よつて一種乃至數種の色を塗つて區劃を明瞭にする。圖示するとかういふ樣になる。兒童に銅貨を用ゐて圖をかゝせるのも同じ樣にする。只切れ込みはつけない。圓・中心・半徑といふ順序にかゝすがよい。

四　分數の第一意義

からははじめて實驗と實測から歸納し推理して行く徑路を考究して見ようと思ふ。分數の第一意義は1をm等分したといふ意味である。小數はm等分のmが常に10又は10^nといふ特殊な數に限られて居たので、分數はその意味から小數の一般化である。玆に $\frac{1}{2}$ $\frac{1}{3}$ $\frac{2}{3}$ $\frac{1}{4}$ $\frac{2}{4}$ $\frac{3}{4}$ $\frac{1}{5}$ $\frac{2}{5}$ $\frac{3}{5}$ $\frac{4}{5}$ $\frac{1}{6}$ $\frac{2}{6}$ $\frac{3}{6}$ $\frac{4}{6}$ $\frac{5}{6}$ 等を通觀し、更にその具體經驗を擴充して、$\frac{1}{7}$ $\frac{2}{7}$ $\frac{3}{7}$ $\frac{4}{7}$ $\frac{5}{7}$ $\frac{1}{11}$……$\frac{10}{11}$ 及更に一般的に $\frac{13}{18}$ $\frac{53}{100}$ $\frac{100}{121}$ 等の意義を明瞭にする事をうる。倘それに附帶して讀方・書き方・分母・分子の名稱も明かにすることが出來る。これ實に分數研究の第一歩である。そして此の第一意義から誘導される諸性質がある。此等諸性質は轉て各種計算を生む所の母である。

A　通分約分の基礎

M式圓板又は圖形について次の實驗をする。$\frac{1}{2}$ と $\frac{2}{4}$ $\frac{2}{4}$ と $\frac{3}{6}$、$\frac{3}{6}$ と $\frac{1}{2}$ 等の大小比較には、切れ込みを喰ひ合せると中心を固定してクルクル廻すことが出來、從つて兩圖形を重ね合して大小の比較をすることが出來る。比較の結果は次の樣に現れて來る。

$$\frac{1}{2}=\frac{2}{4}=\frac{3}{6}=\frac{4}{8}=\frac{5}{10}=\frac{6}{12}=\left(\frac{7}{14}\right)=\frac{8}{16}=\left(\frac{9}{18}\right)=\cdots\cdots$$

括孤で括つた數は推理から得られる數である。これだけの具體經驗は、更に $\frac{m}{2m}=\frac{1}{2}$ を歸納し得る。次に、

$$\frac{1}{3}=\frac{2}{6}=\frac{3}{9}=\frac{4}{12}=\frac{5}{15}=\left(\frac{6}{18}\right)=\left(\frac{7}{21}\right)=\left(\frac{8}{24}\right)\cdots\cdots$$

$$\frac{2}{3}=\frac{4}{6}=\frac{6}{9}=\frac{8}{12}=\frac{10}{15}=\left(\frac{12}{18}\right)=\left(\frac{14}{21}\right)=\left(\frac{16}{24}\right)\cdots\cdots$$

等の例を實驗させ、その結果を歸納させる。玆に分數の分母分子に同じ數を乘じ又は除するもその値は變化せざることが歸決される。これを順に推究したものは分母子に同數を乘

することであつて通分の因となり、逆に推究した結果は分母子を同數で割ることとなつて約分の基となる。

B　整數の分數化と分數の種類　1の中に$\frac{1}{2}$は幾つあるか。$\frac{1}{3}$は如何。1は$\frac{2}{3}$よりもいくら大なるか。$\frac{3}{4}$よりは等皆具體的に經驗する事が出來る。そしてその結果は

$$1=\frac{2}{2}=\frac{3}{3}=\frac{4}{4}=\frac{5}{5}=\frac{6}{6}=\left(\frac{7}{7}\right)=\frac{8}{8}=\frac{9}{9}\cdots\cdots\left(\frac{m}{m}\right)=\left(\frac{n}{n}\right)$$

を歸納しうる。從つて推理と實驗とを結合して、

$$2=\frac{4}{2}=\frac{6}{3}=\frac{8}{4}=\frac{10}{5}=\frac{12}{6}=\left(\frac{14}{7}\right)=\frac{16}{8}\cdots\cdots\frac{2m}{m}=\frac{2n}{n}$$

$$3=\frac{6}{2}=\frac{9}{3}=\frac{12}{4}\cdots\cdots\frac{3m}{m}=\frac{3n}{n}$$

$$4=\frac{8}{2}=\frac{12}{3}=\frac{16}{4}=\cdots\cdots\frac{4m}{m}=\frac{4n}{n}$$

$$5=\cdots\cdots\quad 6=\cdots\cdots$$

分數の種類として眞分數は1よりも小さく從つて分子が常に分母より小さく帶分數は1よりも大で端數を伴ひ、$2\frac{1}{3}$は$2<2\frac{1}{3}<3$　$3\frac{3}{4}$は$3<3\frac{3}{4}<4$といふ位置に居ること恰も帶小數の如く、假分數は分母が分子に等しいか又は分子より小であつて、等しいのはその大さ1に等しく、小いのは1よりも必大である等の性質がだん〴〵闡明されて行く。

C　分數の大小を定めること　は自ら三樣に分れる。第一分母の同じな場合でこれは分子の大きい方が大きい事は自ら明白である。$\left(\frac{1}{3}\ \frac{2}{3}\right)$ $\left(\frac{4}{5}\ \frac{3}{5}\right)$ $\left(\frac{9}{24}\ \frac{13}{24}\right)$ $\left(\frac{7}{8}\ \frac{6}{8}\ \frac{9}{8}\right)$等。第二は分子の同じ場合で、分母の小さい方が値は大である。例へば$\left(\frac{2}{3}\ \frac{2}{5}\right)$ $\left(\frac{7}{10}\ \frac{7}{9}\right)$ $\left(\frac{10}{36}\ \frac{10}{39}\right)$ $\left(\frac{10}{11}\ \frac{10}{13}\right)$ $\left(\frac{12}{10}\ \frac{12}{12}\ \frac{12}{13}\right)$等。第三は分母分子共異なる場合でこれはそのまゝ大小を比較することは出來ない。第一又は第三のやうに分母か分子か何れか一方を等しい分數に變じて見るか、或は分子を分母でわつてその値を小數として現して見るかしなければ分らない。$\left(\frac{2}{3}\ \frac{3}{4}\right)$ $\left(\frac{5}{6}\ \frac{4}{7}\right)$ $\left(\frac{7}{8}\ \frac{8}{6}\ \frac{9}{10}\right)$

等の例がそれである。

D　**帯分數と假分數の關係**　これも亦餘程まで實驗が出來る。また推究も出來る。 $1\frac{1}{2}=\frac{2}{2}+\frac{1}{2}=\frac{3}{2}$　$2\frac{1}{3}=\frac{6}{3}+\frac{1}{3}=\frac{7}{3}$　$3\frac{2}{5}=\frac{15}{5}+\frac{2}{5}=\frac{17}{5}$　$4\frac{5}{6}=\frac{24}{6}+\frac{5}{6}=\frac{29}{6}$　順に研究して行けば帯分數の假分數化である。逆に進めば假分數の帯分數化である。

E　**簡單な加減乘除**　もその說明も亦大抵實驗で行ける。實驗は推理の前に存する時發見的・歸納的の實驗となり、推理の後に存する時、證明的・實證的の實驗となる。いづれでもよい。兩方併用も亦可である。

$\frac{1}{2}+\frac{2}{4}=\frac{3}{4}$　$\frac{1}{4}+\frac{1}{4}=\frac{1}{2}$　$\frac{1}{9}+\frac{5}{9}=\frac{2}{3}$　$\frac{1}{4}+\frac{3}{4}=1$　$\frac{4}{5}-\frac{1}{5}=\frac{3}{5}$　$\frac{3}{4}-\frac{1}{4}=\frac{1}{2}$　$1-\frac{2}{5}=\frac{3}{5}$　$\frac{2}{7}\times3=\frac{6}{7}$　$\frac{1}{5}\times4=\frac{4}{5}$　$\frac{1}{4}\times2=\frac{1}{2}$　$\frac{3}{4}\times2=1\frac{1}{2}$

五　**分數の第二意義**　は除法の一變化又は割算に於ける剰餘の處分法として發展して來る所のものである。自然數の範圍內では、$n\div m$ といふ割算は、nがmの整數倍である時のみ成立する。nがmよりも小さい場合や、大きくとも丁度整數倍になつて居ない時は、剰餘としてmよりも小さい或數が殘るから、nのmより小さい場合と結局同一な結果となる。此の剰餘を剰餘として餘さずに處分して了ふ方法として分數が生れる。即mよりも小さいnを等分するのであつて、その結果を $\frac{n}{m}$ と表はすのである。故に $\frac{n}{m}$ は必1よりも小さい。此のnをm等分した $\frac{n}{m}$ は、1をm等分した $\frac{1}{m}$ のn倍である所の $\frac{n}{m}$ と同一の大きさを持つて居る。こゝに第一意義と第二意義との交渉點が出來る。

$1\div5=\frac{1}{5}$　$2\div5=\frac{2}{5}$　$3\div5=\frac{3}{5}$……

$1\div7=\frac{1}{7}$　$2\div7=\frac{2}{7}$　$3\div7=\frac{3}{7}$……

これ等も亦實驗實測によつて、直觀し、推究し、概括して行く事が出來る。そして畢竟第二の意義は第一の意義の發展擴充である事を知るのである。

第二の意義から更に比の觀念や步合の考が發展して行く。これは第二意義の最大切な意味を有する點であるが、比や步合の處で改めて申述べる事にする。

六　分數の第三意義　分數の二つの意義として第一及第二の兩意義については、何人もこれを口にするのであるが、自分は更に第三の意義を高唱したい考である。第一意義は1を幾つかに分つた幾つ即ち1のm分のnであつたし、第二の意義は整數nをm（整數）等分したものであつたのである。第三の意義は更に第一意義を一般化したものでxのm分のnといふ考へ方である。第一意義は常に1を母數にとつてその幾分の幾つを考へたのである。第三意義はその1といふ特殊數を一般化してxの$\frac{n}{m}$を考へるのである。しかもそのxは整數とのみ限定しない。小數でも分數でも諸等數でもいかなる數にも及ばうとするのである。又$\frac{n}{m}$は普通nがmより小さい場合であるが、$n=m$　$n>m$ の時にも及ぶ事が出來る。是に於て、眞に特殊が一般化されるのである。

A　**母數を整數とするもの**　即4の$\frac{2}{3}$　$\frac{1}{14}$ 等で、これは掛けるといふ意義の擴充であらねばならぬ。掛けるとは普通整數倍の意味である。それを小數を採用する樣になつて 0.4 とか 0.25 とかを乘ずる意味となつた。これは既に小數の條で研究した通り、$\times 0.4$ とは $\div 10\times 4$ の意味即ち $\frac{4}{10}$ を乘ずることであり、$\times 0.25$ とは $\div 100\times 25$ の意味即ち $\frac{25}{100}$ を乘ずることとなつたのである。今分數に於ては更にそれが一般化され $\times\frac{3}{4}$ とは $\div 4\times 3$ の意味であり、$\times\frac{2}{3}$ とは $\div 3\times 2$ の意味となるのである。かける事がわつてからかける事だといふのは、分數觀念の發展から自然に湧いて來る事柄である。こゝに掛けるといふ意味が前よりも擴充されて來るのである。5圓の$\frac{1}{15}$　6圓の$\frac{3}{8}$　10坪の$\frac{3}{4}$ 等皆この意味に外ならぬ。

B　**母數を分數にとるもの**は一層數の範圍が擴張され、從つて乘法の及ぶ範圍

も擴大されるわけである。$\frac{2}{3}\times\frac{4}{5}$　$\frac{1}{2}\times\frac{1}{3}$　$\frac{3}{4}$石$\times\frac{5}{8}$　$7\frac{5}{36}$里の$1\frac{2}{5}$　$9\frac{2}{3}$貫の$2\frac{4}{15}$等。

C　分數除法の意義　　は乘法に伴つて擴大される事勿論である。順算たる乘法が擴張されゝば、その逆たる除法は當然意味の變化を生ずる。即 $\div\frac{3}{4}$ とは3で割つて4を乘ずる事であり、$\div\frac{2}{3}$ とは2で割つて3を乘ずることである。$\frac{5}{7}\div\frac{2}{3}$　$\frac{2}{3}\div\frac{1}{4}$　$\frac{5}{6}\div\frac{2}{15}$　$3\frac{1}{5}\div\frac{1}{2}$　$7\frac{1}{7}\div3\frac{2}{5}$　4倍が12なる數　$\frac{1}{2}$が25なる數　$6\frac{2}{3}$倍が1斤なる目方　等皆これから考へうる。割るといふ意味も包含の意味として考へる時には實驗的に考察することがさまで困難でない。けれども $\frac{3}{4}$ 等分するとか、$\frac{4}{5}$ 等分することとかいふ樣になると、推理を要し新しい意味の附加を要することになる。尤乘除法の意味が分數によつて擴大された其意味の中には勿論整數の考へ方として自然數で成立する理論は包容されることになる。即ち整數の2なり3なりは $\frac{2m}{m}$　$\frac{3m}{m}$ といふ樣に考へられ、又 $\frac{2}{1}$ 又は $\frac{3}{1}$ と言ふ分數の形になりうるから、2をかけるとか、2で割るとかいふ事は $\frac{2m}{m}$ をかけ $\frac{3}{1}$ で割る事であるといふ樣に變つて來るのである。さうした時に分數に當てはまる法則は整數にも必適用される事になる。これが實に面白い擴充の要點であり同時に計算法の擴充され發展される點である。

七　分數に特殊な事實計算の基礎的觀念

分數に特殊な事實計算といふものを分數を取扱ふ事實計算の意味に考へると果てしのない事柄である。自分は分數的に考察せなければ考へ得ない事實算の意味に限定したいと思ふ。さうすると分數に特殊な事實算はほんの僅かなものになる。

A　全量は常に一　　といふ觀念は第一意義から當然發展する所のものである。數量を幾つかの部分に等分するとその等分された部分は必等分した數だけある。即ち5等分すれば $\frac{1}{5}$ が5つ出來、7等分すれば $\frac{1}{7}$ が7つ出來る。これを一般的にいふとn等分すれば $\frac{1}{n}$ がn個出來るのである。故に全量は常に $\frac{5}{5}$　$\frac{7}{7}$……$\frac{n}{n}$ でなければ

ばならぬ。$\frac{5}{5}=\frac{7}{7}=\frac{n}{n}=1$ 即1である。決して1と假定するのではない。また勝手に1と決めて置くのでもない。見做すのでもない。當然の1、あるべき筈の1であるこれ分數的に考へた考へ方から當然發展して來る所の結果であつて、この考へ方は全く分數に特殊なものである。この思想の下に考へられる問題に次の樣なのがある。一二の例だけを上げて置くから他は類推せられたい。

例一、或人三人の子に全財産を分ちたるに長子には其の $\frac{5}{9}$ 次子には $\frac{2}{9}$ を與へたりと、末子には全財産の幾分を與へたるか。

例二、甲乙二人の職工あり。或仕事をなすに甲は6日を要し、乙は8日を要す。甲乙二人にてなせば一日に此仕事の幾分をなしうるか。又全く仕上るには幾日を要するか。といふ樣なものである。

B　**第三の意義より來るもの**　の何分の何といふ考へ方である。mを幾等分した幾つを考へる事である。

例三、或人一晝夜の $\frac{1}{3}$ だけ眠るといふ。其眠る時間は何時間なるか。

例四、子供三人に紙48枚を分つた、甲にはその $\frac{1}{2}$ を與へ、乙には其の $\frac{1}{3}$ を與へ殘りを丙に與へたり。各得る所幾枚か。

例五、或學校の男生徒は全生徒の丁度 $\frac{3}{5}$ にして195人なりといふ、全生徒數何程か

例六、或家の先月の消費高は $37\frac{1}{2}$ 圓にて、收入高の $\frac{3}{4}$ に當るといふ。收入高は何程なるか。

例七、茶六斤あり、初めに其 $\frac{1}{5}$ を使ひ、次に其殘りの $\frac{1}{4}$ を使へば、殘りは何斤となるか。

等皆この考へ方から出る所のものである。此種の事實算は分數應用として非常に多い。順も逆も變形もいろ／＼混じて實に多い。

以上二種の特殊なものを除いて、他に特に分數として考へる事實算があらうか。全然ないといつてよい位である。しかも此の兩者が又分數の觀念を確立することからその考へ方

を導かれる事と思ふと、分數の意義の考察と、その考察から導かれる當然の性質とを、充分明瞭的確に扱つて置く事が最根本的な必要條件であることが、一層明瞭になるのである

第十二章　比及比例

一　比及比例の發生

比例といふ觀念が人類の文化史中に現はれて來たのは餘程古い事柄であらう。この事は普通常識的に我々の考へて居る所謂四則の應用問題解法が實は比例の觀念を豫想しなければ成立しないことを見ても分る。此の點に關しては尙後に稍詳細に論じて見たい積りである。Cajori 氏の數學史によれば、ギリシヤの古代イオニア學派に屬して居るターレス（B. C. 640――B. C. 546）は旣に比例の考を利用して問題を解決した事をいつて居る。ターレスはイオニア學派の創立者で七賢人の一人と呼ばれてゐる。夕方散步し乍ら星に見とれて溝におちた時、彼の召使であつた正直な老婆が、『あなたは足許のことも知らないでどうして天上の事が分りますか』といつたといふ事である。この話はターレスの逸話として有名な話であるが、彼は壯年時代、商業の爲エジプトに住し彼地の僧侶について物理學と數學とを學び忽師の佾を凌駕して了つて、アマシス王といふ當時

の王様を驚かしたさうである。その王を驚かしたことの一項は金字塔の高さを影によつて測定した事である。即ち長さの知れて居る一本の垂直な棒とその投ずる影との比が金字塔とその影との比とに等しいといふ原理に基いたものである。又一說には一つの棒の影がその長さに等しい時に金字塔の影の長さを計つたのだともいはれて居る。いづれにしてもその解法中には比例の知識を豫想して居るのである。この一事から少くとも比例の考へ方は既に埃及の古代に存して居た事が知れる。

更に百餘年たつた時偉大なる幾何學者アルキタス（B. C. 428――B. C. 347）があつて彼は容易に一つの立方體を倍する事に成功したといふ事である。その巧みな解法は二つの與へられた線の間に比例中項を發見する事であつたといふ事である。この頃になつて比例の理論も格段の進步を見た事が分る。

二　比の意義

は分數の觀念から分派したものと見る事が出來る。甲數の乙數に對する割合といふのは即$甲/乙$であつて、甲が乙の何倍か又は何分の幾つかの意である。これを $m : n$ と書いても m/n と記しても意味は同一である。比の意義から當然生れて來る事柄は比の性質である。その二三重要事項を上げて見ると、第一は比は同じ名數の間にのみ成立する事である。兩方が不名數ならば勿論であるが、兩方が同名の名數でなければ割合の比較はしようがない。比べるといふ仕事の成立し得ない處に比は成立ち得やう筈がない。第二は比の値は常に不名數であること、及値を求める時には前後兩項の單位が揃つて居なければならぬこと。第三比の兩項を同じ數で乘除しても此の値は不變である事等である。これ等の諸性質は最大切な研究事項である。

三　比例の考へ方

正比例の考へ方は二つの量の間に存する依存的函數的關係である。この關係は方眼紙を用ひ縱に一つの量を示し橫に他の一つの量を記してその間に存する兩者の關係を具體的に考究せしむる事も出來る。しかしその根本は既に四則算から發展して居る。否四則算中には既に其々の裡に比例の考へが入つて居る。今これを具體的の實例で少しく說明して見よう。

例一、一本五錢の筆七本の代はいくら。この計算法として　5錢×7＝35錢　これを普通は四則の解法だといつて居る。然し「何が故に一本の代を7倍するか」を少しく立ち入つて考究して見る必要がある。「そりや7本だからさ」といへば說明らしくはきこえる。さらば7本なら何故7倍するのか一本の代を7倍して果して7本の代となるか。然らば一本の代を12倍すれば必一打の代を求めうるか。事實は必ずしも然らずではないか。然るに一本の代五錢を7倍して7本の代を得たりとして我も汝も又彼れも少しもあやしまない所以は何處にあるか。7本の代も一本の代と同じ割合で買へうるといふ豫想をお互に默認して居るからではないか。同じ割合で＝即同し比で。これが比例の考を採用して居るものでなくて何であらう。此場合同じ割合の豫想なしに此の問題は解けよう筈があるまい。更に7本なるが故に7倍するといふ。7本なるが故に7倍するは7本は一本の7倍なるが故に7倍するのではないか。筆の數がm倍すればその價もm倍するといふ假定を許容しないで此の7倍に何の意味があらう。7本は1本の7倍であつたのである。此の1本は特定の數である。特殊な數量である。この特殊を一般化したなら直ちに比例の問題となるではないか。即ち、

例二、筆三本の價十五錢ならば七本の代は何程か。

7本は3本の $\frac{7}{3}$ 倍であるから、15錢×$\frac{7}{3}$＝35錢　之が即ち比例の解法である。15錢÷3＝5錢　5錢×7＝35錢　これは四則の解法だといふ。四則の解法中に比や比例の考は全然ないか。全然これなくて果して四則の問題は解きうるや。こゝを充分考へて見たいのである。私は言ふ。斷じて言ふ。比例の考も四則の考から發展して來る、否實は四則算中に比例の考かすでにはち切れさうになつて潜んで居るのであると。暗默の裡に人も許し我も許す。＝即ち相互に承認して居る比と比例との觀念。これが四則計算の根據である。故に四則のかうした計算は比例の一部分＝特殊な場合である。この特殊を一般化し、暗默を公然に導き出すものが比例の敎授に外ならない。

四　比例解法　比例で解きうる問題にはいろ〳〵の解法がある。（1）歸一法（2）

分數法（3）比例式法等。然しいづれも比例の考は充分内側に汪溢して居るのである。これを貫く原理は一つである。これを原理までも違ふものと思ふのは大なる誤りである。今例を上げて更に解説して見よう。

例三、七本の代三十五錢の筆は一打の代何程か。

第一は歸一還元法である。七本で三十五錢だから一本の代はいくら。（此の考の中に一本の代も七本の代も同じ割合である事を默認して居るし、また1本は7本の $\frac{1}{7}$ だから代も $\frac{1}{7}$ になることも當然働いて居る。）そこで、

35錢÷7＝5錢　これが一本の代である。次に、1本の代が5錢故12本の代は……と考へ方は發展して行く。（此の場合も價格の同じ割合なこと、一打即12本は1本の12倍な事が承認されて居るのである）。從つて代も12倍になつて、（相關的、函數的である）。5錢×12＝60錢　となるのである。此の歸一法は比例の解法でないと、普通は思はれて居る。私は言ふ四則の解法が比例の考へ方であるが故に歸一法はまた比例の考へ方に外ならない。唯比例といへば一般的であるが、その一般を導く1といふ特別な場合であるだけの相違である。

第二は分數法＝といふ名もちと妙であるが、所謂比例式を用ゐない解法である。比例式を用ゐないといふ事は決して比例の考を用ゐないといふ意味ではない。考は充分用ゐて居るのである。此の解法はかうである。

12本は7本の何倍か。$\frac{12}{7}$ 倍。（これが比の考へ方である）。代も $\frac{12}{7}$ 倍になつて、（相關的、函數的―比例の考へ方である）。35錢×$\frac{12}{7}$＝60錢　となるのである。倘12本は7本の $\frac{12}{7}$ 倍といふ考と、7本は1本の7倍とか、12本は1本の12倍とかを考へるのとの間に、何等か本質的の相違が存するだらうか。私は考へる。何等の相違もない。唯一つは1といふ特殊な數で、他はm又はnといふ一般的の數である。唯これだけの相違である。この相違は1の中に既に存して居るものから發展して來るのである。特殊を普遍化する道行に外ならない。

第三の考へ方は更にかう發展する。筆の本數の比は價格の比と相等し＝故にこゝの二つの量の間には正比例の關係ありといふ。かういふのは抽象的である。然しその抽象は第一第二の方法で考究した結果として歸納し得た所のものである。この樣な關係のある事が分れば、次の樣な比例式か成立つ、$7本 : 12本 = 35錢 : x$ 此の比例式は推論し得た所をそのまゝ式として表現したものに過ぎない。そして x 即求むる一打の代は此の式を解くことによつて器械的に發見しうる。此場合に働く推理は唯二つの量の間に正比例の關係ありとの推斷のみである。この推斷さへつけばその結果は直ちに比例式を得。その比例式を解く器械的解法（內項の積は外項の積に等しといふ比例式の性質の利用）さへあればよいのである。故に比例式を用ゐる解法は思惟の經濟的使用である。慣れゝば慣れる程推斷は平易迅速になり、解法は器械的になる、この器械的解法に比例の巧妙が存し、特質が宿つて居る。然し冥々の間、隱然として一大勢力を有する內部的思想は依然として比例の考へ方でなくてはならない。

以上正比例について極めて大體の考察を試みた。以下進んで反比例について若干の考察を拂はねばならぬ。

例四、或仕事を十二日間に仕上げんには每日人夫十五人を要す、この仕事を五日間に仕上げんとせば、每日人夫何人を要するか。

第一の解法は歸一法の解法である。十二日間に仕上げるのに人夫十五人づゝを要するのであるから、これを一日に仕上げようとするには、$15人 \times 12 = 180人$ を要すると推斷する（此の推斷に比例の考の存して居る事は改めて言ふ必要もない程明かであるのに、これは四則の解法で比例の解法でないと普通はいつて居る。）次に一日でするのに百八十人を要する仕事を五日でやるには人數を五分の一に減してよい事を推斷する。$180人 \div 5 = 36人$ これが所要の人數である。此の間に自明の理窟として働いて居る反比例の考があることを何人も否定出來まい。のみならず十五人とか百八十人とかの多人數で協力して仕事をする場合も、一人か二人の小人數で協力してやる時も、或は一人でする時も皆同一の能率が出る

ものであり、各個人の能力も皆同一のものだといふ假定が、不言不語の間に、課題する人にも課題される人にも承認されて居るのである。

第二の解法は分數的の解法である。これも亦考へ方は比例の考へ方である事勿論である日數が五日になれば十二日の時の $\frac{5}{12}$ になるから人數は却つて $\frac{12}{5}$ にならなければならない　故に　$15人 \times \frac{12}{5} = 36人$　と計算する。

第三は比例式を用ゐて器械的にこれを解く方法であるが、これとて二つの量の間の關係は反比例であるといふ斷定がまづ要るのである。そして初めて、

$$5日 : 12日 = 15人 : x$$

といふ反比例式が構成され、これを解いて所要の要件が充されるのである。

要するに比例の解法は、過去經驗から推斷し得る比例の關係を基礎にして正比例するか反比例するかを斷定し、その斷定に基いて比例式を構成しその比例式を解くことによつて所要の要件に到達しようとするのである。故に頭腦を使ふ所は比例するや否や、反比例か正比例かの判斷にある。その判斷さへつけば、比例式は自ら構成され、解かれ、所要の點に歸決される。故に式の構成から以後には思惟の經濟、頭の作用の儉約が行はれるわけである。この點から考へると比例解法の特徴は、その器械的な點にある。器械的になる――といつて比例の解法を攻撃する人が、前半の判斷について攻撃の手を向けて居るなら、幾分尤もな點もあるけれど、若しも後半にまでも攻撃の鋒尖をむけて來るなら、それは見當違といはねばならない。構成した比例式が正比例式又は反比例式になつて居るかどうかといふ判定吟味は餘程重要な問題である。私はその判定法として次の樣な方法を採る。それは二つの弧線（實際にかいても書かなくてもよいが今は人に説明する爲に實線としてかく）を描く。そして關係ある二量の連結をして見るのである。第三及第四の例でいふと、

$7本 : 12本 = 5錢 : x$　　　$5日 : 12日 = 15人 : x$

正比例の時　　　反比例の時

となる。故に正比例の式の型は必　　と互違ひになり、反比例のは　　交錯することはない。

五．複比例と連鎖比例

複比例は單比例の結合重複したものであり、連鎖比例は單比例が次々と一つづゝ連結して鎖狀の關係を保つて行くものである以上、原理としては何等單比例と變つた事がない。一はＡといふ一つの量に關係を有するＢ Ｃ Ｄ 等の數種の量があるのであるから、ＡとＢとついて考へる時にはＣ Ｄ等を除外して置きＡとＣとについて考究する時にはＢやＤを除いて置くといふ樣に別々に考へて行つた結果を、一つの複合比例式にまとめればよいのである。今一つの連鎖法の方は、Ａ Ｂ Ｃ Ｄ等の間の關係として、Ａ Ｂ、Ｂ Ｃ、Ｃ Ｄ にそれ〴〵關係がついて居て、ＡとＤとの關係を明かにしようとするのであるから、Ａの方からＡとＣとの關係をＢを介して明かにし更にその結果からＡとＤとの關係をＣを介して明かにするといふ樣にすゝむか、然らずんば逆にＤ Ｂの關係をＣを介して求め、Ｂ Ａ の關係を更にＢを介して尋ねて行くといふ樣にすればよいのである。複比例の方は實用上に相當の實例も存し、比例觀念の練磨上にも效力があらうと思ふ。連鎖法の方は實用上かくまはりくどい換算等をする事は少い。只比例の考へ方を練る上に幾分の效果を認むる位のものである。

六　按分比例

按分比例は單比例の特別な場合に過ぎない。それも主として正比例の場合である。然しこれにはいろ〳〵な場合があるので、いろ〳〵な場合を主な代表的問題で排列して見ると面白い。それには尋六、高一、高二等の教科書を通覽して見るがよい。先づ尋六では主として割合の明示されて居るもので、

例一、金四百圓を２、５、９ の比に三人に分て。

といふ樣なのから、

例二、甲は百五十圓乙は百二十圓丙は百圓を出して商業を營み、四十貳圓五十五錢の利益を得た。これを出金高の割合に分てば何程宛となるか。

といふ樣なのがある。これが高等一年にいくと、

例三、金百十五圓を $\frac{1}{2}$、$\frac{2}{3}$、$\frac{3}{4}$ の比に分て。

といふ樣に分數比に進んで居り、

例四、甲は千二百圓を八ケ月、乙は千圓を十ケ月、丙は七百圓を一ケ年出資し、共に商業を營み利益金千百三十四圓を得た、これを出資高と出金期間とに應じて分くれば。

と例二が進展して來てゐる。更に別に例二の變形として、

例五、甲乙兩人5 3の割合に出資して營業し、利益金千三百八十圓を得たり。乙は業務擔當の廉にて特に利益の三分の一をとり、殘りを出資高に應じて分配せり所得金各何程かとなつて居る。又別に、尋六年には、

例六、金七百六十圓を三子に與ふるに長子が5圓とれば次子は3圓末子は2圓といふ割にせんとす各何程づつ分くべきか。

とあるのが、高等一年には連比を求める必要が生じて、

例七、石炭三百四十噸を三艘に分載するに、甲船の分と乙船の分との比は7と6との如く、乙船のと丙船のとの比は3と2との如くなりと、各船の積高何程か。

のやうになり、高等二年に行くと更に、

例八、二百五十圓を甲乙丙三人に分配したるに、甲の9倍は乙の10倍に等しく、乙の2倍は丙の3倍に等しくなりたりと、三人の得分各何程か。

例九、甲乙丙丁四人共同して或仕事をなし、賃錢廿四圓十四錢を得たり。さて其の働きは甲七日の業に乙は8日を要し、丙は9日、丁は10日を要する割合なり、賃錢を如何に分配すべきか。

などと變つて來て居る。例九は例三の變形と見ることが出來るし、例八は例七の反比となつたものである。

これを見ると分數比を整數比に直すことや、連比を作ることなぞが按分比例の解法に附帶して重要な問題であることを失はない。而してこれは皆比の性質から發展して來る事柄である。即此の兩項には同一數を乘除してもその値を變せざること。此の性質から導かれ

る事柄である。

七　混合算　混合算は比例の一部分と見ることは出來ないかも知れない。然し關係を持つて居る部分があると思ふので一言を附け加へて置きたい。混合算には、平均價を求めるものと、混合の割合を求めるものとがある。平均價を求めるものは全然四則算の一種であるから、混合の割合を求めるものが獨立した混合算と見られる。そして混合を求めるのは、高いものと安いものとを損益のない樣に平均して、所要の値にしようとするのであるから、その根本條件として第一平均の價は高いものと安いものとの中間の價でなくてはならない。ＡＢの兩方のいづれよりも高い平均價やいづれよりも安い平均價には出來ない。第二にはその高いものと安いものとを混じて得る損益を分量で加減して損益の相殺をはからうとするのである。その相殺の條件を充す分量が求める割合になるのである。二種の量を求めたり、三種又はそれ以上の混合をしたり、或は或一種二種のものの分量をきめて置いて他の量の分量を求めたりするのがあるが、いづれも以上に述べた二つの根本條

件から出發するのであるから、細い點は略して置く。

第十三章　歩合算及利息算

一　歩合の考へ方

は言ふまでもなく比の考への變化したものである。比は一般的に n:m 又は $\frac{n}{m}$ として表はされるが、その値を小數として表はした場合はそのまゝ歩合となるのである。割合とか割とかいふ言葉はよくこの割り算の意味に適合して居る。此の値は割算によつて求められるからである。此の大小の比較は比そのまゝではなし得ない。必値を求めてその大小を比較するか、分數と考へて通分して見るかの必要がある。即

3:5　4:7　といふ二つの比があつて、その大小の比較をするには、是非小數として値を見て、3:5=0.6　4:7=0.571(+)　を比較するか。又は通分して　3:5=21:35　4:7=20:35　として比較するかの外はない、歩合は此の考へをそのまゝ用ゐたもので、表し方は小數的の表し方と、百分比としての表し方との二種ある。その内の百分比といふのは、分母を 100 とする分數に外ならず、小數の表し方は 10^n を分母とする表し方である。故に歩合は一般的の比の考へ方を特殊な考へ方にうつしたものといつてよい。

かく特殊分數を分母として比を表はす樣になつたのは一に比較の爲である。比といふ言葉が比べる意味から出て居るので、比較は比の本性といつてもよい。歩合に至つては殊にこの比べる作用が必要である。今一二の比を以てこれを明かにしよう。

「こゝに三つの學級がある。兒童數は 43　47　56　である。或月の授業日數は24日で缺席の總數は 65　80　71　である。どの學級が最よく出席した事になるか。」　授業日數こそ同一であるが、兒童數が異ひ、缺席の總數も違つて居るので、このまゝ比較しても比較のしやうがない。そこで普通どこの小學校でもする樣な百分比の計算をして、三つの學級の出席統計を試みる。九三・七〇、九二・九一、九四・七二　といふ百分比となつて出席歩合が出て來る。そこで初めて比較がとれるのである。或學級の出席狀況の今月と先月とを比較するとしても、兒童數や授業日數に變化があるので、そのまゝの比較は何の意味をなさない。故に百分比の必要があるのである。中の町は全戸數千五百戸、そのうち四百五十三戸が商

家、乙の町は全戸數千六百六十三戸、そのうち四百八十三戸が商家、どちらが商家の多くある割合か」如何に 485:1500 483;1668 といふ比をつくつて見ても、比は比のまゝで比較にならない。しかるにその比の値を求めて、〇.三〇二 〇.二九四 として見れば、はじめて比較が明瞭となるのである。その他損益の歩合にしても利息の歩合にしても、全然比較の必要がなく、一つ〳〵個々獨立のものたる限りは、歩合の必要は認められない。歩合は實に比べる必要から發達して來たものである。

二 歩合の表し方

パーセンテージの考は百分比の考に外ならない。 に百分比と割合の兩方が存することは既に一言して置いた。分分數によるかがよい。記述の方法としては小數によるか、100 元高と歩合高とから歩合卽比の値が發見される。公式 歩合高＋元高＝歩合 は當然出て來る事柄である。然しこの公式は幾つかの具體的經驗を重ねた後兒童が自身に構成し歸結すべき性質のもので、最初からこれを與へて置いて、この公式にあてはめて計算をさすべき性質のものではない。かういふ事をする結果は、當然計算が器械的になつて無意味な運算をするやうになる。またこの公式から更に他の公式を二つ誘導することが出來るが、その三つの公式を一々暗記させて公式に當てはめる如きは、感心する仕方ではない。いづれか一つを考へうる時、他は當然生れて來ねばならない。自分の經驗からいふと、元高×歩合＝歩合高 の一つを基にするが考へよい仕方であると思ふ。何故かといふと、歩合高を求める時は、分數の の何分の何 と同じ考へ方で、の何割何分となつて掛け算となるが、他の二つはその逆の除法となり、いつも歩合高を割ることとなるからである。しかもこんな事は歩合高の最本質的な部分ではない。歩合算の歩合算たる價値は、實質算としての方面にある。

三 實質算としての歩合算

には損益の計算や、租税の事や、利益、公債、株式等方面は仲々に廣い。しかもそれが一々特別な社會的事項をふくむから、それ〳〵その注意點が變つて來る。けれどもその變つてゐる社會的事實の中に、歩合算としての變らないものがある。その變らないものが歩合算の統一點ある。歸決點である。從つてまた學習の主

眼點である。また租税の如きも、地租があり營業税があり、所得税や關税や、その外いろいろ違つた事情の下に、異つた税率及課税の方法が存する。現在施行の法規の下に、その課税法 税率等を研究させる事も大切な仕事であらう。然しそれ等の多くは、時と共に變遷する。敎科書の改訂がおくれて居る間に、所得税・地租の如きは數回改正されて居る。私共は變るものを取扱ひながら、その中に變らないものを學習させる態度を持する必要がある。變つて了つたものをそのまゝ取扱つて居る愚は言ふまでもない事であるが、いつになつても變らないものを學習させる考なしに、變る所のものに捉はれて居るのも襃めた話しではない。事實算としての歩合算に變らぬものは何か。それをしつかり握らせるにはどんな注意點が要るか。この研究は最必要な事項であるといはなければならない。各種税金等の事についてそれの特質をあげて細かい事を言ひはじめれば切りがない。所得税の超過累進率の如きは特によく研究する必要もあらう。しかし今各論の細部に入る餘裕がないので略して置く。

利息の問題は歩合算と比較して、期間といふ觀念が增して居る。これは問題を一目見てたれしも氣のつく點である。この期間の研究は利息算に對して最重要な一項といはなければならない。既に期間を考へる以上、利率のあらはし方は、必期間と相伴つて離れられない關係に置かなければならない。利率のあらはし方は普通年利、月利及日歩の三樣であるその三樣の變化は當然期間に影響を及ぼす。今試みに「或銀行から日歩二錢八厘で金七百圓を借りた。一ケ年間の利息は何程か。四ケ月間の利息及七十五日間の利息は何程か」といふ問題と『或銀行から月利一分にて金七百五十圓を借りた。一ケ年間の利息は何程か。四ケ月間及七十五日間の利息は何程か』といふ二つの問題を比較して見給へ。此の區別が最明瞭に表れて來なければならない。而るに利息算を習つて此點の不明瞭な兒童があれば、未だ利息算を習つたのではないといはれても止むを得まい。自分は利息算の研究上、常に此の點に不明瞭・不徹底を見ることが多い。これを一言にして言へば利率と期間とは必對應させねばならぬ。これ利息算の主眼點である。而して此點を一層明瞭にする爲には第二

の着眼點を考へるがよい。それは一期間の利息といふ事である。利息算計算の根本的な考へは此の一期の利息にある。一期の利息の求め方は、これを公式の樣に表はすと二樣ある。元金×利率　利息÷期間　がそれである。この内日歩の計算は第一の式の通りでも表し得るが、普通は　$日歩\times\frac{元金}{100}$　の形をとる。これは利率を歩合でいはずに、何錢何厘とあらはす爲である。第三の着眼點は日歩の意義である。日歩の計算は日一日と多方面に活用されて行く。百圓一日につき何錢何厘。此の百圓一日につきが、此の意味となり、同時にまた利息算の最大切な部分となる。期間との關係、引いては一期の利息と關係づいて來るのである。

以上は單利法に關してであるか、複利法についても、その特殊な點、利息表の利用等の問題があり、複利から更に貯金の計算へも特別な連絡が存する。これ等はいづれ機を見て詳細に申述べる積り。

公債株式は一種の利息計算である。公債が債務の一種であり、利息算の一部分であることは勿論であるが、株式投資はまた一種の債權獲得に外ならない。唯普通の債權と性質の異る點は利率の不定な點である。

公債及株式が一種の商品として市場に賣買せられることは、普通の貸金證書や預金證と異つた點である。賣買の行はれる爲、時價が生じ、時價あるが爲に利廻りの計算が必要となる。利廻りは二つ若くはそれ以上の公債株式を購入するか、乘換へるかする爲、比較の必要を生じた時に是非なくてならぬ計算である。歩合の考は比較を要するによつて發達して來たといつた言葉は、こゝにも亦あてはまる事柄である。

四　生活化と歩合算　各方面からこんな質問に接した。『私の地方とすると、公債や株式の賣買は全然行はれて居ないし、生徒の生活の中には勿論ない。それ故教育即生活である以上、公債や株式は全然取扱はなくともよからうと思ふ。今のうちは只將來そんな事に出會つた時、それを理解するだけの力だけ養つて置けば足りると思ふ。これについての所見はどうか』といふ樣な意味の質問である。

私はこれに對して次の反問を二三試みる。そしてその回答の如何によつて返事をしたいと考へる。第一は私の今居る所も、前に居た所も可成りの田舍である。けれども公債や株式を持つてゐる從つてそれを賣買する人は村中に少しもないといふ樣な事はなかつた。近頃では取引店さへ出來て、毎日の相場が格子先の小黒板に日々掲示される程である。貴下の居られる村では全くほんとうに公債や株式は見られないか。

第二に公債株式はともかく、新聞は入つて行かないか。新聞の相場記事は我々にふだん殆用のないものであるが、あれを必要とする人は貴下の村には居らないか。

第三に子供の生活といふものを、直接の子供自身の生活とのみせまく見て、その家庭、その町村、その屬する國家の出來事は子供の生活とは沒交渉なものと見るか。若し見ないなら何年生位から稍廣い意味の環境も兒童生活の中に入れて考へるか。

第四に力を養ふといふ。その養ふべき力を養ふ時の資料として何をとられるか。公債も株式も、利息算も子供の生活にはないからやらぬとしてそれ等を理解する力は何から養へるか。

以上の數點を眞面目に考へるなら、私は此の問題に對しての答案は自ら出來る事と思ふ佐藤教授の「文化と教育上の諸問題」は徒らに偏した考を持つものに、最懇切な解答をしてくれてゐる。其の六七頁乃至六九頁あたりを熟讀玩味して頂きたい。

第十四章　代數的取扱

一　代數的取扱の加味　小學校の算術を初等數學の一部門たる所謂算術に極限せしめないで、數學としての取扱に擴張せよといふ議論から見れば、代數的の取扱を加味する事は當然の仕事である。けれども從來算術と代數とを嚴密に區別し、どつちでも解きうる問題に對する時でも、これは算術だから代數の樣には考へられぬとか、これは代數であるから代數的に解かねばならぬといふ樣に、限界を設け垣根を構へてゐた習慣から行くとこれは餘程の大問題に相違ない。ある時ある所の研究會で、此の問題についての意見發表のあつた時、一人の代表者の意見として、「我々の敎へる子供はまだ算術すらよく出來ない、それに代數などゝ手を伸ばすのは考へものである。宜しくまづ基礎である算術をよく學ばせる事が大事である。」といふ樣な意見を聞いた事がある。算術を了つてからでなくては代數を學びうるものでないと、頭からきめてかゝつて居る所にこんな議論も出て來るのである。

吾々はまづ代數學の敎授と代數學的取扱とを區別して考へる必要がある。中等學校の數學敎授でさへあまりに分科的に過ぎ、非實用的に過ぎ、專問科學的に陷つて居るといふので、算術と代數と幾何との障壁を徹して、これを數學科といふ渾然たる統一的有機體として取扱はねばならぬといふ近代の思潮であるのではないか。吾々は決して初等代數學といふ一科目を、更に小學校の學科中に加へて算術及他の諸學科と對立させようとするものではない。さなきだに敎科目の多すぎる小學校に於て、未だ課して居ない新しい敎科目を加へる必要を毛頭認めない。かういふと、それが假令算術の一部分として取扱はれたとしても、未だ課して居ない代數的取扱を加ふる事は、兒童の負擔を重くし一層敎科の範圍を擴大するものであるから、實質は數學科として課しても代數といふ獨立學科として取扱つても、負擔を重くし生徒を困める事は同じであるといふ議論もあるかも知れない。

然しこの說は代數的取扱の眞精神に觸れて居るものではない。吾々はむしろ代數的取扱

の導入によつて、今まで分り難かつた數の世界を明瞭にし。從來困難とした解法を、や、さ、し、くしたいと考へるのである。これを他の言葉でいふと、算術ではそんな解法はいけないといふ樣に城壁を高くして、一歩も他の方法の侵入を許さなかつた問題の根じろに、代數的觀念とその取扱といふ新武器を向けて、やす〳〵と肉迫し、容易にその牙城に突入せしめようとするのである。即ちわざと六つかしくして居た算術といふ城壁の攻擊法に代數的取扱の加味といふ新しい考へ方を採用する事によつて、やさしいものをやさしく取扱つて行きたいと考へるのである。然らばいふ所の代數的取扱とはどんな事か。余は次の三項を以て小學校の數學に加味したい代數的取扱の要點としたいと思ふ。第一簡單なる方程式の取扱、第二數量の代數的表出、第三負數觀念の導入これである。以下項を追つてこれを解說して見よう。

二　方程式解法

を早くから採用して代數的取扱の中心事項としたいと考へる。尋常一年生あたりで、加減の逆算を考へさせるのも、一種の代數的取扱である。よく△のような符號をつかつて居るが、その△の代りに x を用ゐても、子供にとつては同樣の事である。むしろ時には△を以て表し、時には x 或は y を以て表出する方がよいと思ふ。國定敎科書のように、尋常四年から x の使用をはじめて以後五年間、高等二年の終りに至るまで、未知數の x 唯一つを以て始終しようとするのはどんなものであらう。この事は文字を以て數量を表すことを研究する時に詳しく考へて見たい點である。

方程式解法を採り入れるのは、それによりて考へ方をやさしくし、計算を器械的にせんが爲である。比例の解法が四則算の解法よりも器械的であつて、思惟の經濟になるといふ事は、比例の條項で述べたが、方程式の解法も同樣な意味である。アインシュタイン氏が子供の時、叔父さんに向つて『代數つてどんなもの？』と聞いた時、聰明な叔父はそれに答へて『それは橫着者のやる算術でネ、分らないものを分つた事にして文字で書き、そして式を書いちまつてやる算術の事さ。』と無造作な說明をして呉れたさうである。その無造作な說明が代數の何物たるかを、アインシュタインによく說明して呉れたので、あとは

殆獨學で初等代數が分つたさうである。その横着者にも出來る所に、方程式解法の妙味があるので、わざ〳〵六つかしくしなければすまされないような取扱では、代數導入の妙味はなくなつて了うのである。四則算で解くと極めてこみ入つて居る問題が、未知數の一つ二つを借る事によつて譯もなく出來る。そこに代數の意味がある。故に余は方程式解法——就中事實算の解法を以て代數取扱の中心としたい考である。さうすれば尋常四年頃からボツ〳〵はじめて小學校の八學年を了るまでには、二次方程式の解法位までは、當然やり得る事であらうと思ふ。昨年の十二月から今年の三月にかけて、尋常六年生に僅か二十六七時間の取扱を試みた結果によれば、聯立の方程式までは取扱ひ得たのである。

方程といふ言葉は支那の九章算經から出て居る。九章は二種あつて、其一つは支那上古より傳ふる所の算法を、有熊氏が隷首に命じて作らしめたもので、これを黄帝九章といひ他は周公九章即九數で、周公旦の選する所、之を六藝の一に置き以て國子を敎へたといふ。方田、粟布、衰分、少廣、商功、均輸、盈朒、方程、勾股の九章からなつて居る。今其の方程の解説を見るに、「方は比なり程は數なり。故に方程は二數を方比して相等しき數を作るの法也。蓋諸物繁冗諸價錯雜なるもの、其繁を芟りて簡に就くの術大に此に存す。故に布算行列して損益加減し、正負相比して適等數を求むるものとす。」とある。繁冗錯雜なるものを簡單にするのと、二數を方比して適等數とするのが目的である。即六つかしいものをやさしくする爲に等號の兩邊を等しくして平均させるのである。

三　文字を以て數量を表はすこと

これは代數と算術とを嚴格に區別して各他の領域を犯してはならぬものと、一圖に思ひ込んで居る舊式の數學者も、實は思考上の便宜から常に採用して居る方法である。利息算の公式として、元金×利率×期間=利息 といふ式を用ゐるのは、一種の代數ではないか。圓の面積を求むる公式として、$r^2\pi$ を用ひるなら、これまた立派な代數式ではないか。甲の2倍とかき、乙の3倍と記し、大から小を引く等、皆簡單な表出の爲文字と數字とを併用して、考へ方の便利に供して居る。いづれも皆、文字を以て數量を表はすに外ならない。德川時代の和算家は未知數を天元之一ま

たは混沌の一と命け、大斜・中斜・小斜、勾・殳・玄、弦・矢等の言葉を以て數量を表示させこれを用ゐて方程式を作り、その式を變化させて、立派な方程式の解法を發達させたのである。

高次方程式の近似解法の如き、英國のホルナー（1819）の發見に先立つこと數百年、西紀 1247 年には既に支那に發見され、十七世紀の初めには日本に傳はり、更に高度の研究が試みられ、元祿二年に出來た安藤吉次の一極算法といふ書は、七乘冪の方程式唯一題を解說して、一冊の書物となつたのださうで、正負各五千五百三十八の根が出る筈であるといふ事である。安藤はそれを省略して、正百三十二負百十四の根を出したとの事で、それにしてもその根氣と努力と更にその前諦に横はる數學力とが、極めて旺盛であつた事を知られるのである。

國定教科書が僅かに x の一文字を使つて居るといふ事については、先に一言したのであるが、考へ方を一般的にし法則化する爲には、いろ〲の文字を用ゐなければ、其の目的を達成する事は出來ない。去年六年生に試みた時、余は a b c x y z の六文字を使用して見たのであつた。更に m n とか α β とか若干の文字を加ふることにすれば、小學校の取扱には充分間にあふであらう。文字を使用して行く時の抽象度は、數字を以て示す抽象度とさう變つたことはない。$\frac{1}{2}gt^2$ とか $r^2\pi$ とかといふものの考へ易いのは、g が gravity を、t が time を示すことの聯想によりて、非常にやさしくなつて居る。國語の異ふ日本の子供には、g が重力、t が時、といふ樣に發音上の頭文字と考へさせれば、割合に考へよからうかと思ふ。昔の人が勾殳とか斜とか弦・矢などと、其のまゝの文字を使つて行つたのは、考へ方をすゝめて行く上に賢い方法であつたらうと思ふ。子供にある數量をあらはさせる時、ローマ字の頭字を連結して考へさせるのも一方法であらうと思ふ大小二數を示すのに A と a とを取る如きは、子供に考へよい方法であるは勿論のことで工夫を要する點である。

四　負數の導入

方程式の解法をするのに、負數を借る事は必須の條項をなすも

のではない。けれども負數の考を採用する事によつて方程式の取扱が一層簡便になる事は爭はれぬ事實である。それ故負數の考へ方は極めて古代から發達して居た事が分る。支那でいへば先に說明した九章中に、既に正負の考へ方があり、埃及文明の中にもあつた樣である。アレキサンドリヤ學派の數學者で、チオフアンタスといふ偉人は、其著の中に、負數と負數との積は正である事を書いて居る。其の著といふのは、アリスメチカといつて、埃及で發見されたパピルスに次いで、最古の數學書である。

子供に負數を學ばせるには、先づ實際生活中に方向の相反する量の存在する事を考へさせて、それについて正數及負數の考へ方に導くがよい。例へばAの地を基點として東の方向にすゝむのを西の方向にすゝむのと比較したり、財產といふ言葉の中には資產と負債とをふくんで居て、其の財產としての性質は相反して居ることを明かにしたり、或は寒暖計の0度以上及以下を考へる如きいづれも最普通にある實例である。更に子供の遊戲中にこれを求めるとすると、トランプのスペイトを負に計算する如きは、子供の日常生活中に常に經驗する事柄である。

自然數のみの數の世界は1から初まる加一の序列である事は既に屢これを述べた處である。然し逆の考へ方を採る事によつて、零を生じ更に -1 -2 等の負數に發展する。故に正負の考へ方は加一の逆として生れるものであつて、其の結果として數は方向を持つ事になる。即絕對値を等うして反對の性質を有する二數が、0を中心として互に對稱の地位に存在する事になる。そしてその二數の和は常に零である。3 と-3 とは絕對値が等くして方向が相反し、0を基準として考へる時兩方が對稱的位置に數序列の中に在る。そしてその二數の和は0である。$2\frac{1}{3}$ と $-2\frac{1}{3}$ とについてもaと-aについても同樣である。

正の數の範圍內では減法は制限的である。即ちmがnより小ならざる時にのみ、$m-n$が成立する。mがnより小さい時には、$m-n$は不能な問題である。然るに負數の導入によつてこの制限は撤廢され、無制限に $m-n$ が成立する事となる。これは重大な數の性質の擴張である。

負數の導入に際して、四則算の意味の擴張に際する困難に遭遇する事は、分數導入の時と殆同樣である。即ち $(-a)\times c$ が負である事はこれを累加として說明し得るも、$c\times(-a)$ も負である事と $-a$ を乘ずるといふ意味と說明に困難を感じ、更に $(-a)\times(-c)$ が正の數となる事は、一層子供に考へ難い點である。余は此の點について、どうしても算法不易の法則から說明する必要があると思ふ。即交換定則によつて $(-a)\times c$ と $c\times(-a)$ とは等しくなければならぬ事から、兩者共に $-ac$ の値を採る事を知り、配分定則によつて、

$$(a-b)\times(-a)=a\times(-a)+(-b)\times(-a)$$

$$(a+b)\times(-a)=a\times(-a)+(+b)\times(-a)$$

の兩式を作りて各其の結果を比較する事から、$+b\times(-a)$ は負であり、從つて $-b\times(-a)$ は正の値を採ることを考へ、更にこれを他の多くの實例に當てはめて考へる等の事をする必要がある樣に思はれる。中等學校の教科書では『負と負の積は正と決める』といふ樣に取扱つて居る。それでも差支はないのである。德川時代の天元術や點竄法の取扱も皆さうなつて居る。

負數の導入によつて、減法は絕對値の反する數を加へると同じ結果となり、加法の一部と考へられるやうになる。

從つて方程式の移項は極めて手輕に、符號をかへて反對の側にうつすを以つて足りる事となり。計算は極めて器械的となるのである。日本數學に於ても支那の研究を繼承して、正負相消すと稱して取扱が簡單になつて居る。即正の3と負の3とは相殺して零となるの意味である。代數的取扱の實際例については、算術教育の大正十三年九月號以下に掲載してある拙稿を參照せられん事を望む次第である。

一 $(-b)\times a=a\times(-b)=-ab$ である事が分つた上は次のやうにして $(-b)\times(-a)=$

$=+ab$ である事卽 負×負=正 の證明が出來る。$a(b+c)=b+ac$ と $(-a)+(+a)=0$ とから $(-b)\times[(-a)+(+a)]=0$ でなければならぬ。然るに $(-b)\times[(-a)+(+a)]=(-b)\times(-a)+(-b)\times(+a)=0$ 然るに $(-b)\times(+a)=-ab$ であつてこれと加へて0となる爲には $(-b)\times(-a)=+ab$ でなければならぬ。故に $(-b)\times(-a)=+ab$ 從つて 負×負=正 である。これ亦算法不易といふことに基く證明である。

第十五章　グラフの取扱

一　何のために

グラフを取扱ふのであらうかといふ事を、中等學校敎員の會議で質問して、某博士から答辯の必要を認めないといふ回答をうけた先生があつたといふ話を聞いて居る。此の一事を以て見ると、グラフを採用する意味は、當然過ぎる程分つて居なければならない問題のように見える。そして同時にその當然過ぎる程當然であるべき筈のグラフ採用の目的がまだ専問の數學敎育者にすらよく領解されて居ない事實を物語つて居る。何のためのグラフであるか。これを明かにする必要は、矢張嚴として存して居るのである。

或人はいふ。グラフ敎授の目的は函數思想の養成に在ると。或人はいふ。グラフは函數其他數量的事項の圖解並に數學各科の連絡を圖る爲であると。或人はいふ。グラフ敎授は單に函數思想の養成のためのみでなく、算術を子供らしくする爲にも必要であるし、廣く

社會生活に役立つ爲にも必要であると。單に函數思想の養成の爲とするのはあまり偏狹であらうと思ふが、非常に廣く考へて居るのは、グラフといふ言葉の意味を廣義に解し過ぎて居る爲ではないであらうか。

二　グラフの意味

此の頃グラフといふものを餘り廣く見すぎる傾向がある。算術教科書中に入れてある表及圖はすべてグラフである如く考へて、腰掛に腰をかけて居る子供の繪も、學校裏の山の上を飛んで居る飛行機の繪もグラフであるが如く考へようとする人もある。これはあまりにこぢつけといふべきではないか。

それについて、學習院の柿崎教授は、グラフ Graph とグラフイカルプレゼンテイション Graphical Presentation とを區別して考へる必要のある事をいつて居られる。數量を圖で表したものは皆グラフイカルプレゼンテイションであるが、グラフはその或る特別なもので、直角坐標によつて函數關係を表すものであるとして居る。

さうかと思ふと廣島高師の新宮教諭は、グラフを靜的動的の二つに區分し、函數グラフを動的グラフとし、他の數量的圖表示一切を靜的グラフとして居る。又氏は別に便宜上の名稱として、算術的グラフ・代數的グラフの名稱をも採つて居る。この動的グラフが柿崎氏のグラフで靜的グラフはグラフイカル、プレゼンテイションの事であると見做しうる。

余は眞の意味のグラフは直角坐標によりて函數關係を表示するものであると思ふ。さうしてグラフ取扱の眞精神は、函數觀念の養成であらねばならぬ事と信ずる。然し小學校の算術科の取扱としては、廣い意味のグラフィカルプレゼンテイションも多少取扱ふ必要があるといひたい。各種の統計の圖表示を見て、その意味を解し、自ら圖に表示しうる事は大切な生活上の常識であると思ふからである。

ピクトグラムや棒グラフ等によつて、各種數量の具體的表示をする事から初まつて、扇形グラフや、グラフ的カーブの表示する意義を明かにし、進んで正比例の一次グラフ及換算グラフ等に及ぼすことは、最適當な順序であると思ふ。

三　取扱上の要諦

グラフ及グラフイカルプレゼンテイションの取扱上、特に注

意を要する點は次の三項であらう。

他人の作製したグラフ又は圖表示についてはこれを讀み得る能力を養ふ事は、最初に大切な要諦であらう。圖表示を見て、その圖表示の示す所の意味を知るとは、單にその圖表の各部分に表はれて居る數量を讀み得るといふのみでは讀む力として完きものではない。假令は尋常五年用教科書八一頁にある、東京に於ける日々の平均溫度表についていへば、各月の平均溫度を指摘しうる事は大切な讀み方の一項には相違ないが、更に大切な事は、圖に表はれて居る變化の大勢及其の傾向の指摘である。教科書に問いて居るのは「最寒い月は何月か」といふのであるが、最寒い月と最暑い月に於けるその溫度をよみ、更にその寒い月から最暑い月に至るまでの溫度上昇の傾向・狀態を見る。そして最變化のはげしい月は何月から何月にうつる時であるか、その變化の緩漫な時はいつか等を考へ、これを判斷する頭が圖表を眞によむ頭であつて、圖表から判斷した見識ともいふべきものである。圖表をよむ目的は此種の判斷力と見識とを養ふ爲である。

物價の高低を示す罫線をよんで、過去を見、現在を知り、更に將來を察する所に、罫線の妙味が存すると思ふのである。函數グラフについても、或は線の示す傾斜の度により、或はy軸を切る點の位置によつて、x y の關係に相違を來すことの考察は、最興味ある研究事項である。圖解によつて表示するのは、複雜な數量的關係を具體的にして、一目瞭然、其の數量間の關係を明白に解し得るやうにせんが爲めである。其の關係をよむ事が圖をよむことである。圖の上で比較し對照して、數量の大小・增減・變化を見ようとするのが圖計算である。國定教科書では、動ともすれば圖の中から數字を讀み出してそれを計算して、總和や平均値を出さうとするやうな取扱にのみ力を入れて居る。尋五の七頁(7)米の産額に關するもの、同八一頁(13)東京の一年中の平均溫度を求むる如きがそれである。グラフはグラフとして圖上で考察する大切な使命がある。それを一々數値計算に翻譯せねば氣がすまぬといふのはあまりに計算に捉はれた考へ方である。

よむ事に次いで大切な事は、作る事である。實は眞によむ力を養はうとするには、どう

しても書かせなければならぬ。實驗や實測によつて、はじめて眞に數の觀念が作られるように、グラフの觀念はグラフを描く事によつてはじめて體得される。百聞一見に若かずといつた時、百見は一驗に若かずといつた人がある。人の作つたグラフ圖表示を見て居るだけでは、眞に數量の圖解といふものを體得する事は出來ない。どうしてもこれを作つて見る、描いて見る必要がある。Godfrey and Siddons :—— Elementary Algebra などでは、十二三歳の子供が、盛に二次曲線等を描く課題を課せられて居る。『二次曲線は六つかしいから讀ませるだけでよからう』といふ人がある。六つかしいなら一層これを分らせる爲に描かせる必要がある。そしてそれはさう困難な仕事ではない。却つて抽象數のみで考へるよりも考へよい方法である。高等二學年の新教科書では双曲線や拋物線を取扱つて居る。これ等は子供に描かせる必要があり且つ描きうる事柄であると信ずる。

グラフを描かせる上で、機微の點に注意を要するのは材料の困難といふよりも、描かせる上の困難である。これは多くの場合自分等の經驗では、教師の子供に描かせる上の經驗不足を物語つて居る。はじめて直角坐標上に x　y の兩軸を描かせる時に、目盛りの數へ方や原點の0を標示する事等は、初心の子供の非常に誤り易い點で、綿密な上にも綿密な注意が入る。グラフ教授の難點は實にこの坐標觀念の入り難い事にある。

グラフによつて問題を解かうとする事は、あながち悪い方法ではない。四則算其他の方法よりも、グラフに表すことが一目瞭然極めて解し易い事もある。電車の一運轉系統中に行違ふ他の電車の時と場所とを知らうとする問題や、あとから出て先きに進む列車又は車を追ひ越す問題の如きはこれである。數へたてゝ見ればグラフを利用して解きうる問題は少からずある。けれどもそれは解けばときうるといふのである。解きうるが故にすべてをグラフで解かす必要があるわけではない。一般的にいへば、グラフを問題の解法に利用しようとするのは、迂遠で面倒な方法である事が多いのである。多くある方法の一つであつて必しも常に採るべき方法ではない。

四　グラフと誤差

誤差と誤謬とは全然違つて居るものである。グラフは誤差を

伴ふからいけぬ筈といふものは此の兩者の區別を知らぬものである。人間といふ個人差を持つた不完全な動物が、一定度以下の誤差を許さなければならない所の不完全な道具を用ゐて、測定し評價し、それに基いて計算をするのである。然かもその計算には普通近似値計算を以て滿足せねばならぬといふ計算上の誤差をも伴つて居るものである。人間世界の事には必誤差の伴ふべきもので、誤差の全然伴はないといふ事は殆ど絶望な事柄である。故に誤差とはありうべき誤で、同時に許さるべき誤である。理論的には正しくして人間の不完全なるが故の不完全と見做すべきものである。

誤謬は誤差とは全然性質上の相違がある。これは理論上の不正であつて、許さるべからざる誤である。これあるを避けうる誤であつて免れゝば免れ得る誤りである。

かくの如く考へて行く時、子供が描く時讀む時、誤差の伴ふことは自然である。出來うる限り誤差を少くしようとする努力はさる事ながら、全然これを皆無にしようとしても出來うる事柄ではない。當然ゆるさるべき誤である。或人は初心の子供に對しては、十分一以下の誤差をゆるすがよいといつて居る。初の間そんなに大きい誤差を伴つて滿足した子供も、いつかそれでは滿足が出來なくなつて、だん〳〵に誤差を少くして正確度を多くしようとする努力に進むものである。はじめから精密と正確とを強いてもそれは子供に相當した事柄ではない。

五　國定教科書中のグラフ

及グラフイカル、プレゼンテイションを一瞥すると次の様になる。

A、グラフイカルプレゼンテイション。――(靜的グラフ)。

尋五	p.7 (7) 7	米の産額	棒グラフ
	p.81 (13)	平均溫度	カーヴ
尋六	p. 9 (7)	エツフエル塔と十二階	ピクトグラム
	p.16 (4) p.30 (10) 10 p.37 (7)		扇形グラフ

高一	p.43	(5)	5	汽船の噸數	棒グラフ
	p.65	(12)		身長と體重	カーヴ
	p.11	(31)	31	六大都市の人口	棒グラフ
	p.22	(3)	3	海陸の面積	扇形グラフ
	p.79	(5)	5	體溫脈搏	カーヴ
高二	p.69	(6)		體溫	,,
	,,	(7)		米產額	,,
	,,	(8)		人口	,,
	p.70	(9)		身長體重	,,
	,,	(10)		身長	,,

B、グラフ——(動的グラフ)

尋六	p.61	(15)		期間と利息(單利)	一次直線
	p.77	(8)	8	期間と利息(複利)	指數曲線
	p.81	(11)	11	列車運行	ダイヤグラム
高一	p.44	(9)		數量と値(正比例)	一次直線
	,,	(10)		時間と距離 ,,	,,
	p.45	(11)	11	矩形の縦と横(反比例)	直角双曲線
	,,	(12)		人數と日數 ,,	,,
	p.58	(9)		尺と米(換算)	一次直線
	,,	(10)	10	貫と瓩 ,,	,,

高二

p.61	(19) 19	落體の距離と時間	拋物線
p.62 | p.65		坐標	
p.66	(18) (19) (20)	一次直線と聯立方程式解法	
p.67	(1) (2)	數量と値(正比例)	一次直線
,,	(3)	列車運行	ダイヤグラム
p.68	(4)	矩形の縦と横(反比例)	直角双曲線
,,	(5)	人數と日數 ,,	,,
,,	(11)	追ひかけの問題	一次聯立
p.69	(12)	電車運行表	ダイヤグラム

大要以上の如くである。これだけの材料をこの順序に取扱ふだけで、果してグラフ的取

扱の目的は完うし得るや否や、これは今後の研究に待つべきものである。

數概念の擴充と數學教育 (完)

大正十三年十一月五日印刷
大正十三年十一月十日發行

數概念の擴充と數學教育
定價金壹圓九拾錢

編著者　小川通司

發行者　東京市牛込區新小川町二丁目四番地　宮崎彦麿

發行兼印刷者　東京市本郷區春木町三丁目三十七番地　小川善七

印刷所　東京市小石川區戸崎町九十三番地　三共出版社印刷部

發行所　東京市牛込區新小川町二丁目四番地
電話牛込一七六二番
振替東京五三三五〇番
三共出版社

大賣捌
【東京】三省堂　東京堂　東海堂　北隆館　至誠堂　榊原
【大阪】寶文館　柳原　【名古屋】川瀬　【長野】西澤
【九州】菊竹　大坪　【札幌】富貴堂　【大連】大阪屋

近刊豫告 本書の姉妹篇

空間教育の實際

小川通司著

四六版二百餘頁
多數圖版挿入

空間教育は數教育と相俟つて數學教育の一大分野である。然るに數教育のみが數學教育であるかの如く誤解されて居た結果、空間教育は非常に輕ぜられ虐げられつゝ今日に及んで居る。著者は夙に此の方面の教育に必要を感じ、趣味を持ち、研鑽多年、一々兒童生徒に實驗した結果を採錄して此の一篇を得た。恐くこれ、遊戯とし作業とし生活としての學習法であるから新數學の要求に合致する新主張新企圖といつてよい。これを參考とする事によつて、小中學の空間教育は必ず新生面を開くであらう。敢へて一本をすゝめる。

14年 2月 22日

終