始

文部省檢定濟

平面三角法教科書

理學士 高橋豐夫編纂

東京
株式會社中外圖書局

文部省檢定濟

平面三角法教科書

理學士 高橋豐夫編纂

東京
株式會社中外圖書局

緒　　言

本書は余が先年編述したる『代數學教科書』『平面幾何學教科書』および『立體幾何學教科書』に連續して,中學校およびこれと同程度なる各種學校における平面三角法教科用書に充てむための目的によりて編述したるものなり.

本書は明治三十五年一月發布文部省訓令第三號中學校教授要目に準據せしめて編述したるものなれば,記載の事項は最も平易簡明を旨とし,高さ距離等の測法に關しては,その實習と伴はしめて,興味を喚起する事に意を用ゐたり.

本書記載の問題は極めて平易にして,かつ實用に適するものを選びたり.而して問題の數はあまりに多からず,これ教授者をして生徒學力の進步に鑑み

緒　　　　言

時間の餘裕あらば適宜問題を補足せらるべき餘地を與へたればなり.

終りに教授者諸賢に望む,幸に本書のために忠言の勞を吝みたまはざらむことを.

明治三十七年二月一日

高橋豐夫　識す

平面三角法教科書

目　次

平面三角法教科書

第一編

角を計ること

1. 平面三角法は,平面角に關する性質を論じ,及び之を實地に應用する方法を示すことを目的とする所の學科なり.

2. 此目的の爲めには,角を數にて表はさゞる可からず. 角を數にて表はさんが爲めには,先づ單位角を定め,而して計らんとする角の此單位角に對する比を求めざる可からず.

幾何學に於ては,通例直角を單位として角を計る. 然れども直角は實地計算上大なるに過ぎ不便尠からざるを以て,之を小分して他の單位を設く. 即ち一直角の九十分の一を度と稱し,一度の

六十分の一を分と稱し,一分の六十分の一を秒と稱す.

度,分及び秒を表はすには,夫々 ° ′ 及び ″ なる記號を用ゐる. 例へば三度十二分三十秒を $3^\circ\ 12'\ 30''$ と記するが如し

上に述ぶるが如く度,分及び秒を單位として角を計る方法を**六十分法**と稱す.

3. **例題1.** 0·6875直角ヲ六十分法ニテ表ハセ.

0·6875…………直角
90
61·875…………度
60
52·5……………分
60
30………………秒

答　$61^\circ\ 52'\ 30''$

例題2. $24^\circ\ 19'\ 21''$ ヲ直角ノ小數ニテ示セ.

60) 21 ……………秒
60) 19·35 …………分
90) 24·3225 ………度
0·27025 ……直角

答　0·27025 直角

第一問題集

1. 直角ノ半分,直角ノ三分ノ一,二直角ノ四分ノ三,直角ノ五分ノ一及ビ直角ノ六分ノ一ハ夫々何度ナリヤ.

2. 直角ノ四分ノ一,直角ノ十二分ノ一及ビ二直角ノ十六分ノ一ハ夫々何度何分ナリヤ.

3. 0·625直角ヲ六十分法ニテ示セ.

4. 直角ノ $\frac{45}{64}$ ヲ度ノ小數ニテ示セ.

5. $6^\circ\ 4'\ 30''$ ヲ直角ノ小數ニテ示セ.

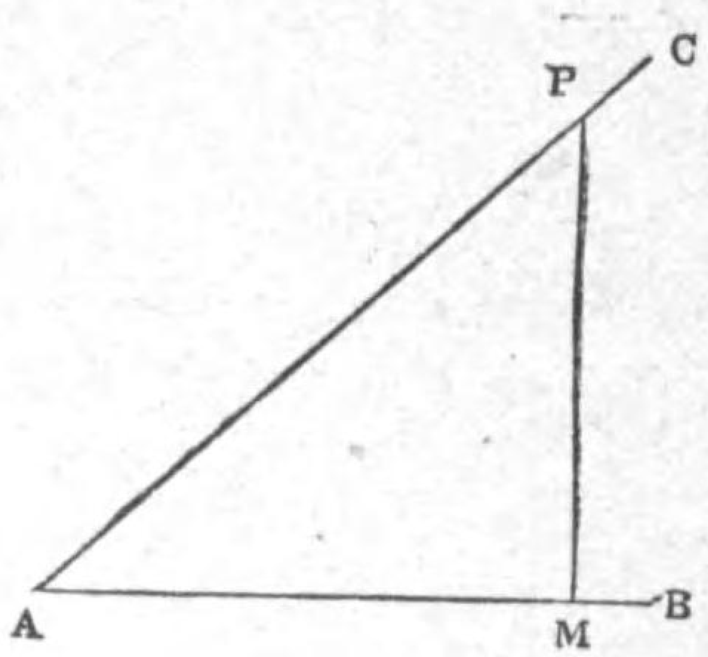
6. $35^\circ\ 39'\ 15''$ ヲ直角ノ小數ニテ示セ.

7. 正五角形正六角形及ビ正八角形ノ内角ノ一ツヲ各度及ビ直角ニテ示セ.

第二編
三角比

---

4. 銳角の三角比



BAC を任意の銳角とし,其一邊 AC 上に任意の點 P を取り, P より他の一邊 AB に垂線 PM を引け.

然るときは角 BAC に關して AP を**斜線**と稱し, PM を**垂線**と稱し, AM を**底邊**と稱す.

此三直線を二ツ宛取りて比を作るときは,次に記する所の六ツの比を得.

1. $\frac{PM}{AP}=\frac{\text{垂線}}{\text{斜線}}$ を角 BAC の**正弦**と稱す.

2. $\frac{AM}{AP}=\frac{\text{底邊}}{\text{斜線}}$ を角 BAC の**餘弦**と稱す.

3. $\frac{PM}{AM}=\frac{\text{垂線}}{\text{底邊}}$ を角 BAC の**正切**と稱す.

4. $\frac{AM}{PM}=\frac{\text{底邊}}{\text{垂線}}$ を角 BAC の**餘切**と稱す.

5. $\frac{AP}{AM}=\frac{\text{斜邊}}{\text{底邊}}$ を角 BAC の**正割**と稱す.

6. $\frac{AP}{PM}=\frac{\text{斜邊}}{\text{垂線}}$ を角 BAC の**餘割**と稱す.

今角 BAC を A とすれば

角 BAC の正弦を sin A と記す.
角 BAC の餘弦を cos A と記す.
角 BAC の正切を tan A と記す.
角 BAC の餘切を cot A と記す.
角 BAC の正割を sec A と記す.
角 BAC の餘割を cosec A と記す.

以上記する所の六ツの比を角 A の**三角比**と稱す.

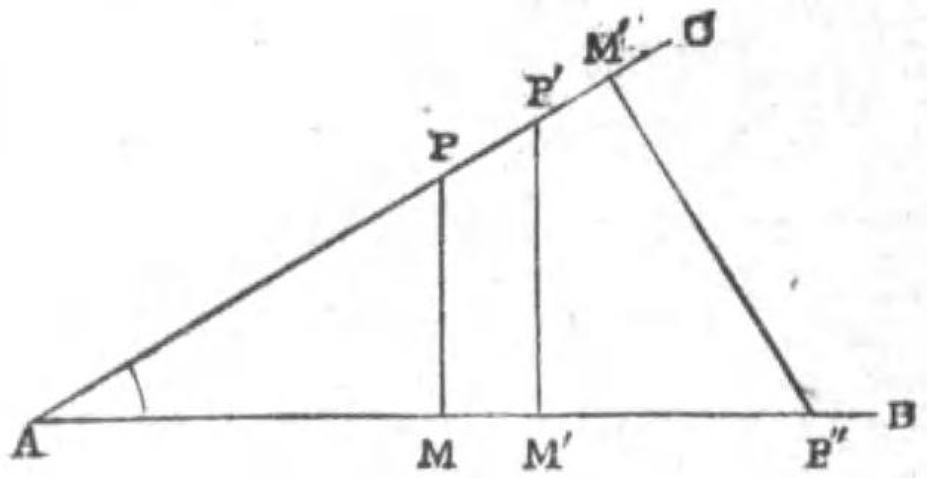
問題 三邊ガ夫々三寸,四寸及ビ五寸ナル直角三角形ニ於テ其最小角ノ六ツノ三角比ヲ求ム.

[注意] sin A, cos A 等ハ角 A ニ屬スル一ツノ比ノ記號ナルヲ以テ, sin, cos 等ト A トハ分離スベカラザルモノトス. 例ヘバ代數學ニ於テハ, $ab+ac$ ヲ $a(b+c)$ ト書クコトヲ得ベシト雖モ,コヽニ sin A + sin B

ヲ sin(A+B) ト書クコトヲ得ザルモノトス．此兩式ハ全ク相異ナルモノナリ．

5. 三角比は角の不變なる限りは又不變なるものなり．

BACヲ任意ノ鋭角トシP,P′ヲ其一邊AC上ノ任意ノ二點トシ,又P″ヲ他ノ一邊AB上ノ任意ノ一點トセヨ．



ABニ垂線PM, P′M′ヲ引キ, ACニ垂線P″M″ヲ引ケ．

然ル時ハ三ツノ直角三角形APM, AP′M′, AP″M″ハ互ニ相似ナルヲ以テ

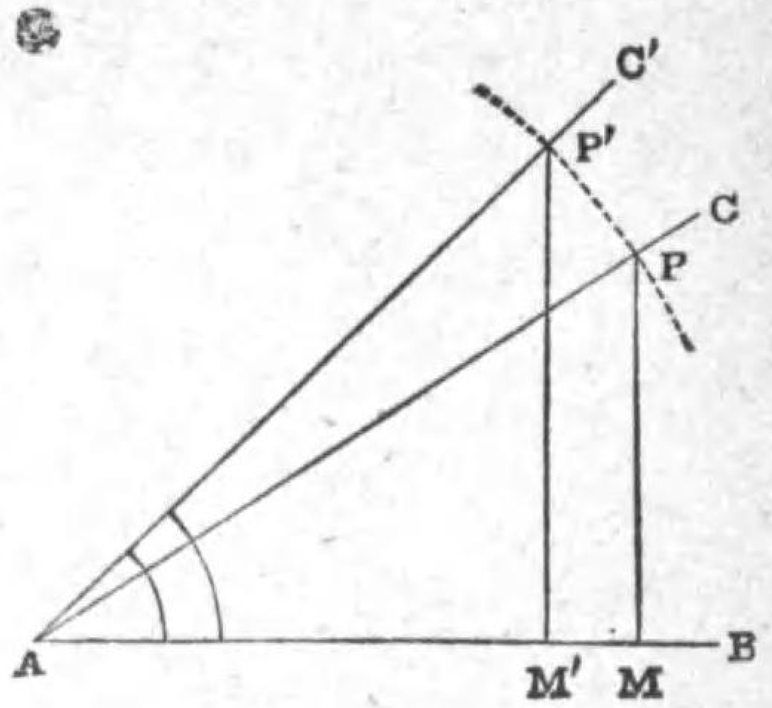
$$\frac{PM}{AP}=\frac{P'M'}{AP'}=\frac{P''M''}{AP''}$$

然ルニ,上記ノ三ツノ比ハ,何レモ sin BAC ナリ．即チ sin BAC ハ點Pヲ角 BAC ノ邊ノ上ノ何レノ處ニ取ルモ同一ナリ．同様ニ他ノ三角比モ亦角ノ不變ナル限リハ,常ニ同一ナルコトヲ證明スルヲ得．

6. 前節に於て角不變なるときは,其三角比も亦不變なることを證せり．然

れども若し角が何程少しにても變ずるときは,其三角比も亦從って變ずべし．

如何トナレバ BAC 及ビ BAC′ ヲ二ツノ殆ド相等シキ鋭角トシ,AP=AP′トシ PM 及ビ P′M′ ヲ夫々 P 及ビ P′ ヨリ AB ニ引キタル垂線トセヨ．



然ルトキハ

$$\sin BAC=\frac{PM}{AP}\qquad \sin BAC'=\frac{P'M'}{AP'}$$

而シテ　$P'M' > PM,\quad AP=AP'$　ナルヲ以テ

$$\sin BAC' > \sin BAC$$

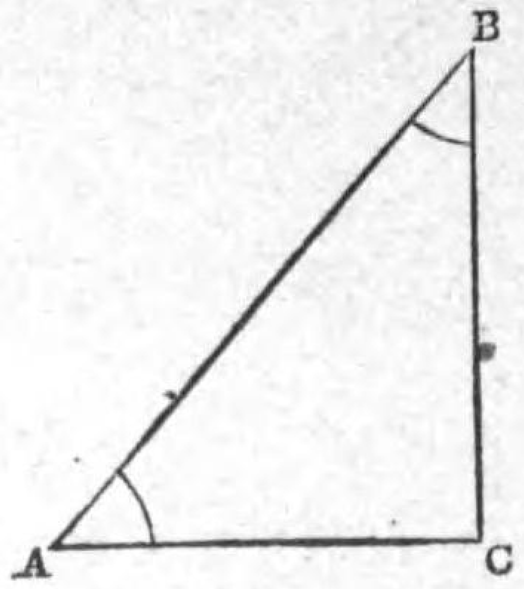
即チ角ガ大キクナル(0°ヨリ90°マデノ範圍ニ於テ)ニ從ッテ,其正弦モ亦大キクナルコトヲ知ル．

問題　角ガ漸々大キクナル(0°ヨリ90°マデノ範圍ニ於テ)ニ從ッテ其正切及ビ正割ハ亦從ッテ大キクナリ,其餘弦,餘切及ビ餘割ハ却ッテ小サクナルコトヲ證セヨ．

7. 互に餘角なる二角の三角比の關係

ABCヲCニ於テ直角ヲ有スル直角三角形トシ

其二角 BAC, ABC ヲ夫々 A,B ニテ表ハセ. 然レバ二角 A,B ハ互ニ餘角ナリ.



$$\sin A=\frac{BC}{AB}=\cos B$$
$$=\cos(90^\circ-A)$$
$$\cos A=\frac{AC}{AB}=\sin B$$
$$=\sin(90^\circ-A)$$
$$\tan A=\frac{BC}{AC}=\cot B=\cot(90^\circ-A)$$

同様ニ
$$\cot A=\tan(90^\circ-A)$$
$$\sec A=\operatorname{cosec}(90^\circ-A)$$
$$\operatorname{cosec} A=\sec(90^\circ-A)$$

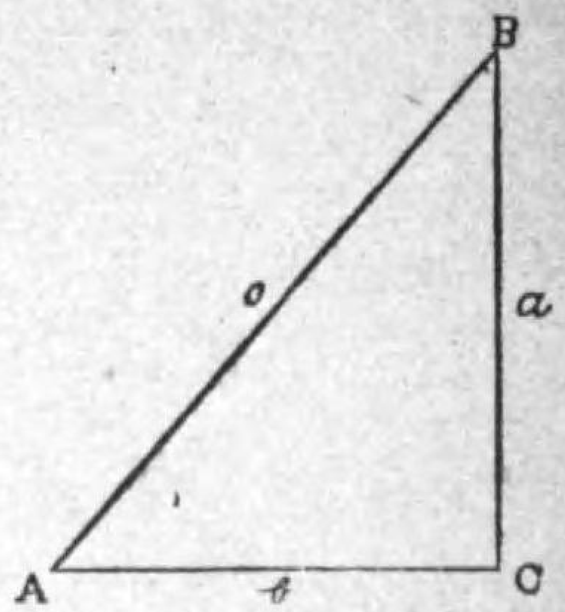
即チ

任意ノ角ノ正弦ハ其餘角ノ餘弦ニ等シ.
任意ノ角ノ餘弦ハ其餘角ノ正弦ニ等シ.
任意ノ角ノ正切ハ其餘角ノ餘切ニ等シ.
任意ノ角ノ餘切ハ其餘角ノ正切ニ等シ.
任意ノ角ノ正割ハ其餘角ノ餘割ニ等シ.
任意ノ角ノ餘割ハ其餘角ノ正割ニ等シ.

8. 三角比相互の關係

C ニ於テ直角ヲ有スル直角三角形 ABC ニ於テA,B 及ビ C ヲ以テ夫々頂點A,B及ビC ニ於テノ

角ヲ表ハシ a, b 及ビ c ヲ以テ夫々A,B 及ビ C ニ對スル邊ノ長サヲ表ハセ.



然ルトキハ

$$\sin A=\frac{a}{c}\qquad \operatorname{cosec} A=\frac{c}{a}$$

故ニ　$\sin A \operatorname{cosec} A=1$ ....(1)

同様ニ　$\cos A \sec A=1$ ....(2)

$\tan A \cot A=1$ ....(3)

又　$\tan A=\frac{a}{b}=\frac{a}{c}\div\frac{b}{c}$

故ニ　$\tan A=\frac{\sin A}{\cos A}$

同様ニ　$\cot A=\frac{\cos A}{\sin A}$ ....(4)

9. 前節の圖に於て

$$a^2+b^2=c^2$$

其兩邊ヲ c^2 ニテ割レバ

$$\frac{a^2}{c^2}+\frac{b^2}{c^2}=1\quad 即チ\quad \sin^2A+\cos^2A=1$$

又之ヲ b^2 ニテ割レバ

$$\frac{a^2}{b^2}+1=\frac{c^2}{b^2}\quad 即チ\quad \tan^2A+1=\sec^2A$$

又之ヲ a^2 ニテ割レバ

$$1+\frac{b^2}{a^2}=\frac{c^2}{a^2}\quad 即チ\quad 1+\cot^2A=\operatorname{cosec}^2A$$

便宜ノ爲メ上ノ三ツノ關係ヲ次ニ列記ス

$$\left.\begin{aligned}\sin^2A+\cos^2A &= 1\\ \sec^2A &= 1+\tan^2A\\ \mathrm{cosec}^2A &= 1+\cot^2A\end{aligned}\right\}\cdots\cdots\cdots\cdots(5)$$

[注意] 上記ノ如ク $\frac{a^2}{c^2}=\left(\frac{a}{c}\right)^2=(\sin A)^2$ ヲ $\sin^2A$ ト記ス. 同様ニ $(\sin A)^3$ ヲ $\sin^3A$ ト記ス. 他皆之ニ倣フ.

10. 前二節に於て得たる公式に依りて,一つの三角比を以て他の三角比の各,を表はすことを得.

例題1. 正弦ニテ他ノ五ツノ三角比ヲ表ハセ.

$\cos A=\sqrt{(1-\sin^2A)}$ $[\because\ \sin^2A+\cos^2A=1]$

$\tan A=\frac{\sin A}{\cos A}=\frac{\sin A}{\sqrt{(1-\sin^2A)}}$

$\cot A=\frac{1}{\tan A}=\frac{\sqrt{(1-\sin^2A)}}{\sin A}$ $[\because\ \tan A\cot A=1]$

$\sec A=\frac{1}{\cos A}=\frac{1}{\sqrt{(1-\sin^2A)}}$ $[\because\ \cos A\sec A=1]$

$\mathrm{cosec}\,A=\frac{1}{\sin A}$ $[\because\ \sin A\,\mathrm{cosec}\,A=1]$

例題2. 正切ニテ他ノ五ツノ三角比ノ各,ヲ表ハセ.

$\cot A=\frac{1}{\tan A}$

$\sec A=\sqrt{(1+\tan^2A)}$ $[\because\ \sec^2A=1+\tan^2A]$

$\cos A=\frac{1}{\sec A}=\frac{1}{\sqrt{(1+\tan^2A)}}$

$\sin A=\frac{1}{\mathrm{cosec}\,A}=\frac{1}{\sqrt{(1+\cot^2A)}}$ $[\because\ \mathrm{cosec}^2A=1+\cot^2A]$

11

$=\frac{1}{\sqrt{\left(1+\frac{1}{\tan^2A}\right)}}=\frac{\tan A}{\sqrt{(1+\tan^2A)}}$

$\mathrm{cosec}\,A=\frac{1}{\sin A}=\frac{\sqrt{(1+\tan^2A)}}{\tan A}$

[注意] $\cos^2A=1-\sin^2A$ ナルヲ以テ

$\cos A=\pm\sqrt{(1-\sin^2A)}$ 又 $\sec A=\pm\sqrt{(1+\tan^2A)}$,

$\mathrm{cosec}\,A=\pm\sqrt{(1+\cot^2A)}$ ナリ. 然レドモ [26] ノ規約ニ依リテ鋭角ノ三角比ハ常ニ正ナリ,而シテ今ハ鋭角ノミニ付キテ論ズルコトト定メタルヲ以テ,負數ノ方ハ取ラザルモノトス.

11. 前節に示したるが如き關係に依りて一つの三角比の値を知りて,他の三角比の値を求むることを得.

例題 $\sin A=\frac{3}{5}$ ナルトキハ他ノ五ツノ三角比ノ値各,如何.

$\cos A=\sqrt{1-\frac{9}{25}}=\sqrt{\frac{16}{25}}=\frac{4}{5}$

$\tan A=\frac{3}{5}\div\frac{4}{5}=\frac{3}{4}$ $\cot A=1\div\frac{3}{4}=\frac{4}{3}$

$\sec A=1\div\frac{4}{5}=\frac{5}{4}$ $\mathrm{cosec}\,A=1\div\frac{3}{5}=\frac{5}{3}$

12. 恒等式の證明

例題1. 次ノ恒等式ヲ證明セヨ.

$$4\cos^2A-3=1-4\sin^2A$$

$$4\cos^2 A-3 = 4(1-\sin^2 A)-3$$
$$= 4-4\sin^2 A-3$$
$$= 1-4\sin^2 A$$

例題2.　次ノ恒等式ヲ證明セヨ.

$$(1-\tan A)^2+(1-\cot A)^2 = (\sec A-\operatorname{cosec} A)^2$$

$$(1-\tan A)^2+(1-\cot A)^2 = 1-2\tan A+\tan^2 A+1-2\cot A+\cot^2 A$$
$$= \sec^2 A+\operatorname{cosec}^2 A-2(\tan A+\cot A)$$
$$= \sec^2 A+\operatorname{cosec}^2 A-2\left(\frac{\sin A}{\cos A}+\frac{\cos A}{\sin A}\right)$$
$$= \sec^2 A+\operatorname{cosec}^2 A-2\left(\frac{\sin^2 A+\cos^2 A}{\sin A\ \cos A}\right)$$
$$= \sec^2 A+\operatorname{cosec}^2 A-\frac{2}{\cos A\ \sin A}$$
$$= \sec^2 A+\operatorname{cosec}^2 A-2\sec A\ \operatorname{cosec} A$$
$$= (\sec A-\operatorname{cosec} A)^2$$

第二問題集

1. $\cos A$ ヲ以テ A ノ總テノ他ノ三角比ヲ表ハセ

2. $\cot A$ ヲ以テ A ノ總テノ他ノ三角比ヲ表ハセ

3. $\sec A$ ヲ以テ A ノ總テノ他ノ三角比ヲ表ハセ

4. $\operatorname{cosec} A$ ヲ以テ A ノ總テノ他ノ三角比ヲ表ハセ.

次ノ八題ニ於テ與フル所ノ三角比ノ値ニ依リ

テ他ノ三角比ノ値ヲ見出セ.

5. $\cos A=\frac{1}{\sqrt{2}}$　　**6.** $\sin A=\frac{40}{41}$

7. $\tan A=\frac{1}{2\sqrt{6}}$　　**8.** $\sin A=\frac{2m}{m^2+1}$

9. $\cos A=\frac{2mn}{m^2+n^2}$　　**10.** $\sec A=\frac{61}{11}$

11. $\cos A=0{\cdot}28$　　**12.** $\cot A=2+\sqrt{3}$

次ノ恒等式ヲ證明セヨ.

13. $(\sin A+\cos A)^2+(\sin A-\cos A)^2=2$

14. $\sin^2 A-\cos^2 B=\sin^2 B-\cos^2 A$

15. $\frac{1}{\cos^2 A}=1+\frac{1}{\cot^2 A}$

16. $\sin^4 A-\cos^4 A=\sin^2 A-\cos^2 A$

17. $(\sin A+\cos A)^2=1+2\sin A\ \cos A$

18. $\sec^2 A+\operatorname{cosec}^2 A=\sec^2 A\ \operatorname{cosec}^2 A$

19. $\sin^3 A\ \cos A+\cos^3 A\ \sin A=\sin A\ \cos A$

20. $\sin^3 A+\cos^3 A=(\sin A+\cos A)(1-\sin A\ \cos A)$

21. $\sec^2 A\ \operatorname{cosec}^2 A=\tan^2 A+\cot^2 A+2$

22. $\sin^4 A+\cos^4 A=1-2\sin^2 A\cos^2 A$

23. $\frac{(\operatorname{cosec} A+\sec A)^2}{\sec^2 A+\operatorname{cosec}^2 A}=1+2\sin A\ \cos A$

24. $(\tan A+\sec A)^2=\frac{1+\sin A}{1-\sin A}$

25. $\frac{\tan A+\tan B}{\cot A+\cot B}=\tan A\ \tan B$

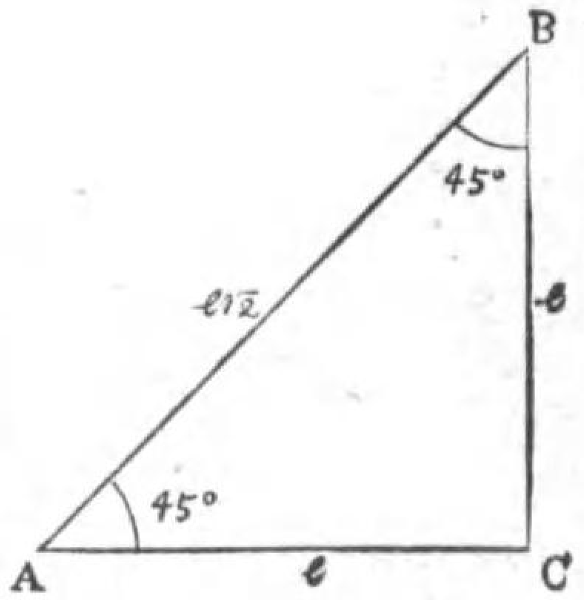
26. $(1+\sin A-\cos A)^2+(1+\cos A-\sin A)^2=4(1-\sin A\cos A)$

第　三　編

特別なる角の三角比,
三角比の表及び三角法の應用.

---

13. 45° の角の三角比



ABC を C に於て直角を有する二等邊直角三角形とせよ. 然る時は

$\angle BAC = \angle ABC = 45^\circ$

$AC = CB = l$ トスレバ

$AB = \sqrt{l^2 + l^2} = l\sqrt{2}$

因リテ　$\sin 45^\circ = \cos 45^\circ = \dfrac{l}{l\sqrt{2}} = \dfrac{1}{\sqrt{2}}$

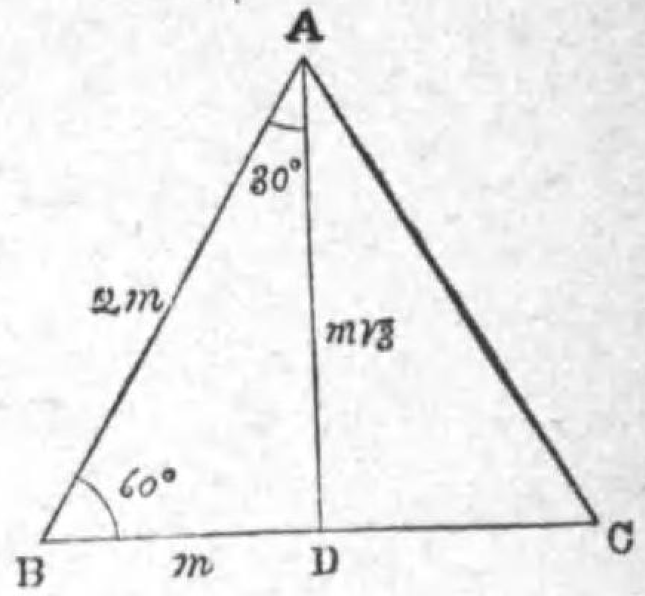
$\tan 45^\circ = \cot 45^\circ = \dfrac{l}{l} = 1$

$\sec 45^\circ = \operatorname{cosec} 45^\circ = \dfrac{l\sqrt{2}}{l} = \sqrt{2}$

14. 60° 及び 30° の角の三角比

ABC を正三角形とし, AD を其一つの垂

線とせよ.



然ルトキハ AD ハ $\angle BAC$ 及ビ邊 BC ヲ二等分ス.

$BD = m$ トスレバ

$AB = 2m$

$AD = \sqrt{4m^2 - m^2} = m\sqrt{3}$

因リテ　$\sin 60^\circ = \cos 30^\circ = \dfrac{m\sqrt{3}}{2m} = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$

$\cos 60^\circ = \sin 30^\circ = \dfrac{m}{2m} = \dfrac{1}{2}$

$\tan 60^\circ = \cot 30^\circ = \dfrac{m\sqrt{3}}{m} = \sqrt{3}$

$\cot 60^\circ = \tan 30^\circ = \dfrac{m}{m\sqrt{3}} = \dfrac{1}{\sqrt{3}}$

$\sec 60^\circ = \operatorname{cosec} 30^\circ = \dfrac{2m}{m} = 2$

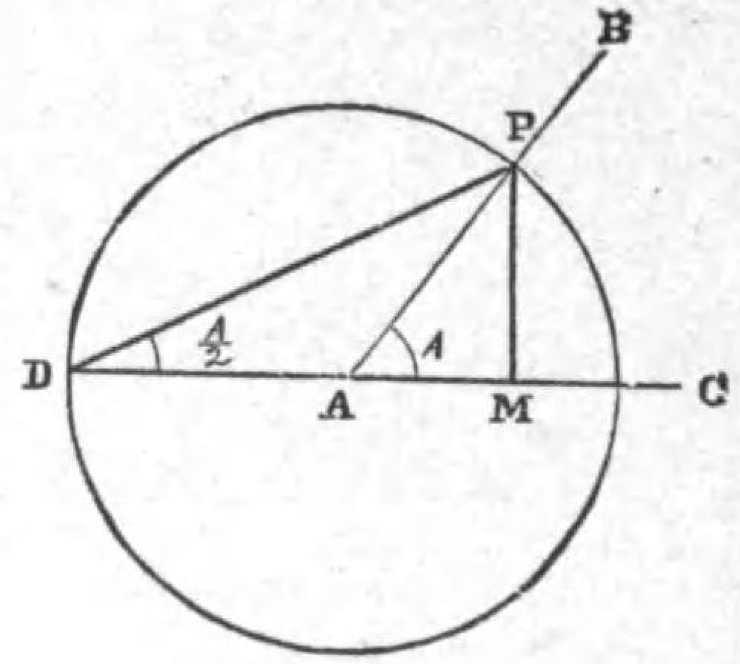
$\operatorname{cosec} 60^\circ = \sec 30^\circ = \dfrac{2m}{m\sqrt{3}} = \dfrac{2}{\sqrt{3}}$

コヽニ引用ニ便利ノ爲メ上ニ得タル三角比ヲ示ス所ノ表ヲ掲グ.

A ＼ Aノ三角比	30°	45°	60°
$\sin A$	$\dfrac{1}{2}$	$\dfrac{1}{\sqrt{2}}$	$\dfrac{\sqrt{3}}{2}$
$\cos A$	$\dfrac{\sqrt{3}}{2}$	$\dfrac{1}{\sqrt{2}}$	$\dfrac{1}{2}$
$\tan A$	$\dfrac{1}{\sqrt{3}}$	1	$\sqrt{3}$

15. 一つの角の正弦と餘弦とを以て其半分に等しき角の正切を表はすこと.

BAC ヲ任意ノ角トシ,其頂點 A ヲ中心トシ,任意ノ長サ AP ヲ半徑トシテ圓ヲ畫キ, CA ヲ延長シ,點 D ニ於テ圓周ニ出會ハシメ,垂線 PM ヲ引キ PD ヲ結ビ付ケヨ.



$\angle$BAC ヲ A トシ半徑 AP ヲ a トセヨ.

然ルトキハ $\angle PDM = \frac{A}{2}$

故ニ $$\tan\frac{A}{2} = \frac{PM}{DM} = \frac{PM}{DA+AM} = \frac{PM}{AP+AM}$$

$\frac{PM}{AP} = \sin A$ $\quad \frac{AM}{AP} = \cos A$ ナルヲ以テ

$PM = a\sin A$ $\quad AM = a\cos A$

故ニ $$\tan\frac{A}{2} = \frac{a\sin A}{a + a\cos A}$$

即チ $$\tan\frac{A}{2} = \frac{\sin A}{1+\cos A} \quad \cdots\cdots\cdots\cdots (6)$$

此公式ニ依リテ $\sin A$ ト $\cos A$ トヲ知ルトキハ,$\tan\frac{A}{2}$ ヲ求ムルコトヲ得. 由リテ又 $\frac{A}{2}$ ノ他ノ三角比ヲ求ムルコトヲ得.

16. 15°の角の三角比を求む.

前節ノ公式ニ依リテ

$$\tan 15^\circ = \frac{\sin 30^\circ}{1+\cos 30^\circ} = \frac{\frac{1}{2}}{1+\frac{\sqrt{3}}{2}} = \frac{1}{2+\sqrt{3}}$$

$$= \frac{2-\sqrt{3}}{(2+\sqrt{3})(2-\sqrt{3})} = 2-\sqrt{3}$$

$$\cot 15^\circ = \frac{1}{\tan 15^\circ} = 2+\sqrt{3}$$

$$\sec 15^\circ = \sqrt{(1+\tan^2 15^\circ)} = \sqrt{1+(2-\sqrt{3})^2}$$

$$= \sqrt{8-4\sqrt{3}} = \sqrt{2(3-2\sqrt{3}+1)} = \sqrt{2}(\sqrt{3}-1)$$

$$\cos 15^\circ = \frac{1}{\sqrt{2}(\sqrt{3}-1)} = \frac{\sqrt{3}+1}{\sqrt{2}(\sqrt{3}-1)(\sqrt{3}+1)} = \frac{\sqrt{3}+1}{2\sqrt{2}}$$

$$\operatorname{cosec} 15^\circ = \sqrt{1+\cot^2 45^\circ} = \sqrt{2}(\sqrt{3}+1)$$

$$\sin 15^\circ = \frac{1}{\operatorname{cosec} 15^\circ} = \frac{\sqrt{3}-1}{2\sqrt{2}}$$

17. 三角方程式

例題1. 方程式 $2\sin^2 A = 3\cos A$ ヨリ A ヲ求ム

$$2\sin^2 A = 3\cos A$$

$$2(1-\cos^2 A) = 3\cos A$$

$$2\cos^2 A + 3\cos A - 2 = 0$$

$$\cos A = \frac{-3\pm\sqrt{9+16}}{4} = \frac{-3\pm 5}{4}$$

[10] ノ所述ニ依リテ正ノ値ノミヲ取レバ

$\cos A = \frac{1}{2}$ $\quad$ 然ルニ $\quad \cos 60^\circ = \frac{1}{2}$

故ニ $\quad A = 60^\circ$

例題2. 二ツノ方程式

$\tan(A+B)=\sqrt{3}$ ....(1)

及ビ $\tan(A-B)=1$ .... (2) ヨリ A 及ビ B ヲ求ム

$\tan 60^\circ=\sqrt{3}$ ナルヲ以テ (1) ヨリ $A+B=60^\circ$

$\tan 45^\circ=1$ ナルヲ以テ (2) ヨリ $A-B=45^\circ$

由リテ $2A=105^\circ$ $2B=15^\circ$

故ニ $A=52^\circ\frac{1}{2}$ $B=7^\circ\frac{1}{2}$

第三問題集

次ノ三式ヲ證明セヨ.

1. $\tan 30^\circ \tan 60^\circ=\tan 45^\circ$

2. $\cos 30^\circ \cos 60^\circ+\sin 30^\circ \sin 60^\circ=\frac{\sqrt{3}}{2}$

3. $\frac{1-\tan^2 30^\circ}{1+\tan^2 30^\circ}=\cos 60^\circ$

4. 75° ノ角ノ正弦,餘弦及ビ正切ヲ求ム.

5. $\tan 22^\circ\frac{1}{2}=\sqrt{2}-1$, $\sin 22^\circ\frac{1}{2}=\frac{\sqrt{(2-\sqrt{2})}}{3}$, 及ビ

$\cos 22^\circ\frac{1}{2}=\frac{\sqrt{(2+\sqrt{2})}}{2}$ ヲ證明セヨ.

6. $67^\circ\ 30'$ ノ角ノ正弦及ビ餘弦ヲ求ム.

次ノ方程式ヨリ A 及ビ B ヲ求ム.

7. $\sec A \tan A=2\sqrt{3}$

8. $3\operatorname{cosec}^2 A+8\sin^2 A=10$

9. $\tan^2 A-4\tan A+1=0$

10. $3\sec^4 A+8=10\sec^2 A$

11. $\cos(A-B)=\frac{\sqrt{3}}{2}$, $\sin(A-B)=\cos(A+B)$

12. $\tan(4A+7B)=2+\sqrt{3}$, $\tan(5A-7B)=2-\sqrt{3}$

13. $\frac{\sin A}{\sin B}=\sqrt{2}$, $\frac{\cos A}{\cos B}=\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}$

18. [13], [14], [16] 及び第三問題集中に於て見出したる 75°, $2^\circ\frac{1}{2}$ 等の諸角の三角比に付きて見たるが如く,角の三角比は大概は不盡數なり. 此等の三角比は先輩の已に精密に計算して表に作りたるものあり. 余輩は今十分置きの角の三角比を小數五桁迄計算したる三角比の表の一部を下に掲げ,以て與へられたる角の三角比を求むる方法幷に與へられたる三角比を有する角を求むる方法を示さんとす.

其算法は下に記する所の**比例部分の定理**と稱するものに據る.

角の小變化は各三角比の之に對應する變化に比例す.

此定理は嚴正に眞なるものにあらざれども,多くの實地計算に十分なる正しさを以て,之を適用することを得.

又三角比の表を用ゐるに當りて,特に注意を要すべき事項あり. 即ち正弦,正切及び正割は角の大きくなるに從うて(0° より 90° まで)倶に大きくなり,餘弦餘切及び餘割は角の大きくなるに從うて(0° より 90° まで)却て小さくなること是れなり.

十分置きの角の五桁の三角比

20°–24°

角	正弦	正切	餘切	餘弦	
20° 0′	0·34202	0·36397	2·74748	0·93969	0′ 70°
10′	0·34475	0·36727	2·72281	0·93869	50′
20′	0·34748	0·37057	2·69853	0·93769	40′
30′	0·35021	0·37388	2·67462	0·93667	30′
40′	0·35293	0·37720	2·65109	0·93565	20′
50′	0·35565	0·38053	2·62791	0·93462	10′
21° 0′	0·35837	0·38386	2·60509	0·93358	0′ 69°
10′	0·36108	0·38721	2·58261	0·93253	50′

20′	0·36379	0·39055	2·56046	0·93148	40′
30′	0·36650	0·39391	2·53865	0·93042	30′
40′	0·36921	0·39727	2·51715	0·92935	20′
50′	0·37191	0·40065	2·49597	0·92827	10′
22° 0′	0·37461	0·40403	2·47509	0·92718	0′ 68°
10′	0·37730	0·40741	2·45451	0·92609	50′
20′	0·37999	0·41081	2·43422	0·92499	40′
30′	0·38268	0·41421	2·41421	0·92388	30′
40′	0·38537	0·41763	2·39449	0·92276	20′
50′	0·38805	0·42105	2·37504	0·92164	10′
23° 0′	0·39073	0·42447	2·35585	0·92050	0′ 67°
10′	0·39341	0·42791	2·33693	0·91936	50′
20′	0·39608	0·43136	2·31826	0·91822	40′
30′	0·39875	0·43481	2·29984	0·91706	30′
40′	0·40142	0·43828	2·28167	0·91590	20′
50′	0·40408	0·44175	2·26374	0·91472	10′
24° 0′	0·40674	0·44523	2·24604	0·91355	0′ 66°
	餘弦	餘切	正切	正弦	角

66°–70°

19. **例題1.** $\sin 20^\circ 14'$ ノ値ヲ求ム.

表ヨリ $\sin 20^\circ 20' = \cdot 34748$

$\sin 20^\circ 10' = \cdot 34475$

上記二角ノ差ハ $10'$ ニシテ其正弦ノ差ハ $\cdot 00273$ ナリ.

今 x ヲ $\sin 20^\circ 14'$ ノ値ヲ得ル爲メニ $\sin 20^\circ 10'$ ノ値ニ

加フベキ數トスレバ,比例部分ノ定理ニ依リテ

$$10' : 4' = \cdot 00273 : x$$

$$x = \cdot 001092$$

$$\therefore \quad \sin 20^\circ 14' = \cdot 34475 + \cdot 00109$$

$$= \cdot 34584$$

例題2. $\cos 67^\circ 32'$ ノ値ヲ求ム.

表ヨリ $\cos 67^\circ 30' = \cdot 38268$

$\cos 67^\circ 40' = \cdot 37999$

上記二角ノ差ハ $10'$ ニテ其餘弦ノ差ハ $\cdot 00269$ ナリ. 今 x ヲ $\cos 67^\circ 32'$ ノ値ヲ得ル爲ニ, $\cos 67^\circ 30'$ ノ値ヨリ減ズベキ數トスレバ

$$10' : 2' = \cdot 00269 : x$$

$$x = \cdot 000538$$

$$\therefore \quad \cos 67^\circ 32' = \cdot 38268 - \cdot 00054$$

$$= \cdot 38214$$

例題3. $\tan A = \cdot 43650$ ナルトキ角Aヲ求ム

表ヨリ $\tan 23^\circ 40' = \cdot 43828$

$\tan 23^\circ 30' = \cdot 43481$

$\cdot 43828 - \cdot 43481 = \cdot 00347$

$\cdot 43650 - \cdot 43481 = \cdot 00169$

$\therefore \quad 347 : 169 = 10 : x \qquad x = 4'\cdot 9$

$\therefore \quad A = 23^\circ 34'\cdot 9$

第四問題集

1. $\cos 21^\circ 27'$ ノ値ヲ求ム.

2. $\sin 67^\circ 25' 12''$ ノ値ヲ求ム.

3. $\cos x = \cdot 93$ ナルトキ x ヲ求ム.

4. $\tan 68^\circ 24'$ ノ値ヲ求ム.

5. $\cdot 6665325 = \sin 41^\circ 48'$

$\cdot 6667493 = \sin 41^\circ 49'$

ヲ知テ

$\sin x = \dfrac{2}{3}$ ヨリ x ヲ求ム.

6. $\cdot 3332584 = \cos 70^\circ 32'$

$\cdot 3335326 = \cos 70^\circ 31'$

ヲ知テ

$\cos x = \dfrac{1}{3}$ ヨリ x ヲ求ム.

20. 三角法の應用

三角法の應用は直接に測ること能はざる距離及び高さを計算するに在り. 先づ應用上に用ゐる術語及び器具に付きて略述せんとす.

靜止せる水面に平行なる直線及び平面を夫々**水平線**及び**水平面**といひ,之

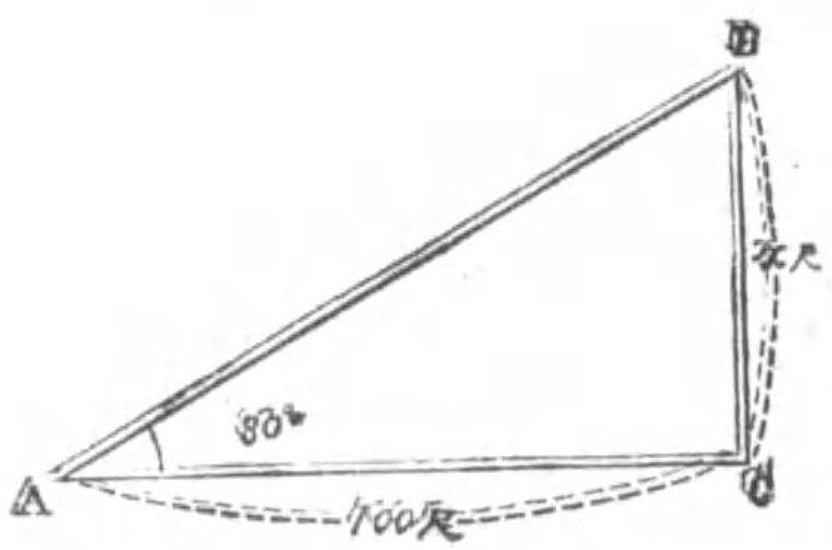
に垂直なる直線及び平面を夫々**直立線**及び**直立面**といふ.

觀測せんとする一點と,觀測者の眼とを過ぐる直線が水平面となす角は,其點が觀測者の眼を過ぐる水平面より上に在れば,之を**仰角**といひ,下に在れば之を**俯角**といふ.

距離を直接に測るには,通例測鎖又は卷尺を以てす.

仰角及び俯角を測るには,經緯儀(セオドライト)を以てし,觀測者の眼より出づる任意の二直線の爲す角を測るには,六分儀(セキスタント)を以てす.

21. 例題1. 高サBCナル塔ノ基礎Cヨリ100尺ヲ距リタル點Aニ於テ塔頂Bノ仰角ヲ測リ, 30° ヲ得タリ. 塔ノ高サ幾何



$\frac{BC}{AC} = \tan 30^\circ$ ナル

ヲ以テ BC ヲ x 尺トスレバ,

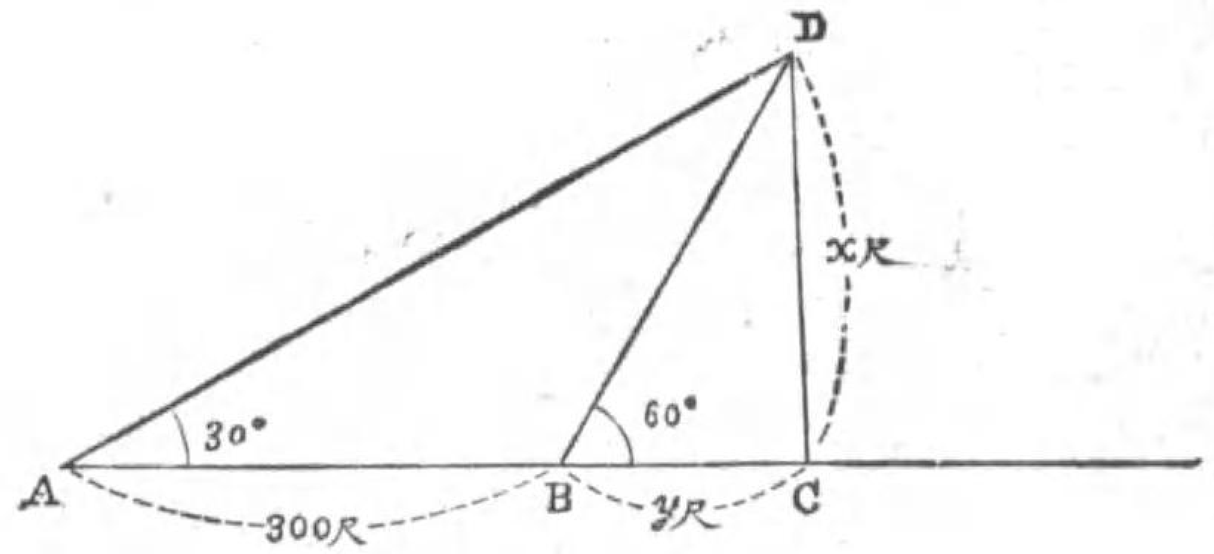
$$\frac{x}{100} = \frac{1}{\sqrt{3}}$$

$$x = \frac{100}{\sqrt{3}} = \frac{100 \times 1{\cdot}732}{3} = 57{\cdot}7\ldots$$

答 塔ノ高サ約58尺

[注意] A ハ地面上ノ一點ニアラズシテ實ハ,觀測器ノ中心ナリ. 故ニ上ノ如クニシテ求メタル結果ハ,觀測器ノ中心ヨリノ高サナリ. 由リテ地面ヨリノ高サヲ得ルニハ,上ノ結果ニ觀測器ノ中心ノ高サヲ加フルヲ要ス.

例題 2. 人アリ,塔頂ノ仰角ヲ測リテ, 30° ヲ得タリ. 夫ヨリ塔ニ向ウテ 300 尺進ミ,再ビ塔頂ノ仰角ヲ測リテ60°ヲ得タリ. 塔ノ高サヲ求ム.



DC ヲ塔トシ其高サヲ x 尺トシ, BC ヲ y 尺トセヨ. 然ルトキハ

$$\frac{300+y}{x} = \cot 30^\circ = \sqrt{3}$$

又 $\frac{y}{x} = \cot 60^\circ = \frac{1}{\sqrt{3}}$

前者ヨリ後者ヲ引キテ $\frac{300}{x} = \sqrt{3} - \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{2}{\sqrt{3}}$

$$\therefore \quad x = \frac{300 \times \sqrt{3}}{2} = 259{\cdot}8\ldots\ldots$$

答 塔ノ高サ約 260 尺

或ハ又次ノ如クニシテ此問題ヲ解クコトヲ得

$$\angle ADB = 60^\circ - 30^\circ = 30^\circ$$

$$DB = AB = 300\text{尺}$$

$$\frac{DC}{DB} = \sin 60^\circ \quad \text{即チ} \quad \frac{x}{300} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

以下前解ニ同ジ.

第五問題集

1. 烟突アリ其底ヨリ 150 尺ヲ距リタル地ニ於テ其頂ノ仰角ヲ測リテ 60° ヲ得タリ. 烟突ノ高サヲ求メヨ.

2. 幅 300 尺ナル河岸ニ一ツノ塔アリ. 對岸ノ一地ニ於テ之ニ對スル角ヲ測リテ $22^\circ\ 30'$ ヲ得タリ 塔ノ高サヲ求ム.

3. 水面ヨリ 50 呎高キ橋上ニ在ル人,一船ノ俯角ヲ測リテ 30° ヲ得タリ. 此船若シ毎一時 3 哩ノ速度ニテ進ミ來ルトスレバ何秒ニテ橋ニ達スベキカ.

4. 相去ルコト 1000 米ニシテ輕氣球ノ兩側ニ在ル兩觀測者アリ,球ノ仰角ヲ測リテ 15° 及ビ 75° ヲ得タリ. 球ノ高サヲ求ム. ($\tan 15^\circ = {\cdot}27$ $\tan 75^\circ = 3{\cdot}73$)

5. 高サ五尺六寸ノ人,相去ルコト 50 尺ナル兩電柱ノ間ノ中央ニ立チテ兩柱ノ仰角ヲ測リ,各, 30° ヲ得タリ. 各電柱ノ高サ幾何.

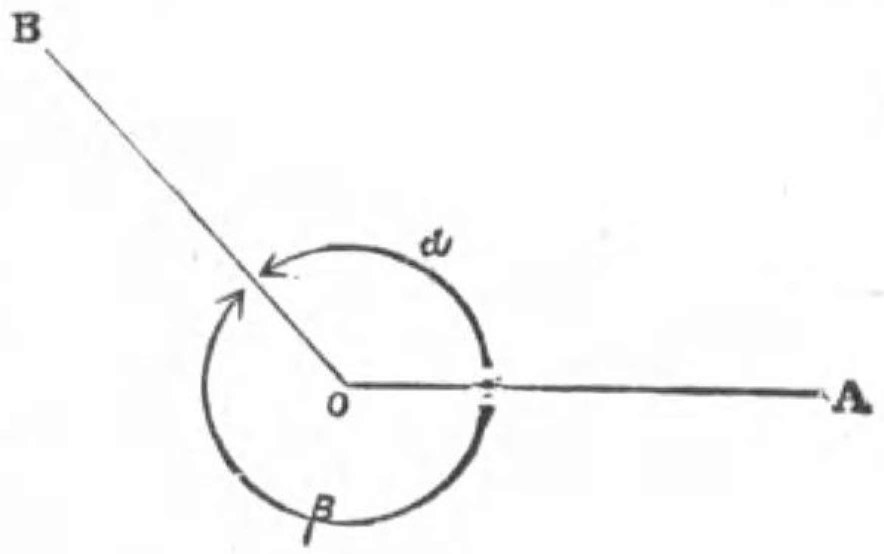
6. 河ノ兩岸ニ相對スル二點 P, Q アリ 今 Q ニ在ル人 P ニ於ケル樹木ニ對スル角ヲ測リテ 75° ヲ得タリ. 夫ヨリ QP ノ延長ニ沿ウテ 20 尺退キ,更ニ同樹木ニ對スル角ヲ測リテ 60° ヲ得タリ. 樹木ノ高サ及ビ河ノ幅ヲ問フ.

7. 高サ 108 尺ナル甲塔ノ頂ヨリ,之ト同地平面ニ直立スル他ノ塔ノ頂ト底トノ俯角ヲ測リ,夫々 30° 及ビ 60° ヲ得タリ. 乙塔ノ高サ幾尺ナルカ.

第四編
任意の角

22. 一點Oより二直線OA, OBを引くときはOA, OBは角をなすといひ,又は角を夾むといふ.

此の角は最初OAの位置に於て重なり合ふ所の二直線の一つが,同一平面上に於て點Oの周りにOBの位置まで回轉して生じたるものなりと考ふるを得. 此の如く考ふるときは,點Oを**原點**と稱し, OAを**首線**と稱し, OBを**廻轉線**と稱す.



23. 負角　最初首線に重なり合ふ所の廻轉線が,一平面上に於て原點の周りに廻轉するに二た通りの向きあり. 即ち時計の針が廻轉する向きに同じきものと之に反するものと是れなり.

時計の針が廻轉する向きに反して廻轉することに依りて生ずる角を正角とし,之と同じ向きに廻轉することに依りて生ずる角を負角とす.

例ヘバ上圖ニ於テ角αノ絶對ノ大サガ120°ナレバ,αヲ表ハスニ$+120^\circ$ヲ以テシ,βヲ表ハスニ-240°ヲ以テスルガ如シ.

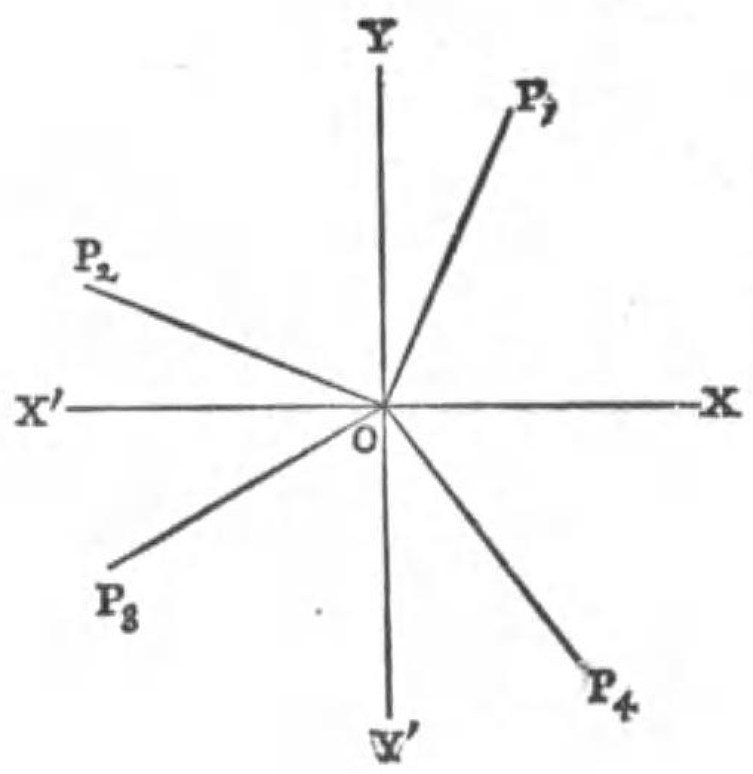
24. 角の大さには際限なし.

[22]に於て述べたる如く角は廻轉線の廻轉に依りて生ずるものなるが故に,其大さに際限なきこと明かなり. 故に或同一の位置に於て廻轉線を有する角は其數無限なり.

例ヘバ60°, 420°即チ$360^\circ+60^\circ$, 780°即チ$720^\circ+60^\circ$, -300°即チ$-360^\circ+60^\circ$, -660°即チ$(-360^\circ)\times2+60^\circ$等ノ諸角ハ皆同一ナル位置ニ於テ廻轉線ヲ有ス. 一般ニnガ正或ハ負ノ任意ノ整數ナレバ$n360^\circ+A$ニテ

表ハサルベキ諸角ハ皆角Aト同一ナル位置ニ於テ廻轉線ヲ有ス.

25. 象限



Oを原點としOより横に右方に引きたる直線OXを首線とせよ.廻轉線が正の向きに一直角だけ廻轉して,OYまで來りたりとし,OX′, OY′を夫々XO, YOの延長とせよ.

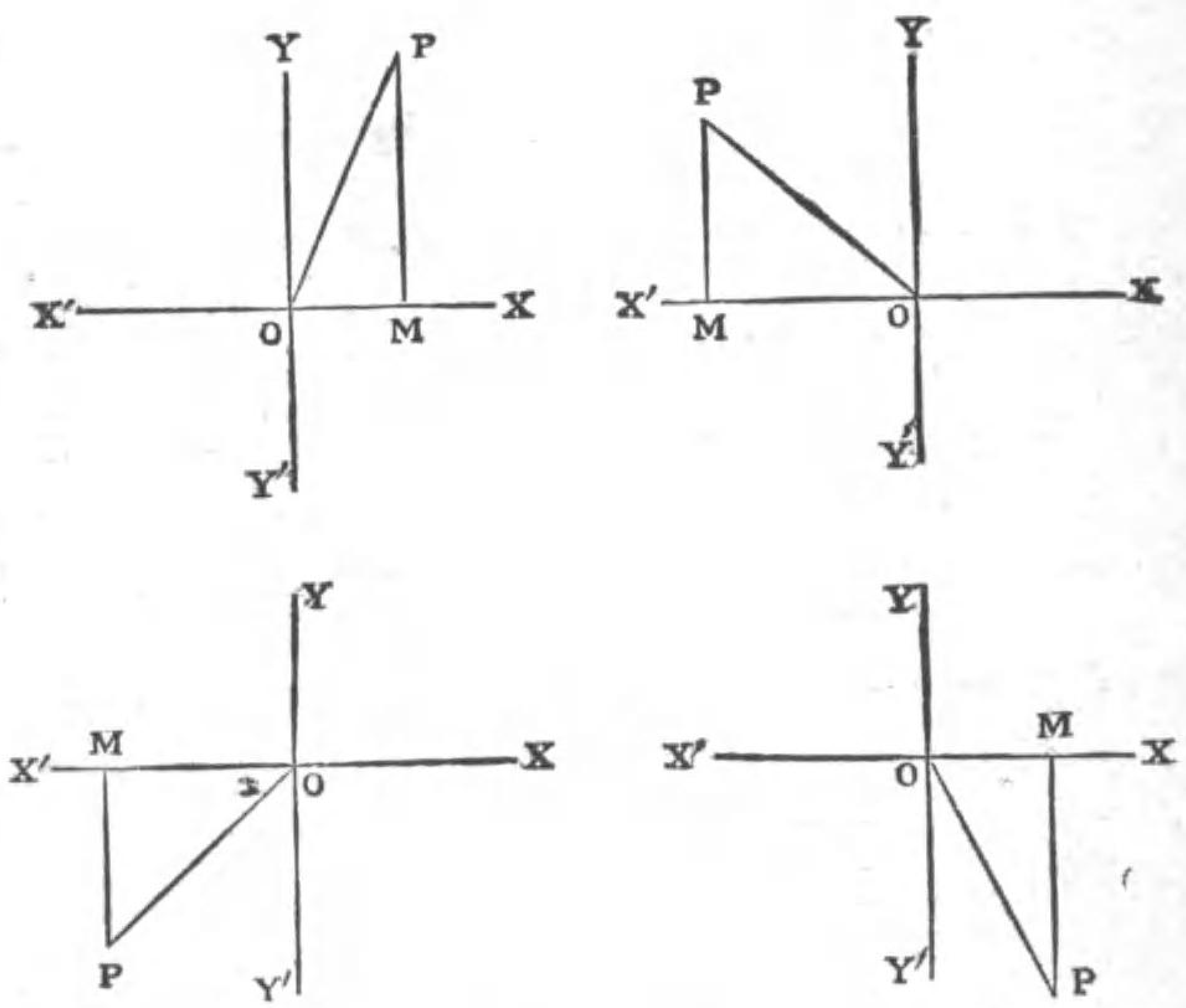
然るときは無限直線X′OX, YOY′は平面を四つの部分に分つ. 此等の部分を各**象限**と稱す. 而してXOY, YOX′, X′OY′及びY′OXを夫々第一,第二,第三及び第四象限と稱す.

$\angle XOP_1$の如く其一邊OP_1が第一象限に在れば,此角は第一象限に在りといふ.

$\angle XOP_2$の如く其一邊OP_2が第二象限に在れば,此角は第二象限に在りといふ. 同様に$\angle XOP_3$及び$\angle XOP_4$は夫々第三象限及び第四象限に在りといふ.

26. 任意の角の三角比

今任意の角の三角比の定義を與へんとするに當りて,次の規約を設けんとす.



XOX′, YOY′をOに於て直角に相交はる

所の直線とす. Oを原點とし,Oより横に右方に引きたる直線 OX を首線とす.

廻轉線は OX の位置より正或は負の向きに任意の位置 OP まで廻轉し,角Aを畫きたりとせよ. 任意の長さ OP を取り,P より OX 或は XO の延長に垂線 PM を引き,直角三角形 POM を作れ.

然るときは,斜邊 OP は常に正なるものとす.

OM は M が O の右に在るか,或は左に在るかに從うて,正或は負なりとす.

PM は P が M の上に在るか,或は下に在るかに從うて,正或は負なりとす.

上記の如く規約を定め,而して任意の角Aの三角比の定義を與ふること次の如し.

$$\sin A = \frac{PM}{OP} \qquad \cos A = \frac{OM}{OP}$$

$$\tan A = \frac{PM}{OM} \qquad \cot A = \frac{OM}{PM}$$

$$\sec A = \frac{OP}{OM} \qquad \operatorname{cosec} A = \frac{OP}{PM}$$

27. 三角比の符號

前節の所述に依り或角の三角比の符號は,其角が何れの象限に在るかによりて定まる.

角 A が第一象限に在れば PM, OM は兩つながら正にして, OP は常に正なるを以て,六つの三角比は何れも正なり.

角 A が第二象限に在れば, PM は正 OM は負にして, OP は常に正なるを以て, sin A と其逆數なる cosec A は正にして他の四つは何れも負なり.

學生ハ自カラ各象限ニ在ル角ノ三角比ノ符號ヲ求メ,由テ得ル所ノ結果ト下ニ揭グル表トヲ對照スベシ.

Aノ在ル象限 / Aノ三角比	第一	第二	第三	第四
sin A 及 cosec A	+	+	−	−
cos A 及 sec A	+	−	−	+
tan A 及 cot A	+	−	+	−

28. [24]の所述に依り, A が任意の角に

して,nが正或は負の任意の整數なれば

$$\left.\begin{array}{ll}\sin(n\,360^\circ+A)=\sin A & \cos(n\,360^\circ+A)=\cos A\\ \tan(n\,360^\circ+A)=\tan A & \cot(n\,360^\circ+A)=\cot A\\ \sec(n\,360^\circ+A)=\sec A & \operatorname{cosec}(n\,360^\circ+A)=\operatorname{cosec} A\end{array}\right\}\ldots(7)$$

29. [8]に於てAを任意の鋭角として得たる公式(1)(2)(3)及び(4)即ち

$$\sin A\ \operatorname{cosec} A=1 \qquad \cos A\ \sec A=1 \qquad \tan A\ \cot A=1$$

$$\tan A=\frac{\sin A}{\cos A} \qquad \cot A=\frac{\cos A}{\sin A}$$

は三角比の定義より,直ちに出で來りたるものなるを以て,Aを任意の角とするも,亦眞なること明かなり.

公式(5)即ち　$\sin^2 A+\cos^2 A=1$

$$\sec^2 A=1+\tan^2 A$$

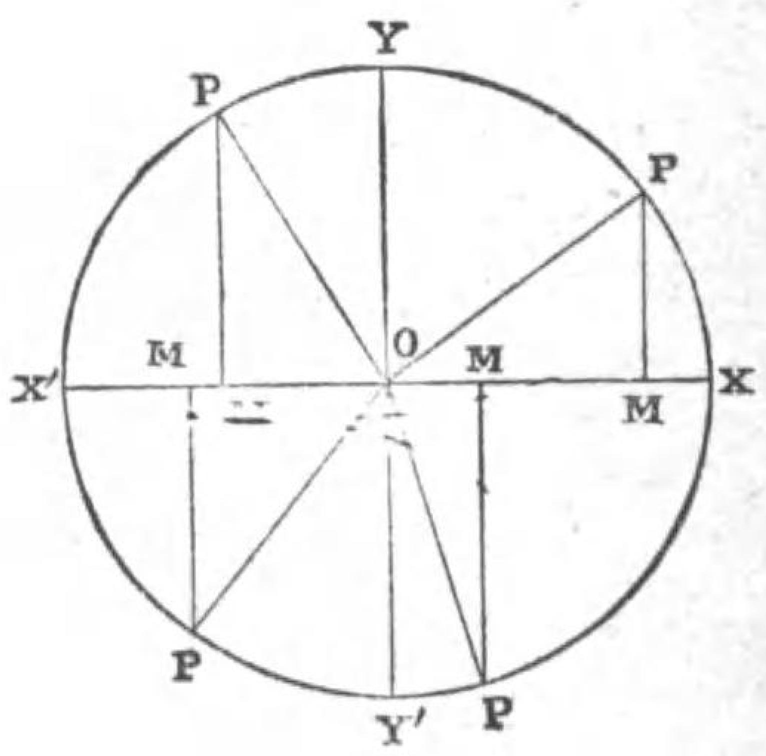
及び　$\operatorname{cosec}^2 A=1+\cot^2 A$

は直角三角形の斜邊の平方は他の二邊の平方の和に等しといふ定理より得たるものなり．而して此定理は,邊を表はす數の正負に拘はらず,常に眞なるを以て,上の公式も亦常に眞なり.

30. 角Aが0°,90°等なるときは,前に三角比の定義を述べたるときになしたる樣に直角三角形を作ること能はざるや明かなり．故に前の定義は角が0°,90°等なるときは,適用すること能はざるものとす．されど極限の理に據れば此等の角の三角比の値を求むることを得.

31. 角Aが0°より360°まで增すときsin Aの値の變化を論ず.

XOX′, YOY′をOに於て直角に相交はる所の二直線とし,一定の長さの廻轉線OPが首線OXの位置より起り,原點Oの周りに廻轉し,0°より360°までの角を作るとせよ.



Oを中心とし,OPを半徑として圓

を書き, XOX′ 及び YOY′ と X, Y, X′ 及び Y′ に於て交はらしめよ.

任意の位置に在る廻轉線 OP の端 P より XOX′ に垂線 PM を引け.

∠XOP を A とせよ.

然るときは　$\sin A=\frac{PM}{OP}$

角 A が 0° より大なること極めて小なるときは, PM も亦零より大なること極めて小なるべし. 即ち角 A を 0° に十分近くすることに依りて, PM と零との差を何程にても小さくすることを得. 而して OP は一定なり. 即ち A を 0° に十分近くすることに依りて, sin A と零との差を何程にても小さくすることを得. 故に A が 0° なるとき sin A の極限は零なり.

即ち　$\sin 0°=0$

角 A が 0° より漸々増して, 90° に近づくときは, PM は正にして,限りなく小さき値より漸々大きくなり, OY 即ち OP に近づく,而して角 A を十分 90° に近くすることによりて, PM と OP との差を何程にても小さくすることを得. 即ち A を 90° に十分近くすることによりて sin A と 1 との差を何程にても小さくすることを得. 即ち角 A が 90° なるとき sin A の極限は 1 なり.

即ち　$\sin 90°=1$

角 A が 90° より漸々増して 180 に近づく時は PM は正にして,其數値は漸々小さくなり,遂に限りなく小さくなる,故に sin A は 1 より漸々減じて終に限りなく零に近くなる.

即ち　$\sin 180°=0$

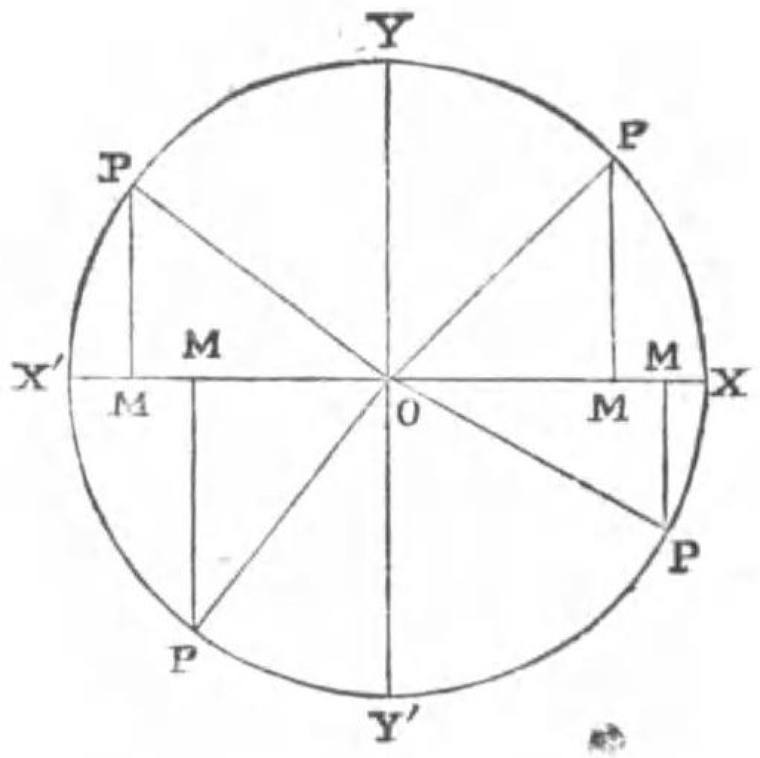
角 A が 180° より漸々増して 270° に近づくときは, PM は負にして,其數値は漸々大きくなり,終に限りなく OP に近づく. 故に sin A は 0 より漸々減じて終に限りなく −1 に近くなる.

即ち　$\sin 270^\circ = -1$

角Aが270°より漸々增して360°に近づくときは,PMは負にして,其數値は漸々小さくなり終に限りなく小さくなる. 故に$\sin A$は-1より漸々增して終に限りなく0に近くなる.

即ち　$\sin 360^\circ = 0$

32. 角Aが0°より360°まで增すとき$\tan A$の値の變化を論ず.



圖に於て

$$\tan A = \frac{PM}{OM}$$

角Aが0°に限りなく近きときは,PMは限りなく零に近く,而してOMは限りなくOXに近し. 即ち角Aを十分0°に近くすることに依りて$\tan A$と零との差を何程にても小さくすることを得. 即ち角Aが0°なるとき,$\tan A$の極限は零なり.

即ち　$\tan 0^\circ = 0$

角Aが0°より漸々增して90°に近づくときは,PM, OMは何れも正にして,其數値は前者は漸々大きくなりて極限OPに近づき,後者は漸々小さくなくて極限零に近づく. 故に$\tan A$は漸々大きくなり,Aを90°に十分近くすることに依りて,$\tan A$を何程にても大きくすることを得. 之を角Aが90°なるとき,$\tan A$の極限は**無限大**なりといひ,

$$\tan 90^\circ = \infty$$

と記す.

角Aが90°より漸々增して180°に近づくときは,PMは正にして,其數値は漸々小さくなりて極限零に近づき,OMは負にして,其數値は漸々大きくなりて,極限OX′に近づく. 故に$\tan A$は負にして

其數値は∞より漸々減じて遂に0となる. 即ち無限に大なる負の値より漸々増して終に零となる.

即ち　$\tan 180^\circ = 0$

角Aが180°より漸々増して270°に近づくときは, PMは負にして,其數値は漸々大きくなり,極限OY′に近づき; OMも負にして,其數値は漸々小さくなり,極限零に近づく. 故にtan Aは正にして其數値は零より漸々増して,終に無限大となる.

即ち　$\tan 270^\circ = \infty$

角Aが270°より漸々増して360°に至るときは, tan Aは負にして,其數値は無限大より漸々減じて終に零となる.

即ち　$\tan 360^\circ = 0$

33. 第二象限に在る角が漸々増して180°に近づき,又第三象限に在る角が漸々減じて180°に近づくとせんに,其角の

正弦は前の場合に於ては常に正なるに反し,後の場合に於ては,常に負なり. 然れども180°の前後いづれよりこれに近づくにもせよ,角が限りなくこれに近づきて達する所の極限は零にして,この零は正にもあらず,又負にもあらざるものなり.

同様に第一象限に在る角が漸々増して90°に近づき,又第二象限に在る角が漸々減じて90°に近づくとせんに,其角の正切は前の場合に於ては常に正なるに反し,後の場合に於ては常に負なり. 然れども90°の前後何れより之に近づくにもせよ,角が限りなく之に近づきて達する所の極限は無限大なり.

34. 吾々は[31]及び[32]に於て角Aが0°より360°まで増すに當りてsin A及びtan Aの値が如何に變化するかを示せり. 他の三角比の値の變化に付きては學生

みづから試むべし. 今參照の便を與へんが爲めに,下に變化の概要を示す所の表を掲ぐ.

表中∞の前に+或は−の符號を置きたるは,各象限に於ける三角比の符號を示したるに過ぎず.

Aガ増ス範圍 / Aノ三角比	0°ヨリ 90°マデ	90°ヨリ 180°マデ	180°ヨリ 270°マデ	270°ヨリ 360°マデ
sin A	0ヨリ 1マデ 増	1ヨリ 0マデ 減	0ヨリ −1マデ 減	−1ヨリ 0マデ 増
cos A	1ヨリ 0マデ 減	0ヨリ −1マデ 減	−1ヨリ 0マデ 増	0ヨリ 1マデ 増
tan A	0ヨリ +∞マデ 増	−∞ヨリ 0マデ 増	0ヨリ +∞マデ 増	−∞ヨリ 0マデ 増
cot A	+∞ヨリ 0マデ 減	0ヨリ −∞マデ 減	+∞ヨリ 0マデ 減	0ヨリ −∞マデ 減
sec A	1ヨリ +∞マデ 増	−∞ヨリ −1マデ 増	−1ヨリ −∞マデ 減	+∞ヨリ 1マデ 減
cosec A	+∞ヨリ 1マデ 減	1ヨリ +∞マデ 増	−∞ヨリ −1マデ 増	−1ヨリ −∞マデ 減

次に $0^\circ, 90^\circ, 180^\circ$ 及び 270° の三角比の値を示す所の表を掲ぐ.

A / Aノ三角比	0°	90°	180°	270°
sin A	0	1	0	−1
cos A	1	0	−1	0
tan A	0	∞	0	∞
cot A	∞	0	∞	0
sec A	1	∞	−1	∞
cosec A	∞	1	∞	−1

35. sin A 及び cos A の値は A が如何なる角を表はすも常に +1 と −1 との間に在り.(+1 及び −1 を含み)

tan A 及び cot A は正或は負の如何なる値をも有することを得.

sec A 及び cosec A は +1 より小にして且 −1 より大なる値を有することなし.

其他は如何なる値をも有することを得.

角が 360° より漸々増すときは 360° を加ふる毎に,其三角比の値は前節の第一表に示したるものと同一の變化を繰り返すに過ぎず. [28]を參照せよ.

第六問題集

角Aガ 0° ヨリ 360° マデ増ストキ下ニ記スル式ガ如何ニ變ズルカヲ示セ.

1. $1-\cos A$ **2.** $\sin^2 A$

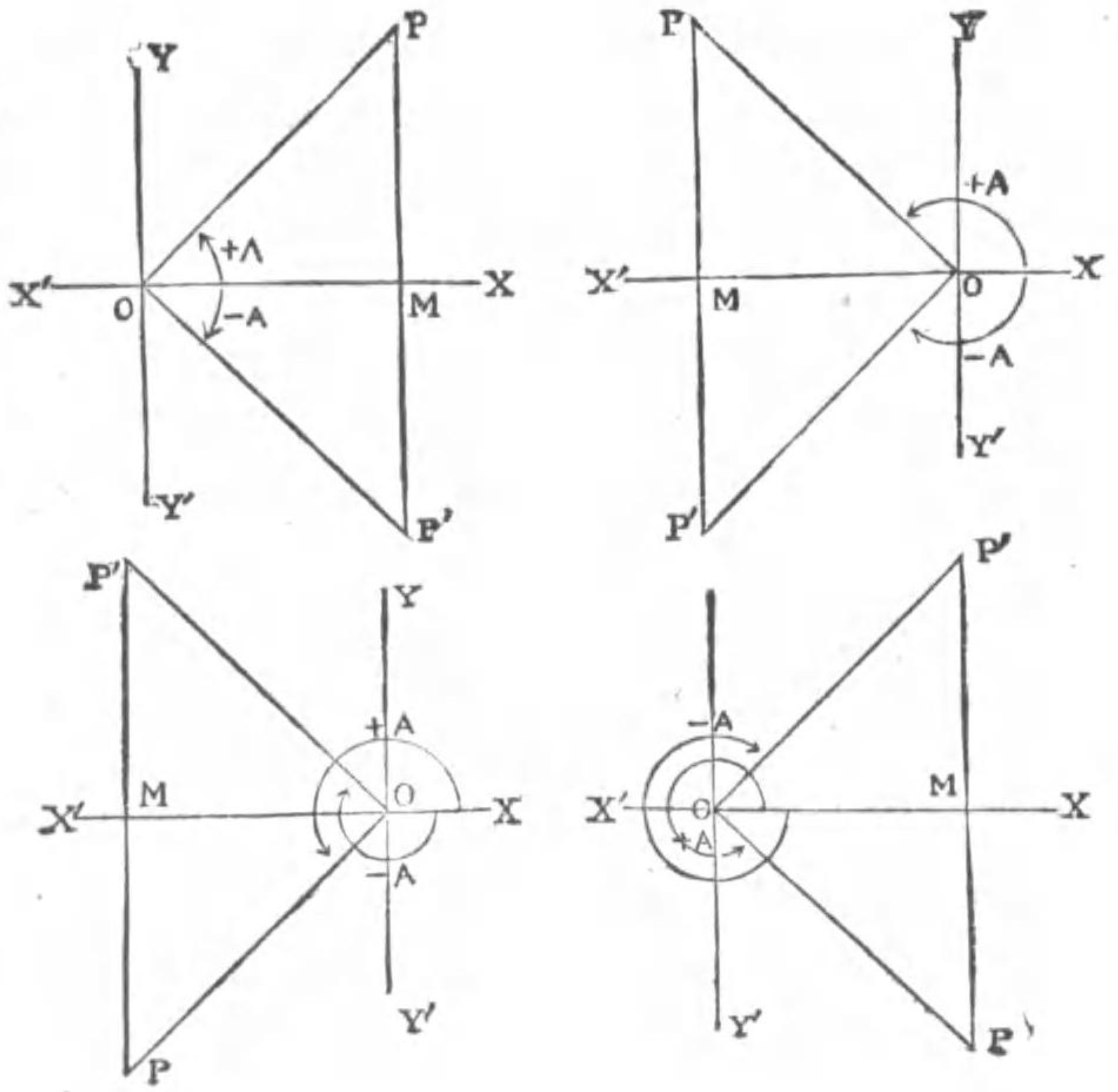
3. $\sin A+\cos A$

第　五　編

負角,餘角及び補角の三角比

---

35. 負角の三角比



A が任意の角なるとき,

$$\left.\begin{array}{ll} \sin(-A)=-\sin A & \cos(-A)=\cos A \\ \tan(-A)=-\tan A & \cot(-A)=-\cot A \\ \sec(-A)=\sec A & \operatorname{cosec}(-A)=-\operatorname{cosec} A \end{array}\right\} \cdots\cdots(8)$$

の證明

上圖ニ於テ XOP ヲ任意ノ正角トシ(360° ヨリ大ナルモノヲ含ム)任意ノ長サ OP ヲ取リ P ヨリ XOX′ ニ垂線 PM ヲ引キ之ヲ延長シテ PM=P′M トシ, OP ヲ結ビ付ケヨ.

然ルトキハ箭頭ヲ以テ示ス所ノ二角 XOP,XOP′ ハ大サ相等シク符號相反ス. 故ニ今 ∠XOP ヲ A トスレバ, ∠XOP′ ハ −A ナルベシ.

$$\sin A=\frac{PM}{OP} \qquad \sin(-A)=\frac{P'M}{OP'}$$

PM ト P′M トハ長サ相等シク符號相反ス. 而シテ OP ト OP′ トハ,何レモ正ニシテ長サ相等シ.

故ニ　$$\sin(-A)=-\sin A$$

又　$$\cos A=\frac{OM}{OP} \qquad \cos(-A)=\frac{OM}{OP'}$$

故ニ　$$\cos(-A)=\cos A$$

$$\tan(-A)=\frac{\sin(-A)}{\cos(-A)}=\frac{-\sin A}{\cos A}=-\tan A$$

$$\cot(-A)=\frac{1}{\tan(-A)}=\frac{1}{-\tan A}=-\cot A$$

$$\sec(-A)=\frac{1}{\cos(-A)}=\frac{1}{\cos A}=\sec A$$

$$\operatorname{cosec}(-A)=\frac{1}{\sin(-A)}=\frac{1}{-\sin A}=-\operatorname{cosec} A$$

例題1.　$\sin 700^{0}=-\sin 20^{0}$ ナルコトヲ示セ.

$$\sin 700^{0}=-\sin(-700^{0})=-\sin(-720^{0}+20^{0})$$

$$=-\sin 20^{0}$$

例題2.　$\tan 345^{0}$ ノ値ヲ求ム.

$$\tan 345^{0}=\tan(360^{0}-15^{0})=\tan(-15^{0})$$

$$=-\tan 15^{0}=\sqrt{3}-2$$

37. 幾何學に於て所述の

二角の和一直角に等しきときは,其一を他の餘角といふ.

なる餘角の定義は今一般に任意の角に付きて論ずるに當り其儘にて任意の角に適用するものとす.

二角の和二直角に等しきときは,其一を他の補角といふ.

なる補角の定義に付きても同様なり.

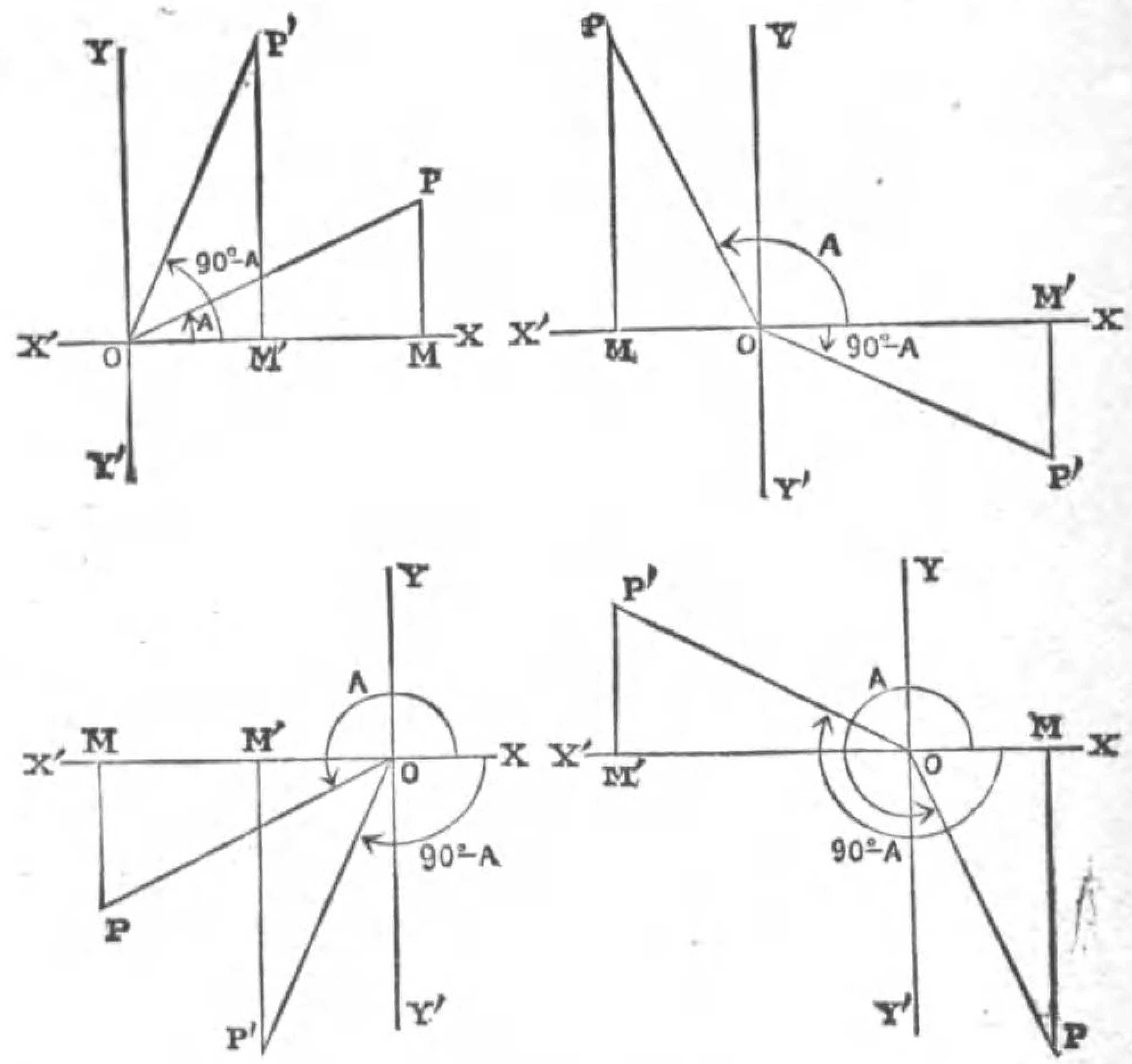
例ヘバ 120^{0} ノ餘角ハ $90^{0}-120^{0}=-30^{0}$, -8^{0} ノ餘角ハ $90^{0}-(-80^{0})=170^{0}$ ナリ.　又 225^{0} ノ補角ハ $180^{0}-225^{0}=-45^{0}$, -120^{0} ノ補角ハ $180^{0}-(-120^{0})=300^{0}$ ナリ.

38. 餘角の三角比

Aが任意の角なるとき

$$\left.\begin{array}{ll}\sin(90^{0}-A)=\cos A & \cos(90^{0}-A)=\sin A\\ \tan(90^{0}-A)=\cot A & \cot(90^{0}-A)=\tan A\\ \sec(90^{0}-A)=\operatorname{cosec} A & \operatorname{cosec}(90^{0}-A)=\sec A\end{array}\right\}\ldots\ldots(9)$$

の證明



XOX′, YOY′ を O に於て直角に相交はる

所の二直線とし,XOPを任意の正角とし,之をAとせよ．今 $90^\circ-A$ の角を畫くには,先づ 90° を畫き廻轉線をして正の向きに OY に至らしめ,夫より負の向きに A に等しき角 YOP′ を畫け．然れば XOP′ は $90^\circ-A$ なるべし．

$OP=OP'$ とし，P 及び P′ より XOX′ に夫々垂線 PM 及び P′M′ を引けば，PM と OM′ とは長さ相等しく,而して P が XOX′ の上に在れば,P′は YOY′ の右に在り,P が XOX′ の下に在れば,P′ は YOY′ の左に在り．

故に PM, OM′ の符號は常に同一なり．

故に　$\dfrac{PM}{OP}=\dfrac{OM'}{OP'}$

即ち　$\sin A=\cos(90^\circ-A)$

又 P′M′ 及び OM も亦長さ相等しく,符號は常に同一なり．

故に　$\dfrac{OM}{OP}=\dfrac{P'M'}{OP'}$

即ち　$\cos A=\sin(90^\circ-A)$

同様に上圖を用ゐて直接に,又は公式(1)－(4) 及び上記の二つの結果とを用ゐて他の四つの公式を證明することを得．

例題1.　$\sin 55^\circ=\cos(90^\circ-55^\circ)=\cos 35^\circ$

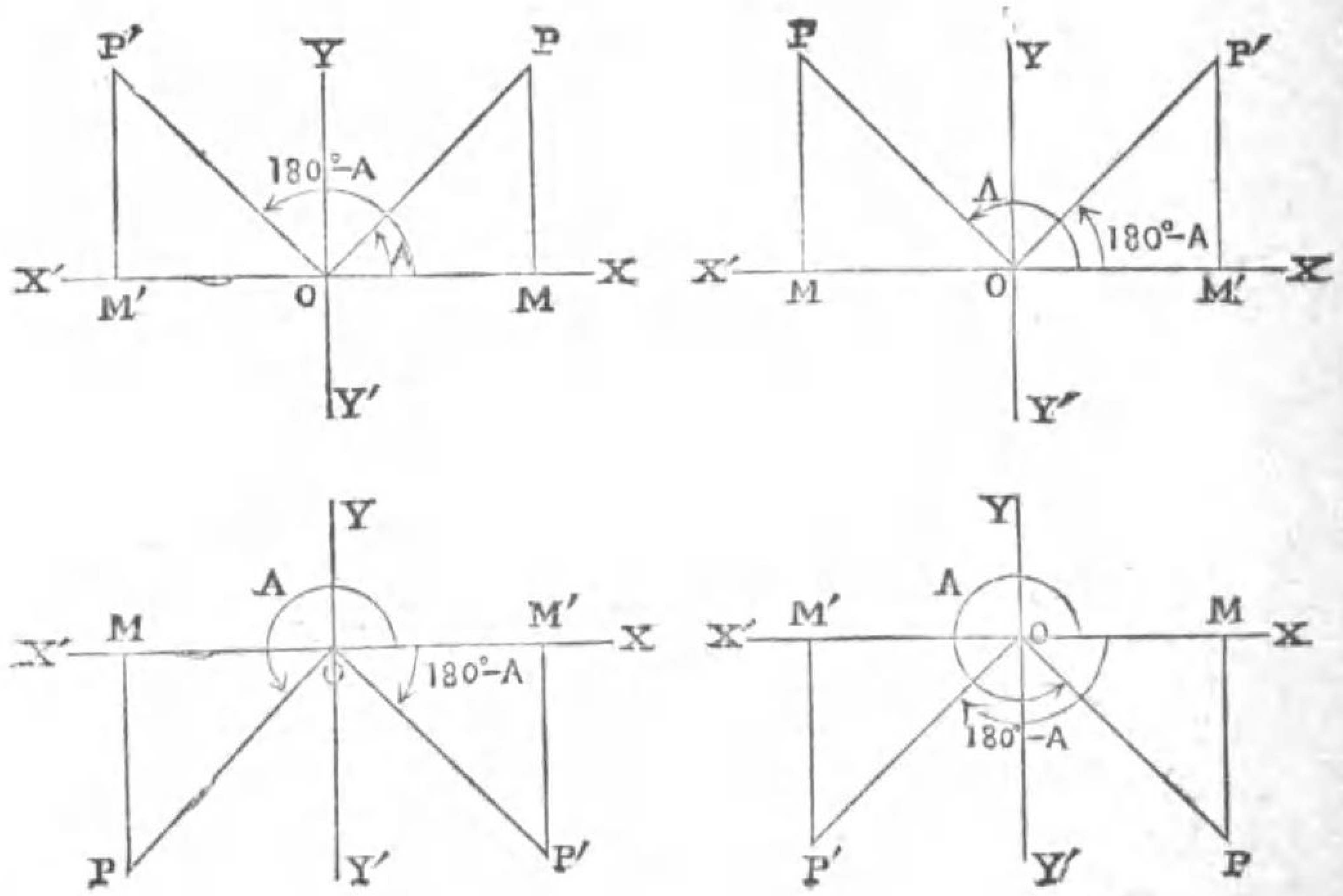
例題2.　$\tan(-25^\circ)=\cot\{90^\circ-(-25^\circ)\}=\cot 115^\circ$

39. 補角の三角比

A が任意の角なるとき

$$\left.\begin{array}{ll}\sin(180^\circ-A)=\sin A & \cos(180^\circ-A)=-\cos A\\ \tan(180^\circ-A)=-\tan A & \cot(180^\circ-A)=-\cot A\\ \sec(180^\circ-A)=-\sec A & \operatorname{cosec}(180^\circ-A)=\operatorname{cosec} A\end{array}\right\}\cdots\cdots(10)$$

の證明



XOX′, YOY′ を O に於て直角に相交はる二直線とし, XOP を任意の正角とし之を A とせよ. 今 $180^\circ-A$ なる角を書くには, 先づ正の向きに 180° を書き廻轉線をして OX′ に至らしめ,夫より負の向きに A に等しき角 X′OP′ を書け.

然れば XOP′ は $180^\circ-A$ なり.

$OP=OP'$ とし P 及び P′ より XOX′ に夫々垂線 PM 及び P′M′ を引けば PM, P′M′ は長さ相等しく,符號は常に同一なり.

故に　$\frac{P'M'}{OP'}=\frac{PM}{OP}$

即ち　$\sin(180^\circ-A)=\sin A$

又 OM, OM′ は長さ相等しく符號は相反す.

故に　$\frac{OM'}{OP'}=-\frac{OM}{OP}$

即ち　$\cos(180^\circ-A)=-\cos A$

同樣に上圖を用ゐて直接に,又は公式(1)−(4) と上記の二つの結果とを用ゐて,他の四つの公式を證明することを得.

例題　$\sin 120^\circ$ 及ビ $\tan 135^\circ$ ノ値ヲ見出セ.

$\sin 120^\circ=\sin(180^\circ-60^\circ)=\sin 60^\circ=\frac{\sqrt{3}}{2}$

$\tan 135^\circ=-\tan(180^\circ-135^\circ)=-\tan 45^\circ=-1$

40. $\sin(90^\circ+A)=\cos A$ 及び
$\cos(90^\circ+A)=-\sin A$ の證明

$$\sin(90^\circ+A)=\sin\{180^\circ-(90^\circ+A)\}$$
$$=\sin(90^\circ-A)=\cos A$$
$$\cos(90^\circ+A)=\sin\{90^\circ-(90^\circ+A)\}$$
$$=\sin(-A)=-\sin A$$

41. $\sin(180^\circ+A)=-\sin A$ 及び
$\cos(180^\circ+A)=-\cos A$ の證明

$$\sin(180^\circ+A)=\sin\{180^\circ-(180^\circ+A)\}$$
$$=\sin(-A)=-\sin A$$
$$\cos(180^\circ+A)=-\cos\{180^\circ-(180^\circ+A)\}$$
$$=-\cos(-A)=-\cos A$$

42. こゝに引用に便利の爲め 120°, 135° 及び 150° の三角比の値を示す所の表を掲ぐ.

A / Aノ三角比	120°	135°	150°
sin A	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{1}{2}$
cos A	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{\sqrt{2}}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$
tan A	$-\sqrt{3}$	-1	$-\frac{1}{\sqrt{3}}$

第七問題集

次ノ三角比ノ値ヲ求メヨ.

1. $\cot 150^{\circ}$　　**2.** $\sec 225^{\circ}$　　**3.** $\tan 300^{\circ}$

4. $\operatorname{cosec}(-600^{\circ})$　　**5.** $\sin 1125^{\circ}$

次ノ式ヲ證明セヨ.

6. $\sin 195^{\circ} = \cos(-105^{\circ})$

7. $\tan(-54^{\circ}) = \cot 144^{\circ}$

8. 690° 及ビ 585° ノ正弦ト餘弦トノ値ヲ求メヨ.

9. $\sin(270^{\circ}-A) = -\cos A$ 及ビ $\cos(270^{\circ}-A) = -\sin A$ ヲ證明セヨ.

10. $\tan(90^{\circ}+A) = -\cot A$ ヲ證明セヨ.

A, B 及ビ C ガ三角形ノ三角ナレバ下ノ六ツノ關係ノ眞ナルコトヲ證明セヨ.

11. $\cos\frac{A}{2} = \sin\frac{B+C}{2}$　　**12.** $\cot\frac{C}{2} = \tan\frac{A+B}{2}$

13. $\sin A = \sin(B+C)$

14. $\sec C = -\sec(A+B)$

15. $\tan(A+B) = -\tan C$

16. $\cos(A+B-C) = -\cos 2C$

第六編

二角の三角比

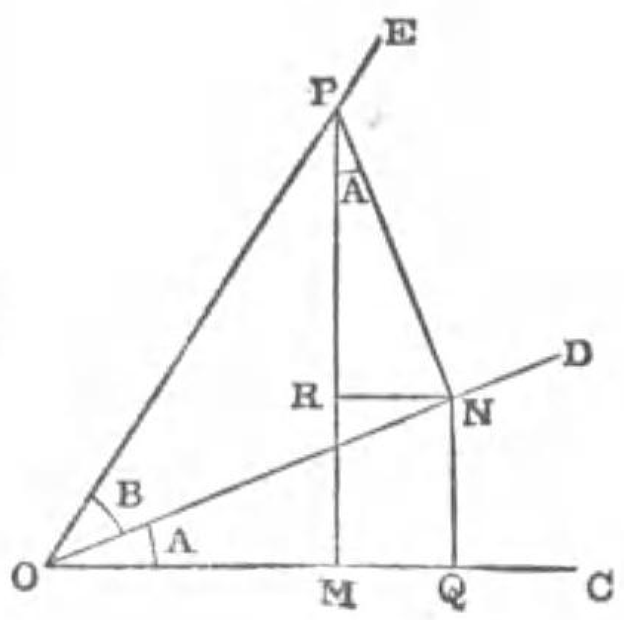
43. 任意の二角の正弦及び餘弦を用ゐて,此二角の和の正弦及び餘弦を表はす公式

$\sin(A+B)=\sin A\cos B+\cos A\sin B$ ....(11)

$\cos(A+B)=\cos A\cos B-\sin A\sin B$ ....(12)

の證明

A及ビBハ何レモ正ニシテ A+Bハ90°ヨリ小ナリト假定ス. ∠COD ヲ A トシ, ∠DOE ヲ B トスレバ, ∠COE ハ A+B ナルベシ. OE 上ニ任意ノ一點 P ヲ取リ P ヨリ OC, 及ビ OD ニ夫々垂線 PM 及ビ PN ヲ引ケ.



又 N ヨリ PM 及ビ OC ニ夫々垂線 NR, NQ ヲ引ケ.

然レバ ∠NPR=∠RNO=∠NOC=A

故ニ $\sin(A+B)=\frac{PM}{OP}=\frac{RM+PR}{OP}=\frac{NQ}{OP}+\frac{PR}{OP}$

$=\frac{NQ}{ON}\cdot\frac{ON}{OP}+\frac{PR}{PN}\cdot\frac{PN}{OP}$

故ニ $\sin(A+B)=\sin A\cos B+\cos A\sin B$

又 $\cos(A+B)=\frac{OM}{OP}=\frac{OQ-MQ}{OP}=\frac{OQ}{OP}-\frac{RN}{OP}$

$=\frac{OQ}{ON}\cdot\frac{ON}{OP}-\frac{RN}{PN}\cdot\frac{PN}{OP}$

故ニ $\cos(A+B)=\cos A\cos B-\sin A\sin B$

44. 任意の二角の正弦及び餘弦を用ゐて,此二角の差の正弦及び餘弦を表はす公式

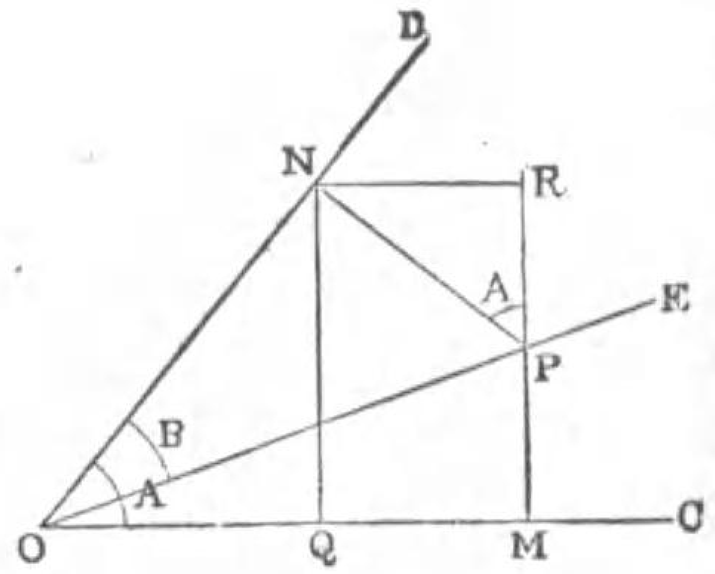
$\sin(A-B)=\sin A\cos B-\cos A\sin B$......(13)

$\cos(A-B)=\cos A\cos B+\sin A\sin B$......(14)

の證明

A及ビBハ何レモ90°ヨリ小ナル正角ト假定ス.

∠COD ヲ A トシ, ∠EOD ヲ B トスレバ, ∠COE ハ A−B ナルベシ.



OE 上ニ任意ノ一點 P ヲ取リ, P ヨリ OC 及ビ OD ニ夫々垂線 PM 及ビ PN ヲ引ケ.

又NヨリMPノ延長及ビOCニ夫々垂線NR及ビNQヲ引ケ．然レバ $\angle NPR=\angle DNR=\angle NOC=A$

故ニ　$\sin(A-B)=\dfrac{PM}{OP}=\dfrac{RM-PR}{OP}=\dfrac{QN}{OP}-\dfrac{PR}{OP}$

$$=\frac{QN}{ON}\cdot\frac{ON}{OP}-\frac{PR}{PN}\cdot\frac{PN}{OP}$$

$$=\sin A\cos B-\cos A\sin B$$

又　$\cos(A-B)=\dfrac{OM}{OP}=\dfrac{OQ+QM}{OP}=\dfrac{OQ}{OP}+\dfrac{QM}{OP}$

$$=\frac{OQ}{ON}\cdot\frac{ON}{OP}+\frac{NR}{PN}\cdot\frac{PN}{OP}$$

$$=\cos A\cos B+\sin A\sin B$$

公式(11)−(14)はA及びBが如何なる角を表はすとも眞なるものなれども其一般の證明はこゝに省く．

45. 任意の二角の正切を用ゐて此二角の和及び差の正切を表はす公式

$$\tan(A+B)=\frac{\tan A+\tan B}{1-\tan A\tan B}\cdots\cdots\cdots(15)$$

及び　$$\tan(A-B)=\frac{\tan A-\tan B}{1+\tan A\tan B}\cdots\cdots\cdots(16)$$

の證

$$\tan(A+B)=\frac{\sin(A+B)}{\cos(A+B)}=\frac{\sin A\cos B+\cos A\sin B}{\cos A\cos B-\sin A\sin B}$$

$\cos A\cos B\neq 0$ ト假定シ $\cos A\cos B$ ヲ以テ右邊ノ分數ノ分母子ヲ割レバ

$$\tan(A+B)=\frac{\dfrac{\sin A\cos B}{\cos A\cos B}+\dfrac{\cos A\sin B}{\cos A\cos B}}{\dfrac{\cos A\cos B}{\cos A\cos B}-\dfrac{\sin A\sin B}{\cos A\cos B}}$$

$$=\frac{\tan A+\tan B}{1-\tan A\tan B}$$

同様ニ公式(13)及ビ(14)ヲ用キテ,公式(16)ヲ證明スルコトヲ得．

第八問題集

1. $\cos(A+45^\circ)=\dfrac{1}{\sqrt{2}}(\cos A-\sin A)$ ヲ證明セヨ

2. $\sin(60^\circ-A)=\dfrac{1}{2}(\sqrt{3}\cos A-\sin A)$ ヲ證明セヨ

3. $\cos(A+45^\circ)+\sin(A-45^\circ)=0$ ヲ證明セヨ

4. $\sin A=\dfrac{5}{13}$, $\sin B=\dfrac{7}{25}$ ナレバ, $\sin(A+B)$ ノ値ハ如何．　但シA及ビBハ鋭角ナリトス．

5. $\sin A=\dfrac{8}{17}$, $\cos B=\dfrac{60}{61}$ ナレバ $\cos(A+B)$ ノ値如何．但シA及ビBハ鋭角ナリトス．

6. $\tan A=\dfrac{1}{2}$, $\tan B=\dfrac{1}{4}$ ナルトキハ $\tan(A+B)$ ノ値如何．

7. $\tan A=-\dfrac{1}{2}$, $\tan B=\dfrac{1}{3}$ ナレバ, $A-B$ ハ何度ナリヤ．但シ $180^\circ>A>90^\circ$, $90^\circ>B>0^\circ$

8. 45° 及ビ 30° ノ三角比ノ値及ビ公式(11),(13)及ビ(16)ニ依リテ $\sin 15^\circ$, $\sin 75^\circ$ 及ビ $\tan 15^\circ$ ノ値ヲ求メヨ．

9. $\tan(A+45^\circ)=\dfrac{1+\tan A}{1-\tan A}$ ヲ證明セヨ．

10. $\cot(A+B)=\dfrac{\cot A\ \cot B-1}{\cot A+\cot B}$ ヲ證明セヨ.

11. $\sin(A+B+C)=\sin A\ \cos B\ \cos C+\sin B\cos C\ \cos A$

$+\sin C\ \cos A\ \cos B-\sin A\ \sin B\ \sin C$

12. $\cos(A+B+C)=\cos A\cos B\cos C-\cos A\ \sin B\sin C$

$-\cos B\sin C\sin A-\cos C\sin A\sin B$

13. $\sin(A+B)\sin(A-B)=\sin^2A-\sin^2B$

$=\cos^2B-\cos^2A$　ヲ證明セヨ.

14. $\cos(A+B)\cos(A-B)=\cos^2A-\sin^2B$

$=\cos^2B-\sin^2A$　ヲ證明セヨ.

[注意]　9ヨリ14ニ至ル六問題ハ何レモ緊要ナルモノナリ.

46. 二倍角の三角比

[43]ノ公式(11)ニ於テ　A=B トスレバ

$$\sin 2A=2\sin A\cos A \quad \cdots\cdots\cdots\cdots(17)$$

又(12)ニ於テ A=B トスレバ

$$\left.\begin{aligned}\cos 2A&=\cos^2A-\sin^2A\\&=1-2\sin^2A\\&=2\cos^2A-1\end{aligned}\right\}\cdots\cdots\cdots\cdots(18)$$

(18)ヨリ　$1+\cos 2A=2\cos^2A$

$1-\cos 2A=2\sin^2A$

$$\therefore\quad \tan^2A=\frac{1-\cos 2A}{1+\cos 2A}\cdots\cdots\cdots\cdots(19)$$

又[46]ノ公式(15)ニ於テ　A=B トスレバ

$$\tan 2A=\frac{2\tan A}{1-\tan^2A}\cdots\cdots\cdots\cdots(20)$$

例題1.　$\cos A=\dfrac{1}{3}$ ナレバ $\cos 2A$ ノ值如何.

$\cos 2A=2\cos^2A-1=\dfrac{2}{9}-1=-\dfrac{7}{9}$

例題2.　$\sin 210^\circ=-\dfrac{1}{2}$ ナレバ　$\cos 105^\circ$ ノ值如何

$\cos 210^\circ=-\sqrt{1-\dfrac{1}{4}}=-\dfrac{\sqrt{3}}{2}$

[210° ハ第三象限ニ在ルヲ以テ $\cos 210^\circ$ ハ負ナリ]

$\cos^2 105^\circ=\dfrac{1+\cos 210^\circ}{2}=\dfrac{1-\dfrac{\sqrt{3}}{2}}{2}=\dfrac{2-\sqrt{3}}{4}=\dfrac{4-2\sqrt{3}}{8}$

$\cos 105^\circ=-\dfrac{\sqrt{(\sqrt{3}-1)^2}}{2\sqrt{2}}=-\dfrac{\sqrt{3}-1}{2\sqrt{2}}$

47. 三倍角の三角比

$\sin 3A=\sin(2A+A)$

$=\sin 2A\ \cos A+\cos 2A\sin A$

$=2\sin A\ \cos^2A+(1-2\sin^2A)\sin A$

公式(17)及ビ(18)ニ依リテ

$=2\sin A(1-\sin^2A)+(1-2\sin^2A)\sin A$

故に　$\sin 3A=3\sin A-4\sin^3A\cdots\cdots\cdots\cdots(21)$

$\cos 3A=\cos(2A+A)$

$=\cos 2A\ \cos A-\sin 2A\ \sin A$

$=(2\cos^2A-1)\cos^2A-2\sin^2A\ \cos A$

$$=(2\cos^2 A-1)\cos A-2(1-\cos^2 A)\cos A$$

故に　$\cos 3A=4\cos^3 A-3\cos A$ ……………………(22)

$$\tan 3A=\tan(2A+A)$$

$$=\frac{\tan 2A+\tan A}{1-\tan 2A\ \tan A}$$

$$=\frac{\dfrac{2\tan A}{1-\tan^2 A}+\tan A}{1-\dfrac{2\tan A}{1-\tan^2 A}\tan A}$$　公式(20)ニ依リテ

$$\tan 3A=\frac{3\tan A-\tan^3 A}{1-3\tan^2 A}\ \text{……………………(23)}$$

48. 正弦及び餘弦の積を其和或は差の形に變ずる公式

$2\sin A\cos B=\sin(A+B)+\sin(A-B)$…………(24)

$2\cos A\sin B=\sin(A+B)-\sin(A-B)$…………(25)

$2\cos A\cos B=\cos(A+B)+\cos(A-B)$…………(26)

$2\sin A\sin B=\cos(A-B)-\cos(A+B)$…………(27)

の證

上記四ツノ公式ハ,(11)ヨリ(14)ニ至ル四ツノ公式ヲ二ツ宛加ヘ或ハ減ジ,而シテ左邊ト右邊トヲ交換シタルモノナリ

例題　$\cos 60^\circ\sin 10^\circ$ ヲ正弦ノ差ノ形ニテ表ハセ.

(25)ニ依リテ $\cos 60^\circ\sin 10^\circ=\frac{1}{2}\{\sin(60^\circ+10^\circ)-\sin(60^\circ-10^\circ)\}$

$$=\frac{1}{2}(\sin 70^\circ-\sin 50^\circ)$$

49. 正弦及び餘弦の和或は差を積の形に變ずる公式

前節ニ於テ示シタル四ツノ公式ニ於テ

$A+B=C,\ A-B=D$ トシ左邊ト右邊トヲ交換スレバ

$\sin C+\sin D=2\sin\frac{C+D}{2}\cos\frac{C-D}{2}$…………(28)

$\sin C-\sin D=2\cos\frac{C+D}{2}\sin\frac{C-D}{2}$…………(29)

$\cos C+\cos D=2\cos\frac{C+C}{2}\cos\frac{C-D}{2}$…………(30)

$\cos D-\cos C=2\sin\frac{C+D}{2}\sin\frac{C-D}{2}$…………(31)

例題　$\cos 73^\circ+\cos 81^\circ$ ヲ餘弦ノ積ノ形ニテ表ハセ.

公式(30)ニ依リテ

$$\cos 73^\circ+\cos 81^\circ=2\cos\frac{73^\circ+81^\circ}{2}\cos\frac{73^\circ-81^\circ}{2}$$

$$=2\cos 77^\circ\cos(-4^\circ)$$

$$=2\cos 77^\circ\cos 4^\circ$$

50.　尚ヨヽニ二三ノ例題ヲ掲グ.

例題1.　$\dfrac{\cos\alpha-\cos 5\alpha}{\sin\alpha+\sin 5\alpha}$ ヲ簡單ニセヨ.

$$\frac{\cos\alpha-\cos 5\alpha}{\sin\alpha+\sin 5\alpha}=\frac{2\sin\frac{5\alpha+\alpha}{2}\sin\frac{5\alpha-\alpha}{2}}{2\sin\frac{5\alpha+\alpha}{2}\cos\frac{5\alpha-\alpha}{2}}=\tan 2\alpha$$

例題2.　$\cos 55^\circ\cos 65^\circ+\cos 65^\circ\cos 175^\circ+\cos 175^\circ\cos 55^\circ=$

$-\frac{3}{4}$ ヲ證明セヨ.

公式(26)ニ依リテ

左邊 $=\frac{1}{2}\{(\cos 120^\circ+\cos 10^\circ)+(\cos 240^\circ+\cos 110^\circ)$
$+\cos 230^\circ+\cos 120^\circ)\}$

$$=-\frac{3}{4}+\frac{1}{2}\{\cos 10^\circ+\cos 110^\circ+\cos 230^\circ\}$$

$$[\because \cos 120^\circ=-\frac{1}{2},\quad \cos 240^\circ=-\frac{1}{2}]$$

$$=-\frac{3}{4}+\frac{1}{2}\{\cos 110^\circ+2\cos 120^\circ\cos 110^\circ\}$$

$$=-\frac{3}{4}+\frac{1}{2}\{\cos 110^\circ+2\times\left(-\frac{1}{2}\right)\cos 110^\circ\}$$

$$=-\frac{3}{4}$$

例題3.　$A+B+C=180^\circ$ ナレバ

$$\sin A+\sin B+\sin C=4\cos\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2}$$

ナルコトヲ證明セヨ

$$\sin A+\sin B=2\sin\frac{A+B}{2}\cos\frac{A-B}{2}$$

$$=2\sin\left(90^\circ-\frac{C}{2}\right)\cos\frac{A-B}{2}=2\cos\frac{C}{2}\cos\frac{A-B}{2}$$

$$\sin C=2\sin\frac{C}{2}\cos\frac{C}{2}$$

$$=2\cos\left(90^\circ-\frac{C}{2}\right)\cos\frac{C}{2}=2\cos\frac{A+B}{2}\cos\frac{C}{2}$$

$$\therefore\quad \sin A+\sin B+\sin C=2\cos\frac{C}{2}\left\{\cos\frac{A-B}{2}+\cos\frac{A+B}{2}\right\}$$

$$=2\cos\frac{C}{2}\cdot 2\cos\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}$$

$$=4\cos\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2}$$

第九問題集

1. $\sin 30^\circ$ 及ビ $\cos 30^\circ$ ノ値ヨリ $\sin 60^\circ$ 及ビ $\cos 60^\circ$ ノ値ヲ見出セ.

2. $\cos 30^\circ$ ノ値ヨリ $\sin 15^\circ=\frac{\sqrt{2-\sqrt{3}}}{2}$ ヲ證明セヨ

3. $\sin A=\frac{1}{5}$ ナレバ $\cos 2A$ 及ビ $\sin 2A$ ノ値如何. 但シ $90^\circ>A>0^\circ$

4. $\cos 2A=\frac{13}{36}$ ナレバ $\cos A=\frac{7\sqrt{2}}{12}$ ナルコトヲ證明セヨ. 但シ $90^\circ>A>0^\circ$

5. $\sin 80^\circ+\sin 40^\circ=\sqrt{3}\cos 20^\circ$ ヲ證セヨ.

6. $\cos 1^\circ-\cos 11^\circ$ ヲ積ノ形ニテ表ハセ.

7. $2\cos A\cos 4A$ ヲ餘弦ノ和ノ形ニテ表ハセ.

8. $\cos 1'-\cos 59^\circ 59'=\cos 60^\circ 1'$ ヲ證セヨ.

次ノ恒等式ヲ證明セヨ.

9. $\dfrac{\sin 3\alpha+\sin\alpha}{\cos 3\alpha+\cos\alpha}=\tan 2\alpha$

10. $\dfrac{\sin 5\alpha-\sin 3\alpha}{\cos 3\alpha-\cos 5\alpha}=\cot 4\alpha$

11. $\dfrac{\sin\alpha+\sin(\alpha+\beta)+\sin(\alpha+2\beta)}{\cos\alpha+\cos(\alpha+\beta)+\cos(\alpha+2\beta)}=\tan(\alpha+\beta)$

12. $2\sin\left(\frac{A+B}{2}-45^\circ\right)\cos\left(\frac{A-B}{2}+45^\circ\right)=\sin A-\cos B$

13. $\dfrac{\tan 3\alpha}{\tan\alpha}=\dfrac{2\cos 2\alpha+1}{2\cos 2\alpha-1}$

14. $\cos A+\cos(120^\circ-A)+\cos(120^\circ+A)=0$

15. $4\cos A\cos(60^\circ-A)\cos(60^\circ+A)=\cos 3A$

16. $\tan A+\tan(60^\circ+A)+\tan(120^\circ+A)=3\tan 3A$

17. $\cos^6 A-\sin^6 A=\cos 2A\left(1-\frac{1}{4}\sin^2 2A\right)$

18. $\sin^5 A=5\sin A-20\sin^3 A+16\sin^5 A$

$A+B+C=180^\circ$ ナリトシ次ノ關係ヲ證明セヨ.

19. $\sin 2A+\sin 2B-\sin 2C=4\sin C\cos A\cos B$

20. $\sin\frac{A}{2}\cos\frac{B-C}{2}+\sin\frac{B}{2}\cos\frac{C-A}{2}+\sin\frac{C}{2}\cos\frac{A-B}{2}$

$$=\cos A+\cos B+\cos C$$

第 七 編
對 數

51. 三角法に於て其所論の事項を實地に應用せんには,種々の複雜なる計算を行はざる可からず. 對數の用は主として,此複雜なる計算の煩を減殺するにあり. 故に余輩は代數學に於て其大要を示したれども,便宜の爲めにこゝに之を再說せんとす.

$a^x=n$ なれば x を a を基數とする所の n の對數と稱し,x を表はすに $\log_a n$ を以てす.

即ち　$a^x=n$ なれば　$x=\log_a n$

例題　$10^2=100$　$\therefore\ 2=\log_{10}100$

$8^{\frac{2}{3}}=4$　$\therefore\ \frac{2}{3}=\log_8 4$

52. $a^0=1$ は恒に眞なるを以て

$$0=\log_a 1$$

即ち基數は如何なる數なるに拘はらず，1 の對數は恒に 1 なり．

又 $a^1=a$ なるを以て

$$1=\log_a a$$

即ち任意の數の其數を基數と爲す所の對數は恒に 1 なり．

53. 二數の積の對數は其二數の對數の和に等し．

即ち $\qquad \log_a(mn)=\log_a m+\log_a n$

$\log_a m=x,\quad \log_a n=y$ とすれば

$$a^x=m \qquad a^y=n$$

故に $\qquad mn=a^x\times a^y=a^{x+y}$

故に $\qquad \log_a(mn)=x+y=\log_a m+\log_a n$

同様に $\qquad \log_a(mnp)=\log_a m+\log_a n+\log_a p$

54. 二數の商の對數は被除數の對數より除數の對數を減じたるものに等し．

即ち $\qquad \log_a\frac{m}{n}=\log_a m-\log_a n$

$\log_a m=x,\qquad \log_a n=y$ とすれば

$$\frac{m}{n}=a^x\div a^y=a^{x-y}$$

故に $\qquad \log_a\frac{m}{n}=x-y=\log_a m-\log_a n$

55. 一數の冪の對數は其數の對數に冪の指數を掛けたるものに等し．

即ち $\qquad \log_a(m^n)=n\log_a m$

前の如く $\log_a m=x$ とすれば

$$m^n=(a^x)^n=a$$

故に $\qquad \log_a(m^n)=nx=n\log_a m$

56. 上述の三定理は對數計算の基本となるものなり．今對數が如何にして計算の手數を減ずるかを例解せんとす．

例題 $\sqrt[3]{7\times3^2}\div\sqrt{2}$ ノ値ヲ求ム．

$x=\sqrt[3]{7\times3^2}\div\sqrt{2}$ トシ此兩邊ニ付キテ 10 ヲ基數ト爲ス所ノ對數ヲ取レバ

$$\begin{aligned}\log_{10}x&=\log_{10}\{\sqrt[3]{7\times3^2}\div\sqrt{2}\}\\&=\log_{10}(7\times3^2)^{\frac{1}{3}}-\log_{10}2^{\frac{1}{2}} &&[54]\text{ニ依リ}\\&=\frac{1}{3}\log_{10}(7\times3^2)-\frac{1}{2}\log_{10}2 &&[56]\text{ニ依リ}\\&=\frac{1}{3}\{\log_{10}7+2\log_{10}3\}-\frac{1}{2}\log_{10}2 &&[53]\text{ニ依リ}\end{aligned}$$

偖 $\log_{10}7$, $\log_{10}3$ 及ビ $\log_{10}2$ 即チ 10 ヲ基數ト爲ス所ノ 7, 3 及ビ 2 ノ對數ノ値ハ先輩ノ已ニ精密ニ計算シテ表ニ作リタルモノアリ．今此表ヲ見ルニ

$\log_{10}7=\cdot84510 \quad \log_{10}3=\cdot47712 \quad \log_{10}2=\cdot30103$ ナリ.

故ニ $\log_{10}x=\frac{1}{3}(\cdot84510+2\times\cdot47712)-\frac{1}{2}\times\cdot30103$

$=\cdot44926$

是ニ於テ10ヲ基數トシテ·44926ナル對數ヲ有スル數,即チxヲ表ニテ求ムレバ2·8136ヲ得.

故ニ $\frac{\sqrt[3]{7\times3^2}}{\sqrt{2}}=2\cdot8136$(小數第四位マデ正シキ答)

此ノ如ク對數ヲ用キルトキハ掛ケ算ノ代リニ寄セ算ヲ用キ,割算ノ代リニ引キ算ヲ用キ,開方ノ代リニ割リ算ヲ用キルコトヲ得又羃ノ代リニハ掛ケ算ヲ用キルニ由テ計算ノ手數ノ減殺セラルヽコト明カナリ

57. 通常計算に用ゐる對數は10を以て基數となす. 之を**常用對數**と稱す. 本書に於て今後用ゐる對數は,皆常用對數なり. 而して一々基數を記することなく,單に log と記す.

58. 或數の對數が整數部分と小數部分とより成るときは,前者を**指標**といひ,後者を**假數**といふ.

$\log 2=\cdot30103$ ナルヲ以テ

$\log\frac{1}{2}=\log 1-\log 2=0-\log 2=-\cdot30103$

即チ $\log\left(\frac{1}{2}\right)$ ハ負數ナリ. 余輩ハ便利ノ爲メ對數ガ負ナル場合ニ於テモ,假數ハ恒ニ正ナル如ク書ク.

即チ $\log\left(\frac{1}{2}\right)=-\cdot30103=-(1-\cdot69897)=-1+\cdot69897$

$=\bar{1}\cdot69897$

$\bar{1}\cdot69897$ ニ於テノ $\bar{1}$ ハ指標1ダケガ負數ナルコトヲ表ハス.

59. 10を基數と爲す所の一數の指標は,常に視察に依りて知ることを得.

與ヘラレタル數ガ1ヨリ大ナリトシ,(整數又ハ帶小數)其整數部分ノ數字ノ數ヲn+1トセヨ. 然レバ其數ハ 10^n ヨリ大キク 10^{n+1} ヨリ小サシ.

然ルニ $\log 10^n=n\log 10=n$

$\log 10^{n+1}=(n+1)\log 10=n+1$

ナルヲ以テ與ヘラレタル數ノ對數ハ,n ヨリ大キク $n+1$ ヨリ小サキ數,即チ $n+$ 或小數ナリ. 即チ其指標ハ n ナリ.

次ニ與ヘラレタル數ガ,1ヨリ小ナリトシ,小數點以下最初ノ有効數字マデノ0ノ數ヲ n トセヨ. 然レバ其數ハ $\frac{1}{10^n}$ 即チ 10^{-n} ヨリ小サク $\frac{1}{10^{n+1}}$ 即チ $10^{-(n+1)}$ ヨリハ大ナルベシ.

然ルニ $\log(10^{-n})=-n\log 10=-n$

$$\log\{10^{-(n+1)}\}=-(n+1)\log 10=-(n+1)$$

ナルヲ以テ與ヘラレタル數ノ對數ハ $-n$ ヨリ小サク, $-(n+1)$ ヨリ大ナル數,即チ $-(n+1)+$ 或小數ナリ. 即チ其指標ハ $-(n+1)$ ナリ.

例ヘバ $\log 384.9$ ノ指標ハ 2 ニシテ, $\log\cdot 00079$ ノ指標ハ -4 ナリ.

60. 若干數あり,何れも同じ順に列記せられたる同じ數字より成り,唯小數點の位置のみ異なるときは,此等の數の對數は皆同一なる假數を有す.

例ヘバ $\log 4308=3\cdot 63428$ ナリトスレバ

$$\log 43\cdot 08=\log\frac{4308}{10^2}=\log 4308-2\log 10=3\cdot 63428-2=1.63428$$

$$\log\cdot 004308=\log\frac{4308}{10^6}=\log 4308-6\log 10$$
$$=3\cdot 63428-6=\bar{3}\cdot 63428$$

61. 前節の所述に依りて任意の數の對數は,其數を成す所の數字と同じ數字を同じ順に列記して得る所の整數の對數と其假數を同うするを以て,整數の對數表を作り置くのみにて十分なり.

又任意の數の對數の指標は[59]に示したる法則に據り視察にて知ることを得べきが故に,表には對數の假數のみを記載し置くものとす.

62. 例題1. $\bar{3}\cdot 4897,\ 2\cdot 3754$ 及ビ $\bar{5}\cdot 6291$ ヲ相加ヘヨ.

假數ハ皆正ナルガ故ニ

其和 $=\cdot 4897+\cdot 3754+\cdot 6291=1\cdot 4942$

指標ノ和 $=\bar{3}+2+\bar{5}=-3+2-5=-6$

故ニ　所要ノ和 $=-6+1\cdot 4942=\bar{5}\cdot 4942$

例題2. $\bar{2}\cdot 6459$ ヨリ $\bar{4}\cdot 9875$ ヲ減ゼヨ.

$$\bar{2}\cdot 6459-\bar{4}\cdot 9875=-2+\cdot 6459-(-4+\cdot 9875)$$
$$=-2+\cdot 6459+4-\cdot 9875$$
$$=2-\cdot 3416$$
$$=1\cdot 6584$$

例題3. $\bar{2}\cdot 5034$ ニ 3 ヲ掛ケヨ

$$\bar{2}\cdot 5034\times 3=(-2+\cdot 5034)\times 3$$
$$=-6+1\cdot 5102$$
$$=\bar{5}\cdot 5102$$

例題4. $\bar{5}\cdot 8343$ ヲ 7 ニテ割レ

$$\frac{\bar{5}\cdot 8343}{7}=\frac{-5+\cdot 8343}{7}=\frac{-7+2\cdot 8343}{7}$$

$$=-1+\cdot4049=\bar{1}\cdot4049$$

63. 數の對數表の使用法

普通の對數表は大抵數の對數表,三角比の表及び三角比の對數の表より成り精粗各,一ならず. 余輩は余輩の計算せんとする事項の要する精密の度に應じて,適宜の表を選擇せざる可からず.

こゝに數の對數の小數五桁の表を掲ぐ.

數		0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	P.P.
560	74	819	827	834	842	850	858	865	873	881	889	8
561		896	904	912	920	927	935	943	950	958	966	1 0·8 2 1·6 3 2·4 4 3·2 5 4·0 6 4·8 7 5·6 8 6·4 9 7·2
562		974	981	989	997	*005	*012	*020	*028	*035	*043	
563	75	051	059	066	074	082	089	097	105	113	120	
564		128	136	143	151	159	166	174	182	189	197	
565		205	213	220	228	236	243	251	259	266	274	
566		282	289	297	305	312	320	328	335	343	351	
567		358	366	374	381	389	397	404	412	420	427	
568		435	442	450	458	465	473	481	488	496	504	7
569		511	519	526	534	542	549	557	565	572	580	1 0·7 2 1·4 3 2·1 4 2·8 5 3·5 9 4·2 7 4·9 8 5·6 9 6·3
570		587	595	603	610	618	626	633	641	648	656	
571		664	671	679	686	694	702	709	717	724	732	

數		0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	P.P.
572		740	747	755	762	770	778	785	793	800	808	
573		815	823	831	838	846	853	861	868	876	884	
574		891	899	906	914	921	929	937	944	952	959	
數		0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	P.P.

64. 一つの與へられたる數の對數を求む.

若し與へられたる數が其儘表中に在るときは,直ちに其對數の假數を取り,之に前の法則に據りて定むる所の指標を書き添ふべし.

例題 5642 ノ對數ヲ求ム.

表ノ左端上下ニ數ト記シタル行ニ於テ 564 ヲ得,コレヨリ右方ヘ横列ヲ辿リ次ニ表ノ上下 0,1,2,3,........9 ト記シタル列中ノ 2 ヨリ下ヘ縦行ヲ辿レバ,前ノ横列ト相會スル所ニ於テ 143 ナル數ヲ得,其左方ニ 75 ヲ書キ添フレバ, 75143 ヲ得,此ヲ所要ノ對數ノ假數トス.

故ニ $$\log 5642=3\cdot75143$$

次ニ與ヘラレタル數ガ其儘表中ニ在ラザル場合ニ付キテ一例ヲ示サン

例題 56324 ノ對數ヲ求ム.

表ヨリ　$\log 56320=4{\cdot}75066$

$\log 56330=4{\cdot}75074$

上ノ二數ノ差ハ10ニシテ其對數ノ差ハ ·00008 ナリ.

即チ數ガ10増ストキハ其對數ハ ·00008 増スコトヲ知レリ. x ヲ $\log 56324$ ノ値ヲ得ル爲メニ $\log 56320$ ノ値ニ加フベキ數トシ,且ツ數ノ小増加ハ其對數ノ之ニ對應スル増加ニ正比例ヲ爲スモノト見做セバ

$$10:4=\cdot 00008:x$$

$$x=\frac{4\times\cdot 00008}{10}=\cdot 000032$$

之ヲ數ノ増シ4ニ對スル對數ノ増シトス.

故ニ　$\log 56324=4{\cdot}75066+\cdot 00003$

$=4{\cdot}75069$

65. 前節の計算に於て

數の小増加は其對數の之に對應する増加に正比例す,といへり. 此を**比例部分の定則**と稱す.

此定則ハ嚴正ニ眞ナルモノニアラザレドモ多クノ實地計算ニ十分ナル正シサヲ以テ,之ヲ適用スルコトヲ得.

偖上ノ定則ニ依リテ比例部分ヲ求ムルニ當リ前節ノ例題ニ於テナシタルガ如ク一々計算スルヲ

要セズ. 表中ニ P.P. (比例部分ノ意)ト記セル欄アリ. 此欄ノ最上部ノ 8 ([63]ノ表ヲ見ヨ)ハ相隣レル二ツノ對數ノ差(實ハ ·00008 ナレドモ便利ノ爲メ,其末位ヲ一ノ位ト見做ス)ニシテ左行ノ 1, 2, 3,……ニ對スル 0·8, 1·6,……7·2 ハ 8 ノ $\frac{1}{10}, \frac{2}{10}, \ldots\ldots \frac{9}{10}$ ナリ. 前ノ例題ニ於テハ x ハ 8 ノ $\frac{4}{10}$ ナルヲ以テ本欄ヨリ直チニ 3·2 ヲ得. 而シテ此 3·2 ノ 3 ハ小數第五位ニ在ル數ナルコト明カナリ.

66. 與へられたる對數に對應する數を求む.

若し與へられたる對數の假數が其儘表中に在るときは,直ちに之に對應する數を書き下し之に與へられたる對數の指標に應じて,小數點を打つべし.

例題1. 2·75189 ナル對數ヲ有スル數ヲ求ム.

表ヨリ所要ノ數ハ 564·8 ナルコトヲ知ル.

例題2. 4·75069 ナル對數ヲ有スル數ヲ求ム.

前ノ如ク表ヨリ　$\log 56320=4{\cdot}75066$

$\log 56330=4{\cdot}75074$

x ヲ 4·75069 ヲ對數ト爲ス所ノ數ヲ得ル爲メニ 56320 ニ加フベキ數トセヨ.

$$4·75074-4·75066=·00008$$

$$4·75069-4·75066=·00003$$

ナルヲ以テ $8:3=10:x$

$$x=\frac{30}{8}=3·75$$

故ニ $4·75069=\log(56320+4)$

$$=\log 56324$$

因テ所要ノ數ハ 56324 ナリ.

此計算ニ於テモ亦 P.P. ノ欄ヲ利用スルコトヲ得. 即チ 8 ト記スル行ニ於テ差 3 ニ最モ近キ數 32 ノ左傍ノ數 4 ヲ取ルナリ

67. 三角比の對數表

sin A の對數を log sin A と記し cos A の對數を log cos A と記す,他は之に倣ふ.

sin A 及び cos A は決して 1 より大ならざるを以て, log sin A 及び log cos A は決して正數となることなし.

又 45° より小なる角の正切の對數及び 45° より大なる角の餘切の對數は負なり. 偖表に負數を記するは不便なるを以て之を避くる爲めに三角比の對數には悉く 10 を加ふることあり. 斯の如く 10 を加へたる對數を**表對數**と名づけ, L なる記號を以て之を表はす.

即ち $L\sin A=\log\sin A+10$

$$L\cos A=\log\cos A+10$$

こゝに 20° より 20° 18′ に至る一分置きの角の三角比の對數表を掲ぐ.

20°

′	正弦	差	正切	通差	餘切	差	餘弦	′	P.P.
0	9·53405	35	9·56107	39	10·43893	5	9·97299	60	
1	9·53440	35	9·56146	39	10·43854	5	9·97294	59	
2	9·53475	34	9·56185	39	10·43815	4	9·97289	58	34
3	9·53509	35	9·56224	40	10·43776	5	9·97285	57	1 3·4
4	9·53544	34	9·56264	39	10·43736	4	9·97280	56	2 6·8 3 10·2
5	9·53578	35	9·56303	39	10·43697	5	9·97276	55	4 13·6 5 17·0
6	9 53613	34	9·56342	39	10·43658	5	9·97271	54	6 20·4 7 23·8
7	9·53647	35	9·56381	39	10 43619	4	9·97266	53	8 27·2 9 30·6
8	9·53682	34	9·56420	39	10·43580	5	9·97262	52	
9	9·53716	35	9·56459	39	10·43541	5	9·97257	51	
10	9 53751	34	9·56498	39	10·43502	4	9·97252	50	
11	9·53785	34	9·56537	39	10·43463	5	9·97248	49	
12	9 53819	35	9·56576	39	10·43424	5	9·97243	48	
13	9·53854	34	9·56615	39	10·43385	4	9·97238	47	
14	9·53888		9·56654		10·43346		9·97234	46	

		34		39		5			
15	9·53922		9·56693		10·43307		9·97229	45	
		35		39		5			
16	9·53957		9·56732		10·43268		9·97224	44	
		34		39		4			
17	9·53991		9·59771		10·43229		9·97220	43	
		34		39		5			
18	9·54025		9·56810		10·43190		9·97215	42	
′	餘弦	差	餘切	通差	正切	差	正弦	′	P.P.

69°

68. 比例部分の定則は角と其三角比との間に成立するが如く,角と其三角比の對數との間にも亦成立するものとす.即ち　角の小變化は其各三角比の對數の之に對應する變化に比例す.

又角の增減と其各三角比の對數の增減との關係は[18]に於て,角の增減と其各三角比の增減との關係に付きて述べたる所のものと毫も異なることなし.

69. 例題1.　$\log\sin 20^\circ\ 14'\ 18''$ ノ値ヲ求ム.

表ヨリ　$L\sin 20^\circ\ 15'=9{\cdot}53922$

$L\sin 20^\circ\ 14'=9{\cdot}53888$

之ヨリ1′ダケノ角ノ增シニ對スル正弦ノ對數ノ增シハ, ·00034 ナルコトヲ知ル.

x ヲ $L\sin 20^\circ\ 14'\ 18''$ ノ値ヲ得ル爲メニ 9·53888 ニ加フ

ベキ數トスレバ

$$60''\ :\ 18''={\cdot}00034\ :\ x$$

故ニ　$x={\cdot}000102$

故ニ　$L\sin 20^\circ\ 14'\ 18''=9{\cdot}53888+{\cdot}00010$

$=9{\cdot}53898$

故ニ　$\log\sin 20^\circ\ 14'\ 18''=9{\cdot}53898-10$

$=\bar{1}{\cdot}53898$

今コヽニ P.P. ノ欄ヲ利用スレバ下ノ如シ.

欄外ノ差34ノ行ヨリ其左行ノ 3 ($18''$ ハ $60''$ ノ $\frac{3}{10}$) ニ對スル 10·2 ヲ取リ, $L\sin 20^\circ\ 14'$ ノ値ニ加フベシ.

即チ　$L\sin 20^\circ\ 14'=9{\cdot}53888$

$10{\cdot}2$

$L\sin 20^\circ 14'\ 18''=9{\cdot}53898$

例題2.　$\log\cos 69^\circ\ 45'{\cdot}7$ ノ値ヲ求ム.

表ヨリ　$L\cos 69^\circ\ 45'=9{\cdot}53922$

$L\cos 69^\circ\ 46'=9{\cdot}53888$

1′ダケノ角ノ增シニ對スル餘弦ノ對數ノ減リハ ·00034 ナルコトヲ知ル.

x ヲ $L\cos 69^\circ 45'{\cdot}7$ ノ値ヲ得ル爲メニ 9·53922 ヨリ減ズベキ數トセヨ.

然ルトキハ　$1'\ :\ 0'{\cdot}7={\cdot}00034\ :\ x$

$x={\cdot}000238$

故ニ　$L\cos 69^\circ 45'{\cdot}7=9{\cdot}53922-{\cdot}00024$

$$=9{\cdot}53898$$

故ニ　$\log\cos 69^\circ\,45'{\cdot}7=9{\cdot}53898-10$

$$=\bar{1}{\cdot}53898$$

[注意]　$20^\circ\,14'\,18''$ 即チ $20^\circ\,14'{\cdot}3$ ト $69^\circ\,45'{\cdot}7$ トハ互ニ餘角ナルヲ以テ前者ノ正弦ト後者ノ餘弦ト相等シキコト當然ナリ.

例題3.　$\log\sin A=\bar{1}{\cdot}53898$ ナルトキ A ヲ求ム.

表ヨリ　$L\sin 20^\circ\,14'=9{\cdot}53888$

$L\sin 20^\circ\,15'=9{\cdot}53922$

由テ角 A ハ $20^\circ\,14'$ ヨリ大ニシテ, $20^\circ\,15'$ ヨリ小ナラザル可カラズ

x ヲ要スル所ノ秒數トセヨ.

然レバ　$9{\cdot}53922-9{\cdot}53888={\cdot}00034$

$9{\cdot}53898-9{\cdot}53888={\cdot}00010$　ナルヲ以テ

$$34:10=60:x$$

$$x=17''{\cdot}6$$

故ニ　$A=20^\circ\,14'\,17''{\cdot}6$

第十問題集

1. $L\sin 69^\circ\,55'\,18''$ ノ値ヲ求ム.
2. $L\cos 20^\circ\,12'\,40''$ ノ値ヲ求ム.
3. $\log\cot 20^\circ\,17'\,10''$ ノ値ヲ求ム.

4. $\log\cos A=\bar{1}{\cdot}97260$ ナルトキ A ヲ見出セ.
5. $\log\tan A={\cdot}43400$ ナルトキ A ヲ見出セ.
6. 三角形 ABC ニ於テ

   $a=3,\ b=4,\ c=90^\circ$ ナルトキ B ヲ求ム.

   $\log 2={\cdot}3010300$　$L\sin 53^\circ\,7'=9{\cdot}9030136$

   $L\sin 53^\circ\,8'=9{\cdot}9031084$

7. 三角形 ABC ニ於テ

   $a=1046{\cdot}7,\ c=1856{\cdot}2,\ C=90^\circ$ ナレバ A ハ如何.

   $\log 10{\cdot}467=1{\cdot}0198222$　$L\sin 34^\circ\,19'=9{\cdot}7510991$

   $\log 18{\cdot}562=1{\cdot}2686248$　$L\sin 34^\circ\,20'=9{\cdot}7512842$

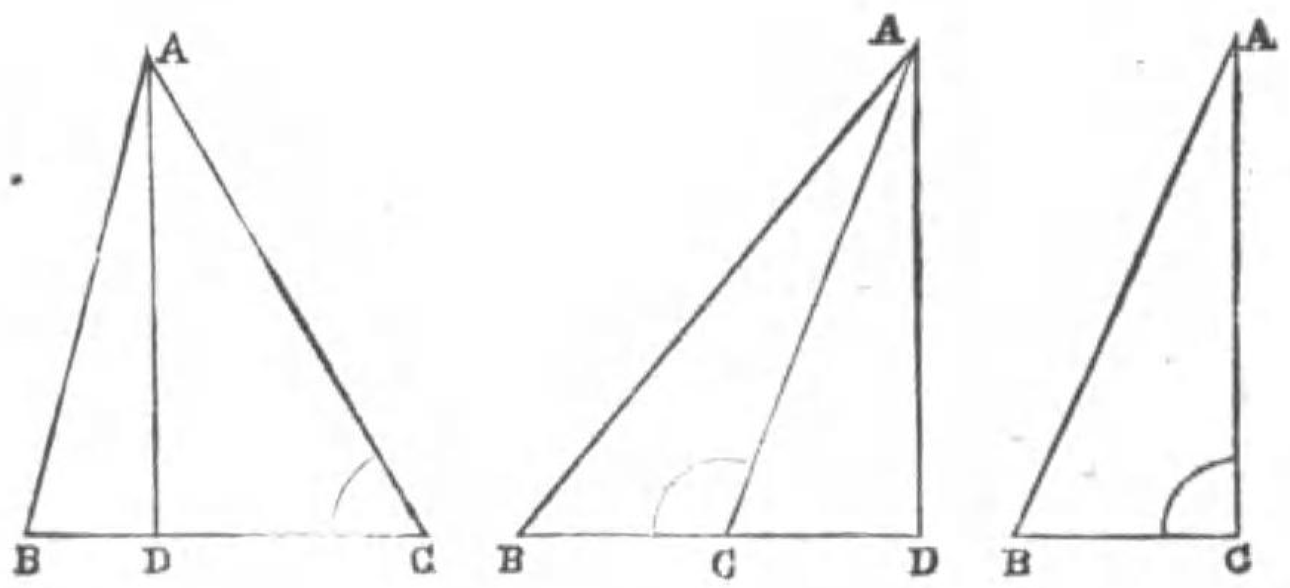
第　八　編

三角形の邊と其角の
三角比との關係

---

70. 三角形の邊は之に對する角の正弦に比例す．即ち三角形ABCに於て

$$\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}=\frac{c}{\sin C}\quad\cdots\cdots\cdots\cdots(32)$$



第一圖　　第二圖　　第三圖

一角Aノ頂點ヨリ其對邊BC或ハ其延長ニ垂線ADヲ引キ其長サヲpトセヨ．

第一圖ニ於テハB及ビCハ鋭角ナリトシ,第二圖及ビ第三圖ニ於テハ,Cハ夫々鈍角及ビ直角ナリトス．

第一圖ヨリ　　$p=c\sin B$　　$p=b\sin C$

故ニ　　$c\sin B=b\sin C$

故ニ　　$\frac{b}{\sin B}=\frac{c}{\sin C}$

第二圖ヨリ

$p=c\sin B$　　$p=b\sin ACD=b\sin(180^\circ-C)=b\sin C$

故ニ　　$c\sin B=b\sin C$

故ニ　　$\frac{b}{\sin B}=\frac{c}{\sin C}$

第三圖ヨリ

$b=c\sin B$　而シテ　$\sin C=\sin 90^\circ=1$　ナルヲ以テ

$$\frac{b}{\sin B}=\frac{c}{\sin C}$$

同様ニ何レノ場合ニ於テモ

$$\frac{b}{\sin B}=\frac{a}{\sin A}$$

故ニ　　$\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}=\frac{c}{\sin C}$

71. 三角形の二邊の差と其和との比は之に對する角の差の半分の正切と和の半分の正切との比に等し．

即ち
$$\frac{b-c}{b+c}=\frac{\tan\frac{1}{2}(B-C)}{\tan\frac{1}{2}(B+C)}\quad\cdots\cdots\cdots\cdots(33)$$

$\frac{b}{\sin B}=\frac{c}{\sin C}$　ヨリ　$\frac{b}{c}=\frac{\sin B}{\sin C}$

因テ　$\dfrac{b-c}{b+c}=\dfrac{\sin B-\sin C}{\sin B+\sin C}=\dfrac{2\cos\dfrac{B+C}{2}\sin\dfrac{B-C}{2}}{2\sin\dfrac{B+C}{2}\cos\dfrac{B-C}{2}}$

故ニ　$$\frac{b-c}{b+c}=\frac{\tan\frac{1}{2}(B-C)}{\tan\frac{1}{2}(B+C)}$$

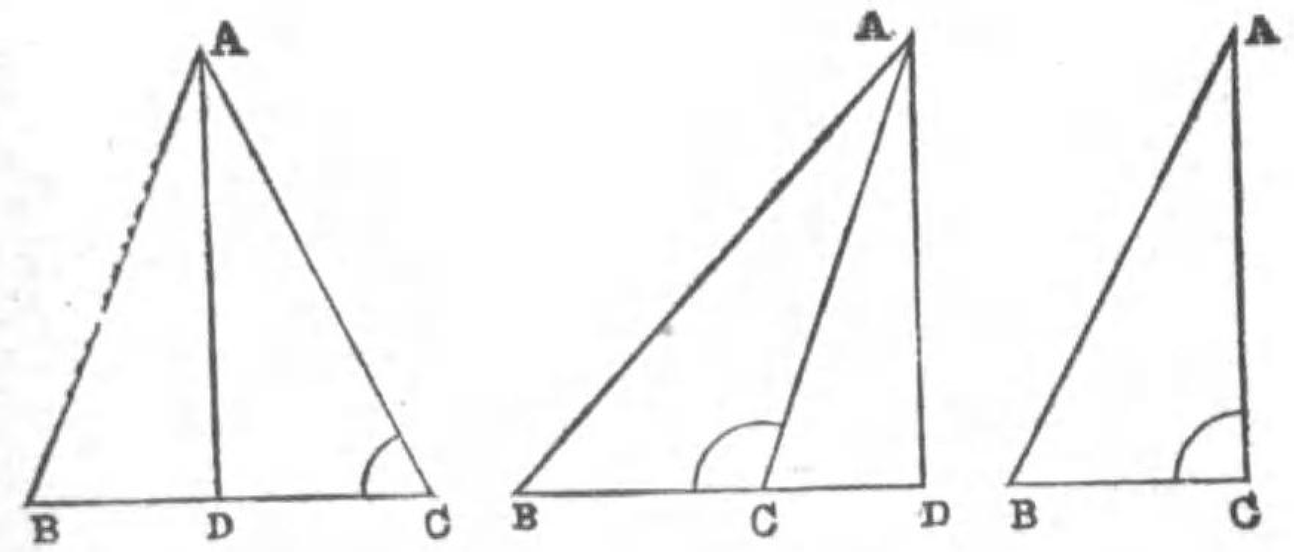
同様ニ　$\dfrac{c-a}{c+a}=\dfrac{\tan\frac{1}{2}(C-A)}{\tan\frac{1}{2}(C+A)}$　　$\dfrac{a-b}{a+b}=\dfrac{\tan\frac{1}{2}(A-B)}{\tan\frac{1}{2}(A+B)}$

ヲ證明スルコトヲ得.

72. 三角形の一邊を他の二邊と其夾角の餘弦とを以て表はす公式

$$c^2=a^2+b^2-2ab\cos C \;\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(34)$$

の證明



第　一　圖　　第　二　圖　　第　三　圖

第一,第二及ビ第三圖ニ於テ,夫々角 C ガ鋭角,鈍角及ビ直角ナリトセヨ.

第一圖ニ於テ　$AB^2=BC^2+CA^2-2\,BC.\,CD$

即チ　$c^2=a^2+b^2-2a.\,CD$

$=a^2+b^2-2ab\cos C$

第二圖ニ於テ　$AB^2=BC^2+CA^2+2\,BC.\,CD$

即チ　$c^2=a^2+b^2+2ab\cos ACD$

$=a^2+b^2-2ab\cos C$

$[\because \cos ACD=\cos(180^\circ-C)=-\cos C]$

第三圖ニ於テ　$AB^2=BC^2+CA^2$

即チ　$c^2=a^2+b^2-2ab\cos C$

$[\because \cos C=\cos 90^\circ=0]$

同様ニ　$a^2=b^2+c^2-2bc\cos A$

及ビ　$b^2=c^2+a^2-2ca\cos B$

ヲ證明スルコトヲ得.

73. 前節の公式より

$$\left.\begin{aligned}\cos A&=\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}\\ \cos B&=\frac{c^2+a^2-b^2}{2ca}\\ \cos C&=\frac{a^2+b^2-c^2}{2ab}\end{aligned}\right\}\cdots\cdots\cdots\cdots(35)$$

74.　$$\sin\frac{A}{2}=\sqrt{\frac{(s-b)(s-c)}{bc}}\;\cdots\cdots\cdots(36)$$

$$\cos\frac{A}{2}=\sqrt{\frac{s(s-a)}{bc}}\;\cdots\cdots\cdots(37)$$

$$\tan\frac{A}{2}=\sqrt{\frac{(s-b)(s-c)}{s(s-a)}}\;\cdots\cdots\cdots(38)$$

の證明

$$2\sin^2\frac{A}{2}=1-\cos A$$

$$=1-\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}=\frac{a^2-(b-c)^2}{2bc}$$

$$\sin^2\frac{A}{2}=\frac{(a+b-c)(a-b+c)}{4bc}$$

今 $a+b+c=2s$ トスレバ

$$a+b-c=2(s-c) \qquad a-b+c=2(s-b)$$

故ニ
$$\sin\frac{A}{2}=\sqrt{\frac{(s-b)(s-c)}{bc}}$$

$$2\cos^2\frac{A}{2}=1+\cos A$$

$$=1+\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}=\frac{(b+c)^2-a^2}{2bc}$$

$$\cos^2\frac{A}{2}=\frac{(a+b+c)(b+c-a)}{4bc}$$

因テ
$$\cos\frac{A}{2}=\sqrt{\frac{s(s-a)}{bc}}$$

$$\tan\frac{A}{2}=\frac{\sin\frac{A}{2}}{\cos\frac{A}{2}}=\sqrt{\frac{(s-b)(s-c)}{bc}}\times\sqrt{\frac{bc}{s(s-a)}}$$

$$=\sqrt{\frac{(s-b)(s-c)}{s(s-a)}}$$

同様ニ $\sin\frac{B}{2}$, $\cos\frac{B}{2}$, $\tan\frac{B}{2}$ 等ヲ三邊ヲ以テ表ハスコトヲ得.

[注意] Aハ三角形ノ一角ナルヲ以テ二直角ヨリ小ナリ. 故ニ $\frac{A}{2}$ ハ鋭角ナリ故ニ $\sin\frac{A}{2}$, $\cos\frac{A}{2}$, $\tan\frac{A}{2}$ 等ハ何レモ正ナリ.

75. 例題 1. $A=30^\circ$ $B=45^\circ$, 及ビ $a=\sqrt{2}$ ナルトキ b 及ビ c ヲ求ム.

$$b=\frac{a\sin B}{\sin A}=\frac{\sqrt{2}.\frac{1}{\sqrt{2}}}{\frac{1}{2}}=2$$

$C=180^\circ-(45^\circ+30^\circ)$ ナルヲ以テ

$$\sin C=\sin 75^\circ=\frac{\sqrt{3}+1}{2\sqrt{2}}$$

$$c=\frac{a\sin C}{\sin A}=\sqrt{2}\times\frac{\sqrt{3}+1}{2\sqrt{2}}\div\frac{1}{2}=\sqrt{3}+1$$

例題 2. $C=120^\circ$, $a=3$ 及ビ $b=5$ ナルトキ c ヲ求ム.

$$c^2=a^2+b^2-2ab\cos C$$

$$=3^2+5^2-2\times3\times5\times\left(-\frac{1}{2}\right)$$

$$=49$$

故ニ $c=7$

第十一問題集

1. $\sin B=\frac{1}{4}$, $a=3$ 及ビ $b=\frac{3}{2}$ ナルトキ A ヲ求ム.
2. $A=75^\circ$, $B=45^\circ$ 及ビ $b=2$ ナレバ, $a=\sqrt{3}+1$ ナルコトヲ證セヨ.
3. $A=30^\circ$, $a=3$ 及ビ $b=3\sqrt{3}$ ナレバ C ハ如何.
4. 三角形ノ三邊ガ 7, 8 及ビ 13 ナル時,其最大ナル角ヲ求ム.
5. $A=15^\circ$, $a=4$ 及ビ $b=4+\sqrt{48}$ ナリトシ B ヲ求ム.

6. $a=2\sqrt{3}$, $b=3-\sqrt{3}$ 及ビ $c=3\sqrt{2}$ ナルトキ C ヲ求ム.

7. $a=13$, $b=14$ 及ビ $c=15$ ナレバ

$$\tan\frac{A}{2}=\frac{1}{2},\ \tan\frac{B}{2}=\frac{4}{7}\ 及ビ\ \tan\frac{C}{2}=\frac{2}{3}$$

ナルコトヲ證明セヨ.

8. ABCD ガ圓ニ内接スル四角形ナレバ

$AC\sin A=BD\sin B$ ナルコトヲ證明セヨ.

第九編

三角形の解法

76. 三角形の六つの部分の中三つの部分(少くとも其一つは邊なるを要す)が已知なるときは,前編所述の邊と角の三角比との關係に依り,一般に他の三つの部分を決定することを得. かくの如く三角形の已知の部分に依りて他の部分を決定することを三角形を解くといふ

如何なる三つの部分が已知なるかに從って,四つの場合あり.

第一. 一邊及び二角が已知なる場合.

第二. 二邊及び夾角が已知なる場合.

第三. 二邊及び其一に對する角が已知なる場合.

第四. 三邊が已知なる場合.

今順次之を說明せんとす.

77. 第一. 一邊及び二角例へば a, B 及びCが已知なる場合.

$$A=180^\circ-(B+C)\ldots\ldots\ldots\ldots(1)$$

$$\frac{b}{\sin B}=\frac{a}{\sin A} \text{ 即チ } b=\frac{a\sin B}{\sin A}$$

故ニ $$\log b=\log\frac{a\sin B}{\sin A}=\log a+\log\sin B-\log\sin A$$

故ニ $$\log b=\log a+L\sin B-10-L\sin A+10$$

故ニ $$\log b=\log a+L\sin B-L\sin A\ldots\ldots\ldots(2)$$

同樣ニ $$\log c=\log a+L\sin C-L\sin A\ldots\ldots\ldots(3)$$

先ヅ(1)ヨリAヲ見出シ次ニ(2)及ビ(3)ヨリ b 及ビCヲ見出スコトヲ得

[注意] 本編ニ於テハ適宜ノ表ヲ用キル事ヲ要ス

例題 $a=254$, $B=16^\circ$ 及ビ $C=64^\circ$ ナルトキ b ヲ求ム.

$$A=180^\circ-(16^\circ+64^\circ)=180^\circ-80^\circ$$

$$\sin A=\sin 80^\circ$$

(2)ヨリ $$\log b=\log 254+L\sin 16^\circ-L\sin 80^\circ$$

表ヨリ

$$\begin{array}{r} \log 254=2\cdot40483 \\ L\sin 16^\circ=9\cdot44034 \\ \hline 11\cdot84517 \\ L\sin 80^\circ=9\cdot99335 \\ \hline \log b=1\cdot85182 \end{array}$$

故ニ表ヨリ $b=71\cdot092$

78. 第二. 二邊及び夾角例へば b, c 及びAが已知なる場合.

$$90^\circ-\frac{A}{2}=\frac{1}{2}(B+C)\ldots\ldots\ldots\ldots(1)$$

故ニ $$\tan\frac{1}{2}(B+C)=\cot\frac{A}{2}$$

故ニ[71]ノ公式ヨリ

$$\tan\frac{1}{2}(B-C)=\frac{b-c}{b+c}\cot\frac{A}{2}$$

故ニ $$\log\tan\frac{1}{2}(B-C)=\log(b-c)+\log\cot\frac{A}{2}-\log(b+c)$$

$$L\tan\frac{1}{2}(B-C)=\log(b-c)+L\cot\frac{A}{2}-\log(b+c)$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(2)$$

是ヨリ $\frac{1}{2}(B-C)$ ヲ決定スルコトヲ得.

因テ夫ト(1)トヨリB及ビCヲ見出スコトヲ得.

又 $$\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}$$

故ニ $$\log a=\log b+L\sin A-L\sin B\ldots\ldots(3)$$

是ヨリ a ヲ見出スコトヲ得.

例題 $b=234\cdot7$ $c=185\cdot4$ 及ビ $A=84^\circ\ 36'$ ナルトキB, C及ビ a ヲ見出セ.

$$L\tan\frac{1}{2}(B-C)=\log(b-c)+L\cot\frac{A}{2}-\log(b+c)$$

$$b-c=49\cdot3 \qquad b+c=420\cdot1 \qquad \frac{A}{2}=42^\circ\ 18'$$

$$\begin{aligned}
\log 49{\cdot}3 &= 1{\cdot}69285\\
\mathrm{L}\cot 42^\circ\ 18' &= 10{\cdot}04099\\
& \quad 11{\cdot}73384\\
\log 420{\cdot}1 &= 2{\cdot}62335\\
\mathrm{L}\tan\tfrac{1}{2}(\mathrm{B}-\mathrm{C}) &= 9{\cdot}11049
\end{aligned}$$

表ヨリ　$\frac{1}{2}(\mathrm{B}-\mathrm{C})=7^\circ\ 20'\ 56''$

而シテ　$\frac{1}{2}(\mathrm{B}+\mathrm{C})=47^\circ\ 42'$

因テ　$\mathrm{B}=55^\circ\ 2'\ 56''$,　$\mathrm{C}=40^\circ\ 21'\ 4''$

$$\begin{aligned}
\log a &= \log b+\mathrm{L}\sin\mathrm{A}-\mathrm{L}\sin\mathrm{B}\\
\log 234{\cdot}7 &= 2{\cdot}37051\\
\mathrm{L}\sin 84^\circ\ 36' &= 9{\cdot}99807\\
& \quad 12{\cdot}36858\\
\mathrm{L}\sin 55^\circ\ 2'\ 56'' &= 9{\cdot}91362\\
\log a &= 2{\cdot}45496\\
a &= 285{\cdot}08
\end{aligned}$$

79. 第三. 二邊及び其一に對する角

例へば a, b 及び A が已知なる場合.

$$\frac{\sin\mathrm{B}}{b}=\frac{\sin\mathrm{A}}{a}\quad 即チ\quad \sin\mathrm{B}=\frac{b}{a}\sin\mathrm{A}$$

故ニ　$\mathrm{L}\sin\mathrm{B}=\log b+\mathrm{L}\sin\mathrm{A}-\log a$............(1)

$\mathrm{C}=180^\circ-(\mathrm{A}+\mathrm{B})$........................(2)

$$\frac{c}{\sin\mathrm{C}}=\frac{a}{\sin\mathrm{A}}\quad 即チ\quad c=\frac{a\sin\mathrm{C}}{\sin\mathrm{A}}$$

故ニ　$\log c=\log a+\mathrm{L}\sin\mathrm{C}-\mathrm{L}\sin\mathrm{A}$ ....(3)

(1),(2)及ビ(3)ヨリB, C及ビ c ヲ決定スルコトヲ得.

此場合ニ於テハ先ヅ最初ニ(1)ヨリ sin B ノ値ヲ

求メザル可カラズ.

第一　若し $\frac{b\sin\mathrm{A}}{a}>1$ なれば $\sin\mathrm{B}>1$ 即ち不能なり. 故に此場合に於ては,已知の三部分を有する三角形は成立せず.

第二　若し $\frac{b\sin\mathrm{A}}{a}<1$ なれば $\sin\mathrm{B}<1$ なり. 由て 0° より 180° までの内にて之に適するBの値は通例二ヶ通りありて互に補角をなす. 而して

(1)若し $a>b$ なれば, $\mathrm{A}>\mathrm{B}$ なるを以て, B は必ず鋭角なり. 故に已知の三部分を有する三角形は唯一つあり.

(2)　若し $a<b$ なれば,Bは必ずしも鋭角ならざるを以て,互に補角なる二角の何れを取るも差支なし. 由て又(2)及び(3)よりC及び c の二ヶ通りの値を求むることを得べし. 故に此場合に於ては,已知の三部分を有する三角形は二つあり.

此の如く a, b 及び A が已知にして $<b$, 及び $a>b\sin\mathrm{A}$ なるときは二ヶ通りの

解あり．之を兩意の場合と稱す．

例題 $a=283{\cdot}4$ $b=348{\cdot}5$ 及ビ $A=32^\circ 15'$ ナルトキ三角形ヲ解ケ．

$$L\sin B=\log b+L\sin A-\log a$$

$$\begin{aligned}\log 348{\cdot}5&=2{\cdot}54220\\ L\sin 32^\circ 15'&=\underline{9{\cdot}72723}\\ &12{\cdot}26943\\ \log 283{\cdot}4&=\underline{2{\cdot}45240}\\ L\sin B&=9{\cdot}81703\end{aligned}$$

因テ $B=41^\circ 0' 36''$ 或ハ $138^\circ 59' 24''$

此例題ハ兩意ノ場合ナルガ故ニ已知ノ部分ヲ有スル三角形二ツアリ

$B=41^\circ 0' 36''$ ナレバ $C=106^\circ 44' 24''$

$$\log c=\log a+L\sin c-L\sin A$$

$$\begin{aligned}\log 283{\cdot}4&=2{\cdot}45240\\ L\sin 106^\circ 44' 24''=L\sin 73^\circ 15' 36''&=\underline{9{\cdot}98119}\\ &12{\cdot}43359\\ L\sin 32^\circ 15'&=\underline{9{\cdot}72723}\\ \log c&=2{\cdot}70636\\ c&=508{\cdot}58\end{aligned}$$

$B=138^\circ 59' 24''$ ナレバ $C=8^\circ 45' 36''$

$$\begin{aligned}\log 283{\cdot}4&=2{\cdot}45240\\ L\sin 8^\circ 45' 36''&=\underline{9{\cdot}18269}\\ &11{\cdot}63509\\ L\sin 32^\circ 15'&=\underline{9{\cdot}72723}\\ \log c&=1{\cdot}90786\end{aligned}$$

$$c=80{\cdot}884$$

依テ

$$\begin{cases}B=41^\circ 0' 36''\\ C=106^\circ 44' 24''\\ c=508{\cdot}58\end{cases}\quad\text{或ハ}\quad\begin{cases}B=138^\circ 59' 24''\\ C=8^\circ 45' 36''\\ c=80{\cdot}884\end{cases}$$

80. 第四．三邊 a, b 及び c が已知なる場合

$\sqrt{\dfrac{(s-a)(s-b)(s-c)}{s}}=r$ トスレバ

$$\tan\frac{A}{2}=\sqrt{\frac{(s-b)(s-c)}{s(s-a)}}=\frac{r}{s-a}$$

同様ニ
$$\tan\frac{B}{2}=\frac{r}{s-b}$$

$$\log r=\frac{1}{2}\{\log(s-a)+\log(s-b)+\log(s-c)-\log s\}$$

$$L\tan\frac{A}{2}=10+\log r-\log(s-a)\cdots\cdots\cdots(1)$$

$$L\tan\frac{B}{2}=10+\log r-\log(s-b)\cdots\cdots\cdots(2)$$

(1)及ビ(2)ヨリ A 及ビ B ヲ見出シ

$$C=180^\circ-A-B\cdots\cdots\cdots\cdots(3)$$

ヨリ C ヲ見出スベシ

例題 $a=13$, $b=14$ 及ビ $c=15$ ナルトキ A, B 及ビ C ヲ求ム．

$2s=a+b+c=42$ $\qquad\log 8=\ \cdot 90309$

$s=21$ $\qquad\log 7=\ \cdot 84510$

$s-a=8$ $\qquad\log 6=\ \cdot 77815$

$s-b=7$ $\qquad 2\cdot 52634$

$s-c=6$ $\qquad\log 21=1\cdot 32222$

$\qquad 2)\overline{1\cdot 20412}$

$\qquad\log r=\ \cdot 60206$

$$10+\log r=10\cdot 60206$$

$$\mathrm{L}\tan\frac{A}{2}=10+\log r-\log 8=\ 9\cdot 69897$$

$$\mathrm{L}\tan\frac{B}{2}=10+\log r-\log 7=\ 9\cdot 75696$$

因テ

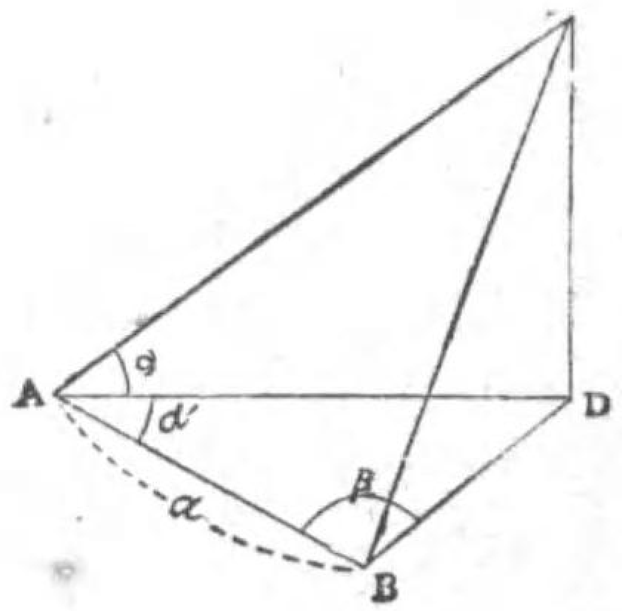
$$\frac{A}{2}=26^\circ\ 33'\ 54'' \qquad A=53^\circ\ \ 7'\ 48''$$

$$\frac{B}{2}=29^\circ\ 44'\ 41'' \qquad B=59^\circ\ 29'\ 22''$$

$$C=180^\circ-A-B$$
$$=67^\circ\ 22'\ 50''$$

81. 距離及び高さ

余輩は已に第三編に於て本題に付きての簡單なる例題を擧げたり．今玆に再び三角形の解法を應用して距離及び高さを求むるの例を擧げんとす．



例題 1. CD ヲ達シ得ベカラザル直立セル物體トシ其底 D ト同水平面上ニ在ル一點 A ニ於テ其仰角 α ヲ測リ，A ヨリ同水平面上ニ在リテ DA 線上ニ在ラザル適宜ノ距離 $AB=d$ ヲ測リ，又 $\angle DAB=\alpha'$，$\angle ABD=\beta$ ヲ測リ以テ CD ヲ求メントス，(DA 線上ニ於テ再ビ CD ノ仰角ヲ測ルコトヲ得ル場合ハ[20]ノ例題 2 ナリ)

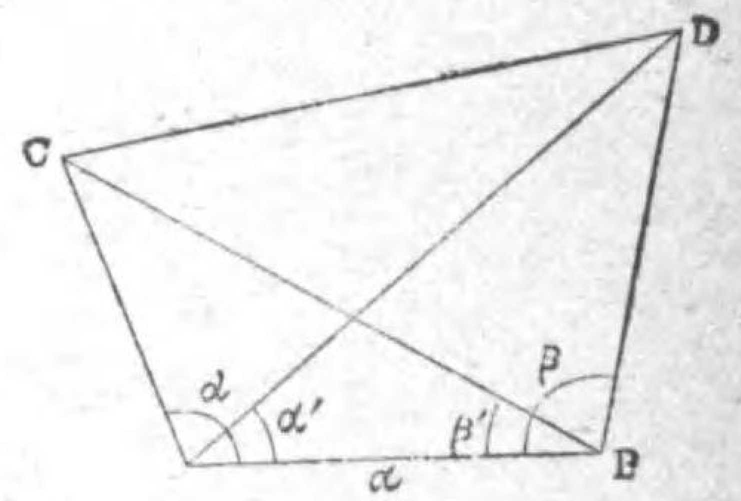
$$\frac{AD}{AB}=\frac{\sin\beta}{\sin D}=\frac{\sin\beta}{\sin(\alpha'+\beta)}$$

故ニ $$AD=\frac{d\sin\beta}{\sin(\alpha'+\beta)}$$

然ルニ $$CD=AD\tan\alpha$$

故ニ $$CD=\frac{d\tan\alpha\sin\beta}{\sin(\alpha'+\beta)}$$

82. 例題 2. 水平面上ニ於ケル二ツノ達シ得ベカラザル物體ノ間ノ距離ヲ求ム．



C 及ビ D ヲ二ツノ達シ得ベカラザル物體トシ AB ヲ適宜ニ測リタル距離 d トシ，圖ニ示シタル如ク角 α, β, α' 及ビ β' ヲ測リタリトセヨ．

然ルトキハ三角形 ABC ヨリ

$$\frac{BC}{AB}=\frac{\sin\alpha}{\sin C}=\frac{\sin\alpha}{\sin(\alpha+\beta')}$$

故ニ $$BC=\frac{d\sin\alpha}{\sin(\alpha+\beta')}\cdots\cdots\cdots\cdots(1)$$

又三角形 ABD ヨリ

$$\frac{BD}{AB}=\frac{\sin\alpha'}{\sin D}=\frac{\sin\alpha'}{\sin(\alpha'+\beta)}$$

故ニ $$BD=\frac{d\sin\alpha'}{\sin(\alpha'+\beta)}\cdots\cdots\cdots\cdots(2)$$

三角形 BCD ニ於テ (1) 及ビ (2) ヨリ夫々 BC 及ビ BD ヲ知リ而シテ其夾角 CBD ハ $\beta-\beta'$ ニシテ已知ナルヲ以テ[80]ニ依リ CD ヲ求ムルコトヲ得.

第十二問題集

[初メノ三問題ハ表ヲ使用セズシテ解クベシ]

1. $a:b:c=2:\sqrt{6}:\sqrt{3}+1$ ナレバ三角各,何度ナリヤ.

2. $a+b=30$ 米　$A=15^\circ$ 及ビ $C=90^\circ$ ナルトキ c ヲ求ム

3. $a-b=23$ 米　$A=75^\circ$ 及ビ $C=90^\circ$ ナルトキ c ヲ求ム.

4. $B=78^\circ 14'$, $C=71^\circ 24'$ 及ビ $a=2183$ 尺ナルトキ最大邊ヲ見出セ

5. 二邊ノ長サ 80 呎及ビ 100 呎,夾角 60° ナルトキ他ノ二角ヲ求ム.

6. $b=14$, $c=11$ 及ビ $A=60^\circ$ ナルトキ B ヲ求ム

7. $a=9$, $b=7$ 及ビ $A=64^\circ 12'$ ナルトキ B 及ビ C ヲ求ム.

8. $a=7$, $b=8$ 及ビ $A=27^\circ 47' 45''$ ナルトキ B,C 及ビ c ヲ求ム.

9. $a=7$, $b=8$ 及ビ $c=9$ ナルトキ A, B 及ビ C ヲ求ム.

10. $a=15{\cdot}47$, $b=17{\cdot}39$ 及ビ $c=22{\cdot}88$ ナルトキ A, B 及ビ C ヲ求ム.

11. 河岸ニ沿ウテ AB ナル距離ヲ測リ百間ヲ得タリ而シテ其對岸ニ C ナル一樹木アリ今 $\angle CAB$ 及ビ $\angle CBA$ ヲ測リテ夫々 $65^\circ 10'$ 及ビ $73^\circ 24'$ ヲ得タリ. 距離 AC ヲ求ム.

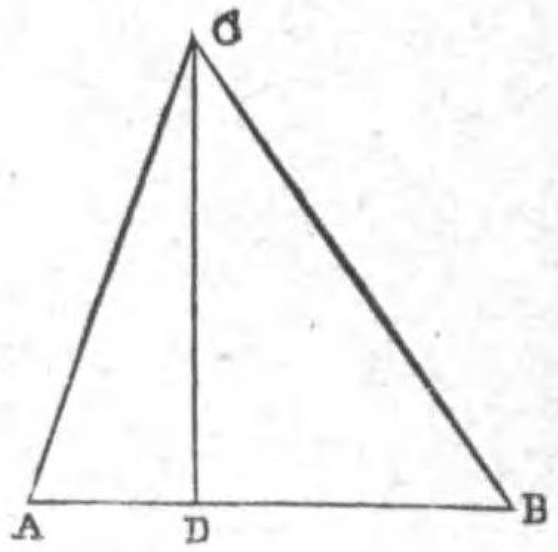
12. 高サ h 尺ノ絶壁ノ頂上ヨリ同方位ニ在ル二船ノ俯角ヲ測リテ δ 及ビ δ' ヲ得タリ. 二船ノ間ノ距離ハ $h(\cot\delta'-\cot\delta)$ ナルコトヲ證セヨ

13. 絶壁ノ頂上ヨリ同力位ニ在ル二個ノ浮標ノ俯角ヲ測リテ 38° 及ビ 15° ヲ得タリ,而シテ此浮標ノ距離ハ ·5 町ナリトイフ. 絶壁ノ高サヲ問フ.

第　十　編
三角形の性質

83. 三角形の面積を表はす公式

ABC ヲ三角形トシ CD ヲ C ヨリ AB ニ引キタル垂線トセヨ.



然レバ

$$\triangle ABC\ ノ面積=\frac{1}{2}AB.CD$$

而シテ $CD=AC\sin A$

故ニ
$$\left.\begin{aligned}\triangle ABC\ ノ面積&=\frac{1}{2}bc\sin A\\ &=\frac{1}{2}ca\sin B\\ &=\frac{1}{2}ab\sin C\end{aligned}\right\}\ldots\ldots\ldots(39)$$
同様ニ

即ち三角形の面積は二邊と其夾角の正弦との連乘積の半分なり.

又三角形ノ面積ヲ下ニ記スル如ク其三邊ニテ表ハスコトヲ得.

$$\sin A=2\sin\frac{A}{2}\cos\frac{A}{2}$$

$$=2\sqrt{\frac{(s-b)(s-c)}{bc}}\times\sqrt{\frac{s(s-a)}{bc}}$$

$$=\frac{2}{bc}\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$$

sinA ノ此値ヲ(39)ノ最初ノ式中ノ sin A ニ置キ換フレバ

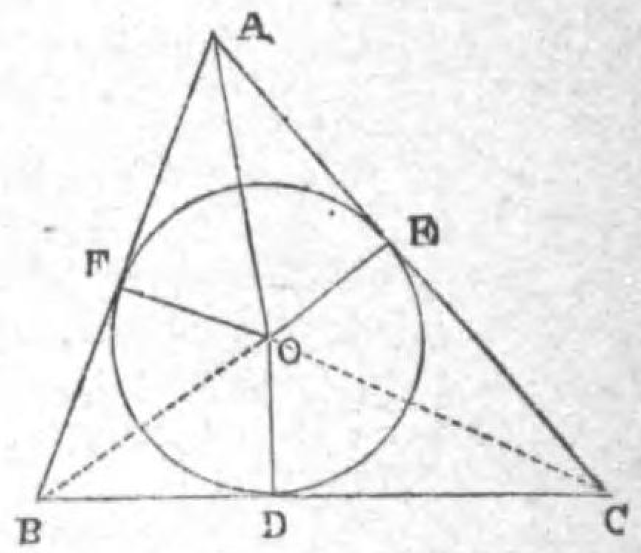
$$\triangle ABC\ ノ面積=\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$$

通例三角形ノ面積ヲ表ハスニ S ヲ以テス. 即チ

$$S=\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}\ldots\ldots\ldots\ldots(40)$$

84. 三角形の内接圓の半徑を求む

O ヲ三角形 ABC ニ内接スル圓ノ中心トシ D, E 及ビ F ヲ其切點トシ OD, OE 及ビ OF ヲ引ケ, r ヲ其半徑トセヨ.



然ルトキハ

$$\triangle ABC=\triangle BOC+\triangle COA+\triangle AOB$$

$$S=\frac{ar}{2}+\frac{br}{2}+\frac{cr}{2}$$

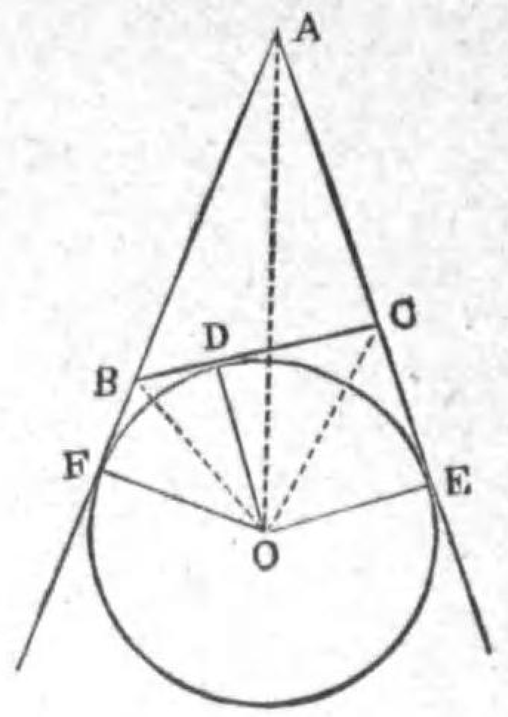
$$=\frac{r}{2}(a+b+c)$$

$$=rs$$

故ニ
$$r=\frac{S}{s}=\sqrt{\frac{(s-a)(s-b)(s-c)}{s}}\ldots\ldots(41)$$

85. 三角形の傍接圓の半徑を求む.

Oヲ三角形ABCノ角A內ニ在ル傍接圓ノ中心トシD,E,及ビFヲ其切點トシ OD, OE, 及ビ OF ヲ引ケ, r_1 ヲ其半徑トセヨ.



然ルトキハ

$$\triangle OAB+\triangle OAC=\triangle ABC+\triangle OBC$$

即チ $$\frac{cr_1}{2}+\frac{br_1}{2}=S+\frac{ar_1}{2}$$

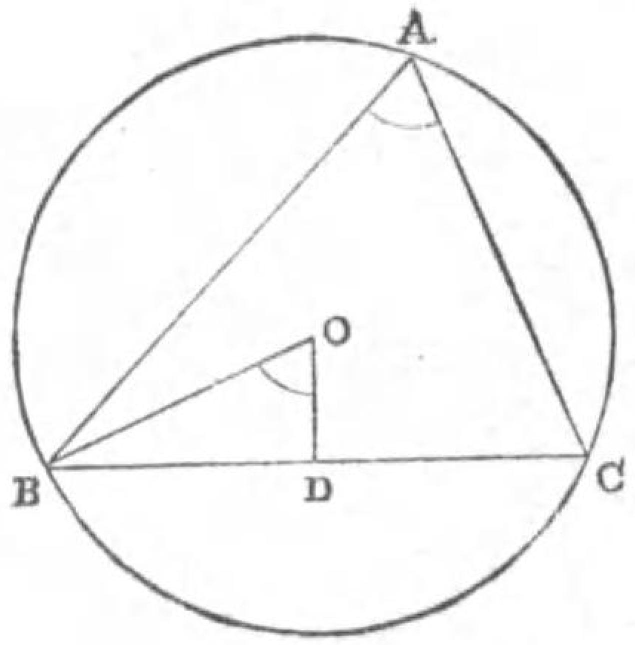
故ニ $$S=\frac{b+c-a}{2}r_1=(s-a)r_1$$

即チ $$r_1=\frac{S}{s-a}\text{..........................}(42)$$

同樣ニ r_2, r_3 ヲ夫々角 ABC, 角 ACB 內ニ在ル傍接圓ノ半徑トスレバ

$$r_2=\frac{S}{s-b}\quad r_3=\frac{S}{s-c}$$

86. 三角形の外接圓の半徑を求む.



Oヲ三角形 ABC ノ外接圓ノ中心トシ OD ヲ O ヨリ一邊 BC ニ引キタル垂線トシ R ヲ半徑 OB ノ長サトセヨ.

然レバ $\angle BOD=\angle BAC$

$$BD=OB\sin BOD$$

即チ $$\frac{a}{2}=R\sin A$$

故ニ $$R=\frac{a}{2\sin A}\text{..........................}(43)$$

又前節ニ依リテ $\sin A=\frac{2S}{bc}$

故ニ $$R=\frac{abc}{4S}\text{..........................}(44)$$

公式(43)及ビ[70]ニ依リテ

$$\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}=\frac{c}{\sin C}=2R\text{...........}(45)$$

第十三問題集

1. 正三角形(各邊ヲ a トス)ニ內接スル圓ノ半徑ヲ求ム.

2. 同上ノ三角形ノ傍接圓及ビ外接圓ノ半徑ヲ求ム.

3. 二角ハ夫々75°及ビ45°ニシテ其間ノ一邊24尺ナル三角形ノ面積ヲ求ム.

4. $a=18$ 尺, $b=24$ 尺及ビ $c=30$ 尺ナル三角形ノ面積ヲ求ム.

5. 前問題ニ於ケル三角形ノ內接圓,三ツノ傍接圓及ビ外接圓ノ半徑ヲ求ム.

6. $a=942$, $b=812$, $c=1270$ ナル三角形ノ面積ヲ求ム.

7. [84]ノ圖ニ於テ $r=(s-a)\tan\frac{A}{2}$ ヲ證明セヨ

8. [85]ノ圖ニ於テ $r_1=s\tan\frac{A}{2}$ ヲ證明セヨ.

9. 三角形ノ二邊ハ夫々3尺及ビ12尺ニシテ其夾角ハ30^0ナリ. 之ト等積ナル直角二等邊三角形ノ斜邊ヲ求ム.

10. $r_1\cot\frac{A}{2}=r_2\cot\frac{B}{2}=r_3\cot\frac{C}{2}$

$=r\left(\cot\frac{A}{2}+\cot\frac{B}{2}+\cot\frac{C}{2}\right)$ナルコトヲ證明セヨ.

問題の答

第一問題集答 (頁 3)

1. $45^0, 30^0, 135^0, 18^0, 15^0$. **2.** $22^0\,30', 7^0\,30', 11^0\,15'$.

3. $56^0\,15'$ **4.** $63^0{\cdot}28125$ **5.** ·0675 直角

6. $\cdot 3961\dot{5}74\dot{0}$

7. $108^0, \frac{6}{5}$直角; $120^0, \frac{4}{3}$直角; $135^0, \frac{3}{2}$直角

第二問題集答 (頁 12)

1. $\sin A=\sqrt{1-\cos^2 A}$, $\tan A=\frac{\sqrt{1\ \cos^2 A}}{\cos A}$, $\cot A=\frac{\cos A}{\sqrt{1-\cos^2 A}}$

$\sec A=\frac{1}{\cos A}$, $\operatorname{cosec} A=\frac{1}{\sqrt{1-\cos^2 A}}$

2. $\tan A=\frac{1}{\cot A}$, $\operatorname{cosec} A=\sqrt{1+\cot^2 A}$, $\sin A=\frac{1}{\sqrt{1+\cot^2 A}}$

$\sec A=\frac{\sqrt{1+\cot^2 A}}{\cot A}$, $\cos A=\frac{\cot A}{\sqrt{1+\cot^2 A}}$

3. $\cos A=\frac{1}{\sec A}$, $\tan A=\sqrt{\sec^2 A-1}$, $\cot A=\frac{1}{\sqrt{\sec^2 A-1}}$

$\sin A=\frac{\sqrt{\sec^2 A-1}}{\sec A}$, $\operatorname{cosec} A=\frac{\sec A}{\sqrt{\sec^2 A-1}}$

4. $\sin A=\frac{1}{\operatorname{cosec} A}$, $\cot A=\sqrt{\operatorname{cosec}^2 A-1}$,

$\tan A=\frac{1}{\sqrt{\operatorname{cosec}^2 A-1}}$ $\cos A=\frac{\sqrt{\operatorname{cosec}^2 A-1}}{\operatorname{cosec} A}$

$\sec A=\frac{\operatorname{cosec} A}{\sqrt{\operatorname{cosec}^2 A-1}}$

5. $\sin A=\frac{1}{\sqrt{2}}, \ldots$ **6.** $\cos A=\frac{9}{41}, \ldots$ **7.** $\sin A=\frac{1}{5}, \ldots$

8. $\cos A=\frac{m^2-1}{m^2+1}, \ldots\ldots$ **9.** $\sin A=\frac{m^2-n^2}{m^2+n^2}$

10. $\cos A=\frac{11}{61}$, $\sin A=\frac{60}{61}, \ldots\ldots$ **11.** $\sin A=\frac{24}{25}, \ldots\ldots$

12. $\sin A=\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$, $\tan A=2-\sqrt{3}$,

第三問題集答 (頁 18)

4. $\sin 75^\circ=\frac{\sqrt{3}+1}{2\sqrt{2}}$, $\cos 75^\circ=\frac{\sqrt{3}-1}{2\sqrt{2}}$, $\tan 75^\circ=2+\sqrt{3}$

6. $\sin 67^\circ 30'=\frac{\sqrt{(2+\sqrt{2})}}{2}$, $\cos 67^\circ 30'=\frac{\sqrt{(2-\sqrt{2})}}{2}$

7. 60° **8.** 45° 或ハ 60° **9.** 15° 或ハ 75°

10. 30° 或ハ 45° **11.** $A=45^\circ$, $B=15^\circ$.

12. $A=10^\circ$, $B=5^\circ$. **13.** $A=45^\circ$, $B=30^\circ$.

第四問題集答 (頁 23)

1. ·93074 **2.** ·92334 **3.** $21^\circ\ 33'\cdot 9$

4. 2·52575 **5.** $41^\circ\ 48'\ 37''$ **6.** $70^\circ\ 31'\ 43''\cdot 6$

第五問題集答 (頁 26)

1. 約260尺 **2.** 約124·3尺 **3.** 約20秒

4. 約252米 **5.** 約20尺

6. 樹木ノ高サ＝64·6尺餘, 河ノ幅＝17·3尺餘

7. 72尺

第六問題集答 (頁 43)

1. 第一象限ニ於テハ0ヨリ1マデ增シ
第二象限ニ於テハ1ヨリ2マデ增シ
第三象限ニ於テハ2ヨリ1マデ減ジ
第四象限ニ於テハ1ヨリ0マデ減ズ

2. 第一象限ニ於テハ0ヨリ1マデ增シ
第二象限ニ於テハ1ヨリ0マデ減ジ
第三及ビ第四象限ニ於テハ夫々第一及ビ第二象限ニ於テノ如ク增減ス

3. 第一象限ニ於テハ1ヨリ$\sqrt{2}$マデ增シテ夫ヨリ1マデ減ジ,第二象限ニ於テハ1ヨリ0マデ減ジ夫ヨリ尙ホ-1マデ減ズ
第三象限ニ於テハ-1ヨリ$-\sqrt{2}$マデ減ジ夫ヨリ-1マデ增シ第四象限ニ於テハ-1ヨリ0マデ增シ夫ヨリ尙ホ增シテ1ニ至ル

第七問題集答 (頁 52)

1. $-\sqrt{3}$ **2.** $-\sqrt{2}$ **3.** $-\sqrt{3}$ **4.** $\frac{2}{\sqrt{3}}$

5. $\frac{1}{\sqrt{2}}$ **8.** $\sin 690^\circ=-\frac{1}{2}$, $\cos 690^\circ=-\frac{\sqrt{3}}{2}$

$\sin 585^\circ=-\frac{1}{\sqrt{2}}$, $\cos 585^\circ=-\frac{1}{\sqrt{2}}$

第八問題集答 (頁 57)

4. $\frac{204}{325}$ **5.** $\frac{812}{1037}$ **6.** $\frac{6}{7}$

7. 135°

第九問題集答 (頁 63)

3. $\cos 2A=\frac{23}{25}$, $\sin 2A=\frac{4\sqrt{6}}{25}$

6. $2\sin 6^\circ \sin 5^\circ$ **7.** $\cos 5A+\cos 3A$

第十問題集答 (頁 80)

1. 9·97277 **2.** 9·97240 **3.** ·43222

4. $20^\circ 8' 24''$ **5.** $69^\circ 47' 23''\cdot 1$ **6.** $53^\circ 7' 48''$

7. $34^\circ 19' 31''\cdot 8$

第十一問題集答 (頁 87)

1. $30^\circ, 150^\circ$. **3.** $90^\circ, 30^\circ$. **4.** 120°

5. $45, 135^\circ$. **6.** 120°

第十二問題集答 (頁 98)

1. $45^\circ, 60^\circ, 75^\circ$. **2.** $10\sqrt{6}$米 **3.** $23\sqrt{2}$米

4. 4227·5尺 **5.** $70^\circ 53' 36''$, $49^\circ 6' 24''$

6. $71^\circ 44' 29''$ **7.** $69^\circ 10' 10''$, $46^\circ 37' 50''$

8. $\begin{cases} B=32^\circ 12' 15'' \\ C=120^\circ \\ c=13 \end{cases}$ $\begin{cases} B=147^\circ 47' 45'' \\ C=4^\circ 24' 30'' \\ c=1\cdot 154 \end{cases}$

9. $A=48^\circ 11' 23''$, $B=58^\circ 24' 43''$, $C=73^\circ 23' 54''$

10. $A=42^\circ 30' 44''$, $B=49^\circ 25' 49''$, $C=88^\circ 3' 27''$.

11. 144·8間餘 **13.** ·2039町

第十三問題集答 (頁 103)

1. $\frac{a}{2\sqrt{3}}$ **2.** $\frac{a\sqrt{3}}{2}$, $\frac{a}{\sqrt{3}}$

3. $48(3+\sqrt{3})$平方尺 **4.** 216平方尺

5. 6; 12, 18, 36; 15. **6.** 382091 **9.** 6尺

——→(をはり)←——

中學校數學科用
明治三十七年五月二日
文部省檢定濟

明治三十七年二月二十日印刷
明治三十七年二月廿三日發行
明治三十七年四月十九日訂正再版印刷
明治三十七年四月廿二日訂正再版發行
明治三十八年二月二日三版印刷
明治三十八年二月五日三版發行

著作者　高橋豐夫

發行兼印刷者　株式會社中外圖書局
東京市日本橋區城邊河岸五[redacted]地號

專務取締役
代表者　高瀨眞卿

賣捌所　各府縣特約賣捌所

定價

平面三角法教科書全一册奥付

金五拾錢

終