Prof. Dr. H. Brenner **Osnabrück WS 2020/2021**

Mathematik für Anwender I

Vorlesung 28

> Wirf den Helden in deiner
> Seele nicht weg!
>
> Friedrich Nietzsche

Das charakteristische Polynom

Wir möchten zu einem Endomorphismus $\varphi\colon V \to V$ die Eigenwerte und dann auch die Eigenräume bestimmen. Dazu ist das charakteristische Polynom entscheidend.

Definition 28.1. Zu einer $n \times n$-Matrix M mit Einträgen in einem Körper K heißt das Polynom

$$\chi_M := \det(X \cdot E_n - M)$$

das *charakteristische Polynom*[1] von M.

Für $M = (a_{ij})_{ij}$ bedeutet dies

$$\chi_M = \det \begin{pmatrix} X - a_{11} & -a_{12} & \ldots & -a_{1n} \\ -a_{21} & X - a_{22} & \ldots & -a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -a_{n1} & -a_{n2} & \ldots & X - a_{nn} \end{pmatrix}.$$

In dieser Definition nehmen wir Bezug auf die Determinante von Matrizen, die wir nur für Matrizen mit Einträgen in einem Körper definiert haben. Die Einträge sind jetzt aber Elemente im Polynomring $K[X]$. Da wir sie aber als Elemente im Körper der rationalen Funktionen $K(X)$ auffassen können,[2] ist dies eine sinnvolle Definition. Gemäß der Definition ist diese Determinante ein Element in $K(X)$, da aber alle Einträge der Matrix Polynome sind und bei der rekursiven Definition der Determinante nur multipliziert und addiert wird, ist das charakteristische Polynom wirklich ein Polynom. Der Grad des

[1] Manche Autoren definieren das charakteristische Polynom als Determinante von $M - X \cdot E_n$ anstatt von $X \cdot E_n - M$. Dies ändert aber - und zwar nur bei n ungerade - nur das Vorzeichen.

[2] $K(X)$ heißt der Körper der rationalen Polynome; er besteht aus allen Brüchen P/Q zu Polynomen $P, Q \in K[X]$ mit $Q \neq 0$. Bei $K = \mathbb{R}$ oder $\mathbb{C}$ kann man diesen Körper mit der Menge der rationalen Funktionen identifizieren.

charakteristischen Polynoms ist n und der Leitkoeffizient ist 1, d.h. die Gestalt ist

$$\chi_M \,=\, X^n + c_{n-1}X^{n-1} + \cdots + c_1 X + c_0 .$$

Es gilt die wichtige Beziehung

$$\chi_M(\lambda) \,=\, \det\left(\lambda E_n - M\right)$$

für jedes $\lambda \in K$, siehe Aufgabe 28.4. Hier wird links die Zahl λ in das Polynom eingesetzt und rechts wird die Determinante von einer Matrix, die von λ abhängt, ausgerechnet.

Für eine lineare Abbildung

$$\varphi \colon V \longrightarrow V$$

auf einem endlichdimensionalen Vektorraum definiert man das *charakteristische Polynom*

$$\chi_\varphi \,:=\, \chi_M ,$$

wobei M eine beschreibende Matrix bezüglich einer beliebigen Basis sei. Der Determinantenmultiplikationssatz zeigt, dass diese Definition unabhängig von der Wahl der Basis ist, siehe Aufgabe 28.3.

Satz 28.2. *Es sei K ein Körper und es sei V ein n-dimensionaler K-Vektorraum. Es sei*

$$\varphi \colon V \longrightarrow V$$

eine lineare Abbildung. Dann ist $\lambda \in K$ genau dann ein Eigenwert von φ, wenn λ eine Nullstelle des charakteristischen Polynoms χ_φ ist.

Beweis. Es sei M eine beschreibende Matrix für φ, und sei $\lambda \in K$ vorgegeben. Es ist

$$\chi_M\left(\lambda\right) \,=\, \det\left(\lambda E_n - M\right) \,=\, 0$$

genau dann, wenn die lineare Abbildung

$$\lambda \operatorname{Id}_V - \varphi$$

nicht bijektiv (und nicht injektiv) ist (wegen Satz 26.11 und Lemma 25.11). Dies ist nach Lemma 27.11 und Lemma 24.14 äquivalent zu

$$\operatorname{Eig}_\lambda\left(\varphi\right) \,=\, \operatorname{kern}(\lambda \operatorname{Id}_V - \varphi) \,\neq\, 0,$$

was bedeutet, dass der Eigenraum zu λ nicht der Nullraum ist, also λ ein Eigenwert zu φ ist. $\square$

Beispiel 28.3. Wir betrachten die reelle Matrix $M = \begin{pmatrix} 0 & 5 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$. Das charakteristische Polynom ist

$$\begin{aligned} \chi_M &= \det\left(xE_2 - M\right) \\ &= \det\left(x\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & 5 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\right) \\ &= \det\begin{pmatrix} x & -5 \\ -1 & x \end{pmatrix} \end{aligned}$$

$$= \; x^2 - 5.$$

Die Eigenwerte sind also $x = \pm\sqrt{5}$ (diese Eigenwerte haben wir auch in Beispiel 27.9 ohne charakteristisches Polynom gefunden).

Beispiel 28.4. Zur Matrix

$$M = \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ -3 & 4 \end{pmatrix}$$

ist das charakteristische Polynom gleich

$$\chi_M = \det \begin{pmatrix} X-2 & -5 \\ 3 & X-4 \end{pmatrix} = (X-2)(X-4)+15 = X^2-6X+23.$$

Die Nullstellenbestimmung dieses Polynoms führt zur Bedingung

$$(X-3)^2 = -23+9 = -14,$$

die über $\mathbb{R}$ nicht erfüllbar ist, so dass die Matrix über $\mathbb{R}$ keine Eigenwerte besitzt. Über $\mathbb{C}$ hingegegen gibt es die beiden Eigenwerte $3+\sqrt{14}\mathrm{i}$ und $3-\sqrt{14}\mathrm{i}$. Für den Eigenraum zu $3+\sqrt{14}\mathrm{i}$ muss man

$$\begin{aligned} \mathrm{Eig}_{3+\sqrt{14}\mathrm{i}}(M) &= \mathrm{kern}\left(\left(3+\sqrt{14}\mathrm{i}\right)E_2 - M\right) \\ &= \mathrm{kern}\begin{pmatrix} 1+\sqrt{14}\mathrm{i} & -5 \\ 3 & -1+\sqrt{14}\mathrm{i} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

bestimmen, ein Basisvektor (also ein Eigenvektor) davon ist $\begin{pmatrix} 5 \\ 1+\sqrt{14}\mathrm{i} \end{pmatrix}$. Analog ist

$$\mathrm{Eig}_{3-\sqrt{14}\mathrm{i}}(M) = \mathrm{kern}\begin{pmatrix} 1-\sqrt{14}\mathrm{i} & -5 \\ 3 & -1-\sqrt{14}\mathrm{i} \end{pmatrix} = \left\langle \begin{pmatrix} 5 \\ 1-\sqrt{14}\mathrm{i} \end{pmatrix} \right\rangle.$$

Beispiel 28.5. Für eine obere Dreiecksmatrix

$$M = \begin{pmatrix} d_1 & * & \cdots & \cdots & * \\ 0 & d_2 & * & \cdots & * \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & d_{n-1} & * \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & d_n \end{pmatrix}$$

ist das charakteristische Polynom nach Lemma 26.8 gleich

$$\chi_M = (X-d_1)(X-d_2)\cdots(X-d_n).$$

In diesem Fall liegt das charakteristische Polynom direkt in der Zerlegung in lineare Faktoren vor, so dass unmittelbar seine Nullstellen und damit die Eigenwerte von M ablesbar sind, nämlich die Diagonalelemente $d_1, d_2, \ldots, d_n$ (die nicht alle verschieden sein müssen).

Vielfachheiten

Für eine genauere Untersuchung der Eigenräume ist die folgende Begrifflichkeit sinnvoll. Es sei

$$\varphi \colon V \longrightarrow V$$

eine lineare Abbildung auf einem endlichdimensionalen Vektorraum V und $\lambda \in K$. Man nennt dann den Exponenten des linearen Polynoms $X - \lambda$ im charakteristischen Polynom χ_φ die *algebraische Vielfachheit* von λ, die wir mit $\mu_\lambda := \mu_\lambda(\varphi)$ bezeichnen, und die Dimension des zugehörigen Eigenraumes, also

$$\dim\left(\operatorname{Eig}_\lambda\left(\varphi\right)\right)$$

die *geometrische Vielfachheit* von λ. Nach Satz 28.2 ist die eine Vielfachheit genau dann positiv ist, wenn dies für die andere gilt. Im Allgemeinen können die beiden Vielfachheiten aber verschieden sein, wobei eine Abschätzung immer gilt.

Lemma 28.6. *Es sei K ein Körper und es sei V ein endlichdimensionaler K-Vektorraum. Es sei*

$$\varphi \colon V \longrightarrow V$$

eine lineare Abbildung und $\lambda \in K$. Dann besteht zwischen der geometrischen und der algebraischen Vielfachheit die Beziehung

$$\dim\left(\operatorname{Eig}_\lambda\left(\varphi\right)\right) \leq \mu_\lambda(\varphi).$$

Beweis. Sei $m = \dim\left(\operatorname{Eig}_\lambda\left(\varphi\right)\right)$ und sei $v_1, \ldots, v_m$ eine Basis von diesem Eigenraum, die wir durch $w_1, \ldots, w_{n-m}$ zu einer Basis von V ergänzen. Bezüglich dieser Basis hat die beschreibende Matrix die Gestalt

$$\begin{pmatrix} \lambda E_m & B \\ 0 & C \end{pmatrix}.$$

Das charakteristische Polynom ist daher nach Aufgabe 26.9 gleich $(X - \lambda)^m \cdot \chi_C$, so dass die algebraische Vielfachheit mindestens m ist. $\square$

Beispiel 28.7. Wir betrachten 2×2-*Scherungsmatrizen*

$$M = \begin{pmatrix} 1 & a \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

mit $a \in K$. Das charakteristische Polynom ist

$$\chi_M = (X-1)(X-1),$$

so dass 1 der einzige Eigenwert von M ist. Den zugehörigen Eigenraum berechnet man als

$$\operatorname{Eig}_1(M) = \operatorname{kern} \begin{pmatrix} 0 & -a \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Aus

$$\begin{pmatrix} 0 & -a \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} r \\ s \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -as \\ 0 \end{pmatrix}$$

folgt, dass $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ ein Eigenvektor ist, und dass bei $a \neq 0$ der Eigenraum eindimensional ist (bei $a = 0$ liegt die Identität vor und der Eigenraum ist zweidimensional). Bei $a \neq 0$ ist die algebraische Vielfachheit des Eigenwerts 1 gleich 2, die geometrische Vielfachheit gleich 1.

Diagonalisierbarkeit

Die Einschränkung einer linearen Abbildung auf einen Eigenraum ist die Streckung um den zugehörigen Eigenwert, also eine besonders einfache lineare Abbildung. Viele Eigenwerte mit hochdimensionalen Eigenräumen korrespondieren zu strukturell einfachen linearen Abbildungen. Ein Extremfall liegt bei den sogenannten diagonalisierbaren Abbildungen vor.

Bei einer Diagonalmatrix

$$\begin{pmatrix} d_1 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & d_2 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & d_{n-1} & 0 \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & d_n \end{pmatrix}$$

ist das charakteristische Polynom einfach gleich

$$(X - d_1)(X - d_2) \cdots (X - d_n)\,.$$

Wenn die Zahl d in den Diagonalelementen k-mal vorkommt, so kommt auch der Linearfaktor $X - d$ mit dem Exponenten k in der Faktorisierung des charakteristischen Polynoms vor. Dies gilt auch, wenn nur eine obere Dreiecksmatrix vorliegt. Anders aber als bei einer oberen Dreiecksmatrix kann man bei einer Diagonalmatrix sofort die Eigenräume angeben, siehe Beispiel 27.7, und zwar besteht der Eigenraum zu d aus allen Linearkombinationen der Standardvektoren e_i, für die d_i gleich d ist. Insbesondere ist die Dimension des Eigenraums gleich der Anzahl, wie oft d als Diagonalelement auftritt. Bei einer Diagonalmatrix stimmen also algebraische und geometrische Vielfachheiten überein.

Definition 28.8. Es sei K ein Körper, V ein K-Vektorraum und

$$\varphi\colon V \longrightarrow V$$

eine lineare Abbildung. Dann heißt φ *diagonalisierbar*, wenn V eine Basis aus Eigenvektoren zu φ besitzt.

Satz 28.9. *Es sei K ein Körper und es sei V ein endlichdimensionaler K-Vektorraum. Es sei*

$$\varphi\colon V \longrightarrow V$$

eine lineare Abbildung. Dann sind folgende Aussagen äquivalent.

(1) *φ ist diagonalisierbar.*

(2) *Es gibt eine Basis* $\mathfrak{v}$ *von* V *derart, dass die beschreibende Matrix* $M_{\mathfrak{v}}^{\mathfrak{v}}(\varphi)$ *eine Diagonalmatrix ist.*
(3) *Für jede beschreibende Matrix* $M = M_{\mathfrak{w}}^{\mathfrak{w}}(\varphi)$ *bezüglich einer Basis* $\mathfrak{w}$ *gibt es eine invertierbare Matrix* B *derart, dass*

$$BMB^{-1}$$

eine Diagonalmatrix ist.

Beweis. Die Äquivalenz von (1) und (2) folgt aus der Definition, aus Beispiel 27.7 und der Korrespondenz zwischen linearen Abbildungen und Matrizen. Die Äquivalenz von (2) und (3) folgt aus Korollar 25.9. $\square$

Korollar 28.10. *Es sei* K *ein Körper und es sei* V *ein endlichdimensionaler* K*-Vektorraum. Es sei*

$$\varphi\colon V \longrightarrow V$$

eine lineare Abbildung, die $n = \dim_K(V)$ *verschiedene Eigenwerte besitze. Dann ist* φ *diagonalisierbar.*

Beweis. Aufgrund von Lemma 27.14 gibt es n linear unabhängige Eigenvektoren. Diese bilden nach Korollar 23.21 eine Basis. $\square$

Beispiel 28.11. Wir schließen an Beispiel 27.9 an. Es gibt die beiden Eigenvektoren $\begin{pmatrix} \sqrt{5} \\ 1 \end{pmatrix}$ und $\begin{pmatrix} -\sqrt{5} \\ 1 \end{pmatrix}$ zu den verschiedenen Eigenwerten $\sqrt{5}$ und $-\sqrt{5}$, so dass die Abbildung nach Korollar 28.10 diagonalisierbar ist. Bezüglich der Basis $\mathfrak{u}$ aus diesen Eigenvektoren wird die lineare Abbildung durch die Diagonalmatrix

$$\begin{pmatrix} \sqrt{5} & 0 \\ 0 & -\sqrt{5} \end{pmatrix} .$$

beschrieben.

Die Übergangsmatrix von der Basis $\mathfrak{u}$ zur durch e_1 und e_2 gegebenen Standardbasis $\mathfrak{v}$ ist einfach

$$M_{\mathfrak{v}}^{\mathfrak{u}} = \begin{pmatrix} \sqrt{5} & -\sqrt{5} \\ 1 & 1 \end{pmatrix} .$$

Die inverse Matrix dazu ist

$$\frac{1}{2\sqrt{5}} \begin{pmatrix} 1 & \sqrt{5} \\ -1 & \sqrt{5} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2\sqrt{5}} & \frac{1}{2} \\ \frac{-1}{2\sqrt{5}} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} .$$

Gemäß Korollar 25.9 besteht die Beziehung

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} \sqrt{5} & 0 \\ 0 & -\sqrt{5} \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{5}}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{-\sqrt{5}}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sqrt{5} & -\sqrt{5} \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \frac{1}{2\sqrt{5}} & \frac{1}{2} \\ \frac{-1}{2\sqrt{5}} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 5 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sqrt{5} & -\sqrt{5} \\ 1 & 1 \end{pmatrix} . \end{aligned}$$

Vielfachheiten und diagonalisierbare Abbildungen

Satz 28.12. *Es sei K ein Körper und es sei V ein endlichdimensionaler K-Vektorraum. Es sei*

$$\varphi \colon V \longrightarrow V$$

eine lineare Abbildung. Dann ist φ genau dann diagonalisierbar, wenn das charakteristische Polynom χ_φ in Linearfaktoren zerfällt und wenn für jede Nullstelle λ mit der algebraischen Vielfachheit μ_λ die Gleichheit

$$\mu_\lambda = \dim\left(\operatorname{Eig}_\lambda(\varphi)\right)$$

gilt.

Beweis. Dieser Beweis wurde in der Vorlesung nicht vorgeführt. □

Das Produkt von zwei Diagonalmatrizen ist natürlich wieder eine Diagonalmatrix. Das folgende Beispiel zeigt, dass das Produkt von diagonalisierbaren Matrizen nicht diagonalisierbar sein muss.

Beispiel 28.13. Es seien G_1 und G_2 zwei Geraden im $\mathbb{R}^2$ durch den Nullpunkt und es seien φ_1 und φ_2 die Achsenspiegelungen an diesen Achsen. Eine Achsenspiegelung ist stets diagonalisierbar, und zwar sind die Spiegelungsachse und die dazu senkrechte Gerade Eigengeraden (zu den Eigenwerten 1 und -1). Die Hintereinanderschaltung

$$\psi = \varphi_2 \circ \varphi_1$$

dieser Spiegelungen ist eine Drehung, und zwar ist der Drehwinkel das Doppelte des Winkels zwischen den beiden Achsen. Eine Drehung ist aber nur dann diagonalisierbar, wenn der Drehwinkel 0 oder 180 Grad beträgt. Wenn der Winkel zwischen den Achsen von $0, 90$ Grad verschieden ist, so besitzt ψ keinen Eigenvektor.

Trigonalisierbare Abbildungen

Definition 28.14. Es sei K ein Körper und V ein endlichdimensionaler K-Vektorraum. Eine lineare Abbildung $\varphi \colon V \to V$ heißt *trigonalisierbar*, wenn sie bezüglich einer geeigneten Basis durch eine obere Dreiecksmatrix beschrieben wird.

Diagonalisierbare lineare Abbildungen sind insbesondere trigonalisierbar. Die Umkehrung gilt nicht, wie Beispiel 28.7 zeigt.

Satz 28.15. *Es sei K ein Körper und es sei V ein endlichdimensionaler K-Vektorraum. Es sei*

$$\varphi \colon V \longrightarrow V$$

eine lineare Abbildung. Dann sind folgende Aussagen äquivalent.

(1) *φ ist trigonalisierbar.*

(2) *Das charakteristische Polynom χ_φ zerfällt in Linearfaktoren.*

Wenn φ trigonalisierbar ist und bezüglich einer Basis durch die Matrix M beschrieben wird, so gibt es eine invertierbare Matrix $B \in \mathrm{Mat}_{n\times n}(K)$ derart, dass BMB^{-1} eine obere Dreiecksmatrix ist.

Beweis. Dieser Beweis wurde in der Vorlesung nicht vorgeführt. □

SATZ 28.16. *Es sei $M \in \mathrm{Mat}_{n\times n}(\mathbb{C})$ eine quadratische Matrix mit komplexen Einträgen. Dann ist M trigonalisierbar.*

Beweis. Dies folgt aus Satz 28.15 und dem Fundamentalsatz der Algebra. □

Abbildungsverzeichnis