**Prof. Dr. H. Brenner** **Osnabrück SS 2016**

# Lineare Algebra und analytische Geometrie II

## Arbeitsblatt 53

### Übungsaufgaben

Aufgabe 53.1. Es seien $V$ und $W$ endlichdimensionale normierte $\mathbb{K}$-Vektorräume. Zeige, dass die Maximumsnorm auf dem Homomorphismenraum $\operatorname{Hom}_K(V,W)$ in der Tat eine Norm ist.

Aufgabe 53.2. Es seien $V$ und $W$ euklidische Vektorräume und sei

$$\varphi\colon V \longrightarrow W$$

eine lineare Abbildung. Zeige, dass es einen Vektor $v \in V$, $|| v ||= 1$, gibt mit

$$|| \varphi(v) ||=|| \varphi || \ .$$

Aufgabe 53.3. Berechne für die Matrix

$$\begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 4 & 5 \end{pmatrix}$$

(1) die Maximumsnorm, die Summennorm, und die euklidische Norm,
(2) die Maximumsnorm zu Maximumsnorm, Summennorm oder euklidischer Norm auf dem $\mathbb{R}^2$ in allen Kombinationen,
(3) die Spaltensummennorm und die Zeilensummennorm.

Aufgabe 53.4. Zeige, dass die Spaltensummennorm auf dem Matrizenraum $\operatorname{Mat}_{m\times n}(\mathbb{K})$ gleich der Maximumsnorm im Sinne von Definition 53.1 ist, wenn man die Räume $\mathbb{K}^n$ und $\mathbb{K}^m$ mit der Summennorm versieht.

Aufgabe 53.5. Betrachte die lineare Abbildung

$$\varphi\colon \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2,\ (x,y) \longmapsto \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix},$$

wobei der $\mathbb{R}^2$ mit der euklidischen Norm versehen sei. Bestimme die Eigenwerte, die Eigenvektoren und die Norm von $\varphi$.

Aufgabe 53.6. Es sei

$$\varphi \colon \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R},\, (x_1, \ldots, x_n) \longmapsto \sum_{i=1}^n a_i x_i,$$

eine lineare Abbildung $\neq 0$. Bestimme einen Vektor $v \in \mathbb{R}^n$ auf der abgeschlossenen Kugel mit Mittelpunkt 0 und Radius 1, an dem die Funktion

$$B\,(0,1) \longrightarrow \mathbb{R},\, v \longmapsto |\varphi(v)|\,,$$

ihr Maximum annimmt. Bestimme die Norm von $\varphi$.

Es sei

$$f \colon L \longrightarrow M,\, x \longmapsto f(x),$$

eine Abbildung zwischen den metrischen Räumen $L$ und $M$. Die Abbildung heißt *Lipschitz-stetig*, wenn es eine reelle Zahl $c \geq 0$ mit

$$d\,(f(x), f(y)) \,\leq\, c \cdot d\,(x,y)$$

für alle $x, y \in L$ gibt.

Aufgabe 53.7. Es seien $V$ und $W$ endlichdimensionale normierte $\mathbb{K}$-Vektorräume und

$$\varphi \colon V \longrightarrow W$$

eine lineare Abbildung. Zeige, dass $\varphi$ Lipschitz-stetig ist.

Aufgabe 53.8. Zeige, dass eine lineare Abbildung

$$\varphi \colon V \longrightarrow W$$

zwischen endlichdimensionalen normierten $\mathbb{K}$-Vektorräumen $V$ und $W$ genau dann stark kontrahierend ist, wenn $||\,\varphi\,|| < 1$ ist.

Aufgabe 53.9. Sei

$$W \,=\, \operatorname{End}(V)$$

der Endomorphismenraum zu einem endlichdimensionalen $\mathbb{K}$-Vektorraum $V$. Welche Eigenschaften einer Norm erfüllt der Spektralradius $\varphi \mapsto \rho(\varphi)$, welche nicht?

Aufgabe 53.10. Es sei $V$ ein endlichdimensionaler $\mathbb{K}$-Vektorraum und $v_n$, $n \in \mathbb{N}$, eine Folge in $V$. Zeige, dass die Folge genau dann konvergiert (bezüglich einer beliebigen Norm), wenn für eine (jede) Basis sämtliche Komponentenfolgen in $\mathbb{K}$ konvergieren.

Aufgabe 53.11. Zeige, dass ein nilpotenter Endomorphismus
$$\varphi \colon V \longrightarrow V$$
auf einem $\mathbb{K}$-Vektorraum $V$ asymptotisch stabil ist.

Aufgabe 53.12. Zeige, dass ein Endomorphismus
$$\varphi \colon V \longrightarrow V$$
mit endlicher Ordnung auf einem $\mathbb{K}$-Vektorraum $V$ stabil ist.

Aufgabe 53.13. Es sei
$$V = U \oplus W$$
eine direkte Summenzerlegung eines endlichdimensionalen $\mathbb{K}$-Vektorraumes und es sei
$$\varphi \colon V \longrightarrow V$$
ein Endomorphismus mit einer direkten Summenzerlegung
$$\varphi = \psi \oplus \theta .$$
Zeige, dass $\varphi$ genau dann asymptotisch stabil ist, wenn sowohl $\psi$ als auch $\theta$ asymptotisch stabil sind

Aufgabe 53.14. Es sei
$$V = U \oplus W$$
eine direkte Summenzerlegung eines endlichdimensionalen $\mathbb{K}$-Vektorraumes und es sei
$$\varphi \colon V \longrightarrow V$$
ein Endomorphismus mit einer direkten Summenzerlegung
$$\varphi = \psi \oplus \theta .$$
Zeige, dass $\varphi$ genau dann stabil ist, wenn sowohl $\psi$ als auch $\theta$ stabil sind

Aufgabe 53.15. Es sei
$$V = U \oplus W$$
eine direkte Summenzerlegung eines endlichdimensionalen $\mathbb{K}$-Vektorraumes und es sei
$$\varphi \colon V \longrightarrow V$$
ein Endomorphismus mit einer direkten Summenzerlegung
$$\varphi = \psi \oplus \theta .$$
Zeige, dass die Folge $\varphi^n$ genau dann konvergiert, wenn sowohl $\psi^n$ als auch $\theta^n$ konvergieren.

Aufgabe 53.16. Zeige

$$\begin{pmatrix} \lambda & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \cdots & 0 & \lambda & 1 \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & \lambda \end{pmatrix}^n \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda^n + n\lambda^{n-1} \\ \lambda^n \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Aufgabe 53.17. Es sei $V$ ein endlichdimensionaler $\mathbb{K}$-Vektorraum und

$$\varphi \colon V \longrightarrow V$$

ein Endomorphismus. Zeige, dass die folgenden Eigenschaften äquivalent sind.

(1) Die Folge $\varphi^n$ konvergiert in $\operatorname{End}(V)$.
(2) Zu jedem $v \in V$ konvergiert die Folge $\varphi^n(v)$, $n \in \mathbb{N}$.
(3) Es gibt ein Erzeugendensystem $v_1, \ldots, v_m \in V$ derart, dass $\varphi^n(v_j)$, $j = 1, \ldots, m$, konvergiert.
(4) Der Betrag eines jeden komplexen Eigenwerts von $\varphi$ ist kleiner oder gleich 1 und falls der Betrag 1 ist, so ist der Eigenwert selbst 1 und diagonalisierbar.
(5) Für eine beschreibende Matrix $M$ von $\varphi$, aufgefasst über $\mathbb{C}$, sind die Jordan-Blöcke der jordanschen Normalform gleich

$$\begin{pmatrix} \lambda & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \cdots & 0 & \lambda & 1 \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & \lambda \end{pmatrix}$$

mit $|\lambda| < 1$ oder gleich $(1)$.

Es sei $T$ eine Menge, $M$ ein metrischer Raum und

$$f_n \colon T \longrightarrow M,$$

$(n \in \mathbb{N})$ eine Folge von Abbildungen. Man sagt, dass die Abbildungsfolge *punktweise konvergiert*, wenn für jedes $x \in T$ die Folge

$$(f_n(x))_{n \in \mathbb{N}}$$

konvergiert.

Aufgabe 53.18. Es sei $M_k = ((a_{ij})_k)_{1 \leq i \leq m, 1 \leq j \leq n}$ eine Folge von reellen $m \times n$-Matrizen und

$$\varphi_k \colon \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$$

die zugehörige Folge von linearen Abbildungen. Zeige, dass die Folgen der Einträge $(a_{ij})_k$ für alle $i, j$ genau dann konvergieren, wenn die Folge der Abbildungen punktweise konvergiert.

**Aufgaben zum Abgeben**

Aufgabe 53.19. (2 Punkte)

Es seien $V$ und $W$ endlichdimensionale normierte $\mathbb{K}$-Vektorräume und $\varphi\colon V \to W$ eine lineare Abbildung. Zeige die Abschätzung

$$|| \varphi(v) || \leq || \varphi || \cdot || v ||$$

für alle $v \in V$.

Aufgabe 53.20. (5 (1+3+1) Punkte)

Berechne für die Matrix

$$\begin{pmatrix} 6 & -2 \\ -5 & 7 \end{pmatrix}$$

(1) die Maximumsnorm, die Summennorm, und die euklidische Norm,
(2) die Maximumsnorm zu Maximumsnorm, Summennorm oder euklidischer Norm auf dem $\mathbb{R}^2$ in allen Kombinationen,
(3) die Spaltensummennorm und die Zeilensummennorm.

Aufgabe 53.21. (3 Punkte)

Sei $V$ ein euklidischer Vektorraum und sei

$$\varphi\colon V \longrightarrow V$$

eine lineare Abbildung derart, dass eine Orthogonalbasis aus Eigenvektoren von $\varphi$ existiert. Zeige, dass

$$|| \varphi || = \max \left( |\lambda| , \lambda \text{ ist Eigenwert von } \varphi \right)$$

gilt.

Aufgabe 53.22. (6 Punkte)

Es sei $M$ eine $n \times n$-Matrix über $\mathbb{K}$. Zeige, dass die folgenden Aussagen äquivalent sind.

(1) In der Folge $M^n$, $n \in \mathbb{N}$, gibt es eine Wiederholung, d.h.

$$M^n = M^m$$

für ein Zahlenpaar $n < m$.

(2) In der Folge $M^n$, $n \in \mathbb{N}$, kommen nur endlich viele verschiedene Matrizen vor.
(3) Die Folge $M^n$, $n \in \mathbb{N}$, wird letztlich (also ab einer bestimmten Stelle) periodisch.
(4) Die Jordanblöcke zu $M$ über $\mathbb{C}$ haben die Gestalt

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \cdots & 0 & 0 & 1 \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

oder $(\lambda)$ mit einer komplexen Einheitswurzel $\lambda$.

Aufgabe 53.23. (6 Punkte)

Die reelle Ebene $\mathbb{R}^2$ sei mit der euklidischen, der Summen- oder der Maximumsmetrik versehen. Bestimme, abhängig von der gewählten Metrik, die maximale Anzahl von Punkten $P_1, \ldots, P_n \in \mathbb{R}^2$ derart, dass die Metrik auf der Teilmenge $T = \{P_1, \ldots, P_n\}$ die diskrete Metrik induziert.

# Abbildungsverzeichnis