

## Maß- und Integrationstheorie

### Vorlesung 21

Zu einem  $\sigma$ -endlichen Maßraum  $X$  und einer reellen Zahl  $p \geq 1$  sind die Lebesgueräume  $L^p(X)$  nach dem Satz von Fischer-Riesz vollständige normierte Vektorräume. Wir haben schon erwähnt, dass dabei  $L^2(X)$  eine besondere Rolle spielt. Dies beruht darauf, dass man zu integrierbaren Funktionen

$$f, g: X \longrightarrow \mathbb{K}$$

das Integral  $\int_X f\bar{g}d\mu$  betrachten kann, das ein Skalarprodukt definiert, dessen zugehörige Norm gerade die  $L^2$ -Norm ist (siehe auch Beispiel 32.9 (Analysis (Osnabrück 2021-2023))). Diese zusätzliche Struktur erlaubt es, über Winkel, Orthogonalität, orthogonale Projektion etc. auch im Kontext von Funktionen zu sprechen. Der theoretische Rahmen wird durch das Konzept eines Hilbertraumes abgesteckt.

### Hilberträume

DEFINITION 21.1. Ein  $\mathbb{K}$ -Vektorraum mit Skalarprodukt, der mit der zugehörigen Metrik ein vollständiger metrischer Raum ist, heißt *Hilbertraum*.

Endlichdimensionale  $\mathbb{K}$ -Vektorräume mit einem Skalarprodukt sind vollständig nach Aufgabe 36.9 (Analysis (Osnabrück 2021-2023)), also Hilberträume. Der Begriff ist insbesondere für unendlichdimensionale Vektorräume relevant.

LEMMA 21.2. *Ein Untervektorraum  $U \subseteq V$  eines  $\mathbb{K}$ -Hilbertraumes ist genau dann ein Hilbertraum, wenn er abgeschlossen in  $V$  ist.*

*Beweis.* Siehe Aufgabe 21.9. □

Wir halten die folgende Aussage über den Raum der quadratintegrierbaren Funktionen fest.

LEMMA 21.3. *Es sei  $(X, \mathcal{A}, \mu)$  ein  $\sigma$ -endlicher Maßraum. Dann ist der Lebesgueraum  $L^2(X)$  der quadratintegrierbaren Funktionen, versehen mit dem Skalarprodukt*

$$\langle f, g \rangle := \int_X f\bar{g}d\mu,$$

*ein Hilbertraum.*

*Beweis.* Wir argumentieren zuerst auf der Ebene von  $\mathcal{L}^2(X)$ . Zu quadratintegrierbaren Funktionen  $f, g$  zeigt die Höldersche Abschätzung

$$\int_X f \bar{g} d\mu \leq \|f\|_2 \cdot \|g\|_2,$$

dass das angegebene Integral endlich ist. Mit Lemma 16.6 folgt, dass sein Wert unabhängig von den gewählten Repräsentanten sind und eine Funktion auf  $L^2(X) \times L^2(X)$  definiert. Eigenschaften des Integrals wie Satz 10.6 sichern, dass ein Skalarprodukt vorliegt. Die Vollständigkeit ergibt sich aus dem Satz von Fischer-Riesz.  $\square$

BEISPIEL 21.4. Wir betrachten die natürlichen Zahlen  $\mathbb{N}$  als Maßraum mit dem Zählmaß, siehe Beispiel 16.2 und Beispiel 16.11. Der zugehörige Raum der quadratsummierbaren Folgen besitzt das Skalarprodukt

$$\langle f, g \rangle = \sum_{n \in \mathbb{N}} f_n \bar{g}_n,$$

die Norm eines Elementes ist

$$\|f\| = \sqrt{\sum_{n \in \mathbb{N}} |f_n|^2}.$$

Dieser Hilbertraum wird mit  $l_2$  oder mit  $L^2(\mathbb{N})$  bezeichnet, man spricht vom *Hilbertschen Folgenraum*.

## Minimaler Abstand

DEFINITION 21.5. Eine Teilmenge  $T \subseteq V$  in einem reellen Vektorraum  $V$  heißt *konvex*, wenn mit je zwei Punkten  $P, Q \in T$  auch jeder Punkt der Verbindungsstrecke, also jeder Punkt der Form

$$rP + (1 - r)Q \text{ mit } r \in [0, 1],$$

ebenfalls zu  $T$  gehört.

LEMMA 21.6. *Es sei  $V$  ein  $\mathbb{K}$ -Vektorraum mit Skalarprodukt und sei  $T \subseteq V$  eine nichtleere konvexe vollständige Teilmenge. Dann enthält  $T$  einen eindeutigen Punkt  $P \in T$ , indem die Norm  $\|P\|$  (unter allen Punkten aus  $T$ ) das Minimum annimmt.*

*Beweis.* Es sei  $\delta$  das Infimum von

$$\{\|Q\| \mid Q \in T\} \subseteq \mathbb{R}_{\geq 0}.$$

Mit Hilfe von Aufgabe 32.25 (Analysis (Osnabrück 2021-2023)) erhält man für Punkte  $P, Q \in T$  die Identität

$$\|P - Q\|^2 = 2\|P\|^2 + 2\|Q\|^2 - 4\left\|\frac{P + Q}{2}\right\|^2.$$

Wegen der Konvexität gilt  $\frac{P+Q}{2} \in T$  und daher ist

$$\|P - Q\|^2 \leq 2\|P\|^2 + 2\|Q\|^2 - 4\delta^2.$$

Es seien nun  $P, Q$  Punkte, in denen das Infimum angenommen wird. Dann folgt aus

$$\|P\| = \|Q\| = \delta$$

sofort  $\|P - Q\| = 0$  und damit  $P = Q$ , was die Eindeutigkeit bedeutet.

Da das Infimum einer nichtleeren Teilmenge von  $\mathbb{R}$  durch eine Folge beliebig nah angenähert werden kann, gibt es eine Folge  $Q_n \in T$  derart, dass  $\|Q_n\|$  gegen  $\delta$  konvergiert. Die obige Abschätzung ergibt für Folgenglieder  $Q_n, Q_m$  die Abschätzung

$$\|Q_n - Q_m\|^2 \leq 2\|Q_n\|^2 + 2\|Q_m\|^2 - 4\delta^2.$$

Da  $\|Q_n\|$  gegen  $\delta$  konvergiert, folgt daraus, dass die Differenz links beliebig klein wird. Dies bedeutet, dass  $Q_n$  eine Cauchy-Folge ist. Wegen der Vollständigkeit von  $T$  konvergiert die Folge gegen ein  $P \in T$ .  $\square$

**KOROLLAR 21.7.** *Es sei  $V$  ein  $\mathbb{K}$ -Vektorraum mit Skalarprodukt und sei  $U \subseteq V$  ein vollständiger Untervektorraum. Dann gibt es zu jedem Punkt  $Q \in V$  einen eindeutigen Punkt  $P \in U$ , für den der Abstand von  $Q$  zu Punkten aus  $U$  minimal wird.*

*Beweis.* Wir verschieben die Situation um  $-Q$  und haben dann einen vollständigen (da die Verschiebung stetig ist) affinen Unterraum  $U - Q$  und betrachten den Abstand zum Nullpunkt. Der Untervektorraum ist konvex und dies überträgt sich auf den verschobenen Untervektorraum. Daher folgt die Aussage aus Lemma 21.6.  $\square$

**KOROLLAR 21.8.** *Es sei  $V$  ein  $\mathbb{K}$ -Vektorraum mit Skalarprodukt und sei  $U \subseteq V$  ein vollständiger Untervektorraum. Dann gibt es zu jedem  $v \in V$  eine eindeutige Darstellung*

$$v = u + w$$

mit  $u \in U$  und  $w \in U^\perp$ .

*Beweis.* Aus zwei solchen Darstellungen

$$v = u + w = u' + w'$$

mit den geforderten Eigenschaften folgt

$$0 = u - u' + w - w' = \tilde{u} + \tilde{w},$$

wobei die beiden Summanden  $\tilde{u}$  und  $\tilde{w} = -\tilde{u}$  orthogonal zueinander sind, woraus folgt, dass sie 0 sind.

Zum Existenznachweis sei  $u \in U$  der gemäß Korollar 21.7 eindeutig bestimmte Punkt, in dem der Abstand von  $v$  zu  $U$  minimal wird. Sei

$$w = v - u.$$

Es ist

$$\langle v - u, u' \rangle = 0$$

für jedes  $u' \in U$  zu zeigen. Wir können  $\mathbb{K} = \mathbb{R}$  annehmen. Nehmen wir an, dass es ein  $u' \in U$  mit

$$\langle v - u, u' \rangle = c \neq 0$$

gibt, wobei wir  $c$ , indem wir eventuell  $u'$  durch  $-u'$  ersetzen, als negativ annehmen können. Es ist dann

$$2\langle v - u, \lambda u' \rangle + \langle \lambda u', \lambda u' \rangle = 2c\lambda + \lambda^2 \langle u', u' \rangle = \lambda(2c + \lambda \langle u', u' \rangle),$$

was für  $\lambda$  positiv und hinreichend klein negativ ist. Dann ist aber

$$\begin{aligned} \langle v - u + \lambda u', v - u + \lambda u' \rangle &= \langle v - u, v - u \rangle + 2\langle v - u, \lambda u' \rangle + \langle \lambda u', \lambda u' \rangle \\ &< \langle v - u, v - u \rangle \end{aligned}$$

im Widerspruch dazu, dass der Abstand (und damit das Abstandskquadrat) von  $v$  zu  $U$  in  $u$  minimal wird.  $\square$

**DEFINITION 21.9.** Es sei  $V$  ein  $\mathbb{K}$ -Vektorraum mit Skalarprodukt und sei  $U \subseteq V$  ein vollständiger Untervektorraum. Die Abbildung  $p_U: V \rightarrow U$ , die jedem Element  $v \in V$  das  $u \in U$  aus der nach Korollar 21.8 eindeutigen Zerlegung  $v = u + w$  mit  $u \in U$  und  $w \in U^\perp$  zuordnet, heißt *orthogonale Projektion* auf  $U$ .

Wir erwähnen die folgenden Spezialfälle für abgeschlossene Teilmengen in einem Hilbertraum.

**KOROLLAR 21.10.** *Es sei  $V$  ein  $\mathbb{K}$ -Hilbertraum und sei  $T \subseteq V$  eine nichtleere konvexe abgeschlossene Teilmenge. Dann enthält  $T$  einen eindeutigen Punkt  $P \in T$ , in dem die Norm  $\|P\|$  (unter allen Punkten aus  $T$ ) das Minimum annimmt.*

*Beweis.* Dies ist ein Spezialfall von Lemma 21.6.  $\square$

**KOROLLAR 21.11.** *Es sei  $V$  ein  $\mathbb{K}$ -Hilbertraum und sei  $U \subseteq V$  ein abgeschlossener Untervektorraum. Dann gibt es zu jedem Punkt  $Q \in V$  einen eindeutigen Punkt  $P \in U$ , für den der Abstand von  $Q$  zu Punkten aus  $U$  minimal wird.*

*Beweis.* Dies ist ein Spezialfall von Korollar 21.7.  $\square$

**KOROLLAR 21.12.** *Es sei  $V$  ein  $\mathbb{K}$ -Hilbertraum und sei  $U \subseteq V$  ein abgeschlossener Untervektorraum. Dann gibt es zu jedem  $v \in V$  eine eindeutige Darstellung*

$$v = u + w$$

mit  $u \in U$  und  $w \in U^\perp$ .

*Beweis.* Dies ist ein Spezialfall von Korollar 21.8.  $\square$

Insbesondere gibt es zu einem abgeschlossener Untervektorraum  $U \subseteq V$  in einem Hilbertraum die orthogonale Projektion  $p_U: V \rightarrow U$ .

### Topologische Eigenschaften

LEMMA 21.13. *Es sei  $V$  ein  $\mathbb{K}$ -Hilbertraum und sei  $U \subseteq V$  ein abgeschlossener Untervektorraum mit dem orthogonalen Komplement  $U^\perp$ . Dann gelten folgenden Aussagen.*

(1)  $U^\perp$  ist ebenfalls abgeschlossen.

(2) Es gilt

$$v = p_U(v) + p_{U^\perp}(v).$$

(3)  $p_U$  ist linear und stetig.

*Beweis.* (1) Siehe Aufgabe 21.10.

(2) Klar.

(3) Eine mehrfache Anwendung von (2) liefert

$$\begin{aligned} & p_U(a_1v_1 + a_2v_2) + p_{U^\perp}(a_1v_1 + a_2v_2) \\ &= a_1v_1 + a_2v_2 \\ &= a_1p_U(v_1) + a_1p_{U^\perp}(v_1) + a_2p_U(v_2) + a_2p_{U^\perp}(v_2) \\ &= a_1p_U(v_1) + a_2p_U(v_2) + a_1p_{U^\perp}(v_1) + a_2p_{U^\perp}(v_2). \end{aligned}$$

Die Linearität folgt durch Vergleich der Summanden in  $U$  und in  $U^\perp$ . Wegen

$$\begin{aligned} \|v\|^2 &= \langle v, v \rangle \\ &= \langle p_U(v) + p_{U^\perp}(v), p_U(v) + p_{U^\perp}(v) \rangle \\ &= \langle p_U(v), p_U(v) \rangle + \langle p_{U^\perp}(v), p_{U^\perp}(v) \rangle \\ &= \|p_U(v)\|^2 + \|p_{U^\perp}(v)\|^2 \end{aligned}$$

ist

$$\|p_U(v)\| \leq \|v\|,$$

woraus die Stetigkeit mit Satz 15.12 folgt. □

Die folgende Aussage besagt, dass eine stetige Linearform auf einem Hilbertraum einen Gradienten besitzt. Im endlichdimensionalen Fall, in dem die Stetigkeit automatisch erfüllt ist, folgt dies auch aus Lemma 47.5 (Analysis (Osnabrück 2021-2023)) (3). Für eine andere Formulierung dieses Sachverhaltes, den man den Darstellungssatz von Riesz nennt, siehe Aufgabe 21.12.

LEMMA 21.14. *Es sei  $V$  ein  $\mathbb{K}$ -Hilbertraum und sei*

$$\varphi: V \longrightarrow \mathbb{K}$$

*eine stetige Linearform. Dann gibt es einen eindeutig bestimmten Vektor  $x \in V$  mit*

$$\varphi(v) = \langle v, x \rangle$$

für alle  $v \in V$ .

*Beweis.* Bei der Nullabbildung ist  $x = 0$  zu nehmen, sei also  $\varphi$  nicht die Nullabbildung. Es sei  $z \in V$  mit  $\varphi(z) \neq 0$  und sei  $U = \text{kern } \varphi$ . Durch Multiplikation mit einem Skalar können wir davon ausgehen, dass  $\varphi(z)$  eine positive reelle Zahl ist. Wegen der Stetigkeit und der Linearität ist  $U$  ein abgeschlossener Untervektorraum von  $V$ . Das orthogonale Komplement  $U^\perp$  ist eindimensional: Zu  $w, w' \in U^\perp$  gibt es  $a \in \mathbb{K}$  mit  $\varphi(w') = a\varphi(w)$ , daher ist  $w' - aw \in U$  und wegen der Orthogonalität ist  $w' - aw = 0$ . Wir schreiben

$$z = p_U(z) + y$$

mit  $p_U(z) \in U$  und  $y \in U^\perp$  im Sinne von Korollar 21.9. Es ist  $\varphi(z) = \varphi(y)$ . Wir setzen

$$x := \frac{\varphi(y)}{\|y\|^2}y,$$

dies sichert

$$\begin{aligned} \langle x, x \rangle &= \left\langle \frac{\varphi(y)}{\|y\|^2}y, \frac{\varphi(y)}{\|y\|^2}y \right\rangle \\ &= \frac{\varphi(y)^2}{\|y\|^4} \langle y, y \rangle \\ &= \frac{\varphi(y)}{\|y\|^2} \varphi(y) \\ &= \varphi(x). \end{aligned}$$

Für  $v \in V$  mit der kanonischen Zerlegung

$$v = u + w$$

ist dann

$$\begin{aligned} \langle v, x \rangle &= \langle u + w, x \rangle \\ &= \langle w, x \rangle \\ &= \langle ax, x \rangle \\ &= a \langle x, x \rangle \\ &= a\varphi(x) \\ &= \varphi(w) \\ &= \varphi(u + w) \\ &= \varphi(v). \end{aligned}$$

□

**KOROLLAR 21.15.** *Es sei  $(X, \mathcal{A}, \mu)$  ein  $\sigma$ -endlicher Maßraum und  $L^2(X)$  der zugehörige Lebesgueraum der quadratintegrierbaren Funktionen. Es sei*

$$\varphi: L^2(X) \longrightarrow \mathbb{K}$$

eine stetige Linearform. Dann gibt es eine quadratintegrierbare Funktion  $g \in L^2(X)$  mit

$$\varphi(f) = \int_X f \bar{g} d\mu.$$

*Beweis.* Dies folgt aus Lemma 21.3 und aus Lemma 21.14.  $\square$

LEMMA 21.16. *Es sei  $V$  ein  $\mathbb{K}$ -Hilbertraum und  $T \subseteq V$  eine Teilmenge. Dann erzeugt  $T$  genau dann einen dichten Untervektorraum in  $V$ , wenn die Eigenschaft*

$$\langle v, w \rangle = 0$$

für alle  $w \in T$  nur für  $v = 0$  gilt.

*Beweis.* Es erzeuge zuerst  $T$  einen dichten Untervektorraum  $U$  und sei  $v \in V$  gegeben mit

$$\langle v, w \rangle = 0$$

für alle  $w \in T$ . Diese Eigenschaft überträgt sich auf alle  $w \in U$ . Wegen der Dichtheit von  $U$  gibt es eine Folge  $w_n \in U$ , die gegen  $v$  konvergiert. Dann konvergiert wegen der Stetigkeit des Skalarproduktes die Folge  $\langle v, w_n \rangle = 0$  gegen  $\langle v, v \rangle = 0$ . also ist  $v = 0$ .

Es erzeuge nun  $T$  einen Untervektorraum  $U$ , der nicht dicht sei, es sei

$$W = \overline{U}$$

und sei  $z \in V \setminus W$ . Es sei  $z = y + v$  die Zerlegung im Sinne von Korollar 21.9 mit  $y \in W$  und  $v \in W^\perp$ . Dann ist

$$v \neq 0,$$

dieser Vektor steht aber senkrecht auf allen Vektoren aus  $W$ .  $\square$



## Abbildungsverzeichnis

- Erläuterung: Die in diesem Text verwendeten Bilder stammen aus Commons (also von <http://commons.wikimedia.org>) und haben eine Lizenz, die die Verwendung hier erlaubt. Die Bilder werden mit ihren Dateinamen auf Commons angeführt zusammen mit ihrem Autor bzw. Hochlader und der Lizenz. 9
- Lizenzklärung: Diese Seite wurde von Holger Brenner alias Bocardodarapti auf der deutschsprachigen Wikiversity erstellt und unter die Lizenz CC-by-sa 3.0 gestellt. 9