Prof. Dr. H. Brenner **Osnabrück WS 2021/2022**

Vorkurs Mathematik

Arbeitsblatt 2

Übungsaufgaben

Aufgabe 2.1. Welche Teilerbeziehung besteht zwischen 0 und einer beliebigen ganzen Zahl n und welche Teilerbeziehung besteht zwischen 1 und einer beliebigen ganzen Zahl n?

Aufgabe 2.2. Skizziere ein Teilerdiagramm (also ein Diagramm, in dem die Teilerbeziehung durch Pfeile ausgedrückt wird) für die Zahlen $25, 30, 36$ sowie all ihrer positiven Teiler.

Gerade und ungerade Zahlen kann man unterschiedlich definieren. Was wäre spontan Ihre Definition?

Aufgabe 2.3. Zeige, dass eine natürliche Zahl n genau dann ungerade ist, wenn man sie in der Form $n = 2k+1$ mit einer natürlichen Zahl k schreiben kann.

Aufgabe 2.4. Zeige, dass eine natürliche Zahl n genau dann gerade ist, wenn ihre letzte Ziffer im Dezimalsystem gleich $0, 2, 4, 6$ oder 8 ist.

Aufgabe 2.5. Zeige, dass eine natürliche Zahl n genau dann ungerade ist, wenn ihre letzte Ziffer im Dezimalsystem gleich $1, 3, 5, 7$ oder 9 ist.

Aufgabe 2.6.
(1) Formuliere Rechenregeln für die Addition und die Multiplikation von geraden und ungeraden natürlichen Zahlen.
(2) Beweise die Rechenregeln mit den Endzifferbeschreibungen (siehe Aufgabe 2.4 und Aufgabe 2.5).
(3) Beweise die Rechenregeln mit den Gleichungsbeschreibungen (Definition und Aufgabe 2.3).

Aufgabe 2.7. Es sei n eine natürliche Zahl. Zeige mittels einer Fallunterscheidung, dass $n^2 - n$ stets gerade ist.

Für die folgende Aufgabe ist Aufgabe 1.24 hilfreich.

Aufgabe 2.8. Es sei a eine natürliche Zahl und es sei

$$a = \sum_{i=0}^{\ell} a_i 10^i$$

die Darstellung von a im Dezimalsystem. Zeige, dass a von 3 genau dann geteilt wird, wenn die *Quersumme* $\sum_{i=0}^{\ell} a_i$ von 3 geteilt wird.

Eine Verallgemeinerung dieses Quersummentests wird in der nächsten Aufgabe besprochen.

Aufgabe 2.9. Es seien a und n natürliche Zahlen mit $n \geq 2$. Es sei

$$a = \sum_{i=0}^{\ell} a_i n^i$$

die Darstellung von a zur Basis n (also mit $0 \leq a_i < n$). Es sei k ein Teiler von $n-1$. Dann wird a von k genau dann geteilt, wenn die *Quersumme* $\sum_{i=0}^{\ell} a_i$ von k geteilt wird.

Aufgabe 2.10. Betrachte im 15er System mit den Ziffern $0, 1, \ldots, 8, 9, A, B, C, D, E$ die Zahl

$$EA09B4CA\,.$$

Ist diese Zahl durch 7 teilbar?

Aufgabe 2.11.*

Bestimme die kleinste natürliche Zahl, deren letzte Ziffer eine 3 ist, die kein Vielfaches der 3 ist und die keine Primzahl ist.

Aufgabe 2.12. Berechne den Ausdruck

$$n^2 + n + 41$$

für $n = 0, 1, 2, \ldots$. Handelt es sich dabei um Primzahlen?

Aufgabe 2.13.*

Bestimme die Primfaktorzerlegung von 1728.

Aufgabe 2.14. Finde die Primfaktorzerlegung der Zahlen

$$11,\ 111,\ 1111,\ 11111,\ 111111\,.$$

(Vergleiche hierzu auch Aufgabe 3.22.)

Aufgabe 2.15.*

Bestimme die Primfaktorzerlegung von 999999.

Aufgabe 2.16. Finde die kleinste Zahl N der Form $N = p_1 \cdot p_2 \cdot \ldots \cdot p_r + 1$, die keine Primzahl ist, wobei $p_1, p_2, \ldots, p_r$ die ersten r Primzahlen sind.

Aufgabe 2.17. Es sei $r \in \mathbb{N}$.

a) Finde r aufeinander folgende natürliche Zahlen (also $n, n+1, \ldots, n+r-1$), die alle nicht prim sind.

b) Finde unendlich viele solcher primfreien r-„Intervalle“.

Aufgabe 2.18. Finde eine Darstellung der 1 (im Sinne des Lemmas von Bezout) für die folgenden Zahlenpaare: 5 und 7; 20 und 27; 23 und 157.

Aufgabe 2.19. Es stehen zwei Eimer ohne Markierungen zur Verfügung, ferner eine Wasserquelle. Der eine Eimer hat ein Fassungsvermögen von 5 und der andere ein Fassungsvermögen von 7 Litern. Zeige, dass man allein durch Auffüllungen, Ausleerungen und Umschüttungen erreichen kann, dass in einem Eimer genau ein Liter Wasser enthalten ist.

Aufgabe 2.20.*

Es stehen zwei Eimer ohne Markierungen zur Verfügung, ferner eine Wasserquelle. Der eine Eimer hat ein Fassungsvermögen von 7 und der andere ein Fassungsvermögen von 10 Litern. Zeige, dass man allein durch Auffüllungen, Ausleerungen und Umschüttungen erreichen kann, dass in einem Eimer genau ein Liter Wasser enthalten ist.

Aufgabe 2.21. Es seien a und b teilerfremde natürliche Zahlen. Es stehen beliebig viele Eimer ohne Markierungen zur Verfügung, deren Fassungsvermögen a bzw. b ist. Zeige, dass man allein durch Auffüllungen, Ausleerungen und Umschüttungen erreichen kann, dass in einem Eimer genau ein Liter Wasser enthalten ist.

Aufgabe 2.22.*

Es stehen zwei Eimer ohne Markierungen zur Verfügung, ferner eine Wasserquelle. Der eine Eimer hat ein Fassungsvermögen von a und der andere ein Fassungsvermögen von b Litern, wobei a und b teilerfremd seien. Zeige, dass man allein durch Auffüllungen, Ausleerungen und Umschüttungen erreichen kann, dass in einem Eimer genau ein Liter Wasser enthalten ist.

Aufgabe 2.23. Es sei p eine Primzahl. Zeige durch Induktion nach n, dass wenn p ein Produkt von n Zahlen teilt, dass p dann schon eine der Zahlen teilt.

Aufgabe 2.24. Es seien a und b natürliche Zahlen, deren Produkt ab von einer natürlichen Zahl n geteilt werde. Die Zahlen n und a seien teilerfremd. Zeige, dass b von n geteilt wird.

Aufgabe 2.25. Es sei $k \geq 2$ eine natürliche Zahl mit der folgenden Eigenschaft: Sobald k ein Produkt ab teilt, teilt k bereits einen Faktor. Zeige, dass k eine Primzahl ist.

Aufgabe 2.26. Es seien r und s teilerfremde Zahlen. Zeige, dass jede Lösung (x, y) der Gleichung

$$rx + sy = 0$$

die Gestalt $(x, y) = v(s, -r)$ mit einer eindeutig bestimmten Zahl v besitzt.

Aufgabe 2.27. Es seien a und d teilerfremde ganze Zahlen. Zeige, dass es eine Potenz a^i mit $i \geq 1$ gibt, deren Rest bei Division durch d gleich 1 ist.

Tipp: Verwende Aufgabe 1.25 und betrachte den Rest von $a^j - a^i$ bei Division durch d. Schließe dann mit Aufgabe 2.24.

Die folgende Aufgabe zeigt, dass die eindeutige Primfaktorzerlegung keineswegs selbstverständlich ist.

Aufgabe 2.28. Es sei $M \subseteq \mathbb{N}_+$ diejenige Teilmenge, die aus allen natürlichen Zahlen besteht, die bei Division durch 4 den Rest 1 besitzen, also $M = \{1, 5, 9, 13, 17, \ldots\}$. Zeige, dass man 441 innerhalb von M auf zwei verschiedene Arten in Faktoren zerlegen kann, die in M nicht weiter zerlegbar sind.

Aufgabe 2.29. Alle Flöhe leben auf einem unendlichen Zentimeter-Band. Ein Flohmännchen springt bei jedem Sprung 78 cm und die deutlich kräftigeren Flohweibchen springen mit jedem Sprung 126 cm. Die Flohmännchen Florian, Flöhchen und Carlo sitzen in den Positionen $-123, 55$ und -49. Die Flohweibchen Flora und Florentina sitzen in Position 17 bzw. 109. Welche Flöhe können sich treffen?

Aufgabe 2.30. Wir betrachten eine digitale Uhr, die 24 Stunden, 60 Minuten und 60 Sekunden anzeigt. Zur Karnevalszeit läuft sie aber nicht in Sekundenschritten, sondern addiert, ausgehend von der Nullstellung, in jedem Zählschritt immer 11 Stunden, 11 Minuten und 11 Sekunden dazu. Wird bei dieser Zählweise jede mögliche digitale Anzeige erreicht? Nach wie vielen Schritten kehrt zum ersten Mal die Nullstellung zurück?

Aufgabe 2.31. Zeige, dass es außer $3, 5, 7$ kein weiteres Zahlentripel der Form $p, p+2, p+4$ gibt, in dem alle drei Zahlen Primzahlen sind.

Die nächste Aufgabe bezieht sich auf Bemerkung 2.10.

Aufgabe 2.32. Zeige, dass es eine gerade Zahl g, $2 \leq g \leq 252$, mit der Eigenschaft gibt, dass es unendlich viele Primzahlen p derart gibt, dass auch $p + g$ eine Primzahl ist.

Aufgabe 2.33. Nehmen Sie Stellung zur folgenden Aussage: „Das Prinzip „Beweis durch Widerspruch“ ist offenbar absurd. Wenn man alles annehmen darf, so kann man immer einen Widerspruch erzielen und somit alles beweisen“.

Aufgabe 2.34.*

Franziska möchte mit ihrem Freund Heinz Schluss machen. Sie erwägt die folgenden drei Begründungen.

(1) „Du hast dich schon am ersten Tag voll daneben benommen. Seitdem ist es von jedem Tag zum nächsten Tag nur noch schlimmer geworden. Du wirst Dich also immer völlig daneben benehmen“.
(2) „Wenn ich mit Dir zusammenbleiben würde, so würde ich irgendwann als eine traurige, gelangweilte, vom Leben enttäuschte Person enden, das möchte ich aber auf gar keinen Fall“.
(3) „Also, wenn Du mich nicht liebst, will ich Dich sowieso nicht. Wenn Du mich aber liebst, so komme ich zu dem Schluss, dass Du dein Verhalten mit Deinen Gefühlen nicht zur Deckung bringen kannst. Dann bist Du also unreif und dann will ich Dich auch nicht“.

Welche mathematischen Beweisprinzipien spiegeln sich in den drei Begründungen wieder?

Aufgabe 2.35.*

(1) Löse das folgende Minisudoku

$$\begin{pmatrix} - & - & 2 & - \\ 3 & - & - & 4 \\ - & - & - & - \\ - & 4 & - & 1 \end{pmatrix}.$$

(2) Begründe, dass das Minisudoku aus (1) nur eine Lösung besitzt.
(3) Welche mathematischen Beweisverfahren finden sich als typische Argumentationsschemata beim Lösen eines Sudokus wieder?

Aufgabe 2.36. In der Schule wird Potenzrechnung durchgenommen und es geht um die Frage, ob

$$a^b = b^a$$

ist. Als Gründe, dass dies gelten müsste, werden angeführt:

(1) Es gilt ja auch $a + b = b + a$ und $a \cdot b = b \cdot a$, warum sollte das jetzt plötzlich nicht mehr gelten?
(2) Das wäre gut, wenn das gelten würde, dann könnte man die kleinere Zahl immer oben hinschreiben und es wäre einfacher auszurechnen.
(3) Wenn man beispielsweise $a = 2$ und $b = 4$ nimmt, so ist

$$2^4 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 = 16 = 4 \cdot 4 = 4^2,$$

warum sollte das für andere Zahlen nicht auch gelten?

Abbildungsverzeichnis