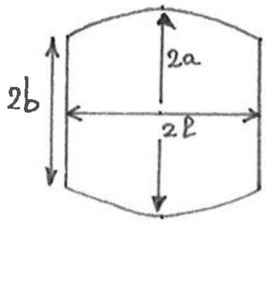
In het midden is de kromming zo redelijk benaderd, maar bij de bodems zijn de duigen rechter dan parabolisch in de werkelijkheid. Daarom geeft Lulofs de voorkeur aan het recept van Camus,[144] die een kombinatie van de parabolische en de kegelstompmethode gebruikte; aan weerszijden van het spongat wordt het vat als een stuk paraboloïde voorgesteld, maar halverwege spon en bodem gaan de duigen in deze voorstelling recht lopen: tot de bodemen is het vat verder een kegelstomp. Dit geeft dan met de zeflde technieken (regel van Guldin) voor de inhoud:

$$\text{Inhoud}_{vat} = \frac{o\ l}{135}\ \overline{128\ a^2 + 74\ a\ b + 68\ b\ b} \qquad (184)$$

Lulofs constateert wel, dat dit teveel omslag en tijd vereist. Omdat het gemiddelde van spon- en bodemsdiepte te weinig inhoud gaf, neemt Camus niet deze eenvoudige uitdrukking om de diameter voor de volume-equivalente cilinder te vinden, maar

$$\text{Inhoud}_{vat} = 2L \left\{ 2\left(\left(\frac{bu}{2}\right)^4 \left(\frac{bo}{2}\right)^2 \right)^{1/6} \right\}^2 \frac{o}{4} \qquad (185)$$

dus $\varnothing_{\text{cilinder}} = bu^{2/3}\ bo^{1/3}$



figuur[88]

Een voorbeeld voor een vat van bodemsdiepte 28,8; buik 32 en lengte 22,5 x 2 duim wordt gegeven: Camus'eerste formule leidt tot een volume van 33467,4 taerlingh duimen, de versimpeling 33736,15: iets teveel dus. Daarom zocht Lulofs naar een betere, simpele uitdrukking en vond de volgende, hoewel hij geen meetkundige rechtvaardiging ervoor weet:

$$\phi_{gemiddeld} = (6 a + 4 b) /10 \qquad (186)$$

hetgeen in het voorbeeld leidt tot 33353,77 kubieke duim.
Men kan de formule ook zo aanpassen, dat men het vat ziet als een cilinder met elliptische doorsnee; dan wordt de inhoud[145] - daar het oppervlak van een ellips o $a_1 a_2$ is -

$$\phi_{gemiddeld} = \frac{6 (a_1 a_2)^{\frac{1}{2}} + 4 (b_1 b_2)^{\frac{1}{2}}}{10} \qquad (187)$$

Aan de hand van een voorbeeld, dat met deze formule en met Camus' uitdrukking (184), waarin voor a de wortel $(a_1 a_2)^{\frac{1}{2}}$ en voor b analoog wordt ingevuld, blijkt dat het verschil minder dan .3% is.
Bij de omrekening van taerling-duimen naar gangbare maten als pinten, mingelen, stopen, viertels, halve steekannen, steekannen, halve ankers en ankers heeft men te maken met de omrekening van voeten (of duimen) naar stopen of mingelen, de kleinste maten waarin de grotere worden uitgedrukt; nota bene: in de Amsterdamse voet gaan maar 11 in plaats van 12 duimen.
De Gecommitteerde Raaden van Zuid-Holland hadden Lulofs opgedragen van de Amsterdamse stoop te bepalen, omdat"die tot een gemeene maate is aangenomen in het invorderen van 's Lands Impositiën".
Om een "altoos-durende" maat van de Rijnlandse voet te vinden, heeft Lulofs de lengte van een sekonde-slinger bepaald[146] en een standaard gemaakt van 2 voet Rijnlands, na vergelijking met buitenlandse maten. De grootte van de Amsterdamse stoop is vastgelegd met behulp van drie koperen vaatjes; Lulofs gaat uitvoerig in op de problemen van het precies meten van hun inhoud, rekening gehouden met de temperatuur (een thermometer van Prins werd gebruikt); hij noemt binnen- en buitenlandse onderzoekers.[147]
In het voorbijgaan wordt de door Van der Boot[148] ingevoerde zogenaamde wijnroeiersvoet, die kubiek gelijk is aan 10 stopen, vermeldt; Lulofs komt tot de konklusie dat de volgende praktische omrekeningsfaktoren moeten gelden:

141,069 taerling- duimen = 1 stoop

70,5345 taerling-duimen = 1 mingel

Daarna wordt ingegaan op de kubiekstok, die als legger[149] - standaard had gediend bij de Gecommitteerde Raden; deze was berekend aan de hand van een denkbeeldig vat, waarvan de inhoud was gevonden met "den gebrekkigen regel der Wijnroeyers" dat wil zeggen het middelen van in- en omgeschreven cilinders.
Door terugrekening vond Lulofs : spondsdiepte 53,94 duim , bodem 44,06 duim en lengte 73,5 duim; dus wel zeer dikbuikig ! De uitkomst van de cilindermiddeling is een stuk lager dan die met Camus' formule (184), namelijk 2 %.
Ook het oxhoofd, dat in Frankrijk wel geijkt is,[150] kan geen uitkomst brengen, want in Nederland is het niet geijkt.
Omdat Lulofs "alleen de ondervindinge tot Leid-ster" wil nemen, heeft hij proeven met wijnvaten laten nemen door de Amsterdamse wijnroeier J. van Staten, die maten opnam en woog hoeveel regenwater er in de verschillende vaten ging. Bij het opnemen der vaten moet wel bedacht worden, dat bodemsdiepte en binnenlengte alleen gissenderwijs bepaald kunnen worden !
Er werden proeven genomen met vaten van : een aam, een halve aam, een anker, een half anker, een half oxhoofd en tot slot met de "Mallaga-boot".

Uit de steeklijn, de diagonaal vanuit het spongat tot de onderzijde van een bodem, wordt met een tabel, waarin de lengte van de steeklijn getabelleerd staat met de bijbehorende inhoud van 1 tot 1000 stopen. Voor de 6 soorten wijnvaten worden de uitkomsten van de legger, van de meting van de steeklijn en van de uit de overige maten berekende steeklijn en tot slot van de weging van het regenwater met elkaar vergeleken.
Het blijkt dat de "waare inhoud" - die uit het gewicht van de hoeveelheid regenwater die in het vat kon wordt gevonden - het dichtst benaderd wordt door de met de berekende steeklijn gevonden inhoud.
Om een universele stok te verkrijgen, en ook omdat de stoop opnieuw gedefinieërd was, moest een nieuwe wijnroede worden vastgesteld. De stok moet aan het ene uiteinde schuin afgesneden zijn en aan de schuine kant met koper bedekt zijn. Als de diagonalen ongelijk zijn moet men de uitkomsten van de kubiekroede middelen. Maar als het te roeien vat niet aan de verhoudingen

buik : bodem : binnenlengte = 100 : 87 : 117,5

voldoet, kan men beter met een kwadraat-roede werken, die Lulofs vervolgens bespreekt; dan worden vaten als cilinders of als tot cilinders omgevormde lichamen omgevormd.
Lulofs heeft de nieuwe "quadraat-stok", die nu tot "Legger"[149] (= standaard) dient bij de Gecommitteerde Raden vervaardigd; hij heeft een verdeling in stopen en in halve Amsterdamse duimen aangebracht.
Bij het maken ervan is de hoogte en de wijdte van de cilinder die 1 stoop bevat bekend verondersteld - deze hoogte is 10 halve duim, de wijdte 11,98704 halve duim, corresponderend met de inhoud van 141,069 taerling delen voor 1 stoop. Verder wordt de notatie " voor duim in deze scriptie gebruikt.
Er volgt een tabel die loopt van 0,2 - 105 stopen voor 5,36 - 122,83 delen op de stok.
Omdat de gebruikelijke formule

$$\frac{\text{stopen bodem} + \text{stopen spon}}{2} \times \frac{\text{binnenlengte } (\frac{1}{2}'')}{10} \qquad (188)$$

te weinig geeft voor de vatinhoud, heeft men (bijvoorbeeld Stone, Construction of Mathematical Instruments) andere formules voorgesteld:

$$\frac{1}{10} \times \left(\frac{\text{stopen bodem} + \text{stopen spon}}{2} \times 3 + \frac{\text{stopen spon} - \text{stopen bodem}}{10}\right) \qquad (189)$$

die eveneens te weinig geeft, en

$$\frac{1}{10} \times \left(\frac{\text{stopen spon} - \text{stopen bodem}}{10} + \frac{\text{stopen spon} + \text{stopen bodem}}{2}\right) \qquad (190)$$

die bijna hetzelfde resultaat geeft als de "fijnste berekening", die volgens Camus (184); maar hij is niet altijd betrouwbaar: bij het vat van 1 aam is de afwijking 1 %.
Lulofs geeft een verbeterde praktische methode, waarbij gebruik moet worden gemaakt van de nieuwe kwadraatstok:

$$\frac{\text{stopen bodem} + \text{stopen spon}}{2} \times \frac{\text{binnenlengte } (\frac{1}{2}'')}{10} + \frac{\text{stopen spongat} - \text{stopen bodem}}{2} \qquad (191)$$

Boven is met "stopen spon" en "stopen bodem" de aflezing bij de diepte van de buik respectievelijk de bodem van het vat aangeduid.
Formule (191) levert voor het in voorbeelden vaak gebruikte vat (spondsdiepte 32 ", bodemsdiepte 28,8 ", lengte 45 ") weliswaar

kan de inhoud van de ring niet direkt geïntegreerd worden. Langs de weg van de reeksontwikkeling van $(2a - x)^{\frac{1}{2}}$ wordt y tot op de orde $x^{9/2}$ gevonden en de integrand berekend. Muller gebruikt ook:

$$d\,(\text{Inhoud ring}) = 4\,\text{pi}\,(a-x)y\,dx = 4\,\text{pi}\,(2a-x)^{3/2}x^{\frac{1}{2}}\,dx$$

Volgens "voorschrift van de groote Newton" (= binomium) kan de inhoud van de ring na reeks-ontwikkeling uit deze laatste uitdrukking geïntegreerd worden, zodat

$$\text{Inhoud vat} = 4\text{pi}\left(1.(a-x)^2/2 + (4a/3-3x/5+3x^2/(56a))\;.\;(2ax)^{\frac{1}{2}}\right) \qquad (197)$$

onder verwaarlozing van de hogere orde termen (er wordt geen schatting van deze termen gegeven).
Voor een vat geldt nu : lengte = 2 l, spondsdiepte = 2 a en bodemsdiepte = a - x.
Daarna gaat Muller in op de proefnemingen die ter verificatie van deze inhoudsformule zijn gedaan met uiteenlopende soorten vaten. Deze zijn eerst volgegoten met water; men heeft met de meting gewacht tot het hout met water verzadigd was. Na leging zijn ze opnieuw gevuld met een standaardmaat, de kroes van 75,60285 kubieke Rhijnlandsche duim en werd het resultaat van de meting opgenomen. Voor de proeven zijn een oxhoofd, een trom, een spaanse boot en een stukvat gebruikt met ware inhoud van respectievelijk 172, 208, 349 en 451½ kroes. Dan vergelijkt Muller de experimentele resultaten met de theoretische volgens formules van Camus(1741)[149]: vergelijking (184), Lambert,[161] Lulofs, Klinkenberg,[160] Muller en Tideman.[162]
Als de notatie spondsdiepte = 2a, bodemsdiepte = 2b en lengte = 2l aangehouden wordt, luiden deze formules:

LAMBERT: $2\text{pi}\;l(a^2 - 2/3a\,(a-b) + 2/9\,(a-b)^2)$ (198)

de duig staat als een cirkelboog

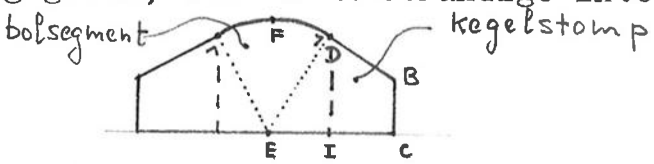
Lulofs : $\text{pi}\;l/2\;(12\,a + 8\,b)^2\,/\,100$ (199)

(vergelijk (186): een gereduceerde cilinder) Muller merkt op"doch er zijn geen Proeven bijgevoegd".

Klinkenberg:[160]

$142\;l\;/\;339\;(8\,a^2 + 4\,a\,b + 3\,b\,b)$ (200)

Dan is er nog de methode van Tideman, die meer dan 50 jaar wijnroeier in de provincie Groningen was en het vak leerde van zijn vader, een leerling van Johannes Bernoulli [24] , hoogleraar in de wiskunde te Groningen. De gebruikte inhoudsformule wordt niet gegeven, wel een meetkundige interpretatie.



figuur [94]

De benadering bestaat hierin, dat voor DF (zie figuur) een cirkelstuk genomen wordt, en DB de raaklijn is aan FD in D; het vat ontstaat door wenteling om EC en bestaat uit een bolsegment en een kegelstompen.[168] Maar deze methode werkte niet zo goed - dat zag je met het blote oog al. Tideman was meer bedreven in de praktijk dan in de wetenschap, verklaart Muller; "Hij miste wel eens, en wie gebeurd dat niet", schrijft hij enigszins neerbuigend.
Uit de proeven blijkt, dat de formule van Muller (197) het beste voldoet: bij alle gebruikte soorten vaten geven alle formules een te grote inhoud, maar die van Muller benadert de proefondervindelijke waarde het naast.(Muller heeft rekenfouten gemaakt,

die in het voordeel van zijn formule uitvallen, zo blijkt bij narekenen; maar zijn formule blijft desondanks het beste voldoen, zodat zijn conclusie gerechtvaardigd is).
Empirisch wordt de korrektiefaktor 3/175 ingevoerd, daar het oxhoofd 172 kroezen bevat in plaats van de 175 die (197) geeft; ook de andere vaten worden dan volgens Mullers berekeningen tot op ongeveer ½ kroes korrekt berekend.
De gekorrigeerde formule luidt dus

$$\text{Inhoud vat} = (4pi-3/175)\ (\ l(a-x)^2/2 + (4/3\ a - 3x/5 + 3x^2/(56a)\ ).(2\ a\ x)^{\frac{1}{2}}) \qquad (200)$$

waarmee de tekst afsluit.

7. Een negentiende-eeuwse tekst : R. Lobatto, Proeve eener nieuwe handelwijze ter bepaling van den inhoud der vaten, 1839 [163,165]

Rehuel Lobatto[109] (Amsterdam 1797 - Delft 1866) studeerde wiskunde bij Littwack en van Swinderen en te Brussel bij Quetelet met wie hij Correspondance Mathématique et Physique uitgaf. Naast een ambtelijke carrière - hij was ijker voor maten en gewichten en hoofdinspecteur bij Binnenlandse Zaken - bracht hij het tot hoogleraar aan de Koninklijke academie ter opleiding van burgerlijke ingenieurs en honorair hoogleraar aan de polytechnische school aldaar. Op verzoek van de regering hield hij zich bezig met de standaard-meter, het conversie-plan van minister Rochussen en hij rekende ook tarieven van Levensverzekeringsmaatschappijen na. Verder redigeerde hij van 1828 - 1849 de jaarlijkse statistiek-uitgave en was hij lid van de commissie voor de statistiek. Hij publiceerde vele leerboeken, onder andere Lessen over hogere algebra[164]; in de numerieke wiskunde is zijn naam verbonden aan een integratie-formule.
Zijn wijnroeiboek uit 1839 (zie figuur 95 voor de titelpagina) begint met de klacht over de "onvoldoende staat der Wijnroeikunde" die ondanks theoretische en toegepast-wiskundige inspanning van Lulofs, Muller en de Hartog[166] - die een bastaard-parabool $y^{5/3} = px$ invoerde als genererende kromme voor een omwentelingslichaam - onpraktisch is, vanwege de variatie in het kuiperswerk en de meetonnauwkeurigheid van de vatdimensies; een fout bij het meten van de spondsdiepte geeft een grotere afwijking dan het verschil van de diverse theoretische formules !
Het blijft gissen naar de inwendige bodemsmiddellijn vanwege de onbekende dikte van de duigen; bij het spongat hoeft het vat niet cirkelrond te zijn en daar kan de duig met opzet dunner gemaakt zijn.Men kan de sponsmiddellijn beter meten met een onrekbaar breed lint, merkt Lobatto op - we zagen, dat in het Tractaetken vander Vergierroede al iets dergelijks werd voorgesteld.
Ook de binnenlengte van een vat is zonder kennis van de duigdikte niet af te leiden; de bodemen kunnen van ongelijke dikte zijn.
Het instrument dat Lulofs voorstelde, is in pakhuizen niet bruikbaar; bovendien nam Lulofs te weinig proeven met de steeklijn van vaten. Een ernstig probleem is ook, dat vaten van een soort toch ongelijkvormig kunnen zijn.
In tegenstelling tot de meeste wijnroeiboeken wil Lobatto een eenvoudige benadering gebruiken, zonder hogere wiskunde[167], namelijk die van de twee afgeknotte kegels:

$$\text{Inhoud} = \frac{pi}{4}\ \frac{a^2 + b^2 + 2c^2 + (a+b)\ c}{6}\ H \qquad (201)$$

Als de vaten niet te dik- of te dunbuikig zijn, is de benadering

$$pn = 3/4\ PN$$

PROEVE

EENER NIEUWE HANDELWIJZE,

TER BEPALING VAN

DEN INHOUD DER VATEN,

DOOR

R. LOBATTO,

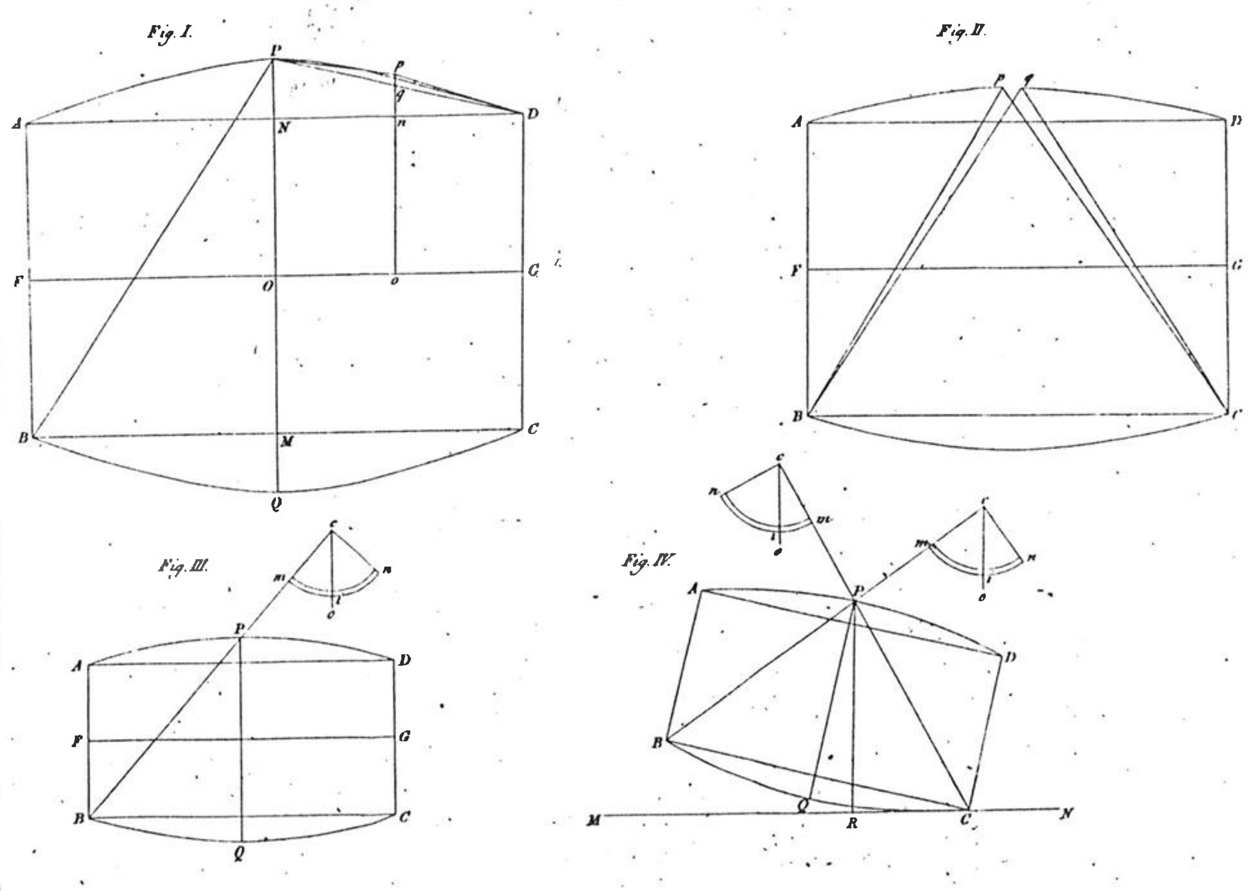
Math. Mag. Phil. Nat. Dr., Adviseur voor de Zaken der Maten en Gewigten bij het Departement van Binnenlandsche Zaken.

MET ÉÉNE PLAAT.

's Gravenhage en Amsterdam,

DE GEBROEDERS VAN CLEEF.

1839.



figuur (95)
titelpagina van Lobatto (1839) met figuren

toegestaan, zodat met

$$v = a - b$$

volgt

$$c = a - v/4$$

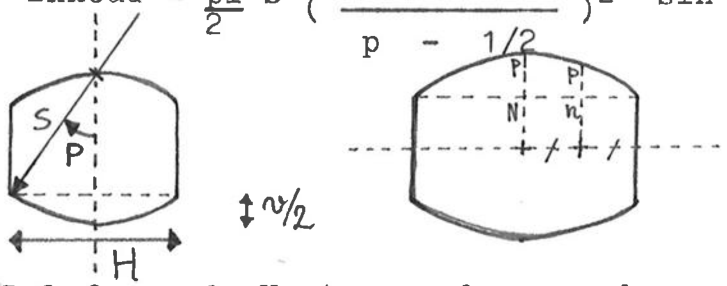
$$\text{Inhoud} = \frac{pi}{4} \left((a - 3v/8)^2 + 17\, v^2/192 \right) H \qquad (202)$$

wat lijkt op een resultaat van De Hartog; met een korrekte afschatting laat Lobatto zien, dat de v^2-term   0,4% van de eerste term uitmaakt en dus verwaarloosd mag worden. Als nu de steeklijn

$$S = H / (2 \sin P)$$

wordt ingevoerd en $p = a/v$ gedefiniëerd wordt, vinden we

$$\text{Inhoud} = \frac{pi}{2} S^3 \left(\frac{p - 3/8}{p - 1/2} \right)^2 \sin P \cos^2 P \qquad (203)$$



figuur [96]

Aan Lulofs en de Hartog worden waarden voor p en de hoek P ontleend, waarmee een correctie-tabel voor afwijkingen van het gemiddelde wordt samengesteld ($5 < p < 10$; $30^o < P < 40^o$); de gemiddelde waarde van de term in p bedraagt 1,041, voor p=6,657. Door de goniometrische factor te maximaliseren ($2/9\ 3^{\frac{1}{2}}$) ontstaat de volgende simpeler uitdrukking, waarop een korrektie moet worden aangebracht

$$\text{Inhoud}' = pi \times 0{,}5205 \times 2/9\ 3^{\frac{1}{2}}\ S^3 \qquad (204)$$

maar

$$\text{Inhoud} = \sin P \cos^2 P \ \text{Inhoud}' / (2/9\ 3^{\frac{1}{2}})$$

$$= (1 - k)\ \text{Inhoud}'$$

In een tabel wordt de korrektiefactor k als funktie van P opgegeven; over p is gemiddeld in de term in (203).
Deze methode van meten vereist wel, dat de steeklijn

$$S = \frac{pB + pC + qB + qC}{4}$$

(zie figuur 95 ; Lobatto's figuur II) en de hoek P met voldoende nauwkeurigheid worden gemeten; dat kan door een cirkelkwadrant van ebbenhout met een schaalverdeling van"witte lijnen of insnijdingen" in $\frac{1}{2}^o$ voorzien van een paslood aan het uiteinde van de meetstok te bevestigen. Om de steeklijn goed te meten is aan het andere uiteinde van de stok een koperen bol - diameter 1 à 2 duim - bevestigd, die tegen de onderkant van de bodems aankomt.
Als het vat scheef ligt, kan men in beide uiterste richtingen - zie figuur 95 ; Lobatto's figuur IV - de hoek P meten en de uitkomsten middelen.
Daarna wordt uitgegaan van het normale vat, waarvan wordt gesteld dat het een maximale inhoud heeft - we kunnen dit vergelijken met Keplers uitspraken over het Oostenrijkse vat in de Messekunst - en uit de bovenstaande formules worden betrekkingen afgeleid tussen de steeklijn, de spondsdiepte en de diameters van de bodems. Met een voorbeeld licht Lobatto dit toe. In verband met zijn kritiek op voorgangers die de meetnauwkeurigheid buiten beschouwing lieten, wordt nu de hier gebruikte dubbele-kegelstomp-bena-

dering vergeleken met een parabolisch vat, met een "naar men zegt" te grote inhoud, vergeleken bij het werkelijke vat.

$$\text{Inhoud}_{\text{parabolisch}} = \frac{pi}{4} (a - v/3)^2 \, H \qquad (205)$$

Als uitgegaan wordt van een meetfout in de spondsdiepte van $a = \frac{1}{2}$ " en in de bodemsdiepte $b = 1$ ", dan

$$\frac{(\Delta \text{ Inhoud})_{\text{formules}}}{(\Delta \text{ Inhoud})_{\text{meetfout}}} = \frac{(2a - 17v/24)\, v \,/\, 24}{(2a - 2v/3).(2\, a/3 + b/3)}$$

$$= \frac{v}{8\,(2\,a + b)} = \frac{v}{16} \qquad (206)$$

Aan de hand van een tabel van de Inhoud als funktie van de parameter v voor normale, dus maximale vaten blijkt dat

$$(\Delta \text{ Inhoud})_{\text{formules}} < (\Delta \text{ Inhoud})_{\text{meetfout}}$$

en wel des te sterker voor kleinere vaten.
Lobatto geeft de voorkeur aan zijn methode (204) en tabelleert de invloed van $S = \frac{1}{2}$ ", de fout in de steeklijn in de vorm van de afhankelijkheid Δ Inhoud (Inhoud).
Blijft over de volume-vermindering door de bodemsdikte: deze kan ook door afgeknotte kegels worden benaderd:

$$\text{Inhoud}_{\text{bodems}} = b^2 (\text{ in palmen}) \; pi/40 \qquad (207)$$

als de hoogte van de afgeknotte kegels, die weer met cilinders benaderd worden $\frac{1}{2}$ " is. Ook nu kan Δ Inhoud (Inhoud) getabelleerd worden. Maar gezien de onzekerheid in de dikte van de bodem gebruikt Lobatto toch liever de originele steeklijn-hoek-methode.
Voorbeelden hiervan met korrektie voor de hoek en voor p, waarvoor eerst een gemiddelde waarde genomen was (vergelijking (204)) volgen; een nieuwe parameter

$$n = 2\,p \,/\, (\,2\,p - 1\,)$$

wordt ingevoerd.
Overigens is voor grote vaten de term in v^2 in (202) niet te verwaarlozen. Lobatto besluit met de realistische uitspraak:
"Men verlieze echter hierbij niet uit het oog, dat welke verbeteringen ooit op het stuk der wijnroeikunde mogen uitgedacht worden, men er nimmer in slagen zal, eene en dezelfde handelwijze voor alle vaten zonder onderscheid, even naauwkeurige uitkomsten, na vergelijking met den waterijk, te zien opleveren." Dit komt door het "ruwe kuiperswerk", de oorzaak dat vaten geen omwentelingslichamen zijn - de doorsnede op de as is eerder een veelhoek dan een cirkel, beide bodems hebben niet altijd dezelfde middellijn en hoeven niet haaks op de lengte-as van het vat te staan. Het is voldoende, als de benadering tot op 2 % korrekt is. Of deze methode goed is, kan alleen de praktijk leren.

8. Overzicht en besluit.

In het voorgaande hebben we de pogingen van 20 auteurs om de inhoud van vaten te berekenen of te bepalen besproken, waarbij we verschillende soorten wijnroeiteksten zijn tegengekomen:

1 - algemeen-stereometrische teksten, waarin de inhoudsbepaling van vaten slechts een van de vele problemen is (Metrika van Hero, Geometria incerti auctoris, Tractatus Quadrantis van Robertus Anglicus, Practica Geometriae van Dominicus de Clavasio);

2 - algemene wiskundige teksten, waarin behalve meetkunde (geometria) ook rekenkunde (arithmetica) behandeld wordt en naast andere toepassingen daarvan, bijvoorbeeld landmeten of vestingbouw, ook het wijnroeien aan de orde komt (Gielis vanden Hoecke: Een sonderlinghe boeck..(1537), Adriaan Metius: Manuale Arithmeticae et Geometricae practicae (1634), Abraham de Graaf: De geheele mathesis..(1694), het manuscript van D. Anemaet).

3 - de wijnroeitekst, die niet meer dan een primitief recept geeft (Stromer, Codex 3083)

4 - de uitsluitend aan wijnroeien gewijde specialistische verhandeling (Tractaetken vander Vergierroede, de la Rose: Meet- en Pegel const(1639), Eversdijck: Tafelen van de Wannemate(1655), dat zelfs alleen over deels lege vaten gaat, C.M. Anhaltin:Oprecht.. Schoolboeck..(1663), de Graad:De nieuwe en vermeerder Roykunst (1679), Muller: Proeve..(1780), Lobatto: Proeve..(1839))

5 - het uitgebreide wijnroeiboek met didactische bedoelingen, dat ook veel aandacht aan de theorie van het wijnroeien schenkt (Kepler: Messekunst Archimedis (1616), dat de lezer langs stereometrische weg opleidt tot een wiskundig hoogstaand wijnroeier; Lulofs: Grondbeginselen(1764), dat de lezer vanuit de arithmetica en - fakultatief - de integraalrekening een komplete leergang tot wijnroeier aanbiedt).

De wijnroeitekst behoort tot het genre van de technische literatuur, dus bewijzen ontbreken, terwijl juist praktische recepten met uitgewerkte voorbeelden gegeven worden. In bijgaande tabel worden besproken teksten met elkaar vergeleken op een aantal punten, zoals motivatie , methode van wijnroeien die wordt behandeld en enkele details van de wiskundige aanpak; de teksten uit de voorgeschiedenis van het wijnroeien in eigenlijke zin en de beide manuscripten zijn uit deze tabel weggelaten.
Zoals Folkerts(1974)[6] opmerkte, bestonden er in de late middeleeuwen en de vroege renaissance twee standaardmethoden voor het wijnroeien: met de kwadraat- en met de kubiekroede. Ook in de zeventiende-eeuwse nederlandse teksten, die Folkerts niet in beschouwing nam, treffen we een standaard-aanpak aan, maar nu worden beide methoden onderwezen in de zelfde tekst en tevens is een standaard-methode voor de berekening van de inhoud van deels lege vaten ontwikkeld, onder andere met de methode van het afgekorte vat en cirkelsegmenten, waarbij naar een werk van Cardinaal wordt verwezen. De wijnroeier wordt geacht vertrouwd te zijn met de stellingen van Euclides en met de goniometrie; hij bezit een veelzijdig toepasbare wiskundige kennis en kan bijvoorbeeld ook landmeten. De inhoudsbepaling van het wijnvat wordt dan ook als een bijzonder stereometrisch probleem gezien, dat met ook elders toegepaste wiskundige hulpmiddelen kan worden opgelost. Uit de teksten blijkt, dat men zich ervan bewust is, alleen benaderde oplossingen te kunnen geven; vaak worden schattingen van de nauwkeurigheid van de uitkomst gegeven. Dit zijn we niet tegengekomen in teksten voor de zeventiende eeuw. Dit alles brengt met zich mee, dat van de wijnroeier een grote rekenvaardigheid wordt verwacht: zo moet hij bijvoorbeeld kunnen worteltrekken.
Soms worden voor het probleem van het"wanne" - dus het deels lege-vat empirische oplossingen aangereikt: Metius geeft peiltafels voor diverse soorten vaten, de Graad leert ons hoe we empirisch een peilstok voor een soort vat kunnen maken (dit leerde Metius

auteur	motivatie	kwadraat-/kubiek-roede		wanmeting	verdere toepassing	pi
Stromer 1400	(handel)	+	-	-	-	-
Codex 3083	-	+	-	-	-	-
Tractaetken	-	+	-	-	-	22/7, 3
Vanden Hoecke 1537	praktische wiskunde	+	-	-	bakken etc	22/7
Kepler 1616	maatschappelijk, theorie, Oostenrijkse roede is korrekt	is ertegen	+	+	metaal, steen, kogels, kannonnen	16 decimalen
Metius 1634	leerboek voor jonge ingenieur	+	+	+	metaal kogels kanonnen	$\frac{355}{113}$
De la Rose 1639	handel, maatschappelijk	+	+	+ korrektietabel	-	$\frac{355}{113}$
Eversdijk 1655	-	-	-	+ stok	-	-
Anhaltin 1663	handel, polemiek	+	+	+	ijzeren kogels	$\frac{355}{113}$, 13 decimal.
de Graad 1679	maatschappelijk, handel	+	+	+ stok	metaal, kogels	$\frac{355}{113}$
de Graaf 1694	deel van de wiskunde, leerboek	+	+	+	-	314159
Lulofs 1764	belastingheffing; in opdracht overheid nieuwe methode	+	+	+ vat rechtop kegelstomp	-	22/7, $\frac{355}{113}$
Muller 1780	belastingheffing, betere methode	-	-	-	-	-
Lobatto 1839	verbetering methode	-	-	-	-	-

In dit vergelijkende overzicht van in deze scriptie besproken wijnroeiteksten zijn de beide manuscripten 10 B 5 (1694) en D. B. Anemaet (kubiekroede respectievelijk cilindermiddeling voor een vat)) buiten beschouwing gelaten.

auteur	afgekort vat	experimenten	bijzonderheden	vat als: cilinder	kegelstomp
Stromer 1400	-	-	oudste tekst (duits)	+	-
Codex 3083	-	-	(duits), 2 stokken	+	-
Tractaetken	-	-	haak, tintroede,pijp, riem, droesemaftrek,regels	+	-
Vanden Hoecke 1537	-	-	haak, 2 stokken algemeen rekenboek	+	+
Kepler 1616	-	(+)	zeer uitgebreid, stereometrie, nadruk op theorie, rectificatie omwentelingslichamen	+	+
Metius 1634	+	-	inventie proportionaalpasser voor vol en wan vat; kanon als kegelstomp	+	-
De la Rose 1639	+	-	proportionaalpasser idem uitgebreider uitgelegd, pegelstok voor speciaal vat ermee maken	+	-
Eversdijck 1655	+	-	"afgecort vat"gaat bij wanmeting op voor kantig vat	+	+
Anhaltin 1663	+	-	maakt deel uit van polemiek met C.Sz. van Leeuwen	+	-
De Graad 1679	+	-	stellingen van Archimedes met bewijs opgenomen, parabolen, berekening gewelf e.d.	+	-
De Graaf 1694	+	-	vergelijking lineaire middeling met kwadratisch en kegelstomp, kegelstomp met cirkelboog-vat vergeleken. Algemeen wiskunde-leerboek	+	+
Lulofs 1764	+	+	zeer uitgebreid leerboek, overzicht wijnroeitheorie in Europa, ijking van Nederlandse maten, logarithmen, toetsing theorie met diverse vatvormen, schuifschaal(= rekenlineaal)	+	+
Muller 1780	-	+	vergelijking en toetsing diverse formules (theorieën)met de zijne, maten worden lineair opgenomen	-	-
Lobatto 1839	-	-	nieuwe meetmethode: meet steeklijn en hoek (met kwadrant aan meetstok); logarithmen	-	+

Nota bene : de methode van het afgekorte vat (de term is van Eversdijck (1655)) werd bij de wanmeting toegepast.

auteur	vat als ander omwentelingslichaam	schatting precisie	lin/kwad. middelen		infi/formules		wortels algebraies/meetkundig.	
Stromer 1400	-	-	-	-	-	-	-	+
Codex 3083	-	-	-	-	-	-	-	+
Tractaetken	-	-	-	+	-	-	-	+
Vanden Hoecke 1537	-	-	-	+	-	-	+	+
Kepler 1616	+ cirkel en andere kegelsneden	+	- is ertegen		(+) tegen cossa:	-	-	-
Metius 1634	-	-	+?	+	-	-	-	+
De la Rose 1639	-	+	-	+	-	-	-	+
Eversdijck 1655	-	+			-	-	-	-
Anhaltin 1663	-	-	+ is ertegen		-	-	-	+ leert ons staartoperatie
De Graad 1679	-	-	+	-	-	-	-	+ leert ons staartoperatie
De Graaf 1694	+cirkel	+	+	+	-	+	+	+
Lulofs 1764	+ cirkel en andere kegelsneden, kombinaties	+	is tegen beide methoden		+	+		
Muller 1780	+ schulptrek	-	-	-	+	+	-	-
Lobatto 1839	-	+	-	-	-	+	-	-

ons ook al).

Dat een standaard-methode in de nederlandse zeventiende eeuwse wijnroeiteksten gehanteerd wordt, doet een verband vermoeden tussen deze teksten; in figuur 97 is een diagram van de afhankelijkheid van verschillende behandelde teksten getekend, voor zover enig verband blijkt door uitdrukkelijke verwijzing. Opvallend is, dat bij alle overeenkomsten van de teksten toch in elke tekst andere numerieke voorbeelden gegeven worden, behalve bij de Graaf(1694), wiens voorbeelden voor een groot deel dezelfde zijn als bij Anhaltin(1663)- deze ontleende hij dus aan Anhaltin, of beiden betrokken ze uit een hier niet behandelde gezamenlijke bron.

Experimentele toetsing van rekenmethoden hebben we het eerst aangetroffen bij Lulofs(1764); inmiddels heeft de differentiaal- en integraalrekening zijn intrede gedaan en vele nieuwe benaderingen van de vatinhoud mogelijk gemaakt. Uit de veelheid van inhoudsformules die Lulofs citeert, blijkt dat althans wat de theorie betreft, er van een standaard-aanpak geen sprake meer is - deze ontwikkeling van nieuwe gevarieerde methoden gaat terug op Keplers Nova Stereometria Doliorum (1615), maar de invloed van dit werk moet gezien de moeilijkheidsgraad, ook van het populaire Messekunst(1616), gering geacht worden voor de praktijk van het wijnroeien. Kennelijk duurde het tot de achttiende eeuw voor het wijnroeien algemeen door wiskundigen als exercitie-terrein voor moderne wiskundige methoden werd ontdekt, wat in de genoemde veelheid van benaderingen resulteerde.

Lulofs begrijpt dat infinitesimaalrekening voor de gemene wijnroeier wellicht te hoog gegrepen is, en vereenvoudigt de door hem geselecteerde beste benadering van de vatvorm (door Camus), zodat een eenvoudige uitdrukking voor de inhoud wordt gevonden, die beter voldoen moet dan de overoude middeling van in- en omgeschreven cilinders; deze werd in de praktijk nog steeds in de achttiende eeuw toegepast.

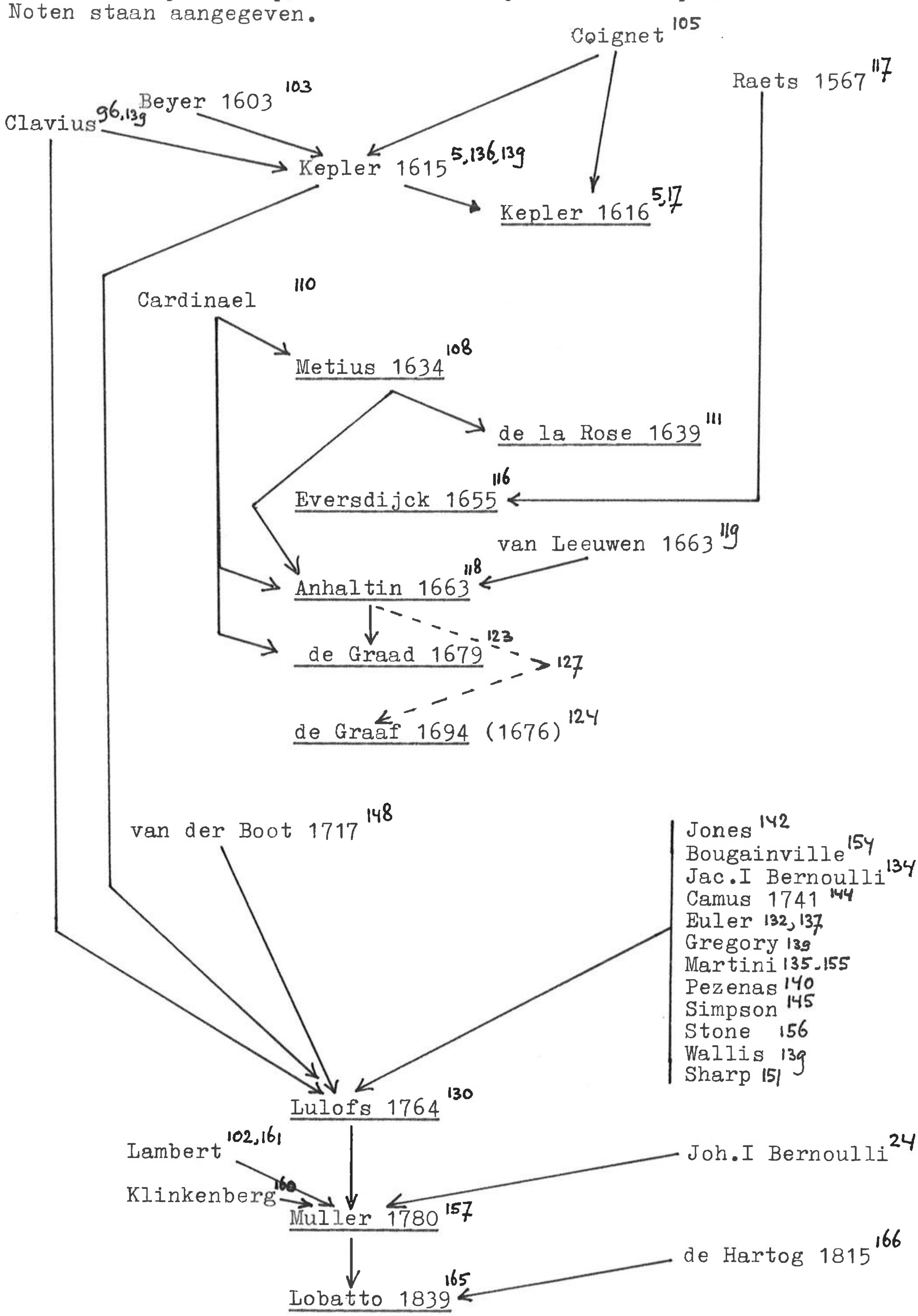
Het werk van Muller (1780) houdt een originele benadering van de vatvorm in, die past in de genoemde trend om met infinitesimaalrekening een uitdrukking voor de inhoud te vinden (Euler,Johan en Jacob Bernoulli, Camus en anderen); ondanks de experimentele bevestiging van zijn uitkomst, zoals blijkt uit zijn meetresultaten, moet aan de praktische waarde getwijfeld worden.

Lobatto(1839) doet dit inderdaad en vergelijkt de verschillen tussen de verschillende theoretische benaderingen van de vatvorm met de onzekerheid, die meetfouten veroorzaken; daar meetfouten een grotere invloed op de uitkomst blijken te hebben dan de keuze van de inhoudsformule, kiest Lobatto voor de simpele benadering van de twee kegelstompen, die al in de middeleeuwen was voorgesteld, door vanden Hoecke toegepast, maar door Kepler verworpen.

Op het instrumentele vlak zien we dat bij Stromer een meetstok met twee schaalverdelingen wordt aanbevolen; in het Tractaetken is sprake van een viertal werktuigen (wijnroede, pijp, tintroede en haak), voor meting en ijking. Folkerts(1974)[6] noemt het gebruik van hulpmiddelen als mediaal en wisselroede; deze instrumenten hebben we in nederlandstalige teksten niet ontmoet, behalve in de titel van een boek van Willem Raets, waarin de wisselroede genoemd wordt. Misschien mag men hieruit tot een grotere rekenvaardigheid van de latere wijnroeier besluiten. Bij Metius(1634) vinden we weer de meetstok met lineaire en kwadratische of kubische schaalverdeling, en tevens een voor het wijnroeien aangepaste proportionele passer, die de la Rose(1639) waarschijnlijk van hem heeft overgenomen. Lulofs voert een rekenlineaal voor de inhoudsberekening in, een "schuifschaal", die hij ontwerpt naar voorbeeld van een engels model; eerder had van der Boot ook al een dergelijk hulpmiddel beschreven (1717). In de zeventiende eeuw al kwamen in Nederland peilstokken voor(Eversdijck(1655), de Graad(1679)). De achttiende eeuwse wijnroedes, beschreven in bijlage 2, vormen precisie-instrumenten waarop alle soorten genoemde schaalverdelingen voorkomen.

Figuur [97]

Citeerboom : auteurs van wijnroeiteksten citeren collega's.
In deze scriptie besproken teksten zijn onderstreept.
Noten staan aangegeven.



Tenslotte vinden we bij Lobatto(1839) een nieuwe meetmethode, waarbij zowel van de diagonaal van het halve vat, als van de hoek die deze maakt, gebruik wordt gemaakt: de wijnroede wordt met een quadrant uitgerust.
Hoewel in deze scriptie maar een deel van de bekende West-Europese wijnroeiteksten aan de orde is geweest, kunnen we onder voorbehoud toch de volgende indeling in perioden voorstellen(helaas zijn belangrijke schakels als Cardinaal en van der Boot(1717,1719) hier niet onderzocht):

1. voorgeschiedenis van het wijnroeien: oudheid tot in de veertiende eeuw. Het probleem van de inhoud van vaten wordt behandeld in het kader van de stereometrie volgens diverse methoden; dit wijst erop, dat het een academisch, geen praktisch probleem was.
2. vroege periode van het wijnroeien: de gestegen handel, ook in wijnen en dergelijke, riep een standaard-methode voor de inhoudsmeting van vaten in het leven; een ad hoc oplossing dus. Van de wijnroeier werd geen grote wiskundige vaardigheid verwacht (veertiende eeuw - circa 1600).
3. middelste periode: uit de nederlandse teksten blijkt, dat zowel kwadraat- als kubiekroede door de wijnroeiers gehanteerd worden, terwijl ook voor de inhoudsbepaling van deels lege vaten een standaard-methode is gevonden. De wijnroeier is een toegepast wiskundige, die Euclides en goniometrie kent en bijvoorbeeld ook kan landmeten.(circa 1600 - achttiende eeuw)
4. late periode (achttiende eeuw): met behulp van infinitesimaalrekening worden nieuwe, diverse benaderingen gevonden
5. eindperiode (negentiende eeuw): een wiskundige als Lobatto overziet de ontwikkeling en doet praktische,effektieve en eenvoudige aanbevelingen.

De werkelijke invloed op de praktijk van het wijnroeien kan niet uit wijnroeiteksten worden afgelezen; daarom is deze indeling zeer voorlopig - bovendien is uit periode 5 maar een werk onderzocht.
Men mag concluderen, dat het bepalen van de inhoud van vaten een stereometrisch probleem vormt, waarvoor geen exacte oplossing gevonden kan worden; de stand van de wijnroeierij vormt daardoor in elke periode een graadmeter van het peil van de toegepaste wiskunde.

Naspel.

Op deze plaats zou ik gaarne de volhardende lezer, die het tot hier heeft gebracht, willen belonen met de verering van een klein wijnvat, middelbaar van buik, rolrond en geheel gevuld, ware het niet, dat ik zelf geheelonthouder[170] ben. Dat verbaast U in een pegelaar ?
Welnu, voor een wijnroeier - want dat zijn U, lezer en ik inmiddels vrijwel, op een korte stage bij een vakman na - is matigheid met wijn geen buitenissige deugd, getuige Anthoni van Leeuwenhoek[11] (1632 - 1723), wijnroeier te Delft:
"..Ik ben gansch geen wijndrincker", schreef hij in 1679, "maer als ick een gast heb, ofte een anders gast ben, en bij die occasie des avonts een glas te veel drinck, soo ben ick des anderen daegs vrij sieck : ja al mijn leden doen mij seer, en om te herstellen, drinck ick dan smorgens 8 à 10 kopiens thee ... kookende heet...Waer door ick dan soo kome te zweeten, dat niet alleen de droppelen sweet bij mijn aengesicht neder lopen, maer mijn hemt aen mijn lijff nat besweet is, en door soodanich thee drincken, ben ick aenstonts weder herstelt." [171]
De bepaling van de inhoud van een theekopje kost ons inmiddels geen enkele moeite meer: na lezing van Keplers Messekunst[17] is dat toch kinderspel. We mogen gevoegelijk aannemen, dat de inhoud van de wijnvaten, waardoor Keplers belangstelling voor de doliometrie gewekt werd, voor een belangrijk deel hem ten goede is gekomen, als urenlang gecijfer hem dorstig had gemaakt. "Veroordeel me niet tot uitsluitend sjokken in de tredmolen van wiskundige berekeningen, gun me tijd voor wijsgerige bespiegelingen, mijn enige vreugde" verzuchtte hij in een brief.[172]
Laten we aannnemen dat een goed glas wijn, uit zijn vat getapt met de hevel, hem bij het speculeren bijstond.
In 1615 besloot Kepler zijn Stereometria Doliorum[5] met de volgende, toepasselijke woorden - ook deze scriptie werd dikker dan voorzien - "Het was mijn bedoeling de dwalingen van anderen ten aanzien van zowel gehele wijnvaten als het volume van lege delen ervan aan het licht te brengen en met de stellingen van dit boek de grondslagen voor bewijzen aan te geven. Maar omdat de enige waarheid, zelfs als ze niet klinkt, opweegt tegen het misbaar van dwalingen en omdat het boek, dat oorspronkelijk nauwelijks 10 stellingen bevatte, boven verwachting is uitgegroeid, moeten we degenen die plezier hebben in hun dwalingen, dat plezier maar gunnen. Laten wij profiteren van onze voorsprong; we zullen bidden dat ons bij goede gezondheid van lichaam en geest voldoende stof tot genieten ter beschikking staat.

> En als we duizend bekers zullen hebben gemeten
> schrappen we de getallen, om alles te vergeten." [173]

Dankwoord.

De Universiteitsbibliotheek Utrecht en in het bijzonder de heer R.H.L.M. Pijls van de Leeszaal Handschriften/Oude Drukken gaf mij vele wijnroeiteksten in handen; de heer Pijls ben ik ook zeer dankbaar voor een aantal illustraties.
Prof. H.J.M. Bos heeft veel geduld gehad voordat deze scriptie hem uiteindelijk bereikte.
Het Instituut voor de Geschiedenis van de Natuurwetenschappen te Utrecht was zo vriendelijk mij een deel van Keplers verzamelde werk zeer lang uit te lenen.
Een staflid van het Instituut Frantzen voor duitse taal en letterkunde dank ik voor de uitleg bij de tekst van Codex 3083.
De heren Robert Frederik, ir. Jan Deiman en Pieter Smiesing van het Universiteitsmuseum te Utrecht haalden voor mij hun vier wijnroedes uit de kast en maakten zo bijlage II mogelijk.
Behalve de genoemde personen en instellingen dank ik ook ir. E. Muller te Bunnik voor referenties en belangstelling.
De Koninklijke Bibliotheek te Den Haag en de Provinciale Bibliotheek van Friesland te Leeuwarden dank ik voor de uitlening van oude drukken en de toezending van fotokopieën.

BIJLAGE I

Niet-besproken nederlandse wijnroeiteksten

De titels zijn ontleend aan:
F = Folkerts (1974) (zie noot 6)
BB = D. Bierens de Haan: Bouwstoffen voor de geschiedenis der wis- en natuurkundige wetenschappen in de Nederlanden; overgedrukt uit de Verslagen en Mededeelingen der K.A.W. Afd. Natuurkunde, 2e reeks, Deel VIII, IX, X en XII, Leiden 1878
BN= D. Bierens de Haan : Bibliographie Néerlandaise Historique-Scientifique des ouvrages importants...., Rome 1883 of 18

1. Anonymus : Die waerachtige const der Geometrien...Hoemen oock maken sal die wijnroede, om daer mede te roeden alderhande tonnen vaten cuypen backen ende dier ghelijcke; gedrukt; Brussel 1513, Antwerpen 1547 F

2. Gielis vanden Hoecke : In Arithmetica/een sonderlinge excellent boeck..; gedrukt; Antwerpen 1545 F

3. Willem Raets : Practyck om lichtelyck te leeren visieren alle vaten metter wisselroede; gedrukt; ingebonden bij: Willem Raets: Arithmetica;gedrukt; Antwerpen 1566 F

Figuur (98)
Titelpagina van Niet-besproken tekst 4
Illustratie uit Folkerts (1974)[6]

PRACTYCKE
Om lichtelijc te leeren visieren alle Vaten metter Wisselroede:
Door VVillem Raedts, Maestrichter.

Van nieus oversien, ende in veel plaetsen verbetert, ende met seer profytelycke aenvvysingben vermeerdert, ende verciert: Door Michiel Coignet.

T'hantwerpen,
By Hendrick Hendricksen. 1580.
Met Privilegie van X. Jaren.

4. Willem Raets : Arithmetica Oft Een nieuw Cyfferboeck...Met noch een Tractaet vande Wisselroede, met Annotatien verciert, door Michiel Coignet; gedrukt, Antwerpen 1580 en Antwerpen 1597. F

5. Anonymus : Tresoir vande Maten, van Gewichten, van Coorn, Lande, vande Elle ende natte Mate, oock vanden Gelde ende Wissel, Amsterdam 1590; gedrukt F

6. Martin vanden Dijcke : Instructie, om de Wijnroede, ende Peghelstock te maken; Antwerpen 1600; gedrukt F

7. C.F. Evers dijck : Tractaet van de Wijnroede. Middelburg, 1613 en 1618; gedrukt, Symon Moulert BN

8. Franciscus van Schooten : Meetingen van Allerley Formen van Corpora.........(op pag 279-281:) Vant wijn Roeijen of Meeten van allerley vaten grootte, manuscript, circa 1620-1625 (UB Leiden) BB

9. Sybrandt Hansz. Cardinael : Over het Wijnroeien (sic) BB

10. Cornelis Saskerszn. van Leeuwen : Schoolboeck der Wijnroeijerijen. Met Aenhangh, Amsterdam 1663; gedrukt , Hendrick Donker BN

11. Johannes van der Boodt (of Boot) :Beknopte Wijnroey-Konst... Mitsgaders Hoe men...sal maken een...Quadraat- en Cubic-Roede.. en Proportionale Schrijfstok...Benevens Bijvoegsel met 70... Questien. Amsterdam. Johannes Loots 1717 gedrukt BN

12. idem : Aenhang op de Beknopte Wijnroey-Konst, ib.id,1719 BN

13. J. Vaerman : Academia Mathematica of Oeffen School van der Wiskonst..... IV. De Roey-Konst, op het alder-nauwkeurigst beschreven met het leeren maken de Quadraat, de Cubic en de Wannemaat Roede....Brugghe. Pieter van de Cappelle, 1720 gedrukt BN

14. Johannes Morgenster en Johann Hermann Knoop : Werkdadige Meetkunst;(pag. 587-625:) Pegelkunde of Wijnroeien, 1744, gedrukt (TH DELFT)

15. D. Klinkenberg : Verhandeling over de Pegelkunde...door de fluxie-rekeningen. Haarlem 1757, gedrukt BN

16. G. le Page : De Cijferkonste, item de Grondtregels Der Geometrie Met de Landtmeterije. Alsoock de Wijnroeyers-Konste ende de maniere om Sonnewijzers te maecken. Loven, Joann.Franc. van Overbeke, 1769 gedrukt BN

17. M. Muller : Specimen de optima Methodo investigandi capacitatem Doliorum, Groningen, Jacobus Bolt, 1775, gedrukt BN

18. J.F. van Beeck Calkoen : Over de verschillende theorieën om de inhoud van vaten te berekenen, Rotterdam 1810, gedrukt BN

19. P.J. Baudet : Peiltafelen voor de meest gebruikelijke vaten. Deveneter, J. de Lange 1815, gedrukt BN

20. H. de Hartog : Nieuwe Theorie der Wijnroei- en Peilkunde, Amsterdam P.E. Briet, 1815 gedrukt BN

21. G. Kuijper en A.L. Wichers : Beknopte Beschrijving van Werktuigen ter unificatie van inhoudsmaten voor droge waren, Groningen J. Oomkens, 1827, gedrukt BN

22. J. Freni : Beknopte Handleiding om ... vaatwerk van allerlei gedaante...naauwkeurig te roeyen. Bosch, H. Palier en Zn,1838 gedrukt BN

23. F.J. Stamkart : Verhandeling over de meetkundige inhoudsvinding der Nederlandsche Maten. 's Gravenhage 1844, gedrukt BN

24. H. van Blanken : Beginselen van Roei- en Peilkunde. Deventer, A. Tjaden, 1857, gedrukt BN.

N.B. BN vermeldt ook de auteur A.B. van Persijn, maar geen titel. Tevens deelt BN het werk van H. de Hartog : Nieuwe Manier om schepen te meten, 1828 Amsterdam in onder de rubriek Jaugeage.

BIJLAGE II

Vier wijnroedes uit de achttiende eeuw

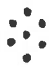
Het Universiteitsmuseum te Utrecht heeft in haar collectie een viertal wijnroedes uit de achttiende eeuw, deels afkomstig van de Fundatie van Renswoude. Het is bekend dat de wiskundige Laurens Praalder (1711 - 1793), die aan deze instelling voor de opleiding van wezen les gaf, door de Fundatie een kwadraat- en een kubiekroede liet aanschaffen.
De staf van het Museum was zo vriendelijk mij toe te staan, de volgende stokken te onderzoeken:

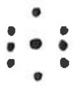
nummer	code Museum	materiaal	aantal en soort schaalverdelingen	opbouw	foedraal
1	ME 52	bruin mahonie	3: L, Q en C	1-delig	geen
2	UM 259	zwart hout	16:L, Q, C en W	4-delig	2-delig dun
3	UM 259	idem	7: L, Q, C en W	6-delig	half (rode rand)
4	UM 259	idem	6: L, Q en C	6-delig	2-delig (dik)

L=lineair Q=kwadratisch C=kubisch W=wan (voor deels lege vaten)

Alle stokken hebben een vierkante doorsnede en dragen messing beslag; de merken op de schaalverdelingen kunnen bestaan uit strepen met bijbehorende cijfers, of uit de koppen van spijkertjes. Deze kopjes zijn verzilverd (geweest), maar zijn vaak moeilijk te zien. De volgende spikkelnotatie werd met deze spijkerkopjes aangebracht:

• = 1 of eenheid : = vijftal ⁝ = tiental

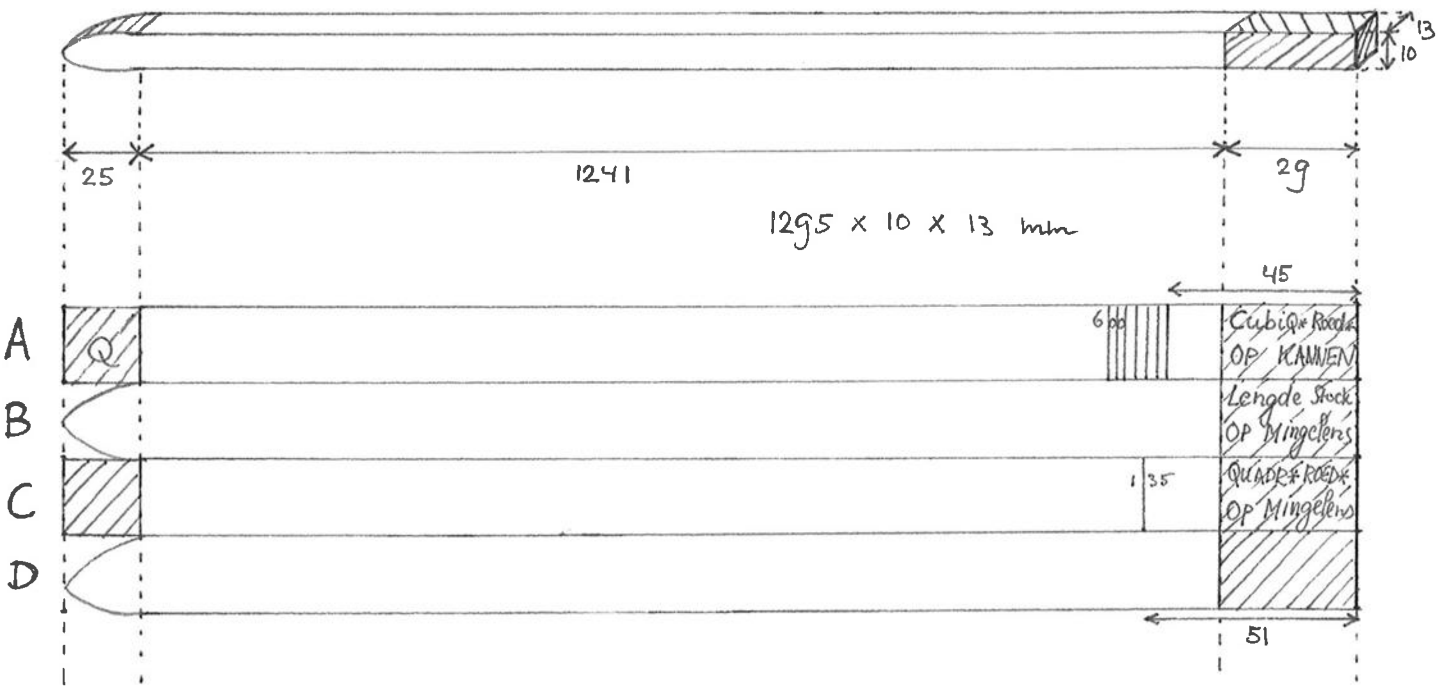
 = vijftigtal  = honderdtal  = vijfhonderdtal

 = duizendtal

Af en toe kan men een misslag zien die gekorrigeerd is, bijvoorbeeld bij 140 op de Bb schaal van stok 4 (zie onder).
De stokken 2, 3 en 4 zijn alle van de Fundatie van Renswoude afkomstig; stok 4 en 3 zijn gelijksoortig, maar omdat de segménten van 4 beter passen, is deze stok veel preciezer; schaalverdelingen voor het peilen van deels lege vaten, in bovenstaande tabel met W aangeduid bevinden zich alleen op de stokken 2 en 3. Hieronder is bij stok 2 een tabel van de meetresultaten gegeven, waarbij vanuit beide uiteinden van de schaal gemeten is - zoals bij de bespreking van het Manuale van Metius (1634) bleek, moet een pegeltabel symmetrisch zijn ten opzichte van het midden (=half leeg).
Hierna volgt een overzicht van de stokken en hun schalen; metaal beslag is gearceerd weergegeven. De fouten zijn met behulp van de grondslag van een schaal, zoals die wordt opgegeven, berekend; behalve die in de wan-schalen - zie het voorbeeld bij stok 2.

De diagrammen zijn niet op schaal getekend.

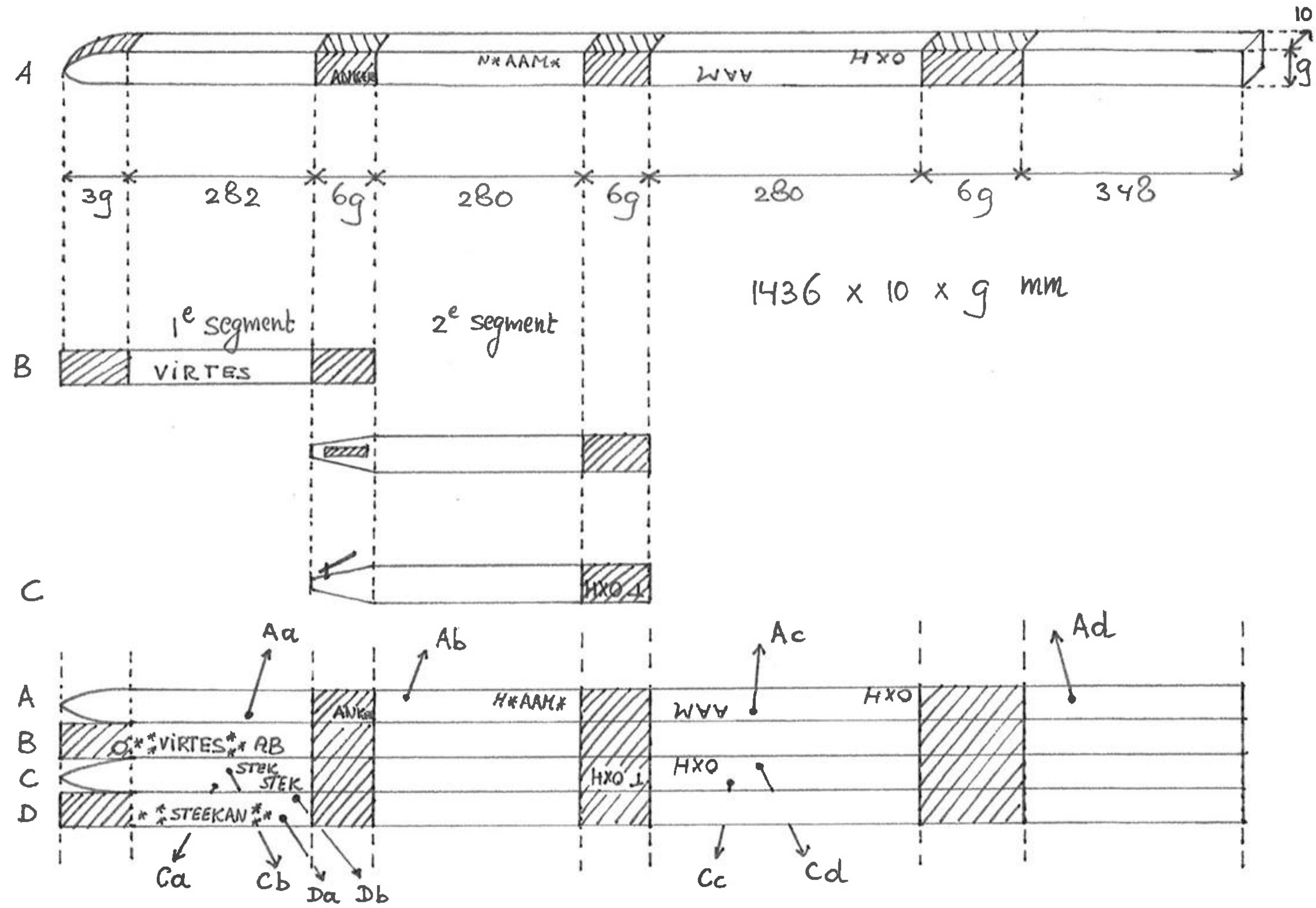
Wijnroede 1 (ME 52)



zijde	opschrift	bereik	richting	soort	grondslag+fout		merk
A	Cubicq Roed Op Kannen	1 - 660	⟶	kubisch	1=141mm	2%	cijfer en streep
B	Lengde Stock Op Mingelens	1- 13	⟶	lineair	1= 92,5mm		" " en punt
C	Quadr Roed Op Mingelens	1 - 135	⟶	kwadratisch	1=106 mm	1%	cijfer en streep
D	-	-		-	-	-	-

De schaaleenheid van B is zo gekozen, dat de totale lengte van de stok met 14 eenheden overeenkomt.
Op zijde A is aan de punt een indruk in het messing te zien, waarschijnlijk van de bevestiging ("Q").
Zijde D is blanco.

Wijnroede 2 (UM 259)



kant		opschrift	bereik	richting	soort	grondslag	fout	merk
A	a	ANKER	1 - 32	→	wan	buik=360mm	7%	streep en cijfer
	b	H(?) AAM	1 - 64	→	"	" =450	5%	" "
	c	AAM	½ - 8	←	"	" =562	2%	" "
	d	H OXH	½ - 6	←	"	" =485	1%	" "
B		VIRTES	1 -900	→	kubisch	10=305 mm	2,4%	stippel
		-	10-215	→	"	10=490	0,5%	stippel
		-	1 -240	→	"	1 =230	<1‰	streep en cijfer
C	a	STEK	1 - 16	→	wan	buik=287mm	5‰	" "
	b	STEK	1 - 8	→	"	" =223	3%	" "
	c	T OXH	1 - 16	←	"	" =656	1%	" "
	d	(?) OXH	1 - 12	←	"	" =710	7%	" "
	b	-	1 - 24	→	"	" =645	4%	stippel
	c	-	1 - 28	←	"	" =682(?)		"
D	a	STEKAN	1-16=1-94	→	kubisch	16=1=316mm	≤1,5%	streep en cijfer
	a	- of "(?)	1 -112?	→	kwadraat	1=133 mm	5‰	punt
	b	-	1 -120	→	lineair	20=236 mm	5‰	" en cijfer

Tabel van Aa:

inhoud		diepte (mm)	
1	31	26	
4	28	62	71
8	24	105	109
12	20	146	148
16		179	181

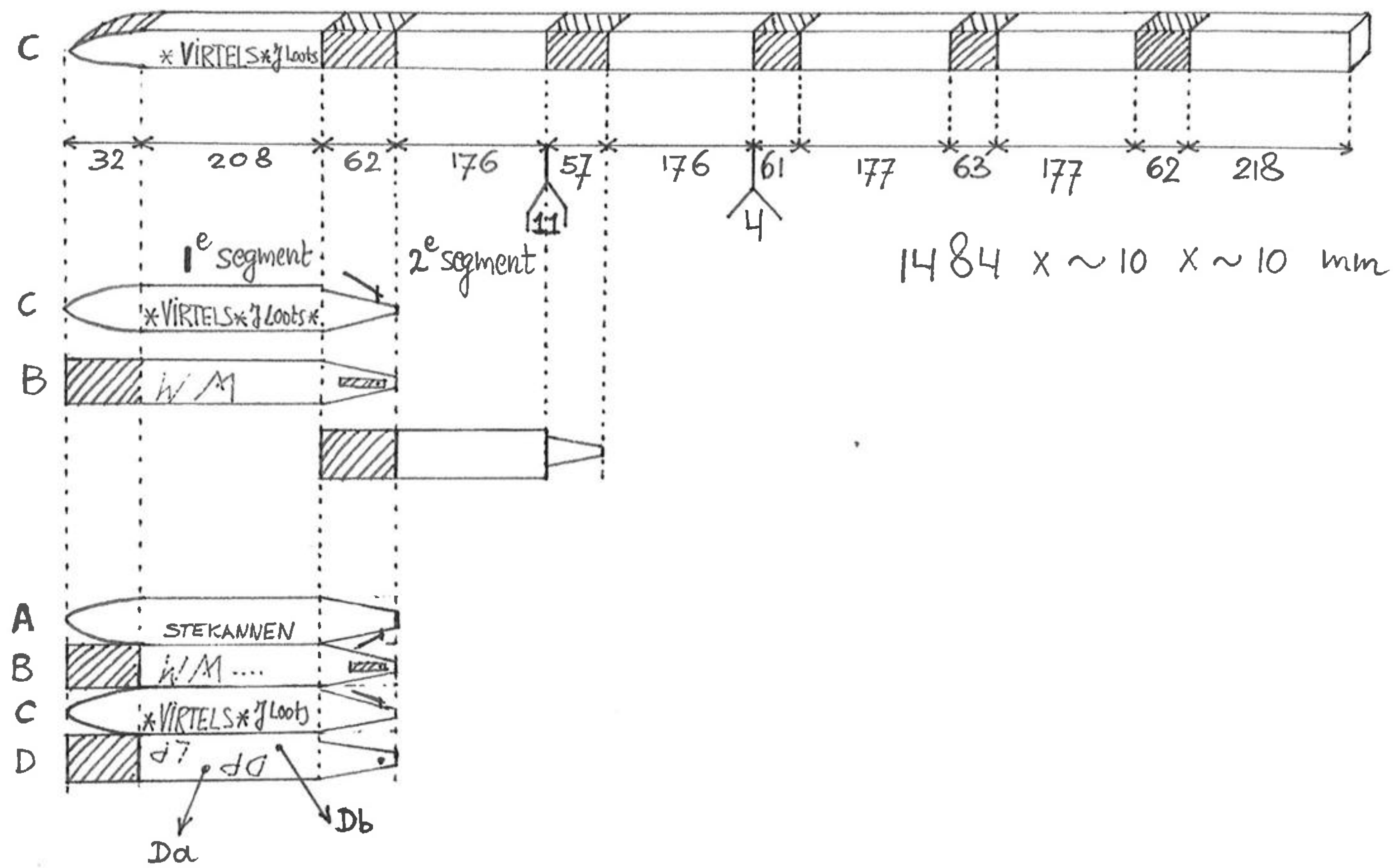
konklusie : diepte = 360 mm

$$\text{fout} \leq 7\% = \frac{(71-62)/2}{(71+62)/2}$$

De andere wan-schaalverdelingen hebben een soortgelijke opbouw.

Bij D a: 16 mingelen = 1 steekan; het eerste deel van de schaalverdeling wordt in beide maten uitgedrukt.

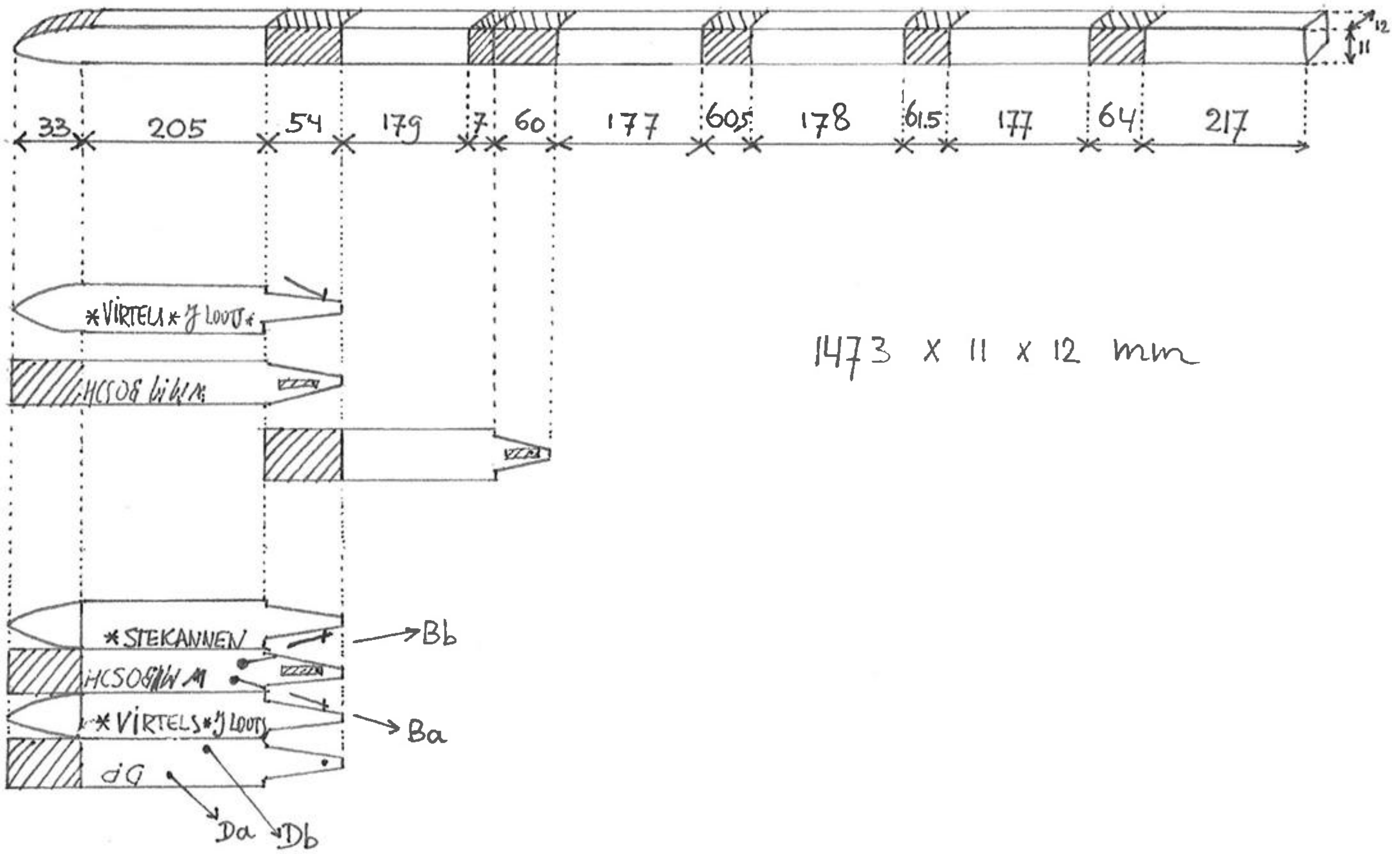
Wijnroede 3 (UM 259)



zijde	opschrift	bereik	richting	soort	grondslag	fout	merk
A	STEKANNEN	1-16=1-100	⟶	kubisch	1=127mm	1,3%	streep
					16=1=318mm	0,6%	en cijfer
	-	1 -	⟶	wan			
B	WM	1 - 50	⟶	kubisch	1=144mm	0,8%	punt
C	VIRTELS J LOOTS	1-260	⟶	"	1=232mm	0,2%	streep en cijfer
	-	?	⟶	wan	?	?	punt
Da	[illegible]	1 -120	⟶	kwadratisch	1=134mm	0,7%	"
b	[illegible]	1 --120	⟶	lineair	10=120mm	1 %	"

De wijnroede heeft messing beslag, maar alleen de segmenten 1 en 3 hebben een klemstrook: deze is van koper. Doordat de segmenten slecht passen, is de stok niet recht.
De tweede schaalverdeling op zijde C is bijna niet te zien.
De kubische schaal op zijde A heeft een eerste deel, dat zowel aflezing in mingelen als in steekannen mogelijk maakt (1 steekan = 16 mingelen).

Wijnroede 4 (UM 259)



zijde	opschrift	bereik	richting	soort	grondslag,fout	merk
A	STEKANNEN	1 -100	⟶	kubisch	1=315mm ≤3‰	streep en cijfer
Ba	WM MBOSCH	1 -1100	⟶	"	200=823mm ≤3‰	punt
b	-	1 - 100	⟶	"	1=229mm ≤9‰	"
C	VIRTELS J LOOTS	1 - 260	⟶	"	10=494,5mm ≤5‰	streep en cijfer
Da	dG	1 - 120	⟶	kwadratisch	10=423mm ≤5‰	" "
b	-	1 - 120	⟶	lineair	10=119mm ≤3‰	punt

De segmenten 1 tot en met 5 hebben een klemstrook, maar segment 1 heeft er een van koper; de overige klemstroken zijn van messing. Deze wijnroede lijkt veel op de vorige, maar heeft geen wanverdeling.

BIJLAGE III

De Wisselroede van Kern (1531)[44]: een kwadraatroede met vermenigvuldigingsschalen voor diepte en lengte.

Folkerts (1974)[6] beschrijft in zijn overzichtsartikel, hoe Kern in het Visierbuoch van 1531 de vermenigvuldiging van de meetresultaten voor diepte en lengte tot een mechanische handeling reduceert met de zogenaamde Wechselrute; dit is een soort rekenlat, die in de titel van het wijnroeiboek van Willem Raets uit 1567 wisselroede heet - dit is dus de nederlandse term hiervoor. Als bijvoorbeeld

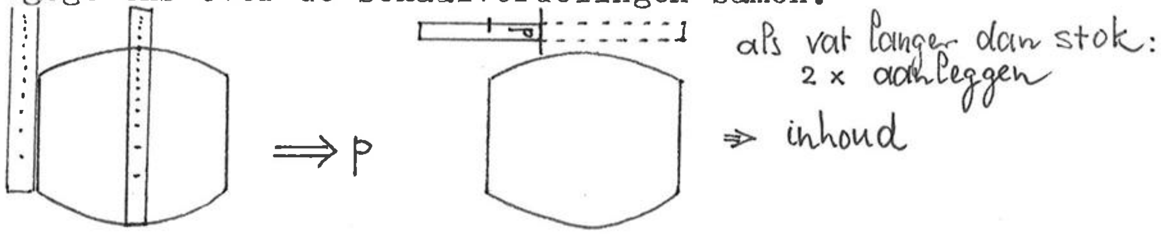
1 Eimer = 4 x 1 2 Mass ; 4 Mass = 1 Viertel

dan kiest men de waarde 4 als eerste "principal" voor de diepte van het vat, die met een lengte van 12 overeenkomt (afgekort: p = 1, l = 12); zo wordt de stok geijkt:

$$\text{Inhoud} = p \times l \,/\, 12 \quad \text{Eimer} \qquad [209]$$

Op de stok brengt men een kwadratische schaalverdeling aan voor de meting van de vatsdiepte; $p = 1, 2, \ldots, p_{max}$. De rest van de stok wordt gebruikt om er schaalverdelingen op aan te brengen, die onmiddelijke aflezing van de inhoud mogelijk maken wanneer de lengte van het vat gemeten wordt.
De lengte van de stok is in twaalf gelijke delen verdeeld: is de diepte van het vat "1" en de lengte van het vat de lengte van de stok, dan kan er 1 Eimer in het vat. Voor dit geval (p=1) is geen schaalverdeling voor de vermenigvuldiging aan gebracht, voor de overige diepten (p=2 - 18, zelfs voor p=19 hoewel deze diepte niet op de kwadratische diepteschaal past !) zijn wissels op de zijden van de vierkante stok aangebracht.
Naarmate het vat dieper is, zal ook zijn lengte groter zijn: de lengte van de stok wordt te klein om in een keer de lengte van het vat op te meten; daarom begint de schaal voor de wissels p 4 bij p, maar het niet-relevante deel van de schaalverdeling - voor vatlengten die bij zo'n diepte p kennelijk niet voorkomen - is weggelaten. Voor de nog grotere diepten p 10 is dit het geval.
In figuur 103 is het gebruik gedemonstreerd. Onderstaande tabel vat de gegevens over de schaalverdelingen samen.

figuur [103]

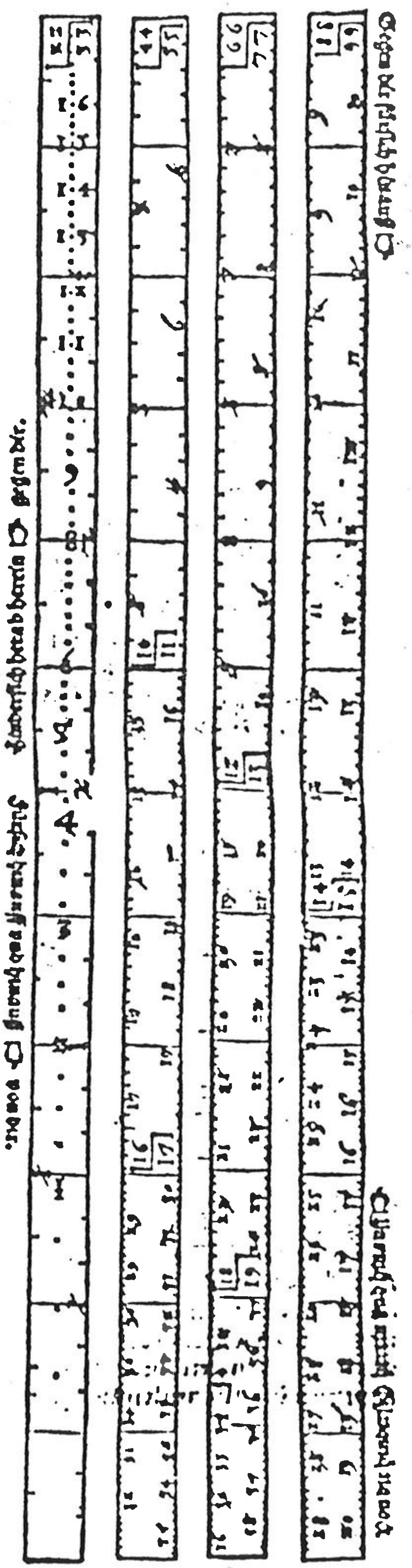


diepte vat op kwadratische schaal (p)	lengte vat waarvoor wissel dient (stoklengte)	inhoud vat (Eimer)	1/12 stoklengte korrespondeert met: (Eimer)
2	0 - 12/12	2	2/12
3	0 - 12/12	3	3/12
4	12/12- 17/12	4 - 5 8/12	4/12
5	12/12- 17/12	5 - 7 ½	5/12
6	12/12- 18/12	6 - 9	6/12
7	12/12- 18/12	7 - 10 ½	7/12
8	12/12- 19/12	8 - 12 3/4	8/12
9	12/12- 19/12	9 - 14 1/4	9/12
10	17/12- 21/12	14 1/6 - 17 ½	10/12
11	17/12- 21/12	15 7/12 - 19 1/4	11/12

Allwegen multiplicier des wechsels principal / mit des wechsels leng / vnd was da kumbt auß solcher multiplicatz / das diuidier mit 12 (dann 12 viertel bringt an diser rüten 1 om) wieuil dir kumbt / souil om oder viertel sollen steen bei dem selbigen wechsel gleich auff derselbigen stat / es komen dann om allein oder viertel darzů / so zel alwegen darauf biß dir mehr 6 viertel an der zal komen / das ist aber eyn halber om / so setz dañ auff denselben punct aber vmb eyn halben om mehr / dann vor / wie oben gelert ist.

Dermassen halt dich alwegen in allenn wechseln / ie von eynem wechsel biß zům andern fürauß / so lang biß das du die wechsel alle durchauß an der rüte mit omē verzeychnet hast / so hastu dann eyn rechtgemachte vnnd außgeteylte wechselrüt auff gātz maß / welcher gestalt also ist / wie dise hiebey gesetzte figur demonstriert oder anzeigt / daran alle ding so eyn wechselrüt auff dise weiß haben soll / geschehen werden mit außteylung / puncten / lengen / ziffern principaln / wechseln / cōtinentzē / wie es dann der brauch vnd dise kunst außweisen ist.

¶ Volgt die figur der wechselrüt.

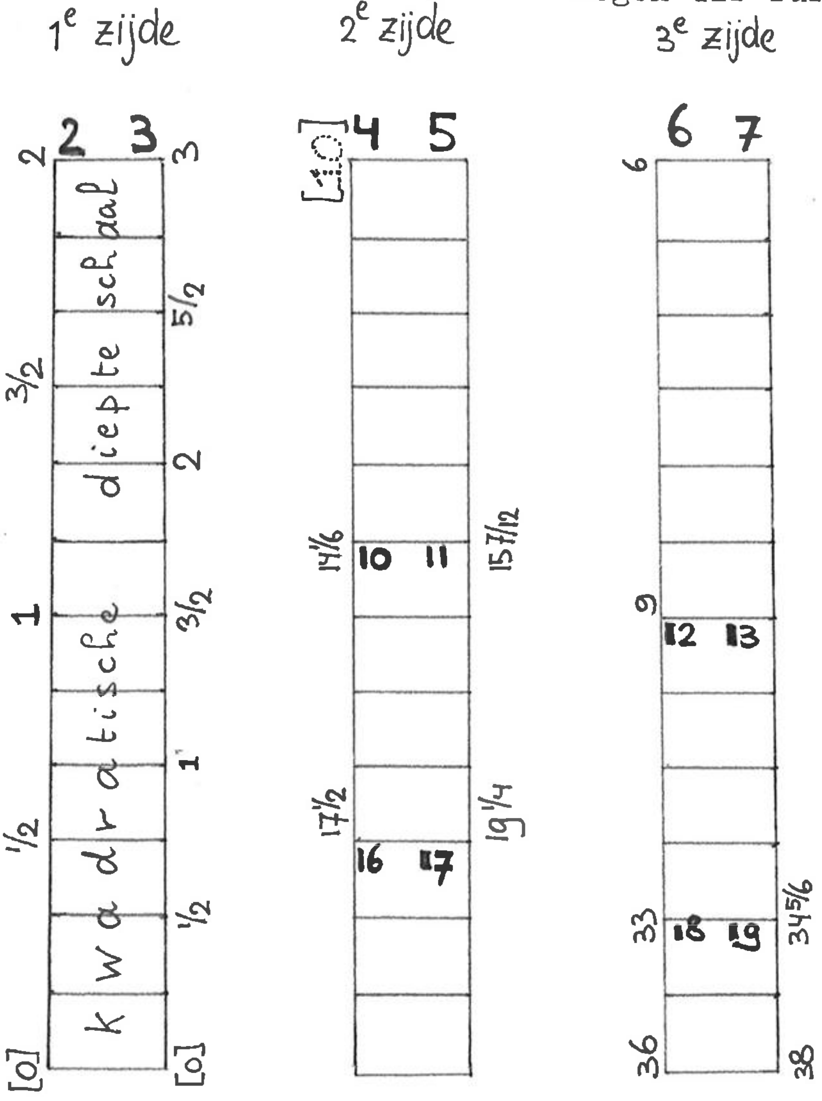


figuur (104)
de wisselroede van Kern
1531 [44]
(illustratie uit Folkerts 1974[6])

Tekst bij figuur 104van de wisselroede van Kern:

Alwegen multiplicier des wech/sels principal/mit des wechsels leng und was da kumbt aus solcher multiplication/das dividier mit 12 (dann 12 viertel bringen an diser ruten 1 om (=inhoudsmaat)) wievil dir kumbt/sovil om oder viertel sol/len steen bei dem selbigen wechsel gleich auff derselbigen stat/es komen dann om allein oder viertel darzu/so zel alwegen darauf biss dir mehr 6 viertel an der zal komen/das ist aber eyn halber om/so setz dann auff denselben puncten aber umb eyn halben om mehr/dann vor/wie oben gelehrt ist.
Dermassen halt dich alwegen in allenn wechseln/ie von eynem wechsel biss zum andern fürauss/so lang biss du die wechsel alle durch auss an der ruten mit omen verzeychnet hast/so hastu dann eyn rechtgemachte unnd aussgeteylte wechselrut auff gantz mass/ welcher gestalt also ist/wie dise hiebey gesetzte figur demonstrirt oder anzeigt/darin alle ding so eyn wechselrut auff dise weiss haben soll/gesehen werden mit auss teylung/puncten/lengen/ziffern/ principaln/wechseln/continentzen (= inhouden)/ wie es dann der brauch und dise kunst ausweisen ist.
Volgt die figur der wechselrut.

Teksten in deze figuur:
- boven de roede : Tieff:puncten Die 2 seiten Die 3 seiten Die 4 seiten (niet zichtbaar in figuur 104)
- naast de roede, verticaal, van links naar rechts: naast de 1e zijde: Hindersich herab herein gegen dir (bovenste helft) Für sich hinauff und hinauss von dir (onderste helft)
naast de 4e zijde: Von dir hindersich herein und hinauff (onderaan)
Gegen dir fürsich hinauff (bovenaan)



Figuur [105]

Diagram van de wissels op de wisselroede van Kern (1531); de wissels 2 - 19 zijn aangegeven en enkele van de schaalverdelingen. Voor de wissel 10 is in stippels het op de stok weggelaten deel van de schaal - want onnodig - genoteerd.

diepte vat op kwadratische schaal p	lengte vat waarvoor wissel dient in stok-lengte			inhoud vat in Eimer	1/12 stok-lengte korrespondeert met: (Eimer)
12	18/12	-	22/12	18 - 22	12/12
13	18/12	-	22/12	19 ½ - 23 5/6	13/12
14	19/12	-	24/12	22 1/6- 28+	14/12
15	19/12	-	24/12	23 1/4- 30+	15/12
16	20/12	-	24/12	28 - 32+	16/12
17	20/12	-	24/12	29 3/4- 34+	17/12
18	22/12	-	24/12	33 - 36	18/12
19	22/12	-	24/12	34 5/6- 38	19/12

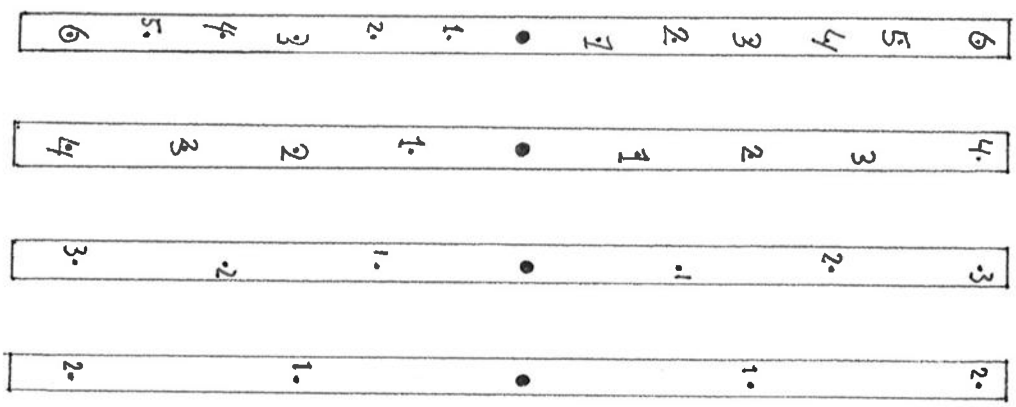
\+ de schaalverdelingen van Kern stemmen hiermee niet geheel overeen (zie de figuur 104)

Voorbeeld: de diepte van het vat blijkt p = 19 op te leveren. De lengte van het vat is bijna twee maal die van de wisselroede, te weten 23/12 maal. We leggen de stok aan zoals in figuur , en we lezen af 36 5/12 Eimer. Dat klopt ook, want

$$\text{Inhoud} = 19 \times 23/12 = 36\ \ 5/12.$$

De Mediaal

Een veel simpeler instrument was de mediaal, die diende om de midden tussen twee aflezingen op een schaal zonder berekening snel te vinden. De mediaal is eveneens een vierkante staf, met op alle zijden schaalverdelingen - weer lineair; in het midden is er op elke zijde een nulpunt, vanwaaruit naar de twee uiteinden van de stok symmetrisch een schaalverdeling is aangebracht die een verschillende schaal kan hebben (zie figuur 106). Men beweegt nu de mediaal - met een geschikte gekozen kant ervan naar de gebruiker toe - net zo lang tot de bij de te middelen punten dezelfde getallen op een schaalverdeling van de mediaal verschijnen; het midden ligt bij het nul punt op de mediaal. (Naar Folkerts[6] 1974).



figuur [106]

BIJLAGE IV

Tractatus Quadrantis door Robertus Anglicus, geschreven omstreeks 1276

84. Si autem alicuius dolii capacitatem uis habere, primo invenies aream fundi dolii per eius diametrum, ut dictum est prius : postea sume longitudinem secundum vini capacitatem, et per illam longitudinem multiplicetur area, et denominatio dabit quantitatem dolii.

(uit Paul Tannery. Mémoires scientifiques publiés par J.-L. Heiberg. V 1922, Toulouse, p. 189)

84. Maar als je de inhoud van een wijnvat wilt weten, vind dan eerst de oppervlakte van de bodem van het vat via zijn doorsnede, zoals boven is gesteld. Meet dan de omvang van de wijn naar de lengte, waarmee de oppervlake vermenigvuldigd dient te worden en het resultaat zal de inhoud van het vat geven.

Practica Geometriae door Dominicus de Clavasio, geschreven omstreeks 1346 te Parijs

Liber II, constructio 22ª : Porcionis circuli aream invenire

Si sit porcio 174 minor, scias aream semicirculi, postea arcum residui in duobus locis divide per equalia sicus in puncto c et in puncto d et a punctis c et d divisionum supra dyametrum protrahe perpendiculares et unam illarum ducas in lineam que est inter duo puncta supra que cadunt perpendiculares que est linea ab et productum est area illius residui vel prope, quia in istis porcionibus difficile est habere areas.
Si vero porcio minor (major ?) quere aream semicirculi et aream residui quod continetur inter dyametrum et cordam illius porcionis quam subtrahe ab area semicirculi et relinquitur area porcionis minoris.

Liber III, constructio 15ª : Dolii capacitatem secundum datam mensuram rotundam invenire

Si rotunda mensura non sit uniforma grossa, equa eam ut supra dictum est. Postea quia dolium non est uniforme, sed est grossius per medium quam alibi, equa ipsum similiter. Postea vide quociens area communis fundi mensure continetur in area communis fundi dolii et illum numerum multiplica per illum numerum secundum quem longitudo mensure continetur in longitudine dolii et productum est numerum denotans, quot datas [illegible] mensuras tenet dolium. Et si vells mensurare secundum mensuram cubicam vel columpnarem, opereris, ut docet precedens. Si vero istius columpne bases non essent equales, reduc eas ad equalitatem et opereris, ut dictum est supra.

Liber III, constructio 16ª : Semidolii capacitatem habere

Si dolium esset semiplenum et velles scire quantum haberet de vino, quere capacitatem tocius dolii et illius capacitatis medietas est capacitas semidolii vel quere aream semicirculi fundi et aream semicirculi spissioris partis dolii et illas areas equa, postea per illam aream multiplica longitudinem dolii et productum est capactitas semidolii, quod quesitum.

Liber III, constructio 17[a] : Porcionis dolii capacitatem invenire

Scias aream porcionis circuli communis fundi per 22am 2i et per illam aream multiplica longitudinem dolii et productum est capacitas procionis dolii. Per istam potest sciri si aliquod dolium non est bene plenum et quantum de vino sibi deficit. Et eciam 17¼ si in eo sit vinum et dolium non sit semiplenum, potest eciam scire quantum de vino est in dolio.

(uit H.L.L. Busard : The Practica Geometriae of Dominicus de Clavasio. Arch. for history of exact sciences 2(1965), 520-575)

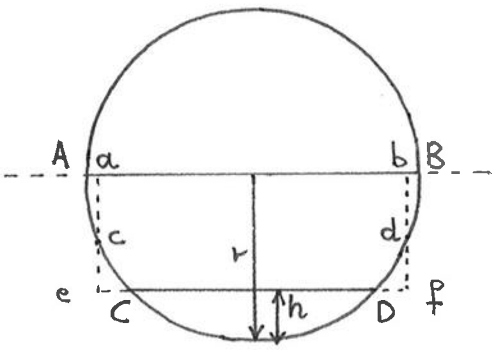
Boek II, 22[e] constructie : Het bepalen van de oppervlakte van een cirkelsegment

Als het een kleiner segment is, en je kent de oppervlakte van de halve cirkel, deel dan de resterende boog in twee punten in gelijke delen als in c en d (zie figuur) en trek vanuit de punten c en d van de verdelingen op de diameter haakse lijnen en breng een ervan naar de lijn die tussen de twee punten ligt waarop de haakse lijnen vallen; dat is de lijn ab en het resultaat is de oppervlakte van dit overige deel of ongeveer, omdat het moeilijk is van deze segmenten de oppervlakte te bepalen.
Maar als het een kleiner (groter ?) segment is, gevraagd de oppervlakte van de halve cirkel en van de rest die ligt tussen de diameter en de koorde van dit segment. Trek de laatste af van de oppervlakte van een halve cirkel en de oppervlakte van een kleiner segment blijft over.

Boek III, 15[e] constructie/probleem : Het vinden van de inhoud van van een wijnvat met een gegeven ronde maat

Als de ronde maat niet overal even dik is, maak haar dan dan gelijk zoals boven besproken is. Verder omdat een wijnvat niet overal gelijk is, maar in het midden dikker dan elders, maak hem evenzo gelijk. Bekijk daarna hoeveel oppervlakte van beide bodemen van de maat bevat worden in de oppervlakte van beide bodemen van het wijnvat en vermenigvuldig dat getal met het getal dat uitdrukt hoeveel maal de lengte van de maat bevat is in de lengte van het wijnvat; het product geeft het aantal gegeven maten aan, die in het wijnvat gaan.
Ook als je wilt meten met een cubische maat of een zuilvormige, ga dan als boven te werk. Maar als de bases van de zuil ongelijk zijn, reduceer hen dan, en ga als boven te werk.

figuur [107]
oppervlakte van een cirkelsegment



cirkelsegment ABDC =

$$\operatorname{asin}\left(\frac{r-h}{r}\right)\cdot r^2 + (r-h)\sqrt{h(2r-h)} \overset{h\uparrow r}{\cong}$$

$$(r-h)\left\{r + \sqrt{h(2r-h)}\right\} = abfe$$

[209]

Boek III, 16e probleem : De inhoud van een half vat krijgen

Als het wijnvat halfvol is, en je wilt weten hoeveel wijn er nog inzit, zoek dan de inhoud van het hele vat en de helft van die inhoud is de inhoud van het halve vat of zoek de oppervlakte van de halve cirkels van de bodem en de oppervlakte van de halve cirkel van het dikkere deel van het wijnvat en maak die oppervlakken gelijk, vermenigvuldig daarna de lengte van het wijnvat met die oppervlakte; het resultaat is de inhoud van het halve vat, zoals verlangd werd.

Boek III, 17e konstruktie : De inhoud van een deel van een wijnvat te vinden

Stel je kent de oppervlakte van een cirkeldeel van de gemeenschappelijke bodems door konstruktie 22 van het tweede boek; vermenigvuldig de lengte van het wijnvat met die oppervlakte, met als resultaat de inhoud van een deel van het wijnvat. Hiermee kan men nagaan of een willekeurig wijnvat redelijk vol is en hoeveel wijn er uit is. Ook als er wijn inzit en het vat is niet halfvol, kun je toch te weten komen hoeveel wijn er in het wijnvat zit.

BIJLAGE V

Réglemens sur les arts et métiers de Paris, rédigés au XIII^{e} siècle, ed. G.B. Depping, Paris 1837, pag. 7-8.

Titre VI

Des Jaugeurs

Nus ne puet estre jaugeur à Paris, se il ne l'a enpetré du prevost et des jurés de la conflarrie des marcheans de Paris. Quiconques est jaugeur à Paris, il doit jurer pardevant le prevost devant dit que il le mestier de jaugerie fera bien et loiaument à son pooir, et que il la droiture au vendeur et l'acheteur gardera à son pooir, et que il ira jaugier toutes les fois que il en sera requis, pour qu' il soit aisier d'aler, et qu'il soit eure et tans dedens les murs de Paris. Nus jaugeur ne puet ne ne doit prendre de un tonnel jaugier quelque li tonniax soit petit ou grans, que ij deniers; ce est à savoir un den. du vendre, et un denier de l' acheter, quelque liqueur qui i ait dedenz le tonnel, fors que de miel, duquel ils ont du tonnel jaugier iv deniers; ce est à savoir ij du vendeur et ij de l'acheteur.
Se un jaugeur jauge, et cil qui vende ou cil qui achate se doute de la jauge qui n'est mie droitement jaugée, rapeler en puet pardevant un des autres jaugeurs, et cil jaugeur puet rejeaugier de que li autre aura devant jaugié: et se il se corde au premier jaugeur, on ne puet rapeler del jauge aus deus: et aura chascun l'argent desus devisé: et se il seconz jaugeur ne se corde au premier, rapeler peut-on au tiers, et à ce que li dui s'accorderont, doit estre pardus: et aura chascun de tous ceus qui auront jaugié, l'argent desus devisé, ja soit ce que on rapele de sa jauge.
Li jaugeur de Paris sont tenu d'aler jauger à la requeste des hestagiers de Paris, partout dedenz la prevosté de Paris, por tant que cil qui le maine leur doit livrer cheval et leur despens, et doivent avoir de chascun l'argent devant dit, quar plus n'en pueent-il demander par leur serment.
Li preudome jaugeur de Paris sont quite du gueit, quar leur mestier n'en doit point; mès ils doivent la taille et les autres redevances que li autres bourgeois de Paris doivent au Roy.

vertaling:

Niemand kan wijnroeier te Parijs zijn, als hij niet is goedgekeurd door de provoost en de gezworenen van het gilde der kooplùi van Parijs.
Ieder die wijnroeier te Parijs is, moet ten overstaan van opgemelde provoost zweren, dat hij het ambacht van de wijnroeierij goed en getrouw naar zijn vermogen zal uitoefenen, en dat hij zal gaan roeien elke keer dat dit hem verzocht wordt, mits hij in staat is om te gaan en het altijd binnen de muren van Parijs is.
Geen wijnroeier kan of mag voor een te roeien vat, of het vat klein is of groot, meer ontvangen dan 2 deniers; dat wil zeggen 1 denier van het verkopen en 1 denier van het kopen, ongeacht de vloeistof die het vat bevat, behalve ingeval van honing: dan krijgen zij per te roeien vat 4 deniers, dat wil zeggen 2 van de verkoper en 2 van de koper.
Als een roeier roeit, en de verkoper of de koper heeft de indruk dat onjuist geroeid is, dan kan hij in beroep gaan bij een van de andere roeiers, en die roeier kan opnieuw roeien wat de andere tevoren geroeid had : en als hij het eens is met de eerste roeier, dan kan men niet in beroep gaan tegen de peiling van deze twee; en beiden zullen het bovengenoemde bedrag ontvangen. En als de tweede roeier het niet eens is met de eerste, dan kan men een derde roepen, en als dan twee het eens zijn, is de zaak afgedaan: en ieder van degenen die geroeid hebben zal het genoemde bedrag ontvangen, ook al ging men in beroep tegen zijn peiling.
De roeiers van Parijs zijn gehouden om te gaan roeien op verzoek van de inwoners van Parijs, overal in het rechtsgebied van Parijs, op voorwaarde dat degene die hen meeneemt zorgt voor een paard en voor hun uitgaven. Van ieder moeten zij het bovengenoemde bedrag ontvangen, want krachtens hun eed mogen zij niet meer ontvangen.
De heren wijnroeiers van Parijs is de "gueit" kwijtgescholden, want hun ambacht is dit niet verschuldigd; maar zij zijn de taille en de overige verplichtingen schuldig die de andere burgers van Parijs de koning verschuldigd zijn.

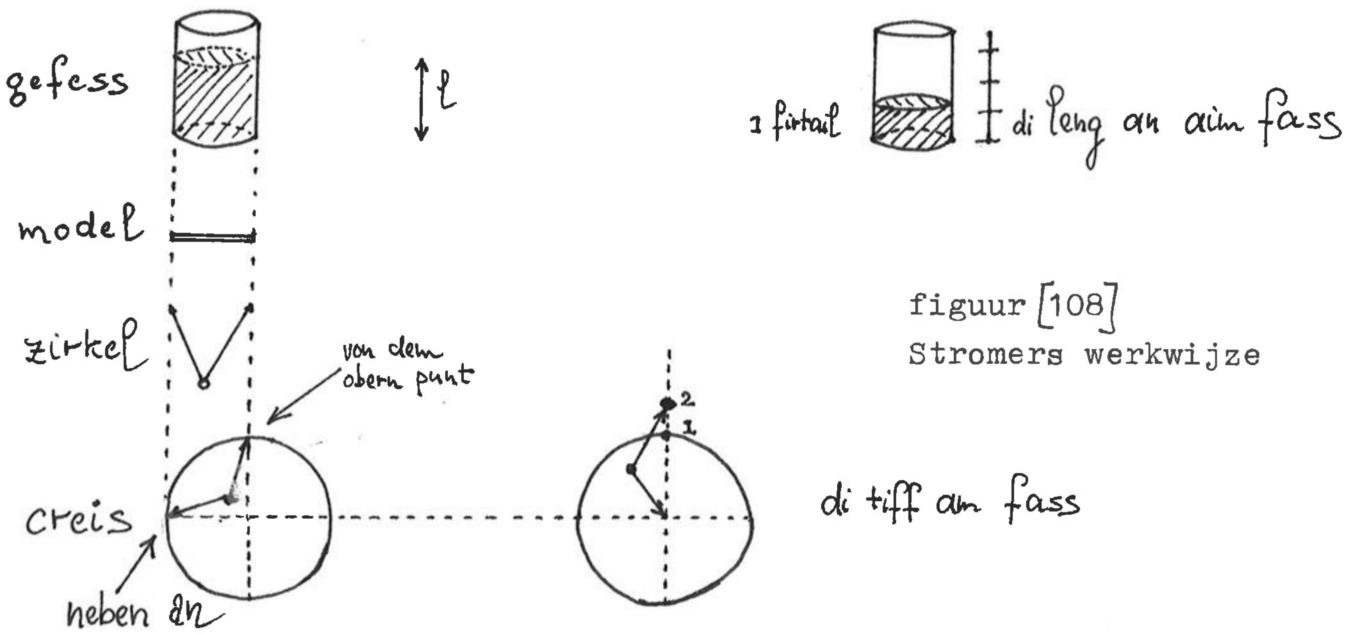
provoost = prévot des marchands de Paris (soort burgemeester)
gueit = guet ? = plicht tot wachtlopen, of soort belasting ?

BIJLAGE VI

Ulman Stromer(1329 - 1407) : Puechel von meim geslechet und von abentewr.

uit Die Chroniken der fränkischen Städte - Nürnberg.
Erster Band. Ed. K. Hegel. Leipzig 1862 pag 105-106

Wer ein ruten zu fisiren machen wil, der nem ein gefes do mer dann zwu moss ein ge, und daz geleich in ayner weit sey unten alz oben, und nym ein model dar ein uber twerch, daz umb und umb r$\overset{e}{u}$rt, und mach ein zirkel, der alz weit ste, als daz model, und mach dann ein creis do mitten, so bezeichent daz uber halb tail im kraisse ayn firtail, und zewch dann den zirkel neben an den kraiss und von dem obern punt an den kraiss und halt den zirkel auf den mitteln punt im kraiss, so trift der zirkel fur daz erst firtail aber ein firtail.
von dem andern firtail zewch den zirkel aber neben an den kraissund halt in aber mitten in den kraiss, so trift der zirkel aber ein firtail f$\overset{e}{u}$r, und daz tu man als lang man di ruten haben will, so machet alle punct ain firtail; dasz ist di tiff am fass.
Darnach stoss ein halmen in daz gefess, und wo dann daz wasser er wint von aym firtail, also macht di leng geleich an der ruten durch und durch: daz ist di leng an aim fass. und wann man ain fas fisiren will, wo dan di tiff hin get, so ist alz manik firtail, so machet der kraiss ie ayner an der leng als vil als firtail und ahtail an der tiff stet.



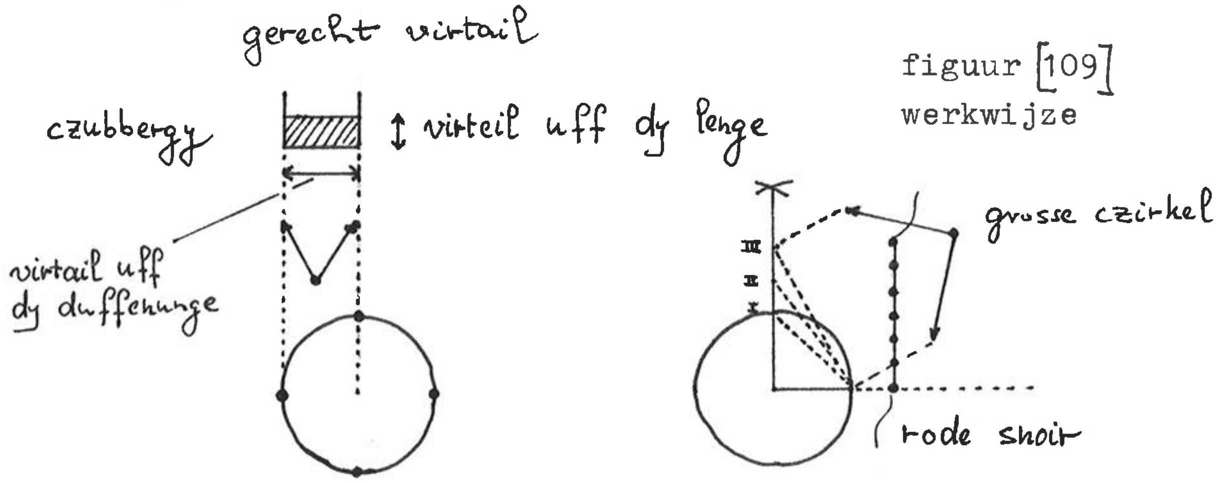
figuur [108]
Stromers werkwijze

Wie een wijnroede wil maken, moet een vat nemen waar meer dan twee maat (moss) ingaat, en dat boven en onder even wijd is en een maatstokje daar dwars indoen, dat overal rondom het vat raakt en een passer maken, die even ver uitstaat als het maatstokje en daarmee een cirkel maken, dan beslaat de bovenste helft in de cirkel een vierendeel en trek dan de passer naast de cirkel en van het bovenste punt in de cirkel en zet dan de passer op het middelste punt, dan komt de passer voorbij het eerste vierendeel juist op nog een vierendeel uit. Van het tweede vierendeel moet de passer daarna naast de cirkel getrokken worden en in het midden van de cirkel gezet worden, dan komt de passer op nog een vierendeel terecht en dat doet men zo lang als men de roede wil hebben; dan staat elk punt voor een vierendeel. Dat is de diepte van het vat.
Zet daarna een strohalm in het vat, en tot waar het water van een vierendeel komt te staan, zet die lengte af over de hele lengte van de roede: dat is de lengte van een vat.
En als men een vat wil roeien naar de diepte, dan zitten er zo veel vierendeel in, als de cirkel per lengte-eenheid vierendelen en delen daarvan voor de diepte aanwijst.

BIJLAGE VII

Codex 3083 (Rec. 405), Wien Nationalbibliothek, Fol 161v. Tekst overgenomen uit Josef Werlin : Eine Regel zur Volumenbestimmung von Fässern, Centaurus 10 (1964), 161 - 164.

Item cummestu jrget da dw wild viszeren und kay vizsire rueden enhast, so las dir machen ein ronnt czubbergy, da ein viertail wassers jn gee, ist ess enwenig groser, das enschat nit. So nem dan eyn gerecht virtail nach des lantczs ichgen wassers und schudt das in das czubbergen. Dan neme eyn gleich hulczegen und stoz es uff den grunt und czeigen ez gleich oben an dem wasser und lass ez swimmen und wende iss umb, das iss das czubbergen ummentum rore. Willis der lengist ist undir den czwen hulczirgen, das mache zu der dueffununge der rueden und das korcze neme zu der lenge der roden. Wilt du aber eyn andir vizserer uss dem lande sein virteil von siner /[175] rüde messen, dass virtail uff dy duffenunge und das uff dy lenge der vasse das virteil uff dy lenge sal alwege kurtczer sein dan das uff die duffenunge dan soltu nemen das lengeste firtail und machen eynen czirkel also wüt als das hulczigen von den firtail ist und mache dar uss eyn kreiss ront als ein vass boden. Dan so neme den czirkel und dail den krayss an für dail, dan so lass den czirkel also und neme eyn anderen grossen czirkel und seczce en offe dy rechten syden dez krayss in der fyeer locher eyns und mache eyn strich mit deme czirkel als fer als dw kanst. Dan seczce en uff dy linke siden auch inder fieer locher eyns und laz iss aber als fer du kanst ubir hen streich, das ein cruce dar uss werde. Dan so neme eyns czymermans rode snoir und snour eynen ruden gleichen smytcz von deme myttel, loche mitte in dem boden mitt uff das crucce, das du mit deme grossem czirkel. Wan du das gedust, dan neme den klainen czirkel wider als du in vor gelassen hast und seczce en in das loch mitten in dem boden, so lass en dan als fer als er raichunt uff dem strich ulber dem kreytcz ussen gen und mach ein lochelin, da hastu dan II firtail, dan so lass den czirkel in deme selben loch sten in deme rode striche, dan so czugh en wyder, das er von deme selben loch reche in der selben locher ains offden siten. Dan so hebe den czirkel uff und seczce en aber mitte in den boden und laz ez abir uff den roden strich reichen als wit als der czirkel stet. Do mache dan eyn loch mit deme czirkel, so hastu der firtail drey, also mache furter uss als vil du willd und als lange als du dye rueden han wilt, also hastu dye dueffenunge aber das konczte hulczegen daz czeygen uff dye rueden eys als lang als das ander als vil als dw wiltt.



figuur [109]
werkwijze

vertaling

Kom je ergens waar je wilt wijnroeien en je hebt geen wijnroede, laat dan een rond tobbetje voor je maken, waar een vierendeel water ingaat - het is niet erg als het iets groter uitvalt. Neem dan precies een vierendeel naar de plaatselijke ijk en giet dat in het tobbetje.

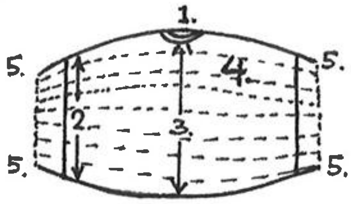
Pak dan een recht stokje en steek het tot op de bodem en teken de waterstand er bovenaan op af, en neem nog een stokje, stop dat in het water en laat het drijven en draai het zo in de rondte om, dat het het tobbetje rondom raakt.

Maak van de langste stok de roede voor de spondsdiepte (dueffununge ? Daubung) en neem de kortste als roede voor de lengte. Maar wil je als ieder ander plaatselijk wijnroeier het vierendeel met de wijnroede meten, zowel het vierendeel van de diepte als het vierendeel van de lengte van het vat - het vierendeel van de lengte zal altijd korter zijn dan dat van de diepte - dan moet je het langste vierendeel nemen en een passer maken die zover uitgespreid kan worden als het stokje van het vierendeel lang is; maak daar een cirkel mee, rond als de bodem van een vat.

Pak de passer en verdeel de cirkel in vieren, leg dan de passer weg en neem een tweede, grote passer; zet deze in een van de vier gaatjes in de rechterhelft van de cirkel en trek er een streep mee, zo ver weg als mogelijk. Zet hem dan ook in een van de vier gaatjes, maar nu op de linkerhelft van de cirkel en laat hem zo ver als je kunt over de streep lopen, zodat een kruis ontstaat. Neem dan een timmermans meetsnoer, en pas daarmee de knoop van een roede af van het midden, maak een gat in de bodem midden op het kruis: doe dat met de grote passer. Als je daarmee klaar bent, pak dan de kleine passer weer, in dezelfde stand als waarin je hem hebt neergelegd, en zet hem midden in het gat midden in de bodem Laat hem daarna zover als hij reikt over de streep buiten de cirkel lopen en maak een gaatje, dan heb je II vierendeel daar. Laat vervolgens de passer in dat gat op die streep van de roede staan, maar spreid hem zover wijder, dat hij tot een van de gaatjes opzij reikt. Til dan de passer op, zet hem midden in de bodem en laat hem tot aan de streep van de roede reiken zo wijd als de passer staat. Maak daar dan met de passer een gat, dan heb je het vierendeel drie. Maak er verder naar buiten zoveel als je wilt hebben en zo lang als je de roede wilt maken, dan heb je de diepte; teken echter op het kortste stokje de maatstrepen op vaste tussenafstand, zoveel als je er wilt hebben.

NOTEN

1. "Kwam de koopman met zijn wijnroede."
2. Kepler trouwde op 30 october 1613 met Susanna Reuttinger (Owen Gingerich, artikel Johannes Kepler in: Dictionary of Scientific Biography, ed. Ch. C. Gillespie, New York 1970-1976).
3. De zogenaamde kubiek -roede. In het vervolg zullen de volgen- termen voor delen van een wijnvat worden gebruikt:



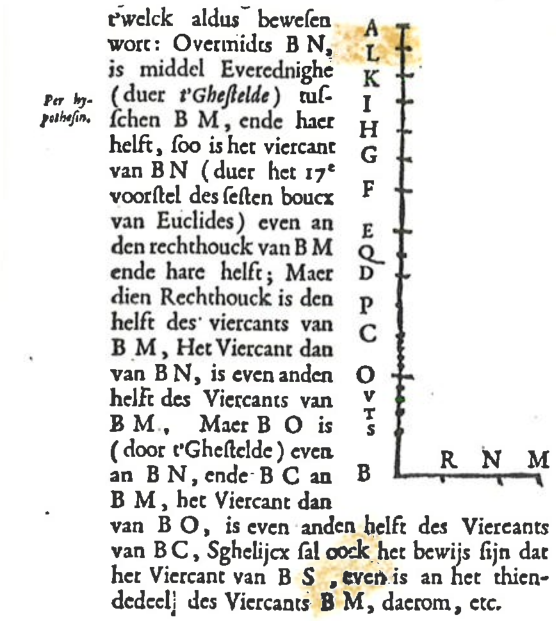
   1. spon-, vul-, of bonggat
   2. bodem; de diameter van de bodem heet bodemsdiepte (bo)
   3. sponds- of buikdiepte, analoog (bu)
   4. duigen (in lengte richting)
   5. kimmen (uitstekende einden van de duigen)
4. De zogenaamde kwadraat-roede, zoals onder in deze scriptie wordt toegelicht
5. Johannes Kepler : Gesammelte Werke Band IX Mathematische Schriften bearbeitet von Franz Hammer, München 1960; pag 9-10, opdracht van de Nova Stereometria Doliorum Vinariorum, in primis Austriaci...1615 Lincii (Nieuwe Stereometrie van Wijnvaten, vooral van Oostenrijkse....1615 Linz).
6. Menso Folkerts : Die Entwicklung und Bedeutung der Visierkunst als Beispiel der praktischen Mathematik der frühen Neuzeit. Humanismus und Technik 18 (1974), 1 - 41. Dit zeldzame artikel heb ik in fotokopie aan de Universiteitsbibliotheek gegeven; het kreeg de signatuur GESNAT IV D 29 (Universiteitsbibliotheek Utrecht).
7. C. Kruyskamp, Van Dale GrootWoordenboek der Nederlandse Taal, Den Haag 1970[9] vermeldt de volgende betekenissen:
   - pegelen 3.(gew.) het gehalte van belastbare, alcoholhoudende vochten onderzoeken, peilen, roeien: bier pegelen.
   - pegel 2. merk of knopje boven in een meetkan enz.,om aan te wijzen hoever hij gevuld moet worden om de vereiste hoeveelheid vocht te bevatten; oorspronkelijk bestond dit merk uit een pen of pegel (1.=(Westvl. puntig toelopende ijzeren staaf, om gaten in de grond te steken) die dwars door de kan geslagen werd
     4.(Zuidn.) wettelijk vastgestelde of goedgekeurde maat
   - peilen 7. (bij het meten of roeien van waren waarvoor accijns verschuldigd is) bepalen hoeveel daarvan aanwezig is: jenever, brandewijn peilen
   - roede 4. maatstok, meetroede
   - roeien II met de roede meten of peilen; bep. de hoeveelheid en sterkte van gedistilleerd op fust bepalen
   - wijnroeien : het peilen van gevulde wijnvaten
   - wijnroeier: beambte in openbare dienst die komt peilen hoeveel wijn er in de vaten bij slijters en verbruikers is, om de accijns die zij verschuldigd zijn te berekenen
   - wijnroeierij.

   Uiteraard zijn dit wel latere betekenissen dan die welke golden in het tijdvak dat ons hier vooral zal interesseren.
8. Noot 6, pag. 13 : in de catalogus van de bibliotheek van het benediktijnerklooster St. Emmeram te Regensburg duikt in 1347 de titel Liber de arte fusoria (= visoria) (Boek over de wijnroeikunst) op, die niet bewaard is gebleven.
9. Bijlage I, tekst 24 (achterin deze scriptie)
10. A. de Graaf : De geheele Mathesis of Wiskonst, Herstelt in zijn natuurlijke gedaante, Amsterdam, gedrukt bij Jacobus de Veer voor Jan ten Hoorn, boekverkooper... 1694; pag. 142 onder andere. Dit werk wordt in deze scriptie behandeld.

10.d Bijvoorbeeld : Johan Tideman jr. (geboren 1669), die vanaf 1695 in Friesland, Stad en Lande (=Groningen stad en provincie) en Landschap Drente geadmitteerd landmeter en "Royer" (=wijnroeier) was (M. Donkersloot-de Vrij : Topografische kaarten van Nederland voor 1750, Wolters-Noordhoff, Groningen 1981). Klaas Piekes de Graad, auteur van het in deze scriptie besproken werk De Nieuwe en Vermeerderde Roy-konst (1679) noemt zich "Ingenieur, Geadmitteerd Landmeter en Wijn-Royer in Harlingen".

11. Van Leeuwenhoek herdacht, red. H.L. Houtzager en L.C. Palm, Amsterdam 1982; D.J. Struik : Het land van Stevin en Huygens, SUN, Nijmegen, 1979[3] pag. 124.

12. In Simon Stevin : De Thiende (1585) worden wijnroeiers genoemd. Dit bekende werk waarin het tientallig stelsel werd gepropageerd in de notatie van bijvoor beeld 3 ⓪ 1 ① 4 ② 1 ③ 6 ④ (= 3,1416, dus met vermelding van de negatieve machten van tien) was opgedragen aan astronomen, landmeters, tapijtmeters, wijnmeters, lichaammeters in het algemeen, muntmeesters en alle kooplieden. In het aanhangsel vinden we "III. Lidt vande Wijnmeterie". Stevin stelt de aam, die 100 Antwerpse potten doet, op 1 ⓪ . De niet-lineaire diepte schaal - voor de kwadraat-roede - wordt in 100 ongelijke delen verdeeld, voor elke pot 1 ②. Onder verwijzing naar stellingen van Euclides geeft Stevin aan, hoe men deze schaalverdeling meetkundig moet construeren; de wortelkonstruktie, die gebruik maakt van de stelling van Pythagoras en die we in deze scriptie herhaaldelijk zullen ontmoeten, wordt ook door Stevin toegepast.
"Het bewijs is cort ghemaect, overmidts wij indies niet aen Leerlinghen maer aen Meesters schrijven."
De wortels van 1/10 - 9/10 en van de gehele getallen 1 - 10 en van 2½ worden zo bepaald.
(The Principal Works of Simon Stevin, Vol. II Mathematics, ed. D.J. Struik, Amsterdam 1957 pag. 386, 434 - 440)



$BR = BS = \sqrt{1/10}$
$BT = RS = \sqrt{2/10}$
$BV = RT = \sqrt{3/10}$
$\vdots$
$BC = BM = 1$
$BD = \sqrt{2}$
$BE = \sqrt{3}$
$\vdots$
$BA = \sqrt{10}$

$BQ = DN = \sqrt{5/2}$

figuur 110
wortels in tientallig
stelsel bepalen

13. D.J. Struik : zie noot 11.
D. Bierens de Haan : Bouwstoffen voor de geschiedenis der wis- en natuurkundige wetenschappen in de Nederlanden. Overgedrukt uit de Verslagen en Meededelingen der K.A.W. Afdeling Natuurkunde, 2e reeks, deel VIII, IX, X en XII, Brill, Leiden 1878. pag. 220.
Zijn zoon Adriaan schreef wel over wijnroeien (zie hoofdtekst van deze scriptie).

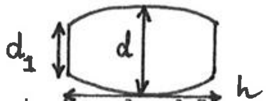
14. E. Taverne : In het land van belofte : in de nieue stadt. Ideaal en werkelijkheid van de stadsuitleg in de Republiek

1580 - 1680, Maarssen 1978.
W.A.M. van den Dries : Vroegere kaartmakers, hun opleiding en instrumenten. Spieghel Historiael 1985, 70-71.
Te Leiden bestond van ± 1600 - 1670 de school van de Duytsche Mathematique, op gericht naar advies van Stevin op verzoek van prins Maurits, om aan de vraag naar toegepast wiskundigen voor onder andere vestingbouw te kunnen voldoen.

15. J. Kepler, Messekunst Archimedis(1616)[17] paragraaf 85 en 100 en Adriaan Metius, Manuale Arithmeticae et Geometricae Practicae (1634) bespreken hoe je een geschut kunt wegen met een meetstok; andere in deze scriptie besproken wijnroeiteksten geven alleen aan, hoe men het gewicht van kogels bepaalt; dit is nodig om te weten hoeveel kruit achter de kogel moet.

16. Zie voor de semantische achtergrond van het duitse werkwoord "visieren" : Josef Werlin : Eine Regel zur Volumenbestimmung von Fässern, Centaurus 10 (1964) 161 - 164.
Buitenlandse termen voor het wijnroeien, de wijnroeier en zijn stok zijn:
duits: visieren - visierer- die Visierruthe (oud-duits)
frans: jauger / verger - le jaugeur - la jauge / la verge
(le jaugeage = de roeierij, het roeien)
engels: to gauge (spreek uit: geedsj)- gauger- the gauge / the gauging rod / the gauging rule.
Ook in het italiaans en spaans, waar wijnroeiers zijn opgetreden, moeten specifieke termen bestaan, maar Folkerts(1974) (noot 6) en mij zijn geen teksten uit die landen bekend.
Overigens is de vatberekening nog steeds actueel: het Polytechnisch Zakboekje, Koninklijke PBNA 1975[36] Arnhem vermeldt op pagina 56 de volgende formule voor de inhoud:

$$V = pi(h / 12)(2 d^2 + d_1{}^2) \qquad (210)$$



(zie figuur). Men mag aannemen, dat in de klassieke wijnlanden (Frankrijk, Duitsland, Italië) wijnroeien tenminste tot kort geleden is toegepast.[74]

17. Ausszug auss der Uralten Messekunst Archimedis.und.deroselben newlich in Latein auszgangener Ergentzung/betreffend Rechnung der Cörperlichen Figuren / holen Gefessen und Weinfässer / sonderlcih dess Oesterreichischen / so under allen anderen den artigsten Schick hat. Erklärung unnd bestättigung der Oesterreichischen WeinvisierRuthen / und derosleben sonderbaren gantz leichten und behenden Gebrauchs an den Landfässern: Erweitterung dessen auff die ausländische/ so auch auff das Geschütz unnd Kugeln. Sampt einem sehr nutzlichen Anhang von Vergleichung desz=Landtgebräuchigen Gewichts/Elen/Klasster/ Schuch/Wein= und TraidMaass/under einander/und mit andern ausslándischen/auch AltRömischen. Allen unnd jeden Obrigkeiten Beampteten/KriegsObristen/Handelsleuten/Büxen= Müntz=Baw=und RechenMeistern/WeinVisierern/Hausswürthen/ und meniglichen in und ausser Lands/fast dienstlich : sonderlich aber dem Kunst- unnd Antiquitetliebenden Lesern annämlich. Gestelt durch Johann Keplern / der Röm. Kays.Mt. und Dero getrewer Löbl. Landschafft dess Ertzhörtzogthumbs Oesterreich Ob der Enss Mathematicum.
Prov. XVI Rechte Waag und Gewicht ist vom Herren/ und alle pfunde im Sack sind seine Wercke
Vom Authore verlegt / unnd gedruckt zu Lintz durch Hansen Blancken Anno MDCXVI. Mit Kays. Freyheit auff XV. Jahr nicht nachzudrucken.
in: Gesammelte Werke , noot 5.

18. D. Bierens de Haan : Bibliographie Néerlandaise Historique - Scientifique, Rome 1883; reprint 1965 pag 352 sqq.

19. Terecht merkt Folkerts (1974)(pag. 12) op, dat in de handboeken over de geschiedenis van de wiskunde weinig of geen aandacht aan de wijnroeierij wordt besteed. Aan het door hem genoemde

19. M. Cantor : Vorlesungen über Geschichte der Mathematik, Band 2, Leipzig 1900, zou ik willen toevoegen:
H.G. Zeuthen : Geschichte der Mathematik im 16. und 17. Jahrhundert, reprint 1966 New York, naar Teubner 1903, Stuttgart.
C.B. Boyer : A History of Mathematics, New York 1968
D.J. Struik : Geschiedenis van de wiskunde, Amsterdam 1977
als voorbeelden van auteurs, recent en ouder, die wijnroeien niet of niet als zelfstandig onderwerp behandelen. Naast een overwegende belangstelling voor "titanen", vooral in de oudere literatuur, moet als oorzaak hiervan de schaarste aan overzichtsartikelen worden aangemerkt. Na zoeken bleek het artikel van Folkerts het enige.

20. Zie voor landmeters : E. Müller : Registraties van Utrechtse landmeters in de 17^e en 18^e eeuw, Geodesia 25(1983),109-113. Landelijk overzicht: te verschijnen, onder redactie van C.J. Zandvliet en E. Muller, 1986.

21. Dit was in Nürnberg in de late middeleeuwen het geval (Folkerts 6 (1974), pag. 7).

22. Standaardwerken voor maatstelsels zijn:
H. Doursther : Dictionaire universel des poids et mesures anciens et modernes, contenant des tables des monnaies de tous les pays, 1840; herdruk Amsterdam 1955 (UB Utrecht GESNAT I B 3). Op pag 177 wordt dezelfde formule als in noot 16 aanbevolen: "cette formule, qui est le plus usitée".(inhoud vat)
H.J. Alberti : Mass und Gewicht, Berlin 1957
G.A. de Geus : Zakboekje der maten, gewichten en munten, met hunne vergelijkings- en herleidingstafels, 's Hertogenbosch, ca. 1880[7]
Een oudje : Tresoir vande maten van gewichten van coorn...van de elle ende natte maten, oock vanden gelde ende wissel... Amsterdam 1590.

23. Bijvoorbeeld: het plan van de Keulse aartsbisschop Ernst van Wittelsbach van circa 1600, dat de goedkeuring van Stevin en van Kepler wegdroeg (noot 5, pag 540)

24. Paul Guldin S.J. (1577 - 1643): De Centro Gravitatis libri I - IV, Wenen 1635 - 1641.
J.H. Lambert (1728 - 1777) : Die Visierkunst, in: Beyträge zum Gebrauch der Mathematik und deren Anwendung, Band I, Berlin 1765 (pag. 329)
Johannes (I) Bernoulli (1667 - 1748)

25. In het boek van de Graaf (1694) - noot 10 - verschijnt de eerste algebraïsche formule van de hier behandelde teksten.

26. E. Dijkersterhuis : De mechanisering van het wereldbeeld, Amsterdam 1980^4.
C.B. Boyer : noot 19

27. Geometria incerti auctoris IV 50; ed. N. Bubov : Gerberti Opera Mathematica, Berlin 1899.

28. C.B. Boyer : noot 19

29. Vergelijk ook: Max. Curtze : Der tractatus quadrantis in deutscher Ubersetzung aus dem Jahre 1477, in : Abhandlungen zur Geschichte der Mathematik 9 (1899):
"Von ainer kůf. 35. Wiltu aber ainer kůf (=wijnvat) begriffenlichait haben, so soltu des ersten die hofstat des bodens der kůfen mit seinem dyameter, als vor gesagt ist. Darnach nym die leng nach des weins begriffenlichait, und mit der leng sol gemert (= vermenigvuldigd) werden die hofstat, und was davon kompt, gibt der kůfen begrifenlichait."
(begriffenlichait = omvang, inhoud; hofstat = oppervlak)

30. J. Craeybeckx: Un grand commerce d'importation : les vins de France aux ancien Pays-Bas (XIII - XVI^{e} siècle), Paris 1958 (UB Utrecht Ts oct 2987)
31. In Utrecht gold de regel van 1544, dat een wijnroeier zich niet meer dan 2 "taaken" (=inhoudsmaat) mag vergissen. (Van de Water : Groot Placcaatboek deel 3, pag 971 en verder).
32. De stadsrekeningen van Deventer, uitgegeven door G.M. de Meyer, met een voorwoord van W. Jappe Alberts deel I 1394-1400, Groningen 1968.
In een voorbeeld van een andere stadsrekening : Van boeten en bouwen. De Utrechtse schutmeestersrekeningen van 1428-1528. Hun informatie en de informatica, door G.M. de Meyer en A. Graafhuis, 1984 Utrecht, vond ik wel vermeldingen van wijn, maar niet van wijnroeiers.
33. In de veertiende eeuw steeg de kwaliteit van bier door de toevoeging van hop (Craeybeckx, noot 30).
34. De nederlandse wijnconsumptie bedroeg in 1983 13,9 liter/hoofd van de bevolking (Statistisch Zakboek 1984, Den Haag 1984.). Ter vergelijking: in de eerste helft van de zestiende eeuw bedroeg de wijnconsumptie in Den Bosch 12 - 15 liter per hoofd per jaar (wijn aan de tap) en in Leuven en Diest 20 liter idem (R. van Uytven in Nederlands Archievenblad 1985 (89) 115)
35. De import van edele metalen uit de Spaanse koloniën (vooral het zilver uit de mijnen van Potosi, Peru vanaf 1545) veroorzaakte een scherpe inflatie in Europa. (R.R. Palmer en Joel Colton : A history of the modern world, New York 1971^{4}).
36. In de bloeitijd van de markt van Bergen (Mons) verkocht een koopman in 1540 alleen al 253 vaten. (Craeybeckx, noot 30)
37. De bekende grief van Luther tegen de luxe van de geestelijkheid, die door de hele late middeleeuwen gekritiseerd was, wordt zo begrijpelijker (vergelijk R.R. Palmer en J. Colton, noot 35). Ook in de Lof der Zotheid van Erasmus (1515) worden geestelijken als drinkebroers afgeschilderd (hoofdstuk 54).
38. Peilende schouten in Gelderland 1704.
Er is ruzie tussen de "Nieuwe Plooi" en de "Oude Plooi" wie de belastingen mag vaststellen, de Ridderschap of de steden, en bijgevolg ook wie ze mag innen. "In juli 1704 weigert een schout in Nijkerk peil op te nemen bij de wijnkopers, tappers en herbergiers, zodat de impost op de dranken niet geheven kan worden. Uit Arnhem wordt een afgezant van het kwartier gestuurd om die schout te arresteren. Maar wat gebeurt er ? De schout arresteert zelf die Arnhemse bode ! Nu vertrekt burgemeester W.A. Bouwens namens de Arnhemse magistraat zelf "met 60 snaphanen" naar Nijkerk om die schout in te rekenen. Maar die man is al tijdig gevlucht." Ook de"schout van de heerlijkheid Doorwerth, Eslinger (had) de peil niet willen doen." De Vrouwe van Doorwerth zelf had het bevel gegeven "om niet mee te werken tot het doen van die peil, hetgeen door de Staten was verboden". Het verbod kwam dus van hogerhand. Uiteindelijk hebben de Staten van Holland troepen gezonden om de ruzie te beëindigen.
Uit: Geschiedenis van Gelderland 1492 - 1795 onder redactie van W. Jappe Alberts. Hoofdstuk V. Gelderland van 1672-1795 door A.H. Wertheim-Gijsen Weenink, pag. 248-249, Zutphen 1975.
39. W.B.S. Boelens : Frieslands Hoogeschool en het Rijksathenaeum te Franeker, eerste deel, Leeuwarden 1878.
40. A. Graafhuis : De mathematici Laurens en Gerhard Praalder, Jaarboek van Oud-Utrecht 1961, 79 - 99.
Laurens Praalder (1711-1793) gaf van 1761 tot 1792 les aan de Fundatie van Renswoude, een liefdadige instelling voor de opvoeding en opleiding van wezen te Utrecht, onder andere in wijnroeien (vergelijk bijlage II).

Zijn zoon Gerbrand was vanaf 1770 wijnroeier van de stad Utrecht en wist een resolutie van Burgemeesteren en Vroedschappen uit 1773, waarbij wijnroeiers boetes opgelegd kregen voor meetfouten, gewijzigd te krijgen onder aanvoering van citaten uit Lulofs Grondbeginselen (1764), een wijnroeiboek dat in deze scriptie behandeld wordt. Lulofs had geschreven, dat zelfs de ervarenste wijnroeier zich kan vergissen, mede door kuiperslisten.

41. Zie over de Fundatie van Renswoude ook: A.J.S. van Lier : Fundatie van de Vrijvrouwe van Renswoude, Utrecht 1954. Als leerlingen worden onder andere genoemd: J. van der Meer, wijnroeier te Utrecht (leerling 1761-1767); J.P. Collognac, wijnroeier te Breda en onderwijzer in de Mathesis (leerling 1763 - 1777).

42. Tot dusver zijn in het archief van de Staten van Utrecht geen admissies van wijnroeiers gevonden (Rijks-archief in de provincie Utrecht)[53]

43. Folkerts noemt drie vroege drukwerkjes uit 1485 en 1487 - vergelijk figuren 7 en 8 (Folkerts 1974, noot 6). Het is jammer dat Folkerts verklaart (pag 37 ibid.) alleen teksten in zijn lijst van wijnroeiboeken te hebben opgenomen, die of zelfstandig verschenen of een onderdeel van enige omvang in grotere boeken vormen.

44. Ulrich Kern: Eyn new Kunstlichs wolgegründts Visierbuoch/gar gewiss und behend auss rechter art der Geometria/Rechnung und Circkelmessen/Darinnen mancherley Visier ruoten oder Staeb angezeygt zemachen/nach yeglicher landart Eichen und mass/ dergleichen noch nie getruckt oder aussgangen, Strassburg 1531, fol 1r - 56 v (uit Folkerts(1974)).
In bijlage III wordt de wisselroede uit dit boek van Kern behandeld.

45. Vergelijk bijlage I.

46. Kepler, Gesammelte Werke, noot 6; pag. 525,536 en 528. In de Messekunst (1616) van Kepler zullen we Hartmann nog tegenkomen bij paragraaf 79. (vergelijk noot 17)

47. Folkerts (1974), pag. 21 (noot 6). Waarschijnlijk is onderzoek naar de verschillen tussen de teksten toch de moeite waard, omdat dan de verwantschap van de teksten kan blijken. Bovendien verraadt de auteur zijn opleiding in de fijne puntjes van zijn tekst.

48. Vergelijk figuren 12 en 13 onder andere.

49. Zie bijlage I.

50. J. Kepler : Messekunst Archimedis (1616)(noot 17), paragraaf 2 (zie hoofdtekst scriptie)

51. Rekenmeester te Halle; geadmitteerd wijnroeier in dienst van de overheid. Folkerts noemt 4 wijnroeiteksten van hem (1557-1595)

52. Genoemd in Folkerts (1974)[6]. Bronvermelding van de tekst in Bijlage VI.

53. Rijks Archief in de Provincie Utrecht : Statenarchief inv.no. 351-2 (benoemingen) en 349; Rechterlijk Archief inv. no. 2 (register 1530-1810) en inv. no. 6(alfabetisch register resolutie van het Hof) (vriendelijke mededeling van ir. E. Muller)

54. Vriendelijke mededeling van een stafmedewerker van het Instituut Frantzen (Germanistiek) van de Rijksuniversiteit Utrecht.

55. Genoemd in Folkerts (1974)[6].

56. D. Verlé: Compte rendu d'un traité de jaugeage du XVI^e^ siècle, Janus 49(1960), 20-47 (genoemd in Folkerts (1974)[6]). De term "vergierroede" staat in verband met het franse verger[16].

57. Rijksarchief Brugge, Acquisition num. 1913, manuscript H en B. Manuscript H beslaat in de lias de folio's 29-69; B beschrijft alleen het gebruik van de roede en is onvolledig.

58. Nog grotere maten zijn : pijp = 176 stoop, vat = 352 stoop en roede = 704 stoop[56]. 1 stoop = 2,44 liter (Brugge)

59. Verlé (1960)[56] vermeldt dat het Museum Gruuthuse te Brugge een tintroede bezit met zes-hoekige doorsnede.

60. Aan gegeven met merken die met spijkers worden aangebracht in de vorm van ⊢ (1) en + (2). Door tweedeling maakt men een verdeling tot 1/64 van de diepte van een stoop; dit heet een punt.
61. Rijksarchief Brugge, collectie Sanders, no. 550; onvolledig manuscript, eind 16e eeuw.
62. De voorbeelden van vaten, zoals die in manuscript H gegeven worden, betreffen vaten met inhouden van 1 tot 100 zesters. Ook de verhoudingen van lengte en diepte lopen uiteen: de quarteel heeft een hoogte die de diameter weinig ontloopt, terwijl de hoogte van andere vaten als de pijp een hoogte kan hebben van 3 à 4 maal de diameter.
63. Genoemd in Folkerts(1974)[6] en A.J.E.M. Smeur : De zestiende-eeuwse Nederlandse rekenboeken, Den Haag 1960, pag. 15. De zeer uitvoerige titel, die tevens inhoudsopgave is, begint alsvolgt : Een sonderlinghe boeck in dye edel conste Arithmetica/met veel schoone perfecte regulen/als Die numeracie vanden ghetale metten specien int gheheele/ende int gebroken. Die regule van dryen int gheheele ende int ghebroken.Die regule van een valsche positie.....Die regule van smaeldeelinge oft omstellingen biden transpoorten vanden landen/profitelijc voer alle ontfanghers van subuencien. Die regule van mangelinge/van assayen van goude/ende van silver/ende van mannen van wapenen. Die fabrike van der wijnroeden oft visier roeden/ ende het useren van dien De practike van eenen sticke lants te meten also wel dat onbegancelijc is midts den water/oft anders/als dat beganghelijc is. Ghecalculeert ende versaemt met grooter naersticheyt/bi Gielis vanden Hoecke. Ende gheprent Thantwerpen op die Lombaerde veste. By mi Symon Cock. (Colophon, pag. 180 v) Gheprent Thantwerpen op die Lombaerden veste teghen die gulden hant over by mi Symon Cock. Int Jaer ons Heeren M.CCCCC. ende XXXVII.den IX.dach Februarij.
Het is een algemeen leerboek (octavo, 360 pagina's).
Algebra (de regel Cos) wordt toegepast; ook astronomische onderwerpen - niet in de titel vermeld - komen aan de orde : hoeksnelheid van zon en maan en conjuncties ervan. Onmiddelijk na de behandeling van het wijnroeien leert Gielis ons, hoe we de Roomse indictie, de zondagsletter, de epacta en de Paasdatum moeten vinden. Meten van begankelijke en onbegankelijke stukken land zou nog twee eeuwen lang een populair onderwerp blijven voor wiskunde-docenten en studenten (vergelijk Handschrift 1363 Universiteits bibliotheek Utrecht : D.B. Anemaet, fol. 6 v (eind zeventiende eeuw)).
Ik gebruikte een kopie van de folio's 1, 160-175, die de Koninklijke Bibliotheek te Den Haag van hun exemplaar verstrekte.
In Bijlage I (nummer 20) wordt een ander boek van Gielis vanden Hoecke vermeldt dat eveneens de wijnroeierij behandeld. Het gebruik van de naam "visier roede" zou op duitse invloed kunnen wijzen.
64. Fol. 168 verso.
65. Fol. 169 verso.
66. C.B. Boyer, op. cit.[19] Verdere behandeling volgt bij vergelijking 48 , als Messekunst paragraaf 47 aan de orde is. (Boyer, pag 153).
67. C.B. Boyer, op.cit[19]; Apollonius (-262? - -190?)
68. Franz Hammer in op. cit.[5]
69. Zie voor Bürgi behalve Boyer, op.cit.[19] ook: L. von Mackensen, Die erste Sternwarte Europas mit ihren Instrumenten und Uhren. 400 Jahre Jost Bürgi in Kassel. Callwey Verlag München 1979, waarin de nadruk op zijn instrumentele inventiviteit wordt gelegd.
70. Franz Hammer[5] wijst erop, dat Kepler algebra als een uitsluitend praktische methode ("Warenrechnungen") voor benaderingen

81. O. Gingerich, op.cit.[2]
82. Het symbool π voor deze grootheid ("het Ludolfinische getal") is door L. Euler bedacht in 1737 en door zijn werk verbreid (C.B. Boyer, op. cit.[19] pag. 484)
83. Adrianus Romanus (=A. van Roomen): Canon triangulorum, Mainz 1609 Bartholomaeus Pitiscus: Trigonometria, Frankfurt 1612; Philippus van Lansberghe: Triangulorum Geometria, Leiden 1591. De tafels van Bürgi zijn niet door hem gepubliceerd.
84. Hier doelt Kepler op het gebruik van algebra bij benaderingsmethoden.
85. Het exacte resultaat met behulp van integraalrekening voor een cirkelsegment ter hoogte h luidt:

$$2 \int_0^{h=x} (x(2r - x))^{\frac{1}{2}}dx = r^2 \,(pi/2 - asin((r-x)/r))-(r-x)((x(2r-x))^{\frac{1}{2}} \qquad [212]$$

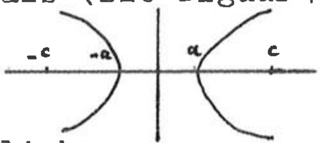
86. Ik heb tevens gebruikt : H. Wieleitner, Keplers Archimedische Stereometrie,in: Unterrichtsblätter für Mathematik und Naturwissenschaft36(1930), 176 - 185.
87. Omdat

$$\text{half paraboolsegment } OAB = 4/3 \,\triangle\, OAB$$

en de hyperbool VB dichter langs de lijn VB loopt dan de parabool OB langs de koorde OB, geldt

$$\text{half hyperboolsegment } VAB < 4/3 \,\triangle\, VAB$$

redeneert Kepler.
88. Joh. Bapt. Villalpandus : Commentarius in Ezechielem, Rome 1598
89. Serenus van Antinoeia (4^e eeuw na Christus) : Over de Cilindersnede.
90. De konstrukties met draden had Kepler al eerder in zijn Astronomiae Pars Optica (1604) vermeld.
91. Als we de hyperbool definiëren als (zie figuur 111)



figuur [111]

$$y = b \left((x/a)^2 - 1 \right)^{\frac{1}{2}}$$

vinden we voor het omwentelingslichaam

$$\text{inhoud} = pi \int_a^c dx\, y^2 = pi\, b^2(c-a)\left(\frac{c^2 + ac + a^2}{3 a^2} - 1 \right) \qquad [213]$$

Keplers recept [37] leidt tot

$$\text{inhoud} = pi((c-a)/3)\, y^2\, (c + 2a)/(c + a)$$

hetgeen bij uitwerking hetzelfde resultaat geeft als de integraal.
92. De uitdrukking die we met integraalrekening voor een bolsegment met een hoogte h krijgen luidt:

$$\text{volume bolsegment} = pi\, h^2/3 \;\; (3\, r - h) \qquad [214]$$

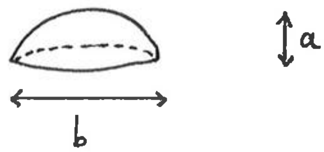
93. Het oppervlak van de grote cirkel wordt gevonden met behulp van nummer 12 en 28. Als DI=h en AC=r, dan is de inhoud 2/3 hpi r^2.
94. Dit komt erop neer, dat als de hoogte en breedte van het bolsegment a en b zijn, de hoogte van de equivalente kegel

$$h_{equi} = r \left((2a^2/(a^2 + b^2) + a^2/b^2 \right)$$

is, met

$$r = (b^2/4 + a^2)/(2a) \qquad [215]$$

de kromte-straal.



95. Dit was ook Archimedes al bekend.
96. Chr. Clavius (1537 - 1612), Opera, Mainz 1610, tom. II, pag. 145.[5] C.B. Boyer, op.cit. [19] vermeldt dat hij een vriend van Kepler was (pag. 334).
97. Bij uitwerking in moderne formules krijgen we voor deze versnelde methode:

inhoud vat = pi l* (bo/3 (bu-bo) + $(bu-bo)^2/8$ + $bo^2/4$)

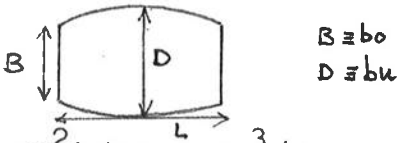
Keplers voorbeeld bo = 18, bu= 20(en l* = 25,377 daaruit volgend) levert dan voor de inhoud 7454,2124, waar Kepler zelf vond 7453,89 (het geval bu/bo = 10/9). In deze formule herkennen we nog respectievelijk de termen van het grootste stuk van de gordel, de kleine citroen en de cilinder. Verdere vereenvoudiging van de formule geeft:

inhoud vat = pi l* ($bu^2/8$ + bo.bu / 12 + 1/24 bo^2) [216]

Het zou waarschijnlijk de moeite lonen om alle benaderingen voor de inhoud van vaten eens in een grafiek onder te brengen; dat geldt ook voor gedeeltelijk lege vaten, waarbij numerieke integratie voor niet-integreerbare uitdrukkingen gebruikt zou kunnen worden. Er geldt :

$l^* = (bo^2 + 2\ bo\ .\ bu - bu^2)^{\frac{1}{2}}$ [89]

98. Ik heb de afwijkingen, die Kepler in breuken uitdrukt, naar procenten omgerekend.
99. Bij integratie blijkt dit juist. Voor een hyperbolisch vat geldt:



$$\text{Inhoud}_h = 2\ \text{pi}\ (5D^2L/8 + L(B^2-4BD+3D^2)/24 - LD^3/8\ .$$
$$\left(\frac{|B-2D|}{D^2} + \frac{\ln (|B-2D| / D)}{(B^2 - 4BD + 3D^2)^{\frac{1}{2}}} \right)) \qquad [217]$$

Voor een parabolisch vat kunnen we vinden:

$$\text{Inhoud}_{par} = \text{pi}/60\ .\ L\ (8 D^2 + 4 BD + 3 B^2) \qquad [218]$$

en voor een elliptisch vat

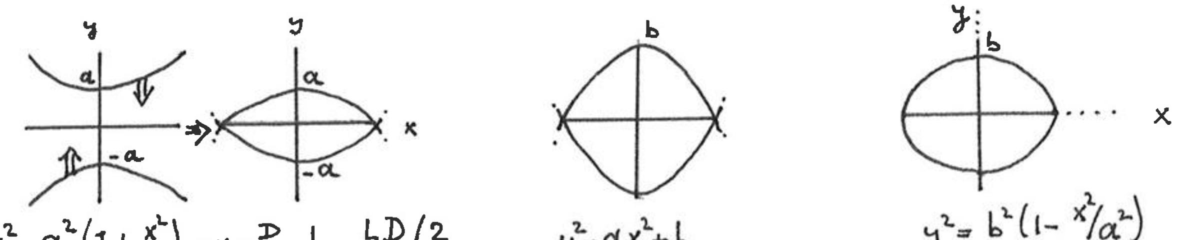
$$\text{Inhoud}_{ellipt} = \text{pi}\ L /12\ .\ (2 D^2 + B^2) \qquad [219]$$

Voor dezelfde B,D en L geldt bijvoorbeeld als B=.65, D=.75 en L = 1.9 inderdaad

$\text{Inhoud}_{hyp} < \text{Inhoud}_{para} < \text{Inhoud}_{ellips}$ (.766 < .768 < .770)

Zie voor veronderstellingen bij de integratie van de omwentelingslichamen - uit een kegelsnede kunnen op meer manieren vatlichamen gevormd worden - onderstaande figuur 114 . Men zou numeriek het probleem van deels lege vaten kunnen behandelen.

hyperbool parabool ellips



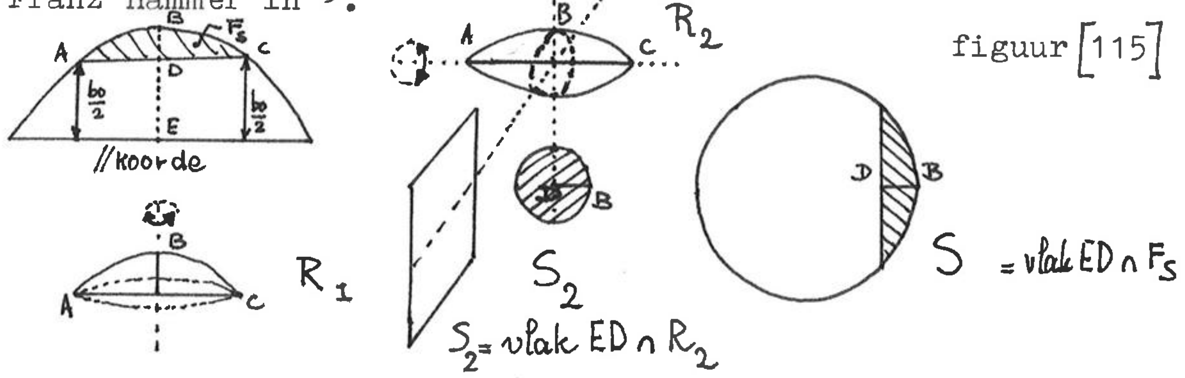
$y^2 = a^2(1 + \frac{x^2}{b^2})$; $a = \frac{D}{2}$, $b = \frac{LD/2}{\sqrt{B^2-4BD+3D^2}}$

$y^2 = ax^2 + b$
$|b| = D/2$, $a = \frac{2(D-B)}{L^2}$

$y^2 = b^2(1 - x^2/a^2)$
$b = D/2$, $a = \frac{LD/2}{\sqrt{D^2-B^2}}$

De inhoud neemt dus af bij toenemende eccentriciteit.

100. Met deze opmerkingen wordt de berekening van het maar gedeeltelijk gevulde vat in nummer 89 voorbereid. Als we een segment van een kegelsnede wentelen om een as die evenwijdig is aan de koorde, en dan in het omwentelingslichaam een snede aanbrengen, dan ligt het volume van dit laatste segment F_s in tussen R_1 en R_2 (zie figuur 115); ik volg de notatie van Franz Hammer in [5].



figuur [115]

Om F_s te berekenen maakt Kepler de volgende schatting: hij snijdt het vlak midden tussen de bodems van het vat met F_s en R_2 en stelt omdat zowel F_s als R_2 dezelfde lengte AC hebben:

$$F_s = R_2 \cdot S / S_2 \qquad [220]$$

In nummer 89 merkt Kepler op, dat deze benadering exact geldt als de boog ABC elliptisch of parabolisch is.
In het bovenstaande is met "vlak ED" het vlak evenwijdig tussen de bodems, dat door ED loopt, aangeduid.

101. Martinus Antonius del Rio : Disquisitionum magicarum libri VI, Löwen 1599, Mainz 1603 en latere uitgaven (Franz Hammer[5]).

102. J.H. Lambert (1728-1777) geeft in "Die Visierkunst" opgenomen in Beyträge zum Gebrauch der Mathematik und deren Anwendung, Bd. 1, Berlijn 1765, pag. 329 de benadering

$$\text{Inhoud}_{vat} = (C_{in} + 2\,C_{om}) / 3 \qquad [221]$$

waarin C_{in} en C_{om} respectievelijk de in- en omgeschreven cilinders voorstellen; een verbeterde vorm van cilindermiddeling dus.

103. Johan Hartmann Beyer (1563 - 1625)[46], die we al in 2 d 2 genoemd hebben, auteur van diverse wijnroeiboeken; Folkerts(1974), noot 6, noemt er 5. Beyer ging uit van de dubbele kegelstomp.

104. Daarom liet hij de lengte-maat opnieuw drukken en voegde hij deze op een apart blad toe.

105. Michel Coignet (1549 - 1623), Jesuiet te Antwerpen, van wie Kepler een frans werkje onder ogen heeft gehad en een uittreksel heeft gemaakt (Franz Hammer,noot 5 pag. 525). Cantor (noot 19) noemt hem in band II, pag 687 als uitvinder van de proportionaalpasser. In 2 d 2 kwamen we hem al tegen; zie ook Bijlage 1 nummer 4.

106. Dus in formule-vorm:

$$\text{Inhoud}_{\text{stücklin}} = \text{pi}/3 . \left(\frac{bu - bo}{2}\right)^2 \left(3r_k - \frac{bu - bo}{2}\right) .$$

$$\frac{bu^2 p/4 - bo/4\,(bu^2 - bo^2)^{\frac{1}{2}}}{r_k^2 q - L/2\,(r_k - (bu - bo)/2)} \qquad [222]$$

met

$p = \text{asin}\,(1/(2r_k))$ $\qquad$ $q = \text{acos}\,(bo/bu)$

107. Vergelijk noot 88.
108. Volledige titel : Manuale Arithmeticae & Geomtriae Practicae In het welcke Beneffens de Stock-rekeninghe ofte Rabdologia J. Nepperi, cortelick ende duydelic 't gene den Landmeters ende Ingenieurs, nopende 't Landmeten ende Sterktenbouw en nootwendich is/wort geleert ende exemplaarlick aengewesen. Op een nieu verrijckt met een nieuwe inventie om alle ronde vaten hare wannigheden af te pegelen Door Adrianum Metium Med. D. & Mathes. Profess. ordinar, binnen Franeker.
(De titelpagina draagt het vignet : cirkel met daarin geconstrueerd cirkelsegment. Ik gebruikte het exemplaar van de UB Utrecht met signatuur : P oct 1009. (246 + 8 pagina's, octavo).)
Verder vermeldt de titelpagina:
Tot Amsterdam By Henderick Laurentsz. Boeckvercooper op 't Water/int Schijfboeck/Anno 1634.
109. Nieuw Nederlands Biografisch Woordenboek; P.C. Molhuysen en K.H. Kossmann, P.J. Blok, Amsterdam 1974.
110. Sybrandt Hansz. Cardinael (1578 - 1647) was een rekenmeester die zich ook met de lengtevinding op zee en met astronomie bezighield; hij had een school in Amsterdam. In 1617 werd hij als professor in de wiskunde aan Costers akademie benoemd waar hij populaire kolleges gaf.
Na zijn dood zette Cardinaels weduwe zijn school voort; in 1659 woonde Abraham de Graaf bij haar en in 1662 Claes Hendrickzn Gietermaker. Hij publiceerde diverse wiskundige werken, ook over boekhouden en wijnroeien (Y. Dold-Samplonius[73]).
Zie ook bijlage 1 nummer 9. Op de wantafel van Cardinael wordt in de zeventiende-eeuwse teksten die hier besproken worden vaak teruggegrepen.
111. Volledige titel : Meet en Pegel-Const Om het in-houd van allerhande ronde Vaten perfectelijck te meten ende te pegelen/op driederhande manieren. Geneuchlijck en profijtlijck voor yder een. Met noch een vergelijckinge der natter Maten op verscheyden Plaetsen ghebruycklijck, tegen 10. Friesche halve Kannen. Gestelt door R. de la Rose, Mathem. Gedruckt tot Leeuwarden, Bij Claude Fonteyne, Boeckdrucker Ordinaris der Heeren Staten van Friesland 1639.
Vignet op titelpagina : wijnvat met constructielijnen, letters en schaduw.
Ik gebruikte het exemplaar van de Provinciale Bibliotheek Friesland, signatuur Pa 1091. Formaat: 15 x 9 cm, Voor-rede, 78 genummerde pagina's, laatste blad ontbreekt, geïllustreerd.
112. A.J. van der Aa : Biografisch woordenboek der Nederlanden, Haarlem deel 2 1852.
113. Dit wordt "door andere Mathematicis in groote boecken doncker beschreven", verklaart Metius.
114. In 1629 heeft Descartes korte tijd in Franeker gewoond, waar hij als student aan de universiteit stond ingeschreven. Hij kende Jacob Adriaansz. Metius, de opticus en broer van onze auteur en zal dus ook onze auteur gekend hebben en eventueel kollege bij hem gelopen hebben. (G. Rodis-Lewis : Descartes: textes et débats, Paris 1984 (Livre de Poche)).
115. Ook Galileï werkte met proportionaalpassers: hij publiceerde Le operazioni del compasso geometrico (1606) en wordt als uitvinder ervan beschouwd (zie ook noot 105.) Ook Bürgi had een dergelijk instrument geconstrueerd (C.B. Boyer, op. cit. [19] pag. 351). Zie over proportionaalpassers ook : P.H. van Cittert: Proportionaalpassers, Ned. T. v. Natuurkunde.13,1,1947.
116. Voor de titelpagina zie figuur 71. Ik gebruikte het exemplaar dat ingebonden zit bij het nog te bespreken werkje van C.M. Anhaltin, dat de signatuur Math. Astr. 695 (Universiteits bibliotheek Utrecht) draagt. In het vignet op de titelpagina zien we een aantal wiskundigen aan het werk: 7 figuren zijn vlijtig bezig met passer, kubiekwijnroede, globe en berekening.

Op de achtergrond doet iemand een meting aan de top van een opgerichte naald.
Het tractaat van Eversdijck beslaat de pagina's 1-28 in de band. De voorpagina is op ware grootte in figuur 71 afgebeeld.

117. In "Tot den Leser" verwijst Eversdijck naar het boek van Willem Raets : Practijcke der Wijnroede (vergelijk bijlage 1 nummer 3 en 4); hij klaagt over het gebrek aan "handtwerkers" "tot het snijden van verscheyden figuren", reden waarom de verhandeling zonder figuren, maar wel met voorbeelden is uitgegeven. De tafelen, waar het Eversdijck hier om gaat, zijn handiger dan de "Tafelen der Cirkelboghen" bij Johan Sems en Johan Pietersen Dou tot een ander eynde uyt-ghegeven"

118. Universiteitsbibliotheek Utrecht: signatuur Math. Astr. 695; het eerder besproken werk van Eversdijck zit erbij ingebonden. In figuur 73 zien we de titelpagina met de zeer uitvoerige titel, die tevens inhoudsopgave is.

119. Zie voor van Leeuwen ook bijlage 1 nummer 10. en D. Bierens de Haan (noot 13), waarin op pag. 53 van hem sprake is als een landmeter en een liefhebber in de mathematische consten. Hij publiceerde een schotschrift, getiteld Aenhangh Genaemt den Bril Voor de Amsterdamsche Belachelijcke Geometristen, Bestaende in eenige Geometrische en andere Questien/die door haer openbaer/op de manier als de Quacksalvers zijn aengeslagen/en en mij van haer eenige voorgestelt/die ick alle klaer hebbe gedemonstreert ende bewesen. Amsterdam 6 Junij 1663.
Naast C.M. Anhaltin beantwoordden ook Abraham de Graaf en Claes Hendrikz. Gietermaker deze aanval (de Graaf in zijn Ontleding van den Bril). Op pag. 78 vermeldt Bierens de Haan op. cit. de volledige titel van van Leeuwens Schoolboeck der Wijnroeyerijen (1663), waar het bovengenoemde schotschrift een aanhangsel van is. Hij merkt ook op, dat de Graaf en Anhaltin buren van van Leeuwen waren (Zeedijck, Amsterdam, waar ook de uitgever Hendrick Doncker woonde).

120. Omdat in recente literatuur nog wel eens de etymologie "meten" voor de familie-naam Metius gebruikt wordt, geef ik hier de opvatting van D.Bierens de Haan (noot 13) door, die veel waarschijnlijker lijkt. Na Adriaan Anthonisz (Metz 1527 - Alkmaar 1607) genoemd te hebben, vervolgt Bierens de Haan: "Toen deze beide zoons te Leiden studeerden, verkregen zij de bijnaam van Metius, omdat hun vader van Metz afkomstig was", waarmee hij op de zoons Adriaan Adriaansz. en Jacob Adriaansz. doelt.

121. D.Bierens de Haan, noot 13 op. cit., pag. 220, schrijft dat vader Metius "als bij toeval" 355/113 = 3 16/113 door de voor pi gebruikte benaderingen 3 17/120 en 3 15/106 zowel onder als boven de deelstreep te middelen:
$$\frac{(377 + 333)/2}{(120 + 106)/2} = 355/113.$$

122. In het boekje is een uitvouwbare schaalverdeling opgenomen.

123. De titelpagina met uitvoerige titel zien we in figuur 74. Ik gebruikte het exemplaar van de Provinciale Bibliotheek van Friesland, signatuur Pb 17067. Het formaat is 20 x 14 cm; geill; met tabellen, 41 + 2 pagina's. De figuur op de titelpagina illustreert de door de Graad in dit werk bewezen stelling, dat het oppervlak van parabolen zich verhouden als die van hun ingeschreven driehoeken.

124. Gebruikt exemplaar: Universiteit Utrecht, signatuur P. oct. 1852, met 16 platen, 320 pagina's. Het betreft de herdruk van het eerder onder dezelfde titel verschenen werk van 1676. Meer herdrukken volgden, de laatste in 1737: de zevende (noot 18).

125. De pagina's 142 - 148 zijn aan wijnroeien gewijd.

126. De bekende kost dus, die we eerder bij Gielis van den Hoecke aantroffen (noot 63).

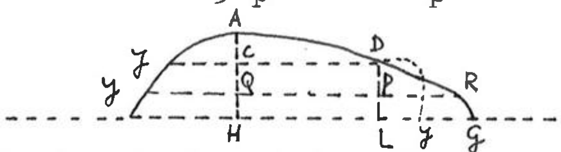
127. Ook zijn vele voorbeelden die de Graaf geeft, exact dezelfde als in het eerder besproken boek van Anhaltin.
128. Universiteitsbibliotheek Utrecht, plaatsnummer 10 B 5; suppl. HSS cat. bak A; in 1920 geschonken door prof. mr. J.C. Naber, 24 bladen met pentekeningen; het zijn problemen met uitwerkingen.
129. Universiteitsbibliotheek Utrecht HS 1363 plaatsno VI G 16. Het deel van het manuscript, dat door D.B. Anemaet is geschreven, beslaat 43 bladen met illustraties; het betreft problemen met uitwerkingen betreffende landmeet- en vestingbouwkunde, waarbij instrumenten als de astrolabe, de rechenstock en het winkelkruis genoemd worden. Anemaet heeft ook een uittreksel van Euclides' Elementen gemaakt.
Bij M. Donkersloot-de Vrij, op. cit. noot 10, vinden we vermelding van een landmetersfamilie Anemaet, onder andere Dingeman A. Anemaet, door het Hof van Holland geadmitteerd landmeter op 3/4/1696 en Hubertus Anemaet(te Steenbergen), idem op 21/1/1727.
130. Gebruikt exemplaar : Universiteitsbibliotheek signatuur Math.Astr.Oct. no. 214, pag. V-XXIII + 309 + Plaat I-III (uitklapbaar aan het eind van het boek)
131. Gemeente Archief Utrecht, Archief Fundatie van Renswoude.
132. L. Euler, Comment. Petrop. Tom. IX p. 222 seqq.
133. James Gregory (1638 - 1675), schots natuur- en wiskundige
134. Jacob (of Jacques) I Bernoulli (1654 - 1705), Opera Tom. 1. pag. 582 en Mem. de l'Acad. des Sciences 1705 pag. 232.
135. Pithometriae Theoria nova paragraaf 65, pag 25.
136. "Stereometria Doliorum Theor. XXII"(=citroenstomp ter berekening van de inhoud van het vat.) Waarschijnlijk kende Lulofs de Messekunst Archimedis(1616) niet.
137. L. Euler: Methodus inveniendi lineas curvas &c. in Additamento primo pag. 247. Het ging om de integraal

$$dy = \frac{dx \cdot \int (t + T)\, dx}{\left(bbff - \int (t + T)\, dx^2\right)^{\frac{1}{2}}} \qquad (223)$$

met x = afgesneden stuk van kromme
y = ordinaat
b = dikte duig
f = lengte "
t = verlenging of uitrekking duig aan buitenkant
T = verkorting door buigingen aan de binnenkant
Lulofs verklaart dat t en T moeilijk te meten zijn.
138. Vergelijk noot 24; De Centro Gravitatis, vooral boek II hoofdstuk 2.
139. Clavius (vergelijk noot 96): Opera Tom. 2 pag. 145
Kepler : Stereometria Doliorum in supplemento
John Wallis (1617 - 1703): Opera Tom.1. pag. 871
John Gregory(1638 - 1675): Treatise of practical geometry, deel 3, stelling 8.
140. P. Pézenas, Mém. presentées T.1. pag 57
141. Archimedes, De conoidibus & sphaeroidibus prop. 32.
142. Lulofs vermeldt dat het ook anders kan en verwijst naar Jones: Palmariorum Matheseos pag 269.
143. Lulofs verwijst naar Muller : Conical sections, paragraaf 273.
144. Camus: Memoires de l'Acad. Roy. des Sciences 1741 pag. 513.
145. Lulofs verwijst naar Carré : Mesure des surfaces paragr. 40 en Thomas Simpson (1710 - 1761) : Doctrine of Fluxions paragr.130.
146. Verh. Holl. Mij der Wet. te Haarlem 3e deel pag. 419-508, vooral pag. 441 en 507.

147. Lulofs noemt Franse ijkingen van de lengtemaat door de l'Isle, Langlois, de vergelijking van de Rijnlandse en Amsterdamse voet door Snellius in zijn Erastosthenes Batavus (1617); verder Hudde, de Volder, van Musschenbroek, Senguerd, "mijn grote leermeester 's Gravesande"; in het buitenland deden Mariotte, Roemer, Picard, de la Hire en Boulduc ijkingen waarbij ook de temperatuur verrekend werd."Echter kan men wegens het groote aantal proeven veilig in het middengetal berusten."
148. Johannes van der Boot: zie bijlage 1 nummer 11.
149. Hier zou eens archiefonderzoek naar moeten gebeuren.
150. Art du Tonnelier, pag. 4.
151. Sharp : Geometry improved pag 23 - 24
Simpson (vergelijk noot 145) : Doctrine of fluxions pag. 183.
152. Lulofs verwijst naar "P.3 Sect V" en doelt op de mislukte poging van Kepler om met de Circulus Metator het wanne van vaten te vinden; blijkbaar kende Lulofs de verbeterde methode van de Messekunst niet.
153. Dit is de standaard-zeventiende eeuwse methode die we boven bij Metius en anderen besproken hebben; Lulofs verwijst naar Geometr Pract. P.2 C7, waarmee kennelijk het Manuale (1634) bedoeld wordt.
154. Bougainville: Traité de calcul integral I, pag. 127.
Lulofs geeft de volgende figuur van de "parabel" ADRG die om HG gewenteld wordt; alle sneden // HG vormen ook een parabool met dezelfde parameter. Als
$AH = r \quad$ parameter $= p$
$Qy = y \quad HQ = x = (rr - yy)^{\frac{1}{2}}$
dan in de inhoud RQHG van het nog volle deel de fluent:

$$\text{Inhoud}_{RQHG} = \frac{x\,y^3}{3\,p} - \frac{rr}{p} \int y\,dx \qquad (224)$$



155. Martini : Pithometriae Theorie Nova pars II
156. Construction of Mathematical Instruments pag. 22, door Stone. De engelse schuifschaal was "door de Heer Everard vervaerdigd".
157. Universiteitsbibliotheek Utrecht, signatuur: P. Math. 8° 1503. Voor de titelpagina zie figuur 92. Geïllustreerd met voorwoord van Antonius Brugmans, 3 + 42 pagina's. Geen vignet op titelpagina.
158. Brugmans verklaart dat zijn leerling Muller 3 jaar geleden door de Staten gunstig is voorgedragen, en sinds vorig jaar waarnemend wijnroeier is.(1780)
159. Montucla, Etienne : Histoire des Mathématiques Tome I pag. 267 (C.B. Boyer, op. cit. noot 19, noemt op pag 427 een herdruk: Paris, 1799 - 1802, 4 delen).
Amontons : Mem. de l'Acad. R. des Sciences 1708
L. Euler: Introductio in analysin infinitorum (1748), p. 226.
160. Vergelijk bijlage 1 nummer 15.
161. J.H. Lambert : verwezen wordt naar "Mem. de Berlin" (vergelijk noot 102) en artikel Jauger in de "Dict. Encycl." uitgave van Yverdon.
162. Vergelijk noot 10; waarschijnlijk een telg uit dit geslacht van wiskundigen: de Johan Tideman jr. van noot 10 werkte samen met zijn vader Johan Tideman sr. (M. Donkersloot-de Vrij, op.cit.)
163. Universiteitsbibliotheek: Math. et Astr. Oct. no. 1310, 36 pagina's, met figuren I - IV achterin boekje, op een plaat. Zie figuur 95.

164. Lessen over de hoogere algebra, 1845, 1921[9]; Sneek, 1862[2]; M. Abramowitz & I.A. Stegun: Handbook of mathematical functions, New York 1972 (Dover-reprint van 10[e] druk): 25.4.32 Lobatto's integration Formula.
165. Proeve eener nieuwe handelwijze ter bepaling van den inhoud der vaten door R. Lobatto, Math. Mag. Phil. Nat. Dr., Adviseur voor de Zaken der Maten en Gewigten bij het Departement van Binnenlandsche Zaken. Met ééne plaat. 's Gravenhage en Amsterdam, De Gebroeders van Cleef, 1839.
166. Zie bijlage 1 nummer 20
167. Lobatto past logarithmen toe.
168. De voor een reconstructie van de methode nodige verhouding EI / EC wordt niet aangegeven.
169. Bijlage I nummer 17.
170. Deze volstrekte onpartijdigheid van de wijnroeier werd bij mijn weten in geen enkele verordening vereist.
171. Brief A. van Leeuwenhoek aan L. van Veldhuyzen, november 1679. Geciteerd in: H.L. Houtzager, Lambert van Veldhuyzen en zijn contacten met geleerde tijdgenoten , Oud-Utrecht 58, 29 (1985).
172. Geciteerd in op. cit. noot 2. (= C. Frisch ed. ,Kepleri opera omnia, vol XVII,pag. 327)
173. Stereometria Doliorum, op.cit. noot 5, pag 133; hier vrij uit het latijn vertaald. De beide dichtregels zijn een speelse variant van Kepler op regel 10 en 11 van Carmen V door de romeinse dichter C. Valerius Catullus (84 - 54 voor Christus), die luiden:

    Dein, cum milia multa fecerimus
    conturbabimus illa, ne sciamus

(De dichter moedigt zijn geliefde ~~nu~~ aan samen van leven en liefde te genieten, ongeacht praatjes van de buitenwereld, we leven maar eens en vraagt haar om duizend kussen, dan honderd....

    Dan, als we vele duizenden gegeven hebben
    vegen we de optelling uit om hem te vergeten

~~en~~ opdat niemand er kwaad mee kan.) Kepler vervangt de kussen dus door (maat)bekers:

    Et cùm pocula mille mensi erimus
    Conturbabimus illa, ne sciamus

174. Mogelijk is hier bij het transscriberen een t voor een c aangezien; vergelijk verderop "quociens" (de karolingische minuskel voor c en t lijken op elkaar). Ook "eciam" in III, 17[a].
175. Werlin[10] had getranscribeerd "smer".
176. Volgens konstrukties als die van Hero of van Plato (vriendelijke mededeling van H.J.M. Bos).

BESCHRIJVING VAN MANUSCRIPTEN

j.m. muller

twee methodes van klassificeren met elkaar vergeleken aan de hand van wiskundige 17^e eeuwse handschriften

Op voorstel van drs. J. A. van Maanen heb ik in de herfst van 1982 een aantal handschriften van de Universiteitsbibliotheek Utrecht gelezen en op twee manieren beschreven: zowel volgens Jans eigen methode[1], als op de wijze, zoals die in het Nederlandse archiefwezen wordt toegepast[2]. Deze methoden werden ook gebruikt om een meetrapport van J.P. Dou (Gemeente Archief Utrecht) te beschrijven.
Daar zowel Jans als mijn belangstelling uitging naar historische wiskundige teksten, koos ik een aantal zeventiende eeuwse handschriften van wiskundige, en in het bijzonder, vooral meetkundige strekking.
Het is duidelijk dat de methode- van Maanen zich beter leent voor automatiseren en tevens speciale aandacht schenkt aan de details van de materiële vorm, zoals preciese afmetingen, die in de traditionele archivistische beschrijving - de andere methode - wordt weggelaten.
Deze tweede methode, die wijd en zijd wordt toegepast op de Nederlandse archieven, is wel een stuk leesbaarder en tevens kompakter. Aangezien deze aanpak is ontwikkeld voor overheidsarchieven en stukken van juridisch belang, wordt steeds de nadruk gelegd op de status van een stuk: van wie is het (funktie auteur ten opzichte van de archiefvormer, die het stuk tenslotte naliet) en wat is de funktie van het stuk in het geheel. Dit accentverschil van beide methoden blijkt bij het stuk van Dou.
Hieruit volgt ook, dat de methode- van Maanen met zijn systematiek van wiskundige onderwerpen bedacht is voor losse manuscripten, die niet in een groter verband van soortgelijke handschriften thuishoren. De archivistische beschrijving werkt het best bij stukken die in hun oorspronkelijke organische verband zijn gebleven; een eventuele systematiek wordt dan in de inventaris verwerkt door een rubriek of afdeling van soortgelijke stukken te vormen[3].
De laatste aanpak vereist ook vermelding van taal van het stuk, de redaktionele vorm (bijvoorbeeld brief, rapport, kasboek), en het redaktionele stadium (klad of net of iets dergelijks), belangrijke eigenschappen van een handschrift dus die niet vergeten mogen worden.
Door hiervoor descriptoren aan de methode- van Maanen[4] toe te voegen ontstaat een klassificatie techniek voor losse wiskundige manuscripten die zeker zeer bruikbaar zal zijn in de praktijk.

1) Als bijlage toegevoegd (pag. 7 - 12)
2) Oorspronkelijk: S.Muller Fz.,J.A.Feith en R. Fruin: Handleiding voor het ordenen en beschrijven van archieven, ontworpen in opdracht van de Vereeniging van Archivarissen in Nederland, Groningen 1897; en latere publicaties van de zelfde vereniging
3) Vergelijk: J.M. Muller : Inventaris van het archief van prof. dr. H.A. Lorentz (1853 - 1928) 1866 - 1930, Algemeen Rijksarchief, Tweede Afdeling, Den Haag 1982, waarin rubrieken als natuurkunde / algemeen - bijzonder / hydrodynamica enzovoorts voorkomen.

4) Ik dank drs. J.A. van Maanen voor zijn stimulerende belangstelling.

7/7/82

J.P. Dou : De maten van de bottertonnen
Gemeentelijke Archiefdienst Utrecht
Stadsarchief Tweede Afdeling inv.no. 308

Jan Pieterss. Dou : De maten van de Bottertonnen verclaert by voeten duymen greynen ende distans

auteur: blijkt uit handtekening

titel : bovenaan eerste pagina

datum: materiëel: 4 mei nov. stil. 1604
inhoudelijk: -

2 bladen; 3 beschreven bladzijden; 1 stuk

niet gefolieerd

folio (32 x 21 cm)

autograaf; netschrift

1 pentekening in zwarte inkt over twee bladzijden; betreft illustratie van decimale indeling van Rijnlandse voet in duimen en greinen

bijzonderheden: Dou gebruikt een decimale verdeling van de Rijnlandse roede in voeten, duimen, greynen en distans.

systematiek: toepassingen: handel
: maat/stelsel

(Tweede klassificatie: meetrapport)

+ +

Meetrapport door Jan Pieterss. Dou betreffende de omvang van Utrechtse standaard-botertonnen, 1604 — 1 stuk

N.B. 1. Ingekomen bij en opgemaakt in opdracht van het stadsbestuur van Utrecht
2. Dou gebruikt een decimale verdeling van de Rijnlandse roede
3. Met pentekening van deze verdeling.

Anemaet : "Om de wortel te trecken.."

geen algemene titel

U.B. Utrecht HS 1363 plaatsno VI G 16

D. B. Anemaet: (geen algemene titel)
auteur: handtekening
datering: materiëel: "ge-eyndigt den 12 april 1690"
inhoudelijk: verwijzing naar sin-tafels van van Ceulen, Sems en J.P. Dou
43 bladen, alle beschreven; sporen van nog twee bladen, die uitgescheurd zijn
foliëring: met potlood, niet kontemporain
30.5 x 20 cm

netschrift, autograaf

pentekeningen, konstrukties

band: van leer

systematiek: instrumenten: astrolabe, rechenstock, winkelkruis
meetkunde: oppervlakte dimensie 2; inhoud
: Euclides' Elementen
toepassingen: landmeetkunde ; vestingbouw ? (voorbeeld)
inhoudsmeting;handel (interest)
trigonometrie: algemeen

tweede klassificatie: problemen met uitwerkingen
leertekst voor zelfstandige studie

+ + + + + + ++ ++ + + + + +

Aantekeningen door D. B. Anemaet betreffende oppervlakte- en inhoudsmeting, met een uittreksel van Euclides' Elementen, april 1690 1 band

N.B.1 met pentekeningen
2. Ingebonden bij het handschrift van H. Anemaet.

Hubertus Anemaet: geen algemene titel, diverse katernen bij elkaar ingebonden

auteur: handtekening

datum: materieël: 1720 - 1726
inhoudelijk: -

32 bladen, alle beschreven; verder zijn er twee bladen uitgescheurd

30.5 x 20 cm

foliëring: in potlòod, niet kontemporain

autograaf, kladschrift

pentekeningen

band van leer, niet kontemporain ?

bijzonderheden: ingebonden achter handschrift van D.B. Anemaet

systematiek: meetkunde: algemeen, oppervlakte in 2 dimensies
vlakke figuren
trigonometrie: algemeen
toepassingen: landmeetkunde vestingbouw
hoogtemeting
maatstelsels
arithmetica: elementaire operaties in een decimaal stelsel van roeden, voeten etc.

tweede klassificatie: problemen met uitwerkingen
aantekeningen/leertekst voor zelfstandige studie

+ +

Aantekeningen door H. Anemaet betreffende vlakke meetkunde, landmeetkunde en verschillende maatstelsels, 1720 - 1726, klad 1 band

N.B.1 Met pentekeningen
2 Ingebonden achter het handschrift van D.B. Anemaet

auteur: - ; titel: -
U.B. Utrecht plaatsno 10 B 5
supp. HSS. cat. bak A leeszaal Hs + OD

datering: materiëel: 1694, juli - september
inhoudelijk

herkomst: in 1920 geschonken door prof. mr. J.C. Naber

24 bladen; 46 beschreven bladzijden, 1 katern

niet gefoliëerd

21 x 16 cm, netschrift

vele pentekeningen in zwart,rood en groen

systematiek: kegelsneden : oppervlakte, inhoud
klassieke problemen: quadratuur cirkel
meetkunde: dimensie 2 en 3: vlakke figuren, inhouden
toepassingen: astronomie (zonnewijzer)
landmeetkunde
waterbouwkunde
wijnroeien
inhoudsberekening algemeen

tweede klassificatie: problemen met uitwerkingen

+ +

Aantekeningen betreffende meet-, landmeet- en waterbouw-kunde met voorbeelden van akten van opmeting van landmeters en uitgewerkte opgaven; tevens betreffende wijnroeien en zonnewijzers, net, Rotterdam, juli - september 1694 1 katern

N.B.1.Met pentekeningen in zwart, rood en groen
2.Auteur onbekend

8/82

anonymus: Opus de geometria

U.B. Utrecht HS 729 plaatsno. VI G 13
(catal.: 729 (Var.22).Charta. fol 145 ff
Saec XVII)

datering: materiëel: -
inhoudelijk: 17e eeuw (handschrift, wijze van behandeling onderwerpen)

1 band; 158 bladen, waarvan 147 beschreven

foliëring: eenzijdig, kontemporain

netschrift , autograaf

vele pentekeningen in zwarte inkt

band van leer, kontemporain ?

systematiek: instrumenten : astrolabium, circinus (passer), baculus (meetstok)
goniometrie : algemeen
meetkunde : algemeen, dimensie 2 en 3, oppervlakte, inhoud, konstrukties, stereometrie (overige)
trigonometrie: algemeen
toepassingen: landmeetkunde
overige : inhoudsberekening

Tweede Klassificatie: problemen met uitwerkingen
aantekeningen bij bestudering van (werk over) Euclides
aantekeningen voor zelfstandige studie

+ +

"Opus de geometria". Verhandeling betreffende de meetkunde van vlakke figuren, driehoeksmeting, landmeetkunde, inhoudsmeting en stereometrie; met uittreksels van Euclides' Elementen en uitgewerkte opgaven, net, 2e h. (17e eeuw) 1 band

N.B.1.In het latijn
2. Auteur onbekend.
3. Met illustraties.

10/1/82

(vervolg van III (157))

7

9

Ontwerp inventarisatieformulier:

175

datum: * / /

V

voorlopig nummer

def. nummer

auteur kort

koptitel kat

*

bibliotheek + signatuur

*

auteur en titel volledig

motivatie

*

materiële datering

motivatie

*

inhoudelijke datering

motivatie

*

; oudste katalogus: ?

referenties

260

verworven dd. via evt. katalogus

afkomst handschrift

11/01/82

V

(11)

Technische gegevens:

* ; * ;

aantal banden of anders: bewaarvorm   aantal bladen

*
- ☐ niet
- ☐ kontemporain
- ☐ later

- ☐ eenzijdig
- ☐ tweezijdig

gefolieerd ;

* x mm   *(. . . . kolom(men) van * x * mm ;

formaat papier   bladspiegel

*
- ☐ autograaf
- ☐ afschrift van hand van _ _ _ _ _ _ _ _ _ _ _ _ _ _ ;
- ☐ afschrift van onbekende hand

*
- ☐ kladschrift
- ☐ netschrift
- ☐ kopie

;

* ; band :

soort illustraties

*
- ☐ leer
- ☐ halfleer
- ☐ perkament
- ☐ karton
- ☐ papier

band

,

*
- ☐ kontemporain
- ☐ van later datum

;

*rugtitel : . _ _ _ _ _

bijzonderheden: _ _ _ _ _ _ _ _ _ _ _ _ _ _ _

Systematiek handschrifteninventarisatie. 11/01/82

vervolg van: III 9/3

951

Algebra		algemeen
		vergelijkingen graad: 1 / 2 / 3 / 4 / 5 / hoger
		konstruktie van vergelijkingen
		reduktie van de graad van vergelijkingen
		symmetrische funkties
		overige:
Algoritmen		algemeen
Analytische meetkunde		algemeen
		coördinaten
		vergelijkingen voor krommen
		vergelijkingen voor oppervlakken
		overige:
Arithmetica		algemeen
		elementaire operaties
		coss-rekening
		overige:
Benaderingen		voor:
Getaltheorie		algemeen
		bevriende getallen
		deelbaarheid
		diophantiek
		figuratieve getallen
		kettingbreuken
		perfekte getallen
		priemgetallen
		magische vierkanten
		overige:
Goniometrie		algemeen
Infinitesimaalrekening		algemeen
		differentiatie
		infinitesimalen; indivisibilia
		integratie
		inverse tangenten problemen
		limietargumenten
		maxima en minima
		quadratuur
		rektifikatie
		tangenten, normalen
		overige

Instrumenten	t.b.v. wiskundige konstrukties
	landmeetkunde; plaatsbepaling
	overige:
Kegelsneden	algemeen
Klassieke problemen	driedeling hoek
	quadratuur cirkel
	verdubbeling kubus
Krommen	algemeen
	cissoïde
	conchoïde
	cycloïde
	folium Descartes
	kromme van Gutschoven
	limaçon
	logarithmica
	ovalen
	paarlen
	overige :
Logarithmen	algemeen
Logika	algemeen
Meta-wiskunde	apologie
	didaktiek
	geschiedenis
	overige
Perspektief	algemeen
Reeksen, rijen	algemeen
	limietargumenten
	sommatie
	overige
Rekonstruktie klassieken	namelijk van :
Statistiek	algemeen
Tabellen	goniometrische
	logarithmen
	priemgetallen
	overige :

Meetkunde

algemeen	
dimensie	2 | 3
oppervlakte	
inhoud	
konstrukties	
overige	

Toepassingen	architektuur
	astronomie
	fysika (uitgez. mechanika, optika)
	handel
	kunst
	landmeten
	mechanika
	militair
	muziektheorie
	navigatie
	optika
	tijdrekening
	verzekeringen
	vestingbouw
	overige :
Trigonometrie	algemeen
Waarschijnlijkheidsrek.	algemeen
Zwaartepuntsbepalingen	algemeen

vervolg : IV (9)

Tweede klassifikatie: Karakter van de inhoud.

- Aantekeningen bij bestudering van werk van anderen : van
- Afschrift van gedrukt werk :
- Diktaat van docent
- Diktaat van student
- Leertekst voor zelfstandige studie
- Problemen met uitwerkingen
- Problemen zonder uitwerkingen
- Researchtekst klad
- Researchtekst net.

A. G. Kästner : Mathematische Anfangsgründe

Een achttiende-eeuws wiskunde-leerboek in vogelvlucht.

door J.M. Muller

Inhoud:

0. Inleiding

In de Universiteitsbibliotheek van de Rijksuniversiteit Utrecht bevindt zich een duits kollege-dictaat in 10 octavo deeltjes [1] geschreven door de achttiende-eeuwse wiskundige Abraham Gotthelf Kästner (1719 - 1800); onder de collectieve titel Mathematische Anfangsgründe - verder aan te duiden als MA - beslaat dit didactische werk zo'n 5000 paginaatjes. De aanwezigheid van verschillende drukken van sommige deeltjes lijkt te wijzen op een grote populariteit; voor mijn onderzoekje naar de globale inhoud en behandeling van de wiskundige leerstof [2a] koos ik telkens de laatste druk uitgegeven bij het leven van Kästner die voorhanden was.
In de onderstaande paragrafen wordt kort ingegaan op verschillende aspecten van dit leerboek MA, zoals de motivatie van de auteur, het karakter van kollege-dictaat en de ideeën van Kästner over taak en werkterrein van de wiskunde zoals hij die in de MA ter sprake brengt. Voor een inhoudsopgave van de losse deeltjes die samen de MA uitmaken zij verwezen naar bijlage 1.

1. Kästners motivatie

Kästner[2] doceerde gedurende vele decennia wiskunde, eerst aan de universiteit van Leipzig (1739 - 1756) en later tot aan zijn dood (1756 - 1800) aan de universiteit te Göttingen, die onder zijn invloed als brandpunt van de wiskunde-beoefening bekend werd.
Kästner was minder een onderzoeker dan een verspreider van wetenschappelijke ideeën ; behalve zijn meest populaire boek, de MA, schreef hij meer dan 100 wetenschappelijke opstellen.
In het voorwoord van MA I.1 vertelt Kästner hoe hij na twintig jaar kollege geven uit de Anfangsgründe aller Mathematischen Wissenschaften (eerste uitgave Halle 1710)[3] van de duitse wiskundige en filosoof Christian Wolff (1679 - 1754) besluit zijn eigen dictaat te gaan uitgeven.
Er is behoefte aan een grondige en volledige uiteenzetting van de wiskunde, zodat deze werkelijk bruikbaar wordt: dat houdt in dat de leer van de parallellen en stereometrie [10] moet worden behandeld, en ten behoeve van de toegepaste wiskunde, kunsten en wetenschappen het rekenen volgens het tientallig stelsel, proporties, logarithmen, de posities van vlakken, cirkels en kegelsneden in de ruimte en het letterrekenen (Buchstabenrechnung = algebra).
Wolffs leerboek geeft hierover bijna niets; hoewel hij van grote betekenis voor de wiskunde in Duitsland is geweest, verklaart Kästner, grijpt hij toch liever terug op Sturm.
De Arithmetica stoelt op gehele getallen, vindt Kästner : "Brüche sind ganze Zahlen, deren Einheit ein Stück des anfangs für die

Einheit angenommenen Ganzen ist, und Irrationalgrössen muss man sich als Brüche vorstellen, da diese Einheit veränderlich, immer ein kleineres Stück des Ganzen ist. Dass der Freyherr von Wolf die Lehre von den Brüche auf die von den Verhältnisse gründet, ist ein grosser Fehler wider die Methode, weil die grösste Menge der Verhältnisse, Brüche zu Exponenten hat."
Kästner biedt een snelle methode aan: na een half jaar kan de bange leerling een even diepzinnig werk schrijven als al die duitse universitaire schrijvers die dikke folianten voortbrengen, maar geen logische redenering kunnen volgen, de "Algebraisten"; daartoe is van de kant van de student niet meer concentratie nodig "als ein Frauenzimmer braucht das Taroc spielt". (Taroc = kaartspel)
Wat de parallellen betreft: Kästner schrijft dat hij dit probleem niet heeft kunnen oplossen - hij doelt op het bewijs van Euclides parallellen-postulaat - maar dat zijn student Klügel in zijn dissertatie[4] van 1763 28 vergeefse pogingen heeft ondernomen. In de meetkunde is verder in de MA het boek van Kästners docent Hausen gevolgd (Elementis Matheseos). De positie van vlakken wordt in de MA korter maar overtuigender dan elders behandeld, merkt Kästner op. (Kästner postuleert expliciet de verdeling van het vlak door een lijn in twee delen en geeft duidelijk de nodige veronderstellingen voor het snijden van een cirkel met een lijn of een andere cirkel, waarmee hij vooruitloopt op het werk van M.Pasch[2] (1843 - 1933).)
De Trigonometrie wordt korter dan elders, maar wel volledig uit de doeken gedaan - nergens gebeurt dit volledig, behalve bij Rhaeticus (Opus Palatinum)[5] "für die aber meine Gedult nicht zureichet". In het voorwoord van II.1 MA merkt Kästner op, dat de behandeling van de Astronomie - die deel uitmaakt van de toegepaste wiskunde - bij Wolff wel ideaal voor gevorderden is, maar te moeilijk voor beginnelingen, reden waarom Kästner een eenvoudiger tekst schreef. We zien dat Kästner een didacticus is, die vanwege het grote nut dat de wiskunde voor de mens heeft - waarover later - streeft naar een zo eenvoudige en helder mogelijke uiteenzetting van grondbegrippen; dat is ook belangrijk, omdat de wiskunde zijns inziens een voorbeeld-wetenschap is.
Zelf wijt Kästner in het voorwoord bij de tweede druk van MA III.2 de drukfouten aan de auteur "der zu gelehrt schreibt"; op dezelfde plaats verantwoordt hij ook zijn behandeling van de infinitesimaalrekening in een historisch getinte inleiding.[6] Schept Galileï in zijn Discorsi (1638) opzettelijk verwarring, Sturm en Boscovich maken in hun leerboeken de boel onbegrijpelijk, terwijl Fontenelle ten onrechte beweert dat de meetkunde van het oneindige samenhangt met het inwendige wezen der dingen.
Mac Laurins Treatise of Fluxions (1742) is wel helder maar ook langdradig. Kästner zelf gebruikt de methode van de eerste of laatste verhouding uit Newtons Principia (als hier fouten aankleven, is het als met een"Frauenzimmer": alleen in de kleding zitten gebreken) Overigens noemt Kästner Newton en Leibniz beiden als ontdekkers van de infinitesimaalrekening.

2. Mathematische Anfangsgründe als kollege-dictaat

In de verschillende voorwoorden van de deeltjes die samen de MA vormen laat Kästner hier en daar iets los over het gebruik van dit didactische werk. Het is uitgegeven opdat Kästner tijdens zijn kolleges korter kan spreken en litteratuurverwijzingen beter tot hun recht komen.[13,7] Gestreefd wordt naar didactische eenvoud, met nadruk op de logische redenering en een opbouw van de stof van makkelijk naar moeilijker - Kästner geeft hoog op van de "Mathematische Methode", die de leerlingen zo wordt bijgebracht.
In het voorwoord van MA II.1 schrijft Kästner, dat hij bij de toepassingen van de wiskunde geen analyse gebruikt, maar een aanschouwelijk begrip nastreeft.

De MA is bedoeld voor algemeen gebruik en biedt eenvoudige wiskunde om de beginneling niet af te schrikken; het is dan niet verwonderlijk dat van Gauss wordt verteld[2], dat hij tijdens zijn studiejaren te Göttingen de kolleges van Kästner meed vanwege hun elementaire karakter. Toch blijkt uit Gauss' werk invloed van Kästner : niet alleen wat de parallellen betreft, maar ook in de noodzaak die beide wiskundigen voelden van orde-postulaten in de meetkunde; beiden bestreden het begrip van werkelijke oneindigheid in de wiskunde[2].
We hebben in 1. gezien dat Kästner een snelle methode wilde geven.

3. Wat verstaat men onder Mathematik ?

Dat Kästner voor de wiskunde een uitgebreid werkgebied reserveert, blijkt uit zijn opmerking "Wenig menschliche Verrichtungen sind, von denen nicht ein Theil auf mathematischen Gründen beruhete." 9
Impliciet onderscheidt hij zuivere en toegepaste wiskunde. Wiskunde houdt zich bezig met grootheden ("Grösse") die zowel beschouwd kunnen worden als een verzameling van delen ("eine Menge von Theilen") - dit is de optiek van de"Arithmetik" - als een geordend geheel waarvan de ordening onderzocht kan worden; dit laatste is het onderwerp van de Geometrie. Uit deze beide takken samen komt alle "reine Mathematik" voort : trigonometrie, letterrekenen, analyse, algebra en infinitesimaalrekening, die ook samengevat kunnen worden onder de term "Analysis".
Daarnaast is er de toegepaste wiskunde en bovendien merkt Kästner op: "Es gibt aber mehr Gegenstände, die von den Mathematikverständigen so sind untersucht werden, dass sie besondere Wissenschaften geben können. Die Musik....Die Schiffkunst..". De toegepaste wiskunde kan nog meer gebieden veroveren, mits "ein Maass, das einerley Empfindung allen Geistern verständlich machte, hie zu entdecken wäre". Naast de behandeling van kans en verwachting, lijfrente en loterij, waarin de wiskunde al geslaagd is, zouden ook blijdschap en pijn kunnen worden onderzocht. Er bestaat een "natürliche Mathematik" waarmee de schermer de sterkte van zijn degen schat en de kunstenaar proefondervindelijk werkt.
Tot de toegepaste wiskunde, zoals Kästner die in MA behandelt, behoren:

1. statica[14]
2. hydrostatica
3. aerometrie
4. hydraulica
5. optica[11]
6. katoptrica (spiegels)
7. dioptrica (doorzichtige media)
8. astronomie[12]
9. chronologie
10. gnomonica (zonnewijzers)
11. artillerie
12. fortificatie
13. bouwkunst

Kästner verklaart, dat het nut van de analyse in de mechanica[15] blijkt; met de in IV.1 en IV.2 behandelde dynamica (14) en hydrodynamica(15) zouden we Kästners oorspronkelijke lijst kunnen uitbreiden. Van de vakken artillerie, fortificatie en bouwkunst, die "gewoonlijk aan het eind van een wiskundige inleiding worden behandeld" wordt alleen in het kort de inhoud gegeven; de laatste twee vakken heten ook wel "Baukunst für Krieg und Frieden". Typerend is de opmerking :"Ganz wollte ich davon nicht schweigen, damit es nicht aussähe als rechnete ich diese Kenntnisse nicht zur Mathematik, die für Manche allein Mathematik sind".[16] Er wordt voldoende van behandeld, opdat de leerling zich later in een gesprek niet belachelijk maakt. Uitdrukkelijk wordt gesteld, dat kruit en bouwwerktuigen niet tot de wiskunde behoren, maar tot de "brauchbare Naturgeschichte und chemische Physik. Das eigentlich mathematische in ihnen ist Geometrie und Mechanik."

4. Het nut van de wiskunde

In Kästners zienswijze is de wiskunde op verschillende manieren bijzonder nuttig: enerzijds is er een direct praktisch nut, omdat de wiskunde zoals we in 3. gezien hebben een groep van wetenschappen vormt, "deren Verbindung mit allen menschlichen Beschäftigungen so offenbahr is"en "Angewandte Mathematik ist jedem wichtig, der von der Natur und derselben Gebrauche zum Dienst des Menschen richtige und einiger Massen volständige Begriffe haben will."[17] Vanwege de veelzijdige toepasbaarheid van de wiskunde is haar nut dus bijzonder groot.

Anderzijds is wiskunde een voorbeeldige wetenschap: "Die mathematische Methode soll die einzige seyn, die zur Gewissheit führet und der man sich also zu bedienen hat, wenn mann vor Irrthümern sicher seyn will." [18]

Hoewel het onderzoek ervan tot de logica behoort, gaat Kästner er toch kort op in, omdat docenten logica hun leerlingen soms een onjuist beeld van de wiskundige methode bijbrengen. In de arithmetica en geometrie zijn de "Lehrer" het onderling eens, terwijl in andere wetenschappen overal strijd bestaat over eerste beginselen. De wiskunde, en in het bijzonder de meetkunde - Kästner spreekt daarom van de Euclidische methode - schrijdt voort van "Erklärungen" naar "Grundsätze" (definities en axioma's), van postulata naar theoremata, problemata-solutio-corollaria met verduidelijkingen in scholia.

Het moet verhoopt worden, dat elke geleerde, "der nicht seiner Facultät die Lobrede halten will, dass sie keiner deutlichen Begriffe, keiner sichern Gründsatze, und keiner vernuftigen Schlüsse fähig sey."[18] deze methode zoveel mogelijk toepast. Kästner verwijst naar Locke : Human Understanding[25] en tekent aan, dat waar geen groottes voorkomen, men niet kan meten of rekenen. De speciale termen van de verschillende wetenschappen vormen de kentekens van de begrippen, zoals de cijfers in de arithmetica, maar in de filosofie wordt soms met vele tekens helemaal niets aangeduid, kritiseert Kästner.

In de toegepaste wiskunde kent men behalve axioma's (Grundsätze) ook ervaringen, waarnemingen en proeven; de astronomie is een goed voorbeeld, van de methode die van hypothese over de vergelijking met gebeurtenissen naar de toetsing van de hypothese loopt. Zelfs een onjuiste hypothese kan tot de waarheid leiden.

"Man muss auch das bedenken, dass in der Mathematik sich nicht alle Grössen wirklicher Dinge gleich anfangs mit der grössten Richtigkeit finden lassen; dass man sie oft zuerst nur ohngefähr bestimmt, und diese Bestimmungen selbst braucht, daraus schärfere zu finden". [18]

De wiskunde toont ons zeer overtuigend, dat we ook bij de hoogste kennis van de mens ons tevreden moeten stellen met de steeds dichtere benadering van de waarheid, die we misschien nooit volledig kunnen bereiken en Kästner citeert Haller[19]:"Weil sich unser Aug am Kleid der Dinge stösst."

Als de waarheid reeds gevonden is, moet de uiteenzetting ervan synthetisch geschieden.

Kästner noemt referenties, waarin de methode van Euclides op andere wetenschappen, logica en metaphysica wordt toegepast en waarin op het nut van de wiskunde wordt ingegaan.[20]

We zien dus, dat wiskunde zowel model staat voor de andere wetenschappen vanwege haar zuivere methoden, zowel die van de zuivere wiskunde als van de toegepaste, als de mens van dienst is bij zijn dagelijkse bezigheden.

5. Wie was Kästner ?

Abraham Gotthelf Kästner werd in 1719 te Leipzig geboren als zoon van een hoogleraar in de rechten; deze begon hem al vroeg voor te bereiden op een studie in de rechten, maar later ging de interesse van de zoon meer uit naar filosofie, wiskunde en natuurkunde. Na zijn Habilitation aan de universiteit te Leipzig in 1739, doceerde Kästner aldaar wiskunde, logica en natuurrecht, eerst als privaat-docent, maar na 1746 als buitengewoon hoogleraar. In 1756 werd hij aangesteld als professor in de wis- en natuurkunde aan de Georgia Augusta universiteit te Göttingen, die niet lang tevoren - in 1737-door George II was opgericht.[2,21,23]
Deze universiteit stond, in tegenstelling tot de meeste andere duitse universiteiten, op een met Engelse en Franse universiteiten van toen vergelijkbaar niveau.[21] Van Kästner ging een grote stimulans op wetenschappelijk gebied uit, mede door zijn vele populaire lezingen en vele publicaties op wetenschappelijk gebied, hoewel hij zelf weinig aan de ontwikkeling van de wiskunde heeft bijgedragen. In 2. hebben we zijn invloed op Gauss besproken; het is opvallend dat alle drie wiskundigen, die de niet-Euclidische meetkunde uitvonden direkt of indirekt Kästners invloed hebben ondergaan[2] (zie figuur). Zijn pogingen om het parallellen-axioma te bewijzen zagen we al in1. Verder is van Kästner bekend, dat hij vond dat ~~in~~ de meetkunde de analytische methode te verkiezen was boven de synthetische, als heuristische aanpak van problemen.[22] Zijn veelzijdigheid blijkt ook uit zijn Geschichte der Mathematik, Göttingen 1796 - 1800 in vier delen, waarin hij veel aandacht besteed aan de praktische wiskunde van de renaissance.[22]
Behalve op wetenschappelijk terrein - van taalkunde tot astronomie- bewoog Kästner zich ook op letterkundig gebied: hij schreef epigrammen (zie bijlage 2)[8], vandaar dat Gauss kon opmerken dat Kästner onder de dichters van zijn tijd de beste wiskundige was, en onder de wiskundige de beste dichter. In de poëzie was hij een aanhanger van Gottsched; hij was een echte verstandsschrijver met meer talent voor proza dan voor poëzie, luidt het oordeel van een tekstbezorger.[8]
Kästner schreef ook een autobiografie : Vita Kestneri, Leipzig 1787. Hij was een gelovig lutheraan en was tweemaal getrouwd;hij had een dochter uit zijn tweede huwelijk.[24,2]

A.G. Kästner (universiteit van Göttingen)

K.F.Gauss (1777-1855)

Wolfgang Bolyai → Johann Bolyai (1802 - 1860)

J.M.C. Bartels (universiteit van Kazan) → N. Lobatchevsky (1793 - 1856)

figuur[2]: Kästners invloed op de drie grondleggers van de niet-euclidische meetkunde

6. Besluit

De Mathematische Anfangsgründe werd door A.G. Kästner geschreven omdat hij in de behoefte aan een algemeen wiskunde-leerboek, dat voor velen toegankelijk was, wilde voorzien; vanwege zijn opvattingen over het nut van de wiskundige wetenschappen wilde hij de grondbeginselen van de wiskunde zo helder en eenvoudig mogelijk uiteenzetten. Gezien de populariteit van de MA, die het leerboek van Wolff aan de duitse universiteiten verdrong[8] mag men konkluderen dat Kästner in zijn opzet geslaagd is.
Kästner was een veelzijdig wetenschapsman, wiens waarde vooral gelegen is - voor zover het de wiskunde betreft - in zijn belangstelling voor de grondslagen van de meetkunde en de stimulerende invloed die hij op zijn studenten heeft gehad.

NOTEN

1. Universiteitsbibliotheek Rijksuniversiteit Utrecht, signaturen: P. oct 734 ; 735 ; 736 ; 737 ; 336 ; 337 ; 740 ; 741 ; 742 ; 743 in de logische volgorde van de nummering van MA I.1 tot IV.2
2. Artikel Kaestner, Abraham Gotthelf door George Goe, in: Dictionary of Scientific Biography, ed. Ch. Coulston Gillespie, New York 1973 deel VII.
3. Artikel Wolff, Christian door Gerd Buchdahl, in: idem (ander deel)
4. diss. G.S. Klügel : Conatuum praecipuorum theoriam demonstrandi recensio, quam publico examini submittent Abrah. Gotthelf Kaestner et auctor respondens Georgius Simon Klügel, Göttingen 1763.
5. Georg Joachim Rhaeticus of Rheticus (1514 - 1576), medewerker van Copernicus, wiens theorie hij als eerste publiceerde (1540). Valentin Otho (circa 1550 - 1605) op zijn beurt een student van Rheticus, gaf Rheticus' Opus palatinum de triangulis met uitbreidingen in 1596 uit.
6. Kästner spreekt van het oneindige als raadsel, in de Oudheid vermeden, door Descartes slechts met beven genoemd. Hij wijst op het verband tussen het idee van Barrow, dat alleen het eindige bepaald en werkelijk is, en de ontdekkingen van zowel Newton als Leibniz. De denkbeelden van Fontenelle weerlegde Kästner elders, schrijft hij. In de tweede druk van MA III.2 voegde Kästner uitbreidingen toe, naar aanleiding van Eulers nieuwe boek: Institutionis Calculi Integralis; de tweede druk van III.2 verscheen in 1770. In de derde druk van 1798 is variatierekening toegevoegd.
7. Kästner vond het niet gewenst vele illustraties van machines toe te voegen en er een "mathematisches Bilderbuch" van te maken, schrijft hij in het voorwoord van II.1 MA, want machines kunnen toch niet goed worden weergegeven; een uitzondering maakt hij voor de luchtpomp van Smeaton (John Smeaton (1724 - 1792),engels instrumentmaker, die onder andere net als James Watt voor Roebuck in Schotland werkte[21] JMM)
8. Fabeldichter, Satiriker und Popularphilosofen des 18. Jahrhunderts herausgegeben von dr. J. Minor, Berlin und Stuttgart, circa 1884; pag 86.
9. Mathematische Anfangsgründe I.1, pagina 1 (voor uitgebreidere bibliografische gegevens zie bijlage 1.)
10. "Ausmessung der Körper".
11. Bevat behandeling van : kwadratenwet, lengte van schaduw, camera obscura, schijnbare en werkelijke grootte, kleurwaarneming; er wordt vooral goniometrie toegepast.
12. Vorrede MA II.1 :"Die Newtonische Lehren von den Ursachen der himmlischen Bewegungen werden jetzo mit soviel Nutzen in der Astronomie gebraucht, das ihre Erzählung hier nicht wegbleiben durfte."
13. Vorrede MA II.2
14. In de behandeling van de statica volgt Kästner Hebel, verklaart

hij (Vorrede MA II.1)

15. En in de andere delen van de toegepaste wiskunde.(Vorrede MA II.1)
16. Vorrede MA II.2.
17. Pagina 1 MA I.1 respectievelijk II.2, Vorrede
18. Voorin MA I.1.
19. Albrecht von Haller (1708 - 1777), Zwitsers anatoom en dichter.
20. Erhard Weigel : Analysis Aristotelica ex Euclide restituta, Jen. 1658.
    Hentsch : Philosophia mathematica complectens methodum cogitandi ex Euclide restitutam...,Lipsch 1756.
    Zowel Weigel als Hentsch zijn leerlingen van Kästner, die ook zelf over deze onderwerpen nader gepubliceerd heeft.
21. P.J. Bouman : Van tijd naar tijd, Europese cultuur in jaren van overgang, Assen 1973, pag. 151
22. C.B. Boyer, A history of mathematics, New York 1968, pag.577 en 680.
23. Inaugurele rede: De eo quod studium matheseos facit ad virtutem, Oratio Inauguralis, Göttingen 1756 (bibliotheek Mathematisch Instituut van de Rijksuniversiteit Utrecht).
24. In Vorrede MA I.1. verklaart Kästner, dat "Eine Person ... ihr Beispiel sollte mir ziegen, wie man durch ein lebendige Erkenntnis höherer Wahrheiten als die erhabenste Mathematik erfindet". Tevens maakt hij een opmerking over de voltooiing van MA I.1. in het laatste kwartaal van 1758, toen de"Schule" van Göttingen door de vijanden - de zeven-jarige oorlog woedde toen, waarin Oostenrijk, Rusland en Frankrijk een gecombineerde poging deden om Pruisen te delen - die vrienden van de wetenschap waren, gespaard werd.(zevenjarige oorlog: 1756 - 1763)
25. John Locke (1632 - 1704): An essay concerning human understanding(1690).
26. Opdracht bij het gastkollege geschiedenis van de wiskunde door H.J.M. Bos in het kader van het kollege geschiedenis van de natuurwetenschappen door H.A.M. Snelders 1984.

Bijlage 1

Korte inhoudsopgave van de Mathematische Anfangsgründe.(MA)
Alle hier besproken deeltjes bezitten een voorwoord van de auteur A.G. Kästner, behalve MA deel I.4.

deel	titel	inhoud	aantal pag.
I.1	Anfangsgründe der Arithmetik, Geometrie und sphärischen Trigonometrie und Perspectiv, Göttingen, 1792[5]	rekenkunde:wortels, rijen,logarithmen. meetkunde: vlakke figuren, kegelsneden. trigonometrie:vlak en bol;perspectief	614
I.2	Fortsetzung der Rechenkunst in Anwendungen auf mancherley Geschäfte, Göttingen 1786	sommen met uitwerkingen, rente,"Kaufmännische Rechnungen","Vermischungsrechnungen","Rechnungen zum Munzwesen", ontbinding in faktoren, enz.	592
I.3	Geometrisch Abhandlungen.Erste Sammlung. Anwendungen der ebenen Geometrie und Trigonometrie, Göttingen, 1791	opgaven en uitwerkingen; recensie van trigonometrische tafels	580
I.4	Geometrische Abhandlungen.Zweyte Sammlung. Anwendungen der Geometrie und Trigonometrie, Göttingen, 1791	opgaven en uitwerkingen over prisma's, pyramiden e.d.	620
II.1	Anfangsgründe der angewandten Mathematik. Abtheilung Mechanische und Optische Wissenschaften, Göttingen, 1792	statica, hydrostatica, aerometrie, hydraulica (machines), optica, katoptrica en dioptrica.	414
II.2	Anfangsgründe der angewandten Mathematik. Abtheilung Astronomie, Geographie, Chronologie und Gnomonik, Göttingen 1792		591
III.2	Anfangsgründe der Analysis des Unendlichen, Göttingen, 1799[3]	differentiaal- en integraalrekening, toegepast op logarithmen, quadratuur en rectificaties van de cirkel, algemene uitdrukking voor zijd van regelmatige veelhoek; differentiaalvergelijkingen; segmenten van ronde lichamen; zwaartepuntsberekening; variatierekening.	876
III.1	Anfangsgründe der Analysis endlicher Grössen, Göttingen, 1794[3]	letterrekenen, wortels, algebra, vergelijkingen met onbekenden, rijen, binomium, kegelsneden, transcendente funkties archimedische spiraal, voorstelling van funkties door oneindige rijen	579

deel	titel	inhoud	aantal pag.
IV.1	Anfangsgründe der höheren Mechanik welche von der Bewegung fester Körper besonders die praktischen Lehre enthalten, Göttingen 1793[2]	recht- en kromlijnige beweging, krachten; beweging van een punt langs een voorgeschreven baan, slinger; vaste lichamen in beweging, rotatie, elastische botsing	626
IV.2	Anfangsgründe der Hydrodynamik welche von der Bewegung des Wassers besonders die praktischen Lehren enthalten, Göttingen 1797[2]	druk, stroomsnelheid, vaten en pijpen; waterrad, impuls; theoretisch onderzoek van de stroomsnelheid	692

Bijlage 2

In : Fabeldichter, Satiriker und Popularphilosophen des 18. Jahrhunderts, herausgegeben von dr. J. Minor, Berlin und Stuttgart (circa 1884) vinden we op pagina 97 de volgende twee epigrammen van A.G. Kästner:

Auf Keplern

So hoch war noch kein Sterblicher gestiegen,
Als Kepler stieg - - - und starb in Hungersnoth.
Er wusste nur die Geister zu vergnügen
Drum liessen ihn die Körper ohne Brod.

Kanttekening door Kästner :"Auf einer Reise, die er thun musste, um allergnädigste Auszahlung rückständiger Besoldung aller unterthänigst anzuhalten", waarmee op de laatste reis van Kepler in october 1630 naar Regensburg, waar een congres van keurvorsten werd gehouden, gedoeld wordt; hij was ook op weg naar Linz en stierf niet van honger, maar koorts (O.Gingerich, artikel Kepler in Dictionary of Scientific Biography, ed. Ch. Coulston Gillespie, New York 1970-1976). Een ander voor dit opstel toepasselijk epigram van Kästner luidt:

Die Algebra der Stutzer

Die Stutzer mögen sich stark auf Algeber legen,
Denn, weniger, als nichts, ist vielmal ihr Vermögen.