ISSN 0321—4796

Министерство высшего и среднего специального
образования РСФСР

Калининградский государственный университет

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНАЯ ГЕОМЕТРИЯ МНОГООБРАЗИЙ ФИГУР

Выпуск 21

Калининград
1990

МИНИСТЕРСТВО ВЫСШЕГО И СРЕДНЕГО СПЕЦИАЛЬНОГО
ОБРАЗОВАНИЯ РСФСР

Калининградский государственный университет

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНАЯ ГЕОМЕТРИЯ МНОГООБРАЗИЙ ФИГУР

Выпуск 21

Межвузовский тематический
сборник научных трудов

Калининград
1990

УДК 514.75 ; 514.76

Дифференциальная геометрия многообразий фигур: Межвуз.темат. сб.науч.тр./ Калинингр.ун-т.Калининград, 1990.Вып.21.120с.

В сборнике, подготовленном кафедрой высшей алгебры и геометрии, публикуются статьи, посвященные следующим разделам дифференциальной геометрии : многообразия фигур и пар фигур в однородных пространствах, теория поверхностей, сетей, распределений и полос, метрические пространства, ассоциированные с многообразиями фигур отображения и связности.

Предназначен для научных работников, аспирантов и студентов, специализирующихся в области геометрии.

Библиогр.102 назв.

Содержание

УДК 514.76

О МЕТРИКАХ НА ГЛАДКОМ МНОГООБРАЗИИ, СВЯЗАННЫХ С ДИНАМИЧЕСКИМИ ПОЛИСИСТЕМАМИ СПЕЦИАЛЬНОГО ВИДА

С.И.А л е ш н и к о в

(Калининградский государственный университет)

В прикладных задачах при исследовании динамических полисистем на многообразиях возникает необходимость в определении метрик, ассоциированных с длинами траекторий этих полисистем. В [1] исследованы топологические свойства орбит полисистем с приложениями к теории управления. В [2] определены метрики на гладкой поверхности, связанные с динамическими полисистемами специального вида. В настоящей работе обобщены результаты [2] на случай многообразия произвольной конечной размерности.

Пусть V -связное многообразие класса C^∞ размерности n, на котором определены векторные поля X_i $(1 \le i \le n)$ класса C^∞, обладающие тем свойством, что для любой точки $a \in V$ векторы $X_1(a), \dots, X_n(a)$ линейно независимы в касательном пространстве $T_a(V)$. Обозначим φ^i_t однопараметрические группы диффеоморфизмов полей X_i $(1 \le i \le n)$. Считаем, что на V определена риманова метрика g. Предположим, что для любых i,j скобка Ли $[X_i, X_j] = 0$. Согласно [3] существует атлас $\mathcal{A} = \{(\Phi_k, U_k)\}_{k \in N}$ многообразия V такой, что локальным выражением поля X_i в произвольной карте (Φ_k, U_k) атласа $\mathcal{A}$ является $\frac{\partial}{\partial x_i}$ для любого $i: 1 \le i \le n$.

Определим расстояние δ. Если $x, y \in V$ и $x = y$, то положим $\delta(x,y) = 0$. Когда $x \ne y$, рассмотрим кусочно гладкие кривые c на многообразии V следующего вида. Обозначим $T = [a,b]$ -область определения кривой c. Считаем, что: 1) $c(a) = x$, $c(b) = y$; 2) существует $k \in \mathbb{N}$ и последовательность $a = t_0 < t_1 < \dots < t_{k-1} < t_k = b$ такие, что для всякого $j: 0 \le j \le k-1$ и всякого $t \in [t_j, t_{j+1}]$ имеет место одно из следующих соотношений:

$$c(t) = \varphi^i_{t-t_j}(c(t_j)), \qquad c(t) = \varphi^i_{-(t-t_j)}(c(t_j)) \tag{I}$$

для некоторого $i: 1 \le i \le n$. Обозначим k через $\nu(c)$, а множество таких кривых для точек x и y -через $\mathfrak{T}(x,y)$. Положим

$$\mathcal{J}(c) = \int_a^b \sqrt{g(c'(t), c'(t))}\,dt, \quad \delta(x,y) = \inf_{c \in \mathfrak{T}(x,y)} \mathcal{J}(c). \tag{2}$$

П р е д л о ж е н и е 1. Функция δ является расстоянием на многообразии V, и топология, определяемая на V расстоянием δ, совпадает с исходной топологией многообразия.

Доказательство аналогично доказательству предложения 5.8 [4].

Рассмотрим риманову метрику g на многообразии V, полученную переносом евклидовой метрики пространства $\mathbb{R}^n$ [5] с помощью атласа $\mathcal{A}$. Выявим структуру расстояния δ в этом случае. Так как поля локально выглядят как $\frac{\partial}{\partial x_i}$ в любой карте атласа $\mathcal{A}$, то для любого $z \in V$ справедливо $g(X_i(z), X_i(z))=1$, откуда и из формул (I) и (2) следует, что $\mathcal{J}(c) = b-a$ для любой кривой $c: [a,b] \to V$, $c \in \mathcal{I}(z_1, z_2)$. Очевидно также, что, выбирая U_k достаточно малым, можно считать, что если $z_1, z_2 \in U_k$, $(\xi_1,\ldots,\xi_n) = \Phi_k(z_1)$, $(\eta_1,\ldots,\eta_n) = \Phi_k(z_2)$, то

$$\delta(z_1, z_2) = \sum_{\ell=1}^{n} |\eta_\ell - \xi_\ell|. \tag{3}$$

П р е д л о ж е н и е 2. Пусть многообразие V компактно, тогда для любых точек $x, y \in V$ найдется кривая $c \in \mathcal{I}(x,y)$, $\mathcal{J}(c) = \delta(x,y)$.

Д о к а з а т е л ь с т в о изложим в пяти пунктах.

I. Будем предполагать, что $x \neq y$. Рассмотрим последовательность $c_p \in \mathcal{I}(x,y)$, удовлетворяющую условию $\lim\limits_{p\to\infty} \mathcal{J}(c_p) = \delta(x,y)$. Пусть $T^{(p)} = [a^{(p)}, b^{(p)}]$ область определения кривой c_p. Множество $c_p(T^{(p)})$ компактно. Тогда $c_p(T^{(p)})$ может быть покрыто конечным множеством U_k $(k \in \Lambda(p))$ областей определения карт атласа $\mathcal{A}$. По индукции можно определить последовательность (s_ℓ) точек из $T^{(p)}$ и последовательность $(\varkappa(\ell))$ целых чисел из $\Lambda(p)$, $\ell = 1, 2, \ldots, L(p)$, удовлетворяющих условиям

$$s_1 = a^{(p)},\ c_p(s_1) \in U_{\varkappa(1)},\ c_p(s_{\ell+1}) \in U_{\varkappa(\ell+1)} \cap \overline{U}_{\varkappa(\ell)},\ c_p(s_{\ell+1}) \notin \bigcup_{q=1}^{\ell} U_{\varkappa(q)}$$

для любого ℓ ($\overline{U}_{\varkappa(\ell)}$ – замыкание множества $U_{\varkappa(\ell)}$). Очевидно, что $L(p) \leq \mathrm{Card}(\Lambda(p))$. Используя (3), можно определить отображение $\hat{c}_p: \tilde{T}^{(p)} \to V$, удовлетворяющее условиям: $\tilde{c}_p \in \mathcal{I}(x,y)$, $\mathcal{J}(\tilde{c}_p) \leq \mathcal{J}(c_p)$, $\nu(\tilde{c}_p) \leq 2 \cdot L(p)$, $\tilde{c}_p(\tilde{T}^{(p)}) \subset \bigcup_{\ell=1}^{L(p)} U_{\varkappa(\ell)}$. Тогда $\lim\limits_{p\to\infty} \mathcal{J}(\tilde{c}_p) \leq \lim\limits_{p\to\infty} \mathcal{J}(c_p) = \delta(x,y)$. Обратное неравенство очевидно. Кроме того, в силу компактности V можно считать, что атлас $\mathcal{A}$ конечен и $L(p) \leq \mu$, т.е. множество $\{\nu(c_p)\}$ $(p \in \mathbb{N})$ ограничено.

2. В силу доказанного в п.I существует $\nu_0: 1 \leq \nu_0 \leq 2\mu$, такое, что для бесконечного числа номеров p выполняется $\nu(c_p) = \nu_0$. Выбирая подпоследовательность (c_ω) последовательности (c_p), в силу конечности n можно считать, что для любого ω выполняется $\nu(c_\omega) = \nu_0$ и для всякого $j: 1 \leq j \leq \nu_0$ при любом ω выполняется только одно из равенств (I). Легко выделить, что в силу компактности V длины интервалов $T^{(\omega)}$ для последовательности c_ω ограничены. Осуществляя замену переменной и доопределяя c_ω, можно считать, что $T^{(\omega)} = [0, b]$.

3. Положим $t_0^{(\omega)} = t_0^{(0)} = 0$, $c_0(t_0^{(0)}) = x$. Так как $t_1^{(\omega)} \in [0, b]$, то по теореме Больцано можно выбрать сходящуюся подпоследовательность $(t_1^{(m)})$. Пусть ее предел равен $t_1^{(0)}$. В силу непрерывности функций $\varphi_t^i(x)$ и доказанному в п.2 последовательность $c_m(t_1^{(m)})$ имеет предел, который обозначим $c_0(t_1^{(0)})$. Последовательность $t_2^{(m)} - t_1^{(m)}$ ограничена, следовательно, содержит сходящуюся последовательность $(d^{(\tau)})$. Пусть ее предел равен $d^{(0)}$. Тогда $t_2^{(\tau)} = d^{(\tau)} + t_1^{(\tau)} \to t_2^{(0)} = d^{(0)} + t_1^{(0)}$. Аналогично $c_\tau(t_2^{(\tau)}) \to c_0(t_2^{(0)})$ и т.д. до ν_0. Таким образом строится подпоследовательность $(c_\tau) \subset (c_\omega)$ и последовательность $c_0(t_j^{(0)})$, $0 \leq j \leq \nu_0$, причем $t_j^{(\tau)} \to t_j^{(0)}$, $c_\tau(t_j^{(\tau)}) \to c_0(t_j^{(0)})$. Вдобавок, для c_0 при любых j выполняется то же равенство (I), какое выполняется для всех $\tau \in \mathbb{N}$ и того же j. Теперь легко определить функцию $c_0 \in \mathcal{I}(x,y)$ на всем интервале $[0, b]$.

4. Покажем, что c_τ сходится к c_0 равномерно относительно расстояния δ. Пусть $t \in]t_j^{(0)}, t_{j+1}^{(0)}[$. Так как $t_j^{(\tau)} \to t_j^{(0)}$ и $t_{j+1}^{(\tau)} \to t_{j+1}^{(0)}$ при $\tau \to \infty$, то для достаточно больших τ будет выполняться $t \in]t_j^{(\tau)}, t_{j+1}^{(\tau)}[$. Тогда согласно п.3 существует $i: 1 \leq i \leq n$ такое, что

$$c_\tau(t) = \varphi^i_{\alpha(t-t_j^{(\tau)})}(c_\tau(t_j^{(\tau)})), \quad c_0(t) = \varphi^i_{\alpha(t-t_j^{(0)})}(c_0(t_j^{(0)})),$$

где $\alpha = \pm 1$. Аналогично рассматривается случай $t = t_j^{(0)}$. В силу непрерывности функций φ_t^i для любого $\varepsilon > 0$ выполняется неравенство

$$\delta(c_\tau(t), c_0(t)) \leq \varepsilon \tag{4}$$

как только τ достаточно велико (при этом $t_j^{(\tau)}$ и $c_\tau(t_j^{(\tau)})$ достаточно близки к $t_j^{(0)}$ и $c_0(t_j^{(0)})$ соответственно сразу для всех $j: 0 \leq j \leq \nu_0$).

Неравенство (4) выполняется для всех $t \in [0, b]$.

5. В силу непрерывности X_i $(1 \leq i \leq n)$, g и компактности многообразия V имеем $\lim\limits_{\tau\to\infty} \mathcal{J}(c_\tau) = \mathcal{J}(c_0)$. Так как $\lim\limits_{\tau\to\infty} \mathcal{J}(c_\tau) = \delta(x,y)$, то $\mathcal{J}(c_0) = \delta(x,y)$.

Доказанное предложение устанавливает существование геодезических для определенного специальным образом расстояния δ.

Библиографический список

I. Л о б р и К. Динамические полисистемы и теория управления // Новое в зарубежной науке. Математика. М., 1979. Вып. I4. С. I34–I73.

2. А л е ш н и к о в С.И. Об одной метрике на поверхности/ Калинингр. техн. ин-т рыбной промышленности и хоз-ва. Калининград, I985. IOс. Деп. в ВИНИТИ. 27.06.85, № 463I-85.

3. Б и ш о п Р.Л., К р и т т е н д е н Р.Д. Геометрия многообразий. М.: Мир, I967. 335с.

4. Г о л у б и ц к и й М., Гиемин В. Устойчивые отображения и их особенности. М.: Мир, 1977. 290с.

5. Г о д б и й о н К. Дифференциальная геометрия и аналитическая механика. М.: Мир, 1973. 188с.

УДК 514.75

ОТОБРАЖЕНИЯ МНОГООБРАЗИЙ ГИПЕРКВАДРИК, ПОРОЖДЕННЫЕ ТОЧЕЧНЫМ СООТВЕТСТВИЕМ

Б.А.А н д р е е в
(Калининградский государственный университет)

В работе изучается точечное соответствие f проективных пространств P_n, $\hat{P}_n$. Найдены четыре отображения многообразий гиперквадрик из P_n и $\hat{P}_n$, которые порождаются соответствием f для каждой пары соответствующих точек. Доказан ряд предложений, в которых дана геометрическая характеристика этих отображений и указана их связь с характеристическими направлениями отображения f и порожденной отображением f связностью.

1. Рассмотрим дифференцируемое отображение $f: P\in P_n \mapsto p=f(P)\in \hat{P}_n$ проективных пространств, причем $\operatorname{rang} f = n$ в каждой точке области определения. Располагая вершины подвижных реперов R и r соответственно пространств P_n и $\hat{P}_n$ как в работе [1], получаем систему дифференциальных уравнений отображения f в виде

$$\omega^i_0 = \Lambda^i_J \Omega^J_0 . \qquad (1)$$

Двукратное продолжение системы (1) приводит к фундаментальному объекту $\Gamma_2=\{\Lambda^i_J, \Lambda^i_{JK}\}$ второго порядка отображения f; дифференциальные уравнения объекта Γ_2 имеют вид (4),(5) [1], а равенство (6)[1] принимает вид: $\operatorname{rang}[\Lambda^i_J]=n$.

2. Пусть $\mathcal{H}(p)$ -многообразие всех гиперквадрик $q\subset\hat{P}_n$, содержащих точку p. Уравнение гиперквадрики $q\in\mathcal{H}(p)$ запишется в виде:

$$a_{ij}x^ix^j + 2a_ix^ix^0=0. \qquad (2)$$

Закон изменения величин a_i, a_{ij} при фиксированных первичных параметрах (т.е. при фиксации пары (P,p)) приводится к виду

$$\overset{\circ}{\nabla} a_i = 0, \qquad \overset{\circ}{\nabla} a_{ij} = a_{(i}\pi^0_{j)} . \qquad (3)$$

Заметим, что объект $\{a_i\}$ определяет касательную гиперплоскость к гиперповерхности (2) в точке p. Из (2) получаем: $\dim\mathcal{H}(p)=C^2_{n+1}+n-1$.

Пусть $\hat{B}$ -множество гиперплоскостей в $\hat{P}_n$, содержащих точку p, тогда $\hat{B}$ является $(n-1)$-мерным подпространством в проективном пространстве, двойственном к $\hat{P}_n$. Пусть $H(p)$ -многообразие гиперквадрик из $\mathcal{H}(p)$, для которых точка p является неособой точкой. Многообразие $H(p)$ естественным образом расслаивается над пространством $\hat{B}$: слой над $\hat{b}\in\hat{B}$ состоит из всех $q\in H(p)$, для которых гиперплоскость $\hat{b}$ является касательной к гиперквадрике q в точке p. Будем обозначать этот слой символом $\mathcal{H}(p,\hat{b})$. Имеем: $\dim\mathcal{H}(p,\hat{b})=C^2_{n+1}-1$. Проведя аналогичные рассмотрения для P_n, получаем в соответствующих обозначениях для $Q\in\mathcal{H}(P)$:

$$A_{JK}X^JX^K + 2A_JX^JX^0=0, \qquad (4)$$

$$\overset{\circ}{\nabla} A_J = 0, \qquad \overset{\circ}{\nabla} A_{JK} = A_{(J}\Pi^0_{K)} . \qquad (5)$$

Так же, как в случае $\hat{P}_n$, многообразие $H(P)$ расслаивается над множеством B гиперплоскостей, инцидентных точке P; слой над $b\in B$ обозначим символом $\mathcal{H}(P,b)$.

3. П р е д л о ж е н и е 1. Отображение $f: P_n\to\hat{P}_n$ во 2-й дифференциальной окрестности каждой пары (P,p) соответствующих точек порождает отображение $f_q: q\in\mathcal{H}(p)\mapsto Q\in\mathcal{H}(P)$ многообразий гиперквадрик.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Положим

$$A_J = \Lambda^i_J a_i, \qquad (6)$$

$$A_{JK} = \Lambda^i_J\Lambda^j_K a_{ij} - \Lambda^i_{JK}a_i . \qquad (7)$$

Из уравнений (4),(5)[1] следует, что, если для a_i, a_{ij} выполняются (3), то для A_J, A_{JK} при этом из (6),(7) вытекает выполнение уравнений (5). Таким образом, формулы (6),(7) гиперквадрике (2) ставят в соответствие гиперквадрику (4).

Для выяснения геометрической характеристики отображения f_q рассмотрим его сужение f^0_q на множество распадающихся гиперквадрик $q\in\mathcal{H}(p)$. Пусть (2) распадается. Тогда имеем:

$$a_{ij} = a_{(i}p_{j)} \qquad (8)$$

Гиперквадрика q в этом случае определяет пучок гиперплоскостей A_q с базисными гиперплоскостями

$$a_ix^i=0, \qquad (9)$$

$$p_ix^i+x^0=0 . \qquad (10)$$

2 Зак. 1209

Пусть $\pi_q: P_n \to A_q$ - отображение, которое точке $p \in \hat{P}_n$ ставит в соответствие инцидентную ей гиперплоскость пучка A_q. Пучок A_q с отмеченным элементом (10) обладает структурой расширенной аффинной прямой. Рассмотрим отображение $\pi_q \circ f: P_n \to A_q$ проективного пространства P_n в одномерное расширенное аффинное пространство A_q. Такое отображение является частным случаем изучавшегося автором отображения $P_m \to \hat{P}_n$ [2],[3]. Индикатриса [2,с.5] последнего отображения в случае $n=1$ является гиперквадрикой. Следовательно, индикатриса J_q отображения $\pi_q \circ f$, построенная для точки $P \in P_n$, является гиперквадрикой, содержащей точку P. Сравнивая (4),(6),(7) при выполнении (8) с уравнением (I)[2] в соответствующем репере, убеждаемся, что J_q совпадает с $f^{\circ}_q(q)$. Таким образом, справедливо

Предложение 2. Отображение f_q ставит в соответствие распавшейся гиперквадрике $q \in \mathcal{H}(p)$ индикатрису J_q отображения $\pi_q \circ f$.

Заметим, что многообразия $\mathcal{H}(P)$ и $\mathcal{H}(p)$ обладают естественной структурой проективного пространства. Так как множество матриц, задающих распавшиеся гиперквадрики из $\mathcal{H}(p)$, содержит базис множества матриц, определяющих все гиперквадрики из $\mathcal{H}(p)$, получаем

Предложение 3. Отображение f_q является единственным продолжением на $\mathcal{H}(p)$ отображения f°_q, являющимся проективным отображением $\mathcal{H}(p) \to \mathcal{H}(P)$.

Предложения 2 и 3 геометрически полностью характеризуют отображение f_q.

4. Принадлежащая связке касательных в точке P к отображению f коллинеаций $K(P_J)$ локальная коллинеация K_0 [4],[5] определяется уравнениями

$$x^i = \Lambda^i_J X^J, \quad x^0 = X^0 - \gamma_{\mathcal{X}} X^{\mathcal{X}}, \qquad (II)$$

причем

$$\gamma_{\mathcal{X}} = \frac{1}{n+1} V^J_i \Lambda^i_{J\mathcal{X}}, \qquad (I2)$$

где V^J_i - компоненты матрицы, обратной к $[\Lambda^i_J]$. K_0 является, как и f, отображением $P \in P_n \mapsto p \in \hat{P}_n$, следовательно, оно также порождает отображение $\gamma_q: \mathcal{H}(p) \to \mathcal{H}(P)$ многообразий гиперквадрик. Повторяя рассуждения и построения, проведенные для отображения f_q, приходим к предложениям, аналогичным предложениям I-3, и к формулам

$$A_J = \Lambda^i_J a_i, \quad A_{J\mathcal{X}} = \Lambda^i_J \Lambda^j_{\mathcal{X}} a_{ij} - \Lambda^i_{(J}\gamma_{\mathcal{X})} a_i, \qquad (I3)$$

задающим отображение γ_q.

Так как отображение K_0 определяется отображением f, мы получаем два отображения $\mathcal{H}(p) \to \mathcal{H}(P)$ многообразий гиперквадрик, порож-

Поскольку комплекс K представляет собой пятимерное семейство двумерных плоскостей, то через неособую точку плоскости L проходит двупараметрическая совокупность плоскостей комплекса, образующих гиперконус C. Совместим точку A_0 с вершиной этого гиперконуса. Проективизация гиперконуса C с центром в точке A_0 представляет собой линейчатую поверхность PC пространства $P^4 = [A_1, A_2, A_3, A_4, A_5]$ с образующей $[A_1, A_2]$. При фиксированной точке A_0 формы ω^q_0 обращаются в нуль и из уравнений (7) получаем параметрические уравнения линейчатой поверхности PC в виде

$$\omega^p_k = \lambda^p_{k\ell}\theta^\ell. \qquad (8)$$

Теорема 1. Вершина гиперконуса C принадлежит характеристической прямой плоскости L тогда и только тогда, когда для этой точки прямолинейные образующие поверхности PC касаются некоторой двумерной поверхности.

Доказательство. Пусть вершина гиперконуса C принадлежит характеристической прямой плоскости L. Совместим точку A_0 с этой вершиной, прямую $[A_0, A_1]$ - с характеристической прямой, а трехмерную плоскость $[A_0, A_1, A_2, A_5]$ с касательной 3-плоскостью к соответствующему торсу. В этом случае из (5) следует, что $\Lambda^{\alpha 2}_5 = 0$. Ввиду чего уравнения (I) не содержат форму ω^5_2. Поэтому указанную форму можно включить в число базисных форм комплекса. Так как точка A_0 по предположению является неособой точкой, то формы ω^p_0 ($p=3,4,5$) линейно независимы, и их также можно включить в систему базисных форм комплекса. Дополняя данные четыре формы до базиса комплекса независимой формой θ, получим параметрические уравнения комплекса:

$$\omega^\tau_k = \lambda^\tau_{kp}\omega^p_0 + \lambda^\tau_k\theta, \quad \omega^5_1 = \lambda^5_{1p}\omega^p_0 + \lambda^5_1\theta, \qquad (9)$$

где $k=1,2$; $\tau=3,4$.

Рассмотрим теперь поверхность PC, соответствующую точке A_0. При фиксированной точке A_0 формы ω^p_0 обращаются в нуль и из (9) получим уравнения исследуемой поверхности в виде

$$\omega^\tau_k = \lambda^\tau_k\theta, \quad \omega^5_1 = \lambda^5_1\theta. \qquad (10)$$

Формы θ и ω^5_2 образуют базис на этой поверхности.

Рассмотрим произвольную точку $B = x^k A_k$ на прямой $[A_1, A_2]$ - образующей поверхности PC. Дифференциал этой точки в силу (IO) вычисляется так:

$$dB = (dx^k + x^\ell\omega^k_\ell)A_k + (x^k\lambda^3_k\theta)A_3 + (x^k\lambda^4_k\theta)A_4 + (x^1\lambda^5_1\theta + x^2\omega^5_2)A_5.$$

П р е д л о ж е н и е 5. Конус Π_b является множеством точек стационарности отображения $\varphi_q|_b$.

Итак, формула (I8) каждому $b \in B$ ставит в соответствие конус стационарности для слоя над b, т.е. имеется (n-I)-мерное семейство конусов стационарности.

П р е д л о ж е н и е 6. Семейство конусов стационарности отображения φ_q определяет множество X характеристических прямых отображения f.

Д о к а з а т е л ь с т в о. В семействе (I8) n конусов $\Pi^T_{\gamma x} X^\gamma X^x = 0$ образуют базис. Доказываемое утверждение теперь вытекает из формулы (I.II)[6], задающей характеристические направления отображения f.

Библиографический список

I. А н д р е е в Б.А. К теории точечных отображений//Дифференциальная геометрия многообразий фигур: Межвуз. темат. сб. науч. тр./ Калинингр. ун-т. Калининград, I989. Вып. 20. С. 9-I4.

2. А н д р е е в Б.А. К геометрии дифференцируемого отображения $f: P_m \to \hat{P}_n$ //Дифференциальная геометрия многообразий фигур: Межвуз. темат. сб. науч. тр./Калинингр. ун-т. Калининград, I987. Вып. I8. С. 5-9.

3. А н д р е е в Б.А. Некоторые типы характеристической конфигурации отображения f //Дифференциальная геометрия многообразий фигур: Сб. науч. тр./Калинингр. ун-т. Калининград, I980. Вып. II. С. 3-6.

4. Ч е х Э. Проективно-дифференциальная геометрия соответствий между двумя пространствами. I//Чехосл. матем. ж. I952. V. 2. №I. С. 9I-I07.

5. Р ы ж к о в В.В. Дифференциальная геометрия точечных соответствий между пространствами//Геометрия, I963. Итоги науки/ВИНИТИ. М., I965. С. 65-I07.

6. П а в л ю ч е н к о Ю.В., Рыжков В.В. Об изгибании точечных соответствий между пространствами//Тр. геометр. семинара/ВИНИТИ. М., I969. Т. 2. С. 263-275.

7. Vranceanu G., Sul tensore associato ad corrispondenza fra spazi proettivi // Boll. Unione mat. ital. 1957. V. 12. N4. P. 489-506.

УДК 5I4.755.5

О НЕКОТОРЫХ СВОЙСТВАХ ПЯТИМЕРНЫХ КОМПЛЕКСОВ ДВУМЕРНЫХ ПЛОСКОСТЕЙ В ПРОЕКТИВНОМ ПРОСТРАНСТВЕ P^5

И.В.Б у б я к и н

(Московский институт стали и сплавов)

I. Рассмотрим пятипараметрическое семейство двумерных плоскостей L в проективном пространстве P^5, т.е. пятимерный комплекс K. Свяжем с плоскостью L семейство точечных проективных реперов, образованных точками A_J ($I, J = 0, \ldots, 5$), так, чтобы точки A_i ($i, j = 0, 1, 2$) лежали в плоскости L. Обозначим через ω^J_I линейные дифференциальные формы, определяющие перемещение точечного репера. Перемещение плоскости $L = [A_0, A_1, A_2]$ в пространстве P^5 будут определять формы ω^p_i ($p, q = 3, 4, 5$). Поскольку плоскость L зависит от пяти параметров, то среди этих форм лишь пять линейно независимых. Поэтому комплекс K определяется четырьмя независимыми уравнениями

$$\Lambda^{\alpha i}_p \omega^p_i = 0, \quad \alpha = 1, 2, 3, 4. \tag{1}$$

Через каждую плоскость L комплекса K проходит в общем случае шесть его торсов [1]. Эти торсы находятся из условия [2]:

$$rang\,(\omega^p_i) = 1, \tag{2}$$

где формы ω^p_i удовлетворяют уравнениям (I). Условие (2) эквивалентно параметрическим уравнениям

$$\omega^p_i = a_i x^p dt. \tag{3}$$

Пусть M -произвольная точка плоскости L, тогда $M = x^i A_i$. Дифференциал этой точки в силу (3) записывается в виде

$$dM = (dx^i + x^j \omega^i_j) A_i + (a_i x^i)(x^p A_p)\, dt. \tag{4}$$

Отсюда следует, что прямая, определяемая в плоскости L уравнением $a_i x^i = 0$, является характеристической прямой торса (3), а трехмерная плоскость $[A_0, A_1, A_2, x^p A_p]$-касательной 3-плоскостью к этому торсу.

Из уравнений (1) в силу (3) получим

$$\Lambda^{\alpha i}_p a_i x^p = 0. \tag{5}$$

Эта система определяет трехмерную касательную плоскость к торсу, если

$$rang\,(\Lambda^{\alpha i}_p a_i) = 2. \tag{6}$$

Из условия (6) находятся тангенциальные координаты характеристических прямых на плоскости L.

2. Точка M плоскости L называется особой, если при изменении всех параметров комплекса она описывает некоторую поверхность [3]. Будем считать точку A_0 плоскости L неособой. В этом случае формы ω^p_0 являются линейно независимыми и их можно включить в число базисных форм комплекса. Дополним их до базиса комплекса независимыми θ^k ($k, \ell = 1, 2$). Тогда из уравнений (I) получаем параметрические уравнения комплекса в виде

$$\omega^p_k = \lambda^p_{kq} \omega^q_0 + \lambda^p_{k\ell} \theta^\ell. \tag{7}$$

денные отображением f для пары (P, p) .Рассмотрим порожденные отображением f композиции

$$\varphi_q = f_q \circ \gamma_q^{-1} : \quad Q \in \mathcal{H}(P) \longmapsto \varphi_q(Q) \in \mathcal{H}(P),$$

$$\hat{\varphi}_q = \gamma_q^{-1} \circ f_q : \quad q \in \mathcal{H}(p) \longmapsto \hat{\varphi}_q(q) \in \mathcal{H}(p).$$

Они являются преобразованиями многообразий гиперквадрик $\mathcal{H}(P)$ и $\mathcal{H}(p)$. Из (13),(6) и (7) получаем для φ_q :

$$\tilde{A}_\gamma = A_\gamma, \quad \tilde{A}_{\gamma\varkappa} = A_{\gamma\varkappa} + A_{(\gamma}\gamma_{\varkappa)} - \Gamma^\tau_{\gamma\varkappa} A_\tau, \tag{14}$$

где

$$\Gamma^\tau_{\gamma\varkappa} = V^\tau_i \Lambda^i_{\gamma\varkappa}, \tag{15}$$

а $\tilde{A}_\gamma, \tilde{A}_{\gamma\varkappa}$ -координаты гиперквадрики $\varphi_q(Q)$.

5.Рассмотрим объект

$$\Pi^\tau_{\gamma\varkappa} = \Gamma^\tau_{\gamma\varkappa} - \delta^\tau_{(\gamma}\gamma_{\varkappa)} \tag{16}$$

проективно-евклидовой связности Г.Зрэнчану [6],[7].Имеем

$$\mathring{\nabla} \Pi^\tau_{\gamma\varkappa} = 0. \tag{17}$$

Тензор $\Pi = \{\Pi^\tau_{\gamma\varkappa}\}$ каждой гиперплоскости $b \in B$ ставит в соответствие конус 2-го порядка Π_b :

$$A_\tau \Pi^\tau_{\gamma\varkappa} X^\gamma X^\varkappa = 0 \tag{18}$$

с вершиной в точке P .Конус Π_b тесно связан с геометрией отображения φ_q .

О п р е д е л е н и е 1. Конус Π_b называется конусом стационарности отображения φ_q для слоя над b .

Из (14) вытекает,что преобразование φ_q сохраняет слой над b . Для пересечения $Q \cap \varphi_q(Q)$,где $Q \in \mathcal{H}(P, b)$,из (14) после преобразований получаем:

$$A_{\gamma\varkappa} X^\gamma X^\varkappa + 2 A_\gamma X^\gamma X^0 = 0, \quad A_\tau \Pi^\tau_{\gamma\varkappa} X^\gamma X^\varkappa = 0. \tag{19}$$

О п р е д е л е н и е 2. Точка $A \in P_n$ называется точкой стационарности отображения $\varphi_p|_b$,если из $A \in Q$ вытекает $A \in \varphi_q|_b(Q)$.

Из (19) следуют два утверждения.

П р е д л о ж е н и е 4. Для любого $Q \in \mathcal{H}(P, b)$ пересечение $Q \cap \varphi_q(Q)$ является частью конуса стационарности для слоя над b .

Точка B будет описывать некоторую двумерную поверхность V при всевозможных перемещениях прямолинейной образующей поверхности PC , если

$$\operatorname{rang}\begin{pmatrix} x^\kappa \lambda^3_\kappa & x^\kappa \lambda^4_\kappa & x^1 \lambda^5_1 \\ 0 & 0 & x^2 \end{pmatrix} = 1.$$

Предположим,что $\det(\lambda^\tau_\kappa) \neq 0$ (случай,когда $\det(\lambda^\tau_\kappa) = 0$ приводит к результату,содержащемуся в теореме 2).Тогда из этого условия находим единственную точку A_1,описывающую двумерную поверхность V .Дифференциал этой точки в силу (10) определяется так: $dA_1 = \omega^1_1 A_1 + \omega^2_1 A_2 + \theta(\lambda^\rho_1 A_\rho)$. Отсюда видно,что плоскость $[A_1, A_2, \lambda^\rho_1 A_\rho]$ будет касательной к двумерной поверхности V .Поместим вершину A_5 репера в эту касательную плоскость.Тогда получим,что $\lambda^\tau_1 = 0$ и уравнения двумерной поверхности V запишется в виде

$$\omega^\tau_1 = 0. \tag{11}$$

Докажем теперь обратное утверждение.Предположим,что прямолинейные образующие поверхности PC касаются некоторой двумерной поверхности V .Совместим точку A_0 с вершиной гиперконуса C .Тогда уравнения поверхности PC можно привести к виду (8).Далее, совместим вершину A_1 репера с текущей точкой двумерной поверхности V .В касательную плоскость к этой двумерной поверхности поместим вершину A_5. В силу чего уравнения поверхности V примут вид (11).Уравнения (11) выполняются на комплексе K при фиксированной точке A_0 .Для произвольных перемещений точки A_0 на комплексе K будут выполняться уравнения $\omega^\tau_1 = \lambda^\tau_{1\rho}\omega^\rho_0$. В силу этих уравнений условие (6) запишется в виде

$$\operatorname{rang}\begin{pmatrix} \lambda^3_{13} a_0 - a_1 & \lambda^4_{13} a_0 & \Lambda^{3i}_3 a_i & \Lambda^{4i}_3 a_i \\ \lambda^3_{14} a_0 & \lambda^4_{14} a_0 - a_1 & \Lambda^{3i}_4 a_i & \Lambda^{4i}_4 a_i \\ \lambda^3_{15} a_0 & \lambda^4_{15} a_0 & \Lambda^{3i}_5 a_i & \Lambda^{4i}_5 a_i \end{pmatrix} = 2.$$

Отсюда видно,что этому условию удовлетворяют тангенциальные координаты $a_0 = a_1 = 0$,определяющие характеристическую прямую $[A_0, A_1]$. Точка A_0 ,являющаяся вершиной гиперконуса C ,принадлежит этой прямой. Теорема доказана. Аналогично доказывается

Т е о р е м а 2. Через вершину гиперконуса C проходят две характеристические прямые плоскости L, и при этом трехмерные касательные плоскости к соответствующим торсам различны тогда и только тогда,когда для этой точки поверхность PC является тангенциально вырожденной ранга два.

Библиографический список

1. Room T. G. The geometry of determinantal loci. Cambridge, 1938. 438 p.

2. А к и в и с М.А. К дифференциальной геометрии грассманова многообразия// Tensor. 1982. V.38. P.273-282.

3. К р у г л я к о в Л.З., Мизин А.Г. Допустимые комплексы коразмерности два многомерных плоскостей проективного пространства//Сиб.ж. 1986.Т.27.№5.С.110-115.

УДК 514.75

О НЕКОТОРЫХ СЕТЯХ, ПОСТРОЕННЫХ ПО ПСЕВДОФОКУСАМ НОРМАЛЕЙ ПОВЕРХНОСТИ V_2 В E_4

З.И. Г л и з б у р г

(Московский государственный педагогический институт)

Многообразие M_p погружено в виде поверхности в евклидово n-пространство $(n>p)$. Существуют различные конструктивные способы задания сети линий на этой поверхности. В работе рассмотрены способы построения сети линий на поверхности V_2 евклидова пространства E_4 при помощи псевдофокусов оснащающей и дополнительной нормалей, а также изучена связь свойств псевдофокусов нормалей со свойствами сети, их порождающей.

Отнесем гладкую поверхность V_2 в E_4 к подвижному реперу $R^A=\{A,\vec{e}_i,\vec{e}_\alpha\}$, в котором $A\in V_2, \vec{e}_i\in T_2(A)$, $\vec{e}_\alpha$ -составляют ортонормированный базис ортогонального дополнения $N_2(A)$ касательного пространства $T_2(A)$ поверхности V_2 в точке A. Здесь и далее индексы принимают следующие значения: $i,j=1,2$; $\alpha,\beta=3,4$; $\mathcal{I},\mathcal{J}=1,4$. Деривационные формулы такого репера имеют вид:

$$d\vec{A}=\omega^i\vec{e}_i;\quad d\vec{e}_i=\omega_i^j\vec{e}_j+\omega_i^\alpha\vec{e}_\alpha;\quad d\vec{e}_\alpha=\omega_\alpha^i\vec{e}_i+\omega_\alpha^\beta\vec{e}_\beta.$$

Поверхность V_2 относительно репера R^A определяется системой дифференциальных уравнений $\omega^\alpha=0$, продолжая которую имеем

$$\omega_i^\alpha=b_{ij}^\alpha\,\omega^j,\quad b_{ij}^\alpha=b_{ji}^\alpha. \tag{1}$$

Зададим на поверхности V_2 поле одномерной нормали (оснащающая нормаль). Задание поля нормали определяет на поверхности сеть Σ_2 линий кривизны относительно этой нормали [3],[2]. Выберем ортонормированный базис $\{\vec{e}_\alpha\}$ в плоскости $N_2(A)$ так, что вектор $\vec{e}_{\alpha_0}$ (α_0 -фиксированно) направлен вдоль оснащающей нормали. Единичные векторы $\vec{e}_i$

репера R^A направим по касательным к линиям кривизны относительно оснащающей нормали $[A,\vec{e}_{\alpha_0}]$. Тогда, как показано в [2], имеет место:

$$b_{ij}^{\alpha_0}=b_{ji}^{\alpha_0}=0. \tag{2}$$

В силу ортонормированности репера R^A имеем

$$\omega_{\mathcal{J}}^{\mathcal{I}}=-\omega_{\mathcal{I}}^{\mathcal{J}},\quad \omega_{\mathcal{I}}^{\mathcal{I}}=0. \tag{3}$$

1. Рассмотрим на поверхности V_2 в E_4, отнесенной к сети Σ_2 линий кривизны относительно оснащающей нормали, произвольную сеть Σ_2^*, образованную интегральными кривыми векторных полей $\vec{b}_i$:

$$\vec{b}_1=\vec{e}_1+\mu_1\vec{e}_2,\quad \vec{b}_2=\mu_2\vec{e}_1+\vec{e}_2\quad (\vec{b}_1\nparallel\vec{b}_2), \tag{4}$$

где μ_i -некоторые гладкие функции точки поверхности. Очевидно, что, положив в (4) $\mu_1=\mu_2=0$, получим векторные поля $\vec{b}_i$:

$$\vec{b}_1=\vec{e}_1,\quad \vec{b}_2=\vec{e}_2\quad (\vec{b}_1\nparallel\vec{b}_2), \tag{4'}$$

определяющие сеть Σ_2.

О п р е д е л е н и е. Псевдофокусом нормали $[A,\vec{e}_\alpha]$ относительно сети Σ_2^* назовем такую точку $F_\alpha^i\in[A,\vec{e}_\alpha]$, смещение которой при смещении точки A в направлении $\vec{b}_i$ не выходит из 3-плоскости $P_3(A)=[A,\vec{b}_j,\vec{e}_\alpha]$, $i\neq j$.

Если $\vec{F}_\alpha^i=\vec{A}+\lambda_\alpha^i\vec{e}_\alpha$, то $d\vec{F}_\alpha^i\in P_3(A)$ тогда и только тогда, когда $\omega^i+\lambda_\alpha^i\omega_\alpha^i-\mu_j(\omega^i\mu_i+\lambda_\alpha^i\omega_\alpha^j)=0$ ($i\neq j$; по i,j -нет суммирования). Учитывая формулы (1) и (3), на каждой из указанных нормалей получаем по два псевдофокуса относительно заданной сети Σ_2^* с координатами:

$$\lambda_\alpha^i=\frac{\mu_i\mu_j-1}{\mu_i\mu_j b_{jj}^\alpha-b_{ii}^\alpha+(\mu_j-\mu_i)b_{ij}^\alpha}\quad (i\neq j). \tag{5}$$

З а м е ч а н и е 1. Из (4) и (5) следует, что псевдофокусы оснащающей (дополнительно) нормали относительно сети Σ_2 совпадают тогда и только тогда, когда выполняется условие: $b_{11}^{\alpha_0}=b_{22}^{\alpha_0}$ ($b_{11}^\alpha=b_{22}^\alpha$, $\alpha\neq\alpha_0$).

Рассмотрим вектор нормальной кривизны $\vec{K}_n$ произвольной кривой γ на поверхности V_2 в точке A: $\vec{K}_n(\gamma)=\frac{1}{ds^2}\cdot\omega^i\omega^j\cdot b_{ij}^\alpha\vec{e}_\alpha$, где s -натуральный параметр кривой γ. Полагая в формуле (5) $\alpha=\alpha_0$, учитывая условие (2) и замечание 1, получим следующие утверждения:

Т е о р е м а 1. В некоторой окрестности точки поверхности $V_2\subset E_4$ следующие условия эквивалентны: 1) $b_{11}^{\alpha_0}=b_{22}^{\alpha_0}$; 2) псевдофокусы оснащающей нормали совпадают; 3) псевдофокусы оснащающей нормали относительно любой сети совпадают; 4) проекции векторов нормальных кривизн линий сети Σ_2 на оснащающую нормаль равны.

Т е о р е м а 2. В окрестности точки $A \in V_2 \subset E_4$,в которой имеет место $b^{\alpha_0}_{11} \neq b^{\alpha_0}_{22}$,следующие условия эквивалентны: I)псевдофокусы оснащающей нормали относительно произвольной сети Σ^*_2 совпадают; 2)касательные к линиям произвольной сети Σ^*_2 ,отличной от сети Σ_2 ,и касательные к линиям кривизны относительно оснащающей нормали гармонически разделяют друг друга; 3)векторы нормальных кривизн $\vec{K}^1_n$, $\vec{K}^2_n$ линий произвольной сети Σ^*_2 удовлетворяют условию: $\vec{K}^2_n = \vec{K}^1_n - \frac{1}{1+\mu_1^2} \cdot 4\mu_1 b^{\alpha}_{12} \vec{e}_\alpha$ $(\alpha \neq \alpha_0)$, где μ_1-функция из условия (4).

З а м е ч а н и е 2. Если поверхность $V_2 \subset E_3$,то условие 3 теоремы 2 следует заменить условием равенства нормальных кривизн линий рассматриваемой сети.

Полагая в формуле (5) $\alpha \neq \alpha_0$ и учитывая замечание I,можно показать,что справедливы

Т е о р е м а 3. Если в некоторой окрестности точки A поверхности $V_2 \subset E_4$ сеть линий кривизны относительно оснащающей нормали является сетью линий кривизны (т.е.сетью линий кривизны относительно любой одномерной нормали),то следующие условия эквивалентны: I) $b^{\alpha}_{11} \equiv b^{\alpha}_{22}$ $(\alpha \neq \alpha_0)$, 2)псевдофокусы дополнительной нормали относительно сети линий кривизны относительно оснащающей нормали совпадают, 3)псевдофокусы дополнительной нормали относительно любой сети совпадают.

Т е о р е м а 4. Если псевдофокусы дополнительной нормали поверхности $V_2 \subset E_4$ совпадают относительно сети Σ_2 линий кривизны относительно оснащающей нормали,то сеть Σ_2 является сетью линий кривизны на поверхности $V_2 \subset E_4$ тогда и только тогда,когда псевдофокусы дополнительной нормали любой сети совпадают.

Потребовав одновременно совпадения псевдофокусов оснащающей и дополнительной нормалей,из формул (5) вытекает

Т е о р е м а 5. В окрестности точки $A \in V_2 \subset E_4$,в которой выполняется условие $b^{\alpha_0}_{11} \neq b^{\alpha_0}_{22}$,сеть Σ_2 линий кривизны относительно оснащающей нормали является сетью линий кривизны тогда и только тогда,когда существует сеть,относительно которой псевдофокусы оснащающей и дополнительной нормалей совпадают одновременно.

С л е д с т в и е I(из теорем 2,5). I) Если касательные к линиям произвольной сети Σ^*_2 на поверхности $V_2 \subset E_4$ и касательные к линиям сети Σ_2 линий кривизны относительно оснащающей нормали гармонически разделяют друг друга,то сеть Σ_2 является сетью линий кривизны на $V_2 \subset E_4$ тогда и только тогда,когда псевдофокусы дополнительной нормали относительно сети Σ^*_2 совпадают. 2)Если в окрестности точки $A \in V_2 \subset E_4$, в которой выполняется условие $b^{\alpha_0}_{11} = b^{\alpha_0}_{22}$, сеть Σ_2 линий кривизны относительно оснащающей нормали является

сетью линий кривизны,то касательные к линиям произвольной сети Σ^*_2 и касательные к линиям кривизны гармонически разделяют друг друга тогда и только тогда,когда псевдофокусы дополнительной нормали относительно сети Σ^*_2 совпадают.

Рассмотрим на оснащающей и дополнительной нормалях точки F^M_α с координатами

$$\lambda^M_\alpha = \frac{2}{b^{\alpha}_{11} + b^{\alpha}_{22}} = \frac{1}{\text{Пр}_{\vec{e}_\alpha} \vec{M}},$$

где $\vec{M} = \frac{1}{2}\gamma^{ij} b^{\alpha}_{ij} \vec{e}_\alpha$ -вектор средней кривизны поверхности V_2 в точке A [3]. Можно показать,что имеет место

Т е о р е м а 6. Справедливы предложения: I)на каждой из нормалей $[A, \vec{e}_\alpha]$ совпавшие псевдофокусы совпадают с точкой F^M_α ; 2)относительно произвольной сети попарно различные точки $A, F^1_\alpha, F^2_\alpha, F^M_\alpha$ на каждой из нормалей $[A, \vec{e}_\alpha]$ образуют гармоническую четверку.

С л е д с т в и е 2 (из теорем I,6 п.2). Псевдофокусы оснащающей нормали относительно любой сети совпадают с точкой $F^M_{\alpha_0}$ тогда и только тогда,когда в любой точке поверхности $V_2 \subset E_4$ выполняется условие $b^{\alpha_0}_{11} = b^{\alpha_0}_{22}$.

2.Решим вопрос о том,как по псевдофокусам нормалей однозначно построить сеть на поверхности.В силу теоремы 6 координаты псевдофокусов нормали не определяют однозначно сеть,порождающую их.Для однозначного определения сети Σ^*_2 на поверхности рассмотрим на каждой из нормалей $[A, \vec{e}_\alpha]$ по точке $F^{12}_{\alpha *}$,являющейся псевдофокусом соответствующей нормали относительно сети Σ'^*_2 $(\vec{b}_1, \vec{b}_1 + \vec{b}_2)$ при смещении точки A в направлении $\vec{b}_1$,где $\vec{b}_i$ -векторные поля из условия (4) , определяющие искомую сеть Σ^*_2 .Тогда координаты $\lambda^{12}_{\alpha *}$ указанных псевдофокусов имеют вид:

$$\lambda^{12}_{\alpha *} = \frac{\mu_1\mu_2 - 1}{\mu_1\mu_2 b^{\alpha}_{22} - b^{\alpha}_{11} + \mu_1(b^{\alpha}_{22} - b^{\alpha}_{11}) + b^{\alpha}_{12}(\mu_2 - \mu_1 + 1 - (\mu_1)^2)}. \qquad (6)$$

а)На одной из нормалей рассмотрим две произвольные различные точки F^1_α и $F^{12}_{\alpha *}$,не являющиеся проективно симметричными с точками A и F^M_α .Считаем их координаты λ^1_α и $\lambda^{12}_{\alpha *}$ известными.Тогда искомые функции μ_i ,определяющие по условию (4) векторные поля $\vec{b}_i$,задающие сеть Σ^*_2 на поверхности V_2 ,найдем,решая совместно (5) и (6) (по α -нет суммирования):

$$\mu_1 = \frac{\lambda^1_\alpha - \lambda^{12}_{\alpha *} + b^{\alpha}_{12}\lambda^1_\alpha \lambda^{12}_{\alpha *}}{\lambda^{12}_{\alpha *}(1 - \lambda^1_\alpha b^{\alpha}_{22})},$$

$$\mu_2 = \frac{\lambda^{12}_{\alpha *}(1 - \lambda^1_\alpha b^{\alpha}_{22})(1 - \lambda^1_\alpha b^{\alpha}_{11}) - b^{\alpha}_{12}\lambda^1_\alpha(\lambda^1_\alpha - \lambda^{12}_{\alpha *} + b^{\alpha}_{12}\lambda^1_\alpha \lambda^{12}_{\alpha *})}{(1 - \lambda^1_\alpha b^{\alpha}_{22})(\lambda^1_\alpha - \lambda^{12}_{\alpha *})}.$$

З а м е ч а н и е 3. В силу следствия 2 на поверхности, в любой точке которой выполняется условие $b_{11}^{\alpha_0} = b_{22}^{\alpha_0}$, однозначное построение сети по псевдофокусам $F_{\alpha_0}^{1}$ и $F_{\alpha_0 *}^{12}$ оснащающей нормали невозможно.

б) На каждой из нормалей $[A, \vec{e}_\alpha]$ выберем по произвольной точке F_α^1 с координатами λ_α^1 соответственно. Тогда из (5) в общем случае получим две пары функций: μ_i и $\tilde{\mu}_i$, определяющие по условию (4) взаимные [I] сети Σ_2^* и $\tilde{\Sigma}_2^*$. Можно показать, что для однозначного определения сети $\Sigma_2^* (\tilde{\Sigma}_2^*)$ достаточно, кроме задания точек F_α^1 на каждой из нормалей, выбрать на одной из них дополнительно точку $F_{\alpha *}^{12} (\tilde{F}_{\alpha *}^{12})$, являющуюся псевдофокусом соответствующей нормали относительно сети $\Sigma_2^{/*} (\vec{b}_1, \vec{b}_1 + \vec{b}_2)$ $(\tilde{\Sigma}_2^{/*} (\vec{\tilde{b}}_1, \vec{\tilde{b}}_1 + \vec{\tilde{b}}_2))$ при смещении точки A в направлении $\vec{b}_1$ $(\vec{\tilde{b}}_1)$, где $\vec{b}_i$ $(\vec{\tilde{b}}_i)$ -векторные поля, определяющие искомую сеть $\Sigma_2^* (\tilde{\Sigma}_2^*)$.

3. Очевидно, что, накладывая соответствующие условия на функции μ_i, определяющие сеть Σ_2^*, можно за счет специального выбора координат точек - псевдофокусов нормалей любой из представленных здесь способов использовать для построения сети с определенными заданными свойствами (ортогональной, асимптотической, сопряженной, сети линий кривизны относительно одной из нормалей и т.д.). Причем способ построения взаимных сетей существенно отличается от других, если обе сети одновременно обладают одним и тем же свойством.

Из рассмотренного выше ясно, что свойства сети на поверхности тесно связаны с расположением псевдофокусов нормалей относительно этой сети. В частности, например, можно отметить:

У т в е р ж д е н и е I. Для ортогональной сети Σ_2^* следующие условия эквивалентны: I) псевдофокусы оснащающей нормали относительно сети Σ_2^* совпадают; 2) сети Σ_2^* и Σ_2 биссекторны; 3) точка $A \in V_2$, псевдофокусы сети Σ_2 линий кривизны относительно оснащающей нормали и любой из псевдофокусов сети Σ_2^* образуют гармоническую четверку точек оснащающей нормали; 4) псевдофокусы $F_{\alpha_0}^{1}, F_{\alpha_0}^{2}, F_{\alpha_0 *}^{12}$ сетей Σ_2^*, Σ_2 и сети $\Sigma_2^{/*} (\vec{b}_1, \vec{b}_1 + \vec{b}_2)$ ($\vec{b}_i$ -векторные поля, задающие сеть Σ_2^*) и точка $A \in V_2$ образуют гармоническую четверку точек оснащающей нормали.

У т в е р ж д е н и е 2. Если сеть Σ_2^* и сеть Σ_2 линий кривизны относительно оснащающей нормали биссекторны, то в окрестности точки $A \in V_2 \subset E_4$, в которой $b_{11}^{\alpha_0} \neq b_{22}^{\alpha_0}$, следующие условия эквивалентны: 1) сеть Σ_2 является сетью линий кривизны; 2) псевдофокусы дополнительной нормали относительно сети Σ_2^* совпадают; 3) существует сеть, относительно которой псевдофокусы оснащающей и дополнительной нормалей совпадают одновременно; 4) точка $A \in V_2$, псевдофокусы сети Σ_2 и любой из псевдофокусов сети Σ_2^* образуют гармоническую четверку точек дополнительной нормали; 5) псевдофокусы $F_\alpha^1, F_\alpha^2, F_\alpha^{12}$ $(\alpha \neq \alpha_0)$ сетей $\Sigma_2^*, \Sigma_2, \Sigma_2^{/*}$ и точка $A \in V_2$ образуют гармоническую четверку точек дополнительной нормали.

Библиографический список

I. Б а з ы л е в В.Т. О многомерных сетях в евклидовом пространстве// Литов.матем.сб.1966.Т.6.№4.С.475-491.

2. Б а з ы л е в В.Т. Об одном свойстве геодезических линий на многомерных поверхностях//Вопросы дифференциальной геометрии: Уч.зап./ МГПИ им.В.И.Ленина.М.,1970.Т.I.№374.С.52-56.

3. Эйзенхарт Л.П. Риманова геометрия.М.:ГИИЛ.1948.

УДК 514.75

АФФИННАЯ СВЯЗНОСТЬ, АССОЦИИРОВАННАЯ С $\mathcal{H}$-РАСПРЕДЕЛЕНИЕМ

М.Ф. Г р е б е н ю к
(Киевское авиационное училище)

Настоящая работа относится к дифференциальной геометрии составных распределений многомерного аффинного пространства A_{n+1}. Рассматривается трехсоставное распределение $H(M(\Lambda))$ [1],[2], которое будем называть $\mathcal{H}$-распределением. Получена аффинная связность Γ, внутренне определенная самим $\mathcal{H}$-распределением. Показано, что связность Γ относится к классу аффинных связностей, определенных путем проектирования, если за направление проектирования принять оснащающую плоскость $\mathcal{N}_{n+1-r}(A)$. Работа является продолжением работ [1],[2].

I. Рассмотрим пространство аффинной связности $A_{n+1,r}$, $(n+1)$-мерной базой которого является аффинное пространство A_{n+1}, а слоями - (r-мерные центроаффинные пространства) - плоскости H_r соответствующих r-мерных элементов базисного Λ-распределения данного $\mathcal{H}$-распределения.

Аффинную связность Γ пространства $A_{n+1,r}$ всегда можно определить при помощи системы форм $\{\theta^p, \theta_q^p\}$ [4],[5]: $\theta^p = \omega^p - \Gamma_{0K}^p \omega^K$, $\theta_q^p = \omega_q^p - \Gamma_{qK}^p \omega^K$, удовлетворяющих структурным уравнениям: $\mathcal{D}\theta^p = \theta^q \wedge \theta_q^p + \omega^K \wedge \Delta\Gamma_{0K}^p$,

$$\mathcal{D}\theta_q^p = \theta_q^r \wedge \theta_r^p + \omega^K \wedge \Delta\Gamma_{qK}^p, \quad \text{где} \quad \Delta\Gamma_{0K}^p = \nabla\Gamma_{0K}^p + \delta_K^{n+1}\omega_{n+1}^p - \Gamma_{qK}^p\omega^q - \Gamma_{0K}^q\Gamma_{qJ}^p\omega^J - \Lambda_{uK}^p\omega^u,$$

$$\Delta\Gamma_{qK}^p = \nabla\Gamma_{qK}^p + \Lambda_{qK}\omega_{n+1}^p + (\Lambda_{qK}^u \Lambda_{uJ}^p - \Gamma_{qK}^r\Gamma_{rJ}^p)\omega^J.$$

Формы $\Delta\Gamma_{0K}^p$, $\Delta\Gamma_{qK}^p$, ω^K на $\mathcal{H}$-распределении образуют вполне интегрируемую систему и определяют над исходной базой (ω_0^K) поле геометрического объекта $\{\Gamma_{0K}^p, \Gamma_{qK}^p\}$. Для того, чтобы формы θ^p, θ_q^p определяли аффинную связность в слоях (плоскостях H_r) пространства аффинной связности $A_{n+1,r}$, необходимо и достаточно, чтобы было задано поле объекта связности $\{\Gamma^p_{0x}, \Gamma^p_{qx}\}$, т.е. чтобы выполнялись дифференциальные уравнения [3],[4]:

$$\Delta\Gamma^p_{0x} = \Gamma^p_{0x\ell}\,\omega^\ell, \qquad \Delta\Gamma^p_{qx} = \Gamma^p_{qx\ell}\,\omega^\ell. \tag{I}$$

Структурные уравнения для форм θ^p, θ^p_q имеют вид:

$$\mathcal{D}\theta^p = \theta^q\wedge\theta^p_q + \frac{1}{2} R^p_{0x\ell}\,\omega^x\wedge\omega^\ell, \quad \mathcal{D}\theta^p_q = \theta^r_q\wedge\theta^p_r + \frac{1}{2} R^p_{qx\ell}\,\omega^x\wedge\omega^\ell,$$

где тензор $\{R^p_{0x\ell}, R^p_{qx\ell}\}$ является тензором кручения-кривизны аффинной связности Γ пространства $A_{n+1,r}$ и $R^p_{0x\ell}=2\Gamma^p_{0[x\ell]}$, $R^p_{qx\ell}=2\Gamma^p_{q[x\ell]}$.

2. Пусть Λ-распределение оснащено, т.е. в каждом центре A элемента $\mathcal{H}$-распределения внутренним инвариантным образом присоединена оснащающая плоскость $\mathcal{N}_{n+1-r}(A)$, проходящая через центр $\mathcal{H}$-распределения, где $\mathcal{N}_{n+1-r}(A) = [\vec{\mathcal{K}}_u, \vec{\mathcal{K}}_{n+1}]$, $\vec{\mathcal{K}}_{n+1} = \vec{e}_{n+1} + H^p_{n+1}\vec{e}_p$, $\vec{\mathcal{K}}_u = \vec{e}_u + H^p_u\vec{e}_p$. Из условия инвариантности плоскости $\mathcal{N}_{n+1-r}(A)$ приходим к уравнениям:

$$\nabla_\delta H^p_{n+1} + \pi^p_{n+1} - H^p_{n+1}\pi^{n+1}_{n+1} - H^p_v\pi^v_{n+1} = 0, \qquad \nabla_\delta H^p_u = 0. \tag{2}$$

В дифференциальных окрестностях первого и второго порядков строим объекты

$$a^u_{pq} = \frac{1}{2}(\Lambda^u_{pq} + \Lambda^u_{qp}), \qquad \nabla a^u_{pq} + a_{pq}\,\omega^u_{n+1} = a^u_{pqx}\,\omega^x,$$

$$a^u = \frac{1}{r}\, a^{pq}\, a^u_{pq}, \qquad \nabla a^u - a^u\omega^{n+1}_{n+1} + \omega^u_{n+1} = a^u_x\,\omega^x,$$

$$b^{pq}_u = \Lambda^p_{ur}\, a^{rq} - \hat{a}_u\, a^{pq}, \qquad \nabla b^{pq}_u - b^{pq}_u\,\omega^{n+1}_{n+1} = b^{pq}_{ux}\,\omega^x,$$

$$b_{pq} = a^{st} a^{r\ell} B_{srp} B_{t\ell q}, \qquad \nabla b_{pq} = b_{pqx}\,\omega^x,$$

$$b_{pq}\, b^{qr} = \delta^r_p, \qquad \nabla b^{qr} = b^{qr}_x\,\omega^x,$$

$$\ell_p = B_{pqs}\, b^{qs}, \qquad \nabla \ell_p = -\ell_p\,\omega^{n+1}_{n+1} + \ell_{px}\,\omega^x.$$

Уравнения (2) выполняются, если положить

$$H^p_{n+1} = a^u b^{pq}_u \ell_q + \nu^p, \qquad H^p_u = -b^{pq}_u \ell_q, \tag{3}$$

где квазитензор $\{\nu^p\}$ определяет инвариантную нормаль первого рода $\mathcal{H}$-распределения. Таким образом, инвариантная оснащающая плоскость $\mathcal{N}_{n+1-r}(A)$ определена векторами $\vec{\mathcal{K}}_{n+1} = \vec{e}_{n+1} + (a^u b^{pq}_u \ell_q + \nu^p)\vec{e}_p$, $\vec{\mathcal{K}}_u = \vec{e}_u - b^{pq}_u \ell_q \vec{e}_p$. Порядок дифференциальной окрестности, в которой определена плоскость $\mathcal{N}_{n+1-r}(A)$, зависит от порядка квазитензора $\{\nu^p\}$, но он всегда выше второго порядка.

3. Нетрудно проверить, что уравнения (I) удовлетворяются, если охваты компонент объекта аффинной связности $\Gamma = \{\Gamma^p_{0x}, \Gamma^p_{qx}\}$ осуществить следующим образом:

$$\begin{cases} \Gamma^p_{0q} = 0, \quad \Gamma^p_{0u} = -b^{pq}_u \ell_q, \quad \Gamma^p_{0\,n+1} = a^u b^{pq}_u \ell_q + \nu^p, \\ \Gamma^p_{qx} = \Lambda_{qx}(a^u b^{pt}_u \ell_t + \nu^p) - \Lambda^u_{qx} b^{pr}_u \ell_r. \end{cases} \tag{4}$$

Таким образом, доказано, что слоевые формы θ^p, θ^p_q пространства аффинной связности $A_{n+1,r}$, внутренне определенного на $\mathcal{H}$-распределении и ассоциированного с Λ-распределением, имеют вид:

$$\theta^p = \omega^p + b^{pq}_u \ell_q\,\omega^u - (a^u b^{pq}_u \ell_q + \nu^p)\,\omega^{n+1},$$

$$\theta^p_q = \omega^p_q - (\Lambda_{qx} a^u b^{pt}_u \ell_t + \Lambda_{qx}\nu^p - \Lambda^u_{qx} b^{pr}_u \ell_r)\,\omega^x.$$

4. Следуя работе [5], можно показать, что построенная аффинная связность Γ относится к классу аффинных связностей, определенных путем проектирования. Действительно, при определяющем связность отображении

$$\vec{A}(u+du) \to \vec{A}(u,du), \quad \vec{e}_x(u+du) \to \vec{e}_x(u,du) \tag{5}$$

образом текущей плоскости Λ-распределения $[\vec{A}(u+du), \vec{e}_p(u+du)] = H_r(u+du)$ является плоскость $H_r(u,du) = [\vec{A}(u,du), \vec{e}_p(u,du)]$:

$$\vec{A}(u,du) = \vec{A}(u) + \omega^J \vec{e}_J(u) + [2], \quad \vec{e}_p(u,du) = \vec{e}_p(u) + \omega^J_p \vec{e}_J(u) + [2].$$

Спроектируем на текущую плоскость Λ-распределения $H_r(u) = [\vec{A}(u), \vec{e}_p(u)]$ образ $H_r(u,du) = [\vec{A}(u,du), \vec{e}_p(u,du)]$ соседней плоскости $H_r(u+du) = [\vec{A}(u+du), \vec{e}_p(u+du)]$ параллельно оснащающей плоскости $\mathcal{N}_{n+1-r}(A)$. Эта проекция определяет отображение:

$$\vec{A}(u,du) \to \tilde{\vec{A}}(u,du) = \vec{A}(u,du) + \ell^{n+1}\vec{\mathcal{K}}_{n+1} + \ell^u \vec{\mathcal{K}}_u =$$

$$= \vec{A}(u) + (\omega^p + \ell^{n+1} H^p_{n+1} + \ell^u H^p_u)\vec{e}_p + (\omega^u + \ell^u)\vec{e}_u + (\omega^{n+1} + \ell^{n+1})\vec{e}_{n+1}, \tag{6}$$

$$\vec e_p(u,du)\to\vec{\tilde e}_p(u,du)=\vec e_p(u,du)+\ell_p^{n+1}\vec{\mathcal K}_{n+1}+\ell_p^{v}\vec{\mathcal K}_v=$$

$$=\vec e_p(u)+(\omega_p^q+\ell_p^{n+1}H^q_{n+1}+\ell_p^vH^q_v)\vec e_q+(\omega_p^u+\ell_p^u)\vec e_u+(\omega_p^{n+1}+\ell_p^{n+1})\vec e_{n+1}. \qquad (7)$$

Коэффициенты ℓ^{n+1}, ℓ^u, ℓ_p^{n+1}, ℓ_p^v определим из условия: проекции $\vec{\tilde A}(u,du)$, $\vec{\tilde e}_p(u,du)$ векторов $\vec A(u,du)$, $\vec e_p(u,du)$ должны располагаться в плоскости $H_r(u)=[\vec A(u), \vec e_p(u)]$, т.е. в разложениях (6) и (7) должны отсутствовать члены с $\vec e_u$ и $\vec e_{n+1}$. В результате получаем, что $\ell^u=-\omega^u$, $\ell^{n+1}=-\omega^{n+1}$, $\ell^u_p=-\omega^u_p$, $\ell^{n+1}_p=-\omega^{n+1}_p$. Суперпозиция отображений (5) и (6)-(7) задает отображение, определяющее аффинную связность на $\mathcal H$-распределении, определенную путем проектирования: $\vec A(u,du)\to\vec{\tilde A}(u,du)=\vec A(u)+\theta^p\vec e_p$, $\vec e_p(u,du)\to\vec{\tilde e}_p(u,du)=\vec e_p(u)+\theta^q_p\vec e_q$. Здесь формы θ^p, θ^p_q : $\theta^p=\omega^p-H^p_{n+1}\omega^{n+1}-H^p_u\omega^u$, $\theta^p_q=\omega^p_q-H^p_{n+1}\omega^{n+1}_q-H^p_v\omega^v_q$ определяют главную часть полученного отображения и являются формами аффинной связности Г на $\mathcal H$-распределении, определенной путем проектирования. Объект этой связности определяется формулами (4).

Библиографический список

I.Г р е б е н ю к М.Ф. Поля геометрических объектов трехсоставного распределения аффинного пространства A_{n+1} //Дифференциальная геометрия многообразий фигур:Межвуз.темат.сб.науч.тр./Калинингр.ун-т. Калининград.Вып.I8.I987.С.2I-24.

2.Г р е б е н ю к М.Ф. К геометрии $H(M(\Lambda))$-распределений аффинного пространства/Калинингр.ун-т.Калининград,I988.I7с.Деп.в ВИНИТИ I8.II.88. № 8204-В88.

3.Л а п т е в Г.Ф. Дифференциальная геометрия погруженных многообразий//Тр.Моск.матем.о-ва.ГИТТЛ.М.,I953.Т.2.С.275-382.

4.Л а п т е в Г.Ф. Многообразия,погруженные в обобщенные пространства// Тр. IУ Всес.матем.съезда,I96I.Л.:Наука,I964.Т.2.

5.Л а п т е в Г.Ф.,О с т и а н у Н.М. Распределения m-мерных линейных элементов в пространстве проективной связности.I//Тр.геом. семинара/ВИНИТИ.М.,I97I.Т.3.С.49-94.

УДК 5I4.75

О ПАРЕ ГИПЕРРАСПРЕДЕЛЕНИЙ В ПРОЕКТИВНОМ ПРОСТРАНСТВЕ

Т.А.Д у л а л а е в а

(Елабужский педагогический институт)

В работе продолжается построение дифференциальной геометрии пары гиперраспределений в n-мерном проективном пространстве. Рассматривает-

ся частный случай, когда все фокусы прямой (AA_n) совпадают.

В проективном пространстве P_n заданы: I) две диффеоморфные области Ω и $\bar\Omega$, 2) (n-I)-распределения Δ в области Ω и $\bar\Delta$ в области $\bar\Omega$, 3) диффеоморфизм $f:\Omega\to\bar\Omega$ такой, что $\forall A\in\Omega, f(A)\notin\Delta(A)$, $\forall B\in\bar\Omega, f^{-1}(B)\notin\bar\Delta(B)$. Тогда в пространстве P_n определена пара гиперраспределений $(\Delta,\bar\Delta)$. Присоединим к паре областей Ω и $\bar\Omega$ подвижные проективные реперы $\mathcal R^A=(A,A_1,A_2,\dots,A_{n-1},A_n)$ и $\bar{\mathcal R}^{A_n}=(A_n,A_1,\dots,A_{n-1},A)$, где $A\in\Omega$, $A_n\in\bar\Omega$, $A_i\in\Delta(A)\cap\bar\Delta(A_n)$ $(i,j,k=1,2,\dots,n-1)$. Система дифференциальных уравнений, определяющих пару гиперраспределений $(\Delta,\bar\Delta)$, имеет вид:

$$\omega^n_i=L_{i\alpha}\omega^\alpha,\quad \theta^n_i=\bar L_{i\alpha}\theta^\alpha,\quad \theta^\alpha=\Lambda^\alpha_\beta\omega^\beta \qquad (\alpha,\beta=1,2,\dots,n). \qquad (I)$$

Линия ℓ, как и линия $f(\ell)$, называется двойной линией пары гиперраспределений $(\Delta,\bar\Delta)$, если она является линией пары гиперраспределений $(\Delta,\bar\Delta)$ и одновременно двойной линией отображения f. Ясно, что точка пересечения касательных соответствующих двойных линий пары гиперраспределений $(\Delta,\bar\Delta)$ принадлежит пересечению $\Delta(A)\cap\bar\Delta(A_n)$. Необходимым и достаточным условием существования двойных линий пары гиперраспределений $(\Delta,\bar\Delta)$ является совпадение фокусов $F^i=\bar F^i$ прямой (AA_n) [2].

I. Пусть гиперраспределения Δ, $\bar\Delta$ являются соответствующими в индуцированном отображении f_*. Тогда возможны, по крайней мере, $n-1$ различных двойных линий пары гиперраспределений $(\Delta,\bar\Delta)$. Поместим вершины A_i репера $\mathcal R^A$ в точки пересечения касательных соответствующих двойных линий пары гиперраспределений $(\Delta,\bar\Delta)$. Будем иметь

$$\Lambda^n_i=0,\quad \Lambda^j_i=0\quad (i\neq j). \qquad (2)$$

При этом $F^i=\bar F^i=-\Lambda^i_iA+A_n$.

Рассмотрим случай, когда все фокусы прямой (AA_n) совпадают

$$\Lambda^1_1=\Lambda^2_2=\dots=\Lambda^{n-1}_{n-1}, \qquad (3)$$

т.е. $F^1=F^2=\dots=F^{n-1}=-\Lambda^1_1A+A_n$. Имеют место следующие соотношения:

$$\Lambda^i_{jk}+\Lambda^i_nL_{jk}=0,\quad \Lambda^i_{jn}+\Lambda^i_nL_{jn}=0,\quad \Lambda^i_{i\alpha}+\Lambda^i_nL_{i\alpha}=\Lambda^j_{j\alpha}+\Lambda^j_nL_{j\alpha},$$

$$\Lambda^n_{ij}=(\Lambda^1_1)^2\bar L_{ij}-\Lambda^n_nL_{ij},\quad \Lambda^n_{in}=\Lambda^1_1\bar L_{ij}\Lambda^j_n-\Lambda^n_nL_{in}\quad (i\neq j, \text{ нет суммирования}).$$

Учитывая, что $\Lambda^i_{jk}=\Lambda^i_{kj}$ и $\Lambda^n_{ij}=\Lambda^n_{ji}$, получим

$$L_{jk}=L_{kj},\quad (\Lambda^1_1)^2\bar H_{ij}=\Lambda^n_nH_{ij}, \qquad (4)$$

где $H_{ij}=\frac12(L_{ij}-L_{ji})$, $\bar H_{ij}=\frac12(\bar L_{ij}-\bar L_{ji})$ -тензоры неголономности гиперраспределений Δ и $\bar\Delta$ соответственно. Справедлива

Т е о р е м а 1. Если фокусы прямой (AA_n) совпадают, то гиперраспределения Δ, $\bar\Delta$ голономны.

4 Зак. 1209

Пара голономных гиперраспределений $(\Delta,\bar\Delta)$ с совпавшими фокусами прямой (AA_n) в проективном пространстве P_n существует с произволом двух функций n аргументов [3]. При смещении точки A по линии $\omega^i=\ell^i\theta$, $\omega^n=0$, принадлежащей гиперраспределению Δ, имеем

$$dA=\omega_0^0A+\ell^iA_i\theta,\qquad dA_n=\theta_0^0A_n+\Lambda_1^1\ell^iA_i\theta.$$

Любая линия на интегральных многообразиях пары голономных гиперраспределений $(\Delta,\bar\Delta)$ является двойной линией. Точка $F^1=-\Lambda_1^1A+A_n$, единственный фокус прямой (AA_n), неподвижна при смещении по линии, принадлежащей гиперраспределению Δ. Интегральные многообразия пары голономных гиперраспределений $(\Delta,\bar\Delta)$ перспективны с центром перспективы в точке F^1 [3].

На касательных (AA_i) и (A_nA_i) к двойным линиям пары гиперраспределений $(\Delta,\bar\Delta)$ определены псевдофокусы [1] F_i^j и $\bar F_i^j$ $(i\neq j)$ соответственно $F_i^j=-a_{ij}^jA+A_i$, $\bar F_i^j=-\frac{a_{ij}^j}{\Lambda_1^1}A_n+A_i$. Прямые, соединяющие соответствующие псевдофокусы F_i^j и $\bar F_i^j$, принадлежат связке прямых с центром F^1 в фокусе прямой (AA_n). При этом прямые $(F_i^jF_j^i)$, $(\bar F_i^j\bar F_j^i)$ пересекаются в точке $F_{ij}=a_{ji}^iA_i-a_{ij}^jA_j$. Обозначим через A_{ij} точку пересечения прямых (A_iA_j) и (F_{ik},F_{jk}) (i,j,k - различны): $A_{ij}=a_{ki}^ia_{jk}^kA_i-a_{kj}^ja_{ik}^kA_j$. Имеем

$$(A_iA_j,\ F_{ij}A_{ij})=\frac{a_{ij}^ja_{jk}^ka_{ki}^i}{a_{ji}^ia_{ik}^ka_{kj}^j}.$$

Точки A_{ij},A_{jk},A_{ki} (i,j,k - различны) инцидентны одной прямой тогда и только тогда, когда выполняется условие: $(a_{ij}^ja_{jk}^ka_{ki}^i)^2-(a_{ji}^ia_{ik}^ka_{kj}^j)^2=0$. Обращение в нуль относительного инварианта $a_{ij}^ja_{jk}^ka_{ki}^i+a_{ji}^ia_{ik}^ka_{kj}^j$ является необходимым и достаточным условием соответствия в гомологии с осью $(A_{ij}A_{jk}A_{ki})$ трехвершинников $A_iA_jA_k$ и $F_{jk}F_{ki}F_{ij}$. При этом имеет место $(A_iA_j,\ F_{ij}A_{ij})=-1$. Обращение в нуль относительного инварианта $a_{ij}^ja_{jk}^ka_{ki}^i-a_{ji}^ia_{ik}^ka_{kj}^j$ является необходимым и достаточным условием совпадения точек $F_{ij}=A_{ij}$, $F_{jk}=A_{jk}$, $F_{ki}=A_{ki}$. На каждой прямой (AA_i), касательной в точке A к двойной линии ω^i пары гиперраспределений $(\Delta,\bar\Delta)$, существует точка $F_i=-\frac{1}{n-2}\sum_{j\neq i}a_{ij}^jA+A_i$ -гармонический полюс [1] точки A относительно псевдофокусов этой прямой. Аналогично, на каждой прямой (A_nA_i), касательной в точке A_n к двойной линии θ^i пары гиперраспределений $(\Delta,\bar\Delta)$, существует точка $\bar F_i=-\frac{1}{n-2}\cdot\frac{1}{\Lambda_1^1}\sum_{j\neq i}a_{ij}^jA_n+A_i$ -гармонический полюс [1] точки A_n относительно псевдофокусов этой прямой. Прямые $(F_i\bar F_i)$, соединяющие соответствующие гармонические полюсы, принадлежат связке прямых с центром в единственном фокусе F^1 прямой (AA_n). Имеют место соотношения: $(AA_i,\ F_i^jF_i)=(A_nA_i,\ \bar F_i^j\bar F_i)$. Точка F_i совпадает с точкой A_i тогда и только тогда, когда

$$\sum_{j\neq i}a_{ij}^j=0. \qquad (5)$$

Тогда и $\bar F_i=A_i$. Таким образом, (5) есть необходимые и достаточные условия совпадения гармонических плоскостей $\Pi_{n-2}=(F_1F_2\ldots F_{n-1})$, $\bar\Pi_{n-2}=(\bar F_1\bar F_2\ldots \bar F_{n-1})$ с (n-2)-мерной плоскостью $\Delta(A)\cap\bar\Delta(A_n)$. Условия полной интегрируемости системы уравнений $\omega^i=0$, $\omega^n=0$ (i -фиксировано) имеют вид: $L_{jk}=L_{kj}$, $a_{jk}^i=a_{kj}^i$ (i,j,k -различны). Аналогично, условия полной интегрируемости системы уравнений $\theta^i=0$, $\theta^n=0$ (i -фиксировано) есть $\bar L_{jk}=\bar L_{kj}$, $\bar a_{jk}^i=\bar a_{kj}^i$ (i,j,k -различны). Из соотношений (4) и

$$\Lambda_1^1\bar a_{jk}^i=a_{jk}^i \qquad (6)$$

следует

Т е о р е м а 2. Если фокусы прямой (AA_n) совпадают, то из голономности (n-I)-ткани двойных линий $(\omega^1,\omega^2,\ldots,\omega^{n-1})$ пары гиперраспределений $(\Delta,\bar\Delta)$ следует голономность соответствующей (n-I)-ткани двойных линий $(\theta^1,\theta^2,\ldots,\theta^{n-1})$.

2. Пусть гиперраспределения Δ, $\bar\Delta$ не являются соответствующими в индуцированном отображении f_*, т.е.

$$\Lambda_i^n\neq 0. \qquad (7)$$

Имеем гиперраспределение Δ и соответствующее ему в индуцированном отображении f_* гиперраспределение $f_*(\Delta)$. Ясно, что

$$\Delta(A)\cap f_*(\Delta(A))=(B_1B_2\ldots B_{n-1}),$$

где $B_i=\Lambda_i^jA_j+\Lambda_i^nA$. Так как $f:\Omega\to\bar\Omega$ биекция, то $f^{-1}:\bar\Omega\to\Omega$ и $\omega^\alpha=\bar\Lambda_\beta^\alpha\theta^\beta$, где $\bar\Lambda_\beta^\alpha\Lambda_\gamma^\beta=\delta_\gamma^\alpha$, $\Lambda_\beta^\alpha\bar\Lambda_\gamma^\beta=\delta_\gamma^\alpha$ (δ_γ^α -символ Кронекера). Гиперраспределению $\bar\Delta$ в индуцированном отображении f_*^{-1} соответствует гиперраспределение $f_*^{-1}(\bar\Delta)$ и $\bar\Delta(A_n)\cap f_*^{-1}(\bar\Delta(A_n))=(\bar B_1\bar B_2\ldots\bar B_{n-1})$, где $\bar B_i=\bar\Lambda_i^jA_j+\bar\Lambda_i^nA_n$.

Необходимые и достаточные условия существования двойной линии пары гиперраспределений $(\Delta,f_*(\Delta))$, $(\bar\Delta,f_*^{-1}(\bar\Delta))$ соответственно имеют вид: $\mathrm{rang}\begin{pmatrix}\ell^i\\ \Lambda_j^i\ell^j\end{pmatrix}=1$, $\mathrm{rang}\begin{pmatrix}\bar\ell^i\\ \bar\Lambda_j^i\bar\ell^j\end{pmatrix}=1$.

В работе [2] найдены необходимые и достаточные условия существования (n-I)-ткани $(\omega^1,\omega^2,\ldots,\omega^{n-1})$ двойных линий пары гиперраспределений $(\Delta,f_*(\Delta))$ и (n-I)-ткани $(\theta^1,\theta^2,\ldots,\theta^{n-1})$ двойных линий пары гиперраспределений $(\bar\Delta,f_*^{-1}(\bar\Delta))$.

Т е о р е м а 3. При тождественном обращении в нуль геометрического объекта Λ_n^i ($i=1,2,\ldots\ldots,n-1$) и наличии (n-1)-ткани двойных линий $(\omega^1,\omega^2,\ldots,\omega^{n-1})$ $\{(\theta^1,\theta^2,\ldots,\theta^{n-1})\}$, принадлежащей одной из пар гиперраспределений $(\Delta,f_*(\Delta))$, $(\bar\Delta,f_*^{-1}(\bar\Delta))$, существует (n-1)-ткань двойных линий другой пары гиперраспределений. При этом

$$F^i=\bar F^i=-\Lambda_i^iA+A_n,\quad B_i=\Lambda_i^iA_i+\Lambda_i^nA,\quad \bar B_i=\Lambda_n^nA_i-\Lambda_i^nA_n.$$

Обозначим $H_i = (B_i \bar{B}_i) \cap (AA_n) = \Lambda_n^n A + \Lambda_i^i A_n,$

$$M_i = (A\bar{B}_i) \cap (A_n B_i) = \Lambda_i^n \Lambda_n^n A + \Lambda_i^i \Lambda_n^n A_i - \Lambda_i^n \Lambda_i^i A_n,$$

$$C_i = (A_i M_i) \cap (AA_n) = \Lambda_n^n A - \Lambda_i^i A_n.$$

Имеем следующие инварианты:

$$(AF^i, F^j F^k) = (A_n C_i, C_j C_k), \qquad (i, j, k \text{ -различны})$$

$$(A_n F^i, F^j F^k) = (AC_i, C_j C_k),$$

$$(AA_n, F^i C_i) = -(AA_n, F^i H_i).$$

Сеть σ двойных линий в области Ω проективного пространства P_n, состоящая из (п-I)-ткани двойных линий, принадлежащей гиперраспределению Δ, и двойной линии ω^n, имеет место одно семейство прямых линий (AA_n). Такое заключение можно сделать и относительно сети $\bar{\sigma}$ двойных линий в области $\bar{\Omega}$, состоящей из (п-I)-ткани двойных линий, принадлежащей гиперраспределению $\bar{\Delta}$, и двойной линии $f(\omega^n)$.

Пусть все фокусы прямой (AA_n) совпадают, т.е. $\Lambda_1^1 = \Lambda_2^2 = \ldots = \Lambda_{n-1}^{n-1}$ и точки A_i реперов $\mathcal{R}^A$ и $\bar{\mathcal{R}}^{A_n}$ -точки пересечения касательных двойной линии ω^i пары гиперраспределений $(\Delta, f_*(\Delta))$ и двойной линии θ^i пары гиперраспределений $(\bar{\Delta}, f_*^{-1}(\bar{\Delta}))$. Любая линия каждой пары гиперраспределений $(\Delta, f_*(\Delta))$, $(\bar{\Delta}, f_*^{-1}(\bar{\Delta}))$ становится двойной линией. При этом $C_1 = C_2 = \ldots = C_{n-1}$ и $H_1 = H_2 = \ldots = H_{n-1}$. Точки F^1, C_1 неподвижны при всех допустимых преобразованиях репера $\mathcal{R}^A$, $(AA_n, F^1 C_1) = \frac{\Lambda_n^n}{(\Lambda_1^1)^2}$. Равенство $\Lambda_n^n = (\Lambda_1^1)^2$ означает, что прямые $(A_i M_i)$ принадлежат связке прямых с центром в единственном фокусе F^1 прямой (AA_n), при этом $(AA_n, F^1 H_1) = -1$.

Библиографический список

I.Б а з ы л е в В.Т. О сетях на многомерных поверхностях проективного пространства// Изв.вузов.Математика.I966.№2.С.9-I9.

2.Д у л а л а е в а Т.А. О некоторых свойствах двойных линий пары гиперраспределений//Дифференциальная геометрия многообразий фигур: Межвуз.темат.сб.науч.тр./Калинингр.ун-т.Калининград,I984.Вып.I5.

3.Д у л а л а е в а Т.А. К геометрии двойных линий пары гиперраспределений//Тезисы докл.IX Всесоюз.геометр.конф.Кишинев.I988.С.I08.

УДК 5I4.76

МАКСИМАЛЬНО ПОДВИЖНЫЕ МЕТРИЧЕСКИЕ ПРОСТРАНСТВА ЛИНЕЙНЫХ И ГИПЕРПЛОСКОСТНЫХ ЭЛЕМЕНТОВ

А.И.Е г о р о в
(Пензенский педагогический институт)

В настоящей работе изучаются движения (изометрии) в метрических пространствах $g_{n,\bar{u}}$, $g_{n,\underline{u}}$ линейных и гиперплоскостных элементов. Находятся все максимально подвижные $(r = \frac{n(n+1)}{2})$ пространства $g_{n,\bar{u}}$, $g_{n,\underline{u}}$ при условии, что присоединенные (ассоциированные) соответствующие пространства положительно определенной метрики. Метрика в рассматриваемых метрических пространствах $g_{n,\bar{u}}$, $g_{n,\underline{u}}$ задается в локальной системе координат невырожденным симметрическим тензором соответственно $g(g_{ij}(x,\bar{u}))$ типа (0,2) и $g(g^{je}(x,\underline{u}))$ типа (2,0), каждый из которых нулевой степени однородности относительно координат опорного объекта $\bar{u}(u^i)$, $\underline{u}(u_j)$ [1].

I. Пусть $g_{n,\bar{u}}$ метрическое пространство линейных элементов, определенное тензором $g(g_{je}(x,\bar{u}))$ $(i, j, e = 1, 2, \ldots, n)$, где $\bar{u}(u^i)$ - псевдовектор, $g_{je}(x,\bar{u}) = g_{ej}(x,\bar{u})$, $\det \| g_{je}(x,\bar{u}) \| \neq 0$, $x(x^j)$, $g_{je}(x, \lambda\bar{u}) = g_{je}(x,\bar{u})$. В работе рассматриваются метрические пространства линейных элементов $g_{n,\bar{u}}$, для которых присоединенное (ассоциированное) пространство $F_{n,\bar{u}}$ с метрической функцией

$$F(x,\bar{u}) = g_{ij}(x,\bar{u}) u^i u^j, \tag{I}$$

является финслеровым, т.е.

$$F(x, \lambda\bar{u}) = \lambda^2 F(x,\bar{u}), \quad \det \| F_{je} \| \neq 0, \quad F_{je} = \frac{\partial^2 F}{\partial u^j \partial u^e}. \tag{2}$$

Финслерово пространство $F_{n,\bar{u}}$ будем всегда считать определенно положительной метрики. Отметим, что метрика рассматриваемых пространств $g_{n,\bar{u}}$ непотенциальна, т.е. в общем случае $g_{ij}(x,\bar{u}) \neq \frac{1}{2} F_{ij}$.

Любое движение метрического пространства линейных элементов $g_{n,\bar{u}}$ является в то же время движением ассоциированного финслерова пространства $F_{n,\bar{u}}$. Отсюда следует, что группа движений G_r метрического пространства $g_{n,\bar{u}}$ является подгруппой группы движений присоединенного финслерова пространства $F_{n,\bar{u}}$. Вангом доказано, что если финслерово пространство $F_{n,\bar{u}}$ определенно положительной метрики допускает группу движений G_r порядка $r > \frac{n(n-1)}{2} + 1$, то оно есть собственно риманово пространство $V_n(x)$ постоянной кривизны. Таким образом, максимально подвижные метрические пространства линейных элементов $g_{n,\bar{u}}$ допускают группу движений G_r порядка $r = \frac{n(n+1)}{2}$ риманова пространства $V_n(x)$ постоянной кривизны определенно положительной метрики. Задача отыскания максимально подвижных пространств $g_{n,\bar{u}}$ сводится к интегрированию системы дифференциальных уравнений в частных производных первого порядка

$$\mathcal{D} g_{je} = 0 \tag{3}$$

относительно компонент метрического тензора $g_{je}(x,\bar{u})$. В системе (3) символ $\mathcal{D}$ обозначает производную Ли вдоль векторных полей операторов группы G_r, где $r = \frac{n(n+1)}{2}$. Операторы этой группы G_r в некоторой локальной системе координат можно всегда привести к виду

$$X^i_j = x^i p_j - x^j p_i \quad (i<j), \tag{4}$$

$$X_i = \tfrac{1}{2} k x^i x^j p_j + (1 - \tfrac{1}{4} k\alpha) p_i, \tag{5}$$

где $\alpha = (x^1)^2 + (x^2)^2 + \ldots + (x^n)^2$, $p_\ell = \frac{\partial}{\partial x^\ell}$, $k \in R$.

Общее решение системы (3) для операторов вращений (4) определяется равенствами

$$g_{ij} = a\delta_{ij} + x^i x^j A + (x^i u^j + x^j u^i) B + u^i u^j C, \tag{6}$$

где a, A, B, C -функции от переменных $\alpha, \bar\beta, \bar\gamma$, причем $\bar\beta = x^1 u^1 + x^2 u^2 + \ldots + x^n u^n$, $\bar\gamma = (u^1)^2 + (u^2)^2 + \ldots + (u^n)^2$. Обратимся теперь к операторам (5) и рассмотрим уравнения $\mathcal{D}_{\bar X_\ell} g_{ij} = 0$,где $\bar X_\ell$ -естественное продолжение оператора X_ℓ на переменные $\bar u\,(u^i)$. Из этих уравнений следует,что $A = 0$, $B = 0$,а функции a, C определяются формулами $a = \frac{c_1}{(1+\frac{1}{4}k\alpha)^2}$, $C = \frac{c_2}{\bar\gamma(1+\frac{1}{4}k\alpha)^2}$,где c_1, c_2 -постоянные. Общее решение рассматриваемой системы дифференциальных уравнений (3) относительно операторов (4),(5) для составляющих $g_{ij}(x,\bar u)$ выражается формулой

$$g_{ij}(x,\bar u) = a\,\Phi_{ij} + b\,\Phi^{-1}\Phi_{\cdot i}\Phi_{\cdot j} \quad (a, b \in R,\ a+2b \neq 0,\ a \neq 0) \tag{7}$$

или,что то же самое , только в другом виде

$$g_{ij}(x,\bar u) = A(c_1\delta_{ij} + c_2\bar\gamma^{-1}u^i u^j), \tag{8}$$

$$A = (1+\tfrac{1}{4}k\alpha)^{-2}, \quad \Phi(x,\bar u) = A\bar\gamma, \quad 2a = c_1, \quad 4b = c_2.$$

2.Будем рассматривать также метрические пространства гиперплоскостных элементов $g_{n,\underline{u}}$,для которых ассоциированное пространство $H_{n,\underline{u}}$ с метрической функцией $H(x,\underline{u}) = g^{j\ell}(x,\underline{u})u_j u_\ell$, $\underline{u}\,(u_j)$ является гамильтоновым,т.е. $\det\|H^{\cdot j \cdot \ell}\| \neq 0$, $H^{\cdot j\cdot\ell} = \frac{\partial^2 H}{\partial u_j \partial u_\ell}$, $H(x,\lambda\underline{u}) = \lambda^2 H(x,\underline{u})$.

В настоящей работе предполагается,что пространство $H_{n,\underline{u}}$ определенно положительной метрики.Метрика рассматриваемых пространств $g_{n,\underline{u}}$ в общем случае непотенциальна.Для метрических пространств гиперплоскостных элементов $g_{n,\underline{u}}$,задаваемых невырожденным симметрическим тензором $g^{ij}(x,\underline{u})$ типа (2,0), рассуждения,аналогичные предыдущим для операторов (4),(5),приводят к формуле

$$g^{j\ell}(x,\underline{u}) = cK^{\cdot j\cdot\ell} + dK^{-1}K^{\cdot j}K^{\cdot\ell}, \quad c, d \in R, \tag{9}$$

или,что то же самое,но в другом виде

$$g^{ij}(x,\underline{u}) = 2B\,[c\delta^{ij} + 2d\underline{\gamma}^{-1}u_i u_j], \tag{10}$$

$$B = (1+\tfrac{k}{4}\alpha)^2, \quad \underline{\gamma} = (u_1)^2 + (u_2)^2 + \ldots + (u_n)^2,$$

$$c \neq 0, \quad c+2d \neq 0, \quad K = B\,[(u_1)^2 + (u_2)^2 + \ldots + (u_n)^2].$$

Таким образом,мы приходим к следующему выводу.

Т е о р е м а . Максимальный порядок групп движений G_r в метрических пространствах $g_{n,\bar u}$, $g_{n,\underline{u}}$ равен точно $\frac{n(n+1)}{2}$. Метрический тензор любого максимально подвижного пространства линейных,гиперплоскостных элементов $g_{n,\bar u}$, $g_{n,\underline{u}}$ с ассоциированной положительно определенной метрикой за счет выбора локальной системы приводятся соответственно к виду (8),(10).Пространства $g_{n,\bar u}$, $g_{n,\bar u}$ допускают группу движений G_r $(r = \frac{n(n+1)}{2})$ максимального порядка тогда,когда метрические тензоры $g_{ij}(x,\bar u)$, $g^{ij}(x,\underline{u})$ имеют соответственно строения (7),(9) в любой системе координат.

Библиографический список

1.Е г о р о в И.П.,Егоров А.И. О некоторых проблемах автоморфизмов в обобщенных пространствах//Движения в обобщённых пространствах. Рязань,1982.С.41-52.

УДК 514.75

К ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЙ ГЕОМЕТРИИ КОНГРУЭНЦИЙ ПАРАБОЛ В ЭКВИАФФИННОМ ПРОСТРАНСТВЕ

Л.А.Ж а р и к о в а
(Калининградское ВИУИВ)

В трехмерном эквиаффинном пространстве изучается подкласс $\pi(\ell)$ конгруэнции π парабол [1], для которого характеристическая точка плоскости параболы находится на диаметре параболы,проходящем через фокальную точку многообразия $\pi(\ell)$.

Отнесем конгруэнцию π к каноническому реперу $\mathcal{R} = \{A, \vec e_1, \vec e_2, \vec e_3\}$ [1], где точка A помещается в фокус,образующий неразвертывающуюся фокальную поверхность с неасимптотическими фокальными линиями.Вектор $\vec e_1$ направлен по касательной к параболе в точке A , $\vec e_2$ - по касательной к линии,сопряженной фокальной линии $\omega^2 = 0$ на поверхности (A) , $\vec e_3$ -по диаметру параболы,проходящему через точку A .Относительно этого репера уравнение параболы и система уравнений Пфаффа конгруэнции имеют вид:

$$(x^1)^2 - 2px^3 = 0, \quad x^2 = 0 \quad (p \neq 0); \tag{1}$$

$$
\begin{cases}
\omega_1^1 = -\frac{1}{8}\{(3a+c)\omega^1 + (3b+\ell)\omega^2\}, \quad \omega_1^2 = f\omega^1 + g\omega^2, \\
\omega_1^3 = \omega^1, \quad \omega_2^1 = (f-b)\omega^1 - (g-c)\omega^2, \\
\omega_2^2 = \frac{1}{8}\{(a+3c)\omega^1 + (b+3\ell)\omega^2\}, \quad \omega_2^3 = -\omega^2, \quad \omega^3 = 0, \\
\omega_1^1 + \omega_2^2 + \omega_3^3 = 0, \quad d\ln p = p_1\omega^1 + p_2\omega^2, \\
\omega_3^1 = h\omega^1 + k\omega^2, \qquad \omega_3^2 = r\omega^1 + s\omega^2.
\end{cases} \tag{2}
$$

Т е о р е м а. Справедливы следующие утверждения: I)конгруэнции $\pi(\ell)$ существуют и определяются с произволом четырех функций двух аргументов;2)характеристическая точка M плоскости параболы совпадает с одним из фокусов конгруэнции диаметров парабол;3) индикатриса вектора аффинной нормали является поверхностью с касательной плоскостью,коллинеарной касательной плоскости поверхности (A) ; 4) диаметр параболы и касательная к ней сопряжены относительно квадрики Ли поверхности (A) ;5) торсы прямолинейных конгруэнций $\{A,\vec{e}_1\}$ и $\{A,\vec{e}_2\}$ соответствуют и высекают на поверхности (A) координатные линии;6) если существует расслоение от прямолинейной конгруэнции $\{A,\vec{e}_i\}$ к конгруэнции плоскостей $\{A,\vec{e}_j,\vec{e}_3\}$, $i\neq j$, i,j =I,2,то существует расслоение от прямолинейной конгруэнции $\{A,\vec{e}_3\}$ к конгруэнции плоскостей $\{A,\vec{e}_1,\vec{e}_2\}$.

Д о к а з а т е л ь с т в о.I)Пусть $\vec{M}=\vec{A}+x^3\vec{e}_3$ -характеристическая точка плоскости параболы,тогда $x^3=-\frac{1}{s}$, $r=0$. Учитывая равенство нулю коэффициента r в системе (2) и находя ее чистое замыкание, получим,что конгруэнции $\pi(\ell)$ существуют и определяются с произволом четырех функций двух аргументов.

2)Найдем фокусы конгруэнции диаметров парабол из уравнения $sk\lambda^2+(s+k)\lambda+1=0$. Имеем $\lambda_1=-\frac{1}{s}$, $\lambda_2=-\frac{1}{k}$. Следовательно, $\vec{F}_1=\vec{A}-\frac{1}{s}\vec{e}_3$, $\vec{F}_2=\vec{A}-\frac{1}{k}\vec{e}_3$ и точка F_1 совпадает с точкой M .

3) Так как направляющий вектор аффинной нормали поверхности (A) имеет вид $\vec{e}=\vec{e}_3+\frac{1}{4}\{(c-a)\vec{e}_1+(b-\ell)\vec{e}_2\}$, то

$$
d\vec{e} = \left(\omega_3^3 + \frac{1}{4}(c-a)\omega_1^3 + \frac{1}{4}(b-\ell)\omega_2^3\right)\vec{e}_3 + (\dots)\vec{e}_1 + (\dots)\vec{e}_2.
$$

Чтобы касательная плоскость индикатрисы вектора $\vec{e}$ совпадала с касательной плоскостью поверхности (A), необходимо и достаточно выполнение равенства $\omega_3^3+\frac{1}{4}(c-a)\omega_1^3+\frac{1}{4}(b-\ell)\omega_2^3=0$. Подставляя выражения ω_3^3, ω_1^3, ω_2^3 из (2),убеждаемся в справедливости утверждения.

4) В уравнении квадрики Ли поверхности (A)

$$
(x^1)^2-(x^2)^2+\lambda(x^3)^2+\frac{a-c}{4}x^1x^3+\frac{b-\ell}{4}x^2x^3-2x^3=0
$$

отсутствуют координаты x^1 и x^2 ,следовательно,векторы $\vec{e}_1$ и $\vec{e}_2$ сопряжены относительно квадрики Ли.

5)Торсы прямолинейных конгруэнций $\{A,\vec{e}_1\}$ и $\{A,\vec{e}_2\}$ для конгруэнции $\pi(\ell)$ определяются уравнением $\omega^1\omega^2=0$,что и доказывает справедливость утверждения 5.

6) Найдем условия существования расслоения от конгруэнции $\{A,\vec{e}_i\}$ к конгруэнции $\{A,\vec{e}_j,\vec{e}_3\}$ и от прямолинейной конгруэнции $\{A,\vec{e}_3\}$ к конгруэнции плоскостей $\{A,\vec{e}_1,\vec{e}_2\}$,получим:

$$
b=\ell, \quad k-fc=0, \quad g=0, \quad fc=0; \tag{3}
$$

$$
k=0. \tag{4}
$$

Справедливость утверждения очевидна,т.к. из формул (3) следует равенство (4).

О п р е д е л е н и е I. Конгруэнцией $C(\ell)$ называется конгруэнция ассоциированных параболических цилиндров с образующей,параллельной вектору $\vec{e}_2$ и с направляющей параболой конгруэнции $\pi(\ell)$.

О п р е д е л е н и е 2. Конгруэнцией $\overset{*3}{\pi}_4(\ell)$ называется конгруэнция $\pi(\ell)$ при условии,что точка A является четырехкратной фокальной точкой конгруэнций $\pi(\ell)$, $C(\ell)$ и фокальной точкой третьего порядка конгруэнции $\pi(\ell)$.

Конгруэнция $\overset{*3}{\pi}_4(\ell)$ определяется условиями $p=1$, $a=b=f=g=k=r=s=k=0$. Подставляя эти значения в систему (2) и находя ее чистое замыкание, получим,что конгруэнции $\overset{*3}{\pi}_4(\ell)$ существуют и определяются с произволом двух функций одного аргумента.

В.С.Малаховским аналитически был выделен класс $\overset{*3}{\pi}_4(\ell)$ и найдены его некоторые геометрические свойства [I].Теперь можно утверждать, что,если точка A является одновременно фокальной точкой третьего порядка конгруэнции $\pi(\ell)$ и четырехкратной фокальной точкой конгруэнций $\pi(\ell)$ и $C(\ell)$,то многообразие $\pi(\ell)$, являющееся в этом случае конгруэнцией $\overset{*3}{\pi}_4(\ell)$,обладает следующими свойствами: I)все диаметры парабол образуют связку параллельных прямых;2)точка A -пятикратная фокальная точка конгруэнции $\pi(\ell)$;3) линии $\omega^1=0$ и $\omega^2=0$ поверхности (A) являются линиями тени,причем $\omega^2=0$ -плоская;4)фокальная поверхность (A) является аффинной поверхностью переноса;5) если линии $\omega^1=0$ -плоские,то $c=0$ и аффинные нормали $\vec{e}=\vec{e}_3-\frac{1}{4}\ell\vec{e}_2$ принадлежат плоскости $\{A,\vec{e}_2,\vec{e}_3\}$. Вдоль фокальной линии поверхности (A) $\omega^2=0$ единственный отличный от нуля инвариант является константой. Если и он обращается в нуль,то фокальная поверхность (A) становится поверхностью второго порядка,а диаметры парабол,проходящие через точки касания их с фокальной поверхностью,являются аффинными нормалями этой поверхности; б) существует расслоение от конгруэнции парабол к конгруэнции $\{A, \bar{e}_2\}$.

Библиографический список

I.М а л а х о в с к и й В.С. Конгруэнции парабол в эквиаффинной геометрии//Геометр.сб./Томский ун-т.Томск.1962.Т.161.С.76-86.

2.В е р б и ц к а я Л.А. Об одном классе конгруэнций парабол// Дифференциальная геометрия многообразий фигур:Межвуз.темат.сб.науч. тр./Калинингр.ун-т.Калининград,1980.Вып.II.С.17-21.

3.Ж а р и к о в а Л.А. Конгруэнция парабол с фокальными многообразиями высших порядков//Дифференциальная геометрия многообразий фигур:Межвуз.темат.сб.науч. тр./Калинингр.ун-т.Калининград,1986.Вып.16. С.30-33.

УДК 514.75

ПОЛНАЯ СИСТЕМА ИНВАРИАНТОВ ДИАДЫ В ЧЕТЫРЕХМЕРНОМ ПСЕВДОРИМАНОВОМ ПРОСТРАНСТВЕ

В.Г. И в а н о в

(Могилевский педагогический институт)

Методом Г.Ф.Лаптева [1] в работе автора [2] было дано тензорное описание ортонормированной пары векторных полей (диады) в пространстве (-времени) ${}^1V_4$. Продолжая изучение диады, мы строим в этой статье ее полную систему инвариантов первой дифференциальной окрестности в 4-мерном псевдоримановом пространстве ${}^mV_4$ ($0 \leq m \leq 4$) произвольной сигнатуры.

1. Уравнения инфинитезимальных смещений подвижного репера $(M, \bar{e}_i)$ ($i, j, \ldots \in \overline{1,4}$) локального касательного пространства ${}^mR_4(M)$ точки $M \in {}^mV_4$ имеют вид: $d\bar{M} = \omega^i \bar{e}_i$, $d\bar{e}_i = \omega_i^j \bar{e}_j$. Формы ω^i и ω_i^j удовлетворяют уравнениям структуры $D\omega^i = \omega^j \wedge \omega_j^i$, $D\omega_i^j = \omega_i^k \wedge \omega_k^j + R^j_{ik\ell}\, \omega^k \wedge \omega^\ell$, где $R^j_{ik\ell}$ -тензор кривизны пространства ${}^mV_4$, и равенствам $\varepsilon_i \omega_i^j + \varepsilon_j \omega_j^i = 0$, вытекающим из условий ортонормированности векторов $\bar{e}_i$ ($\bar{e}_i^2 \equiv \varepsilon_i = \pm 1$).

Дифференциальные уравнения диады $\{\bar{e}_3, \bar{e}_4\}$ ($\alpha, \beta \in \overline{1,2}$) пространства ${}^mV_4$ имеют вид [2]:

$$\omega_\alpha^3 = \gamma^3_{\alpha i}\omega^i, \quad \omega_\alpha^4 = \gamma^4_{\alpha i}\omega^i, \quad \omega_4^3 = \gamma^3_{4i}\omega^i; \tag{I}$$

$$\begin{cases} (d\gamma^3_{\alpha i} - \gamma^3_{\beta i}\omega^\beta_\alpha - \gamma^3_{\alpha j}\omega^j_i + \gamma^4_{\alpha i}\gamma^3_{4j}\omega^j + R^3_{\alpha ij}\omega^j) \wedge \omega^i = 0, \\ (d\gamma^4_{\alpha i} - \gamma^4_{\beta i}\omega^\beta_\alpha - \gamma^4_{\alpha j}\omega^j_i + \gamma^3_{\alpha i}\gamma^4_{3j}\omega^j + R^4_{\alpha ij}\omega^j) \wedge \omega^i = 0, \\ (d\gamma^3_{4i} - \gamma^3_{4j}\omega^j_i - \gamma^3_{\alpha i}\gamma^\alpha_{4j}\omega^j + R^3_{4ij}\omega^j) \wedge \omega^i = 0. \end{cases} \tag{2}$$

Система величин

$$(\gamma^3_{\alpha\beta}, \gamma^4_{\alpha\beta}, \gamma^3_{\alpha 3}, \gamma^3_{\alpha 4}, \gamma^4_{\alpha 4}, \gamma^4_{\alpha 3}, \gamma^3_{4\alpha}, \gamma^3_{43}, \gamma^3_{44}) \tag{3}$$

образует геометрический объект - фундаментальный объект первого порядка диады $\{\bar{e}_3, \bar{e}_4\}$. Это тензор, из которого выделяются перечисленные в (3) подтензоры. Их геометрическое и кинематическое истолкование также дано в работе [2].

2. Построим следующие скалярные величины:

$$\begin{cases} J_1 = \varepsilon_1\gamma^3_{11} + \varepsilon_2\gamma^3_{22}, \quad J_2 = (\gamma^3_{11})^2 + (\gamma^3_{22})^2 + 2\varepsilon_1\varepsilon_2(\gamma^3_{(12)})^2, \\ J_3 = \gamma^3_{11}\gamma^4_{11} + \gamma^3_{22}\gamma^4_{22} + 2\varepsilon_1\varepsilon_2\gamma^4_{(12)}\gamma^3_{(12)}, \quad J_4 = \gamma^3_{[12]}, \\ J_5 = \varepsilon_1\gamma^4_{11} + \varepsilon_2\gamma^4_{22}, \quad J_6 = (\gamma^4_{11})^2 + (\gamma^4_{22})^2 + 2\varepsilon_1\varepsilon_2(\gamma^4_{(12)})^2, \\ J_7 = \gamma^4_{[12]}, \quad J_8 = \varepsilon_1(\gamma^3_{13})^2 + \varepsilon_2(\gamma^3_{23})^2, \quad J_9 = \gamma^4_{11}(\gamma^3_{13})^2 + \\ + \gamma^4_{22}(\gamma^3_{23})^2 + 2\varepsilon_1\varepsilon_2\gamma^4_{(12)}\gamma^3_{13}\gamma^3_{23}, \quad J_{10} = \varepsilon_1(\gamma^3_{14})^2 + \varepsilon_2(\gamma^3_{24})^2, \\ J_{11} = \gamma^4_{11}(\gamma^3_{14})^2 + \gamma^4_{22}(\gamma^3_{24})^2 + 2\varepsilon_1\varepsilon_2\gamma^4_{(12)}\gamma^3_{14}\gamma^3_{24}, \\ J_{12} = \varepsilon_1(\gamma^4_{14})^2 + \varepsilon_2(\gamma^4_{24})^2, \quad J_{13} = \gamma^4_{11}(\gamma^4_{14})^2 + \gamma^4_{22}(\gamma^4_{24})^2 + \\ + 2\varepsilon_1\varepsilon_2\gamma^4_{(12)}\gamma^4_{14}\gamma^4_{24}, \quad J_{14} = \varepsilon_1(\gamma^4_{13})^2 + \varepsilon_2(\gamma^4_{23})^2, \\ J_{15} = \gamma^4_{11}(\gamma^4_{13})^2 + \gamma^4_{22}(\gamma^4_{23})^2 + 2\varepsilon_1\varepsilon_2\gamma^4_{(12)}\gamma^4_{13}\gamma^4_{23}, \\ J_{16} = \varepsilon_1(\gamma^3_{41})^2 + \varepsilon_2(\gamma^3_{42})^2, \quad J_{17} = \gamma^4_{11}(\gamma^3_{41})^2 + \gamma^4_{22}(\gamma^3_{42})^2 + \\ + 2\varepsilon_1\varepsilon_2\gamma^4_{(12)}\gamma^3_{41}\gamma^3_{42}, \quad J_{18} = \gamma^3_{43}, \quad J_{19} = \gamma^3_{44}. \end{cases} \tag{4}$$

Т е о р е м а. Система величин (4) образует полную систему инвариантов первой дифференциальной окрестности диады $\{\bar{e}_3, \bar{e}_4\}$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Инвариантность (в смысле Г.Ф.Лаптева) величин (4) сводится к простой проверке условий $dJ_1 = dJ_2 = \ldots = dJ_{19} = 0$ при нулевых главных формах (I) и учете квадратичных уравнений (2). Поскольку число построенных инвариантов в точности равно разности между количеством различных в общем случае величин (4) и числом вторичных параметров (=I), то остается лишь убедиться в функциональной независимости системы (4). При условии

$$\gamma^4_{(\alpha\beta)} = diag\,(\varepsilon_1\lambda_1,\ \varepsilon_2\lambda_2),\ \lambda_1 \neq \lambda_2\ ; \tag{5}$$

определитель девятнадцатого порядка

$$\det\left(\frac{\partial(J_1, J_2, \dots, J_{19})}{\partial(\gamma^3_{\alpha\beta}, \gamma^4_{\alpha\beta}|_{\alpha\le\beta}, \gamma^3_{\alpha 3}, \dots, \gamma^3_{44})} \right)$$

равен (с точностью до знака) произведению следующих, вообще говоря, отличных от нуля определителей:

$$\det\left(\frac{\partial(J_1, J_2, J_3, J_4)}{\partial(\gamma^3_{\alpha\beta})} \right) = \pm 2(\lambda_1 - \lambda_2)\gamma^3_{(12)},$$

$$\det\left(\frac{\partial(J_5, J_6, J_7)}{\partial(\gamma^4_{\alpha\beta}|_{\alpha\le\beta})} \right) = \pm 2(\lambda_1 - \lambda_2)\gamma^4_{12},$$

$$\det\left(\frac{\partial(J_8, J_9)}{\partial(\gamma^3_{13}, \gamma^3_{23})} \right) = \pm 4(\lambda_1 - \lambda_2)\gamma^3_{13}\gamma^3_{23}, \dots,$$

$$\det\left(\frac{\partial(J_{16}, J_{17})}{\partial(\gamma^3_{41}, \gamma^3_{42})} \right) = \pm 4(\lambda_1 - \lambda_2)\gamma^3_{41}\gamma^3_{42},$$

что и доказывает теорему.

Условие (5) означает, что у тензора $\gamma^4_{(\alpha\beta)}$ различные собственные значения λ_α и он уже отнесен к своим главным осям.

Библиографический список

1. Л а п т е в Г.Ф. Дифференциальная геометрия погруженных многообразий// Тр.Моск.матем.о-ва/ ГИТТЛ.М.,1953.Т.2.С.275-382.

2. И в а н о в В.Г. Геометрия пары векторных полей в псевдоримановом пространстве// Вестн.Белорус.ун-та.Физ.,матем. и мех.1985.№3. С.52-54.

УДК 514.76

ОБ АФФИННЫХ РАССЛОЕНИЯХ $A^{\tau}_{n,m}$ ($\tau < n$, $\tau < m$)

Е.Т. И в л е в

(Томский политехнический институт)

В статьях [1]-[3] изучались регулярные аффинные расслоения с n-мерной дифференцируемой базой M_n и m-мерными аффинными слоями A_m с заданными точечными сечениями и с заданной аффинной связностью C, причем $\tau = Rang\,[A^{\alpha}_{i}] = min\ (m,n)$.

В данной статье изучается аффинное расслоение $A^{\tau}_{n,m}$-расслоение $A_{n,m}$, у которого $\tau<m$ и $\tau<n$. Все построения носят локальный характер, а функции, встречающиеся в статье, предполагаются аналитическими. Обозначения и терминология соответствует принятым в [1]-[3]. В дальнейшем символом ([k], (s)) будем обозначать формулу под номером s статьи [k].

1. Рассматривается аффинное расслоение $A_{n,m}$ в смысле [3] с n-мерной дифференцируемой базой M_n и m-мерными аффинными слоями A_m. При этом предполагается, что в расслоении $A_{n,m}$ задано точечное гладкое сечение $(u) \to B(u)$, $(u) \in M_n$, $B(u) \in A_m(u)$ и C-аффинная связность. Дифференциальные уравнения секущей n-поверхности $\overset{\circ}{M}_n$ с текущей точкой B записываются в виде ([3],(5)).

Рассмотрим на базе M_n кривую, проходящую через точку (u):

$$K(t):\ \theta^i = t^i\theta,\ \ \mathcal{D}\theta = \theta\wedge\theta_1,\ \ \nabla t^i - t^i\theta_1 = t^i_1\theta. \tag{1}$$

Из ([3],(2)-(5)) в силу (1) заключаем, что направлению $t = t^i(\bar{A}\vec{e}_i) \in L_n$, отвечающему касательной к кривой $k(t)$ в точке $(u) \in M_n$ в слое $A_m(u)$ расслоения $A_{n,m}$, соответствует направление $\tau = (\bar{B}\,\bar{\varepsilon}_\alpha)\tau^\alpha \in A_m(u)$, где

$$\tau^\alpha = A^\alpha_i t^i. \tag{2}$$

Это направление является касательным к развертке кривой $\overset{*}{k}(t)$ в слое $A_m(u)$, проходящей через точку B: $\overset{*}{K}(t)$: $\omega^\alpha = \tau^\alpha\theta$, в которую переходит кривая $K(t)$ при отображении $A_m(u+du) \to A_m(u)$ вдоль этой же кривой. Поэтому в дальнейшем направление τ будем называть разверткой направления $t \in L_n$ на слой A_m. Линейное подпространство $\overset{*}{L}(u) \subset A_m(u)$, $\overset{*}{L}(u) \ni B(u)$ точки $(u) \in M_n$ расслоения $A_{n,m}$ будем называть разверткой линейного подпространства $L(u) \subset L_n(u)$, $L_n(u) \ni A(u)$, если $\overset{*}{L}(u) = \{\tau(u)\,|\,\tau^\alpha(u) = A^\alpha_i(u)t^i(u),\ \tau(u) \in A_m(u)\}$.

2. О п р е д е л е н и е 1. Расслоением $A^{\tau}_{n,m}$ называется такое аффинное расслоение $A_{n,m}$ ($n>1$, $m>1$), у которого

$$\tau = Rang\,[A^\alpha_i] < min\ (n,m) \tag{3}$$

на базе M_n. В случае $\tau = min(n,m)$ аффинное расслоение $A_{n,m}$ ($n>1$, $m>1$) называется регулярным.

Из (3) вытекают следующие соотношения для элементов матрицы $[A^\alpha_i]$:

$$A^{\hat{a}}_{i_1} = A^{j_1}_{i_1} C^{\hat{a}}_{j_1},\ \ A^{i_1}_{i_2} = A^{i_1}_{j_1} C^{j_1}_{i_2},\ \ A^{\hat{a}}_{i_2} = C^{i_1}_{i_2} A^{\hat{a}}_{i_1},\ \ \det\,[A^{j_1}_{i_1}] \neq 0, \tag{4}$$

$$(a, b, c, i_1, j_1, k_1 = \overline{1,\tau};\ i_2, j_2, k_2, \hat{a}, \hat{b}, \hat{c} = \overline{\tau+1, m};\ \alpha,\beta,\gamma = \overline{1,m}).$$

Здесь C^α_i -коэффициенты соответствующих линейных комбинаций. Проведем в слоях $A_m(u)$ и $L_n(u)$ точки $u \in M_n$ расслоений $A^{\tau}_{n,m}$ и L^1_n нижеследующую фиксацию аффинных реперов, из которой с учетом ([3],(I),(3),(5)) и (4) вытекают соответствующие дифференциальные уравнения:

$$A^{j_1}_{i_1}=\delta^{j_1}_{i_1},\quad A^{\hat a}_{i_1}=0,\quad A^{j_1}_{i_2}=0\Rightarrow A^{\alpha}_{i_2}=0\Rightarrow A^{\hat a}_{i_2}=0\Rightarrow R^{\hat a}_{0 i_2 j}=0,\ \Lambda^{\hat a}_{i_2 j}=0; \tag{5}$$

$$\begin{gathered}\omega^{\hat a}_{j_1}=A^{\hat a}_{j_1 k_1}\theta^{k_1},\quad \theta^{i_1}_{i_2}=A^{i_1}_{i_2 k}\theta^{k},\quad \omega^{j_1}_{i_1}-\theta^{j_1}_{i_1}=A^{j_1}_{i_1 k}\theta^{k},\\ \nabla A^{\hat a}_{j_1 k}=A^{\hat a}_{j_1 k\ell}\theta^{\ell},\ \nabla A^{i_1}_{i_2 k}-\theta^{i_1}_{i_2 k}=A^{i}_{i_2 k\ell}\theta^{\ell},\ \ \nabla A^{j_1}_{i_1 k}-\theta^{j_1}_{i_1 k}=A^{j_1}_{i_1 k\ell}\theta^{\ell}.\end{gathered} \tag{6}$$

Из (I)-(6) и ([3],(2)) следует, что расслоение $A^{\tau}_{n,m}$ характеризуется тем, что каждой точке $(u)\in M_n$ соответствуют в $A_m(u)$ и $\mathcal{L}_n(u)$ линейные подпространства

$$\Gamma_2=(\bar B\bar\varepsilon_1\bar\varepsilon_2\ldots\bar\varepsilon_\tau)\subset A_m,\quad \mathcal{L}^2_{n-\tau}=(\bar A\bar e_{\tau+1}\ldots\bar e_n), \tag{7}$$

где Γ_2 -развертка пространства $\mathcal{L}_n(u)$ на слой $A_m(u)$, а $\mathcal{L}^2_{n-\tau}(u)$-совокупность всех таких направлений $t\in\mathcal{L}_n(u)$, отвечающих касательным к кривым (I), вдоль которых точка $B(u)\in A_m(u)$ каждой точки $(u)\in M_n$ переносится параллельно в аффинной связности C. Из ([3],(2),(5)),(5) и (7) вытекает следующее

Утверждение 1. Линейное подпространство $\mathcal{L}_\tau(u)\in A_m(u)$ каждой точки $(u)\in M_n$ расслоения $A^{\tau}_{n,m}$ параллельно переносится в аффинной связности C вдоль распределения $\Delta^2_{n-\tau}$, определяемого $(n-\tau)$-плоскостью $\mathcal{L}^2_{n-\tau}(u)\subset\mathcal{L}_n(u)$, причем (см. [4], (8))

$$R(v,w)\,B(u)\in\Gamma_\tau(u),\quad \forall v,w\in\mathcal{L}^2_{n-\tau}(u).$$

3. Определение 2. Расслоение $A^{\tau}_{n,m}$ ($n>1$, $m>1$) называется оснащенным, если каждой точке $(u)\in M_n$ в слоях $A_m(u)$ и $\mathcal{L}_n(u)$ можно поставить в соответствие линейные подпространства:

$$\left.\begin{aligned} &P_{m-\tau}\subset A_m(u):\ x^a=b^a_{\hat a}x^{\hat a},\quad \nabla b^a_{\hat a}=b^a_{\hat a i}\theta^i;\\ &\mathcal{L}^1_\tau\subset\mathcal{L}_n(u):\ V^{i_2}=a^{i_2}_{i_1}v^{i_1},\quad \nabla a^{i_2}_{i_1}+\theta^{i_2}_{i_1}+a^{j_2}_{i_1}a^{i_2}_{j_1}\theta^{j_1}_{j_2}=a^{i_2}_{i_1 j}\theta^j.\end{aligned}\right\} \tag{8}$$

Каждой точке $X(u)\in A_m(u):\ \bar X(u)=\bar B(u)+x^{\alpha}(u)\bar\varepsilon_\alpha(u)$

и $(\tau-1)$-плоскости $\Gamma_{\tau-1}(u)\subset\Gamma_\tau(u),\ \Gamma_{\tau-1}\supset B(u):\ y_a x^a=0,\ x^{\hat a}=0$

в силу (8),(7) и ([4],(8)) отвечает в $\mathcal{L}_n(u)$ линейный гиперкомплекс

$$K(X,\Gamma_{\tau-1})=\{(v,w)\,|\,R(v,w)X\in(\Gamma_{\tau-1}\cup P_{m-\tau})\}:\ y_a x^J\tilde R^a_{Jjk}v^j w^k=0, \tag{9}$$
$$\tilde R^a_{Jjk}=R^a_{Jjk}-b^a_{\hat a}R^{\hat a}_{Jjk}\quad (x^0=1).$$

Отсюда следует, что точке $X(u)\in A_m(u)$ направлению $v(u)=$

$=(\bar A(u),\bar e_i(u))\,v^i(u)\in\mathcal{L}_n(u)$ и τ-плоскости $\mathcal{L}^1_\tau(u)\subset\mathcal{L}_n(u)$ отвечает аффинное преобразование τ-плоскости Γ_τ в себя с центром в точке B:

$$\tilde\Pi(X,v,\mathcal{L}^1_\tau)=\{x^J(\tilde R^{i_1}_{Jj_1k}+\tilde R^{i_1}_{Jj_2k}a^{j_2}_{j_1})v^k\}\quad (x^0=1). \tag{10}$$

Это преобразование каждую ($\tau-1$)-плоскость $\Gamma_{\tau-1}\subset\Gamma_\tau$ переводит в ($\tau-1$)-плоскость $\overset{*}{\Gamma}_{\tau-1}\subset\Gamma_\tau$ -развертку ($\tau-1$)-плоскости $\mathcal{L}_{\tau-1}\subset\mathcal{L}^1_\tau$, отвечающей направлению $v\in\mathcal{L}_n$ в нуль-системе (9). Из (10) заключаем, что направлению $v(u)\in\mathcal{L}_n(u)$ и τ-плоскости $\mathcal{L}_\tau(u)\in\mathcal{L}_n(u)$ точки $(u)\in M_n$ отвечает в $A_m(u)$ гиперплоскость:

$$E_{m-1}(v,\mathcal{L}^1_\tau)=\{X\,|\,\tilde\Pi(X,v,\mathcal{L}^1_\tau)\to W\}:\ x^J\overset{*}{R}{}^{i_1}_{Ji_1k}v^k=0, \tag{11}$$
$$\overset{*}{R}{}^{i_1}_{Ji_1k}=\tilde R^{i_1}_{Ji_1k}+a^{j_2}_{i_1}\tilde R^{i_1}_{Jj_2k}.$$

Здесь $\tilde\Pi\to W$ означает, что преобразование $\tilde\Pi$ является преобразованием с нулевым следом.

4. Определение 3. Оснащение расслоения $A^{\tau}_{n,m}$ называется квазиглавным, если на базе M_n выполняются следующие условия:

$$\left.\begin{aligned} &1.\ E_{m-1}(v,\mathcal{L}^1_\tau)\parallel\Gamma_\tau,\quad \forall v\in\mathcal{L}^2_{n-\tau};\\ &2.\ E_{m-1}(v,\mathcal{L}^1_\tau)\parallel P_{m-\tau},\quad \forall v\in\mathcal{L}^1_\tau.\end{aligned}\right\} \tag{12}$$

При этом нормали $\mathcal{L}^1_\tau$ и $P_{m-\tau}$ называются квазиглавными.

Из (11) и (12) в силу (9) следует, что подпространства $\mathcal{L}^1_\tau\subset\mathcal{L}_n$ и $\Gamma_\tau\subset A_n$ являются квазиглавными в смысле определения 3 тогда и только тогда, когда

$$\begin{cases} R^{\hat a}_{aj_2k_2}a^{j_2}_{i_1}b^{i_1}_{\hat a}+R^{i_1}_{ak_2j_2}a^{j_2}_{i_1}+R^{\hat a}_{ai_1k_2}b^{i_1}_{\hat a}+R^{i_1}_{ak_2i_1}=0,\\ R^{\hat b}_{\hat ak_2j_2}a^{j_2}_{i_1}a^{k_2}_{k_1}b^{i_1}_{\hat b}+\ldots+R^{i_1}_{ai_1k_1}b^{a}_{\hat a}+R^{\hat b}_{\hat ak_1i_1}b^{i_1}_{\hat b}+R^{i_1}_{\hat aj_2k_1}a^{j_2}_{i_1}+R^{i_1}_{\hat ai_1k_2}a^{k_2}_{k_1}+R^{i_1}_{\hat ai_1k_1}=0.\end{cases} \tag{13}$$

Отсюда вытекает следующая

Теорема 1. Каждой точке $(u)\in M_n$ расслоения $A^{\tau}_{n,m}$ отвечает конечное число квазиглавных нормалей $\mathcal{L}^1_\tau(u)\subset\mathcal{L}_n(u)$ и $\Gamma_\tau(u)\subset A_m(u)$.

5. Из определения 1 в [1], ([1],(11)), теоремы 1 в [3], ([3],(13)) и (13) вытекают следующие утверждения:

Утверждение 2. Линейное подпространство $P_{m-\tau}(u)\subset A_m(u)$ каждой точки $(u)\in M_n$ расслоения $A^{\tau}_{n,m}$ является основной нормалью подрасслоения $\bar A_{n,\tau}=(M_n,\Gamma_\tau)$ относительно аффинных преобразований $\bar R(v,w)$, $v,w\in\mathcal{L}_n(u)$, каждое из которых является ограничением соответствующего аффинного преобразования $R(v,w)$, $v,w\in\mathcal{L}_n$ на τ-

плоскость Γ_τ в направлении $P_{m-\tau}$.

Утверждение 3. Линейное подпространство $P_{m-\tau}(u) \subset A_m(u)$ каждой точки $(u) \in M_n$ аффинного расслоения $A^{\tau}_{n,m}$ является главной τ-плоскостью подрасслоения $\bar{A}_{n,\tau}$ относительно аффинного преобразования $\bar{R}(v,w)$, $v,w \in L_n$.

Замечание. Анализ дифференциальных уравнений (6), в которых величины $A^{\hat{a}}_{jk\ell}$, $A^{i_1}_{i_2 k\ell}$ и $A^{j_1}_{i_1 k\ell}$ в общем случае не симметричны по индексам k и ℓ ,убеждает нас в том,что расслоение $A^{\tau}_{n,m}$ ($n>1$, $m>1$) существует и определяется с произволом $\tau_n = \tau(n^2 - \tau^2 + 2m)$ функций n аргументов.

6. Рассматривается аффинное расслоение $Q_{n,m} = (M_n, Q_m)$ в смысле [3] (см.п.8). Из ([3],(I7)) в силу (4) и (5) следует,что расслоение $Q_{n,m}$ будет расслоением $Q_{n,m}$ класса $A^{\tau}_{n,m}$ тогда и только тогда,когда на базе M_n выполняются соотношения

$$A^{j_1}_{0i_1} = \delta^{j_1}_{i_1},\ A^{\hat{a}}_{0i} = 0,\ A^{j_2}_{0i_2} = 0 \Rightarrow A^{\alpha}_{0i_2} = 0;\ \Omega^{i_1} = \theta^{i_1},\ \Omega^{\hat{a}} = 0, \tag{I4}$$

$$\Omega^{\hat{a}}_{j_1} = A^{\hat{a}}_{0j_1k_1}\theta^{k_1},\ \theta^{i_1}_{i_2} = A^{i_1}_{0i_2k}\theta^{k},\ \Omega^{j_1}_{i_1} - \theta^{j_1}_{i_1} - \delta^{j_1}_{i_1}\Omega^{0}_{0} = A^{j_1}_{0i_1k}\theta^{k}.$$

Отсюда и из ([3],(I8)) получаются следующие соотношения на M_n:

$$\begin{cases} R^{\hat{a}}_{aj_2k_2} = 0, \quad R^{i_1}_{ak_2j_2} = 0, \quad R^{\hat{a}}_{ai_1k_2} = 0, \quad R^{i_1}_{ak_2i_1} = \frac{1}{2}(\tau+1)A^{0}_{ak_2}, \\ R^{\hat{b}}_{\hat{a}k_2j_2} = 0, \quad R^{\hat{b}}_{ak_1j_1} = 0, \quad R^{i_1}_{\hat{a}j_2k_2} = 0, \quad R^{\hat{b}}_{\hat{a}k_2i_1} = \frac{1}{2}\delta^{\hat{b}}_{\hat{a}}A^{0}_{i_1k_2}, \\ R^{\hat{b}}_{\hat{a}k_1i_1} = \frac{1}{2}\delta^{\hat{b}}_{\hat{a}}(A^{0}_{i_1k_1} - A^{0}_{k_1i_1}), \quad R^{i_1}_{aj_2k_1} = \frac{1}{2}(\delta^{i_1}_{k_1}A^{0}_{aj_2} + \delta^{i_1}_{a}A^{0}_{k_1j_2}), \\ R^{i_1}_{ai_1k_1} = -\frac{1}{2}\tau A^{0}_{ak_1} + \frac{1}{2}A^{0}_{k_1a}, \quad R^{i_1}_{\hat{a}i_1k_2} = -\frac{1}{2}A^{0}_{\hat{a}k_2}, \\ R^{i_1}_{\hat{a}i_1k_1} = \frac{1}{2}(1-\tau)A^{0}_{\hat{a}k_1}, \quad R^{i_1}_{\hat{a}j_2k_1} = \frac{1}{2}A^{0}_{\hat{a}j_2}\delta^{i_1}_{k_1}. \end{cases} \tag{I5}$$

Отсюда в силу ([3],(II)) следует,что линейный гиперкомплекс $K_{n-1} \subset L_n(u)$ точки $(u) \in M_n$ аффинного расслоения $Q_{n,m}$ определяется уравнением:

$$K_{n-1}:\ A^{0}_{[i_1j_1]}v^{i_1}w^{j_1} + 2A^{0}_{i_1i_2}v^{i_1}w^{i_2} = 0. \tag{I6}$$

Из (I4)-(I6) вытекают следующие утверждения:

Утверждение 4. Расслоение $Q^{\tau}_{n,m}$ есть расслоение $Q_{n,m}$, у которого точка A_0 описывает τ-поверхность S_τ в Q_m с касательной τ-плоскостью $\Gamma_\tau = (A_0, A_1, \dots, A_\tau)$,а ($n-\tau$)-плоскость $L^2_{n-\tau}(u) \subset L_n(u)$ каждой точки $(u) \in M_n$ есть совокупность всех таких направлений $v(u) \in L_n(u)$, вдоль которых точка $A_0(u)$ является неподвижной.

Утверждение 5. Линейное подпространство $L^2_{n-\tau}(u) \subset L_n(u)$ каждой точки $(u) \in M_n$ расслоения $Q^{\tau}_{n,m}$ принадлежит соответствующему линейному гиперкомплексу $K_{n-1}(u) \subset L_n(u)$.

Определение 4. Расслоением $\bar{Q}^{\tau}_{n,m}$ называется такое расслоение $Q^{\tau}_{n,m}$, у которого на базе

$$A^{0}_{ak_2} = 0. \tag{I7}$$

Эти соотношения с учетом (I4) и ([3],(I7)) приводят к соотношениям:

$$\Omega^{0}_{a} = A^{0}_{ai}\theta^{i},\ \Omega^{0}_{\hat{a}} = A^{0}_{\hat{a}i}\theta^{i},\ A^{0}_{\hat{a}k_2}A^{\hat{a}}_{0ai} + A^{0}_{ak_1}A^{k_1}_{0k_2i} = A^{0}_{ak_2i}. \tag{I8}$$

Из (I7) и (I8) с учетом п.8 в[3] вытекает

Утверждение 6. Расслоение $\bar{Q}^{\tau}_{n,m}$ есть расслоение $Q^{\tau}_{n,m}$, у которого выполняется хотя бы одно из следующих свойств:

1. $L^2_{n-\tau}(u)$ -особое линейное подпространство для $K_{n-1}(u) \subset L_n(u)$;

2. τ-плоскость $\Gamma_\tau(u) \subset H(u)$,где $H(u)$ -характеристический элемент гиперплоскости $G_{m-1} = (A_1 A_2 \dots A_m) \subset Q_m(u)$ вдоль распределения $\Delta^2_{n-\tau}$.

Из (I4) и (I5) замечаем,что алгебраические уравнения (I3) приводят к соотношениям: $A^{0}_{ak_2} = 0$, $A^{0}_{ak_1}b^{a}_{\hat{a}} + A^{0}_{\hat{a}k_1} = 0$. Отсюда с учетом (8) и (I2) вытекает

Утверждение 7. Квазиглавные нормали $L^1_\tau(u) \subset L_n(u)$ и $P_{m-\tau}(u) \subset Q_m$ в случае расслоения $Q^{\tau}_{n,m}$ не существуют.Они существуют в случае расслоения $\bar{Q}^{\tau}_{n,m}$ и определяются бесчисленными способами в соответствующих пространствах Q_m и $L_n(u)$ каждой точки $(u) \in M_n$, причем характеристический элемент гиперплоскости G_{m-1} вдоль любой квазиглавной нормали $L^1_\tau(u) \subset L_n(u)$ проходит через соответствующую квазиглавную нормаль $\Gamma_{m-\tau}(u) \subset Q_m$.

Как и в случае расслоения $A^{\tau}_{n,m}$, показывается,что расслоения $Q^{\tau}_{n,m}$ и $\bar{Q}^{\tau}_{n,m}$ существуют и определяются с соответствующим произволом.

Библиографический список

1.Ивлев Е.Т. Об одном оснащении аффинного расслоения $A_{m,n}$ $(m<n)$// Дифференциальная геометрия многообразий фигур:Межвуз.темат.сб.науч. тр./Калинингр.ун-т.Калининград,1987.Вып.18.С.35-38.

2.Ивлев Е.Т. Об инвариантных структурах почти произведения пространства аффинной связности//Дифференциальная геометрия многообразий фигур:Межвуз.темат.сб.науч.тр./Калинингр.ун-т.Калининград,1988. Вып.19.С.39-43.

3.Ивлев Е.Т.О расслоении $A_{n,m}$ ($n<m$)//Дифференциальная гео-

метрия многообразий фигур:Межвуз.темат.сб.науч.тр./Калинингр.ун-т. Калининград,1989.Вып.20.С.37-42.

4.И в л е в Е.Т. О тангенциально-вырожденных расслоениях $P_{m,n}$ // Дифференциальная геометрия многообразий фигур:Межвуз.темат.сб.науч. тр./Калинингр.ун-т.Калининград, 1984.Вып.15.С.32-37.

УДК 514.75

ОБ ОДНОМ КЛАССЕ ОТОБРАЖЕНИЙ В P_4

С.В.К и р е е в а
(Московский автодорожный институт)

В данной работе рассматриваются свойства отображения $f:(\Omega\subset P_4)\to\to(\overline{\Omega}\subset P_4)$, которое имеет два двумерных распределения двойных линий.

В проективном пространстве P_4 заданы две диффеоморфные области $\Omega, \overline{\Omega}$ $(\Omega\cap\overline{\Omega}=\varnothing)$. Диффеоморфизм $f:\Omega\to\overline{\Omega}$ переводит точку $A\in\Omega$ в точку $B\in\overline{\Omega}$. Области $\Omega, \overline{\Omega}$ нормализованы в смысле А.П.Нордена одним и тем же семейством гиперплоскостей: $A\to\Pi_3(A)$, $B\to\Pi_3(A)$ $(B\notin\Pi_3(A))$.

Введенные нормализации определяют в областях $\Omega, \overline{\Omega}$ аффинные связности $\nabla, \overline{\nabla}$. Отображение f переводит сеть $\Sigma_4\subset\Omega$ в сеть $\overline{\Sigma}_4\subset\overline{\Omega}$. К области $\Omega, \overline{\Omega}$ присоединены подвижные реперы $\mathcal{R}^A=\{A,A_i\}$, $\mathcal{R}^B=\{B,B_i\}$ $(i=\overline{1,4})$, где A_i, B_i -нормальные точки [2] касательных к линиям ω^i, $\overline{\omega}^i$ сетей $\Sigma_4, \overline{\Sigma}_4$. Точки B, B_i в репере $\mathcal{R}^A$ имеют следующие представления:

$$\vec{B}=\vec{A}+\gamma^i\vec{A}_i\ ,\quad \vec{B}_i=\gamma_i^j\vec{A}_j \qquad (i,j,k=1,2,3,4). \qquad (*)$$

Из результатов работы [3] следует, что если относительные инварианты $\gamma_i^j=0$ $(i\neq j)$, $\gamma_1^1=\gamma_2^2\neq\gamma_3^3$, $\gamma_3^3=\gamma_4^4$, то в области Ω существуют два распределения $\Delta_2, \overline{\Delta}_2$: $\Delta_2(A)=(AA_1A_2)$, $\overline{\Delta}_2(A)=(AA_3A_4)$. Эти распределения характеризуются тем, что любая линия ℓ этих распределений - двойная [1], причем касательные к линиям $\ell, \overline{\ell}=f(\ell)$ пересекаются в точках нормализующей плоскости $\Pi_3(A)$. В данной работе будем исследовать именно такое отображение f. Итак, для отображения f имеем:

$$\vec{B}=\vec{A}+\gamma^i\vec{A}_i\ ,\ \vec{B}_1=\gamma_1^1\vec{A}_1\ ,\ \vec{B}_2=\gamma_1^1\vec{A}_2\ ,\ \vec{B}_3=\gamma_3^3\vec{A}_3\ ,\ \vec{B}_4=\gamma_3^3\vec{A}_4\ ; \qquad (1)$$

$$\begin{cases}\overline{\omega}^i=\omega^i,\ \ \overline{\omega}_i^0=\gamma_i^i\omega_i^0\ ,\ \ \overline{\omega}_i^i=\omega_i^i+(\gamma_i^i)^{-1}\gamma_{im}^i\omega^m+\delta_i^i\gamma^k\omega_k^0\ ,\\ \overline{\omega}_j^i=(\gamma_i^i)^{-1}\gamma_j^j(\omega_j^i-\gamma^i\omega_j^0)\ \ (i\neq j),\ \ \omega_i^0=a_{ik}^0\omega^k,\ \ \omega_i^j=a_{ik}^j\omega^k\ (i\neq j);\end{cases} \qquad (2)$$

$$d\gamma^i-\gamma^i\omega_0^0-\gamma^i\gamma^j\omega_j^0+\omega^i+\gamma^j\omega_j^i=\gamma_i^i\omega^i,$$

$$d\gamma_i^i-\gamma_i^i(\gamma^k\omega_k^0)-\gamma^i\gamma_i^i\omega_i^0=\gamma_{ik}^i\omega^k,$$
$$\gamma_{jk}^i=\omega_j^i(\gamma_j^j-\gamma_i^i)-\gamma^i\gamma_j^j\omega_j^0\quad(i\neq j)\ ,\quad \gamma_{jk}^i=\gamma_{kj}^i\ . \qquad (3)$$

Из требований $\gamma_1^1=\gamma_2^2$ и $\gamma_3^3=\gamma_4^4$ вытекают конечные соотношения, которые мы здесь не приводим. В работе [3] также показано, что на прямой (AB) существуют инвариантные точки N_i^i: $\vec{N}_i^i=-\gamma_i^i\vec{A}+\vec{B}$. В нашем отображении f на прямой (AB) существуют две различные точки N_1^1, N_3^3 такие, что $(AB, N_1^1N_3^3)=\gamma_3^3:\gamma_1^1\neq1$. В работе будем предполагать, что точка C: $C=(AB)\cap\Pi_3(A)$, $\vec{C}=\gamma^i\vec{A}_i$ отлична от инвариантных точек N_i^i, т.е. $\gamma_1^1\neq1$, $\gamma_3^3\neq1$. Дифференциалы точек N_1^1, C имеют вид:

$$d\vec{C}=\widetilde{\varphi}\vec{C}+\omega^i(\,a_{ki}^0\gamma^k\vec{A}+(\gamma_i^i-1)\vec{A}_i\,),$$
$$d\vec{N}_1^1=\theta_1^1\vec{N}_1^1+\omega^1(1-\gamma_1^1)^{-1}\gamma_1^1\gamma^2(a_{21}^0-a_{12}^0)\vec{C}+\omega^2(1-\gamma_1^1)^{-1}\gamma_1^1\gamma^1(a_{12}^0-a_{21}^0)\vec{C}+\omega^3\Big[(\gamma_3^3-\gamma_1^1)\vec{A}_3+$$
$$+\frac{a_{31}^1(\gamma_3^3-\gamma_1^1)+\gamma^1(\gamma_1^1a_{13}^0-\gamma_3^3a_{31}^0)}{1-\gamma_1^1}\vec{C}\Big]+\omega^4\Big[(\gamma_3^3-\gamma_1^1)\vec{A}_4+\frac{a_{41}^1(\gamma_3^3-\gamma_1^1)+\gamma^1(\gamma_1^1a_{14}^0-\gamma_3^3a_{41}^0)}{1-\gamma_1^1}\vec{C}\Big]. \qquad (4)$$

Дифференциал $d\vec{N}_3^3$ имеет вид, аналогичный виду дифференциала $d\vec{N}_1^1$.

Поставим перед собой вопрос: многообразия какой размерности описывают точки N_1^1 и N_3^3 и возможны ли случаи понижения этой размерности? Из формулы (4) следует, что $\dim(N_1^1)<4$, т.к. касательные к линиям ω^1, ω^2 совпадают.

I случай. Пусть $\dim(N_1^1)=3$. Нам надо найти такое семейство кривых Γ, что при смещении точки A вдоль линии этого семейства, точка N_1^1 неподвижна. Зададим семейство кривых Γ следующей системой: Γ: $\omega^i=x^i\theta$, θ -параметрическая форма. Тогда $d\vec{A}=\omega_0^0\vec{A}+\theta(x^i\vec{A}_i)$. Точка N_1^1 будет неподвижна при смещении точки A вдоль линии семейства Γ, если $d\vec{N}_1^1=\varphi\vec{N}_1^1$. Последнее требование будет выполнено, если $x^1=\gamma^1$, $x^2=\gamma^2$, $x^3=x^4=0$, $a_{12}^0\neq a_{21}^0$, $\gamma^1\neq0$, $\gamma^2\neq0$. Обратное утверждение тоже справедливо.

Т е о р е м а 1. Размерность многообразия (N_1^1) равна трем тогда и только тогда, когда точки A_1, A_2 не сопряжены в нуль-полярной корреляции $\overset{\circ}{K}$ $(a_{12}^0\neq a_{21}^0)$ и образ B точки A не принадлежит плоскости распределения $\overline{\Delta}_2(A)=(AA_3A_4)$.

При смещении точки A вдоль линии Γ: $x^1=\theta\gamma^1$, $x^2=\theta\gamma^2$, $x^3=0$, $x^4=0$ точка N_1^1 -неподвижна. Аналогичная теорема верна и для многообразия (N_3^3); для него линия $\widetilde{\Gamma}$ определяется следующим образом: $x^1=x^2=0$; $x^3=\gamma^3$; $x^4=\gamma^4$.

Напомним, что $\gamma^1, \gamma^2, \gamma^3, \gamma^4$ -координаты точки C. Итак, многообразия (N_1^1), (N_3^3) в общем случае имеют размерность, равную трем единицам.

II случай.

Т е о р е м а 2. Размерность многообразия (N_1^1) $\{(N_3^3)\}$ равна двум тогда и только тогда, когда точки $A_1, A_2\{A_3, A_4\}$ сопряжены в нуль-полярной корреляции $\overset{\circ}{K}$ (т.е. $\overset{\circ}{a}_{12} = \overset{\circ}{a}_{21}$ $\{\overset{\circ}{a}_{34} = \overset{\circ}{a}_{43}\}$) и точка B не принадлежит плоскости $\widetilde{\Delta}_2(A)$ $\{\Delta_2(A)\}$ распределения $\widetilde{\Delta}_2$ $\{\Delta_2\}$.

При смещении точки A вдоль любого направления двумерного распределения Δ_2 $\{\widetilde{\Delta}_2\}$ точка N^1_1 $\{N^3_3\}$ -неподвижна.

С л е д с т в и е. Если связность эквиаффинна $\overset{\circ}{a}_{ij} = \overset{\circ}{a}_{ji}$,то размерности многообразий (N^1_1),(N^3_3) равны двум.

Теорему 2 можно сформулировать иначе:

Т е о р е м а 2 . Если точка B не принадлежит плоскостям распределений Δ_2, $\widetilde{\Delta}_2$,то $\dim(N^1_1)$ $\{\dim(N^3_3)\}$ равна двум тогда и только тогда,когда распределение Δ_2 $\{\widetilde{\Delta}_2\}$ голономно.

III случай.

Т е о р е м а 3. Размерность многообразия (N^1_1) равна единице тогда и только тогда,когда точка B принадлежит плоскости распределения $\widetilde{\Delta}_2(A)$.

При смещении точки A вдоль любого направления трехмерного распределения Δ_3: $\Delta_3(A) = (AA_1A_2C)$ точка N^1_1 -неподвижна.При этом в общем случае $\dim(N^3_3) = 3$. Распределение $\widetilde{\Delta}_2$: $\widetilde{\Delta}_2(A) = (AA_3A_4)$ становится голономным. Плоскости этого распределения касаются поверхности V_2: $\omega^1 = 0$, $\omega^2 = 0$, которая является развертывающейся поверхностью.Направление (AB) - единственное асимптотическое направление на ней.

Теорема, аналогичная теореме 3,справедлива для многообразия (N^3_3). Можно показать,что размерности многообразий (N^1_1), (N^3_3) одновременно не могут быть равны единице.

IУ случай. Пусть $\dim(N^1_1) = 0$ $\{\dim(N^3_3) = 0\}$. Если выполнено требование $N^1_1 \neq C$ $\{N^3_3 \neq C\}$,то мы придем к противоречивой системе уравнений. Это означает,что для отображения,которое рассматривается в данной работе,точки N^1_1, N^3_3 неподвижными быть не могут.

Библиографический список

I.Б а з ы л е в В.Т. Многомерные сети двойных линий//Дифференциальная геометрия многообразий фигур:Сб.науч.тр./Калинингр.ун-т. Калининград,I975.Вып.6.С.I9-25.

2.Н о р д е н А.П. Пространства аффинной связности.М.:Наука,I976.

3.К и р е е в а С.В. О паре сетей//Дифференциальная геометрия многообразий фигур:Межвуз.темат.сб.науч.тр./Калинингр.ун-т.Калининград.I983.Вып.I4.С.26-3I.

УДК 514.75

КОНГРУЭНЦИИ ПАР КОНИК СО СПЕЦИАЛЬНЫМИ СВОЙСТВАМИ АССОЦИИРОВАННЫХ ПОВЕРХНОСТЕЙ

Л.Г.К о р с а к о в а
(Калининградский государственный университет)

В трехмерном проективном пространстве P_3 рассматриваются конгруэнции H [I],образующим элементом которых является пара коник,лежащих в различных плоскостях,причем коника C_1 касается линии ℓ пересечения своих плоскостей в точке A_1 ,а коника C_2 пересекает линию ℓ в точках A_1 и A_2 . Плоскости коник образуют двумерные многообразия.Выделен и геометрически охарактеризован один из частных классов конгруэнций H .

Отнесем пространство P_3 к подвижному реперу $R = \{A_1, A_2, A_3, A_4\}$, деривационные формулы которого имеют вид $dA_\alpha = \omega^\beta_\alpha A_\beta$ $(\alpha, \beta, \gamma = \overline{1,4})$,где линейные дифференциальные формы ω^β_α удовлетворяют уравнениям структуры $D\omega^\beta_\alpha = \omega^\gamma_\alpha \wedge \omega^\beta_\gamma$ и условию эквипроективности $\omega^1_1 + \omega^2_2 + \omega^3_3 + \omega^4_4 = 0$. Вершины A_3 и A_4 репера R выберем таким образом,чтобы треугольники $A_1A_2A_3$ и $A_1A_2A_4$ были автополярными треугольниками второго рода соответственно относительно коник C_1 и C_2 .

О п р е д е л е н и е I. Конгруэнцией H^Q назовем такую конгруэнцию H ,в которой каждая коника C_2 конгруэнции (C_2) инцидентна одной квадрике Q .

Уравнения коник C_1, C_2, квадрики Q в репере R при соответствующей нормировке вершин A_α и система дифференциальных уравнений конгруэнции H^Q имеют вид:

$$(x^2)^2 - 2x^1x^3 = 0, \quad x^4 = 0; \qquad (x^4)^2 - 2x^1x^2 = 0, \quad x^3 = 0;$$

$$(x^4)^2 - 2x^1x^2 + x^3(2ax^1 + 2bx^2 + 2cx^4 + hx^3) = 0;$$

$$\left\{\begin{array}{l} \omega^1_2 = b\omega^3_2, \quad \omega^2_1 = a\omega^3_1, \quad \omega^1_4 = \omega_2 + b\omega^3_4 + c\omega^3_2, \\ \omega^2_4 = \omega_1 + a\omega^3_4 + c\omega^3_1, \quad \Omega_2 = 2c\omega^3_4 + a\omega^3_2 + b\omega^3_1, \quad \omega^3_1 = \Gamma^{3k}_1\omega_k, \\ \omega^3_2 = \Gamma^{3k}_2\omega_k, \quad \omega^3_4 = \Gamma^{3k}_4\omega_k, \quad \omega^4_3 = \Gamma^{4k}_3\omega_k, \quad \omega^1_3 = \Gamma^{1k}_3\omega_k, \quad \omega^2_3 = \Gamma^{2k}_3\omega_k, \\ \Omega_1 = a^k\omega_k, \; da = a(\omega^1_1 + \omega^3_3 - 2\omega^4_4) - 2ac\omega^3_4 - \omega^2_3 + b\omega^2_1 + c\omega_1 + h\omega^3_1, \\ db = b(\omega^2_2 + \omega^3_3 - 2\omega^4_4) - 2bc\omega^3_4 - \omega^1_3 + a\omega^1_2 + c\omega_2 + h\omega^3_2, \\ dc = c(\omega^3_3 - \omega^4_4) + \omega^4_3 + a\omega^1_4 + b\omega^2_4 + \omega^3_4(h - 2c^2), \\ \frac{1}{2}dh = h(\omega^3_3 - \omega^4_4) + c\omega^4_3 + b\omega^2_3 + a\omega^1_3 - ch\omega^3_4, \end{array}\right. \qquad (I)$$

где обозначено $\omega_i = \omega_i^4$, $\Omega_1 = \omega_1^1 + \omega_3^3 - 2\omega_2^2$, $\Omega_2 = \omega_1^1 + \omega_2^2 - 2\omega_4^4$ ($i,j,k = 1,2$; $i \neq j$, по i,j не суммировать).

Доказано, что конгруэнции H^Q существуют и определяются с произволом семи функций двух аргументов.

Определение 2. Парой H_0^Q называется такая пара H^Q, для которой: 1) прямые A_1A_2, A_3A_4 и точки A_3, A_4 полярно сопряжены относительно квадрики Q; 2) поверхность (A_4) является огибающей семейства плоскостей коник C_2, для которой линии A_4A_i есть асимптотические касательные.

Из определения пары H_0^Q следует, что она характеризуется соотношениями: $a = b = c = 0$, $\omega_4^3 = 0$, $\Gamma_1^{32} = \Gamma_2^{31} = 0$. Замыкая уравнение $\omega_4^3 = 0$, имеем $\Gamma_1^{31} = \Gamma_2^{32} \overset{def}{=} \gamma$. Система пфаффовых уравнений пары H_0^Q запишется в виде

$$\begin{cases} \omega_i^j = 0, \quad \omega_4^i = \omega_j, \quad \omega_3^4 = \omega_4^3 = 0, \quad \omega_3^i = h\omega_j^3, \quad \omega_i^3 = \gamma\omega_i, \quad \Omega_2 = 0, \\ \Omega_1 = a^k\omega_k, \quad dh = 2h(\omega_3^3 - \omega_4^4), \quad d\gamma = \gamma(\omega_4^4 - \omega_3^3). \end{cases} \tag{2}$$

Анализируя систему (2), убеждаемся, что конгруэнции H_0^Q существуют с произволом одной функции двух аргументов.

Теорема. Для конгруэнции H_0^Q справедливы следующие свойства: 1) прямые (A_iA_3), (A_iA_4) образуют одномерные многообразия; 2) плоскости $(A_iA_3A_4)$ описывают однопараметрические семейства; 3) пара прямолинейных конгруэнций (A_1A_2) и (A_3A_4) односторонне расслояема в направлении от (A_3A_4) к (A_1A_2); 4) поверхность (A_3) – характеристическая; 5) асимптотические линии на поверхностях (A_3) и (A_4) соответствуют; 6) точки A_1 и A_3 являются фокальными точками коники $C_1 \in (C_1)$; 7) поверхности (A_3) и (A_4) являются невырожденными инвариантными квадриками, причем все три квадрики Q, (A_3) и (A_4) касаются инвариантного конуса K вдоль одной и той же коники C_3; 8) (A_i) – линия, совпадающая с коникой C_3.

Поверхности Q, (A_3) и (A_4) определяются соответственно уравнениями

$$(x^4)^2 - 2x^1x^2 + h(x^3)^2 = 0,$$

$$(1 - h\gamma^2)(x^4)^2 - 2x^1x^2 + 2h\gamma x^3x^4 = 0,$$

$$(h\gamma^2 - 1)(x^3)^2 - 2\gamma^2x^1x^2 + 2\gamma x^3x^4 = 0.$$

Все три квадрики Q, (A_3) и (A_4) пересекаются по одной и той же конике.

Уравнение конуса K, которого касаются все квадрики Q, (A_3) и (A_4) вдоль коники C_3, имеет вид $h^2\gamma^2(x^3)^2 + (x^4)^2 - 2(1+h\gamma^2)x^1x^2 + 2h\gamma x^3x^4 = 0$.

Библиографический список

1. Корсакова Л.Г. Об одном классе конгруэнций пар коник в P_3 // Тезисы докл. VI Прибалт. геометр. конф. Таллин, 1984. С. 63.

УДК 514.75

О КОНГРУЭНЦИЯХ ОРИЦИКЛОВ И ОРИСФЕР В ПРОСТРАНСТВЕ ЛОБАЧЕВСКОГО

В.С. Малаховский
(Калининградский государственный университет)

Получены структурные формы орицикла и орисферы в интерпретации Кэли-Клейна геометрии Лобачевского. Исследованы фокальные многообразия конгруэнций орициклов и орисфер. Доказано, что конгруэнция орициклов имеет не более трех собственных фокальных поверхностей. Рассмотрены некоторые подклассы конгруэнций.

1. Рассмотрим в трехмерном проективном пространстве P_3 невырожденную нелинейчатую квадрику Q_0 и примем ее за абсолют пространства $Л_3$. В интерпретации Кэли-Клейна точки пространства $Л_3$ интерпретируются внутренними точками абсолюта, прямые – хордами абсолюта, причем точки абсолюта Q_0 являются несобственными точками расширенного пространства $Л_3$.

Орицикл C интерпретируется специальным типом нераспадающейся кривой второго порядка, касающейся абсолюта Q_0 в одной из его точек A_0 и расположенной внутри абсолюта, а орисфера S – невырожденной нелинейчатой квадрикой, касающейся Q_0 в точке A_0 и также лежащей внутри абсолюта [1]. Так как орицикл (орисфера) является кривой (поверхностью), ортогональной ко всем прямым пучка (связки) параллельных в заданном направлении прямых пространства $Л_3$, т.е. хорд абсолюта Q_0 с общим концом A_0, то для любой точки $M \in C$ ($M \in S$) полюс A_M касательной к орициклу C (касательной плоскости к орисфере S) в точке M относительно сечения Γ абсолюта Q_0 плоскостью орицикла C (соответственно относительно абсолюта Q_0) лежит на прямой A_0M.

Отнесем орицикл C (орисферу S) к реперу $R = \{A_0, A_1, A_2, A_3\}$, где A_3 – произвольная точка сечения Γ (абсолюта Q_0), A_1 и A_2 полярно сопряжены между собой и расположены на прямой, полярно сопряженной прямой A_0A_3 относительно абсолюта, причем в случае орицикла точка A_1 лежит в его плоскости. Осуществляя надлежащую нормировку вершин репера и требуя, чтобы $A_M \in A_0M$ для любой точки M орицикла C (соответственно орисферы S), приведем уравнения абсолюта, орицикла и орисферы соответственно к виду:

$$\mathcal{F} \equiv (x^1)^2 + (x^2)^2 - 2x^0x^3 = 0, \tag{1.1}$$

$$f \equiv (x^3)^2 + \frac{1}{2}(x^1)^2 - x^0x^3 = 0, \quad x^2 = 0; \tag{1.2}$$

$$\Phi \equiv (x^3)^2 + \frac{1}{2}(x^1)^2 + \frac{1}{2}(x^2)^2 - x^0x^3 = 0. \tag{1.3}$$

Уравнения инвариантности абсолюта Q_0 запишутся в виде:

$$\begin{cases} \omega_i^3 = \omega_0^i, \quad \omega_3^i = \omega_i^0, \quad \omega_3^0 = 0, \quad \omega_0^3 = 0, \quad \omega_1^2 + \omega_2^1 = 0, \\ \omega_2^2 = \omega_1^1, \quad \omega_0^0 + \omega_3^3 = 2\omega_2^2, \quad i,j = 1,2. \end{cases} \tag{1.4}$$

Дифференцируя (1.2), (1.3) с учетом (1.4), получим

$$\begin{cases} df\big|_{x^2=0} = \lambda f + (\omega_0^0 - \omega_3^3)(x^3)^2 - 2\omega^1 x^1 x^3, \\ dx^2\big|_{x^2=0} = -x^0\omega^2 - x^1\omega_1^2 - x^3\omega_2^0, \end{cases} \tag{1.5}$$

$$d\Phi = \mu\Phi + (\omega_0^0 - \omega_3^3)(x^3)^2 - 2\omega^1x^1x^3 - 2\omega^2x^2x^3, \tag{1.6}$$

где

$$\omega^i \stackrel{def}{=} \omega_0^i. \tag{1.7}$$

Из (1.5), (1.6) следует, что формы Пфаффа

$$\omega^1, \ \omega^2, \ \omega_1^2, \ \omega_2^0, \ \omega_0^0 - \omega_3^3 \tag{1.8}$$

являются структурными формами орицикла C, а формы Пфаффа

$$\omega^1, \ \omega^2, \ \omega_0^0 - \omega_3^3 \tag{1.9}$$

-структурными формами орисферы. Следовательно, орицикл является фигурой ранга $N=5$, а орисфера фигурой ранга $N=3$. Этот факт допускает простую геометрическую интерпретацию: каждая точка A_0 абсолюта является центром двупараметрического семейства пучков параллельных прямых (центром связки параллельных прямых), а каждый такой пучок (каждая связка) определяет однопараметрическое семейство орициклов (орисфер).

2. Принимая структурные формы ω^i за независимые, запишем систему уравнений Пфаффа конгруэнции (C) орициклов в виде (1.4) и уравнений:

$$\omega_1^2 = a_k\omega^k, \quad \omega_2^0 = b_{2k}\omega^k, \quad \omega_0^0 - \omega_3^3 = c_k\omega^k. \tag{2.1}$$

Система уравнений для определения фокальных точек орицикла C и фокальных семейств конгруэнции (C) имеет вид:

$$\begin{cases} \frac{1}{2}(x^1)^2 + (x^3)^2 - x^0x^3 = 0, \quad x^2 = 0, \\ c_k\omega^k(x^3)^2 - 2x^1x^3\omega^1 = 0, \quad x^0\omega^2 + a_k\omega^kx^1 + b_{2k}\omega^kx^3 = 0. \end{cases} \tag{2.2}$$

Анализируя эту систему, приходим к следующему результату.

Т е о р е м а 1. Несобственная точка A_0 орицикла C конгруэнции (C) является ее трехкратной (но не четырехкратной) фокальной точкой. Конгруэнция (C) имеет в общем случае три собственные фокальные поверхности.

Направляя ребро A_0A_3 репера через одну из собственных фокальных точек орицикла C, получим

$$(b_{22} - 1)c_1 - b_{21}c_2 = 0. \tag{2.3}$$

В построенном каноническом репере единичная точка E ребра A_0A_3 совпадает с выбранной фокальной точкой орицикла C:

$$E = A_0 + A_3, \tag{2.4}$$

причем

$$\omega_1^0 = b_{1k}\omega^k. \tag{2.5}$$

Условия

$$c_1 = 0, \quad c_2 = 0 \tag{2.6}$$

выделяют подкласс конгруэнций орициклов, характеризующийся тем, что касательная плоскость к поверхности (E) содержит ребро A_1A_2. Такие конгруэнции определяются с произволом двух функций двух аргументов.

Конгруэнция орисфер определяется одним уравнением Пфаффа:

$$\omega_0^0 - \omega_3^3 = c_k\omega^k. \tag{2.7}$$

Из (1.6), (2.7) следует, что координаты фокальных точек орисферы $S \in (S)$ удовлетворяют системе уравнений

$$x^3(c_1x^3 - 2x^1) = 0, \quad x^3(c_2x^3 - 2x^2) = 0. \tag{2.8}$$

Анализируя систему (1.3), (2.8), приходим к теореме 2 работы [2].

Т е о р е м а 2. Фокальное многообразие конгруэнции орисфер состоит из пары мнимых несобственных прямых

$$x^1 + ix^2 = 0, \quad x^3 = 0; \quad x^1 - ix^2 = 0, \quad x^3 = 0, \tag{2.9}$$

7 Зак. 1209

пересекающихся в точке A_0, и единственной собственной точки

$$\mathcal{F} = \left(2+\tfrac{1}{4}(c_1)^2+\tfrac{1}{4}(c_2)^2\right)A_0 + c_1 A_1 + 2A_3. \qquad (2.10)$$

Совмещая ребро A_0A_3 с прямой $A_0\mathcal{F}$ и выбирая A_1 в точке пересечения касательных плоскостей к абсолюту Q_0 в A_0 и A_3 и к орисфере S в точке $\mathcal{F}$, построим канонический репер конгруэнции орисфер. В этом репере фокальная точка $\mathcal{F}$ является единичной точкой ребра A_0A_3.

Библиографический список

1. Е ф и м о в Н.В. Высшая геометрия/ М.: ГИТТЛ, 1953.
2. А р т е м о в а И.Н. Конгруэнции орисфер в пространстве Лобачевского//Дифференциальная геометрия многообразий фигур: Межвуз. темат. сб. науч. тр./Калинингр. ун-т. Калининград, 1986. Вып. 17. С. 9-10.

УДК 514.75

НОРМАЛИЗАЦИЯ ПРОЕКТИВНЫХ ПРОСТРАНСТВ И ХАРАКТЕРИСТИЧЕСКИЕ ЧИСЛА, ПОРОЖДЕННЫЕ СЕМЕЙСТВОМ КОЛЛИНЕАЦИЙ

Н.В. М а л а х о в с к и й
(Калининградский государственный университет)

Продолжается, начатое в [1], исследование n-параметрических семейств Π_n коллинеаций $\pi: \mathcal{P}_n \to P_n$ n-мерных проективных пространств, отображающих заданную точку $P^0 \in \mathcal{P}_n$ в заданную точку $p^0 \in P_n$. Доказано, что поле фундаментального объекта второго порядка семейства Π_n определяет пучок инвариантных нормализаций каждого из пространств $\mathcal{P}_n$, P_n. Получена геометрическая характеристика гиперплоскостей, осуществляющих эти нормализации. Каждой характеристической прямой ассоциированного точечного отображения $\varphi: \mathcal{P}_n \to P_n$ семейство Π_n ставит в соответствие единственное число $\sigma \in \mathbb{R}$ (характеристическое число). В работе использованы обозначения и формулы из [1].

§1. Пучок нормализаций, порожденный семейством коллинеаций Π_n.

Продолженная система уравнений Пфаффа семейства коллинеаций Π_n имеет вид ([1], (1.6)-(1.9)):

$$\begin{cases} \omega^i = \lambda^i_j \Omega^j, \quad \nabla M^i_j = M^i_{jk}\Omega^k, \quad \nabla P_j + \Omega^0_j - M^k_j \omega^0_k = P_{jk}\Omega^k, \\ \nabla \lambda^i_j = \lambda^i_{jk}\Omega^k, \quad \Delta M^i_{jk} = M^i_{jkl}\Omega^l, \quad \Delta \lambda^i_{jk} = \lambda^i_{jkl}\Omega^l, \\ \Delta P_{jk} = P_{jkl}\Omega^l, \quad \Delta M^i_{jkl} = M^i_{jklh}\Omega^h, \quad \Delta P_{jkl} = P_{jklh}\Omega^h. \end{cases} \qquad (1.1)$$

Учитывая, что $\det(\lambda^i_j) \neq 0$, $\det(M^i_j) \neq 0$, $\det(\tilde{\lambda}^i_j) \neq 0$ $(\tilde{\lambda}^i_j = M^i_j - \lambda^i_j)$, рассмотрим системы величин

$$\Gamma^l_{jk} = \overset{*}{\lambda}{}^l_i \lambda^i_{jk}, \quad G^l_{jk} = \overset{*}{M}{}^l_i M^i_{jk}, \qquad (1.2)$$

$$\Gamma_j = \Gamma^k_{kj}, \quad G_j = G^k_{kj}, \qquad (1.3)$$

$$\nu_i = \overset{*}{\tilde{\lambda}}{}^j_i \left(P_j - \tfrac{1}{n+1}\Gamma_j\right), \qquad (1.4)$$

$$N_i = \overset{*}{\tilde{\lambda}}{}^j_i \left(P_j - \tfrac{1}{n+1}G_j\right), \qquad (1.5)$$

где $\overset{*}{\lambda}{}^l_i$, $\overset{*}{M}{}^l_i$, $\overset{*}{\tilde{\lambda}}{}^j_i$ взаимные тензоры соответственно к тензорам λ^i_j, M^i_j, $\tilde{\lambda}^i_j$. Имеем:

$$\nabla \Gamma^l_{jk} = -\delta^l_{(j}\Omega^0_{k)} + \delta^l_{(j}\lambda^i_{k)}\omega^0_i + \Gamma^l_{jkh}\Omega^h, \qquad (1.6)$$

$$\nabla G^l_{jk} = -\delta^l_{(j}\Omega^0_{k)} + \delta^l_{(j}\lambda^i_{k)}\omega^0_i + G^l_{jkh}\Omega^h, \qquad (1.7)$$

$$\nabla \Gamma_j = (n+1)(\lambda^i_j\omega^0_i - \Omega^0_j) + \Gamma_{jk}\Omega^k, \qquad (1.8)$$

$$\nabla G_j = (n+1)(\lambda^i_j\omega^0_i - \Omega^0_j) + G_{jk}\Omega^k, \qquad (1.9)$$

$$\nabla \nu_i = \omega^0_i + \nu_{ik}\Omega^k, \qquad (1.10)$$

$$\nabla N_i = \omega^0_i + N_{ik}\Omega^k. \qquad (1.11)$$

Следовательно, системы величин $\{\nu_i\}$ и $\{N_i\}$ являются квазитензорами. Каждый из них определяет для данной точки $p^0 \in P_n$ инвариантную гиперплоскость в P_n, не инцидентную точке p^0:

$$\nu_i x^i + 1 = 0, \qquad (1.12)$$

$$N_i x^i + 1 = 0, \qquad (1.13)$$

то есть нормализацию проективного пространства P_n, порожденную семейством Π_n коллинеаций $\pi: \mathcal{P}_n \to P_n$. В общем случае нормали (1.12), (1.13) определяют для каждой точки p^0 пучок инвариантных нормалей

$$(\nu_i + \sigma(N_i - \nu_i))x^i + 1 = 0, \qquad (1.14)$$

где $\sigma \in \mathbb{R}$. Гиперплоскости в $\mathcal{P}_n$, являющиеся прообразами нормалей (1.12), (1.13) при коллинеации π, определяются уравнениями

$$(\nu_i M^i_j - P_j)X^j + 1 = 0, \qquad (1.15)$$

$$(N_i M^i_j - P_j)X^j + 1 = 0, \qquad (1.16)$$

которые подобно (1.14) определяют в $\mathcal{P}_n$ пучок инвариантных нормалей для точки P^0. Получаем

П р е д л о ж е н и е 1.1. Поле фундаментального объекта второго порядка семейства Π_n коллинеаций $\pi: \mathcal{P}_n \to P_n$

определяет пучок инвариантных нормализаций каждого из пространств $\mathcal{P}_n$ и p_n.

Построенные нормализации позволяют провести частичную канонизацию реперов R и r пространств $\mathcal{P}_n$ и p_n. В однородных координатах $\tilde{x}^0$, $\tilde{x}^i = x^i\tilde{x}^0$, уравнение (I.14) нормали $\nu(\sigma)$ запишется в виде:

$$(\nu_i + \sigma(N_i - \nu_i))\tilde{x}^i + \tilde{x}^0 = 0. \qquad (1.17)$$

Поместим вершины a_i репера r на нормаль $\nu_{(\sigma)}$, где σ фиксировано. Уравнение (I.17) принимает вид

$$\tilde{x}^0 = 0, \qquad (I.18)$$

причем

$$\nu_i + \sigma(N_i - \nu_i) = 0, \qquad (I.19)$$

а формы Пфаффа ω_i^0 с помощью соотношений (I.10),(I.11),(I.19) выразятся линейно через Ω^J. Канонизированный таким образом репер пространства p_n обозначим r_σ. В частных случаях, при $\sigma=0$ и $\sigma=1$ вершины a_i репера r_σ определяют соответственно нормали (I.12), (I.13). Аналогичным образом можно провести частичную канонизацию репера R пространства $\mathcal{P}_n$.

§2. Геометрическая характеристика нормалей.

Обозначим символом K_0 локальную коллинеацию [2] точечного отображения φ в точке P^0. В общем случае отображения $S = \pi^{-1}\circ K_0$ и $S = K_0 \circ \pi^{-1}$ являются невырожденными проективными преобразованиями соответственно пространств $\mathcal{P}_n$ и p_n, причем точки P^0 и p_0 являются их неподвижными точками. Пусть S^* и s^* проективные преобразования пространств $\mathcal{P}_n^*$ и p_n^*, двойственных к $\mathcal{P}_n$ и p_n, т.е. преобразования, сопряженные к S и s.

П р е д л о ж е н и е 2.1. Нормаль $\nu(0)$ является неподвижным элементом преобразования s^*, сопряженного к преобразованию $s = K_0\circ\pi^{-1}$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. В репере r_0 имеем $\nu_i = 0$, из (I.4) находим

$$P_J = \frac{1}{n+1}\Gamma_J. \qquad (2.1)$$

Локальная коллинеация K_0 отображения φ определяется формулой (2.13) [I], где $Q_K = \frac{1}{n+1}\Gamma_K$. Для $\pi^{-1}(\nu_{(0)})$ и $K_0^{-1}(\nu_{(0)})$ получаем соответственно

$$P_J X^J - 1 = 0, \qquad (2.2)$$

$$\Gamma_J X^J - (n+1) = 0, \qquad (2.3)$$

откуда вытекает утверждение теоремы.

Следующие два предложения являются следствиями предложения 2.I.

П р е д л о ж е н и е 2.2. Полные прообразы множества точек нормали $\nu_{(0)}$ при отображениях π и K_0 совпадают.

П р е д л о ж е н и е 2.3. Нормаль $\pi^{-1}(\nu_{(0)})$ пространства $\mathcal{P}_n$ в точке P^0 является неподвижным элементом преобразования S^*, сопряженного к преобразованию $S = \pi^{-1}\circ K_0$ пространства $\mathcal{P}_n$.

Каждое из предложений 2.1 – 2.3 в общем случае дает полную геометрическую характеристику нормали $\nu_{(0)}$. Для геометрической характеристики нормали $\nu_{(1)}$ рассмотрим в $\mathcal{P}_n$ поле аффинора $\{A_K^J\}$ ([I] с. 54). Покажем, что для каждой точки $P^0 \in \mathcal{P}_n$ полем $\{A_K^J\}$ однозначно определяется коллинеация $\varkappa$ пространства $\mathcal{P}_n$. Потребуем, чтобы преобразование $\varkappa$ имело в точке P^0 касание первого порядка с тождественным преобразованием $\mathrm{Id}\,\mathcal{P}_n$. Тогда $\varkappa$ запишется в виде

$$y^J = \frac{X^J}{1-\varkappa_K X^K}. \qquad (2.4)$$

Из (2.4) получаем

$$\overset{0}{\nabla}\varkappa_K = 0, \qquad (2.5)$$

где $\overset{0}{\nabla}$ обозначает оператор, соответствующий оператору ∇ [1] при фиксации первичных параметров. Для якобиана $\mathcal{J}(\varkappa)$ отображения $\varkappa$ получаем:

$$\det \ln \mathcal{J}(\varkappa) = (n+1)\varkappa_J\Omega^J. \qquad (2.6)$$

Наложим на отображение $\varkappa$ условие равенства значений форм (2.6) и (3.5) [1] в точке P^0:

$$d\ln\mathcal{J}(\varkappa) = d\ln\det(A_K^J). \qquad (2.7)$$

Геометрически это условие означает, что в любой системе координат точка P^0 является стационарной точкой числовой функции

$$\rho = \frac{\mathcal{J}(\varkappa)}{\det(A_K^J)}. \qquad (2.8)$$

Формула (2.7) приводит к равенству тензоров

$$\varkappa_J = \frac{1}{n+1}M_J, \qquad (2.9)$$

где M_J задано соотношением (2.5) [1]. Таким образом, преобразование $\varkappa$:

$$y^J = \frac{X^J}{1-\frac{1}{n+1}M_K X^K} \qquad (2.10)$$

является единственной коллинеацией $\mathcal{P}_n \to \mathcal{P}_n$, имеющей в точке P^0 касание первого порядка с отображением $\mathrm{Id}\,\mathcal{P}_n$, для которой точка P^0 является стационарной точкой функции (2.8) в каждой системе координат. Сравнивая (I.2),(I.3) с формулой (2.5)[1], находим

$$M_J = G_J - \Gamma_J. \qquad (2.11)$$

Для локальной коллинеации $\mathcal{L}$ отображения $\varphi\circ\varkappa$

$$x^i = \frac{\Lambda^i_j X^j}{1 - R_k X^k} \qquad (2.12)$$

получаем

$$R_j = \frac{1}{n+1}\,(\Gamma_j + M_j) \qquad (2.13)$$

или с учетом (2.11):

$$R_j \overset{\bullet}{=} \frac{1}{n+1}\, G_j . \qquad (2.14)$$

Сравнивая (2.14),(2.1) с (1.8),(1.9) и проводя рассуждения, аналогичные доказательству предложения 2.1, получаем следующие предложения:

П р е д л о ж е н и е 2.4. Нормаль $\nu_{(1)}$ является неподвижным элементом преобразования t^*, сопряженного к преобразованию $t = \mathcal{L}\circ \pi^{-1}$: $P_n \to P_n$, где $\mathcal{L}$ -локальная коллинеация отображения $\varphi\circ\pi$.

П р е д л о ж е н и е 2.5. Полные прообразы $\pi^{-1}(\nu_{(1)})$ и $\mathcal{L}^{-1}(\nu_{(1)})$ множества точек нормали $\nu_{(1)}$ при отображениях π и $\mathcal{L}$ совпадают.

Таким образом, получена геометрическая характеристика нормалей $\nu_{(0)}$ и $\nu_{(1)}$ пучка нормалей $\nu_{(\sigma)}$, базисными нормалями которого являются гиперплоскости $\nu_{(0)}, \nu_{(1)}$ и гиперплоскость $\nu_{(\infty)}$:

$$(N_i - \nu_i)\, x^i = 0 , \qquad (2.15)$$

проходящая через точку P° и (n-2)-плоскость $\nu_{(0)} \cap \nu_{(1)}$. Тем самым геометрически охарактеризована каждая нормаль $\nu_{(\sigma)}$ пучка (1.14), а также все нормали $\pi^{-1}(\nu_{(\sigma)})$ в $\mathcal{P}_n$.

Между гиперплоскостью $\nu_{(\infty)} \subset P_n$ и гиперплоскостью $M \subset \mathcal{P}_n$, задаваемой уравнением (3.4)[1]и охарактеризованной в предложении 3 [1], имеется следующая связь. Пусть $d\varphi: T_{P^\circ}(\mathcal{P}_n) \to T_{p^\circ}(P_n)$, $d\pi: T_{P^\circ}(\mathcal{P}_n) \to T_{p^\circ}(P_n)$ дифференциалы отображений φ и π. Они определяются соответственно формулами

$$\omega^i = \lambda^i_j \Omega^j, \qquad \omega^i = M^i_j \Omega^j. \qquad (2.16)$$

Обозначим символами $T(\nu_{(\infty)})$ и $T(M)$ соответственно (n-1)-мерные подпространства в $T_{p^\circ}(P_n)$ и $T_{P^\circ}(\mathcal{P}_n)$, определяющие гиперплоскости $\nu_{(\infty)} \subset P_n$ и $M \subset \mathcal{P}_n$.

П р е д л о ж е н и е 2.6. Пусть линейное отображение $\alpha: T_{P^\circ}(\mathcal{P}_n) \to T_{p^\circ}(P_n)$ определяется равенством

$$d\pi = d\varphi + \alpha , \qquad (2.17)$$

тогда

$$\alpha\big(T(M)\big) = T\big(\nu_{(\infty)}\big). \qquad (2.18)$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Отображение α задается матрицей $(\tilde{\lambda}^i_j)$. Утверждение теоремы непосредственно вытекает из (1.8),(1.9) и (3.4) [1].

§3. φ_σ-главные точки. Характеристические прямые и характеристические числа.

Если репер пространства P_n является репером $\mathcal{R}_\sigma$, то для каждой точки $P^\circ \in \mathcal{P}_n$ система уравнений

$$\lambda^i_{jk} X^j X^k - 2\lambda^i_j X^j = 0 \qquad (3.1)$$

определяет инвариантное многообразие $\mathcal{J}_\sigma \subset \mathcal{P}_n$. Многообразие $\mathcal{J}_\sigma$ содержит точку P° и в общем случае является нульмерным алгебраическим многообразием порядка 2^n, т.е. состоит из 2^n точек, одна из которых совпадает с точкой P°. В специальных случаях размерность многообразия $\mathcal{J}_\sigma$ может повышаться. Будем называть многообразие $\mathcal{J}_\sigma$ φ_σ-индикатрисой.

О п р е д е л е н и е 3.1. Пусть $K(Q_j)$ -связка коллинеаций, касательных к отображению φ в точке P°. Точка $B \in \mathcal{P}_n$, $B \neq P^\circ$ называется φ_σ-главной точкой относительно точки P°, если прямая $[P^\circ B]$ является $K(Q_j)$-главной прямой отображения φ и точка $K(Q_j)(B)$ лежит в гиперплоскости $\nu_{(\sigma)} \subset P_n$.

Из этого определения следует, что понятие φ_σ-главных точек является обобщением понятия главных точек [3] отображения $f: P_m \to \hat{P}_n$, где $\hat{P}_n$ расширенное аффинное пространство, и совпадает с последним в специальном случае, когда все нормали $\nu_{(\sigma)}$ совпадают друг с другом и одинаковы для всех точек пространства. Отсюда вытекает геометрическая интерпретация φ_σ-индикатрисы $\mathcal{J}_\sigma$ как обобщения индикатрисы $\mathcal{J}$ [3] отображения f и ее связь с множеством $\mathcal{X}_\varphi$ характеристических прямых отображения φ.

П р е д л о ж е н и е 3.1. φ_σ-индикатриса $\mathcal{J}_\sigma$ является объединением множества φ_σ-главных точек и множества, состоящего из точки P°.

П р е д л о ж е н и е 3.2. Множество $\mathcal{X}_\varphi$ характеристических прямых отображения φ состоит из прямых вида $[P^\circ B]$, где $B \in \mathcal{J}_\sigma$, $B \neq P^\circ$.

Легко показать, что $\mathcal{X}_\varphi$ не меняется при изменении σ.

О п р е д е л е н и е 3.2. Пусть Λ -характеристическая прямая отображения φ и B - φ_σ-главная точка на ней. Число σ называется характеристическим числом соответствующей прямой Λ, если $\pi(B) \in \nu_{(\sigma)}$.

Так как сужение на Λ всех касательных к φ в точке P° коллинеаций $K(Q_j)$, для которых прямая Λ является $K(Q_j)$-главной, совпадают [4], справедливо

П р е д л о ж е н и е 3.3. Семейством Π_n коллинеаций $\pi: \mathcal{P}_n \to P_n$ определяется во второй дифференциальной окрестности пары (P°, p°) на множестве χ_φ характеристических прямых точечного отображения $\varphi: \mathcal{P}_n \to p_n$ числовая функция, которая каждой характеристической прямой Λ ставит в соответствие единственное характеристическое число σ.

Библиографический список

1. Малаховский Н.В. О семействах коллинеаций многомерных проективных пространств//Дифференциальная геометрия многообразий фигур: Межвуз. темат. сб. науч. тр./Калинингр. ун-т. Калининград, 1989. Вып. 20. С. 50-57.

2. Чех Э. Проективно-дифференциальная геометрия соответствий между двумя пространствами. I//Чехосл. матем. ж. 1952. Т. 2. №1. С. 91-107.

3. Андреев Б.А. К геометрии дифференцируемого отображения $f: P_m \to \widehat{P}_n$ $(m>n)$ //Дифференциальная геометрия многообразий фигур: Межвуз. темат. сб. науч. тр./Калинингр. ун-т. Калининград, 1987. Вып. 18. С. 5.

4. Рыжков В.В. Дифференциальная геометрия точечных соответствий между пространствами//Геометрия 1963. Итоги науки/ВИНИТИ. М., 1965. С. 65-107.

УДК 514.75

КОНГРУЭНЦИИ И СУПЕРКОНГРУЭНЦИИ m-ПЛОСКОСТЕЙ ЭЛЛИПТИЧЕСКОГО n-ПРОСТРАНСТВА

А.Ф. Масагутова

(Московский государственный педагогический институт)

В работе изучаются некоторые семейства m-мерных плоскостей эллиптического пространства S_n: конгруэнции и суперконгруэнции m-плоскостей, строятся канонические реперы.

1. Конгруэнцией m-плоскостей пространства S_n называется семейство m-плоскостей, зависящее от $n-m$ вещественных параметров. В общем случае m-плоскости конгруэнции заполняют все пространство S_n, причем через каждую точку некоторой области этого пространства проходит единственная m-плоскость конгруэнции. Те точки пространства S_n, в которых нарушается единственность прохождения m-плоскости конгруэнции, называются фокусами m-плоскостей конгруэнции. Теория конгруэнций m-плоскостей пространства S_n изучалась тензорным методом В.В. Вагнером [1], Б.А. Розенфельдом [2].

На грассманиане $\Gamma\rho^{s}_{n,m}$ $(m+1)(n-m)$-поверхности в пространстве S_N, где $N=\binom{n+1}{m+1}-1$, координатами точек которой являются грассмановы координаты $p^{i_0 \dots i_m}$ плоскостей пространства S_n, конгруэнция m-плоскостей пространства S_n изображается $(n-m)$-поверхностью. Если обозначить касательные векторы к грассманиане $d\vec{p} = \omega^{au}\vec{e}_{au}$ $(a, b = 0, 1, \dots, m;\ u, v = m+1, m+2, \dots, n)$, то для векторов, касательных к этой $(n-m)$-поверхности, строки матрицы (ω^{au}) линейно зависят друг от друга $\omega^{au} = c^{au}_{ov}\omega^{ov}$.

Если за базисную точку X_0 m-плоскости принять точку этой $(n-m)$-поверхности, то дифференциальные формы ω^u можно рассматривать как дифференциальные формы $(n-m)$-поверхности и уравнения Пфаффа этой $(n-m)$-поверхности можно записать в виде $\omega^a = 0$. Дифференцируя эти уравнения внешним образом, мы получим $\omega^a_u \wedge \omega^u = 0$ и в силу леммы Картана $\omega^a_u = b^a_{uv}\omega^v$, где

$$b^a_{uv} = b^a_{vu} \tag{I}$$

Если мы отождествим формы ω^{au} с формами ω^v, получим, что в этом случае $c^{au}_{ov} = b^a_{uv}$, т.е. в силу (I): $c^{au}_{ov} = c^{av}_{ou}$

Конгруэнции m-плоскостей пространства S_n являются частным случаем конгруэнций m-поверхностей этого пространства, т.е. семейств m-поверхностей, зависящих от $(n-m)$ вещественных параметров и обладающих тем свойством, что через каждую точку некоторой области пространства проходит единственная m-поверхность семейства.

Если мы обозначим уравнения m-поверхности конгруэнции $f^u = f^u(x^0, x^1, \dots, x^n; u^{m+1}, u^{m+2}, \dots, u^n)$, то фокусы этой конгруэнции удовлетворяют условиям

$$\frac{\mathcal{D}(f^{m+1}, f^{m+2}, \dots, f^n)}{\mathcal{D}(u^{m+1}, u^{m+2}, \dots, u^n)} = 0. \tag{2}$$

Поэтому в случае конгруэнции m-плоскостей фокусы, находящиеся на одной m-плоскости конгруэнции, образуют алгебраическую $(m-1)$-поверхность $(n-m)$-го порядка, определяемую уравнением (2). В частности, в случае $m=1$, т.е. конгруэнции прямых, на каждой прямой конгруэнции имеется $n-1$ фокусов. Поэтому имеет место

Теорема 1. В случае конгруэнции прямых пространства S_n с каждой прямой конгруэнции можно связать канонический репер первого порядка.

В этом случае сегреана [3] $\Sigma^{s}_{m,n-m-1}$ в бесконечно удаленной гиперплоскости касательного пространства $E_{(m+1)(n-m)}$ к грассманиане $\Gamma\rho^{s}_{n,m}$ является сегреаной $\Sigma^{s}_{1,n-2}$, представляющей собой алгебраическую поверхность, размерность и порядок которой равны $n-1$. Поэтому бесконечно удаленная $(n-2)$-плоскость $(n-1)$-плоскости пространства E_{2n-2}, касательной к $(n-1)$-поверхности, изображает конгруэнцию прямых на грассманиане $\Gamma\rho^{s}_{n,1}$, пересекающуюся с сегреаной $\Sigma^{s}_{1,n-1}$ в $n-1$ точках, каждая из которых определяет пучок прямых, проходящих через прямую конгруэнции. 2-плоскости этих пучков определяют на полярной (n-2)-плоскости прямой конгруэнции в пространстве S_n n-1 точек $E_2, E_3, \ldots, E_n$, а центры этих пучков определяют на прямых конгруэнции точки $A_2, A_3, \ldots, A_n$. За точки E_0 и E_1 репера, связанного с прямыми конгруэнции, можно выбрать точку A_2 и полярно-сопряженную с ней точку.

2. Будем называть суперконгруэнциями m-плоскостей пространства S_n такие k-семейства m-плоскостей, для которых k-плоскость, касательная к k-поверхности, изображающей конгруэнцию m-плоскостей на грассманиане $\Gamma\rho^{S}_{n,m}$, высекает из бесконечно удаленной $[(m+1)(n-m)-1]$-плоскости $(m+1)(n-m)$ -плоскости, касательной к грассманиане $\Gamma\rho^{S}_{n,m}$, $(k-1)$-плоскость, размерность которой равна разности размерностей $(m+1)(n-m)-1$ бесконечно удаленной плоскости и размерности n-1 сегреаны $\Sigma^{S}_{m,n-m-1}$. В этом случае пересечение этой $(k-1)$-плоскости с сегреаной $\Sigma^{S}_{m,n-m-1}$ состоит из конечного числа точек. Число k параметров суперконгруэнции определяется соотношением $k = m(n-m-1)+1$. Сегреана $\Sigma^{S}_{m,n-m-1}$ является алгебраической поверхностью порядка $\binom{n-1}{m}$, поэтому число точек пересечения - $\binom{n-1}{m}$.

Т е о р е м а 2. С каждой m-плоскостью суперконгруэнции m-плоскостей пространства S_n можно связать репер первого порядка.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Каждая из $\binom{n-1}{m}$ точек пересечения $(k-1)$-плоскости с сегреаной $\Sigma^{S}_{m,n-m-1}$ определяет пучок m-плоскостей, проходящих через m-плоскость суперконгруэнции. Каждому такому пучку соответствует точка B_φ ($\varphi = 0, 1, \ldots, \binom{n-1}{m}-1$) $(n-m-1)$-плоскости, полярной данной m-плоскости, по которой $(m+1)$-плоскость этого пучка пересекается с этой $(n-m-1)$ -плоскостью, и $(m-1)$-плоскость, по которой m-плоскость пучка пересекается с данной m-плоскостью, следовательно, полюс A_φ этой $(m-1)$-плоскости в данной m-плоскости. Таким образом, мы получаем $\binom{n-1}{m}$ точек A_φ в данной m-плоскости и столько же точек B_φ в полярной ей $(n-m-1)$-плоскости. Так как при $m>1$, $n>2$:

$$\binom{n-1}{m} > n-m, \quad \binom{n-1}{m} > m+1,$$

то при $m>1$, $n>2$ число точек A_φ больше $m+1$ и из этих точек всегда можно выбрать базис данной m-плоскости, а число точек B_φ больше $n-m$ и из этих точек всегда можно выбрать базис $(n-m-1)$-плоскости, полярной данной m-плоскости.

Библиографический список

1. З а г н е р В.В. Differential geometry of the family of R'_ks in R_n and of the family of totally geodesic S'_{k-1}s in S_{n-1} of positive curvature//Матем. сб. 1942. Т.10. №3. С.165-212.

2. Р о з е н ф е л ь д Б.А. Дифференциальная геометрия семейств многомерных плоскостей//Изв.АН СССР.Сер.матем.1947.Т.11.С.283-308.

3. Р о з е н ф е л ь д Б.А., Половцева М.А., Рязанова Л.А., Юхтина Т. Сегреаны и квазисегреаны и их применение к геометрии семейств прямых и плоскостей//Изв.вузов.Математ.1988.№5.С.50-56.

УДК 514.75

О ДВОЙНЫХ ЛИНИЯХ ПАРЫ (f, Δ_2) В ЕВКЛИДОВОМ ПРОСТРАНСТВЕ E_3

Г. М а т и е в а
(Ошский педагогический институт)

Рассматривается частичное отображение евклидова пространства E_3, порождаемое заданным семейством гладких линий, и исследуются двойные линии пары (f, Δ_2).

В области Ω евклидова пространства E_3 задано семейство гладких линий так, что через каждую точку $x \in \Omega$ проходит одна линия этого семейства. Пусть область Ω отнесена к подвижному ортонормированному реперу $\mathcal{R} = (x, \vec{e}_i)$ $(i, j, k = 1, 2, 3)$, который является репером Френе для линии ω^1 заданного семейства. Деривационные формулы репера $\mathcal{R}$ имеют вид

$$d\vec{x} = \omega^i \vec{e}_i, \quad d\vec{e}_i = \omega_i^j \vec{e}_j \tag{1}$$

Формы ω^i, ω_i^j удовлетворяют структурным уравнениям евклидова пространства: $\mathcal{D}\omega^i = \omega^k \wedge \omega_k^i$, $\mathcal{D}\omega_i^k = \omega_i^\ell \wedge \omega_\ell^k$, $\omega_i^j + \omega_j^i = 0$.
Интегральные линии векторных полей $\vec{e}_i$ образуют сеть Френе. Ее обозначим через Σ_F. Так как репер $\mathcal{R}$ построен на касательных к линиям этой сети, имеем:

$$\omega_i^k = \Lambda_{ij}^k \omega^j \quad (\Lambda_{ij}^k = -\Lambda_{kj}^i, \ \Lambda_{31}^1 = 0). \tag{2}$$

Формулы Френе для линии ω^1 имеют вид:

$$\frac{d\vec{x}}{ds} = \vec{e}_1 \ (ds = \omega^1); \ \frac{d\vec{e}_1}{ds} = \Lambda_{11}^2 \vec{e}_2; \ \frac{d\vec{e}_2}{ds} = -\Lambda_{11}^2 \vec{e}_1 + \Lambda_{21}^3 \vec{e}_3; \ \frac{d\vec{e}_3}{ds} = -\Lambda_{21}^3 \vec{e}_2,$$

где Λ_{11}^2 -кривизна, Λ_{21}^3 -кручение линии ω^1.

Псевдофокус F_i^j ($i \neq j$) касательной $(x, \vec{e}_i)$ к линии ω^i сети Σ_F определяется следующим радиус-вектором:

$$\vec{F}_i^j = \vec{x} - \frac{1}{\Lambda_{ij}^j} \vec{e}_i. \tag{3}$$

Когда точка x смещается в области Ω, точка $F_3^2 \in (x, \vec{e}_3)$ опишет свою область $\widetilde{\Omega}$. Получим отображение $f: \Omega \to \widetilde{\Omega}$ такое, что $f(x) = F_3^2$.
Дифференцируя внешним образом (2) и применяя лемму Картана, получим:

$$d\Lambda^k_{ij} = \Lambda^k_{ijt}\,\omega^t,$$

где

$$\Lambda^k_{ijt} = \Lambda^k_{ijt} + \Lambda^k_{i\ell}\Lambda^\ell_{jt} + \Lambda^k_{\ell j}\Lambda^\ell_{it}\,. \qquad (4)$$

Дифференцируем равенство $\vec F^2_3 = \vec x - \frac{1}{\Lambda^2_{32}}\vec e_3$ и применяем обозначение (4) для $i=3,\ j=k=2$. Тогда имеем $d\vec F^2_3 = \omega^i\vec a_i$, где

$$\vec a_i = \vec e_i + \frac{\Lambda^2_{32i}}{(\Lambda^2_{32})^2}\vec e_3 - \frac{\Lambda^k_{3i}}{\Lambda^2_{32}}\vec e_k\,. \qquad (5)$$

В общем случае векторы $\vec a_i$ линейно независимы. Область $\widetilde\Omega$ отнесем к подвижному реперу $\widetilde{\mathcal R} = (F^2_3, \vec a_i)$. При таком выборе реперов $\mathcal R$, $\widetilde{\mathcal R}$ дифференциальные уравнения отображения f имеют вид: $\omega^i = \widetilde\omega^i$.

Линии ℓ, $\tilde\ell = f(\ell)$ называются двойными линиями отображения f, если касательные к ним, взятые в соответствующих точках x и $f(x)=y$, пересекаются либо параллельны [1].

Линия ℓ называется двойной линией пары (f,Δ_2), где Δ_2 -двумерное распределение в области Ω, если она является двойной линией отображения f и принадлежит распределению Δ_2 [1].

Пусть линия ω^1 плоская, т.е. $\Lambda^3_{21}=0$. Легко видеть, что векторы $\vec e_1, \vec a_1, \overrightarrow{xF^2_3}$ компланарны, где $\vec a_1 = \vec e_1 + (\Lambda^2_{32})^{-2}\Lambda^2_{321}\vec e_3 - (\Lambda^2_{32})^{-1}\Lambda^2_{31}\vec e_2$. Следовательно, линия ω^1 является двойной линией пары (f,Δ_2). Обратно, пусть линия ω^1 является двойной линией пары (f,Δ_2). Тогда векторы $\vec e_1$, $\vec a_1$, $\overrightarrow{xF^2_3}$ должны быть компланарными. Из условия компланарности этих векторов получим, что $\Lambda^3_{21}=0$, т.е. линия ω^1 плоская. Таким образом, справедлива

Т е о р е м а 1. Линия ω^1 заданного семейства является двойной линией пары (f,Δ_2) (где $\Delta_2 = (x, \vec e_1, \vec e_2)$) тогда и только тогда, когда она плоская.

Аналогично можно доказать, что линия ω^2 является двойной линией пары (f,Δ_2) тогда и только тогда, когда векторы $\vec\Lambda_{12}$, $\vec e_2$ коллинеарны ($\vec\Lambda_{12}$ -вектор вынужденной кривизны поля вектора $\vec e_1$ вдоль направления $\vec e_2$).

Т е о р е м а 2. Сеть Σ_F является голономной тогда и только тогда, когда выполняются следующие условия: 1) линия ω^1 заданного семейства плоская; 2) векторы $\vec\Lambda_{12}$, $\vec e_2$ коллинеарны; 3) векторы $\vec\Lambda_{13}$, $\vec e_3$ коллинеарны [2].

С л е д с т в и е. Если сеть Σ_F голономна, то ее линии ω^1, ω^2 являются двойными линиями пары (f,Δ_2).

Рассмотрим линию ℓ, принадлежащую распределению Δ_2. Ее касательный вектор в точке x имеет вид: $\vec\ell = \ell^1\vec e_1 + \ell^2\vec e_2 \in \Delta_2(x)$. Тогда $\vec{\tilde\ell} = \ell^i\vec a_i$ -касательный вектор линии $\tilde\ell = f(\ell)$. Учитывая (5):

$$\vec{\tilde\ell} = \Big(\ell^1 - \frac{\Lambda^1_{32}}{\Lambda^2_{32}}\ell^2\Big)\vec e_1 - \frac{\Lambda^2_{31}\ell^1}{\Lambda^2_{32}}\vec e_2 + \frac{\Lambda^2_{321}\ell^1 + \Lambda^2_{322}\ell^2}{(\Lambda^2_{32})^2}\vec e_3\,.$$

Из условия компланарности векторов $\vec\ell$, $\vec{\tilde\ell}$, $\overrightarrow{xF^2_3}$ получим:

$$\Lambda^1_{32}t^2 - \Lambda^2_{32}t - \Lambda^2_{31} = 0\,, \qquad (6)$$

где $t = \ell^2:\ell^1$. В общем случае квадратное уравнение имеет два решения. Следовательно, пара (f,Δ_2) имеет не более двух двойных линий. Поэтому, если линии ω^1, ω^2 являются двойными линиями пары (f,Δ_2) одновременно, то никакая другая линия, принадлежащая распределению Δ_2, не может быть двойной линией пары (f,Δ_2). Пусть только линия ω^1 является двойной линией пары (f,Δ_2), т.е. $\Lambda^3_{21}=0$. Тогда уравнение (6) имеет решения $t=0$, $t=\Lambda^2_{32}/\Lambda^1_{32}$. Решение $t=0$ определяет направление, определяемое вектором $\vec e_1$, а решение $t=\Lambda^2_{32}/\Lambda^1_{32}$ определяет направление, определяемое вектором $\vec\Lambda_{32} = \Lambda^1_{32}\vec e_1 + \Lambda^2_{32}\vec e_2$ вынужденной кривизны поля вектора $\vec e_3$ вдоль направления $\vec e_2$. Таким образом, если линия ω^1 является двойной линией пары (f,Δ_2), то другой двойной линией этой пары является интегральная линия поля вектора $\vec\Lambda_{32}$.

Аналогично можно показать, что если линия ω^2 является двойной линией пары (f,Δ_2), то другой двойной линией этой пары является интегральная линия поля вектора $\vec\ell = \Lambda^2_{32}\vec e_1 + \Lambda^3_{21}\vec e_2$.

Библиографический список

1. Б а з ы л е в В.Т. Многомерные сети двойных линий //Дифференциальная геометрия многообразий фигур: Сб. науч. тр./Калинингр. ун-т. Калининград, 1975. Вып. 6. С. 19-25.

2. М а т и е в а Г. Об одной сети Френе//Тез. докл. IX Всесоюз. геометр. конф. Кишинев, 1988. С. 209.

УДК 514.76

РЕДУКЦИЯ СИЛЬНО ПРИВОДИМЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ СИСТЕМ ПЯТОГО ПОРЯДКА К СТРУКТУРЕ СТАБИЛЬНОЙ НЕЛИНЕЙНОЙ СВЯЗНОСТИ

И.Д. М е б о н и я
(Тбилисский государственный университет)

Как было замечено в [2], [4], один широкий класс нелинейных связностей в расслоениях реперов высших порядков естественным образом проектируется на множество всевозможных систем обыкновенных дифференциальных уравнений на единицу большего порядка. Порождаемая связностью дифференциальная система берет на себя определенную геометрическую функцию, подобную той, которую выполняют уравнения геодезических линий пространства аффинной или римановой связности. Каждая дифференциальная система является при этом проекцией весьма обширного множества связностей. В рамках этого класса связностей, именуемых стабильными, ставится задача (а, в данной работе и решается на примере систем пятого порядка) построения в некотором смысле единственной канонической нелинейной связности, проектируемой в заранее заданную дифференциальную систему приводимого (в нашем случае сильно приводимого) типа. Таким путем удается все инвариантные свойства дифференциальной системы получать и формулировать на геометрическом языке нелинейных связностей.

Объем данной статьи не дает возможности изложить все те факты и методы, которые необходимы для полного понимания приводимых утверждений и доказательств. Попутно с изложением основных результатов мы лишь приведем несколько существенно используемых формул и критерий. Для ознакомления с общим аппаратом нелинейных связностей применительно к расслоениям реперов мы отсылаем читателя к работам [3], [4]. Нами полностью сохранены обозначения, принятые в указанных статьях.

Исходным объектом является сильно приводимая дифференциальная система пятого порядка

$$f^5: T^4(V_n) \to T^5(V_n), \quad \overline{V}_5^i = \overline{V}_5^i(\tau^5, V_1^e, V_2^e, V_3^e, V_4^e), \tag{1}$$

структурные уравнения которой имеют вид

$$\Delta V_5^i = V_{5k}^{i0}\omega^k + V_{5k}^{i1}\Delta V_1^k + V_{5k}^{i2}\Delta V_2^k + V_{5k}^{i3}\Delta V_3^k + V_{5k}^{i4}\Delta V_4^k, \tag{2}$$

где

$$\Delta V_q^i = dV_q^i + q!\sum_{s=1}^{q}\frac{1}{s!}\sum_{\alpha_1+\ldots+\alpha_s=q}\frac{1}{\alpha_1!}V_{\alpha_1}^{k_1}\cdots\frac{1}{\alpha_s!}V_{\alpha_s}^{k_s}\,\omega_{k_1\ldots k_s}^i \quad (q=\overline{1,5}) \tag{3}$$

суть структурные формы расслоения. Структурные уравнения всех индуцированных отображений выводятся путем продолжения уравнений (2) и операций охвата. Запишем условия сильной приводимости системы

$$V_{\lambda+1}^i \equiv \Gamma_{\lambda k}^i V_1^k \ (\lambda=\overline{1,4}), \quad \overline{V}_5^i \equiv \Gamma_{4k}^i V_1^k, \tag{4}$$

где величины

$$\Gamma_{\lambda+1,k}^i = \sum_{\mu=1}^{\lambda+1} C_{3+\mu-\lambda}^{4-\lambda} : C_5^{4-\lambda}\cdot V_{5e}^{i,3+\mu-\lambda}\,\Gamma_{\mu-1,k}^e, \quad \Gamma_{0k}^e = \delta_k^e \tag{5}$$

являются компонентами оператора базисной производной, который существенно упрощает использование аппарата структурных уравнений. Этот оператор введен Л.Е.Евтушиком в [1]. Нашей задачей является построение нелинейной связности $\gamma^4: T^4(V_n) \to J^4(V_n, T(V_n))$ четвертого порядка стабильного типа, проектирующейся в исходную систему f^5 как систему

своих автополярных линий. Это значит, что компоненты $\Gamma_k^i, \Gamma_{ks}^i, \Gamma_{kes}^i, \Gamma_{kejs}^i$ объекта перенесения связности γ^4 должны быть охвачены продолженным объектом системы, подчиняясь уравнениям

$$\Delta\Gamma_{k_1\ldots k_q}^i = d\Gamma_{k_1\ldots k_q}^i + \sum_{s=1}^{q}\Gamma_{\{k_1\ldots k_s}^m\,\omega_{k_{s+1}\ldots k_q\}m}^i - \sum_{s=0}^{q-1}\Gamma_{m\{k_1\ldots k_s}^i\,\omega_{k_{s+1}\ldots k_q\}}^m + \tag{6}$$

$$+ V_1^k\,\omega_{k_1\ldots k_q k}^i = \Gamma_{k_1\ldots k_q\delta}^{i\ \ \varrho}\,\Delta V_\varrho^\delta \quad (q=\overline{1,4}),$$

а также условиям стабильности

$$\nabla V_q^i = V_{q+1}^i - q!\sum_{s=1}^{q}\frac{1}{s!}\sum_{\alpha_1+\ldots+\alpha_s=q}\frac{1}{\alpha_1!}V_{\alpha_1}^{k_1}\cdots\frac{1}{\alpha_s!}V_{\alpha_s}^{k_s}\,\Gamma_{k_1\ldots k_s}^i \equiv 0 \quad (q=\overline{1,3}), \tag{7}$$

и, наконец, должна совпасть дифференциальная система автополярных линий связности γ^4 с исходной системой, т.е.

$$\overline{V}_5^i = \Gamma_k^i V_4^k + 4\Gamma_{ke}^i V_3^k V_1^e + 3\Gamma_{ke}^i V_2^k V_2^e + 6\Gamma_{kes}^i V_1^k V_1^e V_1^s + \Gamma_{kesj}^i V_1^k V_1^e V_1^s V_1^j, \tag{8}$$

где $\overline{V}_5^i$ обозначают правую часть уравнений системы (I), записанных в общем репере. Рассмотрим величины

$$\gamma_{ke}^i = \frac{1}{5}\left(V_{5ke}^{i41} + 2V_{5kq}^{i42}\Gamma_{1e}^q + 3V_{5kq}^{i43}\Gamma_{2e}^q + 4V_{5kq}^{i44}\Gamma_{3e}^q\right), \tag{9}$$

соответствующие уравнения которых имеют вид

$$d\gamma_{ke}^i + \{\ \} + \omega_{ke}^i = \gamma_{ke\delta}^{i\ \varrho}\,\Delta V_\varrho^\delta. \tag{9'}$$

Ясно, что γ_{ke}^i образуют компоненты обычного объекта аффинной связности над $T^4(V_n)$. Для базисной производной объекта γ_{ke}^i

$$\overset{*}{\gamma}{}_{kes}^i = \gamma_{kes}^{i\ 0} + \gamma_{keq}^{i\ 1}\Gamma_{1s}^q + \gamma_{keq}^{i\ 2}\Gamma_{2s}^q + \gamma_{keq}^{i\ 3}\Gamma_{3s}^q + \gamma_{keq}^{i\ 4}\Gamma_{4s}^q \tag{I0}$$

имеем

$$d\overset{*}{\gamma}{}_{kes}^i + \{\ \} + \gamma_{ke}^q\,\omega_{sq}^i - \gamma_{qe}^i\,\omega_{ks}^q - \gamma_{kq}^i\,\omega_{es}^q + \omega_{kes}^i = \overset{*}{\gamma}{}_{kes\delta}^{i\ \ \varrho}\,\Delta V_\varrho^\delta, \tag{I0'}$$

откуда заключаем, что величины

$$\gamma_{kes}^i = \overset{*}{\gamma}{}_{kes}^i + \gamma_{qe}^i\gamma_{ks}^q + \gamma_{kq}^i\gamma_{es}^q - \gamma_{qs}^i\gamma_{ke}^q \tag{II}$$

со структурными уравнениями

$$d\gamma_{kes}^i + \{\ \} - \gamma_{qs}^i\,\omega_{ke}^q + \gamma_{ks}^q\,\omega_{eq}^i + \gamma_{es}^q\,\omega_{kq}^i + \omega_{kes}^i = \gamma_{kes\delta}^{i\ \ \varrho}\,\Delta V_\varrho^\delta \tag{II'}$$

образуют компоненты объекта аффинной связности второго порядка.

Т е о р е м а . Дифференциальная система (I) сильно приводимого типа с помощью струй четвертого порядка $j^4 f^5: T^4(V_n) \to J^4(T^4(V_n), T^5(V_n))$ по формулам охвата

$$
\begin{cases}
\Gamma^i_s = \Gamma^i_{1s}, \quad \Gamma^i_{ks} = \Gamma^i_{(k|s)}, \quad \Gamma^i_{kes} = \Gamma^i_{(k|e|s)} + \Gamma^i_{[q|(k]}\gamma^q_{es)}, \\
\Gamma^i_{kejs} = \Gamma^i_{(k|e|j|s)} + 2\Gamma^i_{[q|(k|e]}\gamma^q_{js)} + 2\Gamma^i_{[q|(k]}\gamma^q_{ejs)} - 2\Gamma^i_{[q|(k]}\gamma^\delta_{js}\gamma^q_{e)\delta},
\end{cases} \qquad (12)
$$

где

$$
\begin{cases}
\Gamma^i_{k|s} = \Gamma^{i\,0}_{1ks} + \Gamma^{i\,1}_{1kq}\Gamma^q_{1s} + \Gamma^{i\,2}_{1kq}\Gamma^q_{2s} + \Gamma^{i\,3}_{1kq}\Gamma^q_{3s} + \Gamma^{i\,4}_{1kq}\Gamma^q_{4s}, \\
\Gamma^i_{k|e|s} = \Gamma^{i\;\;0}_{k|es} + \Gamma^{i\;\;1}_{k|eq}\Gamma^q_{1s} + \Gamma^{i\;\;2}_{k|eq}\Gamma^q_{2s} + \Gamma^{i\;\;3}_{k|eq}\Gamma^q_{3s} + \Gamma^{i\;\;4}_{k|eq}\Gamma^q_{4s}, \\
\Gamma^i_{k|e|j|s} = \Gamma^{i\;\;0}_{k|e|js} + \Gamma^{i\;\;1}_{k|e|jq}\Gamma^q_{1s} + \Gamma^{i\;\;2}_{k|e|jq}\Gamma^q_{2s} + \Gamma^{i\;\;3}_{k|e|jq}\Gamma^q_{3s} + \Gamma^{i\;\;4}_{k|e|jq}\Gamma^q_{4s},
\end{cases} \qquad (13)
$$

определяет нелинейную стабильную связность четвертого порядка, проектирующуюся в силу канонической проекции $J^4(V_n, T(V_n)) \to T^5(V_n)$ в исходную систему, которая в свою очередь выполняет геометрическую функцию системы дифференциальных уравнений линий на V_n с автополярными относительно γ^4 скоростями четвертого порядка.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Первая часть теоремы следует из того, что для величин (5) справедливы уравнения

$$
\begin{aligned}
d\Gamma^i_{\lambda s} + \{\ \} + \lambda! \sum_{q=2}^{\lambda} \frac{1}{(q-1)!} \sum_{\alpha_1+\dots+\alpha_q=\lambda} \frac{1}{\alpha_1!}\Gamma^{k_1}_{\alpha_1 s}\frac{1}{\alpha_2!}V^{k_2}_{\alpha_2}\cdots\frac{1}{\alpha_q!}V^{k_q}_{\alpha_q}\,\omega^i_{k_1\dots k_q} + \\
+ \lambda! \sum_{q=1}^{\lambda} \frac{1}{q!} \sum_{\alpha_1+\dots+\alpha_q=\lambda} \frac{1}{\alpha_1!}V^{k_1}_{\alpha_1}\cdots\frac{1}{\alpha_q!}V^{k_q}_{\alpha_q}\,\omega^i_{k_1\dots k_q s} = \Gamma^{i\,\rho}_{\lambda s\delta}\,\Delta V^\delta_\rho,
\end{aligned} \qquad (14)
$$

используя которые, из (13) можно получить уравнения величин $\Gamma^i_{k|s}$, $\Gamma^i_{k|e|s}$, $\Gamma^i_{k|e|j|s}$; просимметрировав их по нижним индексам и подставив в (12), убедимся, что сконструированные таким образом объекты Γ^i_s, Γ^i_{ks}, Γ^i_{kes}, Γ^i_{kejs} в точности удовлетворяют равенствам (6). Для доказательства второй части теоремы поступим следующим образом. По условию исходная система относится к сильно приводимому типу, т.е. для нее выполнены тождества (4), частичные продолжения которых дают следующие тождества:

$$
V^{i4}_{5k} \equiv V^{i41}_{5kq}V^q_1 + 2V^{i42}_{5kq}V^q_2 + 3V^{i43}_{5kq}V^q_3 + 4V^{i44}_{5kq}V^q_4, \qquad (15)
$$

и, значит, используя (9), получим

$$
V^i_2 \equiv \tfrac{1}{5}V^{i4}_{5k}V^k_1 \equiv \gamma^i_{ke}V^k_1V^e_1. \qquad (16)
$$

Первая часть уравнений (7) выполнена по условию задачи

$$
V^i_2 - \Gamma^i_k V^k_1 \equiv 0. \qquad (17)
$$

Применение к этим тождествам оператора полной производной, выраженного в силу сильной приводимости системы через базисную производную, дает новые тождества

$$
V^i_3 - \Gamma^i_k V^k_2 - \Gamma^i_{ke}V^k_1V^e_1 \equiv 0, \qquad (18)
$$

которые совпадают со второй частью искомых. Применив оператор полной

производной еще раз, получим

$$
V^i_4 - \Gamma^i_k V^k_3 - 3\Gamma^i_{ke}V^k_2V^e_1 - \Gamma^i_{kes}V^k_1V^e_1V^s_1 - \Gamma^i_{[q|k]}V^q_2V^k_1 + \Gamma^i_{[q|k]}\gamma^q_{es}V^e_1V^s_1V^k_1 \equiv 0,
$$

что в силу (16) равносильно тождеству

$$
V^i_4 - \Gamma^i_k V^k_3 - 3\Gamma^i_{ke}V^k_2V^e_1 - \Gamma^i_{kes}V^k_1V^e_1V^s_1 \equiv 0. \qquad (19)
$$

Значит, условия стабильности выполнены. Осталось доказать равенства (8). Полная производная тождеств (19) отличается от (8) лишь ненужным "хвостом":

$$
-2\Gamma^i_{[p|k]}V^p_3V^k_1 + 2\Gamma^i_{[p|(k]}\gamma^p_{ejs)}V^k_1V^e_1V^j_1V^s_1 + 2\Gamma^i_{[p|(k]}\gamma^p_{qe]}\gamma^q_{js)}V^k_1V^e_1V^j_1V^s_1 \qquad (20)
$$

Но учитывая проведенные вычисления, в (18) можно провести подстановки

$$
\begin{aligned}
\Gamma^i_k V^k_2 &\equiv \gamma^i_{ks}\gamma^k_{je}V^s_1V^j_1V^e_1, \\
\Gamma^i_{k|s}V^k_1V^s_1 &\equiv (\overset{k}{\gamma}{}^i_{kes} + \gamma^i_{kp}\gamma^p_{se})V^k_1V^e_1V^s_1,
\end{aligned} \qquad (21)
$$

после чего будем иметь

$$
V^i_3 \equiv (\gamma^i_{jes} + \gamma^i_{pj}\gamma^p_{es})V^j_1V^e_1V^s_1, \qquad (22)
$$

и, значит, (20) есть нуль. Теорема полностью доказана.

В заключение отметим, что указанные формулы охвата (12) могут быть полностью доведены до явных выражений через относительные, а значит, и обычные локальные координаты струи $j^4 f^5$, однако получаемые выражения слишком громоздки. Отметим также, что если система (1) не будет сильно приводимой, те же формулы (12) дадут связность. Но лишь в случае сильно приводимой системы можно сделать главный вывод, что все ее инвариантные свойства и сама система полностью могут быть описаны в терминах нелинейной связности четвертого порядка стабильного типа.

Библиографический список

1. Е в т у ш и к Л.Е. Нелинейные связности высших порядков// Изв. вузов. Матем. 1969. №2.

2. Е в т у ш и к Л.Е., Третьяков В.Б. О структурах, определяемых системой обыкновенных дифференциальных уравнений высшего порядка// Тр. геометр. семинара. ВИНИТИ. М., 1974. Т.6.

3. Е в т у ш и к Л.Е. Стабильные нелинейные связности высших порядков и редукции к ним обыкновенных дифференциальных систем соответствующего порядка// Теория функций и ее применения. Кемерово, 1985.

4. Е в т у ш и к Л.Е., Третьяков В.Б. Инвариантное описание обыкновенных систем в терминах нелинейной связности// Изв. вузов. Матем. 1986. №1.

9 Зак. 1209

УДК 514.75

О ПОВЕРХНОСТЯХ ВЕЙНГАРТЕНА $V_p \subset E_n$

Н.И.Москаленко

(Московский государственный педагогический институт)

Рассмотрены многомерные поверхности Вейнгартена с функциональной зависимостью между скалярной кривизной и средней кривизной, получены необходимые и достаточные условия для того, чтобы поверхность была поверхностью Вейнгартена.

Пусть задана p-мерная поверхность V_p в евклидовом пространстве E_n. Она является базой своего касательного векторного расслоения $T(V_p)$ и нормального векторного расслоения $N(V_p)$. Слоями этих расслоений являются, соответственно, касательное p-мерное пространство T_x и нормальное $(n-p)$-мерное пространство N_x. Присоединим к поверхности V_p подвижной репер $(x, \vec{e}_1, \dots, \vec{e}_n)$ так, чтобы векторы $\vec{e}_i$ $(i, j, k, s, t = 1, 2, \dots, p)$ принадлежали слою T_x, а векторы $\vec{e}_a$ $(a, b = p+1, \dots, n)$ составляли ортонормированный базис слоя N_x. Инфинитезимальные перемещения такого репера определяются уравнениями

$$d\vec{x} = \omega^i \vec{e}_i, \quad d\vec{e}_i = \omega_i^j \vec{e}_j + \omega_i^a \vec{e}_a, \quad d\vec{e}_a = \omega_a^i \vec{e}_i + \omega_a^b \vec{e}_b .$$

Продолжая дважды систему $\omega^a = 0$ дифференциальных уравнений нашей поверхности, получим

$$\omega_i^a = b_{ij}^a \omega^j, \; b_{ij}^a = b_{ji}^a; \quad d b_{ij}^a - b_{ik}^a \omega_j^k - b_{kj}^a \omega_i^k + b_{ij}^b \omega_b^a = b_{ijk}^a \omega^k, \tag{1}$$

где b_{ijk}^a — симметричны по нижним индексам. Имеем систему $\frac{1}{2}p(p+1)$ векторов $\vec{b}_{ij} = b_{ij}^a \vec{e}_a$. Пусть q — число независимых векторов этой системы. Вместе с точкой x они определяют q-плоскость $N_q(x)$ — главную нормаль поверхности V_p в точке x. Векторы $\vec{e}_\alpha$ $(\alpha, \beta = p+1, \dots, p+q)$ расположим в плоскости $N_q(x)$. Тогда все векторы $\vec{b}_{ij}$ будут разлагаться по q векторам $\vec{e}_\alpha$: $\vec{b}_{ij} = b_{ij}^\alpha \vec{e}_\alpha$. Через $\gamma_{ij} = \vec{e}_i \vec{e}_j$ обозначим метрический тензор поверхности V_p, γ^{ij} — контравариантные компоненты метрического тензора. При этом выполняются равенства

$$d\gamma^{ij} = -\gamma^{ik} \omega_k^j - \gamma^{jk} \omega_k^i . \tag{2}$$

В дальнейшем будем рассматривать неминимальную поверхность, т.е. поверхность, у которой вектор средней кривизны $\vec{M} = \frac{1}{p}\gamma^{ij} b_{ij}^\alpha \vec{e}_\alpha$ отличен от нуля. В плоскости $N_q(x)$ поверхности $V_p \subset E_n$ рассмотрим квадрику, представляющую собой вторую поляру точки $x \in V_p$ относительно присоединенной поверхности $\widetilde{V}_{q-1}(x)$, заданной уравнением [4]: $\det \| \sum_\alpha \gamma^{ik} b_{kj}^\alpha y^\alpha - \delta_j^i \| = 0$. Уравнение второй поляры точки $x \in V_p$ имеет вид [2]: $a_{\alpha\beta} y^\alpha y^\beta + 2 a_{\alpha 0} y^\alpha + a_{00} = 0$, где

$$a_{\alpha\beta} = \frac{1}{2} \gamma^{ik} \gamma^{jl} (b_{ik}^\alpha b_{jl}^\beta - b_{il}^\alpha b_{jk}^\beta + b_{jl}^\alpha b_{ki}^\beta - b_{jk}^\alpha b_{li}^\beta),$$

$$a_{\alpha 0} = -(p-1)\gamma^{ik} b_{ik}^\alpha, \quad a_{00} = p(p-1).$$

Векторы репера $\vec{e}_\alpha$ направим по главным направлениям второй поляры точки x поверхности V_p. Тогда $a_{\alpha\beta} = 0$ $(\alpha \neq \beta)$, т.е.

$$\gamma^{ik}\gamma^{jl}(b_{ik}^\alpha b_{jl}^\beta - b_{il}^\alpha b_{jk}^\beta + b_{jl}^\alpha b_{ik}^\beta - b_{jk}^\alpha b_{li}^\beta). \tag{3}$$

При этом формы ω_β^α стали главными: $\omega_\beta^\alpha = \Lambda_{\beta i}^\alpha \omega^i$. В [2] доказано, что скалярная кривизна поверхности равна $R = \sum_\alpha a_{\alpha\alpha} = \gamma^{ij}\gamma^{kt} \sum_\alpha (b_{ij}^\alpha b_{kt}^\alpha - b_{ik}^\alpha b_{jt}^\alpha)$. При помощи равенств (1), (2), (3) найдем, что $dR = R_s \omega^s$, где

$$R_s = \gamma^{ij}\gamma^{kt} \sum_\alpha (b_{ij}^\alpha b_{kts}^\alpha + b_{kt}^\alpha b_{ijs}^\alpha - b_{ik}^\alpha b_{jts}^\alpha - b_{jt}^\alpha b_{iks}^\alpha).$$

Средней кривизной поверхности V_p называется длина вектора $\vec{M}$. Обозначим $\frac{1}{p}\gamma^{ij} b_{ij}^\alpha = M^\alpha$. Тогда $M = \sqrt{\sum_\alpha (M^\alpha)^2}$. При помощи равенств (1), (2) найдем, что $dM = M_k \omega^k$, где $M_k = (pM)^{-1} \cdot \sum_\alpha M^\alpha \gamma^{ij} b_{ijk}^\alpha$.

Из выражений для дифференциалов скалярной и средней кривизн следует, что поверхность $V_p \subset E_n$ с параллельной второй фундаментальной формой ($b_{ijk}^\alpha = 0$) [1] есть поверхность постоянной скалярной и постоянной средней кривизны.

Если поверхность $V_p \subset E_n$ не является поверхностью постоянной скалярной кривизны, то уравнение $dR = 0$ определяет некоторую гиперплоскость в касательной плоскости поверхности V_p в точке x, вдоль которой скалярная кривизна поверхности $V_p \subset E_n$ постоянна. Гиперраспределение Δ_{p-1}^R, вдоль которого скалярная кривизна постоянна, интегрируемо.

Интегральными многообразиями распределения Δ_{p-1}^R будут $(p-1)$-мерные поверхности V_{p-1}, вдоль которых скалярная кривизна R поверхности $V_p \subset E_n$ постоянна. Если подповерхность V_{p-1} не является поверхностью постоянной скалярной кривизны, то на V_{p-1} также определяется $(p-2)$-мерное вполне интегрируемое распределение $\Delta_{p-2}^{R'}$. Продолжая этот процесс, на поверхности $V_p \subset E_n$ можно выделить p ортогональных векторных полей (векторы, ортогональные к Δ_{p-1}^R, $\Delta_{p-2}^{R'}$ и т.д.). Интегральные кривые этих векторных полей определяют на поверхности V_p ортогональную сеть Σ_p^R. Процесс построения этой сети прервется, если на каком-то шаге получим расслоение поверхности $V_p \subset E_n$ на подповерхности постоянной скалярной кривизны. Из вышеизложенного следует

Теорема 1. Любая поверхность $V_p \subset E_n$ либо является поверхностью постоянной скалярной кривизны, либо расслаивается на поверхности постоянной скалярной кривизны, либо несет сеть Σ_p^R.

Рассмотрим случай, когда гиперраспределения $\Delta_{p-1}^{R'}$ и Δ_{p-1}^M (определяется уравнением $dM = 0$) совпадают. Векторы $\vec{M} = \gamma^{ij} M_j \vec{e}_i$ и $\vec{R} = \gamma^{ij} R_j \vec{e}_i$

являются нормальными векторами к площадкам $\Delta^{M}_{p-1}(x)$ и $\Delta^{R}_{p-1}(x)$ поверхности V_p в точке x. Тогда $\vec{R}=k\vec{H}$, где k – в общем случае функциональный множитель, зависящий от координат $u^1, u^2, \dots, u^p$ точки x на поверхности V_p. При этом $R_i=kM_i$. С учетом этого имеем, что $dR=R_i\omega^i=kM_i\omega^i=kdM$. Отсюда следует, что $\frac{\partial R}{\partial u^i}-k\frac{\partial M}{\partial u^i}=0$. Далее, дифференцируя i-е уравнение по u^j $(i\neq j)$, j-е уравнение по u^i и вычитая, получим $\frac{\partial k}{\partial u^i}\frac{\partial M}{\partial u^j}-\frac{\partial k}{\partial u^j}\frac{\partial M}{\partial u^i}=0$ $(i\neq j)$. Известно, что если $\frac{D(k,M)}{D(u^i,u^j)}=0$, то k и M функционально зависимы, т.е. $k=\varphi(M)$ [3]. Таким образом, $dR=\varphi(M)dM$. Интегрируя, получим, что R и M связаны функциональной зависимостью $R=f(M)$. Такие поверхности $V_p\subset E_n$ будем называть поверхностями Вейнгартена, если $k=\mathrm{const}$, то будем обозначать такие поверхности W.

Легко показать, что если $R=f(M)$, то $\vec{R}\parallel\vec{H}$. Таким образом, справедлива

Т е о р е м а 2. Поверхность $V_p\subset E_n$ будет поверхностью Вейнгартена тогда и только тогда, когда векторы $\vec{R}$ и $\vec{H}$ коллинеарны.

Если рассмотреть градиенты скалярной и средней кривизны, то справедлива

Т е о р е м а 3. Для того, чтобы поверхность $V_p\subset E_n$ была поверхностью Вейнгартена, необходимо и достаточно, чтобы градиенты скалярной и средней кривизны были коллинеарны.

Пфаффовым производным скалярной и средней кривизн M_i и R_i можно дать следующий геометрический смысл. Рассмотрим поверхности

$$V^M_p:\ \vec{y}_1=\vec{x}+M\vec{e}_{p+1}, \qquad V^R_p:\ \vec{y}_2=\vec{x}+R\vec{e}_{p+1}.$$

Когда точка x описывает на поверхности V_p линию ω^i, то точки y_1 и y_2 на этих поверхностях также описывают линии, направления касательных к которым определяются следующим образом:

$$\bar{a}_i=(\delta^k_i-M\gamma^{kj}b^{p+1}_{ij})\vec{e}_k+M\Lambda^{\tilde\beta}_{p+1,i}\vec{e}_{\tilde\beta}+M_i\vec{e}_{p+1},$$
$$\bar{b}_i=(\delta^k_i-R\gamma^{kj}b^{p+1}_{ij})\vec{e}_k+R\Lambda^{\tilde\beta}_{p+1,i}\vec{e}_{\tilde\beta}+R_i\vec{e}_{p+1} \quad (\tilde\alpha,\tilde\beta=p+2,\dots,p+q).$$

Отсюда следует, что M_i и R_i есть проекции векторов $\vec{a}_i$ и $\vec{b}_i$ на нормаль $(x,\vec{e}_{p+1})$. Обозначим ее через S. При этом справедливы теоремы:

Т е о р е м а 4. Поверхность $V_p\subset E_n$ будет поверхностью Вейнгартена тогда и только тогда, когда выполнено следующее условие:

$$\frac{\Pi_{p_S}\vec{b}_1}{\Pi_{p_S}\vec{a}_1}=\frac{\Pi_{p_S}\vec{b}_2}{\Pi_{p_S}\vec{a}_2}=\dots=\frac{\Pi_{p_S}\vec{b}_p}{\Pi_{p_S}\vec{a}_p}.$$

Т е о р е м а 5. Поверхность $V_p\subset E_n$ будет поверхностью W тогда и только тогда, когда выполняется хотя бы одно из соотношений

$$\frac{\Pi_{p\vec{e}_{\tilde\alpha}}\vec{b}_1}{\Pi_{p\vec{e}_{\tilde\alpha}}\vec{a}_1}=\frac{\Pi_{p\vec{e}_{\tilde\alpha}}\vec{b}_2}{\Pi_{p\vec{e}_{\tilde\alpha}}\vec{a}_2}=\dots=\frac{\Pi_{p\vec{e}_{\tilde\alpha}}\vec{b}_p}{\Pi_{p\vec{e}_{\tilde\alpha}}\vec{a}_p}.$$

Библиографический список

1. Л у м и с т е Ю.Г., Чакмазян А.В. Нормальная связность и подмногообразия с параллельными нормальными полями в пространстве постоянной кривизны// Проблемы геометрии / ВИНИТИ.М.,1981.Т.12.С.3-30.

2. М о с к а л е н к о Н.И. О второй поляре р-поверхности евклидова пространства//Дифференциальная геометрия многообразий фигур: Межвуз.темат.сб.науч.тр./Калинингр.ун-т.Калининград,1989.Вып.20.С.60.

3. Ф и х т е н г о л ь ц Г.М. Курс дифференциального и интегрального исчисления.М.,1969.Т.I.

4. Б а з ы л е в В.Т. О многомерных сетях в евклидовом пространстве//Лит.матем.сб./АН Лит.ССР.Вильнюс,1966.Т.6.№4.С.474-490.

УДК 514.75

$\mathcal{H}_1$-РАСПРЕДЕЛЕНИЯ ПРОЕКТИВНОГО ПРОСТРАНСТВА

Ю.И.П о п о в

(Калининградский государственный университет)

В работе исследуются регулярные $\mathcal{H}$-распределения [1],[2] специального класса, а именно такие, для которых оснащающее M-распределение скомпоновано (следуя терминологии А.Н.Нордена [3]) из базисного Λ-распределения и L-распределения (распределение ℓ-мерных плоскостей $\Pi_\ell=L$, где $\ell=m-r$), т.е. в каждом центре X $\mathcal{H}$-распределения выполняются соотношения

$$X\subset L\subset M\subset H,\quad [\Lambda;L]=M,\quad \Lambda\cap L=X. \qquad (1)$$

Регулярные $\mathcal{H}$-распределения, для которых выполнены условия (1), обозначим символом $\mathcal{H}(\Lambda,L)$. Репер $\mathcal{R}(\mathcal{H})$ [1] выберем так, чтобы точки $\{A_p\}\subset\Lambda(A_0)$, $\{A_i\}\subset L(A_0)$, $\{A_\alpha\}\subset H(A_0)$, $X\equiv A_0$. Относительно репера нулевого порядка $\mathcal{R}(\mathcal{H})$ дифференциальные уравнения $\mathcal{H}(\Lambda,L)$-распределения в проективном пространстве P_n имеют вид:

$$\omega^n_i=M^n_{iK}\omega^K_0,\quad \omega^n_p=\Lambda^n_{pK}\omega^K_0,\quad \omega^n_\alpha=H^n_{\alpha K}\omega^K_0, \qquad (2)$$
$$\omega^i_p=\Lambda^i_{pK}\omega^K_0,\quad \omega^p_i=M^p_{iK}\omega^K_0,\quad \omega^\alpha_p=\Lambda^\alpha_{pK}\omega^K_0,\quad \omega^\alpha_i=M^\alpha_{iK}\omega^K_0.$$

Здесь и в дальнейшем используется следующая схема индексов: $I,J,K=\overline{1,n}$;

$\bar{I},\bar{J},\bar{K}=\overline{0,n}$; $u,v,w=\overline{r+1,n-1}$; $p,q,r,s,t=\overline{1,r}$; $\bar{p},\bar{q},\bar{r},\bar{s},\bar{t}=\overline{0,r}$;

$\hat{u}, \hat{v}, \hat{w} = \overline{r+1, n}$; $k, i, j, \kappa, \ell = \overline{r+1, m}$; $\alpha, \beta, \gamma = \overline{m+1, n-1}$; $\hat{\alpha}, \hat{\beta}, \hat{\gamma} = \overline{m+1, n}$;

$a, b, c, d = \overline{1, m}$; $\bar{a}, \bar{b}, \bar{c}, \bar{d} = \overline{0, m}$; $\bar{k}, \bar{\imath}, \bar{\jmath}, \bar{\kappa}, \bar{\ell} = (0, \overline{r+1, m})$; $\sigma, \tau, \rho = \overline{1, n-1}$.

Нетрудно убедиться, что система (2) в инволюции, т.е. имеет место

Т е о р е м а 1. $\mathcal{H}(\Lambda, L)$-распределения существуют с произволом $m(n-m-1) + 2r(m-r) + (n-1)$ функций n аргументов.

Выделим подкласс скомпонованных $\mathcal{H}(\Lambda, L)$-распределений следующим образом. Потребуем, чтобы характеристика $X_{n-r-1}(A_0)$ гиперплоскости $H(A_0)$ при смещении центра A_0 вдоль кривых, принадлежащих Λ-распределению, проходила через плоскость $L(A_0)$. В этом случае

$$M^n_{ip} = 0. \qquad (3)$$

Скомпонованные $\mathcal{H}(\Lambda, L)$-распределения, для которых выполняется условие (3), назовем $\mathcal{H}_1$-распределениями.

В работе приведены дифференциальные уравнения $\mathcal{H}_1$-распределения в репере первого порядка (§I), введена двойственная нормализация в смысле Нордена-Чакмазяна [4], [5] базисного Λ-распределения и L-распределения, образующие элементы которых в каждом центре $A_0 = X$ удовлетворяют условиям (I). В первых трех дифференциальных окрестностях образующего элемента регулярного $\mathcal{H}_1$-распределения найдены (§2) поля характерных квазинормалей, порождаемые Λ-распределением и L-распределением. С помощью найденных полей квазинормалей построены поля нормалей первого и второго рода в смысле Нордена-Чакмазяна (в первых трех окрестностях) Λ-распределения (§2). Кроме того, приведены (§3) построения полей оснащающих плоскостей в смысле Картана для скомпонованных распределений (Λ-распределения и L-распределения).

Получены проективные связности Γ и γ (§4), относящиеся к классу проективных связностей, определенных путем проектирования [6].

Обозначения и замечания.

1. Оператор ∇ дифференцирования применяем такой же, что и в работе [6].

2. Символом „δ" обозначим дифференцирование по вторичным параметрам, а значение форм ω^J_K при фиксированных параметрах обозначим π^J_K. В этом случае оператор обозначается символом ∇_δ.

3. Всюду в дальнейшем используются символические обозначения вида $[A_{J_1}, A_{J_2}, \ldots, A_{J_t}]$, $[\sigma^{J_1}, \sigma^{J_2}, \ldots, \sigma^{J_t}]$, где индексы $J_1, J_2, \ldots, J_t$ принимают значения из набора $\overline{0, n}$. Они обозначают соответственно плоскость Π_{t-1}, натянутую на линейно независимые точки $A_{J_1}, \ldots, A_{J_t}$, и плоскость E_{n-t}, являющуюся пересечением линейно независимых гиперплоскостей $\sigma^{J_1}, \sigma^{J_2}, \ldots, \sigma^{J_t}$.

4. Символ „$=$" означает сравнение по модулю базисных форм ω^J_0.

§1. Дифференциальные уравнения $\mathcal{H}_1$-распределения

1. Частично канонизируем репер $\mathcal{R}(\mathcal{H})$, поместив вершины $\{A_\alpha\}$ репера $\mathcal{R}(\mathcal{H})$ в характеристику $X_{n-m-1}(A_0) \overset{def}{=} \Phi(A_0)$ гиперплоскости $H(A_0)$, полученную при смещении центра A_0 вдоль кривых, принадлежащих оснащающему M-распределению, т.е. вдоль кривых

$$\omega^{\hat{\alpha}}_0 = 0, \quad \omega^a_0 = \mu^a \theta, \qquad (I.1)$$

где $\nabla \mu^a = \mu^a \theta^0_0 + \mu^a_2 \theta$, $\mathcal{D}\theta = \theta \wedge \theta^0_0$.

Тогда имеем

$$H^n_{\alpha p} = 0, \quad \omega^p_\alpha = H^p_{\alpha\kappa} \omega^\kappa_0. \qquad (I.2)$$

Полученный репер первого порядка назовем репером $\mathcal{R}_1(\mathcal{H})$. В репере $\mathcal{R}_1(\mathcal{H})$ дифференциальные уравнения $\mathcal{H}_1$-распределения принимают вид:

$$\begin{cases} \omega^n_p = \Lambda^n_{p\kappa} \omega^\kappa_0, & \omega^n_i = M^n_{i\hat{u}} \omega^{\hat{u}}_0, \quad \omega^n_\alpha = H^n_{\alpha\hat{u}} \omega^{\hat{u}}_0, \quad \omega^\alpha_i = M^\alpha_{i\kappa} \omega^\kappa_0, \\ \omega^i_p = \Lambda^i_{p\kappa} \omega^\kappa_0, & \omega^p_i = M^p_{i\kappa} \omega^\kappa_0, \quad \omega^\alpha_p = \Lambda^\alpha_{p\kappa} \omega^\kappa_0, \quad \omega^p_\alpha = H^p_{\alpha\kappa} \omega^\kappa_0. \end{cases} \qquad (I.3)$$

Отметим, что компоненты $\{\Gamma_1, H^p_{\alpha\kappa}\}$ фундаментального объекта Γ_2 $\mathcal{H}_1$-распределения подчинены соотношениям

$$\begin{cases} M^n_{ij} \Lambda^j_{[pq]} + M^n_{i\alpha} \Lambda^\alpha_{[pq]} + \Lambda^n_{s[p} M^s_{|i|q]} + M^n_{in} \Lambda^n_{[pq]} = 0, \\ H^n_{\alpha\beta} \Lambda^\beta_{[pq]} + H^n_{\alpha i} \Lambda^i_{[pq]} + \Lambda^n_{s[p} H^s_{|\alpha|q]} + H^n_{\alpha n} \Lambda^n_{[pq]} = 0. \end{cases} \qquad (I.4)$$

Используя систему (I.3), с учетом связей (I.4) на коэффициенты этой системы, приходим к следующему результату:

Т е о р е м а 2. Система уравнений (I.3) и соотношений (I.4) задает $\mathcal{H}_1$-распределение с произволом $(n-m-1)(m+r) + r(2m-2r+1) - C^2_r(n-r-1)$ функций n аргументов.

2. Из (I.3) следует, что каждая из совокупностей величин $\{\Lambda^n_{pq}\}$ и $\{M^n_{ij}\}$ образует тензор первого порядка. В дальнейшем будем полагать, что тензоры $\{\Lambda^n_{pq}\}$, $\{M^n_{ij}\}$ невырожденные, т.е.

$$\Lambda \overset{def}{=} \det \| \Lambda^n_{pq} \| \neq 0, \qquad M \overset{def}{=} \det \| M^n_{ij} \| \neq 0. \qquad (I.5)$$

Следовательно, можно ввести в рассмотрение обращенные тензоры первого порядка $\{\Lambda^{pq}_n\}$, $\{M^{ij}_n\}$, компоненты которых определяются из соотношений

$$\Lambda^{pq}_{n}\Lambda^{n}_{qt}=\Lambda^{qp}_{n}\Lambda^{n}_{tq}=\delta^{p}_{t}\,,\quad M^{ik}_{n}M^{n}_{kj}=M^{ki}_{n}M^{n}_{jk}=\delta^{i}_{j} \qquad (I.6)$$

и удовлетворяют соответственно уравнениям

$$\begin{cases}\nabla\Lambda^{pq}_{n}=\Lambda^{pq}_{nx}\,\omega^{x}_{0} & (\,\Lambda^{pq}_{nx}=-\Lambda^{ps}_{n}\Lambda^{tq}_{n}\Lambda^{n}_{stx}\,),\\ \nabla M^{ij}_{n}=M^{ij}_{nx}\,\omega^{x}_{0} & (\,M^{ij}_{nx}=-M^{ik}_{n}M^{\ell j}_{n}M^{n}_{k\ell x}\,).\end{cases} \qquad (I.7)$$

$\mathscr{H}_1$-распределения, для которых тензор $\{\Lambda^{n}_{pq}\}$ невырожденный (I.5), называются регулярными [1],[2].

3. Выясним геометрическую характеристику репера первого порядка $\mathcal{R}_1(\mathscr{H})$. Рассмотрим тангенциальный репер $\{\sigma^{\bar{J}}\}$, взаимный точечному $\{A_{\bar{x}}\}$:

$$(A_{\bar{x}},\sigma^{\bar{J}})=\delta^{\bar{J}}_{\bar{x}}\,,\qquad d\sigma^{\bar{J}}=-\,\omega^{\bar{J}}_{\bar{x}}\,\sigma^{\bar{x}}, \qquad (I.8)$$

где $\sigma^{n}(A_0)\stackrel{def}{=}\Pi_{n-1}(A_0)\stackrel{def}{=}H(A_0)$.

Пусть $\chi_{n-r-1}(A_0)\stackrel{def}{=}\chi(A_0)$ -характеристика гиперплоскости $\Pi_{n-1}(A_0)$ при смещении точки A_0 вдоль кривых ℓ :

$$(\ell):\quad \omega^{\hat{u}}_{0}=0\,,\quad \omega^{p}_{0}=\mu^{p}\theta\quad (\mathcal{D}\theta=\theta\wedge\theta_1\,,\ \nabla\mu^{p}=\mu^{p}\theta^{0}_{0}+\mu^{p}_{1}\theta\,), \qquad (I.9)$$

принадлежащих базисному Λ-распределению.

Учитывая (1.1),(1.3),(1.5),(1.8),(1.9), убеждаемся в справедливости следующих утверждений:

a) $M^{n}_{ip}=0 \iff (A_i,\,d\sigma^{n})=0 \pmod{\ell}$;

б) $H^{n}_{\alpha p}=0 \iff (A_\alpha,\,d\sigma^{n})=0 \pmod{\ell}$,

т.е. в выбранном репере $\mathcal{R}_1(\mathscr{H})$ вершины репера $\{A_i,A_\alpha\}$ принадлежат характеристике $\chi(A_0)$ гиперплоскости $H(A_0)=\sigma^{n}(A_0)$;

c) $\Lambda=|\Lambda^{n}_{pq}|\neq 0 \iff \Lambda(A_0)\cap\chi(A_0)=A_0$,

то есть регулярность $\mathscr{H}_1$-распределения геометрически определяется тем, что характеристика $\chi(A_0)$ и плоскость $\Lambda(A_0)$ находятся в общем положении в гиперплоскости $H(A_0)$;

d) $(\Lambda\neq 0,\ M\neq 0) \iff M(A_0)\cap\Phi(A_0)=A_0$,

то есть регулярность $(|\Lambda^{n}_{ab}|=|\Lambda^{n}_{pq}|\cdot|M^{n}_{ij}|\neq 0)$ оснащающего M-распределения геометрически обозначает, что плоскости $M(A_0)$ и $\Phi(A_0)$ находятся в общем положении в гиперплоскости $H(A_0)$.

4. Продолжение уравнений (I.3) приводит к следующим дифференциальным уравнениям, которым подчинены компоненты фундаментального объекта первого порядка:

$$\Gamma_1=\{\Lambda^{n}_{px},\,M^{n}_{i\hat{u}},\,H^{n}_{\alpha\hat{u}},\,M^{\alpha}_{ix},\,\Lambda^{i}_{px},\,M^{p}_{ix},\,\Lambda^{\alpha}_{px}\}$$

и величины $\{H^{p}_{\alpha x}\}$ второго порядка

$$\nabla\Lambda^{n}_{px}-\delta^{n}_{x}\,\omega^{0}_{p}=\Lambda^{n}_{px\mathcal{L}}\,\omega^{\mathcal{L}}, \qquad (I.10)$$

$$\nabla M^{n}_{i\hat{u}}-\omega^{0}_{i}\,\delta^{n}_{\hat{u}}=M^{n}_{i\hat{u}\mathcal{L}}\,\omega^{\mathcal{L}}_{0}, \qquad (I.11)$$

$$\nabla H^{n}_{\alpha\hat{u}}-M^{n}_{i\hat{u}}\,\omega^{i}_{\alpha}-\delta^{n}_{\hat{u}}\,\omega^{0}_{\alpha}=H^{n}_{\alpha\hat{u}\mathcal{L}}\,\omega^{\mathcal{L}}, \qquad (I.12)$$

$$\nabla M^{\alpha}_{ix}+M^{n}_{ix}\,\omega^{\alpha}_{n}-\delta^{\alpha}_{x}\,\omega^{0}_{i}=M^{\alpha}_{ix\mathcal{L}}\,\omega^{\mathcal{L}}, \qquad (I.13)$$

$$\nabla\Lambda^{i}_{px}+\Lambda^{\alpha}_{px}\,\omega^{i}_{\alpha}+\Lambda^{n}_{px}\,\omega^{i}_{n}-\delta^{i}_{x}\,\omega^{0}_{p}=\Lambda^{i}_{px\mathcal{L}}\,\omega^{\mathcal{L}}, \qquad (I.14)$$

$$\nabla M^{p}_{ix}+M^{n}_{ix}\,\omega^{p}_{n}-\delta^{p}_{x}\,\omega^{0}_{i}=M^{p}_{ix\mathcal{L}}\,\omega^{\mathcal{L}}, \qquad (I.15)$$

$$\nabla\Lambda^{\alpha}_{px}+\Lambda^{n}_{px}\,\omega^{\alpha}_{n}-\delta^{\alpha}_{x}\,\omega^{0}_{p}=\Lambda^{\alpha}_{px\mathcal{L}}\,\omega^{\mathcal{L}}, \qquad (I.16)$$

$$\nabla H^{p}_{\alpha x}+H^{n}_{\alpha x}\,\omega^{p}_{n}-M^{p}_{ix}\,\omega^{i}_{\alpha}-\delta^{p}_{x}\,\omega^{0}_{\alpha}=H^{p}_{\alpha x\mathcal{L}}\,\omega^{\mathcal{L}}. \qquad (I.17)$$

Коэффициенты в правых частях уравнений (I.10) - (I.17), вообще говоря, не симметричны по нижним индексам.

§2. Инвариантные нормализации Нордена-Чакмазяна регулярного $\mathscr{H}_1$-распределения

1. Двойственные нормализации Λ-распределения и L-распределения.

Под двойственной нормализацией регулярного $\mathscr{H}_1$-распределения мы будем понимать нормализацию его базисного Λ-распределения в смысле Нордена-Чакмазяна [4],[5], т.е. в каждом центре A_0 для плоскости $\Pi_r(A_0)$ определена нормализация А.П.Нордена [4] такая, что нормаль первого рода $N_{n-r}(A_0)$ плоскости $\Pi_r(A_0)$ проходит через характеристику $\chi_{n-r-1}(A_0)$ текущего элемента $\Pi_{n-1}(A_0)$ оснащающего H-распределения.

Требование инвариантности нормали

$$N_{n-r}(A_0)=[\chi_{n-r-1},X_n],\qquad X_n=A_n+x^{p}_{n}A_p+x^{i}_{n}A_i+x^{\alpha}_{n}A_\alpha\,,$$

приводит к условиям

$$\nabla x^{p}_{n}+\omega^{p}_{n}=x^{p}_{nx}\,\omega^{x}_{0}, \qquad (2.1)$$

причем на величины x^i_n и x^α_n это требование никаких условий не накладывает. Однако, если потребовать, чтобы прямая $N_1 = [A_0, X_n]$ была инвариантна, то, кроме условий (2.I), находим, что величины x^i_n и x^α_n должны удовлетворять дифференциальным уравнениям

$$\begin{cases}\nabla x^i_n + x^\alpha_n \omega^i_\alpha + \omega^i_n = x^i_{nK}\omega^K_0,\\ \nabla x^\alpha_n + \omega^\alpha_n = x^\alpha_{nK}\omega^K_0.\end{cases} \qquad (2.2)$$

Таким образом, в качестве величин $\{x^p_n\}, \{x^\alpha_n\}, \{x^i_n, x^\alpha_n\}$ можно брать квазитензоры $\{\nu^p_n\}, \{\nu^\alpha_n\}, \{\nu^i_n, \nu^\alpha_n\}$, полученные в работе [1], компоненты которых удовлетворяют соответственно уравнениям (2.I) и (2.2). В дальнейшем будем считать, что прямая $N_1 = [A_0, X_n]$ инвариантна, а точка X_n имеет вид

$$X_n(\nu) = A_n + \nu^p_n A_p + \nu^i_n A_i + \nu^\alpha_n A_\alpha . \qquad (2.3)$$

Нормаль второго рода $\mathcal{N}_{r-1}(A_0)$ элемента Λ-распределения определим точками

$$M_p = A_p + x^0_p A_0 . \qquad (2.4)$$

Требование инвариантности поля плоскостей $\mathcal{N}_{r-1}(A_0)$ приводит к условиям

$$\nabla x^0_p + \omega^0_p = x^0_{pK}\omega^K . \qquad (2.5)$$

Значит, в качестве величин x^0_p можно брать любой квазитензор $\{\nu^0_p\}$ [1],[2], удовлетворяющий уравнениям (2.5).

Итак, в дальнейшем под полем инвариантных нормалей первого (второго рода) элемента Λ-распределения будем понимать поле соответствующего квазитензора $\{\nu^p_n\}$ $(\{\nu^0_p\})$.

Плоскость

$$N_{n-\ell}(A_0) = [X_{n-\ell-1}, X_n],$$

где $X_{n-\ell-1}(A_0)$ – характеристика гиперплоскости $H(A_0)$, полученная при смещении центра A_0 вдоль кривых

$$(\mathcal{L}):\ \omega^n_0 = 0,\quad \omega^\alpha_0 = \omega^p_0 = 0,\quad \omega^i = \mu^i\theta \quad (\nabla\mu^i = \mu^i\theta^0_0 + \mu^i_1\theta), \qquad (2.6)$$

принадлежащих распределению плоскостей L, является нормалью первого рода элемента L-распределения.

Можно показать, что при заданном поле инвариантных прямых N_1 поле нормалей первого рода L-распределения определяется полем геометрического объекта $\{\nu^i_n\}$, компоненты которого удовлетворяют уравнениям (2.2).

Плоскость

$$\mathcal{N}_{\ell-1}(A_0) = [A_i + \nu^0_i A_0 \overset{def}{=} M_i]$$

является нормалью второго рода элемента L-распределения и определена квазитензором $\{\nu^0_i\}$:

$$\nabla\nu^0_i + \omega^0_i = \nu^0_{iK}\omega^K_0 . \qquad (2.7)$$

Очевидно, что инвариантная прямая $N_1(A_0) = [A_0, X_n]$ -нормаль первого рода гиперплоскости $H(A_0)$, в качестве инвариантной нормали второго рода гиперплоскости $H(A_0)$ можно взять плоскость

$$\mathcal{N}_{n-2}(A_0) = [M_p, M_i, M_\alpha],$$

где

$$M_\alpha = A_\alpha + \nu^0_\alpha A_0 + \nu^i_\alpha A_i, \quad \nabla\nu^i_\alpha + \omega^i_\alpha = \nu^i_{\alpha K}\omega^K_0,$$

$$\nabla\nu^0_\alpha + \nu^i_\alpha\omega^0_i + \omega^0_\alpha = \nu^0_{\alpha K}\omega^K_0 . \qquad (2.8)$$

2. Поля квазинормалей и нормалей базисного Λ-распределения. Квазинормали L-распределения.

Систему величин $\{K_p\}$ назовем квазинормалью [6],[7] $\mathcal{H}_1$-распределения, ассоциированной с Λ-распределением, если в выбранном репере первого порядка при преобразованиях стационарной подгруппы элемента $\mathcal{H}_1$-распределения имеем один из следующих законов преобразования величин K_p [7]:

$$\nabla_\delta K_p = \lambda b^n_{pq}\pi^q_n + \sigma\pi^0_p, \qquad (2.9)$$

$$\nabla_\delta K_p = \lambda\Lambda^n_{pq}\pi^q_n + \sigma\pi^0_p, \qquad (2.10)$$

$$\nabla_\delta K_p = \lambda\Lambda^n_{qp}\pi^q_n + \sigma\pi^0_p, \qquad (2.11)$$

где

$$b^n_{pq} = \frac{1}{2}(\Lambda^n_{pq} + \Lambda^n_{qp}), \quad \nabla b^n_{pq} = b^n_{pqK}\omega^K_0, \qquad (2.12)$$

а λ, σ -постоянные числа, отличные от нуля. Каждая из этих трех типов квазинормалей устанавливает биекцию между нормалями первого и второго рода Λ-распределения таким образом :

а) $\nu^0_p = -\frac{1}{\sigma}(K_p + \lambda b^n_{pq}\nu^q_n), \quad \nu^t_n = -\frac{1}{\lambda}(K_p + \sigma\nu^0_p)b^{pt}_n, \qquad (2.13)$

если $\{K_p\}$ -квазинормаль первого типа (2.9);

в) $\nu^0_p = -\frac{1}{\sigma}(K_p + \lambda\Lambda^n_{pq}\nu^q_n), \quad \nu^t_n = -\frac{1}{\lambda}\Lambda^{tp}_n(K_p + \sigma\nu^0_p), \qquad (2.14)$

если $\{K_p\}$ -квазинормаль второго типа (2.10);

$$c)\ \nu^0_p = -\frac{1}{\sigma}\left(K_p + \lambda \Lambda^n_{qp} \nu^q_n\right), \quad \nu^t_n = -\frac{1}{\lambda}\left(K_p + \sigma \nu^0_p\right)\Lambda^{pt}_n, \tag{2.15}$$

если $\{K_p\}$ -квазинормаль третьего типа (2.11).

Построим в разных дифференциальных окрестностях следующие квазинормали базисного Λ-распределения:

а) в окрестности первого порядка

$$\overset{1}{K}_p = \frac{1}{n-r}\left(\Lambda^n_{pn} + \Lambda^\alpha_{p\alpha} + \Lambda^i_{pi}\right), \tag{2.16}$$

$$\overset{2}{K}_p = \frac{1}{\ell+1}\left[\Lambda^n_{pn} + \Lambda^i_{pi} + \Lambda^n_{p\alpha}\nu^\alpha_n + \left(\Lambda^\alpha_{pi} - \Lambda^n_{pi}\nu^\alpha_n\right)M^i_\alpha\right], \tag{2.17}$$

$$\overset{3}{K}_p = \frac{1}{n-m}\left[\Lambda^n_{pn} + \Lambda^\alpha_{p\alpha} + \Lambda^n_{pi}\nu^i_n - \left(\Lambda^\alpha_{pi} - \Lambda^n_{pi}\nu^\alpha_n\right)M^i_\alpha\right], \tag{2.18}$$

$$\overset{4}{K}_p = \Lambda^n_{pn} + \Lambda^n_{p\alpha}\nu^\alpha_n + \Lambda^n_{pi}\nu^i_n, \tag{2.19}$$

где $\{\nu^i_n, \nu^\alpha_n\} = \{\nu^u_n\}$ — квазитензор первого порядка ,

$$M^i_\alpha = M^n_{j\alpha} M^{ji}_n, \qquad \nabla M^i_\alpha = \omega^i_\alpha + M^i_{\alpha\kappa}\omega^\kappa_0 \ ; \tag{2.20}$$

в)в окрестности второго порядка

$$\hat{\overset{3}{K}}_p = \frac{1}{n-m}\left[\Lambda^n_{pn} + \Lambda^\alpha_{p\alpha} + \Lambda^n_{pi}\nu^i_n - \left(\Lambda^\alpha_{pi} - \Lambda^n_{pi}\ \nu^\alpha_n\right)M^i_\alpha\right], \tag{2.21}$$

$$\overset{4}{K}_p = \Lambda^n_{pn} + \Lambda^n_{pu}\nu^u_n, \tag{2.22}$$

$$\overset{5}{K}_p = \frac{1}{r+2}\Lambda_p; \quad \hat{\overset{5}{K}}_p = \frac{1}{\ell}\left(M_p - 2M^\alpha_{ip}M^i_\alpha\right), \quad \overset{6}{K}_p = \mathscr{B}_p, \tag{2.23}$$

где $\{\nu^u_n\}$, $\{\nu^\alpha_n\}$ -квазитензоры второго порядка,

$$\Lambda_p = \Lambda^{qs}_n \Lambda^n_{sqp}\ , \quad \nabla\Lambda_p + (r+2)\,\omega^0_p - (r+2)\,\Lambda^n_{qp}\,\omega^q_n \equiv 0, \tag{2.24}$$

$$M_p = M^{ji}_n M^n_{ijp}\ , \quad \nabla M_p + \ell\,\omega^0_p - \ell\,\Lambda^n_{qp}\,\omega^q_n - 2M^\alpha_{\kappa p}\,\omega^\kappa_\alpha \equiv 0, \tag{2.25}$$

$$\mathscr{B}_p = \frac{1}{r+2}\mathscr{B}^n_{pqt}\mathscr{B}^{qt}_n, \quad \nabla\mathscr{B}_p - \mathscr{B}^n_{ps}\,\omega^s_n + \omega^0_p \equiv 0 ; \tag{2.26}$$

с) в окрестности третьего порядка [1]:

$$\overset{7}{K}_p = C_p, \quad \nabla C_p + \mathscr{B}^n_{pq}\,\omega^q_n + r^n_{pq}\,\omega^q_n + \omega^0_p = C_{p\kappa}\,\omega^\kappa_0 . \tag{2.27}$$

Будем определять нормали $\{\nu^p_n\}$, $\{\nu^0_p\}$ первого и второго рода

Λ-распределения в смысле Нордена-Чакмазяна, используя способ нахождения общих нормалей двух квазинормалей [7]. Построим некоторые нормали первого рода $\{\nu^p_n\}$ и второго рода $\{\nu^0_p\}$ в различных дифференциальных окрестностях для базисного Λ-распределения.

Имеем

1) в окрестности первого порядка:

$$a)\ (\overset{1}{K}_p, \overset{4}{K}_p) \to \begin{cases} \mathscr{L}^p_n = -\dfrac{n-r}{n-r-1}\Lambda^{pq}_n\left(\overset{4}{K}_q - \overset{1}{K}_q\right), \\ \mathscr{L}^0_p = -\dfrac{1}{n-r-1}\left[(n-r)\overset{1}{K}_p - \overset{4}{K}_p\right]; \end{cases} \tag{2.28}$$

$$в)\ (\overset{2}{K}_p, \overset{4}{K}_p) \to \begin{cases} \mathfrak{B}^p_n = -\dfrac{\ell+1}{\ell}\Lambda^{pq}_n\left(\overset{4}{K}_q - \overset{2}{K}_q\right), \\ \mathfrak{B}^0_p = -\dfrac{1}{\ell}\left[(\ell+1)\overset{2}{K}_p - \overset{4}{K}_p\right]; \end{cases} \tag{2.29}$$

$$c)\ (\overset{3}{K}_p, \overset{4}{K}_p) \to \begin{cases} \mathcal{L}^p_n = -\dfrac{n-m}{n-m-1}\Lambda^{pq}_n\left(\overset{4}{K}_q - \overset{3}{K}_q\right), \\ \mathcal{L}^0_p = -\dfrac{1}{n-m-1}\left[(n-m)\overset{3}{K}_p - \overset{4}{K}_p\right]; \end{cases} \tag{2.30}$$

2) в окрестности второго порядка

$$a)\ (\hat{\overset{4}{K}}_p, \overset{1}{K}_p) \to \begin{cases} \hat{\mathscr{L}}^p_n = -\dfrac{n-r}{n-r-1}\Lambda^{pq}_n\left(\hat{\overset{4}{K}}_q - \overset{1}{K}_q\right), \\ \hat{\mathscr{L}}^0_p = -\dfrac{1}{n-r-1}\left[(n-r)\overset{1}{K}_p - \hat{\overset{4}{K}}_p\right]; \end{cases} \tag{2.31}$$

$$в)\ (\hat{\overset{4}{K}}_p, \overset{2}{K}_p) \to \begin{cases} \hat{\mathfrak{B}}^p_n = -\dfrac{\ell+1}{\ell}\Lambda^{pq}_n\left(\hat{\overset{4}{K}}_q - \overset{2}{K}_q\right), \\ \hat{\mathfrak{B}}^0_p = -\dfrac{1}{\ell}\left[(\ell+1)\overset{2}{K}_p - \hat{\overset{4}{K}}_p\right]; \end{cases} \tag{2.32}$$

$$c)\ (\hat{\overset{4}{K}}_p, \overset{3}{K}_p) \to \begin{cases} \hat{\mathcal{L}}^p_n = -\dfrac{n-m}{n-m-1}\Lambda^{pq}_n\left(\hat{\overset{4}{K}}_q - \overset{3}{K}_q\right), \\ \hat{\mathcal{L}}^0_p = -\dfrac{1}{n-m-1}\left[(n-m)\overset{3}{K}_p - \hat{\overset{4}{K}}_p\right]. \end{cases} \tag{2.33}$$

d) Пара $(\overset{4}{K}_p, \overset{5}{K}_p)$ в дифференциальной окрестности второго порядка определяет инвариантную нормаль первого рода

$$\mathscr{K}^p_n = -\frac{1}{2}\mathscr{B}^{pq}_n\left(\overset{4}{K}_q - \overset{5}{K}_q\right). \tag{2.34}$$

При

$$r^n_{pq} = \frac{1}{2}\left(\Lambda^n_{pq} - \Lambda^n_{qp}\right) \neq 0, \quad \nabla r^n_{pq} \equiv 0$$

эта пара квазинормалей общей нормали второго рода не имеет [7] , а при $r^n_{pq} = 0$ общая нормаль второго рода имеет вид

$$\mathscr{H}^0_p = \frac{1}{2}\left(\overset{5}{K}_p - \overset{4}{K}_p\right). \tag{2.35}$$

е) Аналогично, как и в пункте d), находим следующие нормали первого рода Λ-распределения в дифференциальной окрестности второго порядка:

$$(\hat{K}^4_p, K^5_p) \to \hat{\mathcal{H}}^p_n = -\frac{1}{2} b^{pq}_n (\hat{K}^4_q + K^5_q), \qquad (2.36)$$

$$(K^4_p, \hat{K}^5_p) \to \tilde{\mathcal{H}}^p_n = -\frac{1}{2} b^{pq}_n (K^4_q + \hat{K}^5_q), \qquad (2.37)$$

$$(\hat{K}^4_p, \hat{K}^5_p) \to \overset{*}{\mathcal{H}}{}^p_n = -\frac{1}{2} b^{pq}_n (\hat{K}^5_q - \hat{K}^4_q). \qquad (2.38)$$

Каждая из пар квазинормалей (2.36)-(2.38) при $\tau^n_{pq} \neq 0$ общей нормали не имеет, а при $\tau^n_{pq} = 0$ существует для этих пар следующие нормали $\{\nu^0_p\}$ второго рода:

$$(\hat{K}^4_p, K^5_p) \to \hat{\mathcal{H}}^0_p = \frac{1}{2} (K^5_p - \hat{K}^4_p), \qquad (2.39)$$

$$(K^4_p, \hat{K}^5_p) \to \tilde{\mathcal{H}}^0_p = \frac{1}{2} (\hat{K}^5_p - K^4_p), \qquad (2.40)$$

$$(\hat{K}^4_p, \hat{K}^5_p) \to \overset{*}{\mathcal{H}}{}^0_p = \frac{1}{2} (\hat{K}^5_p - \hat{K}^4_p); \qquad (2.41)$$

3) в окрестности третьего порядка

$$\text{а)}\ (K^6_p, K^7_p) \to \begin{cases} \Phi^p_n = \frac{1}{2} b^{pq}_n (K^7_q - K^6_q), \\ \Phi^0_p = \frac{1}{2} (K^7_p - 2K^6_p); \end{cases} \qquad (2.42)$$

$$\text{в)}\ (K^7_p, K^5_p) \to \begin{cases} \Psi^p_n = \frac{1}{2} \Lambda^{qp}_n (K^7_q - K^5_q), \\ \Psi^0_p = \frac{1}{2} (K^5_p + K^7_p); \end{cases} \qquad (2.43)$$

$$\text{с)}\ (K^7_p, \hat{K}^5_p) \to \begin{cases} \hat{\Psi}^p_n = \frac{1}{2} \Lambda^{qp}_n (K^7_q - \hat{K}^5_q), \\ \hat{\Psi}^0_p = \frac{1}{2} (\hat{K}^5_p - K^7_p). \end{cases} \qquad (2.44)$$

Заметим, что в случае регулярной гиперполосы, а также регулярного гиперполосного распределения [7], нормали (2.42) являются аналогами нормалей Фубини. В силу этого нормали (2.42) назовем (первыми) аналогами нормалей Фубини $\mathcal{H}_1$-распределения, ассоциированными с базисным Λ-распределением.

Следуя алгоритму построения двойственных нормалей [7], найдем, например, нормаль $\{\nu^0_p\} = \{\hat{M}^0_p\}$, двойственную нормали Михэйлеску первого рода $\{\hat{M}^p_n\}$ $\mathcal{H}_1$-распределения [1],[2]:

$$\hat{M}^p_n \overset{def}{=} -\frac{1}{2(\tau+2)} \Lambda^{ps}_n b^{qt}_n (\Lambda^n_{sqt} + \Lambda^n_{sq}\hat{K}^4_t + \Lambda^n_{st}\hat{K}^4_q + \Lambda^n_{tq}\hat{K}^4_s). \qquad (2.45)$$

Используя биекцию (2.14) (при $\sigma = 1$; $\varkappa = 1$), определенную квазинормалью $\hat{K}^4_p$ второго порядка, получим [2]:

$$\hat{M}^0_p = -[\hat{K}^4_p - \frac{1}{2(\tau+2)} b^{qt}_n (\Lambda^n_{pqt} + \Lambda^n_{pq}\hat{K}^4_t + \Lambda^n_{pt}\hat{K}^4_q + \Lambda^n_{tq}\hat{K}^4_p)]. \qquad (2.46)$$

Нормали $\{\hat{M}^p_n\}$ и $\{\hat{M}^0_p\}$ назовем [7],[1],[2] первыми аналогами нормалей Михэйлеску соответственно первого и второго рода $\mathcal{H}_1$-распределения. Совершенно аналогичные построения проводим в окрестности второго порядка элемента $\mathcal{H}_1$-распределения, исходя из квазинормали $\{K^4_p\}$ (2.19) первого порядка:

$$M^p_n \overset{def}{=} -\frac{1}{2(\tau+2)} \Lambda^{ps}_n b^{qt}_n (\Lambda^n_{sqt} + \Lambda^n_{sq}K^4_t + \Lambda^n_{st}K^4_q + \Lambda^n_{tq}K^4_s), \qquad (2.47)$$

$$M^0_p \overset{def}{=} -[K^4_p - \frac{1}{2(\tau+2)} b^{qt}_n (\Lambda^n_{pq}K^4_t + \Lambda^n_{pt}K^4_q + \Lambda^n_{tq}K^4_p + \Lambda^n_{pqt}). \qquad (2.48)$$

Нормали $\{M^p_n\}$ и $\{M^0_p\}$ назовем вторыми аналогами нормалей Михэйлеску соответственно первого и второго рода $\mathcal{H}_1$-распределения [2].

Аналогичные построения нормалей первого и второго рода $\mathcal{H}_1$-распределения можно провести, используя квазинормали, ассоциированные с L-распределением. Здесь мы приведем только охваты характерных квазинормалей, ассоциированных с L-распределением.

1) В окрестности первого порядка

$$\text{а)}\ K^1_i = \frac{1}{n-m} [M^\alpha_{i\alpha} + M^n_{in} - (M^\alpha_{ij} - M^n_{ij}\nu^\alpha_n) M^j_\alpha], \qquad (2.49)$$

$$\text{б)}\ K^2_i = M^n_{in} + M^n_{i\alpha}\nu^\alpha_n. \qquad (2.50)$$

2) В окрестности второго порядка

$$\text{а)}\ K^3_i = \frac{1}{n-\ell} [M^n_{in} + M^p_{ip} + M^\alpha_{i\alpha} - (M^\alpha_{ij} - M^n_{ij}\nu^\alpha_n) M^j_\alpha], \qquad (2.51)$$

$$\text{в)}\ K^4_i = \frac{1}{\tau+1} (M^n_{in} + M^p_{ip} + M^n_{i\alpha}\nu^\alpha_n). \qquad (2.52)$$

3) В окрестности третьего порядка:

$$\text{а)}\ K^5_i = \frac{1}{\tau} \Lambda_i + \frac{\tau+2}{\tau} \Lambda^n_{qi}\nu^q_n + H^n_{\alpha i}\nu^\alpha_n, \qquad (2.53)$$

$$\text{в)}\ K^6_i = \frac{1}{\ell+2} \hat{\Lambda}_i + \frac{\ell}{\ell+2} \Lambda^n_{qi}\nu^q_n + \frac{\ell}{\ell+2} H^n_{\alpha i}\nu^\alpha_n - \frac{2}{\ell+2} (M^\alpha_{ji} - M^n_{ji}\nu^\alpha_n) M^j_\alpha. \qquad (2.54)$$

§3. Инвариантные оснащения в смысле Картана Λ-распределения и L-распределения.

1. Найдем инвариантную оснащающую плоскость $\mathcal{K}_{n-r-1}(\nu^p_n)(A_0)$, принадлежащую нормали первого рода $N_{n-r}(\nu^p_n)(A_0)$ Λ-распределения. Плоскость $\mathcal{K}_{n-r-1}(\nu^p_n)$ зададим точками

$$K_i(\nu^p_n)=x^0_i A_0 + A_i\,;\ K_\alpha(\nu^p_n)=x^0_\alpha A_0+x^i_\alpha A_i+A_\alpha\,;\ K_n(\nu^p_n)=x^0_n A_0 + X_n(\nu^p_n), \tag{3.1}$$

где $X_n(\nu^p_n) = A_n + \nu^p_n A_p + \nu^\alpha_n A_\alpha + \nu^i_n A_i$.

Из условия инвариантности плоскости $\mathcal{K}_{n-r-1}(\nu^p_n)$ приходим к следующим уравнениям:

$$\begin{aligned} &\nabla_\delta x^0_n + \nu^u_n \pi^0_u + \pi^0_n = 0, && \nabla_\delta x^0_i = -\pi^0_i,\\ &\nabla_\delta x^0_\alpha + \nu^i_\alpha \pi^0_i + \pi^0_\alpha = 0, && \nabla_\delta x^i_\alpha + \pi^i_\alpha = 0. \end{aligned} \tag{3.2}$$

Можно убедиться, что уравнения (3.2) выполняются, если положить

$$x^0_n = \nu^0_n - \nu^\alpha_n H^0_\alpha - \nu^i_n M^0_i\,;\quad x^0_i = -M^0_i\,;\quad x^0_\alpha = -\overline{H}^0_\alpha\,;\quad x^i_\alpha = -M^i_\alpha\,; \tag{3.3}$$

$$\nu^0_n \overset{def}{=} -\frac{1}{r}(\nu^p_{np} - \Lambda^n_{pq}\nu^p_n\nu^q_n);\ M^0_i = \frac{1}{r}M^p_{ip}\,;\ H^0_\alpha = \frac{1}{r}H^p_{\alpha p}\,;\ \overline{H}^0_\alpha = \frac{1}{r}(H^p_{\alpha p} - M^p_{ip}M^i_\alpha). \tag{3.4}$$

Таким образом, инвариантная оснащающая плоскость $\mathcal{K}_{n-r-1}(\nu^p_n)$ натянута на точки

$$K_\alpha = A_\alpha - \overline{H}^0_\alpha A_0 - M^i_\alpha A_i\,,\quad K_i = A_i - M^0_i A_0\,;\quad K_n(\nu^p_n) = x^0_n A_0 + X_n(\nu^p_n) \tag{3.5}$$

и определяется уравнениями

$$x^p - \nu^p_n x^n = 0\,,\quad x^0 - \nu^0_n x^n + H^0_\alpha x^\alpha + M^0_i x^i = 0. \tag{3.6}$$

Плоскость $\mathcal{K}_{n-r-1}(\nu^p_n)$ (3.6) пересекает характеристику $\chi_{n-r-1}(A_0)$ гиперплоскости $H(A_0)$ по $(n-r-2)$-мерной плоскости Π_{n-r-2}:

$$x^n = x^p = 0\,,\quad x^0 + M^0_i x^i + H^0_\alpha x^\alpha = 0. \tag{3.7}$$

Так как задание (3.7) плоскости Π_{n-r-2} не зависит от выбора нормали первого рода $N_{n-r}(\nu^p_n)$ (от выбора квазитензора $\{\nu^p_n\}$) в данной точке A_0, то, следовательно, в каждом центре A_0 $\mathcal{H}_1$-распределения инвариантные оснащающие плоскости $\mathcal{K}_{n-r-1}(\nu^p_n)$ (3.6) принадлежат одной связке, вершиной которой служит плоскость $\Pi_{n-r-2}(A_0) \subset \chi_{n-r-1}(A_0)$. Отметим, что инвариантная точка $K_n(\nu^p_n)$

является точкой пересечения оснащающей плоскости $\mathcal{K}_{n-r-1}(\nu^p_n)$ с инвариантной прямой $N_1(\nu^p_n) = [A_0, X_n]$, соответствующей данной нормали $N_{n-r}(\nu^p_n)$, т.е. для Λ-распределения точки $K_n(\nu^p_n)$ представляет собой аналог обобщенной точки Кенигса [8], соответствующей нормали $N_{n-r}(\nu^p_n)$. Будем также говорить, что точка $K_n(\nu^p_n) \subset N_1(\nu^p_n)$ является точкой Кенигса H-распределения, ассоциированная с базисным распределением [7],[1],[2].

Итак, плоскость $\mathcal{K}_{n-r-1}(\nu^p_n)(A_0)$ (3.6), натянутая на точки (3.5), является оснащающей плоскостью Картана элемента Λ-распределения, т.е. плоскости $\Lambda(A_0)$.

2. Внутренним инвариантным образом присоединим к плоскости $L(A_0)$ оснащающую плоскость $\mathcal{K}_{n-l-1}(\nu^i_n)(A_0) \subset N_{n-l}(\nu^i_n)(A_0)$. Можно непосредственно убедиться, что величина

$$\begin{aligned}\varphi^0_n = -\frac{1}{l}(\nu^i_{ni} - M^n_{ki}\nu^k_n\nu^i_n - \nu^\alpha_{ni}M^i_\alpha - M^n_{ki}\nu^k_n\nu^\alpha_n M^i_\alpha + M^\alpha_{ki}M^i_\alpha\nu^k_n -\\ - H^n_{\alpha i}\nu^\alpha_n\nu^i_n - H^n_{\alpha i}M^i_\beta\nu^\alpha_n\nu^\beta_n + l\nu^\kappa_n\nu^0_\alpha)\end{aligned} \tag{3.8}$$

удовлетворяет дифференциальному уравнению

$$\nabla_\delta\varphi^0_n + (\nu^\kappa_n - \nu^\alpha_n\nu^\kappa_\alpha)\pi^0_\kappa + L^0_p\pi^p_n - \nu^0_\alpha\pi^\alpha_n + \pi^0_n = 0, \tag{3.9}$$

где

$$\left.\begin{aligned} &L^0_p = \frac{1}{l}L^i_{pi}\,,\quad \nabla_\delta L^0_p \equiv \pi^0_p\,;\\ &L^i_{pj} = \Lambda^i_{pj} - \Lambda^n_{pj}\nu^i_n - (\Lambda^\alpha_{pj} - \nu^\alpha_n\Lambda^n_{pj})M^i_\alpha.\end{aligned}\right\} \tag{3.10}$$

Плоскость $\mathcal{K}_{n-l-1}(\nu^i_n)(A_0)$ определим точками

$$\hat{K}_p = y^0_p A_0 + A_p,\ \hat{K}_\alpha = y^0_\alpha A_0 + y^i_\alpha A_i + A_\alpha\,,\ \hat{K}_n(\nu^i_n) = y^0_n A_0 + \nu^\sigma_n A_\sigma + A_n. \tag{3.11}$$

Из условия инвариантности плоскости $\mathcal{K}_{n-l-1}(\nu^i_n)$ находим, что

$$\nabla_\delta y^0_n + \nu^\sigma_n\pi^0_\sigma + \pi^0_n = 0,\ \nabla_\delta y^0_p + \pi^0_p = 0,\ \nabla_\delta y^0_\alpha + y^i_\alpha\pi^0_i + \pi^0_\alpha = 0,\ \nabla_\delta y^i_\alpha + \pi^i_\alpha = 0. \tag{3.12}$$

В силу (3.8)-(3.10) уравнения (3.12) выполняются, если положить

$$y^0_n = \varphi^0_n + \nu^\alpha_n\nu^0_\alpha - \nu^p_n L^0_p\,;\quad y^0_p = -L^0_p\,,\ y^0_\alpha = \nu^0_\alpha\,;\quad y^i_\alpha = -M^i_\alpha. \tag{3.13}$$

Итак, инвариантная оснащающая по Картану плоскость $\mathcal{K}_{n-l-1}(\nu^i_n)(A_0)$ определена точками

$$\hat{K}_\alpha = A_\alpha + \nu^0_\alpha A_0 - M^i_\alpha A_i; \quad \hat{K}_p = A_p - L^0_p A_0; \quad \hat{K}_n = \chi^0_n A_0 + \nu^\sigma_n A_\sigma + A_n, \qquad (3.14)$$

где $\chi^0_n = \varphi^0_n + \nu^\alpha_n \nu^0_\alpha - \nu^p_n L^0_p$, и в репере первого порядка задается уравнениями

$$x^i - \nu^i_n x^n = 0, \qquad x^0 - \varphi^0_n x^n - \nu^0_\alpha x^\alpha + L^0_p x^p = 0. \qquad (3.15)$$

Инвариантная точка $\hat{K}_n$ (3.14) является аналогом обобщенной точки Кенигса [8] H-распределения, ассоциированной с L-распределением [7],[11],[2].

§4. Проективные связности, ассоциированные с базисным Λ-распределением и L-распределением.

1. Рассмотрим пространство проективной связности $P_{n,r}$, n-мерной базой которого является точечное проективное пространство P_n , а слоями - плоскости $\Lambda(A_0)$. Проективную связность Γ пространства $P_{n,r}$ всегда можно определить при помощи системы форм $\{\hat\omega^{\bar p}_{\bar q}\}$ [6]:

$$\hat\omega^{\bar p}_{\bar q} = \omega^{\bar p}_{\bar q} - \Gamma^{\bar p}_{\bar q K}\omega^K_0, \qquad (4.1)$$

удовлетворяющих структурным уравнениям

$$D\omega^J_0 = \omega^L_0 \wedge \omega^J_L + \omega^0_0 \wedge \omega^J_0; \quad D\hat\omega^{\bar p}_{\bar q} = \hat\omega^{\bar s}_{\bar q} \wedge \hat\omega^{\bar p}_{\bar s} + \omega^K_0 \wedge \Delta\Gamma^{\bar p}_{\bar q K}, \qquad (4.2)$$

где

$$\Delta\Gamma^{\bar p}_{\bar q K} = d\Gamma^{\bar p}_{\bar q K} - \Gamma^{\bar p}_{\bar s K}\omega^{\bar s}_{\bar q} + \Gamma^{\bar s}_{\bar q K}\omega^{\bar p}_{\bar s} - \Gamma^{\bar s}_{\bar q K}\Gamma^{\bar p}_{\bar s J}\omega^J_0 + \Lambda^n_{\bar q K}\omega^{\bar p}_n + \Lambda^u_{\bar q K}\omega^{\bar p}_u + \Gamma^{\bar p}_{\bar q K}\omega^0_0 - \Gamma^{\bar p}_{\bar q J}\omega^J_K, \quad \Lambda^{\hat L}_{0K} = \delta^{\hat L}_K, \quad \Lambda^i_{0K} = \delta^i_K. \qquad (4.3)$$

Формы $\Delta\Gamma^{\bar p}_{\bar q K}, \omega^K_0$ на $\mathcal{H}_1$-распределении образуют вполне интегрируемую систему и определяют над исходной базой $\{\omega^K_0\}$ пространство геометрического объекта $\Gamma^{\bar p}_{\bar q K}$. Геометрический объект $\Gamma^{\bar p}_{\bar q K}$ назовем объектом проективной связности [6] пространства $P_{n,r}$. Для того, чтобы формы $\hat\omega^{\bar p}_{\bar q}$ определяли проективную связность в слоях (плоскостях Λ) пространства проективной связности $P_{n,r}$, необходимо и достаточно, чтобы было задано поле объекта связности $\Gamma^{\bar p}_{\bar q K}$, т.е. чтобы выполнялись дифференциальные уравнения [9],[10]:

$$\Delta\Gamma^{\bar p}_{\bar q K} = \Gamma^{\bar p}_{\bar q K L}\omega^L_0. \qquad (4.4)$$

Структурные уравнения для слоевых форм $\hat\omega^{\bar p}_{\bar q}$ пространства $P_{n,r}$ имеют вид

$$D\hat\omega^{\bar p}_{\bar q} = \hat\omega^{\bar s}_{\bar q} \wedge \hat\omega^{\bar p}_{\bar s} + \frac{1}{2} R^{\bar p}_{\bar q K L}\omega^K_0 \wedge \omega^L_0, \qquad (4.5)$$

где

$$R^{\bar p}_{\bar q K L} = 2\Gamma^{\bar p}_{\bar q [K L]} \qquad (4.6)$$

является тензором кручения-кривизны проективной связности Γ пространства $P_{n,r}$

Пусть Λ-распределение оснащено в смысле Картана внутренним образом. Построим проективную связность Γ , внутренне определенную самим $\mathcal{H}_1$-распределением, т.е. построим охват объекта проективной связности $\Gamma = \{\Gamma^{\bar p}_{\bar q K}\}$ фундаментальными объектами $\mathcal{H}_1$-распределения. Непосредственной проверкой убеждаемся, что уравнения (4.4) удовлетворяются, если охваты компонент объекта проективной связности $\Gamma = \{\Gamma^{\bar p}_{\bar q K}\}$ осуществить следующим образом:

$$\Gamma^q_{0\sigma} = 0, \quad \Gamma^q_{0n} = \nu^q_n, \quad \Gamma^0_{0p} = 0, \quad \Gamma^0_{0i} = -M^0_i, \quad \Gamma^0_{0\alpha} = -H^0_\alpha, \quad \Gamma^0_{0n} = \nu^0_n, \qquad (4.7)$$

$$\Gamma^p_{qK} = \Lambda^n_{qK}\nu^p_n, \quad \Gamma^0_{pK} = \Lambda^n_{pK}\nu^0_n - \Lambda^\alpha_{pK}H^0_\alpha - \Lambda^i_{pK}M^0_i. \qquad (4.8)$$

Из формул (4.1),(4.7),(4.8) следует, что слоевые формы $\hat\omega^{\bar p}_{\bar q}$ пространства проективной связности $P_{n,r}$, внутренне определенного на $\mathcal{H}_1$-распределении и ассоциированного с Λ-распределением, имеют вид:

$$\hat\omega^0_0 = \omega^0_0 - (\delta^n_K\nu^0_n - M^0_i\delta^i_K - H^0_\alpha\delta^\alpha_K)\omega^K_0, \quad \hat\omega^p_0 = \omega^p_0 - \nu^p_n\delta^n_K\omega^K_0, \qquad (4.9)$$

$$\hat\omega^0_p = \omega^0_p - (\Lambda^n_{pK}\nu^0_n - \Lambda^\alpha_{pK}H^0_\alpha - \Lambda^i_{pK}M^0_i)\omega^K_0, \quad \hat\omega^p_q = \omega^p_q - \Lambda^n_{qK}\nu^p_n\omega^K_0. \qquad (4.10)$$

Аналогично, как это показано в работе [6], убеждаемся, что определенная нами проективная связность (4.7),(4.8), есть связность, полученная путем проектирования при помощи внутренне определенной оснащающей по Картану плоскости $\mathcal{L}_{n-r-1}(\nu^p_n)(A_0)$ (3.6).

2. Рассмотрим пространство проективной связности $P_{n,\ell}$, n-мерной базой которого является точечное проективное пространство P_n , а слоями - плоскости L (ℓ-мерные центропроективные пространства, $\ell = m - r$).

Проективную связность γ пространства $P_{n,\ell}$ определим при помощи системы форм $\{\theta^{\bar\tau}_{\bar J}\}$ [6]:

$$\theta^{\bar\tau}_{\bar J} = \omega^{\bar\tau}_{\bar J} - \gamma^{\bar\tau}_{\bar J K}\omega^K_0, \qquad (4.11)$$

удовлетворяющих структурным уравнениям

$$D\omega^J_0 = \omega^L_0 \wedge \omega^J_L + \omega^0_0 \wedge \omega^J_0, \quad D\theta^{\bar\tau}_{\bar J} = \theta^{\bar K}_{\bar J} \wedge \theta^{\bar\tau}_{\bar K} + \omega^K_0 \wedge \Delta\gamma^{\bar\tau}_{\bar J K}, \qquad (4.12)$$

где

$$\Delta\gamma^{\bar\tau}_{\bar J K} = d\gamma^{\bar\tau}_{\bar J K} + \gamma^{\bar\ell}_{\bar J K}\omega^{\bar\tau}_{\bar\ell} - \gamma^{\bar\tau}_{\bar\ell K}\omega^{\bar\ell}_{\bar J} - \gamma^{\bar\ell}_{\bar J K}\gamma^{\bar\tau}_{\bar\ell J}\omega^J_0 + M^p_{\bar J K}\omega^{\bar\tau}_p +$$

$$+ M^{\alpha}_{jx}\omega^{i}_{\alpha} + M^{n}_{j\hat{u}}\delta^{\hat{u}}_{x}\omega^{i}_{n} + \gamma^{i}_{jx}\omega^{o}_{o} - \gamma^{i}_{jl}\omega^{l}_{x}, \quad M^{\hat{\alpha}}_{ox} = \delta^{\hat{\alpha}}_{x}, \quad M^{p}_{ox} = \delta^{p}_{x}. \qquad (4.13)$$

Формы $\Delta\gamma^{i}_{jx}, \omega^{x}_{o}$ на $\mathcal{H}_1$-распределении образуют вполне интегрируемую систему и определяют над исходной базой $\{\omega^{x}_{o}\}$ пространство объекта проективной связности $\mathring{\gamma}^{i}_{jx}$ [6]. Для того, чтобы формы θ^{i}_{j} определяли проективную связность в слоях (плоскостях Π_ℓ L-распределения) пространства $P_{n,\ell}$, необходимо и достаточно, чтобы выполнялись уравнения [9],[10]:

$$\Delta\gamma^{i}_{jx} = \gamma^{i}_{jxy}\,\omega^{y}_{o}. \qquad (4.14)$$

Структурные уравнения для слоевых форм θ^{i}_{j} пространства $P_{n,\ell}$ имеют вид

$$\mathcal{D}\theta^{i}_{j} = \theta^{k}_{j}\wedge\theta^{i}_{k} + \frac{1}{2}\tau^{i}_{jxl}\,\omega^{x}_{o}\wedge\omega^{l}_{o}, \qquad (4.15)$$

где совокупность величин

$$\tau^{i}_{jxl} = 2\gamma^{i}_{j[xl]} \qquad (4.16)$$

образует тензор кручения-кривизны проективной связности γ пространства $P_{n,\ell}$.

Следуя работе [6], найдем проективную связность γ, внутренне определенную самим $\mathcal{H}_1$-распределением, т.е. построим охват объекта проективной связности $\gamma = \{\gamma^{i}_{jx}\}$ фундаментальными объектами $\mathcal{H}_1$-распределения.

Если охваты компонент объекта $\gamma = \{\gamma^{i}_{jx}\}$ осуществить по формулам

$$\gamma^{i}_{ox} = \delta^{n}_{x}\nu^{i}_{n} - \delta^{\alpha}_{x}M^{i}_{\alpha} + \delta^{n}_{x}\nu^{\alpha}_{n}M^{i}_{\alpha},$$

$$\gamma^{j}_{ix} = M^{n}_{i\hat{u}}\delta^{\hat{u}}_{x}\nu^{j}_{n} - M^{\alpha}_{ix}M^{j}_{\alpha} + M^{n}_{i\hat{u}}\delta^{\hat{u}}_{x}\nu^{\alpha}_{n}M^{j}_{\alpha}, \qquad (4.17)$$

$$\gamma^{o}_{ox} = \varphi^{o}_{n}\delta^{n}_{x} - L^{o}_{p}\delta^{p}_{x} + \nu^{o}_{\alpha}\delta^{\alpha}_{x}, \quad \gamma^{o}_{ix} = M^{n}_{i\hat{u}}\delta^{\hat{u}}_{x}\varphi^{o}_{n} - M^{p}_{ix}L^{o}_{p} + \nu^{o}_{\alpha}M^{\alpha}_{ix},$$

то уравнения (4.14) удовлетворяются.

Таким образом, в силу (4.11),(4.17), слоевые формы θ^{i}_{j} пространства проективной связности $P_{n,\ell}$ имеют такое строение:

$$\theta^{i}_{o} = \omega^{i}_{o} - (\nu^{i}_{n}\delta^{n}_{x} - M^{i}_{\alpha}\delta^{\alpha}_{x} + \nu^{\alpha}_{n}M^{i}_{\alpha}\delta^{n}_{x})\,\omega^{x}_{o},$$

$$\theta^{o}_{o} = \omega^{o}_{o} - (\varphi^{o}_{n}\delta^{n}_{x} - L^{o}_{p}\delta^{p}_{x} + \nu^{o}_{\alpha}\delta^{\alpha}_{x})\,\omega^{x}_{o}, \qquad (4.18)$$

$$\theta^{i}_{j} = \omega^{i}_{j} - (\nu^{i}_{n}M^{n}_{j\hat{u}}\delta^{\hat{u}}_{x} - M^{i}_{\alpha}M^{\alpha}_{jx} + M^{n}_{j\hat{u}}\delta^{\hat{u}}_{x}\nu^{\alpha}_{n}M^{i}_{\alpha})\,\omega^{x}_{o},$$

$$\theta^{o}_{i} = \omega^{o}_{i} - (\varphi^{o}_{n}\delta^{\hat{u}}_{x}M^{n}_{i\hat{u}} - L^{o}_{p}M^{p}_{ix} + \nu^{o}_{\alpha}M^{\alpha}_{ix})\,\omega^{x}_{o}.$$

Пусть L-распределение оснащено в смысле Картана внутренним образом. Аналогично [6], можно показать, что построенная внутренним образом, проективная связность γ определена путем проектирования при помощи внутренне определенной (оснащающей по Картану) плоскости

$$\mathcal{K}_{n-\ell-1} = [\hat{K}_p, \hat{K}_\alpha, \hat{K}_n]. \qquad (3.15)$$

Библиографический список

1. П о п о в Ю.И. Трехсоставные регулярные распределения $\mathcal{H}^{r}_{m,n-1}$ проективного пространства / Калинингр.ун-т.Калининград,1982.126с. Библиогр.20 назв.Деп.в ВИНИТИ 16.12.82. № 6192-82.

2. П о п о в Ю.И. Скомпонованные трехсоставные распределения проективного пространства//Дифференциальная геометрия многообразий фигур:Межвуз.темат.сб.науч.тр./Калинингр.ун-т.Калининград ,1989.Вып. 20.С.73-96.

3. Н о р д е н А.П. Теория композиций//Проблемы геометрии/ВИНИТИ. М.,1978.Т.10.С.117-145.

4. Н о р д е н А.П. Пространства аффинной связности.М.:Наука,1976.

5. Ч а к м а з я н А.В. Двойственная нормализация/Докл.АН Арм.ССР. 1959.Т.28.№4.С.151-157.

6. Л а п т е в Г.Ф.,Остиану Н.М. Распределения m-мерных линейных элементов в пространстве проективной связности//Тр.геометр.семинара/ ВИНИТИ.М.,1971.Т.3.С.49-94.

7. С т о л я р о в А.В. Проективно-дифференциальная геометрия регулярного гиперполосного распределения m-мерных линейных элементов//Проблемы геометрии/ВИНИТИ.М.,1975.Т.7.С.117-151.

8. О с т и а н у Н.М. Распределение гиперплоскостных элементов в проективном пространстве//Тр.геометр.семинара/ВИНИТИ.М.,1973.Т.4. С.71-120.

9. Л а п т е в Г.Ф. Дифференциальная геометрия погруженных многообразий//Тр.Моск.матем.о-ва/ ГИТТЛ.1953.Т.2.С.275-382.

10. Л а п т е в Г.Ф. Многообразия,погруженные в обобщенные пространства// Тр. IУ Всес.матем.съезда,1961.Л.:Наука,1964.Т.2.С.226-233.

УДК 514.75

ПАРЫ T КОНГРУЭНЦИЙ С ДАННЫМ РАСПОЛОЖЕНИЕМ КОНГРУЭНЦИИ ОБЩИХ ПЕРПЕНДИКУЛЯРОВ

О.С.Р е д о з у б о в а
(Московский государственный педагогический институт)

Рассмотрена пара T конгруэнций в E_3, у которой общий перпендикуляр соответствующих прямых пары перпендикулярен общему перпендикуляру пары дополнительных конгруэнций. Такие пары обозначены буквой T'. Изучены свойства таких пар конгруэнций.

С парой T' конгруэнций связан подвижный ортонормированный репер $(O, \vec{e}_i)(i=1,2,3)$, вершина O которого принадлежит прямой конгруэнции $\{z\}$ общих перпендикуляров пары соответствующих прямых $z_a (a=1,2)$, $\vec{e}_3$ параллелен z. Прямые z_a образуют с вектором $\vec{e}_1$ углы α_a. Прямые z пересекают соответствующие прямые конгруэнций $\{z_a\}$ в точках K_a. Направляющие векторы прямых z_a есть орты $\vec{\eta}_a$. Абсциссы точек K_a относительно репера $(O, \vec{e}_3)$ на прямой z обозначены h_a. Фокусы прямых z_a обозначены F_a и F'_a, абсциссы фокусов относительно репера $(K_a, \vec{\eta}_a)$ обозначены соответственно ρ_a, ρ'_a. Известно [1, с.3], что пары T конгруэнций определяются системой уравнений:

$$\begin{cases} H_2\rho_1 + \Omega_{23}\dfrac{\rho_1\rho_2}{h_1-h_2} - A_2\rho_2 + Q_2 = 0, \quad A_1\rho_1 - \Omega_{13}\dfrac{\rho_1\rho_2}{h_1-h_2} - H_1\rho_2 - Q_1 = 0, \\ H_2\rho'_1 + \Omega_{23}\dfrac{\rho'_1\rho'_2}{h_1-h_2} - A_2\rho'_2 + Q_2 = 0, \quad A_1\rho'_1 - \Omega_{13}\dfrac{\rho'_1\rho'_2}{h_1-h_2} - H_1\rho'_2 - Q_1 = 0. \end{cases} \tag{I}$$

Здесь использованы обозначения $\Omega_a = \omega^1\cos\alpha_a + \omega^2\sin\alpha_a$, $\Omega^*_a = \omega^1\sin\alpha_a - \omega^2\cos\alpha_a$, $\Omega_{a3} = \omega^3_1\cos\alpha_a + \omega^3_2\sin\alpha_a$, $\Omega^*_{a3} = -\omega^3_1\sin\alpha_a + \omega^3_2\cos\alpha_a$, $A_a = \dfrac{\omega^2_1 + d\alpha_a}{\sin(\alpha_1-\alpha_2)}$, $H_a = \dfrac{\omega^3 + dh_a}{h_1-h_2}$, $Q_a = \dfrac{\Omega^*_a + h_a\Omega^*_{a3}}{\sin(\alpha_1-\alpha_2)}$.

Для того, чтобы задать пару T' конгруэнций, надо к системе уравнений (I) присоединить условие перпендикулярности общих перпендикуляров соответствующих прямых пары T конгруэнций и пары T дополнительных конгруэнций $\{F_1F_2\}$ и $\{F'_1F'_2\}$. Таким образом, к системе (I) надо присоединить условие $\rho'_1\rho_2 = \rho_1\rho'_2$, которое можно записать в виде: $\rho_2 = t\rho_1$, $\rho'_2 = t\rho'_1$, $t \neq 0$. Рассматриваемые пары T' конгруэнций определяются следующей системой уравнений:

$$\begin{cases} Q_1 = \Omega_{13}\dfrac{t\rho_1\rho'_1}{h_1-h_2}, \qquad Q_2 = \Omega_{23}\dfrac{t\rho_1\rho'_1}{h_1-h_2}, \\ A_1 = \Omega_{13}\dfrac{(\rho_1+\rho'_1)t}{h_1-h_2} + H_1 t, \qquad A_2 = \Omega_{23}\dfrac{\rho_1+\rho'_1}{h_1-h_2} + H_2\dfrac{1}{t}, \\ \rho_2 = t\rho_1, \quad \rho'_2 = t\rho'_1, \quad t \neq 0. \end{cases} \tag{2}$$

Исследование такой системы приводит к выводу о том, что рассматриваемые пары T' конгруэнций существуют с произволом одной функции двух аргументов.

Т е о р е м а 1. Для того, чтобы пары T конгруэнций были парами T', необходимо, чтобы пары были симметричными и расстояние между граничными точками конгруэнции общих перпендикуляров было равно отношению расстояния между соответствующими прямыми к синусу угла между ними.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Поместим вершину O подвижного репера $R_0 = (O, \vec{e}_i)(i=1,2,3)$ в центр прямой конгруэнции общих перпендикуляров, а векторы $\vec{e}_a$ $(a=1,2)$ параллельно биссекторным плоскостям фокальных плоскостей этой конгруэнции. Тогда в соответствии с [2, с.73] выполняются равенства:

$$\omega^1 = -\hat{\rho}\,\mathrm{ctg}\,\varphi\cdot\omega^3_2, \qquad \omega^2 = -\hat{\rho}\,\mathrm{tg}\,\varphi\cdot\omega^3_1. \tag{3}$$

Здесь $2\hat{\rho}$ и 2φ – соответственно фокальное расстояние и угол между фокальными плоскостями конгруэнции общих перпендикуляров. Подставляя в первые два уравнения системы (2) выражения (3), получим, учитывая линейную независимость форм ω^3_a, равенства:

$$\begin{cases} \alpha_1 = -\alpha_2 \equiv \alpha, \qquad h_1 = h_2 \equiv h, \\ \dfrac{2\hat{\rho}}{\sin 2\varphi} = \dfrac{2h}{\sin 2\alpha}, \qquad \rho_1\rho'_1 t = d^2\sin(\varphi+\alpha)\sin(\varphi-\alpha). \end{cases} \tag{4}$$

Здесь $\dfrac{2\hat{\rho}}{\sin 2\varphi}$ равно расстоянию между граничными точками конгруэнции общих перпендикуляров. Из первых трех равенств следует доказательство теоремы.

Заметим, что при $t=1$ пара T' конгруэнций является равнонаклонной парой I-го типа [1, с.13]. Произвол существования таких пар – четыре функции одного аргумента.

Т е о р е м а 2. Для того, чтобы пара T' конгруэнций была парой I-го типа, необходимо и достаточно, чтобы были равны между собой фокальные расстояния соответствующих прямых пары.

Т е о р е м а 3. Для того, чтобы пара T' конгруэнций была парой I-го типа, необходимо и достаточно, чтобы прямые конгруэнции общих перпендикуляров пар дополнительных конгруэнций пересекали в центрах соответствующие прямые этой дополнительной пары.

Т е о р е м а 4. Для того, чтобы у пары T' конгруэнций соответствующие прямые были пересечены в центрах прямыми конгруэнции общих перпендикуляров, необходимо и достаточно, чтобы пара T дополнительных конгруэнций $\{F_1F_2\}$ и $\{F'_1F'_2\}$ была парой 1-го типа.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Учтем, что пару T конгруэнций образуют не только конгруэнции $\{r_a\}$ ($a=1,2$),но также и дополнительные конгруэнции $\{F_1F_2\}$ и $\{F_1'F_2'\}$. Эти пары равноправны.В силу теоремы 3 условием того,чтобы пара T' конгруэнций была парой I-го типа,является условие пересечения в центрах соответствующих прямых дополнительных конгруэнций прямыми конгруэнции их общих перпендикуляров.В силу равноправности рассматриваемых двух пар T конгруэнций имеет место предложение:прямые конгруэнции общих перпендикуляров соответствующих прямых пары T конгруэнций пересекают эти прямые в центрах тогда и только тогда,когда пара дополнительных конгруэнций есть пара I-го типа.

Заметим,что рассматриваемые пары определяются системой уравнений:

$$\rho_1'=\rho_1, \quad \rho_2'=-\rho_2, \quad Q_a=-\Omega_{a3}\frac{\rho_1\rho_2}{h_1-h_2}, \quad A_1=H_1\frac{\rho_2}{\rho_1}, \quad A_2=H_2\frac{\rho_1}{\rho_2}. \qquad (5)$$

Исследование системы уравнений (5) приводит к выводу о том,что такие пары конгруэнций существуют с произволом четырех функций одного аргумента.

Т е о р е м а 5. Для того,чтобы прямые конгруэнции общих перпендикуляров пересекали соответствующие прямые пары T' конгруэнций в центрах,и таким же свойством обладали прямые конгруэнции общих перпендикуляров пары T дополнительных конгруэнций,необходимо и достаточно,чтобы были равны между собой фокальные расстояния соответствующих прямых пары T' и соответствующих прямых пары T дополнительных конгруэнций.

Произвол существования таких пар - три функции одного аргумента.

Т е о р е м а 6. Для того,чтобы пара T' конгруэнций имела постоянное расстояние и постоянный угол между соответствующими прямыми,необходимо и достаточно,чтобы конгруэнция общих перпендикуляров была псевдосферической и чтобы произведение абсцисс несоответствующих фокусов было постоянным.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пара T' конгруэнций с постоянным расстоянием и постоянным углом между соответствующими прямыми определяется системой уравнений (2) , к которой присоединены уравнения:

$$A_1=A_2\equiv A, \quad H_1=H_2\equiv H. \qquad (6)$$

После некоторых преобразований получим систему уравнений:

$$\begin{cases} A_1=A_2\equiv A, \quad H_1=H_2\equiv H, \quad A=\alpha\Omega_{13}+\beta\Omega_{23}, \\ H=-\beta\Omega_{13}-\alpha\Omega_{23}, \quad Q_a=\lambda\Omega_{a3} \quad (a=1,2), \end{cases} \qquad (7)$$

здесь $\lambda=\dfrac{t\rho_1\rho_1'}{h_1-h_2}, \quad \alpha=\dfrac{(\rho_1+\rho_1')t}{h_1-h_2}, \quad \beta=-t\alpha.$

После дифференцирования внешним образом системы уравнений (7) и подстановки туда выражений A , H и Q_a ($a=1,2$),имеем систему четырех квадратичных уравнений,два из которых имеют вид: $[d\lambda,\Omega_{13}]=0, [d\lambda,\Omega_{23}]=0$. Отсюда в силу линейной независимости форм Ω_{a3} имеем $d\lambda=0$ и,следовательно, $\lambda=const$. После отнесения конфигурации к семейству подвижных реперов R_0 имеем,в частности,систему уравнений (4).Последнее уравнение этой системы можно преобразовать с помощью остальных,приведя его к виду:

$$\rho_1\rho_1't=\left(\frac{2h}{\sin 2\alpha}\right)^2(\sin^2\varphi-\sin^2\alpha). \qquad (8)$$

Так как левая часть равенства (8) постоянна,то постоянна и правая, откуда следует,что постоянен угол 2φ между фокальными плоскостями конгруэнции общих перпендикуляров.Из третьего уравнения системы (4) следует,что постоянно и фокальное расстояние 2β этой конгруэнции.Отсюда следует,что конгруэнция $\{r\}$ -псевдосферическая.Так как $\lambda=\frac{1}{h_1-h_2}\cdot t\rho_1\rho_1'=const$,то постоянно $\rho_1\rho_2'=\rho_1'\rho_2$. Обратно,пусть у пары T' конгруэнция $\{r\}$ -псевдосферическая и постоянно произведение $\rho_1\rho_2'=\rho_1'\rho_2$. Система уравнений (2) определяет пары T' конгруэнций.Из первых двух уравнений следуют уравнения (4),последнее из которых имеет вид (8).Так как $\rho_1\rho_1't=\rho_1\rho_2'$,то правая часть (8) тоже постоянна.Из третьего уравнения системы (4) имеем постоянство отношения $2h:\sin 2\alpha$. Следовательно,из (8) следует постоянство 2α -угла между соответствующими прямыми.Из постоянства $2h:\sin 2\alpha$ и угла 2α вытекает постоянство расстояния между соответствующими прямыми пары T' конгруэнций.

Можно доказать,что рассматриваемые пары существуют с произволом двух функций одного аргумента.

Т е о р е м а 7. Для того,чтобы пары T конгруэнций,соответствующие прямые которых проходят через фокусы прямых конгруэнции общих перпендикуляров,были парами T' конгруэнций,необходимо и достаточно,чтобы либо соответствующие прямые лежали в фокальных плоскостях конгруэнции общих перпендикуляров,либо соответствующие прямые были параллельны нормалям фокальных поверхностей конгруэнции общих перпендикуляров.

Каждая из рассматриваемых пар T' конгруэнции существует с произволом четырех функций одного аргумента.

Библиографический список

I.Р е д о з у б о в а О.С. Основы метрической теории пар Т конгруэнций/МГПИ им.В.И.Ленина.М.,I980.Деп. в ВИНИТИ.№2993-80.

2.Ф и н и к о в С.П.Теория конгруэнций .М.-Л.,I950.

12 Зак. 1209

УДК 514.76

К ГЕОМЕТРИИ ОТОБРАЖЕНИЯ РИМАНОВЫХ МНОГООБРАЗИЙ ПОНИЖЕННОГО РАНГА

А.А.Рылов
(Московский государственный педагогический институт)

В теории гладких отображений дифференцируемых многообразий известны понятие ранга отображения, теорема о ранге (см., например, [2], с.66-67). В настоящей статье изучаются геометрические свойства гладких отображений римановых многообразий пониженного ранга; получены необходимые условия того, чтобы данное отображение пониженного ранга было конформным (в частности, гомотетическим) или эквиобъемным.

I. Пусть (M, g) и $(\bar M, \bar g)$ - два римановых многообразия с метрическими тензорами g и $\bar g$; $\dim M = n$, $\dim \bar M = m$. Структурные уравнения форм римановой связности на M в общем репере имеют вид:

$$\begin{cases} D\omega^I = \omega^J \wedge \omega^I_J, \quad D\omega^I_J = \omega^K_J \wedge \omega^I_K + R^I_{JKL}\,\omega^K \wedge \omega^L, \\ dg_{IJ} - g_{IK}\,\omega^K_J - g_{KJ}\,\omega^K_I = 0 \qquad (I, J, K, L = \overline{1,n}), \end{cases} \tag{I}$$

где $\{\omega^I\}$ - базис дифференциальных форм, двойственный реперу $\{\vec e_J\}$. Структурные уравнения форм римановой связности на $\bar M$ в общем репере записываются аналогично:

$$\begin{cases} D\bar\omega^A = \bar\omega^B \wedge \bar\omega^A_B, \quad D\bar\omega^A_B = \bar\omega^C_B \wedge \bar\omega^A_C + \bar R^A_{BCD}\,\bar\omega^C \wedge \bar\omega^D, \\ d\bar g_{AB} - \bar g_{AC}\,\bar\omega^C_B - \bar g_{CB}\,\bar\omega^C_A = 0 \qquad (A, B, C, D = \overline{1,m}), \end{cases} \tag{2}$$

где $\{\bar\omega^A\}$ - базис форм, двойственный реперам $\{\vec\varepsilon_B\}$.

Пусть $dV = \sqrt{\det\|g_{IJ}\|}\,\omega^1 \wedge \ldots \wedge \omega^n$ - элемент объема, построенный на векторах $\vec e_1, \ldots, \vec e_n$; и соответственно $d\bar V = \sqrt{\det\|\bar g_{AB}\|}\,\bar\omega^1 \wedge \ldots \wedge \bar\omega^m$ - элемент объема, построенный на векторах $\vec\varepsilon_1, \ldots, \vec\varepsilon_m$.

2. Пусть задано гладкое отображение римановых многообразий $f: (M, g) \to (\bar M, \bar g)$, дифференциальные уравнения которого имеют вид:

$$\bar\omega^A = h^A_J\,\omega^J. \tag{3}$$

Продолжая эту систему, получим:

$$dh^A_J - h^A_K\,\omega^K_J + h^B_J\,\bar\omega^A_B = h^A_{JL}\,\omega^L, \quad h^A_{JL} = h^A_{LJ}. \tag{4}$$

Величины h^A_J и h^A_{JL} являются относительными компонентами фундаментальных объектов первого и второго порядка, порожденных отображением f [1].

Отображение f индуцирует на многообразии (M, g) поле тензора g^* с компонентами $g^*_{IJ} = h^A_I h^B_J \bar g_{AB}$. Если $g^* = \varphi g$, то отображение f называется конформным (при $\varphi = const > 0$ - гомотетическим, при $\varphi = 1$ - изометрическим) [4]. Если $\det\|g^*_{IJ}\| = \det\|g_{IJ}\|$, то отображение f будем называть эквиобъемным.

Все дальнейшие рассмотрения имеют локальный характер (речь идет о некоторой области $\Omega \subset M$ и соответствующей ей области $f(\Omega) \subset \bar M$); индексы принимают значения: $i, j, k, l = \overline{1,r}$; $\alpha, \beta, \gamma = \overline{r+1,n}$; $a, b, c = \overline{r+1,m}$.

3. Пусть T_x и $T_{f(x)}$ - касательные пространства к многообразиям M и $\bar M$ в соответствующих точках $x \in \Omega$ и $f(x)$. Ранг дифференциала отображения $f_{*x}: T_x \to T_{f(x)}$ называется рангом отображения f в точке x. Тогда требование $r = rang\|h^A_J\| < \min(n, m)$ для всех точек области Ω выделяет класс отображений $f: (M, g) \to (\bar M, \bar g)$ пониженного ранга r. В каждой точке $x \in \Omega$ дифференциал f_{*x} имеет $(n-r)$-мерное ядро $\Delta_{n-r}(x) \subset T_x$, а в соответствующей точке $f(x)$ получаем r-мерный образ $\bar\Delta_r(f(x)) \subset T_{f(x)}$. Выберем подвижные реперы $R^x = (x, \vec e_i, \vec e_\alpha)$, $R^{f(x)} = (f(x), \vec\varepsilon_i, \vec\varepsilon_a)$ следующим образом: $\vec e_\alpha \in \Delta_{n-r}(x)$, $\vec e_i \perp \Delta_{n-r}(x)$, $\vec\varepsilon_i = f_*(\vec e_i) \in \bar\Delta_r(f(x))$, $\vec\varepsilon_a \perp \bar\Delta_r(f(x))$. Теперь компоненты h^A_J приведутся к виду:

$$h^j_i = \delta^j_i, \quad h^b_i = h^j_\alpha = h^b_\alpha = 0, \tag{5}$$

и дифференциальные уравнения (3) записываются следующим образом:

$$\bar\omega^i = \omega^i, \quad \bar\omega^a = 0. \tag{6}$$

Подстановка компонент (5) объекта h^A_J в систему уравнений (4) дает следующие соотношения:

$$\bar\omega^j_i = \omega^j_i + h^j_{ik}\,\omega^k + h^j_{i\alpha}\,\omega^\alpha, \tag{7}$$

$$\bar\omega^a_i = h^a_{ik}\,\omega^k, \tag{8}$$

$$\omega^j_\alpha = -h^j_{\alpha k}\,\omega^k - h^j_{\alpha\beta}\,\omega^\beta, \tag{9}$$

$$h^b_{\alpha k} = 0, \quad h^b_{\alpha\gamma} = 0. \tag{10}$$

Нетрудно видеть, что $\bar\omega^a = 0$, $\bar\omega^a_i = h^a_{ik}\,\bar\omega^k$ является системой дифференциальных уравнений образа $f(\Omega)$ как r-мерного подмногообразия риманова пространства $(\bar M, \bar g)$, причем на этом подмногообразии индуцирована метрика $\bar g$.

Система уравнений (9) представляет собой дифференциальные уравнения голономного распределения $Ker f_*$ элементов $\Delta_{n-r}(x)$ ядра дифференциала f_{*x}. Максимальные интегральные многообразия распределения $Ker f_*$ будем называть слоями отображения f.

В силу выбора реперов R^x и $R^{f(x)}$ имеем: $g_{i\alpha} = 0$, $\bar g_{ia} = 0$. Подстановка этих условий в структурные уравнения (I) и (2), в частности, дает следующие соотношения:

$$dg_{ij} - g_{ik}\,\omega^k_j - g_{kj}\,\omega^k_i = 0, \quad d\bar g_{ij} - \bar g_{ik}\,\bar\omega^k_j - \bar g_{kj}\,\bar\omega^k_i = 0,$$
$$\omega^\beta_i = -g^{\alpha\beta} g_{ik}\,\omega^k_\alpha \tag{11}$$

С учетом соотношений (9) система уравнений (II) примет вид:

$$\omega_i^\beta = \Lambda_{ij}^\beta \omega^j + \Lambda_{i\gamma}^\beta \omega^\gamma, \qquad (I2)$$

где $\Lambda_{ij}^\beta = g^{\alpha\beta} g_{i\ell} h_{\alpha j}^\ell$, $\quad \Lambda_{i\gamma}^\beta = g^{\alpha\beta} g_{i\ell} h_{\alpha\gamma}^\ell$.

Система (I2) представляет собой дифференциальные уравнения распределения $\operatorname{Ker} f_*^\perp$ элементов $\Delta^\perp(x)$, ортогональных слоям отображения f. Будем называть $\operatorname{Ker} f_*^\perp$ горизонтальным распределением, а векторы, лежащие в площадках, $\Delta^\perp(x)$-горизонтальными. Уравнения (I2) показывают, что горизонтальное распределение в общем случае неголономно.

4. Пусть $f:(M,g)\to(\bar M,\bar g)$ -конформное отображение пониженного ранга r. В согласованных реперах условие конформности имеет вид:

$$\bar g_{ij} = \varphi g_{ij}, \qquad \varphi = \varphi(x). \qquad (I3)$$

Конформное отображение f пониженного ранга сохраняет меру угла между двумя любыми горизонтальными векторами; изометрическое отображение f пониженного ранга (при $\varphi = 1$) будет сохранять также длину всякого горизонтального вектора. Эти факты непосредственно следуют из соответствующих определений [3, с.49,52].

Распределение Δ на многообразии (M,g) называется вполне геодезическим [5, с.I50], если его вторая фундаментальная форма обращается в нуль. Вторая фундаментальная форма омбилического распределения Δ [5, с.I5I] пропорциональна его метрической форме. Наконец, распределение Δ называется минимальным [5, с.I5I], если свертка его второй фундаментальной формы с компонентами метрического тензора дает нуль. Исходя из системы уравнений (I2) заключаем, что вторая фундаментальная форма θ горизонтального распределения $\operatorname{Ker} f_*^\perp$ действует по закону

$$\theta(\vec X,\vec Y) = \Lambda_{(ij)}^\alpha X^i Y^j \vec e_\alpha \qquad (I4)$$

для произвольных горизонтальных векторов $\vec X = X^i \vec e_i$ и $\vec Y = Y^j \vec e_j$. Пользуясь условиями (I2), соотношениями (I3) и (I4), можно доказать, что справедливы

Т е о р е м а 1. Если $f:(M,g)\to(\bar M,\bar g)$ -конформное отображение пониженного ранга, то горизонтальное распределение $\operatorname{Ker} f_*^\perp$ является омбилическим.

С л е д с т в и е. Если $f:(M,g)\to(\bar M,\bar g)$ -гомотетическое отображение пониженного ранга, то горизонтальное распределение $\operatorname{Ker} f_*^\perp$ является вполне геодезическим.

5. Пусть $f:(M,g)\to(\bar M,\bar g)$ -эквиобъемное отображение пониженного ранга r. Условие эквиобъемности в согласованных реперах принимает вид:

$$\det\|\bar g_{ij}\| = \det\|g_{ij}\|, \qquad (I5)$$

откуда следует, что эквиобъемное отображение пониженного ранга сохраняет элемент объема горизонтальной площадки, натянутой на векторы $\vec e_1,\dots,\vec e_r$. Исходя из условия (I5), с помощью соотношений (I2) и (I4) доказывается

Т е о р е м а 2. Если $f:(M,g)\to(\bar M,\bar g)$ -эквиобъемное отображение пониженного ранга, то горизонтальное распределение $\operatorname{Ker} f_*^\perp$ является минимальным.

Библиографический список

1. Л а п т е в Г.Ф. Инвариантная аналитическая теория дифференцируемых отображений//Тр.Междунар.конгр.математиков.Ницца,1970.С.84-85.
2. Н а р а с и м х а н Р. Анализ на действительных и комплексных многообразиях.М.:Мир,1971.
3. Э й з е н х а р т Л.П. Риманова геометрия.М.:ИЛ,1948.
4. Yano K., Ishihara S. Harmonic and relatively affine mappings // J. Dif. Geom. 1975. V.10. №4. P. 501-509.
5. Reinhart B.L. Differential geometry of foliations. Springer-Verlag. 1983.

УДК 514.75

ОБ ОДНОМ КЛАССЕ ВЫРОЖДЕННЫХ КОНГРУЭНЦИЙ, ПОРОЖДЕННЫХ ЛИНЕЙЧАТОЙ КВАДРИКОЙ И ПРЯМОЙ

Е.В.С к р ы д л о в а

(Калининградский государственный университет)

В трехмерном проективном пространстве P_3 исследуются вырожденные конгруэнции [1], образованные линейчатой квадрикой Q и прямой ℓ, в которых квадрика Q описывает однопараметрическое семейство, а прямая ℓ -прямолинейную конгруэнцию. Такие конгруэнции названы конгруэнциями $(Q\ell)_{1,2}$. Изучен класс конгруэнций $(Q\ell)_{1,2}$, характеризующийся двусторонним расслоением конгруэнции (ℓ) и ассоциированной с ней прямолинейной конгруэнции (ℓ').

Трехмерное проективное пространство P_3 отнесем к подвижному реперу $R=\{A_0,A_1,A_2,A_3\}$, в котором вершины A_0 и A_3 являются точками пересечения прямой ℓ с соответствующей ей линейчатой квадрикой Q, а вершины A_1 и A_2 совпадают с точками пересечения прямолинейных образующих квадрики Q, проходящих через A_0 и A_3. Прямую A_1A_2 назовем ℓ'. Относительно построенного репера квадрику Q и прямую ℓ можно задать соответственно уравнениями

$$x^0x^3 - x^1x^2 = 0, \qquad (I)$$

$$x^1 = 0, \quad x^2 = 0. \tag{2}$$

Так как семейство квадрик Q является однопараметрическим, а прямых ℓ – двупараметрическим (конгруэнцией), то

$$\operatorname{rang}\{\omega_0^3,\ \omega_1^3-\omega_0^2,\ \omega_2^3-\omega_0^1,\ \omega_1^1+\omega_2^2-\omega_0^0-\omega_3^3,\ \omega_1^2,\ \omega_2^1,\ \omega_3^2-\omega_1^0,\ \omega_3^1-\omega_2^0,\ \omega_3^0\}=1, \tag{3}$$

$$\operatorname{rang}\{\omega_0^1,\ \omega_0^2,\ \omega_3^1,\ \omega_3^2\}=2. \tag{4}$$

В соответствии с условиями (3),(4) будем считать, что $\omega_0^1\wedge\omega_0^2\neq 0$, $\omega_3^0\neq 0$, т.е. формы $\omega_0^i \overset{\text{def}}{=} \omega^i$ $(i,j,k=1,2)$ выберем в качестве базисных форм конгруэнции $(Q\ell)_{1,2}$.

Рассмотрим класс конгруэнций $(Q\ell)_{1,2}$, в котором пара прямолинейных конгруэнций (ℓ) и (ℓ') является двусторонне расслояемой. Такие конгруэнции будем называть конгруэнциями L. Условия двустороннего расслоения конгруэнций (ℓ) и (ℓ') имеют вид:

$$\begin{cases} \omega_3^k\wedge\omega_k^0=0, \quad \omega_0^k\wedge\omega_k^0-\omega_3^k\wedge\omega_k^3=0, \quad \omega_0^k\wedge\omega_k^3=0, \\ \omega_i^0\wedge\omega_0^j+\omega_i^3\wedge\omega_3^j=0, \quad \omega_1^0\wedge\omega_0^1+\omega_1^3\wedge\omega_3^1-\omega_2^0\wedge\omega_0^2-\omega_2^3\wedge\omega_3^2=0. \end{cases} \tag{5}$$

Здесь и в дальнейшем $i\neq j$ и суммирование по индексам i, j не производится. Разрешая условия (5) с учетом равенств (3),(4), получим при некоторой нормировке вершин репера R систему уравнений Пфаффа конгруэнций L:

$$\omega_i^3=\omega^j, \quad \omega_i^0=\omega_3^j, \tag{6}$$

$$\begin{cases} \omega_3^i=\alpha_i\omega^j, \quad \omega_0^3=\Gamma_0^3\,\omega_3^0, \quad \omega_i^j=\Gamma_i^j\,\omega_3^0, \quad \omega_3^0=\lambda\,(\omega^1-\omega^2), \\ \omega_1^1+\omega_2^2-\omega_0^0-\omega_3^3=\Gamma\,\omega_3^0, \quad \omega_1^1-\omega_2^2=a_k\,\omega^k \end{cases} \tag{7}$$

Замыкание уравнений (6) приводит к конечным соотношениям

$$\Gamma(\alpha_1-\alpha_2)=0, \quad \alpha_1\alpha_2\,\Gamma_0^3=1, \quad \Gamma_i^j=\alpha_j\Gamma_0^3-\tfrac{1}{2}\Gamma. \tag{8}$$

Из равенств (8) следует, что конгруэнции L распадаются на два класса: конгруэнции L_1, для которых $\Gamma=0$, и конгруэнции L_2, для которых $\Gamma\neq 0$.

Продолжая уравнения (7) при условии $\Gamma=0$ и нормируя вершины репера R так, что $\alpha_1\alpha_2=1$, получим систему уравнений Пфаффа конгруэнций L_1:

$$\begin{cases} \omega_i^3=\omega^j, \quad \omega_i^0=\omega_3^j, \quad \omega_0^3=\omega_3^0, \quad \omega_i^j=\alpha_j\,\omega_3^0, \\ \omega_3^i=\alpha_i\,\omega^j, \quad \omega_3^0=\lambda\,(\omega^1-\omega^2), \quad \omega_1^1+\omega_2^2=\omega_0^0=\omega_3^3=0, \\ \omega_1^1-\omega_2^2=a_k\,\omega^k, \quad d\alpha+\alpha\,(\omega_1^1-\omega_2^2)=0 \quad (\alpha_1\overset{\text{def}}{=}\alpha,\ \alpha_2=\tfrac{1}{\alpha}) \end{cases} \tag{9}$$

Конгруэнции L_1 существуют и определяются с произволом одной функ-

ции двух аргументов. Продолжение уравнений (7) при условии $\Gamma\neq 0$ и таком нормировании вершин репера R, что $\alpha_1=1$, позволяет получить систему уравнений Пфаффа конгруэнций L_2:

$$\begin{cases} \omega_i^3=\omega^j, \quad \omega_i^0=\omega^i, \quad \omega_3^i=\omega^j, \quad \omega_i^j=p\,\omega_3^0, \\ \omega_0^3=\omega_3^0, \quad \omega_3^0=\lambda\,(\omega^1-\omega^2), \quad \omega_1^1-\omega_2^2=0, \quad \omega_3^3-\omega_0^0=0, \\ \omega_1^1+\omega_2^2-\omega_0^0-\omega_3^3=2\,\omega_3^0-\omega_1^2-\omega_2^1. \end{cases} \tag{10}$$

Конгруэнции L_2 существуют и определяются с произволом двух функций одного аргумента.

Для конгруэнций L_1 и L_2 получены следующие результаты.

Т е о р е м а 1. Пары прямолинейных конгруэнций (A_0A_1) и (A_2A_3), а также (A_0A_2) и (A_1A_3), ассоциированные с конгруэнциями L_1, являются двусторонне расслояемыми. Для конгруэнций L_2 указанные расслоения имеют место лишь в подклассе, выделяемом условием $p=0$.

Т е о р е м а 2. Фокальные точки всех шести ребер репера R, описывающих прямолинейные конгруэнции, ассоциированные с конгруэнциями L_1 и L_2, гармонически разделяют соответствующие вершины репера R. Торсы прямолинейных конгруэнций (A_0A_1) и (A_2A_3), а также (A_0A_2) и (A_1A_3) попарно соответствуют. В конгруэнциях L_2 имеет место также соответствие торсов конгруэнций (ℓ) и (ℓ').

Т е о р е м а 3. Фокальные поверхности прямолинейных конгруэнций, описанных всеми шестью ребрами репера R, ассоциированных с конгруэнциями L_1, вырождаются в прямые линии, причем прямолинейные конгруэнции, описанные попарно скрещивающимися ребрами, имеют общие фокальные прямые. В конгруэнциях L_2 указанным свойством обладают лишь прямолинейные конгруэнции (ℓ) и (ℓ').

Введем следующие обозначения. Пусть $F_{\alpha\beta}^{(1)}$ и $F_{\alpha\beta}^{(2)}$ $(\alpha,\beta,\gamma,\delta=0,1,2,3;$ $\alpha<\beta$, $\gamma<\delta$) – фокусы ребра $A_\alpha A_\beta$ репера R, описывающего прямолинейную конгруэнцию $(A_\alpha A_\beta)$; $\ell_{\alpha\beta}^{(1)}$ и $\ell_{\alpha\beta}^{(2)}$ – прямые, описанные фокусами $F_{\alpha\beta}^{(1)}$ и $F_{\alpha\beta}^{(2)}$ соответственно. Тогда в силу теоремы 3 прямая $\ell_{\alpha\beta}^{(1)}$ совпадает с прямой $\ell_{\gamma\delta}^{(1)}$, если среди чисел $\alpha,\beta,\gamma,\delta$ нет равных. Рассмотрим конику $C_{\alpha\beta\gamma\delta}^{(1)}$, являющуюся линией пересечения квадрики Q с плоскостью $A_\alpha A_\beta F_{\gamma\delta}^{(1)}$ ($\alpha<\beta$, $\gamma<\delta$, числа $\alpha,\beta,\gamma,\delta$ образуют перестановку). Таким образом, получим двенадцать коник, каждая из которых описывает двупараметрическое семейство (конгруэнцию).

Т е о р е м а 4. Каждая коника $C_{\alpha\beta\gamma\delta}^{(1)}$, описывающая конгруэнцию, ассоциированную с конгруэнцией L_1, имеет два трехкратных фокуса, которые совпадают с точками пересечения этой коники с прямой $\ell_{\gamma\delta}^{(1)}$. При этом трехкратные фокусы каждой из коник $C_{\alpha\beta\gamma\delta}^{(1)}$ гармонически разделяют фокусы $F_{\alpha\beta}^{(1)}$ и $F_{\gamma\delta}^{(1)}$. В конгруэнциях L_2 аналогичным свойством обладают лишь четыре коники $C_{1203}^{(1)}$ и $C_{0312}^{(1)}$.

Библиографический список

1. М а л а х о в с к и й В.С. О вырожденных конгруэнциях пар фигур//Дифференциальная геометрия многообразий фигур:Сб.науч.тр./Калинингр.ун-т.Калининград,1973.Вып.3.С.41-49.

УДК 514.75

СВЯЗНОСТЬ В МНОГООБРАЗИИ ГИПЕРПЛОСКОСТЕЙ, ИНДУЦИРОВАННОМ ГИПЕРКОНГРУЭНЦИЕЙ

В.П.П а п е н к о

(Калининградское ВИУИВ)

Рассмотрено ($n-1$)-параметрическое невырожденное многообразие (гиперконгруэнция K_{n-1}) пар фигур (P,Q) ,состоящих из невырожденной гиперквадрики Q и неинцидентной ей точки P n-мерного проективного пространства P_n .При этом точка P описывает гиперповерхность S_{n-1} ,а гиперквадрика Q – ($n-1$)-параметрическое многообразие.

Отнесем многообразие K_{n-1} к реперу $R=\{A_0, A_i\}$ ($i,j,\ldots=\overline{1,n}$), у которого вершины A_i помещены в гиперплоскость L_{n-1} ,полярно-сопряженную точке P относительно гиперквадрики Q .Уравнение гиперквадрики Q и система уравнений Пфаффа гиперконгруэнции K_{n-1} записывается в виде $a_{ij}x^i x^j+2a_{0i}x^0x^i+(x^0)^2=0$ ($a_{ij}=a_{ji}$),

$$\Delta a_{i'j'}=a_{i'j'\alpha}\Delta x^\alpha, \qquad \Delta x^n=b_\alpha \Delta x^\alpha, \qquad \omega_i^0=\Lambda_{i\alpha}\Delta x^\alpha, \tag{1}$$

где $i',j',\ldots=\overline{0,n}$; $\alpha,\beta,\ldots=\overline{1,n-1}$ и $\Delta a_{i'j'}$, Δx^i являются структурными формами соответственно пространства гиперквадрик Q и точечного проективного пространства P_n [1].Базисные формы Δx^α удовлетворяют уравнениям

$$d\Delta x^\alpha = \Delta x^\beta \wedge \theta_\beta^\alpha, \tag{2}$$

где $\theta_\beta^\alpha=\omega_\beta^\alpha-\delta_\beta^\alpha(\omega_0^0+x^k\omega_k^0)-x^\alpha\omega_\beta^0+b_\beta(\omega_n^\alpha-x^\alpha\omega_n^0)$,а вторичные формы ω_0^i , ω_j^i , ω_0^0 –уравнениям

$$\begin{cases} d\omega_0^i=\omega_0^j\wedge(\omega_j^i-\delta_j^i\,\omega_0^0), \\ d\omega_j^i=\omega_j^k\wedge\omega_k^i+\Delta x^\alpha\wedge(\Lambda_{j\alpha}\omega_0^i), \\ d\omega_0^0=\Delta x^\alpha\wedge(-\Lambda_{k\alpha}\omega_0^k). \end{cases} \tag{3}$$

Из уравнений (2),(3) заключаем,что с гиперконгруэнцией K_{n-1} ассоциируется главное расслоение $G_\tau(S_{n-1})$,для которого базой является гиперповерхность S_{n-1} ,а типовым слоем – подгруппа стационарности G_τ ($\tau=n^2+n$) гиперплоскости L_{n-1}. Это расслоение является сужением расслоения $G_\tau(P_n)$[1] на базу S_{n-1} ,поэтому естественно ожидать сохранение многих результатов.

В главном расслоении $G_\tau(S_{n-1})$ зададим фундаментально-групповую связность по Г.Ф.Лаптеву,используя для этого формы

$$\tilde\omega_0^i=\omega_0^i-\Gamma_\alpha^i\Delta x^\alpha, \qquad \tilde\omega_j^i=\omega_j^i-\Gamma_{j\alpha}^i\Delta x^\alpha, \qquad \tilde\omega_0^0=\omega_0^0-\Gamma_\alpha\Delta x^\alpha,$$

где $\Gamma=\{\Gamma_\alpha^i,\Gamma_{j\alpha}^i,\Gamma_\alpha\}$–набор некоторых функций.Внешние дифференциалы форм $\tilde\omega_0^i$, $\tilde\omega^i$, $\tilde\omega_0^0$ удовлетворяют уравнениям

$$d\tilde\omega_0^i=\tilde\omega_0^0\wedge\tilde\omega_0^i+\tilde\omega_0^j\wedge\tilde\omega_j^i+\Delta x^\alpha\wedge(\nabla\Gamma_\alpha^i-\Gamma_\beta^i b_\alpha\omega_n^\beta+\Gamma_\alpha\omega_0^i-\Gamma_{j\alpha}^i\omega_0^j)+$$
$$+(\Gamma_\gamma^i x^\gamma\Lambda_{\alpha\beta}+b_\alpha\Lambda_{n\beta}\Gamma_\gamma^i x^\gamma-\Gamma_\alpha\Gamma_\beta^i-\Gamma_\alpha^j\Gamma_{j\beta}^i-x^k\Lambda_{k\alpha}\Gamma_\beta^i)\Delta x^\alpha\wedge\Delta x^\beta,$$

$$d\tilde\omega_j^i=\tilde\omega_j^k\wedge\tilde\omega_k^i+\Delta x^\alpha\wedge(\nabla\Gamma_{j\alpha}^i-\Gamma_{j\beta}^i b_\alpha\omega_n^\beta+\Lambda_{j\alpha}\omega_0^i)+[\Gamma_{j\gamma}^i x^\gamma(\Lambda_{\alpha\beta}+b_\alpha\Lambda_{n\beta})-$$
$$-\Gamma_{j\alpha}^k\Gamma_{k\beta}^i-\Gamma_{j\beta}^i x^k\Lambda_{k\alpha}]\Delta x^\alpha\wedge\Delta x^\beta,$$

$$d\tilde\omega_0^0=\Delta x^\alpha\wedge(\nabla\Gamma_\alpha-\Gamma_\beta b_\alpha\omega_n^\beta-\Lambda_{k\alpha}\omega_0^k)+[\Gamma_\alpha x^k\Lambda_{k\beta}+$$
$$+\Gamma_\gamma x^\gamma(\Lambda_{\alpha\beta}+b_\alpha\Lambda_{n\beta})]\Delta x^\alpha\wedge\Delta x^\beta.$$

Отсюда в силу теоремы Картана–Лаптева связность в ассоциированном расслоении $G_\tau(S_{n-1})$ задается полем объекта связности Γ на базе S_{n-1}, компоненты которого должны удовлетворять уравнениям

$$\nabla\Gamma_\alpha^i-\Gamma_\beta^i b_\alpha\omega_n^\beta+\Gamma_\alpha\omega_0^i-\Gamma_{j\alpha}^i\omega_0^j=\Gamma_{\alpha\beta}^i\Delta x^\beta,$$
$$\nabla\Gamma_{j\alpha}^i-\Gamma_{j\beta}^i b_\alpha\omega_n^\beta+\Lambda_{j\alpha}\omega_0^i=\Gamma_{j\alpha\beta}^i\Delta x^\beta,$$
$$\nabla\Gamma_\alpha-\Gamma_\beta b_\alpha\omega_n^\beta-\Lambda_{k\alpha}\omega_0^k=\Gamma_{\alpha\beta}\Delta x^\beta.$$

Т е о р е м а 1. Присоединение к каждой паре фигур (P,Q) точки B, не принадлежащей гиперплоскости L_{n-1} ,позволяет задать связность в ассоциированном расслоении $G_\tau(S_{n-1})$.

С л е д с т в и е. Связность в ассоциированном расслоении $G_\tau(S_{n-1})$ возникает естественным образом,если в качестве оснащающей точки B взять точку P .

Т е о р е м а 2. Точка B переносится параллельно в связности Γ тогда и только тогда,когда она неподвижна.

Т е о р е м а 3. Подобъект линейной связности $\Gamma_{j\alpha}^i$ объекта связности Γ характеризуется проекцией на гиперплоскость L_{n-1} смежной с ней гиперплоскости $L_{n-1}+dL_{n-1}$ из центра B .

Таким образом,изменение размерности многообразия пар фигур (P,Q) не повлияло на свойства фундаментально-групповой связности ассоциированного расслоения,типовым слоем которого является подгруппа стационарности гиперплоскости L_{n-1} .

Библиографический список

I. Ш а п е н к о В.П. Связность в расслоении, ассоциированном с гиперкомплексом пар фигур (P,Q) // Дифференциальная геометрия многообразий фигур: Межвуз.темат.сб.науч.тр./Калинингр.ун-т. Калининград, 1982. Вып. 13. С. 107–111.

УДК 514.76

φ-СОПРЯЖЕННЫЕ АЛГЕБРЫ ДЕФОРМАЦИИ

М.А. Ч е ш к о в а

(Алтайский государственный университет)

Пусть M_n – n-мерное C^∞-многообразие, $\mathcal{F}(M_n)$ – R-алгебра дифференцируемых на M_n функций, $T^r_s(M_n)$ – $\mathcal{F}$ – модуль дифференцируемых тензорных полей на M_n типа (r,s), ∇ – аффинная связность. Задание тензорного поля $\mathcal{D}\in T^1_2(M_n)$ определяет алгебраическую операцию $X\circ Y=\mathcal{D}(X,Y)$, $X,\ Y\in T^1_0(M_n)$, относительно которой $T^1_0(M_n)$ – алгебра деформации [1]. Обозначается $\mathcal{U}(M_n,\mathcal{D})$ [2].

Пусть $\varphi\in T^1_1(M_n)$, $\det\|\varphi_x\|\neq 0$, $\forall x\in M_n$.

О п р е д е л е н и е 1. Алгебра $\mathcal{U}(M_n,\overset{*}{\mathcal{D}})$ называется φ-сопряженной алгебре $\mathcal{U}(M_n,\mathcal{D})$, если

$$\mathcal{D}^*(X,Y)=\varphi^{-1}\mathcal{D}(X,\varphi Y). \qquad (1)$$

Имеет место диаграмма

$$\begin{tikzcd} \nabla \arrow[r, "\mathcal{D}"] \arrow[d, "A"'] & \bar\nabla \arrow[d, "\bar A"] \\ \overset{*}{\nabla} \arrow[r, "\overset{*}{\mathcal{D}}"] & \overset{*}{\bar\nabla} \end{tikzcd},$$

где $\bar\nabla_X Y=\nabla_X Y+\mathcal{D}(X,Y)$, $\overset{*}{\nabla}_X Y=\varphi^{-1}\nabla_X\varphi Y$ – связность, φ-сопряженная [3] связности ∇, $\overset{*}{\bar\nabla}$ – φ-сопряженная связности $\bar\nabla$.

Т е о р е м а 1. Следующие утверждения эквивалентны: 1) алгебра $\mathcal{U}(M_n,\overset{*}{\mathcal{D}})$ коммутативна; 2) $(\bar d\varphi)(X,Y)=(d\varphi)(X,Y)$; 3) $\overset{*}{\bar S}=\overset{*}{S}$,

$$2)\ (\bar d\varphi)(X,Y)=(d\varphi)(X,Y), \qquad (2)$$

$$3)\ \overset{*}{\bar S}=\overset{*}{S},$$

$$4)\ \{(\bar\nabla_X\varphi)(Y)-(\bar\nabla_Y\varphi)(X)\}-\{(\nabla_X\varphi)(Y)-(\nabla_Y\varphi)(X)\}=$$
$$=\mathcal{D}(X,Y)-\mathcal{D}(Y,X),$$

где $\overset{*}{S}$, $\overset{*}{\bar S}$ – кручения связностей $\overset{*}{\nabla}$, $\overset{*}{\bar\nabla}$.

Д о к а з а т е л ь с т в о.

$$(\bar\nabla_X\varphi)(Y)=\bar\nabla_X\varphi Y-\varphi\bar\nabla_X Y=(\nabla_X\varphi)(Y)+\varphi(\mathcal{D}^*(X,Y)-\mathcal{D}(X,Y)),$$

$$(\bar d\varphi)(X,Y)=\bar\nabla_X\varphi Y-\bar\nabla_Y\varphi X-\varphi[X,Y]=(d\varphi)(X,Y)+\varphi(\mathcal{D}^*(X,Y)-\mathcal{D}(Y,X)),$$

$$\overset{*}{S}(X,Y)=\overset{*}{\nabla}_X Y-\overset{*}{\nabla}_Y X-[X,Y]=\varphi^{-1}(d\varphi)(X,Y), \qquad (3)$$

$$\overset{*}{\bar S}(X,Y)=\varphi^{-1}(\bar d\varphi)(X,Y),$$

$$A(X,Y)=\overset{*}{\nabla}_X Y-\nabla_X Y=\varphi^{-1}(\nabla_X\varphi)(Y),$$

$$\bar A(X,Y)=\overset{*}{\bar\nabla}_X Y-\bar\nabla_X Y=\varphi^{-1}(\bar\nabla_X\varphi)(Y).$$

Из (3) следует (2).

С л е д с т в и е 1. Следующие утверждения эквивалентны: 1) φ – параллельно в связности ∇; 2) $\nabla=\nabla^*$; 3) $(\bar\nabla_X\varphi)(Y)=\varphi(\mathcal{D}^*-\mathcal{D})(X,Y)$.

Т е о р е м а 2. Следующие утверждения эквивалентны:

1) $\overset{*}{\mathcal{D}}(X,Y)-\mathcal{D}^*(Y,X)=\mathcal{D}(X,Y)-\mathcal{D}(Y,X)$;

2) $(\bar\nabla_X\varphi)(Y)-(\bar\nabla_Y\varphi)(X)=(\nabla_X\varphi)(Y)-(\nabla_X\varphi)(X)$;

3) $(\bar d\varphi)(X,Y)-\varphi\bar S(X,Y)=(d\varphi)(X,Y)-\varphi S(X,Y)$;

4) $\overset{*}{\bar S}-\overset{*}{S}=\bar S-S$,

где S, S^*, $\bar S$, $\overset{*}{\bar S}$ кручения связностей ∇, $\overset{*}{\nabla}$, $\bar\nabla$, $\overset{*}{\bar\nabla}$.

Д о к а з а т е л ь с т в о следует из (2) и соотношений

$$(\nabla_X\varphi)(Y)-(\nabla_Y\varphi)(X)=(d\varphi)(X,Y)-\varphi S(X,Y),$$

$$(\bar\nabla_X\varphi)(Y)-(\bar\nabla_Y\varphi)(X)=(\bar d\varphi)(X,Y)-\varphi\bar S(X,Y).$$

Поле $\varphi\in T^1_1(M_n)$ называется полем Кодацци [4], если $d\varphi=0$.

Из теорем 1,2 вытекают два следствия.

С л е д с т в и е 2. Если алгебра $\mathcal{U}(M_n,\mathcal{D}^*)$ коммутативна, то следующие утверждения эквивалентны: 1) φ – поле Кодацци в связности ∇, 2) φ – поле Кодацци в связности $\bar\nabla$.

С л е д с т в и е 3. Следующие утверждения эквивалентны: 1) φ – поле Кодацци в связности ∇ (в связности $\bar\nabla$), 2) $S^*=0$ ($\overset{*}{\bar S}=0$).

О п р е д е л е н и е 2. Будем говорить, что пара связностей $\{\overset{1}{\nabla},\overset{2}{\nabla}\}$ деформируется в пару $\{\overset{1}{\bar\nabla},\overset{2}{\bar\nabla}\}$, если существует поле $\mathcal{D}\in T^1_2(M_n)$ такое, что $\overset{1}{\bar\nabla}-\overset{1}{\nabla}=\overset{2}{\bar\nabla}-\overset{2}{\nabla}$.

Т е о р е м а 3. Следующие утверждения эквивалентны: 1) пара $\{\nabla,\overset{*}{\nabla}\}$ деформируется в пару $\{\bar\nabla,\overset{*}{\bar\nabla}\}$; 2) пара $\{\nabla,\bar\nabla\}$ деформируется в пару $\{\overset{*}{\nabla},\overset{*}{\bar\nabla}\}$, 3) $\mathcal{D}^*=\mathcal{D}$, 4) $\bar A=A$.

Библиографический список

1. Waisman I. Sur quelques formules du calcul du Ricci global // Comment. math. helv. 1966. v. 41. N2. p. 73–87.
2. Nicolescu L., Martin M. Sur l'algebre associel a un champ tensoriel du type (1.2) // Acta Math. Acad. Sci Hungarical. 1978. v. 31. p. 27–35.

3.В е д е р н и к о в С.В. Геометрия пространства пар//ВИНИТИ. М.,1980. 39с. Деп.в ВИНИТИ. 25.2.80,№1454-80.

4.Б у р г и н ь о н Ж.П. Формулы Вейценбека в размерности 4 // Четырехмерная риманова геометрия: Семинар Артура Бессе.1978/79.М., 1985.С.261-279.

УДК 514.76

ОБЩАЯ ФУНДАМЕНТАЛЬНО-ГРУППОВАЯ СВЯЗНОСТЬ С ТОЧКИ ЗРЕНИЯ РАССЛОЕНИЙ

Ю.И.Ш е в ч е н к о

(Калининградский государственный университет)

Дана интерпретация общей фундаментально-групповой связности Г.Ф. Лаптева с помощью его способа задания связностей в главных расслоениях,распространенного на обобщенные расслоения,характеризующиеся непустыми пересечениями базы и слоев.

Основная работа Лаптева [1] написана без явного использования теории расслоенных пространств и связностей в них,поэтому давно возникла проблема интерпретации понятий и результатов работы с точки зрения расслоений.Эта проблема частично разрешена в книге [2],однако там практически не затронуто пространство общей фундаментально-групповой связности,обобщающее однородное пространство,пространства аффинной и проективной связности,главное и однородное расслоения со связностями.Такое пространство определяется структурными уравнениями:

$$\begin{cases} d\omega^{s_0} = R^{s_0}_{p_0q_0}\,\omega^{p_0}\wedge\omega^{q_0} + 2R^{s_0}_{p_0q_1}\,\omega^{p_0}\wedge\omega^{q_1} + R^{s_0}_{p_1q_1}\,\omega^{p_1}\wedge\omega^{q_1}, \\ d\omega^{s_1} = \frac{1}{2}C^{s_1}_{p_1q_1}\,\omega^{p_1}\wedge\omega^{q_1} + C^{s_1}_{p_1q_2}\,\omega^{p_1}\wedge\omega^{q_2} + \\ \qquad + R^{s_1}_{p_0q_0}\,\omega^{p_0}\wedge\omega^{q_0} + 2R^{s_1}_{p_0q_1}\,\omega^{p_0}\wedge\omega^{q_1} + R^{s_1}_{p_1q_1}\,\omega^{p_1}\wedge\omega^{q_1}, \\ d\omega^{s_2} = \frac{1}{2}C^{s_2}_{p_2q_2}\,\omega^{p_2}\wedge\omega^{q_2} + C^{s_2}_{p_1q_2}\,\omega^{p_1}\wedge\omega^{q_2} + \frac{1}{2}C^{s_2}_{p_1q_1}\,\omega^{p_1}\wedge\omega^{q_1} + \\ \qquad + R^{s_2}_{p_0q_0}\,\omega^{p_0}\wedge\omega^{q_0} + 2R^{s_2}_{p_0q_1}\,\omega^{p_0}\wedge\omega^{q_1} + R^{s_2}_{p_1q_1}\,\omega^{p_1}\wedge\omega^{q_1}, \end{cases} \tag{I}$$

где индексы принимают следующие значения: $p_0, q_0, s_0, \ldots = \overline{-\mathcal{R}+1, 0}$; $p_1, q_1, s_1, \ldots = \overline{1,\tau}$; $p_2, q_2, s_2, \ldots = \overline{\tau+1, r}$.Здесь $C^{s_{12}}_{p_{12}q_{12}}$ -структурные константы группы Ли G ,содержащей подгруппу H ,поэтому

$$C^{s_1}_{p_2q_2} = 0, \tag{2}$$

причем,например,индекс s_{12} принимает значения индексов s_1 и s_2.

В общем случае система уравнений (I) задает расслоения не вполне удовлетворительно,что отражают следующие факты: I) координаты точки пространства фундаментально -групповой связности расчленяются Лаптевым [3] на главные,побочные и локально-групповые с помощью вполне интегрируемых систем уравнений лишь в случае усеченного кручения,когда $R^{s_1}_{p_0q_0} = 0$ (аналогичное разделение можно произвести при $R^{s_0}_{p_1q_1} = 0$); 2) в работе [4] Лаптев называет тензором кручения-кривизны лишь подобъект $R^{s_{12}}_{p_{01}q_{01}}$ объекта $R^{s_{012}}_{p_{01}q_{01}}$, видимо,потому,что условия вырождения пространства со связностью в однородное пространство [1 ,с.320] имеют вид $R^{s_{12}}_{p_{01}q_{01}} = 0$; 3) Лаптев предполагает,что размерность пространства геометрических элементов больше числа главных форм связности,вследствие чего появляются побочные формы [1,с.305]; 4) в последующих работах Лаптева не употребляется общая связность, а используются только связности в главном расслоении и проективная (см.,напр.,[5]); 5) побочные параметры интерпретируются В.С.Малаховским [6,с.195] как абсолютные инварианты опорной фигуры;если инвариантов нет,то получается рассмотренный Лаптевым случай,в котором,однако,присутствуют побочные параметры.

Проанализируем пример пространства геометрических элементов с достаточно общей фундаментально-групповой связностью.Рассмотрим поверхность в пространстве аффинной связности с присоединенным комплексом индуцированных внутренних геометрий.Покажем,что в этом случае можно обойтись связностями в главных расслоениях.Сделаем два предположения: а) не будем ограничивать внутреннюю геометрию поверхности индуцированной аффинной связностью,как это делал Лаптев [1,с.322]; б) зафиксируем произвольную нормаль поверхности,потому что задание множества всех нормалей фактически ничего не определяет.При этом возникают две возможности: I) преобразовать все вторичные формы,согласно способу Лаптева,задания связности в главном расслоении и,охватывая объект связности с помощью поля нормалей,получить главное расслоение со связностью,типовым слоем которого служит подгруппа стационарности центрированной касательной плоскости; 2) адаптируя подвижной репер полю нормалей,прийти к главному расслоению со связностью,типовым слоем которого является прямое произведение двух двойственных линейных групп,действующих в центрированных касательной плоскости и нормали.

Решать проблему интерпретации связности начал сам Лаптев [5], предложив способ задания связности в главном расслоении.Структурные уравнения главного расслоения со связностью можно получить из системы уравнений (I) тремя путями.Во-первых,отбрасывая побочные формы связности ω^{s_0} ,имеем уравнения связности Картана [2]:

$$d\omega^{s_1} = \omega^{p_1}\wedge\left(\tfrac{1}{2}C^{s_1}_{p_1q_1}\,\omega^{q_1} + C^{s_1}_{p_1q_2}\,\omega^{q_2} + R^{s_1}_{p_1q_1}\,\omega^{q_1}\right),$$

$$d\omega^{s_2}=\frac{1}{2}C^{s_2}_{p_2q_2}\omega^{p_2}\wedge\omega^{q_2}+C^{s_2}_{p_1q_2}\omega^{p_1}\wedge\omega^{q_2}+\left(\frac{1}{2}C^{s_2}_{p_1q_1}+R^{s_2}_{p_1q_1}\right)\omega^{p_1}\wedge\omega^{q_1}.$$

Если наложить условия $C^{s_2}_{p_1q_2}=0$,то они будут структурными уравнениями связности главного расслоения.Во-вторых,удаляя главные формы связности ω^{s_1} ,найдем $d\omega^{s_0}=R^{s_0}_{p_0q_0}\omega^{p_0}\wedge\omega^{q_0}$, $d\omega^{s_2}=\frac{1}{2}C^{s_2}_{p_2q_2}\omega^{p_2}\wedge\omega^{q_2}+R^{s_2}_{p_0q_0}\omega^{p_0}\wedge\omega^{q_0}$, что соответствует параллелизуемости базы.В-третьих,опуская вторичные формы связности ω^{s_2} при условиях $R^{s_0}_{p_1q_1}=0$, $R^{s_1}_{p_{01}q_1}=0$,получим

$$d\omega^{s_0}=\omega^{p_0}\wedge(R^{s_0}_{p_0q_0}\omega^{q_0}+2R^{s_0}_{p_0q_1}\omega^{q_1}),\quad d\omega^{s_1}=\frac{1}{2}C^{s_1}_{p_1q_1}\omega^{p_1}\wedge\omega^{q_1}+R^{s_1}_{p_1q_0}\omega^{p_0}\wedge\omega^{q_0};$$

где нужно потребовать существование одной из двух групп тождеств $C^{s_2}_{p_1q_1}=0$ или $C^{s_1}_{p_1q_2}=0$,достаточных для выполнения соответствующих тождеств Якоби.

Следующий шаг сделал Ю.Г.Лумисте [7],исследовав связность в однородном расслоении,соответствующую частному случаю общей фундаментально-групповой связности: $R^{s_0}_{p_1q_1}=0$, $R^{s_{12}}_{p_{01}q_1}=0$. Отметим,что однородное расслоение с сечением и соответствующее главное расслоение позволяют дать интерпретацию связности Картана. Двухъярусные расслоения Н.М. Остиану [8] позволили проинтерпретировать [9] еще один частный случай $R^{s_0}_{p_1q_1}=0$, $C^{s_2}_{p_1q_2}=0$. Дальнейшее продвижение в этом направлении с помощью известных расслоений не представляется возможным,поэтому предлагается новый подход.

Предварительно изложим в удобной нам форме способ Лаптева [2,с.63, 83],[5] задания связности в главном расслоении $G(V)$ со структурными уравнениями

$$d\theta^i=\theta^j\wedge\theta^i_j\ ,\quad d\omega^\alpha=\frac{1}{2}C^\alpha_{\beta\gamma}\omega^\beta\wedge\omega^\gamma+\theta^i\wedge\omega^\alpha_i, \tag{3}$$

где индексы принимают пересекающиеся множества значений $i,j=\overline{-\mathcal{R}+1,\tau}$, $\alpha,\beta,\gamma=\overline{1,r}$ ($\tau<r$). Базой главного расслоения $G(V)$ является $(\mathcal{R}+\tau)$-мерное дифференцируемое многообразие V ,а типовым слоем служит r-членная группа Ли G со структурными константами $C^\alpha_{\beta\gamma}$.Рассмотрим преобразование слоевых форм ω^α с помощью базисных форм θ^i: $\tilde\omega^\alpha=\omega^\alpha-\Gamma^\alpha_i\theta^i$,где Γ^α_i -некоторые функции.Найдем внешние дифференциалы преобразованных форм

$$d\tilde\omega^\alpha=\frac{1}{2}C^\alpha_{\beta\gamma}\tilde\omega^\beta\wedge\tilde\omega^\gamma+\theta^i\wedge(d\Gamma^\alpha_i-\Gamma^\alpha_j\theta^j_i+\Gamma^\beta_i\vartheta^\alpha_\beta+\omega^\alpha_i)-\frac{1}{2}C^\alpha_{\beta\gamma}\Gamma^\beta_i\Gamma^\gamma_j\theta^i\wedge\theta^j, \tag{4}$$

где $\vartheta^\alpha_\beta=C^\alpha_{\beta\gamma}\omega^\gamma$. Согласно теореме Картана-Лаптева компоненты объекта связности Γ^α_i должны удовлетворять уравнениям

$$d\Gamma^\alpha_i-\Gamma^\alpha_j\theta^j_i+\Gamma^\beta_i\vartheta^\alpha_\beta+\omega^\alpha_i=\Gamma^\alpha_{ij}\theta^j.$$

Тогда уравнения (4) принимают вид

$$d\tilde\omega^\alpha=\frac{1}{2}C^\alpha_{\beta\gamma}\tilde\omega^\beta\wedge\tilde\omega^\gamma+R^\alpha_{ij}\theta^i\wedge\theta^j, \tag{5}$$

где компоненты объекта кривизны выражаются по формулам $R^\alpha_{ij}=\Gamma^\alpha_{[ij]}-\frac{1}{2}C^\alpha_{\beta\gamma}\Gamma^\beta_{[i}\Gamma^\gamma_{j]}$,причем квадратные скобки обозначают альтернирование.

Обобщим понятие главного расслоенного пространства.Произведем разбиение значений каждого из индексов i,α на две серии следующим образом: $i=(s_0,s_1)$, $\alpha=(s_1,s_2)$.Запишем уравнения (3) подробнее

$$d\theta^{s_0}=\theta^{p_0}\wedge\theta^{s_0}_{p_0}+\theta^{p_1}\wedge\theta^{s_0}_{p_1}, \tag{6}$$

$$d\theta^{s_1}=\theta^{p_0}\wedge\theta^{s_1}_{p_0}+\theta^{p_1}\wedge\theta^{s_1}_{p_1}, \tag{7}$$

$$d\omega^{s_1}=\frac{1}{2}C^{s_1}_{p_1q_1}\omega^{p_1}\wedge\omega^{q_1}+C^{s_1}_{p_1q_2}\omega^{p_1}\wedge\omega^{q_2}+\frac{1}{2}C^{s_1}_{p_2q_2}\omega^{p_2}\wedge\omega^{q_2}+\theta^{p_0}\wedge\omega^{s_1}_{p_0}+\theta^{p_1}\wedge\omega^{s_1}_{p_1}, \tag{8}$$

$$d\omega^{s_2}=\frac{1}{2}C^{s_2}_{p_{12}q_{12}}\omega^{p_{12}}\wedge\omega^{q_{12}}+\theta^{p_{01}}\wedge\omega^{s_2}_{p_{01}}.$$

Предположим,что база V и слои G главного расслоения $G(V)$ имеют непустые пересечения,причем $\dim V\cap G=\tau$. Аналитически выразим это тождествами $\theta^{s_1}=\omega^{s_1}$.Сравнивая системы уравнений (7) и (8), в качестве достаточных условий их совпадения получим соотношения (2) и следующие: $\theta^{s_1}_{p_0}=\omega^{s_1}_{p_0}$, $\theta^{s_1}_{p_1}=\omega^{s_1}_{p_1}+\frac{1}{2}C^{s_1}_{p_1q_1}\omega^{q_1}+C^{s_1}_{p_1q_2}\omega^{q_2}$.

Таким образом,структурные уравнения обобщенного главного расслоения $G\backslash V(V)$ имеют вид

$$\left\{\begin{aligned}
d\theta^{s_0}&=\theta^{p_0}\wedge\theta^{s_0}_{p_0}+\omega^{p_1}\wedge\theta^{s_0}_{p_1},\\
d\omega^{s_1}&=\frac{1}{2}C^{s_1}_{p_1q_1}\omega^{p_1}\wedge\omega^{q_1}+C^{s_1}_{p_1q_2}\omega^{p_1}\wedge\omega^{q_2}+\theta^{p_0}\wedge\omega^{s_1}_{p_0}+\omega^{p_1}\wedge\omega^{s_1}_{p_1},\\
d\omega^{s_2}&=\frac{1}{2}C^{s_2}_{p_2q_2}\omega^{p_2}\wedge\omega^{q_2}+C^{s_2}_{p_1q_2}\omega^{p_1}\wedge\omega^{q_2}+\frac{1}{2}C^{s_2}_{p_1q_1}\omega^{p_1}\wedge\omega^{q_1}+\theta^{p_0}\wedge\omega^{s_2}_{p_0}+\omega^{p_1}\wedge\omega^{s_2}_{p_1}.
\end{aligned}\right. \tag{9}$$

Применим способ Лаптева задания связности к обобщенному главному расслоению $G\backslash V(V)$. Формы связности $\tilde\omega^\alpha$ запишем в виде

$$\tilde\omega^{s_1}=\Lambda^{s_1}_{p_1}\omega^{p_1}-\Gamma^{s_1}_{p_0}\theta^{p_0}\ ,\quad \tilde\omega^{s_2}=\omega^{s_2}-\Gamma^{s_2}_{p_0}\theta^{p_0}-\Gamma^{s_2}_{p_1}\omega^{p_1}, \tag{10}$$

где $\Lambda^{s_1}_{p_1}=\delta^{s_1}_{p_1}-\Gamma^{s_1}_{p_1}$. В общем случае матрица $\|\Lambda^{s_1}_{p_1}\|$ имеет обратную матрицу $\|V^{q_1}_{s_1}\|$. Для ее элементов выполняются соотношения $V^{q_1}_{s_1}\Lambda^{s_1}_{p_1}=\delta^{q_1}_{p_1}$,с учетом которых из первой системы равенств (10) найдем

$$\omega^{p_1}=V^{p_1}_{q_1}\tilde\omega^{q_1}+V^{p_1}_{q_0}\theta^{q_0}\qquad (V^{p_1}_{q_0}=V^{p_1}_{s_1}\Gamma^{s_1}_{q_0}).$$

Теперь структурные уравнения (5) можно преобразовать:

$$d\tilde\omega^{s_{12}}=\frac{1}{2}C^{s_{12}}_{p_{12}q_{12}}\tilde\omega^{p_{12}}\wedge\tilde\omega^{q_{12}}+\tilde R^{s_{12}}_{p_0q_0}\theta^{p_0}\wedge\theta^{q_0}+2\tilde R^{s_{12}}_{p_0q_1}\theta^{p_0}\wedge\tilde\omega^{q_1}+\tilde R^{s_{12}}_{p_1q_1}\tilde\omega^{p_1}\wedge\tilde\omega^{q_1}, \tag{11}$$

где $$\tilde R^{s_{12}}_{p_0q_0}=R^{s_{12}}_{p_0q_0}-2V^{p_1}_{[p_0}R^{s_{12}}_{q_0]p_1}+R^{s_{12}}_{z_1t_1}V^{z_1}_{[p_0}V^{t_1}_{q_0]},$$

$$\tilde{R}^{s_{12}}_{p_0 q_1} = R^{s_{12}}_{p_0 p_1} V^{p_1}_{q_1} + R^{s_{12}}_{z_1 t_1} V^{z_1}_{p_0} V^{t_1}_{q_1}, \quad \tilde{R}^{s_{12}}_{p_1 q_1} = R^{s_{12}}_{z_1 t_1} V^{z_1}_{[p_1} V^{t_1}_{q_1]} .$$

Выберем формы $\theta^{s_0}_{p_{01}}$ в виде

$$\theta^{s_0}_{p_0} = R^{s_0}_{p_0 q_0} \theta^{q_0} + 2R^{s_0}_{p_0 q_1} \tilde{\omega}^{q_1}, \quad \theta^{s_0}_{p_1} = R^{s_0}_{p_1 q_0} \theta^{q_0} + R^{s_0}_{p_1 q_1} \tilde{\omega}^{q_1}, \tag{I2}$$

тогда уравнения (6) примут вид

$$d\theta^{s_0} = \tilde{R}^{s_0}_{p_0 q_0} \theta^{p_0} \wedge \theta^{q_0} + 2\tilde{R}^{s_0}_{p_0 q_1} \theta^{p_0} \wedge \tilde{\omega}^{q_1} + \tilde{R}^{s_0}_{p_1 q_1} \tilde{\omega}^{p_1} \wedge \tilde{\omega}^{q_1}; \tag{I3}$$

где

$$\tilde{R}^{s_0}_{p_0 q_0} = R^{s_0}_{[p_0 q_0]} - R^{s_0}_{s_1 [p_0} V^{s_1}_{q_0]}, \quad \tilde{R}^{s_0}_{p_0 q_1} = R^{s_0}_{p_0 q_1} - R^{s_0}_{s_1 [p_0} V^{s_1}_{q_1]}, \quad \tilde{R}^{s_0}_{p_1 q_1} = -R^{s_0}_{s_1 [p_1} V^{s_1}_{q_1]} .$$

Уравнения (II),(I3) с точностью до обозначений составляют систему (I). Многообразие V при условиях (I2) имеет специальное строение. Деривационные формулы подвижного векторного репера $e_{p_{01}}$ касательного пространства $T_{\mathcal{R}+z}$ размерности $\mathcal{R}+z$ к многообразию V в фиксированной точке имеют вид $\delta e_{p_0} = \bar{\theta}^{s_1}_{p_0} e_{s_1}$, $\delta e_{p_1} = \bar{\theta}^{s_1}_{p_1} e_{s_1}$,
где $\bar{\theta}^{s_1}_{p_0} = \omega^{s_1}_{p_0} \big|_{\theta^{s_{01}}=0}$, $\bar{\theta}^{s_1}_{p_1} = (\omega^{s_1}_{p_1} + C^{s_1}_{p_1 q_2} \omega^{q_2}) \big|_{\theta^{s_{01}}=0}$.
Значит, касательное пространство имеет z-мерное подпространство $L_z \subset T_{\mathcal{R}+z}$, а фактор-пространство $T_{\mathcal{R}+z} | L_z$ натянуто на $\mathcal{R}$ инвариантных векторов. Итак, доказана

Т е о р е м а. Обобщенное главное расслоение $G\backslash V\,(V)$ со специальной базой V, в котором задана связность по Г.Ф.Лаптеву (как в главном расслоении), является пространством общей фундаментально-групповой связности.

З а м е ч а н и я. 1) Если положить $\theta^{s_0}_{p_1} = 0$, $\omega^{s_{12}}_{p_1} = 0$, то система (9) дает структурные уравнения пространства элементов Лаптева [1,с.317],[7,с.441],[9]. 2) Понятие обобщенного расслоения (не обязательно главного) соединяет два крайних случая: а) расслоение с заданным сечением, в котором базу отождествляют с ее образом, поэтому говорят о приклеивании расслоения к базе (см., например, [2 ,с.110]); б) касательное расслоение над аффинным пространством, когда слои отождествляются с базой. 3) Способ Лаптева задания связностей в главных расслоениях уже применялся для конкретных обобщенных расслоений [10 ,с.69] ,[11,с.37],[12].

Библиографический список

1.Л а п т е в Г.Ф. Дифференциальная геометрия погруженных многообразий//Тр.Моск.матем.о-ва/ГИТТЛ.М.,1953.Т.2.С.275-382.

2.Е в т у ш и к Л.Е.,Лумисте Ю.Г.,Остиану Н.М.,Широков А.П.Дифференциально-геометрические структуры на многообразиях//Проблемы

геометрии/ВИНИТИ .М.,1979.Т.9.248с.

3.Л а п т е в Г.Ф. О многообразиях геометрических элементов с дифференциальной связностью//Докл.АН СССР.1950.Т.73.№1.С.17-20.

4.Л а п т е в Г.Ф. О фундаментально-групповой связности многообразия однородных пространств// Успехи матем.наук.1951.Т.6.Вып.1. С.164-165.

5.Л а п т е в Г.Ф. Многообразия,погруженные в обобщенные пространства//Тр. IV Всес.матем.съезда,1961.Л.:Наука,1964.Т.2.С.226-233.

6.М а л а х о в с к и й В.С. Дифференциальная геометрия многообразий фигур и пар фигур в однородном пространстве//Тр.геометр.семинара / ВИНИТИ.М.,1969.Т.2.С.179-206.

7.Л у м и с т е Ю.Г. Связности в однородных расслоениях//Матем. сб.1966.Т.69.С.434-469.

8.О с т и а н у Н.М. Ступенчато-расслоенные пространства//Тр. геометр.семинара/ВИНИТИ.М.,1974.Т.5.С.259-309.

9.Ш е в ч е н к о Ю.И. О фундаментально-групповой связности// Дифференциальная геометрия многообразий фигур:Межвуз.темат.сб.науч. тр./Калинингр.ун-т.Калининград,1985.Вып.16.С.104-109.

10.Л а п т е в Г.Ф.,Остиану Н.М. Распределения m-мерных линейных элементов в пространстве проективной связности.I // Тр.геом. семинара/ВИНИТИ.М.,1971.Т.3.С.49-93.

11.С т о л я р о в А.В. Двойственные линейные связности на оснащенных многообразиях пространства проективной связности//Проблемы геометрии/ВИНИТИ.М.,1977.Т.8.С.25-46.

12.Ш е в ч е н к о Ю.И. Об оснащении Картана//Дифференциальная геометрия многообразий фигур/Калинингр. ун-т.Калининград,1983.Вып. 14.С.107-110.

УДК 514.75

ОБ ОДНОМ КЛАССЕ КОНГРУЭНЦИЙ ЛИНЕЙЧАТЫХ КВАДРИК С ФОКАЛЬНЫМИ ПОВЕРХНОСТЯМИ R

С.В.Ш м е л е в а
(Калининградское ВИУИВ)

В трехмерном проективном пространстве рассматривается конгруэнция $\mathcal{L}$ линейчатых невырожденных квадрик Q, имеющая четверку невырождающихся фокальных поверхностей (A_α) ($\alpha=0,1,2,3$), описанных вершинами автополярного тетраэдра третьего рода квадрики Q. Доказано, что каждая из фокальных поверхностей (A_α)-сдвоенная, и исследован подкласс $\mathcal{L}_0$ конгруэнций $\mathcal{L}$, в котором поверхности (A_α)

14 Зак. 1209

являются поверхностями R [1 ,с.218].Конгруэнции (A_1A_2) и (A_0A_3) , ассоциированные с конгруэнцией $\mathfrak{B}_0$,являются линейными с общими директрисами.

1.Отнесем конгруэнцию K линейчатых невырожденных квадрик к реперу $\{A_0, A_1, A_2, A_3\}$,где A_0 и A_3 –фокальные точки квадрики $Q \in K$, а A_i ($i,\hat{i},k=1,2$)– точки пересечения прямолинейных образующих квадрики Q ,проходящих через A_0 и A_3 .В этом репере квадрика Q и конгруэнции K определяются соответственно уравнениями [2 ,с.44]:

$$x^1x^2 - x^0x^3 = 0, \tag{I.1}$$

$$\begin{cases} \omega_0^3 = 0, \ \ \omega_3^0 = 0, \ \ \omega_i^{\hat{i}} = a_{ik}^{\hat{i}}\,\omega^k, \ \ \omega_i^3 - \omega^{\hat{i}} = c_{ik}\,\omega^k, \\ \omega_i^0 - \omega_3^{\hat{i}} = \lambda_{ik}\,\omega^k, \ \ \omega_3^i = b_k^i\,\omega^k, \ \ \Omega = h_k\,\omega^k, \end{cases} \tag{I.2}$$

где

$$\omega^i \overset{def}{=} \omega_0^i, \quad \Omega \overset{def}{=} \omega_0^0 - \omega_1^1 - \omega_2^2 + \omega_3^3, \tag{I.3}$$

$$c_{12} = c_{21}, \quad b_1^1\lambda_{12} - b_2^2\lambda_{21} + b_1^2\lambda_{22} - b_2^1\lambda_{11}, \tag{I.4}$$

$$b_1^1 b_2^2 - b_2^1 b_1^2 \neq 0, \quad (b_i^{\hat{i}} + \lambda_{ii})(1 + c_{i\hat{i}}) - (b_{\hat{i}}^{\hat{i}} + \lambda_{i\hat{i}})\,c_{ii} \neq 0 \tag{I.5}$$

Здесь и в дальнейшем $i \neq \hat{i}$ и по индексам i и $\hat{i}$ суммирование не производится.

Назовем поверхности (A_1) и (A_2) ассоциированными с парой фокальных поверхностей (A_0) и (A_3) .Так как конгруэнция линейчатых квадрик имеет в общем случае восемь фокальных поверхностей,то с ней ассоциируется 28 пар поверхностей.Однако,если потребовать,чтобы ассоциированные поверхности хотя бы одной пары были фокальными,то конгруэнция квадрик обладает только четырьмя сдвоенными фокальными поверхностями, из которых можно образовать лишь две взаимно ассоциированные пары поверхностей,т.к.фокальные точки каждой пары не лежат на одной прямолинейной образующей квадрики.

О п р е д е л е н и е I. Конгруэнцией $\mathfrak{B}$ называется конгруэнция K линейчатых невырожденных квадрик,присоединенные поверхности (A_1) и (A_2) которой являются фокальными.

Т е о р е м а 1. Конгруэнции $\mathfrak{B}$ существуют и определяются с произволом трех функций двух аргументов.Фокальные поверхности (A_α) ($\alpha=0,1,2,3$) конгруэнции $\mathfrak{B}$ являются сдвоенными.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Так как поверхности (A_1) и (A_2) фокальные,то

$$a_{11}^2 = a_{12}^2 = a_{21}^1 = a_{22}^1 = 0. \tag{I.6}$$

Учитывая (I.5) в (I.2),убеждаемся,что общее решение полученной системы уравнений Пфаффа зависит от трех функций двух аргументов.

Обозначим

$$c = c_{11}c_{22} - c_{12}^2, \quad \lambda = \lambda_{11}\lambda_{22} - \lambda_{12}\lambda_{21}. \tag{I.7}$$

Условия двукратности фокальных точек A_0 и A_3 (см.(7) из[1]) выполнены

$$c\,(c_{i\hat{i}}\,a_{\hat{i}\hat{i}}^i - c_{\hat{i}\hat{i}}\,a_{\hat{i}i}^i) = 0, \quad \lambda\,(\lambda_{i\hat{i}}\,a_{ii}^{\hat{i}} - \lambda_{ii}\,a_{i\hat{i}}^{\hat{i}}) = 0. \tag{I.8}$$

Следовательно,фокальные поверхности (A_0) и (A_3) –сдвоенные. В силу равноправия пар поверхностей (A_0), (A_3) и (A_1),(A_2) конгруэнции $\mathfrak{B}$, фокальные поверхности (A_1) и (A_2) также являются сдвоенными,а значит конгруэнция $\mathfrak{B}$ имеет только четыре различные фокальные поверхности.Теорема доказана.

Учитывая (I.6) в уравнениях (4) из [2] ,получим уравнения ассоциированных квадрик Q_i конгруэнции $\mathfrak{B}$:

$$h_i\,x^i x^{\hat{i}} + \lambda_{ki}\,x^k x^3 + c_{ki}\,x^k x^0 = 0. \tag{I.9}$$

2. О п р е д е л е н и е 2. Конгруэнцией $\mathfrak{B}_0$ называется конгруэнция $\mathfrak{B}$,обладающая следующими свойствами: 1)сети линий на поверхностях (A_α) ,огибаемые прямолинейными образующими квадрики Q соответствуют и являются сетями R ;2)фокальные точки A_1, A_2 полярно сопряжены относительно ассоциированных квадрик Q_1 и Q_2 .

Т е о р е м а 2. Существует однопараметрическое семейство проективно неэквивалентных конгруэнций $\mathfrak{B}_0$.

Д о к а з а т е л ь с т в о.Из соответствия сетей,огибаемых прямолинейными образующими A_0A_i и A_3A_i на поверхностях (A_α) , следует,что они определяются одним и тем же уравнением $\omega^1\omega^2 = 0$.Следовательно,

$$1 + c_{12} = 0, \quad b_{\hat{i}}^{\hat{i}} + \lambda_{ii} = 0. \tag{2.1}$$

Так как прямолинейные конгруэнции (A_0A_1) и (A_0A_2) являются конгруэнциями W ,то

$$\lambda_{i\hat{i}} = b_i^{\hat{i}}\,c_{\hat{i}\hat{i}} \tag{2.2}$$

Из (I.9) следует,что полярная сопряженность точек A_1 и A_2 относительно квадрик Q_1 и Q_2 характеризуется соотношениями:

$$h_1 = 0, \quad h_2 = 0. \tag{2.3}$$

В силу невырожденности поверхности (A_3) можно так пронормировать вершины репера,чтобы

$$b_1^2 = b_2^1 = 1. \tag{2.4}$$

Геометрически такая нормировка характеризуется совмещением единичных точек ребер A_0A_3 , A_1A_2 с фокусами лучей прямолинейных конгруэнций,описанных этими ребрами.

Обозначая $c = c_{11}$ и учитывая (2.1) – (2.4),(I.6) в (I.2),приводим систему уравнений Пфаффа конгруэнции $\mathfrak{B}_0$ к виду:

$$\begin{cases} \omega_0^3 = \omega_3^0 = \omega_i^{\hat{i}} = \omega_0^0 = \omega_1^1 = \omega_2^2 = \omega_3^3 = 0, & \omega_i^3 = c\omega^{\hat{i}}, \\ \omega_i^0 = \omega_i^3, \quad \omega_3^i = \omega^{\hat{i}}, \quad dc = 0, \end{cases} \tag{2.5}$$

причем из (I.5) и из того, что конгруэнция $\mathcal{L}_0$ -это двупараметрическое семейство квадрик, следует

$$c(c^2-1) \neq 0. \tag{2.6}$$

Система (2.5) - вполне интегрируема и определяет однопараметрическое семейство проективно неэквивалентных конгруэнций $\mathcal{L}_0$. Обозначим:

$$B_0 = A_1 + A_2, \quad B_1 = A_1 - A_2, \quad B_2 = A_0 + A_3, \quad B_3 = A_0 - A_3, \tag{2.7}$$

$$\theta^1 = \omega^1 + \omega^2, \quad \theta^2 = \omega^2 - \omega^1 \tag{2.8}$$

Точки B_α являются фокусами лучей A_1A_2, A_0A_3 прямолинейных конгруэнций (A_1A_2) и (A_0A_3) соответственно, а уравнение $\theta^1\theta^2=0$ определяет торсы этих конгруэнций.

Т е о р е м а 3. Прямолинейные конгруэнции (A_1A_2) и (A_0A_3), ассоциированные с конгруэнцией $\mathcal{L}_0$, являются линейными с общими директрисами B_0B_2 и B_1B_3.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Дифференцируя (2.7) с использованием (2.5), находим

$$dB_0 = c\theta^1 B_2, \quad dB_1 = c\theta^2 B_3, \quad dB_2 = \theta^1 B_0, \quad dB_3 = -\theta^2 B_1. \tag{2.9}$$

Следовательно, прямые B_0B_2 и B_1B_3, пересекающие лучи A_1A_2 и A_0A_3, одинаковы для всех лучей прямолинейных конгруэнций (A_1A_2) и (A_0A_3).

3. С квадрикой $Q \in \mathcal{L}_0$ ассоциируются четыре коники H_α, являющиеся сечениями квадрики Q плоскостями $(B_\alpha A_0 A_3)$ (для $\alpha=0,\hat{1}$) и плоскостями $(B_\alpha A_1 A_2)$ (для $\alpha=2,3$). Коники H_0, H_1, H_2, H_3 определяются соответственно уравнениями:

$$\begin{cases} (x^1)^2 - x^0x^3 = 0, & x^1 - x^2 = 0, & (x^1)^2 + x^0x^3 = 0, & x^1 + x^2 = 0, \\ (x^0)^2 - x^1x^2 = 0, & x^0 - x^3 = 0, & (x^0)^2 + x^1x^2 = 0, & x^0 + x^3 = 0. \end{cases} \tag{3.I}$$

Т е о р е м а 4. Точки пересечения с квадрикой Q прямых A_0A_3, $B_\alpha B_2$, $B_\alpha B_3$ (для $\alpha=0,\hat{1}$), прямых A_1A_2, $B_\alpha B_0$, $B_\alpha B_1$ (для $\alpha=2,3$) являются фокальными точками H_α. Фокальные семейства конгруэнции (H_α) являются кратными и соответствуют торсам прямолинейных конгруэнций (A_1A_2) и (A_0A_3).

Д о к а з а т е л ь с т в о. Рассмотрим, например, конику H_2 (для H_0, H_1, H_3 -рассуждения аналогичны). Фокальные точки коники H_2 и фокальные семейства конгруэнции (H_2) определяются системой уравнений:

$$\begin{cases} (x^0)^2 - x^1x^2 = 0, \quad x^0 - x^3 = 0, \quad \theta^2(x^1 - x^2) = 0, \\ x^0(\theta^1(x^1+x^2) - 2c(x^1\omega^1 + x^2\omega^2)) = 0, \end{cases} \tag{3.2}$$

откуда следует, что фокальному семейству $\theta^2=0$ соответствуют фокальные точки $A_1, A_2, B_2 \pm i B_1$, а фокальному семейству $\theta^1=0$ соответствуют фокальные точки $B_2 \pm B_0$.

Библиографический список

I. Ф и н и к о в С.П. Теория конгруэнций /ГИТТЛ.М.-Л.1950.

2. М а л а х о в с к а я С.В. Конгруэнции линейчатых квадрик с кратной фокальной поверхностью//Дифференциальная геометрия многообразий фигур: Межвуз.темат.сб.научн.тр./Калинингр.ун-т.Калининград, 1981.Вып.I2.С.44-47.

УДК 514.75

ОБ ОДНОМ СПЕЦИАЛЬНОМ ВИДЕ КОНГРУЭНЦИЙ ПАР КОНИК В A_3

Е.А. Щ е р б а к
(Калининградский государственный университет)

В трехмерном аффинном пространстве рассматриваются специальные виды конгруэнций пар коник $\{F_1, F_2\}$, где коника F_1 лежит на инвариантной цилиндрической поверхности Φ, а коника F_2 проходит через центр коники F_1 и имеет центр, лежащий на конике F_1. Плоскости коник F_1 и F_2 не параллельны. Назовем такие конгруэнции конгруэнциями M.

Исследования проводятся в частично- канонизированном репере $R=\{A,\bar{e}_\alpha\}$ $(\alpha=\hat{1},2,3)$, начало A которого совмещено с центром коники F_1, концы E_i векторов $\bar{e}_i$ $(i=\hat{1},2)$ расположены на конике F_1 так, что векторы $\bar{e}_1$ и $\bar{e}_2$ сопряжены относительно F_1, причем конец E_1 вектора $\bar{e}_1$ помещен в центр коники F_2. Вектор $\bar{e}_3$ параллелен образующей цилиндрической поверхности Φ.

Уравнения коник F_1, F_2 и цилиндрической поверхности Φ в выбранном репере имеют соответственно вид:

$$F_1: \ (x^1)^2 + (x^2)^2 - 1 = 0, \quad x^3 = 0, \tag{I}$$

$$F_2: \ (x^1)^2 + 2ax^1x^3 + b(x^3)^2 - 2x^1 - 2ax^3 = 0, \quad x^2 + cx^3 = 0, \tag{2}$$

$$\Phi: \ (x^1)^2 + (x^2)^2 - 1 = 0. \tag{3}$$

Из условия инвариантности цилиндрической поверхности Φ имеем:

$$\omega^1 = \omega^2 = \omega_1^1 = \omega_2^2 = \omega_3^1 = \omega_3^2 = 0, \quad \omega_2^1 + \omega_1^2 = 0. \tag{4}$$

Система уравнений Пфаффа конгруэнции M состоит из уравнений (4) и следующих уравнений:

$$\begin{cases} \omega_1^2 = \Gamma_1^{2i}\Omega_i, \quad \omega^3 = \Gamma^{3i}\Omega_i, \quad da - a\omega_3^3 = \Gamma_a^i\Omega_i, \\ db - 2b\omega_3^3 = \Gamma_b^i\Omega_i, \quad dc - c\omega_3^3 = \Gamma_3^i\Omega_i, \end{cases} \tag{5}$$

где главные формы $\Omega_i = \omega^3_i$ приняты за независимые формы конгруэнции M. Анализируя системы уравнений (4) и (5), убеждаемся, что конгруэнции M существуют и определяются с произволом пяти функций двух аргументов. Координаты фокальных точек коники F_2 конгруэнции (F_2) находятся из уравнений (2) и уравнения:

$$[-a(x^1)^2 - (c\Gamma^{21}_1 + \Gamma^1_a + b)x^1x^3 + \tfrac{1}{2}\Gamma^1_b(x^3)^2 + ax^1 - ((a-1)c\Gamma^{21}_1 + b\Gamma^{31} + \Gamma^1_a)x^3 +$$

$$+a\Gamma^{31}]\cdot[-\Gamma^{22}_1 x^1 + (c^2 + \Gamma^2_2)x^3 - c\Gamma^{32}] - [(-c\Gamma^{22}_1 + ac + \Gamma^2_a)x^1x^3 + \qquad (6)$$

$$+(bc + \tfrac{1}{2}\Gamma^2_b)(x^3)^2 - a\Gamma^{32}x^1 - ((a-1)c\Gamma^{23}_1 + ac + b\Gamma^{32} + \Gamma^2_a)x^3 + a\Gamma^{32}] \times$$

$$\times[-(\Gamma^{21}_1 + c)x^1 + \Gamma^1_c x^3 - c\Gamma^{31}] = 0.$$

Очевидно, что точка A является фокальной точкой коники F_2 конгруэнции (F_2).

Обозначим через L вторую точку пересечения коники F_2 со своим диаметром $A\bar{e}_1$.

Т е о р е м а 1. Точка L тогда и только тогда является фокальной точкой коники F_2 конгруэнции (F_2), когда либо $A\bar{e}_3$ есть касательная к конике F_2 в точке A, либо когда формы ω^2_1 и $(\omega^3 + 2\Omega_1)$ – линейно зависимые.

Необходимость. Пусть точка L (2,0,0) является фокальной точкой коники F_2 конгруэнции (F_2). Подставляя координаты точки L в уравнение (6), получаем

$$a(\Gamma^{22}_1(2 + \Gamma^{31}) - \Gamma^{32}\Gamma^{21}_1) = 0. \qquad (7)$$

Из (7) следует: 1) $a = 0$, т.е. векторы $\bar{e}_1$ и $\bar{e}_3$ сопряжены относительно коники F_2, а, следовательно, $A\bar{e}_3$ является касательной к конике в точке A; 2) $\Gamma^{22}_1(2 + \Gamma^{31}) - \Gamma^{32}\Gamma^{21}_1 = 0$. (8)

Условие (8) есть условие линейной зависимости форм ω^2_1 и $(\omega^3 + 2\Omega_1)$.

Достаточность. 1) Пусть $A\bar{e}_3$ касается F_2 в точке A, тогда $a = 0$, следовательно, и $c = 0$. При этих условиях уравнение (6) принимает вид:

$$(bx^1x^3 + \tfrac{1}{2}\Gamma^1_b(x^3)^2 + \Gamma^{31}bx^3)\Gamma^{22}_1 x^1 - (\tfrac{1}{2}\Gamma^2_b(x^3)^2 - b\Gamma^{32}x^3)\Gamma^{21}_1 x^1 = 0. \qquad (9)$$

Подставляя координаты точки L (2,0,0) в уравнение (9), убеждаемся в том, что точка L – фокальная точка коники F_2 конгруэнции (F_2).
2) Пусть формы ω^2_1 и $(\omega^3 + 2\Omega_1)$ – линейно зависимы, тогда $\omega^2_1 \wedge (\omega^3 + 2\Omega_1) = 0$, т.е. выполняется условие (8). Учитывая его в (6) и подставляя координаты точки L, убеждаемся, что она является фокальной точкой коники F_2 конгруэнции (F_2).

С л е д с т в и е. Если точка L является характеристической точкой плоскости $A\bar{e}_1\bar{e}_2$ конгруэнции $(A\bar{e}_1\bar{e}_2)$, то она является и фокальной точкой коники F_2 конгруэнции (F_2).

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть точка L – характеристическая точка плоскости $A\bar{e}_1\bar{e}_2$, тогда $\Gamma^{31} = -2$, $\Gamma^{32} = 0$. Имеем $\omega^3 + 2\Omega_1 = 0$, что и доказывает утверждение.

О п р е д е л е н и е. Конгруэнцией M_1 будем называть такую конгруэнцию M, для которой $A\bar{e}_3$ является касательной к конике F_2 в точке A.

Завершим канонизацию репера следующим образом: конец E_3 вектора $\bar{e}_3$ расположим на касательной к конике F_2, параллельной вектору $\bar{e}_1$. Уравнения коники F_2 имеют вид

$$(x^1)^2 + (x^3)^2 - 2x^1 = 0, \quad x^2 = 0. \qquad (10)$$

Система уравнений Пфаффа конгруэнции M_1 состоит из уравнений (4) и следующих уравнененй:

$$\omega^2_1 = \Gamma^{2i}_1\Omega_i, \quad \omega^3 = \Gamma^{3i}\Omega_i, \quad \omega^3_3 = \Gamma^{3i}_3\Omega_i. \qquad (11)$$

Анализируя системы уравнений (4), (11), убеждаемся, что конгруэнции M_1 существуют и определяются с произволом трех функций двух аргументов. Координаты фокальных точек коники F_2 конгруэнции (F_2) находятся из уравнений (10) и уравнения

$$x^1x^3(x^1\Gamma^{22}_1 - \Gamma^{32}\Gamma^{21}_1 + \Gamma^{31}\Gamma^{22}_1) = 0. \qquad (12)$$

Т е о р е м а 2. Точка A является строенной фокальной точкой коники F_2 конгруэнции (F_2).

Д о к а з а т е л ь с т в о. Из уравнения (12) следует, что:
1) $x^3 = 0$, т.е. точки A и L являются фокальными точками коники F_2;
2) $x^1 = 0$, т.е. точка A является сдвоенной фокальной точкой коники F_2, т.к. $A\bar{e}_3$ – касается коники F_2 в точке A. Таким образом, точка A является строенной фокальной точкой коники F_2 конгруэнции (F_2).

Т е о р е м а 3. Фокальные точки коники F_2 конгруэнции (F_2), отличные от точек A и L, лежат на прямой ℓ, параллельной вектору $\bar{e}_3$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Из уравнения (12) следует, что фокальные точки коники F_2 лежат на прямой ℓ:

$$x^1\Gamma^{22}_1 - \Gamma^{32}\Gamma^{21}_1 + \Gamma^{31}\Gamma^{22}_1 = 0, \quad x^2 = 0, \qquad (13)$$

которая параллельна вектору $\bar{e}_3$.

Т е о р е м а 4. Точка A тогда и только тогда является пятикратной фокальной точкой коники F_2 конгруэнции (F_2), когда формы ω_1^2 и ω^3 – линейно зависимы.

Доказательство. Из уравнения (I2) следует, что точка A является пятикратной фокальной точкой коники F_2 конгруэнции (F_2) тогда и только тогда, когда $\Gamma_1^{21}\Gamma^{32} - \Gamma_1^{22}\Gamma^{31} = 0$, т.е. когда формы ω_1^2 и ω^3 линейно зависимы.

Теорема 5. Точка L тогда и только тогда является строенной фокальной точкой коники F_2 конгруэнции (F_2), когда формы ω_1^2 и $(\omega^3+2\Omega_1)$–линейно зависимы.

Доказательство. Из теоремы 3 следует, что L является строенной фокальной точкой коники F_2 тогда и только тогда, когда прямая ℓ касается коники F_2 в точке L, т.е. когда

$$\Gamma_1^{22}(\Gamma^{31}+2) - \Gamma^{32}\Gamma_1^{21} = 0. \tag{I4}$$

Условие (I4) и означает линейную зависимость форм ω_1^2 и $(\omega^3+2\Omega_1)$.

Следствие. Если точка L является характеристической точкой плоскости $A\bar{e}_1\bar{e}_2$ конгруэнции $(A\bar{e}_1\bar{e}_2)$, то точка L является строенной фокальной точкой коники F_2 конгруэнции (F_2).

Доказательство аналогично доказательству следствия из теоремы I.

Теорема 6. Точки N_1, N_2 пересечения коники F_2 с диаметром $E_1\bar{e}_3$ тогда и только тогда являются фокальными точками коники F_2 конгруэнции (F_2), когда формы ω_1^2 и $(\omega^3+\Omega_1)$ –линейно зависимы.

Доказательство. Из уравнения (I2) следует, что точки $N_1(I,0,I)$ и $N_2(I,0,-I)$ тогда и только тогда являются фокальными точками коники F_2 конгруэнции (F_2), когда $\Gamma_1^{22}(\Gamma^{31}+1) - \Gamma^{32}\Gamma_1^{21} = 0$, а это и есть условие линейной зависимости форм ω_1^2 и $(\omega^3+\Omega_1)$.

Следствие. Если точка E_1 является характеристической точкой плоскости $A\bar{e}_1\bar{e}_2$ конгруэнции $(A\bar{e}_1\bar{e}_2)$, то N_1 и N_2 –фокальные точки коники F_2 конгруэнции (F_2).

Доказательство. Пусть точка E_1 –характеристическая точка плоскости $A\bar{e}_1\bar{e}_2$, тогда $\Gamma^{31}=-1$, $\Gamma^{32}=0$. Учитывая эти соотношения в уравнении (I2), получим

$$x^1x^3(x^1\Gamma_1^{22} - \Gamma_1^{22}) = 0. \tag{I5}$$

Подставляя координаты точек N_1 и N_2 в (I5), убеждаемся в справедливости утверждения.

Теорема 7. Прямая ℓ тогда и только тогда проходит через характеристическую точку $K(-\Gamma^{31}; -\Gamma^{32}; 0)$ плоскости $A\bar{e}_1\bar{e}_2$ конгруэнции $(A\bar{e}_1\bar{e}_2)$, когда либо точка K лежит на прямой $A\bar{e}_1$, либо на индикатрисе вектора $\bar{e}_1$ касательная вдоль линии $\Omega_2=0$ параллельна вектору $\bar{e}_3$.

Доказательство. Из уравнений (I3) следует, что прямая ℓ проходит через точку K тогда и только тогда, когда $\Gamma^{32}\Gamma_1^{21}=0$. Условие $\Gamma^{32}=0$ означает, что характеристическая точка K плоскости $A\bar{e}_1\bar{e}_2$ конгруэнции $(A\bar{e}_1\bar{e}_2)$ лежит на прямой $A\bar{e}_1$. Условие $\Gamma_1^{21}=0$ означает, что $(d\bar{e}_1)_{\Omega_2=0}$ параллелен вектору $\bar{e}_3$, т.к.

$$d\bar{e}_1 = (\Gamma_1^{21}\bar{e}_1 + \bar{e}_3)\Omega_1 + \Gamma_1^{22}\bar{e}_2\Omega_2.$$

УДК 514.75

ОБ ОДНОМ КЛАССЕ КОНГРУЭНЦИЙ КВАДРИК С ВЫРОЖДАЮЩЕЙСЯ ПОВЕРХНОСТЬЮ ЦЕНТРОВ

Е.П.Юрова
(Калининградский государственный университет)

В трехмерном аффинном пространстве исследуется специальный класс конгруэнций L центральных квадрик с вырождающейся в линию поверхностью центров.

Отнесем конгруэнцию L к реперу $R=\{A,\bar{e}_\alpha\}(\alpha,\beta=1,2,3)$, начало A которого совмещено с центром квадрики Q, вектор $\bar{e}_1$ направлен по касательной к линии (A), конец E_3 вектора $\bar{e}_3$ расположен в фокальной точке квадрики Q, вектор $\bar{e}_2$ сопряжен векторам $\bar{e}_1$ и $\bar{e}_3$ относительно Q, причем концы E_i векторов $\bar{e}_i$ $(i,j,k=1,2)$ расположены на квадрике Q. Уравнение квадрики Q и система уравнений Пфаффа конгруэнции L в выбранном репере принимают соответственно вид

$$F \equiv (x^1)^2 + (x^2)^2 + (x^3)^2 - 1 = 0, \tag{I}$$

$$\begin{cases} \omega^2=0, \quad \omega^3=0, \quad \omega_3^3=0, \quad \omega^1=\alpha\,\omega_1, \quad \omega_1^2=\beta\,\omega_1, \\ \omega_2^1+\omega_1^2 = \lambda^k\omega_k, \quad \omega_i^k = e_i^k\omega_k, \quad \omega_3^i+\omega_i = b^i\omega_i + b\,\omega_j, \end{cases} \tag{2}$$

где $\alpha\neq 0$, т.к. из рассмотрения исключается случай вырождения в точку поверхности центров (A) и главные формы $\omega_i=\omega_i^3$ приняты за независимые формы конгруэнции L.

Анализируя систему уравнений (2), убеждаемся, что конгруэнции L существуют и определяются с произволом пяти функций двух аргументов. Обозначим через E_α^* точки, аффинно-симметричные точкам E_α. Из системы (2) следует

Теорема I. Конгруэнции L обладают следующими свойствами: I) торсы прямолинейной конгруэнции (AE_2) соответствуют координатным линиям $\omega_i=0$; 2) ассоциированные квадрики Q' конгруэнции L проходят

15 Зак. 1209

через центр квадрики Q [1];3)точка E_3^* является фокальной точкой квадрики Q ;4) если точка E_2 является фокальной точкой квадрики Q ,то и точка E_2^* также фокальная точка Q^i ;5)точки E_1 и E_1^* не могут являться одновременно фокальными точками квадрики Q .

Д о к а з а т е л ь с т в о. I) Уравнение торсов прямолинейной конгруэнции (AE_2) имеет вид: $\alpha\omega_1\omega_2=0$ ($\alpha\neq 0$). 2) Действительно,уравнения ассоциированных квадрик Q^i принимают следующий вид:

$$F^i \equiv c_1^i (x^1)^2 + c_2^i (x^2)^2 + \lambda x^1 x^2 + b^i x^i x^3 + b x^j x^3 + \alpha \delta_i^1 x^i = 0. \quad (3)$$

Доказательство свойств 3),4) и 5) следует из системы уравнений,определяющей фокальные точки квадрики Q :

$$(x^1)^2+(x^2)^2+(x^3)^2-1=0, \quad F^1=0, \quad F^2=0. \quad (4)$$

Из конгруэнции L выделим класс конгруэнций L_1 .

О п р е д е л е н и е. Конгруэнцией L_1 назовем конгруэнцию L ,у которой точки E_i являются фокальными.

В силу этого определения конгруэнции L_1 выделяются из конгруэнций L соотношениями:

$$c_2^1=0, \quad c_1^1=-\alpha, \quad c_1^2=0, \quad c_2^2=0, \quad b=0, \quad \beta=0, \quad b^2=1. \quad (5)$$

С учетом (5) система уравнений Пфаффа конгруэнции L_1 имеет вид:

$$\begin{cases} \omega^2=0, \quad \omega^3=0, \quad \omega_3^3=0, \quad \omega_1^2=0, \quad \omega_2^2=0, \quad \omega_3^2=0, \\ \omega^1=\alpha\omega_1, \quad \omega_2^1=\lambda^k\omega_k, \quad \omega_1^1+\omega^1=0, \quad \omega_3^1=(b^1-1)\,\omega_1. \end{cases} \quad (6)$$

Произвол существования конгруэнций L_1 -одна функция двух аргументов.Для конгруэнций L_1 справедлива

Т е о р е м а 2.Конгруэнции L_1 обладают следующими свойствами:I)поверхность (E_1) вырождается в линию с касательной,параллельной вектору $\bar e_3$;2)поверхность (E_3) вырождается в линию с касательной,параллельной вектору $\bar e_1$;3) векторы $\bar e_i$, $\bar e_3$ сопряжены относительно ассоциированных квадрик Q^j ; 4)индикатриса вектора $\bar e_3$ вырождается в линию,касательная к которой коллинеарна вектору $\bar e_1$.

Д о к а з а т е л ь с т в о свойств I) и 2) непосредственно следует из системы уравнений (6): $d\bar E_1=\omega_1\bar e_3$, $d\bar E_3=(\alpha+b^1-1)\bar e_1\omega_1$
3) Учитывая соотношения (5) в (3),придем к указанному утверждению. 4)Действительно, $d\bar e_3=(b^1-1)\bar e_1\omega_1$.

Библиографический список

I.Лаптев Г.Ф.Распределение касательных элементов//Тр.геометр.семинара/ВИНИТИ.М.,197I.Т.3.С.29-48.

УДК 514.75

К ВОПРОСУ О ФОКАЛЬНЫХ ОБРАЗАХ МНОГООБРАЗИЙ КОНИК В ЧЕТЫРЕХМЕРНОМ ПРОЕКТИВНОМ ПРОСТРАНСТВЕ

В.Н.Х у д е н к о
(Калининградский государственный университет)

В четырехмерном проективном пространстве рассматриваются псевдоконгруэнции коник.Выделен класс псевдоконгруэнций,каждая коника которого обладает шестью фокальными точками.Указаны аналогии с конгруэнциями коник в трехмерном проективном пространстве.

Отнесем четырехмерное проективное пространство P_4 к проективному реперу $R=\{A_J\}$ ($J,\mathcal{J},K=\overline{1,5}$). Деривационные формулы репера R и уравнения структуры проективного пространства имеют обычный вид:

$$dA_J=\omega_J^{\mathcal{J}}A_{\mathcal{J}}, \qquad D\omega_J^{\mathcal{J}}=\omega_J^K\wedge\omega_K^{\mathcal{J}}.$$

Рассмотрим в этом пространстве псевдоконгруэнцию (двупараметрическое семейство) коник C . Поместим вершины A_α репера R в двумерной плоскости коники C ,а вершины A_a -вне этой плоскости. Здесь и в дальнейшем индексы принимают следующие значения:

$$\alpha,\beta,\gamma=1,2,3; \quad a,b=4,5; \quad i,j,k=1,2.$$

Тогда система уравнений,определяющая конику C ,запишется в виде

$$a_{\alpha\beta}\,x^\alpha x^\beta=0, \quad x^a=0. \quad (I)$$

Из требований относительной инвариантности коники C получаем, что структурными [1] формами многообразия коник в P_4 будут являться [2] формы ω_α^a, $\theta_{\alpha\beta}$ ($\theta_{\alpha\beta}=\theta_{\beta\alpha}$),где

$$\theta_{\alpha\beta}=da_{\alpha\beta}-a_{\alpha\gamma}\,\omega_\beta^\gamma-a_{\beta\gamma}\,\omega_\alpha^\gamma+\tfrac{2}{3}\,a_{\alpha\beta}\,\omega_\gamma^\gamma. \quad (2)$$

Зададим псевдоконгруэнцию коник C с помощью уравнений Пфаффа

$$\theta_{\alpha\beta}=\Lambda_{\alpha\beta i}\,\tau^i, \qquad \omega_\alpha^a=\Lambda_{\alpha i}^a\,\tau^i, \quad (3)$$

где τ^i - параметрические формы,удовлетворяющие структурным уравнениям бесконечной аналитической группы [3]

$$D\tau^i=\tau^j\wedge\tau_j^i,$$
$$D\tau_j^i=\tau_j^k\wedge\tau_k^i+\tau^k\wedge\tau_{jk}^i,$$
$$\dots\dots\dots\dots\dots$$

Рассмотрим множество точек коники C псевдоконгруэнции, которые также принадлежат смежной конике, т.е. фокальное многообразие коники. Это многообразие будет определяться системой уравнений

$$\begin{cases} a_{\alpha\beta} x^\alpha x^\beta = 0, & x^a = 0, \\ d(a_{\alpha\beta} x^\alpha x^\beta) = 0, & dx^a = 0. \end{cases} \qquad (4)$$

Система уравнений (4) приводится к виду

$$\begin{cases} a_{\alpha\beta} x^\alpha x^\beta = 0, & x^a = 0, \\ \Lambda_{\alpha\beta i} x^\alpha x^\beta \tau^i = 0, & \Lambda^a_{\alpha i} x^\alpha \tau^i = 0. \end{cases} \qquad (5)$$

Рассмотрим частный класс псевдоконгруэнций коник C, выделяемый равенствами

$$\omega_1^4 = \lambda \omega_1^5, \quad \omega_2^4 = \lambda \omega_2^5, \quad \omega_3^4 = \lambda \omega_3^5, \qquad (6)$$

где λ - отличная от нуля величина. Назовем такой класс псевдоконгруэнциями C_0. В этом случае из системы (5) можно исключить параметрические формы τ^i и преобразовать систему (5) к виду

$$\begin{cases} a_{\alpha\beta} x^\alpha x^\beta = 0, & x^a = 0, \\ \Lambda_{\alpha\beta[i} \Lambda_{|\gamma|j]} x^\alpha x^\beta x^\gamma = 0, & (i \neq j). \end{cases} \qquad (7)$$

Анализируя систему алгебраических уравнений (7), приходим к выводу, что она определяет в четырехмерном проективном пространстве многообразие шестого порядка нулевой размерности [4]. Таким образом, имеет место

П р е д л о ж е н и е. Каждая коника C псевдоконгруэнции C_0 в четырехмерном проективном пространстве обладает шестью фокальными точками.

Охарактеризуем геометрически систему равенств (6). Имеем:

$$d[A_1, A_2, A_3] = (\omega_1^1 + \omega_2^2 + \omega_3^3)[A_1, A_2, A_3] +$$
$$+ \omega_1^5 [A_2, A_3, \lambda A_4 + A_5] + \omega_2^5 [A_1, A_3, \lambda A_4 + A_5] + \omega_3^5 [A_1, A_2, \lambda A_4 + A_5]. \qquad (8)$$

Равенство (8) означает, что грассманово многообразие плоскостей коник C в данном случае имеет размерность 3. Следовательно, псевдоконгруэнция C_0 в P_4 является аналогом конгруэнции коник в трехмерном проективном пространстве, каждая коника которой обладает шестью фокальными точками.

Последнее есть известный факт проективно-дифференциальной геометрии (см., например, [5]).

Библиографический список

1. Л а п т е в Г.Ф. Распределения касательных элементов// Тр. геометр.семинара / ВИНИТИ.М., 1971.Т.3.С.29-48.

2. Х у д е н к о В.Н. О многообразиях многомерных квадрик в проективном пространстве // Дифференциальная геометрия многообразий фигур: Сб.науч.тр. / Калинингр.ун-т.Калининград, 1977.Вып.8.С.126-134.

3. О с т и а н у Н.М. Об инвариантном оснащении семейства многомерных плоскостей в проективном пространстве // Тр.геом. семинара / ВИНИТИ.М., 1969.Т.2.С.247-262.

4. Х о д ж В. и П и д о Д. Методы алгебраической геометрии. М., 1954. Т.2.

5. М а л а х о в с к и й В.С. Теория конгруэнций кривых и поверхностей второго порядка в трехмерном проективном пространстве: Учеб. пособие/Калинингр.ун-т.Калининград, 1989.72с.

СЕМИНАР
по дифференциальной геометрии многообразий фигур при Калининградском госуниверситете

В предыдущих выпусках сборника освещена работа семинара по 28 декабря 1988 года. Ниже приводится перечень докладов, обсужденных на семинаре в 1989 году.

15.02.89. Б.А.А н д р е е в. О субмерсиях проективных пространств.

22.02.89. Л.Г.К о р с а к о в а. Конгруэнция пар коник со специальными свойствами ассоциированных образов.

3.03.89. Л.А.Ж а р и к о в а. Конгруэнции нецентральных квадратичных элементов в аффинном пространстве.

15.03.89. Н.В.М а л а х о в с к и й. О нормализациях проективных пространств, порожденных семейством оснащенных коллинеаций.

22.03.89. Б.В.М а х о р к и н. Отображение гиперповерхности в пространство гиперквадрик.

29.03.89. Ю.И.П о п о в. Дифференциально-геометрические структуры многосоставного распределения.

5.04.89. Е.В.С к р ы д л о в а. Вырожденные конгруэнции, порожденные поверхностью второго порядка и точкой.

12.04.89. Т.П.Ф у н т и к о в а. Безинтегральное представление одного класса вырожденных конгруэнций.

19.04.89. В.Н.Х у д е н к о. К вопросу о фокальных образах многообразий коник в четырехмерном проективном пространстве.

26.04.89. Ю.И.Ш е в ч е н к о. Интерпретация фундаментально-групповой связности с помощью обобщенного расслоения.

3.05.89. С.В.Ш м е л е в а. Конгруэнции линейчатых квадрик.

10.05.89. М а л а х о в с к и й В.С. Комплекс квадрик с тремя фокальными многообразиями.

17.05.89. Н.Н.П е р е л о м о в а (г.Казань). Касательное расслоение второго порядка с комплексной проективной прямой и его связь с геометрией Лобачевского.

24.05.89. Б.А.А н д р е е в. Отображения многообразий гиперквадрик, порожденные точечным соответствием.

4.10.89. М.Ф.Г р е б е н ю к (г.Киев). Аффинная связность, ассоциированная с трехсоставным распределением.

11.10.89. Л.А.Ж а р и к о в а. К дифференциальной геометрии конгруэнций парабол в эквиаффинном пространстве.

18.10.89. Л.Г.К о р с а к о в а. Конгруэнция пар коник со специальными свойствами ассоциированных поверхностей.

25.10.89. В.С.М а л а х о в с к и й. О конгруэнциях орициклов и орисфер в пространстве Лобачевского.

1.11.89. Н.В.М а л а х о в с к и й. Нормализации проективных пространств и характеристические числа, порожденные семейством коллинеаций.

15.11.89. Ю.И.П о п о в. Приложение теории связностей к теории распределений.

22.11.89. Е.В.С к р ы д л о в а. Об одном классе вырожденных конгруэнций, порожденных линейчатой квадрикой и прямой.

29.11.89. В.П.Ц а п е н к о. Связность в многообразии гиперплоскостей, индуцированном гиперконгруэнцией.

6.12.89. Ю.И.Ш е в ч е н к о. Связности в расслоениях, ассоциированных с многообразиями фигур.

13.12.89. С.В.Ш м е л е в а. Об одном классе конгруэнций линейчатых квадрик со специальными фокальными поверхностями.

20.12.89. Е.А.Щ е р б а к. Об одном специальном виде конгруэнций пар коник в аффинном пространстве.

27.12.89. Е.П.Ю р о в а. Об одном классе конгруэнций квадрик с вырождающейся поверхностью центров.

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНАЯ ГЕОМЕТРИЯ МНОГООБРАЗИЙ ФИГУР

Выпуск 21

Межвузовский тематический сборник научных трудов

Редактор В. И. Васильева
Технич. редактор Н. Д. Шишкова

Сводный план 1990 года, поз. 545

Подписано в печать 28.06.90. КУ 04255. Формат $60 \times 84^1/_{16}$. Бумага для глубокой печати. Печать офсетная. Усл. печ. л. 7,5. Уч.-изд. л. 7,25. Тираж 500 экз. Заказ № 1209. Цена 1 руб.

Калининградский государственный университет,
236041, Калининград обл., ул. А. Невского, 14.

Типография издательства «Калининградская правда»,
236000, Калининград обл., ул. Карла Маркса, 18.

Цена 1 руб.