Prof. Dr. H. Brenner **Osnabrück SS 2019**

Singularitätentheorie

Arbeitsblatt 14

Aufgabe 14.1. Es sei K ein Körper und $F \in K[X_1, \ldots, X_n]$ ein Polynom. Zeige, dass ein Punkt $P \in K^n$ genau dann ein kritischer Punkt von F ist, wenn das maximale Ideal $\mathfrak{m}_P$ das Jacobiideal J_F umfasst.

Aufgabe 14.2. Sei K ein Körper und sei $K[X]$ der Polynomring über K. Es sei $F \in K[X]$ und $a \in K$. Zeige, dass a genau dann eine mehrfache Nullstelle von F ist, wenn $F'(a) = 0$ ist, wobei F' die formale Ableitung von F bezeichnet.

Aufgabe 14.3. Es sei K ein Körper und $F \in K[X]$ ein Polynom. Bringe die Begriffe kritischer Punkt von F, Nullstelle der Ableitung F' und maximales Ideal oberhalb des Jacobiideals J_F miteinander in Verbindung.

Aufgabe 14.4. Es sei K ein Körper und $F \in K[X]$ ein Polynom. Es sei P eine Nullstelle von F. Zeige, dass die Vielfachheit der Nullstelle um 1 größer als die Milnorzahl von F in P ist.

Aufgabe 14.5. Bestimme die Milnorzahl für die Kurven $V\left(X^a - Y^b\right)$ im Nullpunkt.

Aufgabe 14.6. Bestimme die Milnorzahl für die zweidimensionalen ADE-Singularitäten.

Aufgabe 14.7. Es sei K ein Körper mit einer Charakteristik $\neq 2$. Es sei $F \in K[X_1, \ldots, X_n]$ ein Polynom. Zeige, dass die Milnorzahl von F im Nullpunkt mit der Milnorzahl des Polynoms $F + Z^2 \in K[X_1, \ldots, X_n, Z]$ im Nullpunkt übereinstimmt.

Aufgabe 14.8. Es sei F ein Polynom in den Variablen $X_1, \ldots, X_m$ und G ein Polynom in den Variablen $Y_1, \ldots, Y_n$. Wir interessieren uns für die Summe $F + G$ (in den Variablen $X_1, \ldots, X_m, Y_1, \ldots, Y_n$).

(1) Sowohl F als auch G definieren eine isolierte Singularität im Nullpunkt. Zeige, dass auch $F + G$ eine isolierte Singularität im Nullpunkt definiert.
(2) Zeige, dass die Milnorzahl von $F + G$ (im Nullpunkt) das Produkt der Milnorzahlen der beiden Polynome F und G ist.

AUFGABE 14.9. Zeige, dass

$$g = X + X^2 \in K[X]$$

die Voraussetzung von Lemma 14.13 erfüllt, und dass daher $(g) = (X)$ in $K[X]_{(X)}$ gilt, dass dies aber nicht in $K[X]$ gilt.

AUFGABE 14.10. Es sei $\mathfrak{n}$ ein maximales Ideal in einem kommutativen Ring R. Es sei $R_{\mathfrak{n}}$ die Lokalisierung von R an $\mathfrak{n}$ und es sei $\mathfrak{m} = \mathfrak{n}R_{\mathfrak{n}}$ das maximale Ideal von $R_{\mathfrak{n}}$. Zeige $R/\mathfrak{n} = R_{\mathfrak{n}}/\mathfrak{m}$.

AUFGABE 14.11. Bestimme den Typ der Hesse-Form zur Funktion

$$f \colon \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R},\, (x, y) \longmapsto x^2y - xy^2 + x^2 - y^3,$$

in jedem Punkt.

AUFGABE 14.12. Es sei V ein endlichdimensionaler reeller Vektorraum, $G \subseteq V$ eine offene Menge und

$$f \colon G \longrightarrow \mathbb{R}$$

eine zweimal stetig differenzierbare Funktion. Zeige, dass die Hesse-Form von f in jedem Punkt $P \in G$ symmetrisch ist.

AUFGABE 14.13.*

Man gebe für vorgegebene natürliche Zahlen p, q, n mit $p + q \leq n$ eine zweimal stetig differenzierbare Funktion

$$f \colon \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R},$$

deren Hesse-Form den Typ (p, q) besitzt.

AUFGABE 14.14. Berechne die Hesse-Matrix zu $F = X^a + Y^b + Z^c$ im Nullpunkt.

AUFGABE 14.15. Berechne die Hesse-Matrix zu den zweidimensionalen ADE-Singularitäten im Nullpunkt.

Aufgabe 14.16. Es sei $F \in \mathbb{R}[X_1, \ldots, X_n]$ ein reelles Polynom und $P \in \mathbb{R}^n$ ein kritischer Punkt. Beweise Lemma 14.14 mit Hilfe von Satz 39.3 (Lineare Algebra (Osnabrück 2017-2018)), angewendet auf die Hesse-Matrix von F.

Abbildungsverzeichnis