Prof. Dr. H. Brenner **Osnabrück WS 2021/2022**

Elliptische Kurven

Arbeitsblatt 16

Aufgaben

Aufgabe 16.1. Es sei $K \subseteq L$ eine separable endliche Körpererweiterung. Zeige $\Omega_{L|K} = 0$.

Aufgabe 16.2. Zeige, dass es auf der projektiven Geraden $\mathbb{P}^1_K$ außer der Nullform keine globalen Differentialformen gibt.

Aufgabe 16.3.*

Wie betrachten die Kurve

$$C = V_+(X^3 + Y^3 + Z^3) \subseteq \mathbb{P}^2_K$$

über einem Körper der Charakteristik $\neq 3$. Zeige, dass die Differentialformen

$$\frac{X^2}{Y^2} d\frac{Z}{X} \text{ auf } D_+(XY),\ \frac{Y^2}{Z^2} d\frac{X}{Y} \text{ auf } D_+(YZ) \text{ und } \frac{Z^2}{X^2} d\frac{Y}{Z} \text{ auf } D_+(XZ),$$

auf den Durchschnitten übereinstimmen und daher eine nichttriviale Differentialform auf der Kurve C definieren.

Aufgabe 16.4. Bestimme die globalen Differentialformen auf der Kurve

$$V_+\big(X^4 + Y^4 + Z^4\big) \subseteq \mathbb{P}^2_K$$

mit Lemma 16.1 über einem Körper der Charakteristik $\neq 2$.

Aufgabe 16.5. Bestimme die globalen Differentialformen auf der Kurve

$$V_+\big(X^3 - Y^2 Z\big) \subseteq \mathbb{P}^2_K .$$

Aufgabe 16.6. Bestimme den Rückzug der Differentialform dx unter der Additionsabbildung

$$\mathbb{A}^2_K \cong \mathbb{A}^1_K \times \mathbb{A}^1_K \longrightarrow \mathbb{A}^1_K,\ (x_1, x_2) \longmapsto x_1 + x_2 .$$

Aufgabe 16.7. Bestimme den Rückzug der Differentialform dx unter der Multiplikationsabbildung

$$\big(\mathbb{A}^1_K \setminus \{0\}\big) \times \big(\mathbb{A}^1_K \setminus \{0\}\big) \longrightarrow \mathbb{A}^1_K \setminus \{0\},\ (x_1, x_2) \longmapsto x_1 \cdot x_2 .$$

Abbildungsverzeichnis