始

中學
代數教科書

卷下

理學士
千本福隆
著

光風館藏版

中學

代數教科書

卷下

目次

第六篇 自乘,開平,開立,無理數

比例式の證明法

第九篇 級數

第十篇 一般の指數,對數,步合算

一般の指數

對數

步合算

附錄

目次

終

豫定授業時數,問題數等一覽表

學年	篇	節	頁	例	公式法則	問題	授業時數	(補習)
III	第六篇	7	47	26	24	**73**	**19**	(69)
	第七篇	15	92	71	28	**197**	**52**	(125)
IV	第八篇	7	39	27	13	**67**	**18**	(23)
	第九篇	3	26	11	8	**93**	**20**	(25)
V	第十篇	7	52	34	17	**92**	**24**	(58)
	計	39	256	169	90	**522**	**133**	(300)

(一) 補習問題及附錄は總て上の豫定時間外の課程とす.

(二) 教授者は上表に示せる教材の總量及授業豫定時數等を考量せられて豫め各學年の進度を定め置かるるを便利とす.

(三) 著者は第四學年迄に於て,本書の本論を終へ,第五學年に於ては補習問題及附錄に就て全書を反復練習せしむることを進むるものなり.

中　學

代數教科書

第六篇

自乘,開平,開立,無理數

自　乘

52. 自乘の公式

乘羃(羃)とは同じ數を幾つか取りて,次第に掛け合せたる積を表す式なり(第21節).

$a\quad aa\quad aaa\quad aaaa\quad aaaaa.$ ハ**積の式**…(1)

$a^1\quad a^2\quad a^3\quad a^4\quad a^5$ ハ**羃の式**…(2)

此處ニ a ハ**羃の底數**, 1, 2, 3, 4, 5 ハ**羃の指數**ナリ.

羃の指數とは一つの數の乘羃の式に於て,其數を幾度因數として取るべきかを表す數なり.

【注意1】 羃指數ハ正ノ整數ナリ.

$a^1=a$ 羃指數ガ1ナル乘羃ハ底數ニ等シ.

自乘　或數の乘羃を求め,或は或式の乘羃を展

開することを**自乘**といふ. 自乘ハ乘法ノ特別ノ場合ニ過ザレドモ,**開方**及**對數法**(第十篇)ノ基本ニシテ四則(加減乘除)ニ續クー則ト見做スガ普通ナリ.

底數,冪**指數**及**冪**を**自乘の三元**トイフ.

指數の定則トハ次ノ五ツノ公式ヲイフ.

$$a^3.a^5=a^8 \qquad a^m.a^n=a^{m+n} \quad \dots\dots\dots\dots\dots [1]$$

$$\left.\begin{array}{ll} \dfrac{a^9}{a^4}=a^5 & \dfrac{a^m}{a^n}=a^{m-n} \\ \dfrac{a^4}{a^9}=\dfrac{1}{a^5} & \dfrac{a^n}{a^m}=\dfrac{1}{a^{m-n}} \end{array}\right\}(m>n) \quad \dots\dots\dots [2]$$

$$(a.b)^4=a^4b^4 \qquad (a.b)^n=a^nb^n \quad \dots\dots\dots\dots\dots [3]$$

$$\left(\frac{a}{b}\right)^4=\frac{a^4}{b^4} \qquad \left(\frac{a}{b}\right)^n=\frac{a^n}{b^n} \quad \dots\dots\dots\dots\dots [4]$$

$$(a^3)^4=a^{12} \qquad (a^m)^n=(a^n)^m=a^{m.n} \quad \dots\dots\dots [5]$$

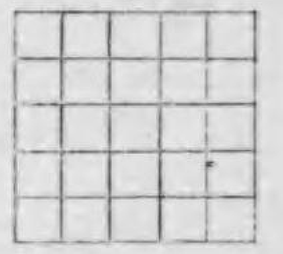
【注意2】 總テ乘冪ノ式ハ之ヲ積ノ式ニ書キ換フレバ其正シキ計算ヲ知ルコトヲ得.

此等ノ公式ハ其左右ヲ取リ換ヘタルモノヲモ記憶スベシ. 又此等ヲ言葉ニモ翻譯スベシ.

$$(-a)^{2n}=a^{2n} \qquad (-a)^{2n+1}=-a^{2n+1} \quad \dots\dots\dots\dots [6]$$

〔6〕 底數が負の數なる時の乘冪は,指數が偶數なれば正の數にして,指數が奇數なれば負の數なり(冪の符號の定則).

【注意3】 m寸平方(m^2)ノ板ヲ並ベ合セテ正方形ヲ作ルニハ幾枚用フベキカトイフニ,之ヲ4,或ハ9,或ハ16,……或ハ100,或ハ121(=11×11)等一般ニ任意ノ整數kノ平方k^2箇ダケ用フレバ常ニ正方形トナラシムルコトヲ得.



又逆ニ一ツノ正方形ハ之ヲ一ツノ整數kノ平方k^2箇ノ相等シキ正方形ニ別ツコトヲ得(公式(3)及(4)參照).

$$4m^2=(2m)^2 \quad 9m^2=(3m)^2 \quad 16m^2=(4m)^2 \dots\dots k^2m^2=(km)^2$$

$$\frac{1}{4}m^2=\left(\frac{1}{2}m\right)^2 \quad \frac{1}{9}m^2=\left(\frac{1}{3}m\right)^2 \quad \frac{1}{16}m^2=\left(\frac{1}{4}m\right)^2 \dots \frac{1}{k^2}m^2=\left(\frac{1}{k}m\right)^2$$

面積の單位の命位法

平方丈		平方尺		平方寸		平方分		平方厘
1	2	3	4	5	4	3	2	1

體積の單位の命位法

立方丈			立方尺			立方寸			立方分
1	2	3	4	5	4	3	2	1	0

〔7〕 二項式(A+B)の乘冪$(A+B)^n$の展開式を,分離係數記法によりて記せば次の如し.

$$\begin{cases} (A+B)^1=1+1 \\ (A+B)^2=1+2+1 \\ (A+B)^3=1+3+3+1 \\ (A+B)^4=1+4+6+4+1 \\ (A+B)^5=1+5+10+10+5+1 \end{cases}$$

4×2=12 —4
5×3=15 —5
6×4=24/4

之ニヨリテ $(A+B)^4=A^4+4A^3B+6A^2B^2+4AB^3+B^4$ ナリ.

〔8〕 $$\begin{aligned}(a+b+c+d+\ldots)^2=a^2&+2ab+2ac+2ad+\ldots\ldots\\ &+b^2+2bc+2bd+\ldots\ldots\\ &+c^2+2cd+\ldots\ldots\\ &+d^2+\ldots\ldots\\ &+\ldots\ldots\end{aligned}$$

問題 第四十集

次ノ各題ノ式ノ計算ヲ行ヘ(1—11).

1. 2^4-4^2 $2^{10}-10^2$ $3.4^2-4.3^2$ $\frac{4^3+3^3}{3^4-5^2}$ $\frac{3.5^2+2.3^5}{2.3^3+3.2^4}$

2. $(-1)^1+(-1)^2+(-1)^3+(-1)^4+(-1)^5$

$(-1)^1-(-2)^2+(-3)^3-(-4)^4+(-5)^5$

3. x ヲ 0.2 トシテ, $1+x+x^2+x^3+x^4+x^5$ ノ數値(小數第五位迄)ヲ求ム.

4. $z^{n-1}.z$ $a^3.a^{x-2}$ $a^n.a^n$ $x^{n+3}.x^{n-4}$ $y^{n-1}.y^{7-n}.y^{9-2n}$

5. $(-a)^4.a^7$ $(-a)^{n-1}.(-a)^{n+1}$ $(a-b)^3(b-a)^n$

$(a-b)^5(b-a)^{2n-4}$

6. $\frac{a^{2n}}{a^{n-x}}$ $\frac{b^{x+1}}{b^{x-1}}$ $\frac{a^{n-x}}{a^{n-3}}$ $\frac{a^{2x+3y}}{a^{2x+2y}}$ $\frac{a^2b^2(a-b)^5}{(a^2+b^2)(b-a)^4}$

【注意】 例ヘバ $a^x\div a^y=a^{x-y}$ トシタル時,(一)若シ

16

$x=3$, $y=5$ ノ様ナル場合ニ a^{-2} ヲ得タル時ハ $\frac{1}{a^2}$ トシ(二) $x=5$, $y=5$ ノ様ナル場合ニ a^0 ヲ得タル時ハ 1 トスレバ a^{x-y} ハ x, y ノ大小ノ如何ニ拘ハラズ廣ク用ヒラレテ便利ナリ.

同様ニ $a^x\div a^y=\frac{1}{a^{x-y}}$ トシタル時, $y=3$, $x=5$ ノ様ナル場合ニ $\frac{1}{a^{-2}}$ ヲ得タル時ハ a^2 トスレバヨシ.

7. $(ax^{2m}+bx^{2n})\div x^{m+n}$ $(a^{7x-4y}+a^{2y+3x}+a^{3(x-y)})\div a^{4x-5y}$

8. $\frac{15^2}{5^2}$ $\frac{24^3}{8^3}$ $\frac{6^4}{30^4}$ $\frac{15^5}{20^5}$ $5^2.8^2$ $2^3.5^3$ $6^4.5^4$ $\frac{72^4}{48^3}$

9. $\left(1\frac{1}{3}\right)^3.\left(1\frac{1}{2}\right)^3$ $\left(7\frac{1}{2}\right)^5.\left(1\frac{1}{3}\right)^5$ $\left(\frac{a^2}{x^3}\right)^n.\left(\frac{c^2}{y^3}\right)^n\div\left(\frac{ac^2}{x^2y^3}\right)^n$

10. (一) $\frac{25^3.72^2}{9^3.20^4}$ $\left(\frac{6a}{b}\right)^4.\left(\frac{b}{4a}\right)^2\div\frac{(3a)^3}{b^2}$

(二) $\left(-\frac{2}{a}ab\right)^5\left(\frac{6a}{5b}\right)^2\div\left(-\frac{8a}{3b}\right)^3$ $(-a^2)^{2n-1}.(-a^{2n-1})^2$

11. $\frac{(2^3)^5}{4^4}$ $\frac{(6^2)^5}{(4.3^3)^2}$ $\frac{3(2a^2b^3)^2}{4(3x^3y^2)^3}\div\frac{5(2ab^2)^3}{7(3x^4y^3)^2}$

12. 次ノ各式ヲ因數ニ分解セヨ.

$x^{3m}+y^{3n}$ $x^{n+p}-x^{n-p}$ $x^{n+1}-2x^n+x^{n-1}$

$6x^{n+2}-13x^n+6^{n-2}$ $x^{n+2}+x^n+x^{n-2}$

13. 次ノ各式ヲ簡單ニセヨ.

$\frac{1-x^3}{x^5}+\frac{1}{x^2}$ $\frac{1-2x^2}{x^p}+\frac{2-3x^2}{x^{p-2}}+\frac{3}{x^{p-4}}$

$$\frac{y^2}{(x-y)^n}+\frac{x}{(x-y)^{n-1}}-\frac{1}{(x-y)^{n-2}}$$

次ノ各式ヲ展開セヨ(14—15).

14. $(x+3)^4+(x-3)^4$　$(t+2)^5-(t-2)^5$　$(A+B)^6$

15. $(a+b+c-x)^2+(a+b+x-c)^2+(a+c+x-b)^2$
$+(b+c+x-a)^2$

補　習　問　題

16. 次ノ各等式ニ就テ(　)ニ入ルベキモノヲ求ム.
12356平方粍=(　)平方粉　12356立方粍=(　)立方粉
abc立方呎=(　)立方碼　5280立方吋=(　)立方呎

17. $4AB=(A+B)^2-(A-B)^2$ノ兩邊ヲ4ニテ割リテ,右邊ヲ二ツノ冪ノ項ニテ表セ.

18. 三ツノ數アリ,其中ノ二ツヅツノ積ガa, b, cナラバabcノ意義如何.

19. $x=b-c,\ y=c-a,\ z=a-b$ナル時, $x^3+y^3+z^3-3xyz$ノ値ヲ求ム(x, y, zヲ含マザルモノニテ).

20. $x^3+px^2+qx+r=(x-1)(x-n)^2$ガ恒等式トナル様ニ$p, q, r$,ヲ$n$ノ項ニテ求ム.

次ノ各題ノ式ノ計算ヲ行ヘ(24—26).

21. $(-7)^2-(-2)^7$　$(-1)^{n+1}+(-1)^{n+2}+(-1)^{n+3}+(-1)^{n+4}+(-1)^{n+5}$

22. $(-a)^{2n+1}.(-a)$　$(x-y)^n.(y-x)^4$　$(a-b-c)^{n-1}\div(b+c-a)^{2m+1}$

23. $\frac{1}{x^3}+\frac{1-x}{x^4}$　$\frac{1+x}{x^n}-\frac{1-x}{x^{n-1}}-\frac{1}{x^{n-2}}$　$\frac{x^n}{(x+y)^n}+\frac{2x^{n-1}}{(x+y)^{n-1}}-\frac{x^{n-2}}{(x+y)^{n-2}}$

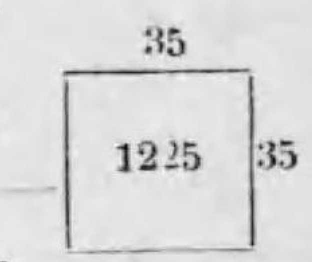
24. 次ノ各方程式ヲ解ケ.
$a^{x+7}=a^{10}$　$b^{5-x}=b^3$　$m^{3(x-5)}=m^{2(x-1)}$　$2^x=1024$

25. 次ノ各式ヲ計算セヨ.
$\frac{18^4.30^5}{27^4.15^3}$　$\left(\frac{a-x}{x-y}\right)^3\cdot\left(\frac{x-b}{x-a}\right)^3\div\left(\frac{b^2-x^2}{x^2-y^2}\right)^3$　$\left(\frac{4a^{n-1}b^3c^{3-x}}{9x^2y^{3n-2}z^6}\right)^2\div\left(\frac{2a^nb^2c^{2-x}}{3xy^{2n-1}z^4}\right)^3$

開　平　方

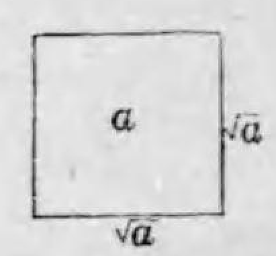
53. 平方根の意義

平方　或數の平方とは其數を二つ採りて相乘じたる積なり．例へバ平方形ノ地面アリテ其各邊ガ35ナル時ハ,其面積ハ35ノ平方ニシテ1225ナリ．1225ハ35ノ平方,35ハ1225ノ平方根ナリ．



平方根　或數aの平方根($\sqrt{a}$)とは之を二乘すればaに等しくなる數なり．

與ヘラレタル正方形ノ面積ガaナレバ其一邊ノ長サヲ表ス數ヲ式ニテ$\sqrt{a}$ト表ス.



$$(\sqrt{a})^2=(\sqrt{a})(\sqrt{a})=a \qquad \frac{a}{\sqrt{a}}=\sqrt{a}$$

記號$\sqrt{\ }$**を根號**といふ．$\sqrt{a}$を**平方根**aと唱ふ.

【注意1】　或長サヲ云フニ其單位ノ名ヲ略シテ單ニ35トシタルハ,所説ノ事柄ヲ長サノ單位ノ

種種ノ場合ニ應用セシメンガ爲ナリ. 而シテ此時ノ長サノ單位ヲ一邊トセル平方形ノ面積ガ此時ノ面積ノ單位ナリ.

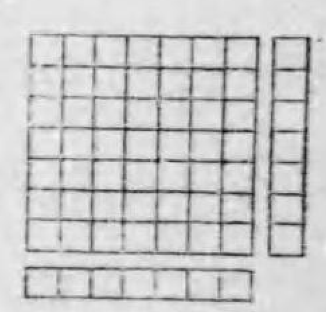
開平方(**開平**)　一つの數 a が與へられたる時,如何なる數の平方が a に等しくなるべきか,或は a に近くなるべきかを求むることを a を**平方に開く**といひ,平方に開く計算を**開平方**(**開平**)といふ.

二乘と開平とは互に逆の計算なり.

平方九九　1より9までの基數の平方を求むる乘法九九を特に**平方九九**といふ.

「**例一**」　一寸平方ノ板63箇アリ,之ヲ列べ合セテ成ルベク大ナル一ツノ正方形ヲ作レバ一邊幾許.

説明　$8^2>63>7^2$ ナルヲ以テ,63箇ノ中49箇ヲ用ヒテ7寸平方ニ列べ合スレバ,殘リ14箇トナル.



63ヲ平方ニ開ケバ,**開平整商**ハ7ニシテ,**開平剩餘**ハ14ナリ. $7^2+14=63$

【**注意2**】　此場合ニ一寸平方ガ1箇多クアリテ64箇ナレバ,丁度8寸平方ニ列べテ殘リ無キヲ得.

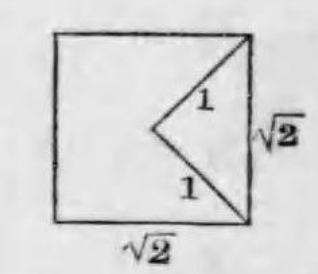
開平剩餘は,開平商の二倍に等しき時最大なり.

$$(a+1)^2-1=a^2+2a$$

丁度或整數或は分數(或は小數)の平方に當れる數を**完備なる平方數**或は單に**平方數**といふ.

【**注意3**】 (一) 學生各自ガ一ツノ正方形ヲ作リテ,其一邊ニ適宜ニ其長サヲ表ス數ヲ記入シテ後,之ヲ二乘シテ其面積ヲ求ムレバ得ル處ノ數ハ皆平方數ナリ. 此等ノ場合ニ互ニ其面積ヲ表ス數ヲ告ゲテ,其一邊ヲ求ムル計算ハ卽チ開平方ナリ.

(二) 然ルニ今此順序ヲ更ヘテ正方形ノ面積ニ任意ノ數2, 63, ……ヲ與フレバ其一邊ノ長サ如何ニトイフニ,此場合ニモ猶後ニ説クコトニヨリテ,其一邊ノ長サノ近似値ヲ望ミ通リ精密ニ求ムルコトヲ得. 故ニ $\sqrt{2}$, $\sqrt{63}$, ……ハ,面積ガ2, 63, ……ナル正方形ノ一邊ノ長サヲ表スモノト看做サル.



(三) $\sqrt{a}\cdot\sqrt{a}=a$ ナルユヱ, **$\sqrt{a}$ は a を二つの相等しき因數の積の式にて表したる時の一つの因數を表すものと看做さる.**

〔**例二**〕　576ヲ平方ニ括ルコト(第36節).

【解】

$$
\begin{array}{r|l}
2 & 576 \\ \hline
2 & 288 \\ \hline
2 & 144 \\ \hline
8 & 72 \\ \hline
 & 9
\end{array}
\qquad \therefore\ 576=2^6.3^2=(\mathbf{2^3.3})^2 \quad 答
$$

【注意4】 (一) $8^2=64,\ (-8)^2=64$ 卽チ 64 ノ平方根ニ 8 ト，-8 トノ二ツアリ．

正の數の平方根は二つあり，其等ハ絶對値相等シクシテ一ツハ正ノ數，他ノ一ツハ負ノ數ナリ．

(二) **言葉にて**或數ノ平方根ト言ヘバ，其二ツノ平方根ヲ表スモノトス．

(三) a ノ平方根ノ中，**正の數の方を** $\sqrt{a}$，**負の數の方を** $-\sqrt{a}$ ニテ表スモノトス．

(四) $-a$ ガ負ノ數ナル時ニテモ $\sqrt{(-a)^2}$ ハ正ノ數ヲ表スヲ以テ，次ノ如キ關係アリ．

$$-a<0 \text{ なれば } \sqrt{(-a)^2}=(-a)\times(-1)$$

$$b<0 \text{ なれば } \sqrt{b^2}=b\times(-1)=-b$$

(五) $a^2<0$ 卽チ，或數ノ平方ハ常ニ正ノ數ナリ．故ニ負ノ數ハ平方ニ開クコト能ハズ．

【注意5】 正ノ數ノミ論ズル場合ニ於テハ，次ノ三ツノ問題ノ答ハ同一ナリ．

(一) $64,\ a^4,\ \dfrac{9x^2}{4a^4}$ ノ各ヲ平方ニ開ケバ答ハ何ナルカ．

(二) $64,\ a^4,\ \dfrac{9x^2}{4a^4}$ ハ各何ノ平方ナルカ．

(三) $\sqrt{64},\ \sqrt{a^4},\ \sqrt{\dfrac{9x^2}{49^4}}$ ノ各ヲ求ム．

〔例題〕 1. 次ノ各ヲ平方ニ括レ．

$49 \quad 75 \quad 2\dfrac{7}{9} \quad \dfrac{9a^2c^4}{4b^2} \quad 256 \quad 224 \quad x^2+18x+81$

2. 200 ト 400 トノ間ニアル整數ノ中，平方數ナルモノヲ求ム．

3. 次ノ各ヲ求ム．

$\sqrt{\dfrac{25}{36}} \quad \sqrt{25a^2x^6} \quad \sqrt{196} \quad \sqrt{1296} \quad \sqrt{4x^2-12x+9}$

4. 1 寸平方ガ 309 箇ト，5 尺平方トヲ列ベ合セテ成ルベク大ナル一ツノ正方形ヲ作ルコト．

5. $(a.10+b)^2=2809$ ナル時，a, b ヲ基數ナリトスレバ，a, b ハ幾許ナルカ．

54. 平方根を求むる例

$a.10$ ノ平方ハ $a^2.100$，$0.1a$ ノ平方ハ $0.01a^2$ ナリ．568516 卽チ 56,85,16 ノ開平首商ハ 7 百，0.002809 卽チ 0.00,28,09 ノ開平首商ハ 0.05 ナリ．

〔1〕 **平方根の位取り**　整數の開平整數の桁數は,其數を一位より初めて二桁宛に區切りたる時の節の數に等し. 小數の開平商の桁數も其數を小數第一位より右へ二桁宛に區切りて知らる.

〔例題〕 次ノ各ヲ求ム.

$\sqrt{900}$　$\sqrt{3600}$　$\sqrt{640000}$　$\sqrt{0.04}$　$\sqrt{0.0121}$

〔例一〕 2809 箇ノ碁石ヲ並ベ合セテ,成ルベク大ナル一ツノ正方形狀ニナサントス(一列ノ石ノ數ト,列ノ數ト相等シ). 一邊ノ石ノ數ヲ求ム.

演算

$$\begin{array}{r|l} 28{,}09 & 53 \ \text{答} \\ 25 & \overline{103} \\ \hline 309 & \\ 309 & \\ \hline \end{array}$$

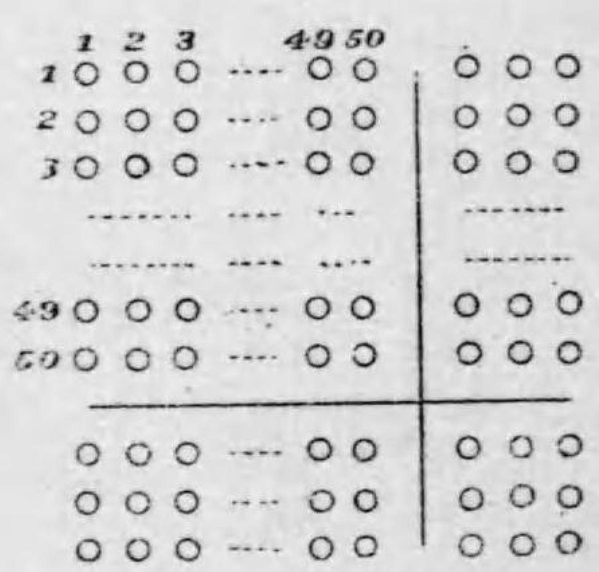
驗算

$$\begin{array}{r} 53 \\ \times\ 53 \\ \hline 159 \\ 265 \\ \hline 2809 \end{array} \quad \text{答 } 53$$

說明 (一) 先ヅ開平首商$5^{\text{拾}}$ヲ得,剩餘ノ右ニ次ノ一節ヲ添ヘテ309トス.

$$\begin{array}{r|l} & \text{拾位} \\ 28{,}09 & 5 \\ 25 & \overline{10\ldots\text{目安}} \\ \hline 309 & \text{拾位} \\ \text{拾位} & \end{array}$$

此意義ヲ圖ニ就テ考フレバ2500箇ヲ用ヒテ一邊ガ50箇ナル正方形ヲ作リタル殘リガ 309 箇ナルコトニ當ル.



(二) 309 ヲ第二部分實トシ,首商ノ 2倍ナル$10^{\text{拾}}$ヲ目安トシテ,此部分實ノ右端ノ一桁(9)ヲ省キタルモノ $30^{\text{拾}}$ ヲ割リ試ミタル商 $\frac{30}{10}=3$ ヲ目安ノ右ヘ書キ添ヘタルモノ 103 ヲ法トシ,之ニ同ジ數字 3 ヲ掛ケテ 309 ヨリ引キテ殘リ無シ.

【注意1】 目安$10^{\text{拾}}$ハ最初ノ正方形(5拾平方)ノ一邊ノ二倍 $5^{\text{拾}}\times 2$ ナリ. 而シテ之ニテ第二部分實 $30^{\text{拾}}$ ヲ割レバ $30^{\text{拾}}$ 箇ノ中ニハ,第一正方形ノ右ト下トヘ幾列宛並ベ足スヲ得ルダケノ石ガアルカガ分ル. 又 3 ヲ目安ヘ書キ添ヘテ,ソレニ 3 ヲ掛ケタルモノヲ引ケバ,隅ヘ列ブベキ 3^2 箇モ引キ去ラレ從テ正方形ニ列ブルコトガ完成セラレタルコトガ分ル(前節例題**4**).

〔例題〕 次ノ各式ヲ計算セヨ.

$\sqrt{484}$　$\sqrt{961}$　$\sqrt{1369}$　$\sqrt{1681}$　$\sqrt{3249}$　$\sqrt{5041}$　$\sqrt{960400}$

開平の標準の形

$$\begin{array}{r|l} a^2+2ab+b^2 & a+b\ldots\text{答} \\ a^2 & \overline{2a+b} \\ \hline 2ab+b^2 & \quad +b \\ 2ab+b^2 & \\ \hline \end{array}$$

$\sqrt{a^2+2ab+b^2}=a+b$ 答

但し $a+b>0$ とす

〔例題〕 $\sqrt{a^4+2a^2x^3+x^6}$　$\sqrt{4x^2-20xy+25y^2}$

〔例二〕　面積ガ 74529 ナル正方形ノ一邊幾許.

演算

7,45,29	273...答
4	47
345	7
329	543
1629	
1629	

答 273

驗算

273
×273
819
1911
546
74529

説明　先ヅ例一ノ如ク, 745百ヲ開キテ商 27拾, 剰餘 16百ヲ得.

第三部分實ヲ 1629 トシ,既ニ得タル商 27拾ノ二倍ナル 54拾ヲ目安トスルコト例一ノ如シ. 此目安 54拾ニテ 162拾ヲ割リ試ミタル商 $\frac{162}{54}=3$ ヲ目安ノ右ヘ書キ添ヘタルモノ 543 ヲ法トシ,之ニテ 1629 ヲ割リテ其數字 3 ヲ確メタルナリ.

〔2〕　**開平方の規則**　(一)　或整數を平方に開くには一位より二桁毎にコンマを切り左端の一節を平方に開き

(二)　剰餘の右に次の一節を下して部分實とし,既に得たる開平商の二倍を,目安とし,部分實の右端の數字を假りに省きたるものを,目安にて割りて得べき商の數字を目安の右に書き添へて法を作り,此法に其數字を掛けたるものを部分實より

引くべし,若し引けざれば商を一つづつ減じ法を作り更へて試むべし.

以下(二)と同様なり.

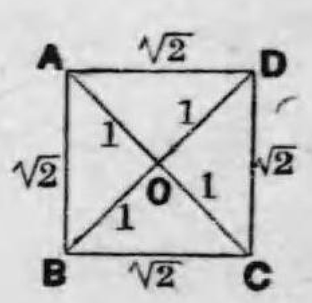
【注意2】　$\sqrt{74529}=273$ ナルコトガ分レバ,面積(正方形ノ)ガ 745.29 平方尺ナレバ,其一邊ハ 27.3 尺; 面積ガ 0.074529 方里ナレバ,其一邊ハ 0.273 里ナルコトガ分ル.

小數或は帶小數の開平方ハ平方根ノ位取リヲシタル後ハ,小數點ヲ無キモノトシテ開ケバヨシ.

〔例題〕　次ノ各ヲ計算セヨ.

1. $\sqrt{582169}$　$\sqrt{13.4689}$　$\sqrt{369056}$　$\sqrt{0.06175225}$
2. $\sqrt{49463089}$　$\sqrt{3226.694416}$　$\sqrt{892037700}$ (整商ヲ)
3. $\sqrt{640752.2256}$ (小數第二位)　$\sqrt{4x^4-12x^3+29x^2-30x+25}$
4. $\sqrt{a^4+4a^3b+2a^2b^2-4ab^3+b^4}$　$\sqrt{b^4-4ab^3+2a^2b^2+4a^3b+a^4}$
5. 開平ノ規則ヲ復唱セヨ.

〔例三〕　面積ガ 2 平方尺ナル正方形ノ一邊幾許.



解　$\sqrt{2}=1.4142$ (尺)强答

2.	1.4142
1	24
100	4
96	281
400	1
281	2824
11900	4
11296	28282
60400	
56564	
3836	

驗算

$(1.4142)^2=1.9999\,4164$

$(1.4143)^2=2.0002\,2449$

故ニ 1.4142 ハ不足ナル近似値, 1.4143 ハ過剰ナル近似値ナリ.

斯様ニ,何程ニテモ精シク,此正方形ノ一邊 $\sqrt{2}$ 尺ノ近似値ヲ求ムルコトヲ得. $\sqrt{2}$ ヲ**無理數**トイフ.

無理數とは整數にも分數にも非ず,從つて有限小數にも,循環小數にも非ずして,何程にても精しくそれの近似値を求むることを得る數をいふ.

無理數ハ循環小數ニ非ズシテ,無限小數トナル.

有理數とは無理數と區別する整數(**零を含む**)及分數(**小數を含む**)の通稱なり.

$\sqrt{2}$, $\sqrt{3}-\sqrt{2}$ ハ正ノ無理數, $-\sqrt{2}$, $\sqrt{2}-\sqrt{3}$ ハ負ノ無理數ナリ. $3\sqrt{2}$, $3-\sqrt{2}$, $\frac{2}{3}-\frac{2\sqrt{5}}{5}$ ナドモ無理數ナリ.

完備ナル平方數ナラザル有理數ノ平方根 $\sqrt{2}$, $\sqrt{3.6}$ ノ如キ數ハ無理數ノ特別ナルモノニシテ,之

ヲ**不盡根數**トモイフ. $3-\sqrt{2}$, $\sqrt{3}+\sqrt{5}$ ナドモ不盡根數トイフコトアレドモ,此等ヲバ無理數トイフガヨシ.

〔3〕 省略開平方 不盡根數($\sqrt{2}$)の近似値を求むるに,開平商を初め n 桁(商を 1.41 まで)普通の仕方にて求めたる時は,後の $(n-1)$ 桁だけ (1.41**42** の **4** と **2**) は,目安 (282) にて剰除を割りて求めらる.

2.	1.4142...答
1	24
100	4
96	281
400	1
281	282
1190	
1128	
620	
564	
56	

〔例四〕 正方形ノ一邊ガ $80\sqrt{5}$ 尺ナルモノアリ,此長サヲ尺ノ位迄求ム. 答 179 弱

解 $80\sqrt{5}=80\times2.236=178.880$ $\therefore$ 179 尺弱

【注意4】 $\sqrt{5}$ に n 桁の整數を掛くるには, $\sqrt{5}$ を餘分に $(n+1)$ 桁だけ精しく求め置くべし.

$$\begin{cases} \sqrt{5}=2 \text{ トスレバ } 80\times\sqrt{5}=80\times2=160\,(\text{尺}) \\ \sqrt{5}=2.2 \text{ トスレバ } 80\times\sqrt{5}=80\times2.2=176 \\ \sqrt{5}=2.23 \text{ トスレバ } 80\times\sqrt{5}=80\times2.23=178.4 \\ \sqrt{5}=2.236 \text{ トスレバ } 80\times\sqrt{5}=80\times2.236=178.88 \end{cases}$$

$80\sqrt{5}$ を求むるに先づ其平方 $(80\sqrt{5})^2=6400\times5=32000$ を求めて後之を開きてもよし.

$$80\sqrt{5}=\sqrt{(80\sqrt{5})^2}=\sqrt{32000}=178.885$$

〔例五〕 (一) $\sqrt{69\frac{4}{9}}=\sqrt{\frac{625}{9}}=\frac{25}{3}=8\frac{1}{3}$ 答

(二) $\sqrt{\frac{3}{7}}=\sqrt{0.428571\ldots}=0.654\ldots$ 答

或ハ $\sqrt{\frac{3}{7}}=\sqrt{\frac{3\times7}{7\times7}}=\frac{\sqrt{21}}{7}=\frac{4.582\ldots}{7}=0.654..$ 答

(三) $\frac{3}{\sqrt{2}}=\sqrt{\left(\frac{3}{\sqrt{2}}\right)^2}=\sqrt{\frac{9}{2}}=\sqrt{4.5}=2.121\ldots$ 答

或ハ $\frac{3}{\sqrt{2}}=\frac{3.\sqrt{2}}{\sqrt{2}.\sqrt{2}}=\frac{3\sqrt{2}}{2}=\frac{4.242\ldots}{2}=2.121..$ 答

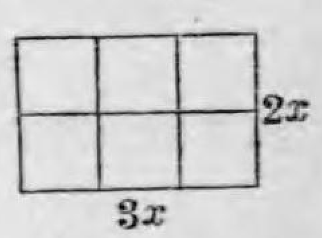
〔例題〕 次ノ各ヲ計算セヨ.

1. $80\sqrt{7}$ 尺 (寸位迄)　2. $\sqrt{25\frac{121}{144}}$　3. $\sqrt{\frac{5}{7}}$ (四桁)

4. $\sqrt{\frac{3}{25}}$ (四桁)　5. $\frac{2}{\sqrt{3}}$ (小數三桁)

55. 開平方の應用

〔例一〕 矩形ノ農園アリ,其横縦ノ比 2:3 ニシテ其面積 1 町 5 畝 24 歩ナリ. 横縦各何程.



|解| 横縱ノ比ハ 2:3, ∴ 横 $2x$, 縱 $3x$ トシ其面積ヲ比ベテ

$2x\times3x=3174$ (1 町 5 畝 24 歩 = 3174 歩)

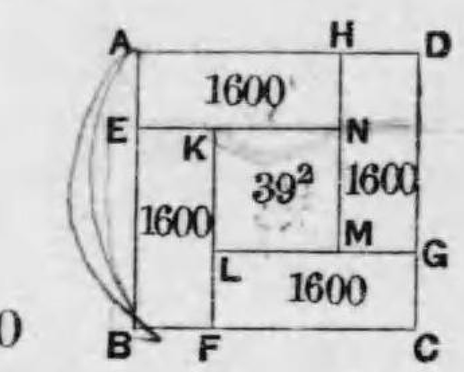
$\therefore\ x^2=529$　$x=23$　答 横 46 間 縱 69 間

$46\times69=3174$ ナルコトヲ驗スベシ.

〔例二〕 短形アリ,其面積 1600 平方分ニシテ,相隣レル二邊ノ差 3 寸 9 分ナリ. 各邊幾許.

|解| $\sqrt{39^2+4\times1600}=\sqrt{7921}=89$(分)……二邊ノ和

長サ $\frac{89+39}{2}=64$(分)
幅 $\frac{89-39}{2}=25$(分)　答



|驗算| $64-25=39$　$64\times25=1600$

〔1〕 $\begin{cases}(a-b)^2+4ab=(a+b)^2\\ \left(\frac{a-b}{2}\right)^2+ab=\left(\frac{a+b}{2}\right)^2\end{cases}$ (第 36 節〔6〕)

$\left(\frac{a-b}{2}\right)^2+ab=\left(\frac{a+b}{2}\right)^2$

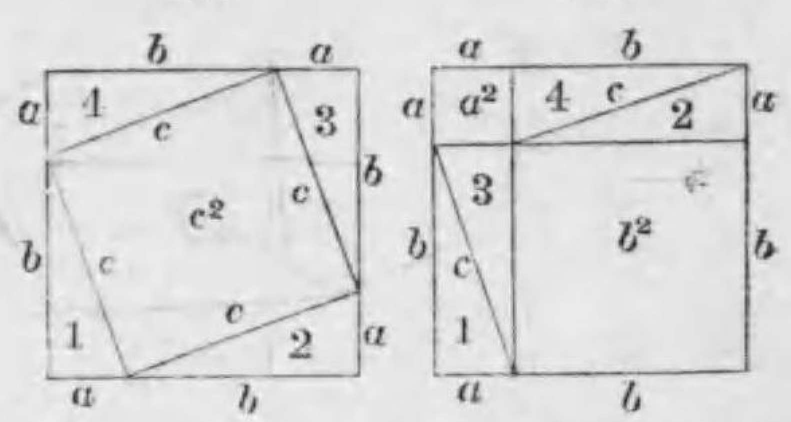
〔例三〕 直角三角形ノ直角ヲ夾ム二邊ガ 24 糎, 7 糎ナルトキ,斜邊幾許.

|解| $\sqrt{24^2+7^2}=\sqrt{576+49}=\sqrt{625}=25$　答 25 糎

〔2〕 直角三角形の斜邊の平方は他の二邊の平方の和に等し. 卽チ直角ヲ求ム二邊ヲ a, b 斜邊ヲ c トスレバ

$a^2+b^2=c^2$ . . . . [**2**]

(甲)　(乙)



説明　圖ノ如ク一邊ガ $(a+b)$ ナル正方形ヨリ,其三角形ヲ四ツ引クニ(甲)圖ノ如ク引ケバ c^2 ガ殘リ,(乙)圖ノ如ク引ケバ a^2+b^2 ガ殘ルユヱ,$a^2+b^2=c^2$ ナリ.

【注意】　此關係式ニ適合スル整數ノ組ノ簡單ナルハ次ノ如シ.

$$\begin{cases}(3,4,5)\ (5,12,13)\ (8,15,17)\ (7,24,25)\ (20,21,29)\\(m^2-n^2,\ 2mn,\ m^2+n^2)\ \text{但し } m,n \text{ は任意の整數}\end{cases}$$

此等ノ二三ヲ記憶スレバ便利ナルコトアリ.

例ヘバ直角三角形ノ直角ヲ夾ム二邊ガ16尺,12尺ナレバ　$16:12=4:3$　∴ 三邊ハ $3:4:5$ ニ比例シ,斜邊ハ**20尺**ナリ.

此定理ヲ俗ニ**三四五の理**ト稱ス.

又例ヘバ斜邊ガ65間,直角ノ一邊ガ63間ナレバ他ノ一邊ハ

$$\sqrt{65^2-63^2}=\sqrt{(65+63)(65-63)}=16\text{(間)}\quad 答$$

〔**例四**〕　$\{\sqrt{[(x+3)^2-14]\times 2}\}\div 5=2$　ナレバ x 如何.　但シ正ノ數ノミ考フルモノトス.

解　$x=\sqrt{(2\times 5)^2\div 2+14}-3=5$　答

[**3**]
$$\begin{cases}\text{正の數のみ考ふる場合に於て}\\\{\sqrt{[(x+a)^2-b]\times c}\}\div d=m\ \text{なれば}\\x=\sqrt{(m\times d)^2\div c+b}-a\ \text{なり.}\end{cases}$$

〔**例五**〕　$\sqrt{\sqrt{1679616}}=\sqrt{1296}=36$　答

36 ヲ 1679616 ノ**四乗根**トイフ.

$$a=(\sqrt{a})(\sqrt{a})=(\sqrt{\sqrt{a}}\cdot\sqrt{\sqrt{a}});(\sqrt{\sqrt{a}}\cdot\sqrt{\sqrt{a}})$$

∴ $\sqrt{\sqrt{a}}$ ハ a ヲ四ツノ相等シキ因數ノ積ノ式ニテ表シタル時ノ一ツノ因數ヲ表スモノト看做サル.　之ヲ a ノ四乗根ト唱ヘ $\sqrt[4]{a}$ ニテ表ス.

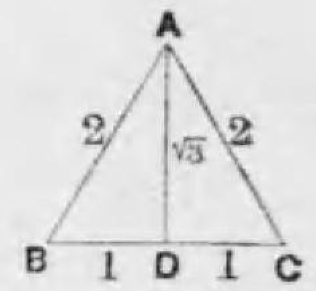
$$\sqrt[4]{a}=\sqrt{\sqrt{a}}\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots [\mathbf{4}]$$

問題　第四十一集

1. 矩形ノ横縦ノ比 $7:5$ ニシテ,其面積 35840 平方尺ナリ,横縦各幾許.
2. (一)　二ツノ正ノ數ノ差 21,其積 1296 ナリ,各數如何.

   (二)　二數ノ和 100,其積 2496 ナリ,各數如何.
3. 直角三角形ノ斜邊ガ73寸,直角ノ一邊ガ48寸ナレバ殘一邊如何.

4. 正三角形ノ一邊二尺ナル時,其高サハ幾許(分ノ位迄). 又面積幾許. 十分ノ一ノ縮圖ヲ書キテ,其高サヲ計算ノ結果ト比較シテミヨ.



5. 末口直徑 1.2尺ノ丸太ヨリ幾寸角ノ材ヲ得ベキカ.

6. 次ノ各方程式ヲ解ケ. 但シ此處ニテハ正ノ數ノミヲ論ズルモノトス.

$(x+2)^2=169$　$x^2+702=141327$　$\sqrt{3x-5}+4=17$

7. $\sqrt[4]{104976}$, $\sqrt[4]{29986576}$, $\sqrt[4]{244140625}$ ノ各ヲ求ム.

8. 次ノ各式ヲ平方ニ括レ(第36節).

$3x^2-5x+6$　$3x^2+5x+2$　$4x^4-20x^3+37x^2-29x+5$

$\boxed{\text{例}}$　$3x^2-5x+6$

$$=\frac{1}{12}(36x^2-60x+72)$$

$$=\frac{1}{12}\{(6x-5)^2+47\}$$

$$=\frac{1}{12}(6x-5)^2+\frac{47}{12}$$ 答

$$\begin{array}{r|l} 36x^2-60x+72 & 6x-5 \\ 36x^2 & \overline{12x-5} \\ \hline -60x+72 & \\ -60x+25 & \\ \hline 47 & \end{array}$$

9. 次ノ各式ヲ計算セヨ.

$\sqrt{1-2x^3+x^4-2x+3x^2}$　$\sqrt{2ab-2ac-2bc+a^2+b^2+c^2}$

$\sqrt{13x^4+13x^2+4x^6-14x^3+4-4x-12x^5}$

補　習　問　題

10. 1000ヲ平方ニ括レバ $1000=31^2+39$ ナリ. 次ノ各數ヲ平方ニ括レ.

500　1200　2000　64827　6407522256

11. 次ノ各式ヲ計算セヨ(小數第四位迄).

$\sqrt{181476}$　$\sqrt{3317.76}$　$\sqrt{128881}$　$\sqrt{\frac{1}{300}}$　$\sqrt{10\frac{7}{8}}$

12. 二ツノ數ノ比 5:3, 其積 7935 ナリ,各數幾許.

13. 矩形アリ,其面積1600坪ニシテ,其長サト,幅トノ差18間ナリ. 各邊幾許.

14. 矩形アリ,其面積420坪ニシテ,其周圍94間ナリ. 各邊幾許.

15. 直角三角形ヲナセル地面ノ周圍30間ニシテ,斜邊13間ナリ. 他ノ二邊如何(諳算).

16. 直角三角形ノ直角ヲ夾ム二邊ノ比 3:4 ニシテ,斜邊 555米ナレバ,直角ノ二邊各幾許(諳算).

17. 次ノ各ヲ完全平方數ナラシムル x, y (正ノ整數)ノ値如何.

$3374702+x$　　$3374702-y$

18. 某數アリ,之ニ其 $\frac{1}{3}$ ヲ乘ズレバ 2187 トナルト云フ. 某數如何.

19. 我國ノ面積ハ 27061 方里ナリ. 幾里平方ニ當ルカ(小數第二位). 又幾粁平方ニ當ルカ(小數第一位). 但シ 216粁ハ55里ニ等シ.

20. 正ノ數ノミ論ズルモノトシテ,次ノ各ヲ解ケ.

$(3x-1)^2=16384$　　$(x^2\div25+16)^2\times4=2500$

21. 或正ノ數ニ其數ノ $\frac{7}{20}$ ヲ加ヘ,更ニ 50.105 ヲ加ヘ, 10.21 ヲ減

ジ, $3\frac{3}{4}$ ヲ乘ジ, $4\frac{3}{7}$ ニテ除シ,其結果ヲ二乘シタルニ 58752225 トナレリ. 原數如何.

22. 次ノ各ヲ計算シ(分離係數法ニヨレ),且 x ヲ 10 トシテ驗セ.

$\sqrt{x^4+2x^3-x^2-2x+1}$ $\sqrt{9x^4+12x^3+34x^2+20x+25}$

23. 五分ノ一ノ平方根ハ,五分ノ一ヨリ何程大ナルカ(小數第四位迄).

24. 二等邊三角形ノ周圍 400 尺,其底邊 102 ナレバ其高サ幾許ナルカ $\left(\frac{1}{800}\right.$ ノ縮圖ヲ書ケ$\left.\right)$.

25. 或排水路アリ,正南ヘ 19 町,正東ヘ 20 町,又正南ヘ 80 町ヲ流レテ海ニ注入セリ. 今之ヲ直行ナサシムル時ハ,道程ノ差幾許トナルカ(圖ヲ書ケ).

26. (一) 126^2+363 ノ開平整商幾許.

(二) 375^2+202 ノ開平商ヲ小數第一位迄求ム(切捨テ).

(三) 次ノ各式ノ開平整商ヲ求ム.

365×366 365×367 $365\times367+1$ $x(x+2)+1$

27. 矩形ノ地面アリ,間口 72 間,奥行 50 間ナリ. 又之ト等積ナル正方形アリ. 此二ツノ形ノ周ノ差幾許.

28. $\frac{3+\sqrt{2}}{6}$, $\frac{3-3\sqrt{5}}{2}$, $\frac{51+80\sqrt{5}}{240}$ ヲ各小數第二位迄求ム.

29. 一邊ガ x ナル正方形ノ面積ト,相隣レル二邊ガ a ト x トナル矩形ノ面積トノ和ヲ平方ニ括レ.

30. 旗竿アリ,其中央ヨリ三方ノ地ヘ繩ヲ引クニ繩ノ長サ各 85 尺ニシテ,其地ヨリ竿根迄ノ距離各 77 尺アリ. 旗竿ノ全長幾何.

開 立 方

56. 立方根の意義

〔**例一**〕 一寸立方ヲ積ミ合セテ立方體ヲ作ルニハ幾ツ用フベキカ(**第52節注意3**).

説明 之ヲ 8, 27, 64, ...$1000(=10^3)$, $1331(=11^3)$, $1728(=12^3)$...等一般ニ任意ノ整數 k ノ立方 k^3 箇ダケ用フレバ常ニ立方體トナラシムルコトヲ得.

立方九九 基數ノ平方ニ其基數ヲ掛クレバ

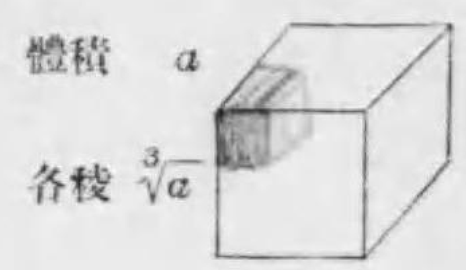
n	1	2	3	4	5	6	7	8	9
n^2	1	4	9	16	25	36	49	64	81
n^3	**1**	**8**	**27**	**64**	**125**	**216**	**343**	**512**	**729**

是ハ一一ガ一,二二ガ八三三二十七,......ト唱ヘテ諳誦スベシ. 之ヲ**立方九九**トイフ.

(**完備なる立方數立方數**)とは丁度或整數或は分數或は小數の立方に當れる數をいふ.

例ヘバ $125(=5^3)$ ハ立方數ニシテ, 5 ハ其**立方根**ナリ. 5 ヲ $\sqrt[3]{125}$ ニテ表ス. $\sqrt[3]{125}$ ヲ**立方根百二十五**ト唱ヘ, 3 ヲ**根指數**トイフ.

立方根 或數 a の立方根 ($\sqrt[3]{a}$) とは,之を三乘すれば a に等しくなる數なり.



$$(\sqrt[3]{a})^3=(\sqrt[3]{a})(\sqrt[3]{a})(\sqrt[3]{a})=a \quad\cdots\cdots\cdots\cdots (\mathbf{A})$$

【注意1】 立方體ノ體積ヲ表ス數ガ a ナレバ,其各稜ヲ表ス數ハ $\sqrt[3]{a}$ ナリ.

(A) ニヨレバ $\sqrt[3]{a}$ は a を三つの相等しき因數の積の式にて表したる時の一つの因數を表す.

$$\begin{cases} \sqrt[3]{3375}\cdot\sqrt[3]{3375}\cdot\sqrt[3]{3375}=3375 \cdots\cdots [(\mathbf{A})\text{ニヨル}]. \\ \text{又}\quad 15\,.\ 15\ .\ 15\ =3375 \cdots\cdots \quad \therefore\ \sqrt[3]{3375}=15 \end{cases}$$

3375 ノ如ク,立方數ハ之ヲ素因數ニ分解シテ其立方根ガ求メラルルコトアリ.

開立方(**開立**) 一つの數 a が與へられたる時,如何なる數の立方が a に等しくなるべきか,或は a に近くなるべきかを求むることを a を**立方に開く**といひ,立方に開く計算を**開立方**(**開立**)といふ.

三乘と開立とは互に逆の計算なり.

〔例二〕 342 箇ノ一寸立方ヲ積ミ合セテ,成ルベク大ナル一ツノ立方體ヲ作レバ一稜ノ數幾許.

説明 $7^3>342>6^3$ ナルヲ以テ,其中216箇ヲ用

ヒテ 6 寸立方ヲ作レバ,殘リ 126 箇トナル. 答6

342 ヲ立方ニ開ケバ**開立整商**ハ 6 ニシテ,**開立剩餘**ハ 126 ナリ.

$$\mathbf{342=6^3+126}$$

342 ヲ斯樣ニ變形スルコトヲ,之ヲ**立方に括る**トイヒ,此場合ニハ 126 ヲ立方剩餘トイフ.

【注意2】 一寸立方ガ 1 箇多クアリテ 343 箇ナレバ,丁度 7 寸立方ヲ作リテ殘リ無キヲ得. 6 ヲ a ニテ表セバ 342 ハ次ノ如ク表サル.

$$\begin{cases} (a+1)^3-1=a^3+3a^2+3a \\ 3a^2+3a \cdots\cdots \text{開立剩餘} \end{cases}$$

開立剩餘ハ其開立商ノ平方ノ 3 倍 ($3a^2$) ト開立商ノ三倍 ($3a$) トノ和ニ等シキ時最大ナリ.

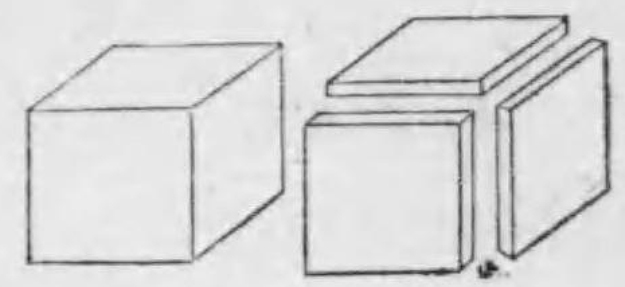
〔例題〕 a 米立方ノ教室ノ横縱高サヲ各 n 米增サバ體積ハ何程增スベキカ.

〔例三〕 1 尺 2 寸立方ト,1650 箇ノ 1 寸立方トアリ,之ヲ積ミ合セテ成ルベク大ナル一ツノ立方ヲ作レバ,稜ノ長サ幾許. 答 1尺 5寸,殘リ 3箇

説明 (一) 1尺2寸 立方ノ三方ノ表面ヘ,1 寸立方ヲ一側增スニハ $12^2\times3=432$ ヲ要ス. 之ヲ**目安**

トシテ 1650 箇÷432 箇ヨリ

3 ヲ得.



(二) 次ニ (12+3) 寸立方ヲ作リ得ルカトイフニ,體ノ積增加 $(a+n)^3-a^3$ (甲), 或ハ $3a^2n+3an^2+n^3$ (乙) ヲ計算スレバ,1647 ナリ. 故ニ與ヘラレタル 1650 箇ノ中 1647 用ヒテ猶 3 箇殘ル.

【注意3】 12 ヲ a ニテ表セバ**目安**トシタル數 432 ハ $3a^2$ ニテ表サル.

〔**例題**〕 例三ニ於テ, 1尺 2寸 立方ノ代リニ 3尺立方ヲ, 1650 箇ノ 1 寸立方ノ代リニ 23653 箇ノ 1 寸立方ヲ用フレバ如何.

57. 立方根を求むる例

體積ガ v 立方寸ナル立方體ノ稜ノ長サガ a 寸ナル時ハ,體積ガ (**v.1000**) 立方寸ナレバ稜ノ長サハ (a.10) 寸トナリ,又體積ガ (**0.001v**) 立方寸ナレバ稜ノ長サハ ($0.1a$) 寸トナル (第 52 節).

413493625 卽チ 413,493,625 ノ開立首商ハ **7**^{百},

0.00064 卽チ 0.000,640 ノ開立首商ハ **0.08** ナリ.

8

〔1〕 立方根の位取り 整數の開立整商の桁數は,其數を一位より初めて三桁宛に區切りたる時の節の數に等し. 小數の開立商の桁數も,其數を小數第一位より,右へ三桁宛に區切りて知らる.

〔**例題**〕 次ノ各式ノ値ヲ首位ノ一桁ダケ求ム.

$\sqrt[3]{9261}$ $\sqrt[3]{50653}$ $\sqrt[3]{29076046875}$ $\sqrt[3]{0.000050653}$

〔2〕 開立の標準の形 $a^3+3a^2b+3ab^2+b^3$ ヲ與ヘテ其立方根 $a+b$ ヲ求ムル演算ヲ次ノ如ク組ミ立テタルモノヲ**開立の標準の形**トナス.

$a^3+3a^2b+3ab^2+b^3$	$a+b$ ……………答	
a^3	$3a^2$ ……目安	$3a+b$
$+3a^2b+3ab^2+b^3$	$+3ab+b^2$ …(1)	$+b$
$+3a^2b+3ab^2+b^3$	$3a^2+3ab+b^2$ .. (2)	
	(甲)	(乙)

(甲) 欄ハ法ヲ,(乙) 欄ハ補助計算ヲ行フ所ナリ.

說明 (一) 原式ノ第一項 a^3 ヲ立方ニ開キテ a トシ,之ヲ答ノ欄ニ記ス.

(二) 殘リノ三項ヲ下シテ第二部分實トス. 補助計算欄 (乙) ノ所ヘ商ノ三倍 $3a$ ヲ書キ,之ニ a ヲ掛ケタル積 $3a^2$ ヲ**目安** (前節例三) トシテ (甲) 欄ヘ書ク. 目安 $3a^2$ ニテ部分實ノ初項 $3a^2b$ ヲ試ミニ割リタル商 b ヲ (乙) 欄ノ $3a$ ニ加ヘ,其下ニ同ジ b ヲ書キ,此二

ツ $3a+b$ ト b ト ノ積 $3ab+b^2$……(1) ヲ(甲)欄ニ書キテ，目安ト加ヘタルモノ $3a^2+3ab+b^2$……(2) ヲ法トシ，之ニ b ヲ掛ケテ部分實ヨリ引キ，答ノ第二項ニ $+b$ ヲ記ス．

〔例題〕　$\sqrt[3]{a^3+6a^2b+12ab^2+8b^3}$

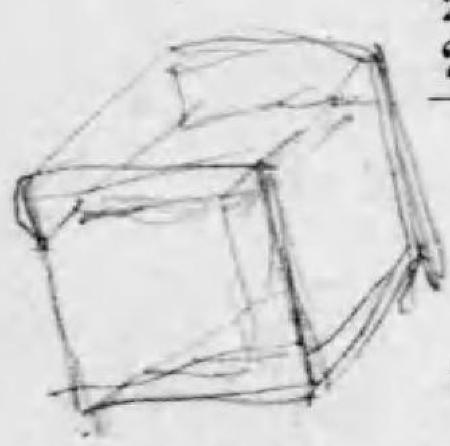
$\sqrt[3]{8a^3+36a^2b+54ab^2+27b^3}$

【注意1】 開立の標準の形に於て法の計算欄の(1)と(2)との式と b^2 とを加へ合すれば $3a^2+6ab+3b^2$ となる，これは計算が猶引續きて行はるる場合に於て答の第三項を求むる時の目安となるものなり．

〔例二〕　50653箇ノ一寸立方ヲ積ミ合セテ成ルベク大ナル一ツノ立方體ヲ作レバ各稜幾許．

|演算|

50,653	37………答	
27	27	98
23 653	784……(1)	8
23 653	3484 ……(2)	
	27	97
	679	7
	3379…… (3)	



答　3尺7寸

|驗算|

$$\begin{array}{r} 37 \\ \times 37 \\ \hline 259 \\ 111 \\ \hline 1369 \\ \times\ 37 \\ \hline 9583 \\ 4107 \\ \hline 50653 \end{array}$$

|說明|　(一)　先ヅ開立首商 $3^{\text{拾}}$ ヲ得，剩餘ノ右ニ

次ノ一節ヲ添ヘテ23653トス．此意義ヲ形體ニ就テ考フレバ27000箇ヲ用ヒテ $3^{\text{拾}}$ 寸立方ヲ作リタル殘リガ23653箇ナルコトニ當ル．

	拾位 3	
50,653		
27	27……目安	9
23 653	百位	拾位
百位		

(二)　23653ヲ第二部分實トス．首商ノ3倍ナル $9^{\text{拾}}$ ヲ補助計算ノ欄ニ書キテ，之ニ再ビ首商 $3^{\text{拾}}$ ヲ掛ケタルモノ $(9^{\text{拾}}\times 3^{\text{拾}}=27^{\text{百}})$ ヲ目安トシテ法ノ欄ニ書ク．

目安 $27^{\text{百}}$ ニテ部分實ノ右ノ二桁ヲ省キタルモノ **$236^{\text{百}}$** ヲ試ミニ割リテ得タル商 $\frac{236}{27}=8$ ヲ，補助計算欄ノ $9^{\text{拾}}$ ニ書キ添ヘテ98トシ，此下ヘ更ニ8ヲ書キ，此二ツ98ト8トノ積 $7^{\text{百}}84$……(1) ヲ目安 $27^{\text{百}}$ ニ加ヘタルモノ 3484……(2) ヲ法トス．然ルニ之ニ8ヲ掛ケタルモノハ部分實ヨリ引ケザルヲ以テ，之ヲ捨ツ．

(三)　8ヨリ1減ジタル7ニ就テ前段(二)ト同樣ニシテ法 3379……(3) ヲ作リ，之ニ7ヲ掛ケテ部分實ヨリ引キ，商ノ第二ノ數字ヲ7トス．

【注意2】 $\sqrt[3]{50653}=37$ ナルコトガ分レバ，立方體ノ體積ガ50.653立方寸，或ハ0.050653立方間ナレ

バ,其稜ノ長サハ3.7寸,或ハ0.37間ナルコトガ分ル.

小數或は帶小數の開立方ハ立方根ノ位取リヲシタル後ハ,小數點無キモノトシテ開ケバヨシ.

〔例題〕 次ノ各式ヲ計算セヨ.

$\sqrt[3]{9261}$　$\sqrt[3]{15625}$　$\sqrt[3]{0.013824}$　$\sqrt[3]{0.778688}$　$\sqrt[3]{157464}$

〔例三〕 立方體ノ體積ガ53157.376立方寸ナレバ其稜ノ長サ幾許.

演算

53,157.376	37.6………答	
27	27	97
26 157	679	7
23 653	3379	
2 504 376	49	7
2 504 376	4107	1116
	6696	6
	417396	

驗算

37.6
× 37.6
2256
2632
1128
1413.76
× 37.6
848256
989632
424128
53157.376

答　3尺7寸6分

說明 (一) 開立商37拾ヲ得ル處迄ハ例二ト同ジ.

(二) 開立商ノ其次ノ數字ヲ求ムル時ノ目安$37^2\times3=4107$ヲ求ムルニハ,今求メタル數字7ノ平方49ヲ書キ足シテ三段加フルナリ(注意1).

【注意3】 開立ノ算法ハ繁雜ナレドモ,**標準の算法**ト**目安を作る算法**(注意1)トノ二ツニ基ヅク.

次ノ規則ヲ充分ニ諳誦スレバ,演算ニ熟達スルニ助ケアリ.

〔3〕 開立方の規則 (一) 或整數を立方に開くには一位より初めて三桁毎にコンマを切り,左端の一節を立方に開き

(二) 剰餘の右に次の一節を卸して部分實とし,既に得たる開立商の三倍に更に其商を掛けたるものを目安とし,部分實の右の二桁を假りに省きたるものを目安にて割りて得べき商の數字を,既得の開立商の三倍の右に書き添へ,之に其數字を掛けたるものを目安の下へ二桁下げて重ね書き,之を目安に加へて法を作り,此法に其數字を掛けたるものを部分實より引くべく,若し引けざれば商を一つづつ減じ法を作り更へて試むべし.

(三) 以下(二)と同樣なり. 但し次の目安を作るには今の法の下へ今求めたる數字の平方を書きて三段加ふればよし.

〔例題〕 次ノ各ヲ計算セヨ.

1. $\sqrt[3]{51895117}$　$\sqrt[3]{54010152}$　$\sqrt[3]{54267751656}$

2. $\sqrt[3]{0.000008869743}$ $\sqrt[3]{127795585653}$ $\sqrt[3]{27.189441343}$

〔例四〕 一升ノ容量$(49^2\times 27=64827$ 立方分)ヲ有スル立方形容器ノ內法何程ナルカ(毛位迄).

演算 $\sqrt[3]{64827}$(分)$=40.171\ldots$(分) 答 40.17 分强

64,827	40.171……答	
64	4800	1201
827000	1201	1
481201	481201	
3457990	1	
3376821	482403	
811690		
482403		
329287		

驗算 40.171^3
$=64824.313920211$
40.172^3
$=64829.155168448$

省略開立ニヨリ最後ノ二桁 7 ト 1 トハ目安 482403 ニテ剩餘ヲ割リテ求メタルナリ(第51節例三).

$\sqrt[3]{64827}$ モ無理數ナリ.

〔3〕 **省略開立方** 不盡根數$\sqrt[3]{64827}$の近似値を求むるに,開立商を 40.1 (n 桁)だけ普通の仕方にて求めたる時は,後の 0.0071 ($n-1$ 桁)は目安にて剩餘を割りて求めらる.

〔例五〕 互に相似形ナル甲,乙二ツノ櫃アリ,甲ハ內法 3 尺平方,深サ 2 尺ニシテ,乙ハ其容量甲ノ$\frac{2}{3}$ナリ. 乙ノ內法何程ナルカ(分位迄).

答 2.62 尺平方,深サ 1.75 尺

解 甲ハ內法 3 尺平方,深サ 2 尺ニシテ,乙ハ之ニ相似ナルヲ以テ,乙ノ內法ハ $3x$ 尺平方,深サ $2x$ 尺ナリトスルコトヲ得. 故ニ乙ノ容量ヲ比ベテ

$$(3x)^2\times 2x=(3^2\times 2)\times\frac{2}{3} \qquad \therefore\ x^3=\frac{2}{3}$$

$$\therefore\ x=\sqrt[3]{0.666\ldots}=0.8735\ldots$$ (第 54 節注意 4).

(方邊ノ長サ)$=3^{尺}\times 0.8735=2.6205$ 尺

(深サ)$=2^{尺}\times 0.8735=1.7470$ 尺

答 方 2.62 尺强 深サ 1.75 尺弱

乙ノ櫃ノ內法ハ甲ノ八割七分三五ナリ.

驗算 $(2.62)^2\times 1.75=12.0097$ ……………(1)

$(3^2\times 2)\times\frac{2}{3}=12$ ……………(2)

問題 第四十二集

1. $\sqrt[3]{\frac{29}{64}}$, $\sqrt[3]{564.3923}$ ヲ各小數第五位迄求ム.
2. 縱橫高サガ a, b, c ナル直六面體(甲)ト相似ナル他ノ直六面體(乙)ヲ作リテ,(一)(乙)ノ體積ヲ(甲)ノ$\frac{1}{2}$ナラシムルニハ,(乙)ノ橫縱高サヲ(甲)ノ何割ニスベキカ,(二)又(乙)ノ體積ヲ(甲)ノ體積ノ 2 倍ナラシムルニハ如何(各小數第三位迄).
3. 128100283921 ヲ六ツノ相等シキ因數ノ積ノ式

ニテ表セ.

4. $\sqrt[3]{1-12x+60x^2-160x^3+240x^4-192x^5+64x^6}$ ヲ求メ, $x=0.01$ トシテ驗セ.

5. 直六面體ノ體積 3 立方尺ニシテ,其縱橫高サ (x, y, z) ノ比ガ 2:3:4 ナラバ各稜幾許.

補 習 問 題

6. 次ノ各ノ近似値ノ首位ノ一桁ヲ求ム.

$\sqrt[3]{5}$, $\sqrt[3]{50}$, $\sqrt[3]{500}$, $\sqrt[3]{5000}$, $\sqrt[3]{0.5}$, $\sqrt[3]{0.05}$, $\sqrt[3]{0.005}$, $\sqrt[3]{0.0005}$

7. 次ノ各ヲ計算セヨ.

$\sqrt[3]{15625}$,　$\sqrt[3]{13824}$,　$\sqrt[3]{778688}$　$\sqrt[3]{22.978971107}$

8. $\sqrt[3]{79.951586112}$, $\sqrt[3]{8\frac{5}{7}}$ ノ各ヲ求ム(小數第五位迄).

9. 開立方ノ規則ヲ復唱セヨ.

10. 次ノ各數ヲ立方ニ括レ.

5000　50000　500000　3000　30000

11. $\sqrt[3]{1+9x+27x^2+27x^3}$　$\sqrt[3]{125x^3+450x^2+540x+216}$

12. $\sqrt[3]{512x^3+960x^2+600x+125}$　$\sqrt[3]{1-x}$ (x^3 ノ項迄展開セヨ).

13. 五斗入ノ櫃アリ,其內法ノ縱,橫,高サノ比 4:3:2 ナレバ內法何程(厘位迄).

14. 某數アリ,之ニ其 $\frac{1}{3}$ ト,其 $\frac{1}{2}$ トヲ連乘スレバ 147456 トナルト云フ. 某數ヲ求ム.

15. $(x:y:z=1:1:3 \quad xyz=14739)$ ヲ解ケ.

16. 甲乙ニツノ立方形たんくノ容量合セテ 6133218 立方呎ニシテ,其稜ノ比 1:2 ナリ. 甲乙ノ稜各幾許.

17. 立方形ノ體積 13824 立方寸ナルモノアリ,其六ツノ表面ヲ覆フニ要スル箔ノ面積ヲ求ム.

18. $8x^6-36x^5+66x^4-63x^3+33x^2-9x+1$ ヲ立方ニ開キ, $x=10$ トシテ驗セ.

羃根或ハ無理數

58. 無理數の計算に關する公式

羃根　a の第 m 羃根 $(\sqrt[m]{a})$ とは,之を m 乘すれば a に等しくなる數なり.

$$(\sqrt[m]{a})^m=a \qquad \sqrt[m]{a^m}=a \qquad \frac{a}{\sqrt[m]{a}}=(\sqrt[m]{a})^{m-1}$$

$\sqrt[m]{a}$ ニ於テ**根指數** m ハ正ノ整數ナリ. 平方根ヲ記ス時ハ,根指數ヲ略シテ書カヌガ普通ナリ.

開平,開立等ヲ通稱シテ**開方**トイフ.

開方　一つの數 a が與へられたる時,如何なる數の m 乘が a に等しくなるべきか,或は a に近き數となるべきかを求むることを a を **m 乘に開く**といひ,其計算を**開方**といふ.

自乘と開方とは互に逆の計算なり. 自乘ノ三元ハ**底數**,**羃指數**及**乘羃**(第52節)ニシテ,乘羃ト其指數トヲ與ヘテ,底數ヲ求ムルガ開方ナリ. 乘羃ニ

對シテ其底數ヲ冪根(乘根)トイフ.

【注意I】 (一) $\sqrt[m]{a}$ トハ a ヲ m 箇ノ相等シキ因數ノ積ノ式ニテ表シタル時ノ一ツノ因數ナリ.

$$6561=9.9.9.9 \quad \therefore \sqrt[4]{6561}=9$$ ナリ.

(二) a ハ如何ナル數ノ第 m 乘冪ナルカト問フハ, $\sqrt[m]{a}$ ヲ求ムト問フニ同ジ(正ノ數ノミ考フル場合).

(三) $\sqrt[m]{a}$ ヲ x トスレバ $x^m=a$ ナリ.

羃根に關する問題は,之を乘冪の問題に直して論ずるを得ることあり.

〔**例一**〕 (一) $\sqrt[1]{a}$ ヲ求ムルニハ,之ヲ x トスレバ　$x^1=a \quad \therefore x=a$ 即チ $\sqrt[1]{a}=a$

(二) $\sqrt[5]{1024}$ ヲ求ムルニハ,之ヲ x トスレバ

$$x^5=1024=2^{10}=(2^2)^5 \quad \therefore x=2^2=4$$ 答

(三) $\sqrt[3]{27^4}=x$ トスレバ

$$x^3=27^4=3^{12} \quad \therefore x=3^4=81$$ 答

〔**例二**〕 $\sqrt[5]{23}$ ヲ求ム.

|**說明**| $\sqrt[5]{23}=x \quad \therefore x^5=23$ 此場合ニハ次ノ如クシテ,之ニ如何程ニモ近キ近似値ノ求メラルルコトガ分ル.

欠

欠

5. $\sqrt{27}$ $\sqrt{96}$ $\sqrt{320}$ $5\sqrt{80}$ $6\sqrt{150}$ $3\frac{1}{3}\sqrt{54x^9}$

6. $\sqrt{\frac{1}{2}}$ $\sqrt{\frac{1}{3}}$ $\sqrt{\frac{3}{5}}$ $\sqrt{\frac{5}{3}}$ $\sqrt{\frac{7}{8}}$ $\sqrt{\frac{4}{0.7}}$ $\sqrt{\frac{5.4}{2.4}}$

7. 次ノ各式ヲ簡單ニセヨ.

$\sqrt{\frac{1}{2}}+\sqrt{\frac{9}{8}}$ $\sqrt{\frac{3}{2}}-\sqrt{\frac{2}{3}}+\sqrt{2\frac{2}{3}}$

$\sqrt{\frac{5}{7}}+\sqrt{\frac{7}{5}}+\sqrt{35}$

次ノ積ヲ簡單ニセヨ(8—12).

8. $\sqrt{10}\cdot\sqrt{15}=\sqrt{2.5.3.5}=5\sqrt{6}$ 答

$\sqrt{14}\cdot\sqrt{35}$ $\sqrt{20}\cdot\sqrt{30}$

9. $(2\sqrt{20}-7\sqrt{8}-3\sqrt{5}+3\sqrt{18})\cdot 4\sqrt{10}$

$=8\sqrt{20.10}-28\sqrt{8.10}-12\sqrt{5.10}+12\sqrt{18.10}$

$=80\sqrt{2}-112\sqrt{5}-60\sqrt{2}+72\sqrt{5}$

$=20\sqrt{2}-40\sqrt{5}$ 答

10. $(7\sqrt{2}-5\sqrt{6}-3\sqrt{.8}+4\sqrt{20}).3\sqrt{2}$

$(5\sqrt{3}+\sqrt{6})(5\sqrt{2}-2\sqrt{3})$ $(3-\sqrt{2})(3+\sqrt{2})$

【注意】 共軛なる無理數とは二つの無理數の和も,又其積も共に有理數となるものなり.

11. $(7+4\sqrt{3})(7-4\sqrt{3})$ $(3\sqrt{5}+2\sqrt{11})(3\sqrt{5}-2\sqrt{11})$

12. $\sqrt{6+2\sqrt{5}}.\sqrt{6-2\sqrt{5}}$ $(\sqrt{8+3\sqrt{7}}+\sqrt{8-3\sqrt{7}})^2$

次ノ除法ヲ行ヘ(13—18).

13. $\dfrac{\sqrt{18}}{\sqrt{2}}$ $\dfrac{3}{\sqrt{3}}$ $\dfrac{a}{\sqrt[3]{a}}$ $\dfrac{10}{3\sqrt{5}}$ $\dfrac{48}{5\sqrt{32}}$ $\dfrac{a}{\sqrt[5]{a^2}}$ $\dfrac{a}{\sqrt[7]{a^5}}$

14. $\dfrac{3}{5}\sqrt{8}\div\dfrac{2}{\sqrt{5}}$ $\dfrac{7}{\sqrt{8}}\div\sqrt{\dfrac{7}{8}}$ $\sqrt{\dfrac{3}{5}}\div\dfrac{\sqrt{3}}{5}$

$\dfrac{7}{3}\sqrt{5}\div5\sqrt{\dfrac{2}{3}}$

次ノ各式ノ**分母を有理化する**コト(15—17).

15. $\dfrac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}+\sqrt{\mathbf{3}}}=\dfrac{\mathbf{2}-\sqrt{\mathbf{3}}}{\mathbf{4}-\mathbf{3}}=\mathbf{2}-\sqrt{\mathbf{3}}$ $\dfrac{3}{3+\sqrt{6}}$ $\dfrac{1}{1+\sqrt{2}}$

16. $\dfrac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}-\sqrt{2}}$ $\dfrac{3\sqrt{3}+\sqrt{6}}{\sqrt{3}+\sqrt{6}}$ $\dfrac{a}{a+\sqrt{a}}$ $\dfrac{\sqrt{x}-\sqrt{y}}{\sqrt{x}+\sqrt{y}}$

17. $\dfrac{110}{4+\sqrt{5}+\sqrt{11}}$ $\dfrac{2\sqrt{6}}{\sqrt{2}+\sqrt{3}+\sqrt{5}}$

$\dfrac{2\sqrt{15}}{\sqrt{3}+\sqrt{5}+2\sqrt{2}}$

18. 次ノ各式ヲ簡單ニセヨ.

$\sqrt{25^3}$ $\dfrac{\sqrt{27}}{\sqrt[3]{9}}$ $\sqrt[3]{125^2}$ $\sqrt[4]{\dfrac{a}{b}}\sqrt[6]{\dfrac{b}{a}}$ $\sqrt[3]{\dfrac{3}{10}}\sqrt{\dfrac{5}{15}}$

$\sqrt[3]{\sqrt{27}}$ $\sqrt[3]{\sqrt[4]{512}}$ $\sqrt[10]{32}$ $\sqrt[12]{a^4b^8}$ $\sqrt{a\sqrt{a\sqrt{a}}}$

19. 次ノ各方程式ヲ解ケ.

$2x=1+x\sqrt{3}$ $\sqrt[4]{a^{13x-2}}=\sqrt[3]{a^{7x+4}}$ $\sqrt{x^2-11x+4}=x-7$

20. 次ノ各式ガ有理式トナル様ニXヲ求メテ後

各式ヲ簡單ニセヨ.

$\sqrt{60^3\mathrm{X}}$ $\sqrt[3]{\dfrac{54^5}{72^4}\mathrm{X}}$ $\sqrt{\left(\dfrac{3x^2y}{5a^2b^n}\right)^3\mathrm{X}}$ $\sqrt[3]{\dfrac{6(3xyz^3)^4}{5(2a^2bc)^3}\mathrm{X}}$

補習問題

21. $(\sqrt{2})^n$ ニ就テ，n ヲ 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13 トシタル時ノ數値ヲ求ム.

次ノ各式ヲ簡單ニセヨ(22—23).

22. $\dfrac{9}{4}\sqrt{1-\dfrac{1}{81}}$ $7ab\sqrt{\dfrac{81a^2}{98b^2}}$ $20b^3\sqrt{\dfrac{31a}{50b^3}}$ $2\dfrac{1}{2}\sqrt{\dfrac{28}{75}x^2}$

23. $\sqrt{6}-\dfrac{1}{\sqrt{6}}+\sqrt{\dfrac{2}{3}}-\sqrt{\dfrac{3}{2}}$ $\sqrt{\dfrac{3}{5}}+\sqrt{\dfrac{5}{3}}+\sqrt{60}-\sqrt{15}-\sqrt{2.4}$

24. 次ノ積ヲ求メヨ.

$(4\sqrt{a}-\sqrt{3x})(\sqrt{a}+2\sqrt{3x})$ $(2\sqrt{6}-\sqrt{12}-\sqrt{24}+\sqrt{48})\sqrt{2}$

25. 次ノ各式ヲ簡單ニセヨ.

$\sqrt{49^3}$ $\sqrt[4]{16^8}$ $\sqrt[5]{243^3}$ $\dfrac{\sqrt[4]{a}}{\sqrt[6]{a}}$ $\dfrac{\sqrt[3]{36}}{\sqrt[6]{324}}$ $\sqrt[3]{\dfrac{4}{3}}\sqrt{\dfrac{3}{2}}$

26. 次ノ各方程式ヲ解ケ.

$\sqrt{5}(1-x)=x+2$ $5\sqrt{x}+\sqrt{3x}=22$ $\sqrt[3]{a^{17-x}}=a^{x-5}$

27. 次ノ各式ノ値ヲ小數第三位迄求ム.

$(\sqrt{2}=1.414213\ldots\ldots)$. $\dfrac{1}{\sqrt{2}}$, $\sqrt{8}$, $\sqrt{50}$, $\sqrt{0.5}$, $\sqrt{4.5}$, $\sqrt{0.02}$

$(\sqrt{3}=1.732050\ldots\ldots)$, $\dfrac{1}{\sqrt{3}}$, $\sqrt{12}$, $\sqrt{48}$, $\sqrt{0.03}$, $\sqrt{1\dfrac{1}{3}}$, $\sqrt{5\dfrac{1}{3}}$

$(\sqrt[3]{6}=1.81712\ldots\ldots)$. $\sqrt[3]{\dfrac{1}{36}}$, $\sqrt[3]{\dfrac{3}{4}}$, $\sqrt[3]{1\dfrac{7}{9}}$ $\sqrt[3]{0.048}$

28. $7\sqrt{12}-5\sqrt{27}+8\sqrt{48}-6\sqrt{75}+2\sqrt{108}$ ヲ簡單ニセヨ.

29. $(\sqrt{7}+\sqrt{3}+\sqrt{10})(\sqrt{7}+\sqrt{3}-\sqrt{10})$ $\sqrt{9+\sqrt{17}}\cdot\sqrt{9-\sqrt{17}}$

$(a\sqrt{b}+b\sqrt{a})(\sqrt{a}-\sqrt{b})$ $(\sqrt{5}-\sqrt{2})\sqrt{7+2\sqrt{10}}$

30. $\sqrt{x\sqrt{x\sqrt[3]{x}}}$　$\sqrt[4]{x\sqrt[3]{x}}$ ヲ簡單ニシ x ヲ 8 トシテ驗セ.

31. $\dfrac{x-\sqrt{x^2-1}}{x+\sqrt{x^2-1}}+\dfrac{x+\sqrt{x^2-1}}{x-\sqrt{x^2-1}}$ ヲ簡單ニシ, $x=\dfrac{5}{3}$ トシテ驗セ.

32. $\sqrt{(1+x)^2}+\sqrt{(1-x)^2}$ ヲ簡單ニセヨ.

$\boxed{解}$ $-1<x<1$ なれば $1+x+(1-x)=2$
$1<x$　〃　$1+x+(x-1)=2x$
$x<-1$　〃　$-x-1+(1-x)=-2x$
　}答

之ト同樣ニ次ノ各式ヲ簡單ニセヨ.

$\sqrt{(1+x)^2}-\sqrt{(1-x)^2}$　$\sqrt{(1-x)^2}-\sqrt{(1+x)^2}$

$\sqrt{a^2+2ab+b^2}-\sqrt{a^2-2ab+b^2}$　$\sqrt{4x^2-4x+1}+\sqrt{1+2x+x^2}$

33. 次ノ各ヲ一次因數ニ分解セヨ.

$3x^2-9$　x^2-32　$25x^2-35$　$(2x-3)^2-5$　$x^2+18x+100$

34. $\dfrac{28}{3+\sqrt{7}+\sqrt{2}}=\sqrt{42}+\sqrt{28}-\sqrt{126}$ ノ兩邊ヲ變形セズ,其値ヲ計算(小數第四位迄)シテ驗セ. 但シ $\dfrac{28}{3+\sqrt{7}+\sqrt{2}}$ ヲ計算スルニハ次ノ注意ニヨル.

【注意】 割り算に於て法の桁數は商の桁數より二桁多ければ十分なり.

35. 前題ニヨリテ次ノ各式ノ値ヲ小數第三位迄二樣ノ仕方ニテ計算セヨ.

$\dfrac{3+\sqrt{6}}{\sqrt{3}+\sqrt{2}}$　$\dfrac{2\sqrt{3}+\sqrt{6}}{\sqrt{3}+\sqrt{6}}$　$\dfrac{7+2\sqrt{10}}{\sqrt{5}+\sqrt{2}}$

$\dfrac{1}{2+\sqrt{2}+\sqrt{3}+\sqrt{6}}$　$\left\{即チ \dfrac{1}{(\sqrt{2}+\sqrt{3})(1+\sqrt{2})}\right\}$

36. 指金ノ裏目トハ,邊ノ長サ 1 尺ナル正方形ノ對角線ノ長サヲ**裏目の1尺**トシテ,ソレニ目盛リシタル尺度ナリ. **裏目の尺**ニテ度ル時ハ鯨尺 1 尺ハ裏目ノ幾許アルカ.

37. 直六面體ノ相對スル三双ノ表面積ガ, (一) 24, 90, 60 (二) 1575, 1925, 2475 ナル時各稜如何(**四十18**).

38. $\sqrt{1-x}$ ヲ x^5 ノ項マデ展開スレバ次ノ如シ.

$$\sqrt{1-x}=1-\frac{1}{2}x-\frac{1}{8}x^2-\frac{1}{16}x^3-\frac{5}{128}x^4-\frac{7}{256}x^5-\cdots.$$

之ニヨリテ次ノ各ヲ計算セヨ.

$\sqrt{10}=\dfrac{10}{3}\sqrt{1-\dfrac{1}{10}}$　$\sqrt{11}=\dfrac{10}{3}\sqrt{1-\dfrac{1}{100}}$　$\sqrt{1+x}$

$\sqrt{5}=\dfrac{9}{4}\sqrt{1-\dfrac{1}{81}}$ (**四十三22**)　$\sqrt{1+x}\sqrt{1+x}$

39. $\sqrt{a-b}$ ト $\sqrt{a}-\sqrt{b}$ トノ差ガ有理數トナル樣ニ a, b ノ一組ノ數値ヲ求ム.

40. $\sqrt{a+b}\neq\sqrt{a}+\sqrt{b}$ ナルコトヲ證明セヨ.

41. $x:y:z=3:4:5$　$xyz=103680$ ヲ解ケ.

42. $\sqrt[3]{128.81.36}$　$\sqrt[6]{1838265625}$　$\sqrt[3]{674.1176\,1764.2016}$

43. 深サ 2 尺ノ瓶アリ,今其重量ノ $\dfrac{5}{8}$ ニ等シキ重量ヲ有スル相似形ノ一瓶ヲ製造スルニハ深サヲ何程減スベキカ(厘位迄).

44. 一ツノ直角ヲ共有スル四ツノ正方形ノ面積ノ連比ガ $1:2:3:4$ ナルモノアリ(圖ヲ畫ケ), 其最大ナル正方形ノ邊ヲ 1 トスレバ他ノ正方形ノ邊ハ其何割何歩ナルカ(小數第三位迄). 又正三角形ナレバ如何.

45. (一) 開立ノ規則ヲ復唱セヨ.

(二) 無理式ノ計算ニ關スル公式ヲ五ツ復唱セヨ.

第七篇

二次方程式

一元二次方程式

59. 一元二次方程式の例(其一)

〔**例一**〕 (A) 矩形アリ,相隣レル二邊ノ差3寸9分,其面積1600平方分ナル時,其相隣レル二邊ヲ x 分,$(x+39)$ 分トスレバ　　$x(x+39)=1600$

兩邊ノ差ヲ取レバ　　$\mathbf{x^2+39x-1600=0}$......(1)

(1)ハ一元二次方程式ナリ(第26節例三).

本題ノ場合ニ於テ相隣レル二邊ヲ $\left(y+\frac{39}{2}\right)$ 分,$\left(y-\frac{39}{2}\right)$ 分トスレバ　　$\left(y+\frac{39}{2}\right)\left(y-\frac{39}{2}\right)=1600$

兩邊ノ差ヲ取レバ　　$\mathbf{y^2-\frac{7921}{4}=0}$.........(2)

方程式(2)ハ一次ノ項ヲ缺クモ,二次ノ項アレバ二次方程式ナリ. 第55節例二ハ此等ノ一元二次方程式(1)或ハ(2)ヲ解ケバ解決セラル.

(B) 或立方體ノ各稜ノ長サ(x寸)ヲ2寸宛延シテ$(x+2)$寸トスレバ,其體積386立方寸増スベシトイフ時ハ　　$\mathbf{(x+2)^3=x^3+386}$

此方程式ハ見掛ケニテハ三次方程式ノ如クナレドモ,其兩邊ノ差ヲ取レバ

$\mathbf{6x^2+12x-378=0}$..............(3)

卽チ又一元二次方程式ナリ.

(C)　　$(3-4x)^2+(4-4x)^2=(5+4x)^2$

ハ如何ニトイフニ,其兩邊ノ差ヲ取レバ

$\mathbf{16x^2-96x=0}$......................(4)

卽チ常數項ノ無キ二次方程式ナリ.

一元二次方程式とは方程式の兩邊の差が $\mathbf{ax^2+bx+c\ (a\neq0)}$ の形の式となるものなり.

一元二次方程式の標準形ハ次ノ如シ

$$\mathbf{ax^2+bx+c=0}\quad(\mathbf{a\neq0})$$

$\mathbf{ax^2}$ ヲ**二次の項**, $\mathbf{bx}$ ヲ**一次の項**, $\mathbf{c}$ ヲ**既知項**(**常數項**)トイフ.

〔**例二**〕 $\mathbf{x^2+x-6=0}$ **を解くこと**.

解　$\mathbf{x^2+x-6=0}$　$\mathbf{(x-2)(x+3)=0}$　答 **2** 或ハ **−3**

說明　原方程式ノ左邊 $\mathbf{x^2+x-6}$ ハ,之ヲ因數ニ分解シタル式 $\mathbf{(x-2)(x+3)}$ ト同値ナリ. 而シテ x ノ數値ガ如何ナル時, $\mathbf{(x-2)\times(x+3)}$ ノ數値ハ 0

トナルカトイフニ, $x-2$ ガ 0 トナルカ, 或ハ $x+3$ ガ 0 トナルトキニ 0 トナリ, 其外ニ 0 トナルコトナシ. 故ニ $x-2=0$ ト $x+3=0$ トヨリ得ル根 2 及 -3 ガ求ムル根ナリ(第23節例五).

〔例三〕 次ノ各方程式ヲ解クコト.

(一) $4x^2-22=(x+1)(2x+3)$

$\boxed{解}$ 兩邊ノ差ヲ取リテ

$2x^2-5x-25=0$ $(2x+5)(x-5)=0$ 答 $-\frac{5}{2}, 5$

(二) $3x^2-9=0$ 答 $\sqrt{3}, -\sqrt{3}$

$\boxed{解}$ $x^2-3=0$ $(x-\sqrt{3})(x+\sqrt{3})=0$

(三) $5x^2-7=0$

$\boxed{解}$ $25x^2-35=0$

$(5x-\sqrt{35})(5x+\sqrt{35})=0$ 答 $\frac{\sqrt{35}}{5}, -\frac{\sqrt{35}}{5}$

〔1〕 **規則** 一元二次方程式を其標準の形に化したる後,其左邊を未知數に就て,一次の因數に分解し,其各因數を零ならしむるxの數値を求めて,それを原方程式の根とす(第36節).

【注意1】 二次方程式ニ限ラズ,幾次ニテモ,其兩邊ノ差ガ x ニ就テ一次ノ因數ニ分解セラルル時ハ其根ガ求メラル. 例ヘバ $9x^3-4x=0$ ハ

$x(3x-2)(3x+2)=0$ ニ導カレ, 答 $0, \frac{2}{3}, -\frac{2}{3}$

〔例四〕 次ノ各方程式ヲ解クコト.

(一) $x^2=74529$ $x=\pm\sqrt{74529}=\pm273$ 答

(二) $5x^2=3$ $x^2=\frac{3}{5}$ $x=\pm\sqrt{\frac{3}{5}}=\pm\frac{\sqrt{15}}{5}$ 答

(三) $(2x-7)^2=9$ $2x-7=\pm3$ 答 5 或ハ 2

【注意2】 $ax^2=b$ ノ如ク一次ノ項ノ缺ケタルモノヲ**純二次方程式**トイフ. 純二次方程式ハ二乘ノ還元法トシテ開平方ニヨリテ解カル. 此等ノ場合ニ**負根を取り落さぬ樣注意すべし.**

〔例五〕 $3(x+2)(x-3)=2(x-3)$ を解くこと.

$\boxed{解}$ $x-3=0$ ......(1) 或ハ $3(x+2)=2$.........(2)

(1) ヨリ $x=3$, (2) ヨリ $x=-\frac{4}{3}$ 答 $3, -\frac{4}{3}$

$\boxed{說明}$ 左邊 $3(x+2)(x-3)$ ト右邊 $2(x-3)$ トハ $x-3$ ナル公因數ヲ有スルヲ以テ,兩邊ノ差ハ $(x-3)\{3(x+2)-2\}$ トナル. 故ニ $x-3=0$ ....(1) ト, $3(x+2)-2=0$ ....(a) トヲ解ケバヨシ. 而シテ (a) ハ $3(x+2)=2$... (2) ト變形セラルルユエ,上ノ如ク解キタルナリ.

〔2〕 **方程式 A·C=B·C の兩邊が未知元 x を含める公約數 C を有する時は**

$C=0$ ………(1) と, $A=B$ ………(2)

との二つの方程式を解くべし.

〔例題〕 次ノ各方程式ヲ解ケ.

1. $x^2-3x+2=0$ $x^2+2x-63=0$ $2x^2-3x+1=0$
2. $2x^2-3x=0$ $x(x^2-1)-3(x^2-1)=0$ $\frac{x+11}{x+3}=\frac{2x+1}{x+5}$
3. $x^2-3=2022$ $(3x-16)^2-3=61$ $(3x-2)^2=5$
4. $(x-1)^2=3(x^2-1)$ $x^2(x-1)=3(x-1)$ $x^2-9=\frac{x-3}{6}$
5. $(x-1)(2x-5)+(x-1)(x-3)=(1-x)(2x-4)$

【注意3】 或一元二次方程式を二次の項の係數が正の數なる標準形に導きたる時 (一) **既知項が負の數なれば,** 一つの根は正の數にして他の一つの根は負の數なり. (二) **既知項が正の數なる時, 一次の項が正項なれば,** 其二つの根は共に負の數なり, **一次の項が負項なれば** 其二つの根は共に正の數なり.

補習問題

次ノ各方程式ヲ解ケ.

6. $4x^2+16x+15=0$ $4x^2+20x+21=0$ $2x^2+5x-3=0$
7. $\frac{5}{7}x^2-225=0$ $4x^2-22=(x-1)(2x-3)$ $2x^2(x-1)=5(x-1)$
8. $(7-x)(9+x)+(7+x)(9-x)=108$ $(a-x)(x-b)=(a-x)(c-x)$
9. $x-a=\frac{1}{a}-\frac{1}{x}$ $mx^2-1=\frac{x(m^2-n^2)}{mn}$ $\frac{27}{x}=\frac{27}{x+2}+\frac{9}{4}$

10. $21+4x-x^2$ ノ數値ヲ正ノ數ナラシムルニハ x ニ如何ナル數値ヲ與フベキカ.

60. 平方に括りて解く例 (其二)

〔例一〕 **$3x^2+5x+2=0$ ……(1) を解くこと**

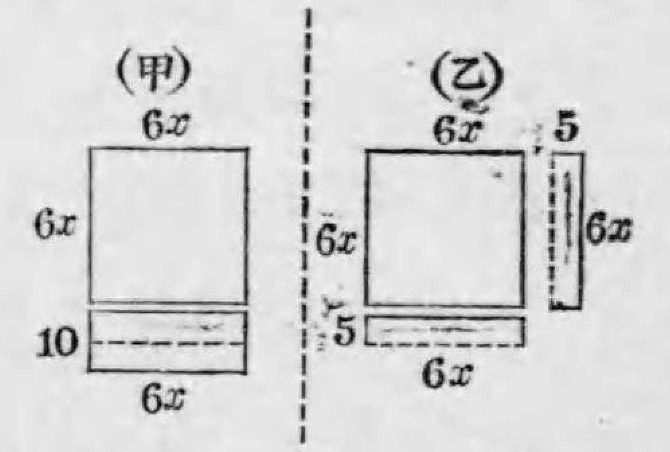
解 4×3 ヲ (一) ノ兩邊ニ掛ケテ

$(6x)^2+10.(6x)+24=0$ …………(2)

$\therefore$ $(6x+5)^2-1=0$ ………………(3)

$\therefore$ $(6x+4)(6x+6)=0$ ……(4) 答 $-\frac{2}{3}$, -1

説明 方程式(1)ノ**二次の項の係數 3 の 4 倍 (3×4) を兩邊に掛け**テ(2)ヲ得, (2)ノ左邊ヲ平方ニ括リテ(3)ヲ得 (四十一8), 之ヲ因數ニ分解シテ(4)ヲ得タルナリ. 又圖ニ示セルガ如ク, **$X^2+10X+24$ の開平商 $X+5$ の第二項 5 は, 一次の項 $10X$ の係數の半分 $\frac{10}{2}$ なり.**



〔例二〕 (一) **$x^2-6x+6=0$** ヲ解クコト.

解 $(x-3)^2-3=0$ $\therefore$ $(x-3-\sqrt{3})(x-3+\sqrt{3})=0$

答 $3+\sqrt{3}$, $3-\sqrt{3}$

(二) $5x^2+18x-2=0$ ヲ解クコト

解　$(5x)^2+18(5x)-10=0$　$(5x+9)^2-91=0$

$$\therefore\ (5x+9-\sqrt{91})(5x+9+\sqrt{91})=0$$

答　$\dfrac{-9+\sqrt{91}}{5}$　$\dfrac{-9-\sqrt{91}}{5}$

【注意2】 一次ノ項ノ係數ガ偶數ナル場合ニハ先ヅ二次ノ項ノ係數ヲ兩邊ニ掛クベシ.

平方剩餘ハ等號ノ右邊ニ移シテモヨシ,然レドモ上ニ示セル解法ノ方應用廣シ.

一元二次方程式の根が無理數なる時は二つの根は $m+\sqrt{n}$ と $m-\sqrt{n}$ との形を有す,卽ち共軛なる無理數なり(係數ハ有理數ナリトス).

〔例三〕 $3x^2-4x-5=0$ ノ根ヲ小數第三位迄求ム.

解　前例ノ如ク解キテ

$$x=\frac{1}{3}(2\pm\sqrt{19})=\frac{1}{3}(2\pm4.3589\cdots)$$

$$x=2.1195\cdots \text{或ハ}\ x=-0.7863\cdots$$

答　2.120, −0.786

驗算　$(\text{左邊})=x(3x-4)-5$

$$=\frac{2+\sqrt{19}}{3}(2+\sqrt{19}-4)-5$$

$$=\frac{1}{3}(2+\sqrt{19})(-2+\sqrt{19})-5$$

$$=\frac{1}{3}(-4+19)-5=\frac{1}{3}15-5=0$$

【注意2】 此場合ノ驗算ハ無理式ニ就テ行フベシ. 又左邊ノ代數式ノ數値ヲ計算スルニハ**部分分解したるもの** $x(3x-4)-5$ ニヨルガ一般ニ便利ナリ(第38節). 根ガ共軛ナル無理數ナル場合ニハ其一ツニ就テ驗セバ足レリ.

x ヲ 2.119 トスレバ左邊ハ **−0.006217** トナリ, x ヲ 2.120 トスレバ左邊ハ **+0.0032** トナル. 不足ナル近似値ト過剩ナル近似値トニテ驗ス時ハ,イツモ,共ニ 0 (右邊 0 ナル場合ハ) ニ近キ數トナリ,且共符號相反ス.

〔例四〕 (一) $x^2-2x+1=0$ ヲ解ケバ

$(x-1)(x-1)=0$　　答 **1の等根**

(二) $ax^2=0$ ヲ解ケバ　　答 **0の等根**

說明　一元二次方程式ハ一般ニ二ツノ根ヲ有スルモノナレバ,此場合ニモ相等シキ二ツノ根ヲ有スルモノト看做スガ至當ナリ.

〔例五〕 (一) 4ト5トヲ根ニ有スル方程式ヲ作ルコト.

[解] $(x-4)(x-5)=0$ 卽チ $x^2-9x+20=0$ 答

例ヘバ $\sqrt{x-4}+\sqrt{5-x}=1$ モ 4 ト 5 トヲ根ニ有スル方程式ナレドモ,本例ノ如キ場合ニハ通例簡單ナル有理方程式ヲ求ムベシ.

(二) 2 ト 3 ト -4 トヲ根トスル方程式如何.

[解] $(x-2)(x-3)(x+4)=0$

卽チ $x^3-x^2-14x+24=0$ 答

〔1〕 與へられたる二つの數 m, n を根とする方程式は $(x-m)(x-n)=0$

卽ち $x^2-(m+n)x+mn=0$ なり.

與へられたる三つの數 l, m, n を根とする方程式は $(x-l)(x-m)(x-n)=0$

卽ち $x^3-(l+m+n)x^2+(mn+nl+lm)x-lmn=0$ なり

〔2〕 二つの數の和が s, 其積が p なれば,其二つの數を根とする方程式は $x^2-sx+p=0$ なり.

逆に方程式 $x^2-sx+p=0$ の二根の和は s にして其積は p なり.

〔3〕 **$x^2-sx+p=0$ の根を驗すには**,兩根の和が s となり,其積が p となるかを驗せばよし.

〔例六〕 $3x^2-4x-5=0$ ノ根 $\frac{1}{3}(2\pm\sqrt{19})$ ヲ驗スコト.

[驗算] $3x^2-4x-5=0$ ヨリ $x^2-\frac{4}{3}x-\frac{5}{3}=0$

$$\frac{1}{3}(2+\sqrt{19})+\frac{1}{3}(2-\sqrt{19})=\frac{4}{3}\cdots\cdots(1)$$

$$\frac{1}{3}(2+\sqrt{19})\times\frac{1}{3}(2-\sqrt{19})=\frac{1}{9}(4-19)=-\frac{5}{3}\cdots(2)$$

∴ 兩根ノ正シキヲ知ル.

[說明] 原方程式ヲ $x^2-sx+p=0$ ノ形, 卽チ $x^2-\frac{4}{3}x-\frac{5}{3}=0$ ニ導キ,兩根ノ和(1)ト,積(2)トガ s ト, p トニ,卽チ $\frac{4}{3}$ ト, $-\frac{5}{3}$ トニ等シキコトヲ驗シタルナリ.

問題 第四十四集

次ノ各方程式ヲ解ケ(1−4).

1. $5x^2-7x-3=0$ $3(x-1)^2=2(x-2)^2$
2. $(x-1)(x-2)+(x-1)(x-3)+(x-2)(x-3)=0$
3. $8x^2-15x-7=0$ ノ根ヲ小數第二位迄求ム.
4. $4x^2+20ax+25a^2=0$ $x^2-6kx+9k^2=0$
5. $8x^2-4x-9=0$ ノ根 $\frac{1}{4}(1\pm\sqrt{19})$ ヲ驗セ.

次ノ各組ノ數ヲ根ニ有スル方程式ヲ作レ(6−7).

6. $(3, 5)$ $(3, -5)$ $(-3, 5)$ $(-3, -5)$ $(15+\sqrt{5}, 15-\sqrt{5})$

7. $(0, 5)$　$(0, -3, 5)$　$\left(-\frac{1}{2}, \frac{3}{2}, -\frac{1}{4}\right)$　$(1, 3+\sqrt{5}, 3-\sqrt{5})$

8. 次ノ各方程式ニ就テ,其二ツノ根ガ正ノ整數トナル様ニ(　)ノ中ヘ入レベキ數ヲ求ム.

$x^2-6x+(\quad)=0$　　$x^2-(\quad)x+24=0$

次ノ各方程式ヲ解ケ(9-12).

9. $6x^2+55x-50=0$　　$29x^2+11x=138$

10. $(3x-1)^2-(2x-1)^2=0$　$(2x-5)^2-(x-6)^2=80$

11. $x^2+20.3=9.3x$　　$\frac{x+1}{x-1}-\frac{x-1}{x+1}=1$

12. $(2x-5)^2-(x-6)^2+n=0$ ヨリ等根ヲ得ル様ニ n ノ數値ヲ定メヨ.

補　習　問　題

次ノ各方程式ヲ解ケ(13-18).

13. $2x+\frac{1}{x}=3$　　$\frac{x}{4}-\frac{21-x}{4-x}=1$　　$x^2+4.3x=27.3$

14. $5x(x-3)-2(x^2-6)=(x+3)(x+4)$

15. $x^2+(a-x)^2=(a-2x)^2$　　$n^2(n^2+n-x)^2=(n-1-x)^2$

16. $(2x+3)^2-8(2x+3)+16=0$　$(3x-5)^2-8(3x-5)+7=0$

17. $(x^2-4)(x+6)=5x^2(x-2)$　$5x^2(a-x)=(a^2-x^2)(x+3a)$

18. $\frac{5}{2x^2+1}=\frac{2}{5x^2-8}$　　$\frac{7x-5}{10x-3}=\frac{5x-3}{6x+1}$　　$\frac{21}{x}+\frac{10}{2-x}=\frac{4}{x-3}$

19. 次ノ各方程式ノ根ノ近似値ヲ小數第三位迄求ム.

$5x^2+7x=3$　　$y^2+1000y+25=0$　　$5z^2+1=15z$

20. 次ノ各組ノ數ヲ根ニ有スル方程式ヲ求ム.

$\left(3, 3\frac{1}{3}\right)$　$(0.7, 0.3)$　$(a+b, a-b)$　$\frac{1}{2}(1\pm\sqrt{3})$　$(1, 2, -3)$

21. 次ノ各ガ恒等式トナル様ニ k ノ數値ヲ定ム.

(一) $kx^2-7x-8=(x-1)(kx+8)$

(二) $x^2+7x+k=(x+k)(x+1)$

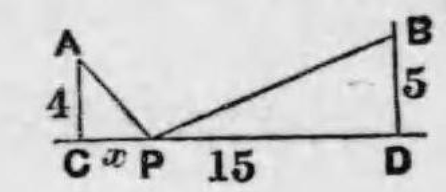
22. $(k+3)x^2-4x+k=0$ ガ等根ヲ有スル様ニ k ヲ定ム.

23. 次ノ各式ガ正ノ數トナルベキ様ニ x ニ與フベキ數値ノ限界ヲ求ム.

(一) $-(x-5)(x+9)$　　(二) $x^2-8x+12$　　(三) $8x+20-x^2$

61. 無理方程式を解く例

〔例一〕　圖ノ如ク,二點 A, B ヨリ一直線 CD ヘ下セル垂線 AC, BD ノ長サガ夫夫 4 米ト, 5 米トニシテ, CD ガ 15 米ナルトキ, CD 上ニ一點 P ヲ求メテ (AP+PB) ヲ 18 米ニ等シカラシムルコト.



[解]　CP ヲ x 米, PD ヲ $(15-x)$ 米トシ, (AP+PB) ヲ比ベテ

$$\sqrt{x^2+4^2}+\sqrt{(15-x)^2+5^2}=18 \cdots\cdots\cdots\cdots (1)$$

$$\therefore\ \sqrt{(15-x)^2+5^2}=18-\sqrt{x^2+4^2}$$

兩邊ヲ二乘シテ $(15-a)^2+5^2=18^2-36\sqrt{x^2+4^2}+x^2+4^2$

簡單ニシテ　　$6\sqrt{x^2+16}=5x+15$

再ビ兩邊ヲ二乘シテ $36(x^2+16)=25x^2+150x+225$

$$\therefore\ 11x^2-150x+351=0 \cdots\cdots\cdots\cdots (2)$$

$\therefore\ (11x-117)(x-3)=0 \quad \therefore\ x=\frac{117}{11}$ 或ハ 3

[驗算]　(一)　CP$=\frac{117}{11}$米トスレバ, PB$=\frac{48}{11}$米

$$\sqrt{\left(\frac{117}{11}\right)^2+4^2}+\sqrt{\left(\frac{48}{11}\right)^2+5^2}=\frac{125}{11}+\frac{73}{11}=18$$

(二)　CP$=3$米トスレバ, PB$=12$米

$$\sqrt{3^2+4^2}+\sqrt{12^2+5^2}=5+13=18$$

答　C 點ヨリ $10\frac{7}{11}$米, 或ハ 3 米

方程式(1)ヲ**無理方程式**トイフ,之ヲ解クニハ**有理方程式**(2)ニ導キテ解クモノトス.

無理方程式(根數方程式)とは根號內に未知元を含む式を有する方程式なり.

有理方程式とは方程式の兩邊が未知元に就て有理式なるものをいふ.

〔例題〕　例一ニ於テ,PBトAPトノ差ヲ8米ナラシムルP點ノ位置ヲ求ム.

〔例二〕　$x+\sqrt{x+1}=5$ を解くこと.

[解]　$\sqrt{x+1}=5-x \quad \therefore\ x+1=(5+x)^2$

$\therefore\ x^2-11x+24=0 \quad \therefore\ x=8$ 或ハ $x=3$

[驗算]　(一)　$x=8$ トスレバ

$8+\sqrt{8+1}=8+3=11$ 故ニ 8 ハ根ニアラズ.

(二)　$x=3$ トスレバ

$3+\sqrt{3+1}=3+2=5$　　答 3

規則　無理方程式を解くには,適當に移項して,自乘し,之を有理方程式に導きて解きたる後,驗算して餘分の根あらば捨つべし.

【注意1】　次の二つの方程式

$\sqrt{x+1}=5-x$......(A) と, $-\sqrt{x-1}=5-x$......(B) との各の兩邊を二乘すれば共に

$x+1=(5-x)^2$......(C) となる.

故に方程式 (C) は (A) と (B) との兩方の根を含む.

前ノ驗算ニテ捨テタル根 $x=8$ ハ (B) ノ根ナリ.

例二ヲ次ノ如ク解ケバ餘分ノ根ハ避ケ得ラル.

〔例三〕　$x+\sqrt{x+1}=5$ を解くこと.

[解]　$x+1+\sqrt{x+1}-6=0$

$\therefore\ (\sqrt{x+1}+3)(\sqrt{x+1}-2)=0$

$\therefore\ \sqrt{x+1}+3=0$......(A) 或ハ $\sqrt{x+1}-2=0$......(B)

然ルニ(A)ハ不能ナリ,何トナレバ $\sqrt{x+1}$ ハ正ノ數ナルヲ以テ,之ト3トノ和ヲ0ニ等シカラシムルコト能ハザレバナリ.

(B)ヨリ $\sqrt{x+1}=2 \quad \therefore\ x=3$ 答

【注意2】 $\begin{cases} a>0 \text{ なれば } \sqrt{x}=a \text{ の根は } x=a^2, \\ a<0 \text{ なれば } \sqrt{x}=a \text{ は不能なり.} \end{cases}$

問題 第四十五集

次ノ各方程式ヲ解ケ(1−7).

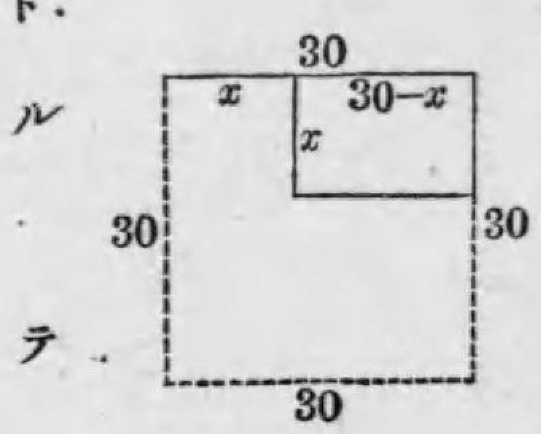
1. $3x-5\sqrt{x}-2=0$ $3x-7\sqrt{x}+2=0$ $3x+7\sqrt{x}+2=0$
2. $\sqrt{5ax-9a^2}+a=\sqrt{5ax}$ $\sqrt{5ax-9a^2}-a=\sqrt{5ax}$
3. $5\sqrt{x}-3\sqrt{x}=4$ $3\sqrt{x}-5\sqrt{x}=4$
4. $a\sqrt{x}-b\sqrt{x}=(a-b)^2$ $\sqrt{2x}-\sqrt{x}=\sqrt{a}$
5. $\sqrt{4x-3}+2\sqrt{x}=3$ $\sqrt{x}+\sqrt{x+4}=3$
6. $\sqrt{4x+1}-\sqrt{x+3}=2$ $\sqrt{x+4}-\sqrt{5x-24}=\dfrac{6}{\sqrt{x+4}}$
7. $3x=5+\sqrt{30x-71}$ $\sqrt{x+7-\sqrt{5(x-2)}}=3$

補習問題

8. $\sqrt{x}=7$ $\sqrt[3]{x}=2$ $\sqrt{x}=-6$ $\sqrt[3]{x}=-6$ $\sqrt{x}+\sqrt{3x}=2$
9. $\sqrt{2x}+\sqrt{3x}=1$ $\sqrt{x+2}=\dfrac{x-1}{\sqrt{x-3}}$ $\sqrt{x+4}=\dfrac{x+1}{\sqrt{x-1}}$ $x+2\sqrt{x}=100$
10. $\sqrt{14-x}+\sqrt{11-x}=\dfrac{3}{\sqrt{11-x}}$ $\sqrt{4x+9}-\sqrt{x-1}=\sqrt{x+6}$
11. $2x-9\sqrt{x}=5$ $\sqrt{x+5}=x-1$ $\sqrt[4]{3x^2+13}+\sqrt{3x^2+13}=6$
12. $2\sqrt{5+2x}-\sqrt{13-6x}=\sqrt{37-6x}$ $\sqrt{4x-3}-\sqrt{x-4}=4$
13. 第61節例一ニ於テCDノ長サヲ$9\sqrt{3}$米,其他ノ數ハ元ノママトスレバ如何.
14. $x=0, 1, 2, 3, 4, 5$ヲ代入シテ,次ノ方程式ガ根ヲ有セザルコトヲ驗セ. $3\sqrt{x}-\sqrt{9x+13}=13$

62. 虚數の計算

〔例一〕 長サ60間ノ繩ヲ以テ矩形ニ土地ヲ圍ミ,其面積ヲ2250坪ナラシムルコト.



説明 (一) 本問題ハ不能ナルコト明カナリ(圖参照).

(二) 次ノ如ク方程式ヲ應用シテ解クモ,其不能ナルコトヲ知ル.

横,縦ノ長サヲx間,$(30-x)$間,面積ヲs坪トスレバ

$s=x(30-x)$ $\therefore$ $x^2-30x+s=0$ $(x-15)^2=225-s$ ....(1)

今sヲ2250トスレバ,(1)ハ次ノ如クナル

$$(x-15)^2=-2025 \quad \text{.................(2)}$$

(2)ノ左邊ハ完全平方數ニシテ,常ニ正ノ數ナリ.然ルニ右邊ハ負ノ數ナルヲ以テ(2)ハ不能ナリ.

【注意1】 方程式(1)ニヨリテ見レバ,sガ225ヨリ大ナレバ不能ナリ,故ニ面積ハ225坪ノ時最大ニシテ,此時矩形ハ正方形ヲナス.

此處ニ於テ,代數學ハ其實地問題ヘノ應用ト離レテ,方程式(2)モ解キ得ルモノトシテ,次ノ如ク計算ス.

$x-15=\pm\sqrt{-2025}$

答 $15+\sqrt{-2025}$ 或ハ $15-\sqrt{-2025}$

$\sqrt{-2025}$ ヲ**虚數**ト名ヅク.

虚數.實數 負の數の平方根を**虚數**と名づく. 虚數に對して有理數と無理數とを通稱して**實數**と名づく. 虚數と實數との和も虚數なり.

【注意2】 例一ノ如ク,有理數或ハ無理數ノ解答ヲ豫期セル普通ノ問題ヲ方程式ヲ應用シテ解キタル時,虚根ヲ得レバ問題ハ不能ナリ.

一ツノ一元二次方程式ノ二ツノ根ハイツモ,共ニ虚數ナルカ或ハ共ニ實數ナリ.

虚數單位 $\sqrt{-1}$ を i にて表し之を**虚數單位**と名づく

$$(i)^2=(\sqrt{-1})^2=-1 \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots[1]$$

$$\sqrt{-36}=\sqrt{36\times(-1)}=\sqrt{36}\times\sqrt{-1}=6i$$

$$\sqrt{-8}=\sqrt{8\times(-1)}=\sqrt{8}\times\sqrt{-1}=2\sqrt{2}\times i=2i\sqrt{2}$$

$$\sqrt{-a}=i\sqrt{a} \quad (a>0) \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots[2]$$

$$\sqrt{-4}\cdot\sqrt{-9}=2i.3i=6i^2=6\times(-1)=-6$$

$$\sqrt{-a}\cdot\sqrt{-b}=i\sqrt{a}.i\sqrt{b}=i^2.\sqrt{ab}$$

$$=-\sqrt{ab} \quad (a>0,\ b>0) \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots[3]$$

$15+\sqrt{-2025}$ ハ $15+45i$ ト變形セラル.

$$\begin{cases}\sqrt{-a} & 15+\sqrt{-2025} \text{ ニ對シテ} \\ i\sqrt{a} & 15+45i \text{ ヲ標準形トイフ.}\end{cases}$$

虚數の標準の形 次ノ如シ

$$ni \qquad m+ni \qquad m-ni \qquad (n\neq0)$$

【注意3】 $\sqrt{-4}\times\sqrt{-9}$ ハ各ヲ先ヅ標準形ニ直シテ後計算シテ -6 トス.

之ヲ $\sqrt{-4\times(-9)}=\sqrt{36}=6$ トスルハ誤レリ.

虚數はいつも標準形に直したるものにて計算し,結果も標準形にて答ふべし.

虚數ノ中 $m+ni$, $m-ni$ $(m\neq0,\ n\neq0)$ ナルモノヲ特ニ**複素數**トイフ. 複素數ハ實數ト虚數トノ和ナリ.

一元二次方程式ノ二ツノ虚根ハイツモ (ni と $-ni$) 或ハ ($m+ni$ と $m-ni$) ノ形ヲ有ス. 即チ其和モ,其積モ實數ナリ,之ヲ**共軛虚數**トイフ.

【注意4】 代數學ニ於テ論ズル數ノ種類次ノ如シ.

- 數の種類
  - 虛數　$i,\ -3i,\ \frac{2}{3}i,\ -i\sqrt{3},\ 3+2i,\ 3-i\sqrt{3},\ 2+5i\sqrt{3}$
  - 實數
    - 無理數
      - 負の無理數　$-3\sqrt{5}\quad(\sqrt{2}-\sqrt{5})$
      - 正の無理數　$\frac{4\sqrt{2}}{5}\quad\sqrt[3]{3+\sqrt{6}}$
    - 有理數
      - 負の有理數　$-\frac{1}{6},\ -5,\ -10.03,\ -365$
      - 零…………　$0,\ 3-3,\ a-a$
      - 正の有理數　$1,\ 3,\ 100,\ \frac{1}{8},\ \frac{22}{7},\ 3.14$

〔例二〕 i ヲ用フル因數分解

(一) $a^2+b^2=a^2-(-b^2)$

$$=a^2-(b^2.i^2)=a+bi)(a-bi)\dots\dots[4]$$

(二) $3x^2+4x+5=\frac{1}{3}\{(3x)^2+4(3x)+15\}$

$$=\frac{1}{3}\{(3x+2)^2+11\}$$

$$=\frac{1}{3}(3x+2+i\sqrt{11})(3x+2-i\sqrt{11})\quad\text{答}$$

〔例三〕 $x^2-\sqrt{2}x+1=0$ ヲ解クコト.

$\boxed{\text{解}}$ $(2x)^2-2\sqrt{2}(2x)+4=0\quad(2x-\sqrt{2})^2+2=0$

$$(2x-\sqrt{2}-i\sqrt{2})(2x-\sqrt{2}+i\sqrt{2})=0$$

答 $\frac{\sqrt{2}}{2}(1+i),\ \frac{\sqrt{2}}{2}(1-i)$

$\boxed{\text{驗算}}$ $x=\frac{\sqrt{2}}{2}(1+i)$ トスレバ

$$(\text{左邊})=\frac{\sqrt{2}}{2}(1+i)\left\{\frac{\sqrt{2}}{2}(1+i)-\sqrt{2}\right\}+1$$

$$=\frac{\sqrt{2}}{2}(1+i)\frac{\sqrt{2}}{2}(-1+i)+1=\frac{2}{4}(-1+i^2)+1$$

$$=\frac{1}{2}(-1-1)+1=-1+1=0$$

【注意5】 例三ニヨレバ $x^2-\sqrt{2}x+1$ ヲ平方ニ括レバ $\frac{1}{4}(2x-\sqrt{2})^2+\frac{1}{4}$ トナリ,其平方剩餘 $\frac{1}{4}$ ハ正ノ數ニシテ,二ツノ根ハ虛數ナリ.

一元二次方程式 $ax^2+bx+c=0$ ノ左邊ノ平方剩餘ガ正ノ數ナル時ハ二ツノ根ハ虛數ナリ $(a>0)$.

問題　第四十六集

1. $\sqrt{-4}\quad\sqrt{-25}\quad\sqrt{-49}\quad\sqrt{-40}\quad 5\sqrt{-40}\quad\sqrt{-a^4}$
2. $\sqrt[3]{-8}\quad\sqrt[3]{-125}\quad\sqrt{-x^{2n}}(x>0)\quad 3\sqrt{-72}\quad\sqrt{-96}$
3. $\sqrt{-a}\sqrt{-1}\quad\sqrt{-8}\sqrt{-12}\quad\sqrt{-5}\sqrt{-20}\quad 3i\sqrt{-n}\sqrt{4n}$
4. 次ノ各式ヲ因數ニ分解セヨ.

   $x^2+1\qquad x^2-6x+10\qquad x^2-10x+32$
5. 次ノ各方程式ヲ解ケ.

   $x^2+\sqrt{2}x+1=0\quad x^2-10x+84=0\quad 12x^2-36x+31=0$
6. $\sqrt{x-1}+\sqrt{3x+1}=\sqrt{2x-6}$ ノ根 $x=-1$ ヲ驗セ.
7. $i^7\quad\sqrt{-i^5}\quad\frac{1}{i^3}\quad\frac{\sqrt{12}}{\sqrt{-6}}\quad(3+i\sqrt{2})(5-7i\sqrt{2})$
8. $\left(\frac{1+i}{\sqrt{2}}\right)^4\quad\sqrt{55i+48}\sqrt{55i-48}\quad\frac{1+i\sqrt{3}}{1-i\sqrt{3}}\quad\frac{1+i}{1-i}$

補　習　問　題

次ノ各式ヲ計算セヨ.

9. n ガ, 1, 2, 3,……16, $4k$, $4k+1$, $4k-1$, $4k-2$ ナル時, i^n 如何.

10. $\sqrt{-i^2}$　$\sqrt{-i^3}$　$\sqrt{-i^4}$　$\sqrt{-i^5}$　$i\sqrt{-x^2}$　$3i\sqrt{-4x}\sqrt{9x}$　$i^2\sqrt{-5p^2}$

11. n ガ 1, 2, 3,……16, $4k$, $4k+1$, $4k-1$, $4k-2$ ナル時, $\frac{1}{i^n}$ 如何.

12. $\frac{\sqrt{-6}}{\sqrt{-3}}$　$\frac{\sqrt{6}}{\sqrt{-3}}$　$\frac{ai}{\sqrt{-a}}$　$\frac{b}{i\sqrt{b}}$　$\frac{-c}{i\sqrt{-c^2}}$　$-\frac{di^3}{\sqrt{-d^2}}$

13. $\sqrt{5-3}\cdot\sqrt{3-5}$　$\sqrt{a-b}\cdot\sqrt{b-a}$　$(2-5i)(8-3i)$　$(\sqrt{3}+i\sqrt{2})(\sqrt{2}+i\sqrt{3})$

14. $(3\sqrt{3}+2i\sqrt{2})(3\sqrt{3}-2i\sqrt{2})$　$\sqrt{1+i}\sqrt{1-i}$　$\sqrt{33+56i}\sqrt{33-56i}$

15. $\left(\frac{1+i}{1-i}\right)^2$　$\left(\frac{-1+i\sqrt{3}}{2}\right)^3$　$\frac{64}{1+3\sqrt{-7}}$　$\frac{1+i}{1-i}+\frac{1-i}{1+i}$　$(\sqrt{4+3i}+\sqrt{4-3i})^2$

16. 次ノ各式ヲ因數ニ分解セヨ.

x^2-2x+2　x^2+4　$(x-1)(x^2+x+1)$　a^2+ab+b^2

17. 次ノ各方程式ヲ解キテ驗セ.

$x^2-2x+3=0$　$\sqrt{x-1}+\frac{1}{\sqrt{x-1}}=x$　$8x^2-5x+6=0$

18. 次ノ各組ノ數ヲ根ニ有スル方程式ヲ求ム.

$(3i,\ -3i)$　$(2+i,\ 2-i)$　$(a+bi,\ a-bi)$　$(-5+i\sqrt{2},\ -5-i\sqrt{2})$

63. 根の公式,判別式

〔**1**〕　一元二次方程式 $ax^2+bx+c=0$ の二つの根は $x=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$ によりて計算せらる.

$\boxed{\text{解}}$　$ax^2+bx+c=0$ ノ兩邊ニ $4a$ ヲ掛ケテ

$$4a^2x^2+4abx+4ac=0$$

左邊ヲ平方ニ括レバ　$(2ax+b)^2-b^2+4ac=0$

$$\therefore\ (2ax+b)^2-(b^2-4ac)=0$$

$$\therefore\ (2ax+b-\sqrt{b^2-4ac})(2ax+b+\sqrt{b^2-4ac})=0$$

$$\therefore\ x=\frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a}\ \text{或ハ}\ x=\frac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$

$\boxed{\text{驗算}}$　$x(ax+b)+c$

$$=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}\left(a\times\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}+b\right)+c$$

$$=\frac{1}{4a}(-b\pm\sqrt{b^2-4ac})(+b\pm\sqrt{b^2-4ac})+c$$

$$=\frac{1}{4a}(-b^2+b^2-4ac)+c=-c+c=0$$

〔**例題**〕　次ノ各方程式ニ就テ上ノ解法ヲ練習セヨ.

$cx^2-bx+a=0$　$x^2-sx+p=0$　$3x^2+7x+1=0$

判別式　一元二次方程式 $ax^2+bx+c=0$ に於て b^2-4ac を其判別式といふ. 判別式 b^2-4ac を D にて表せば $x=\frac{1}{2a}(-b\pm\sqrt{D})$ なり

〔**例一**〕　$16x+7-8x^2=0$ ヲ解クコト.

$\boxed{\text{解}}$　$8x^2-15x-7=0$

$\therefore\ \sqrt{D}=\sqrt{15^2+4.8.7}=\sqrt{449}$　　答　$\frac{1}{16}(15\pm\sqrt{449})$

$\boxed{\text{說明}}$　$\sqrt{b^2-4ac}$ ノ中ノ b ニ (-15) ヲ, a ニ 8 ヲ,

$c=(-7)$ ヲ代入シタルナリ. c ガ -7 ナルユヱ, b^2-4ac ハ $b^2+4a.7$ トナルナリ.

〔例二〕 $2x^2-(a-2b)x-ab=0$ ヲ解クコト.

解 $\sqrt{D}=\sqrt{(a-2b)^2+4.2ab}=(a+2b)$...(第36節〔7〕).

$\therefore\ x=\frac{1}{4}\{(a-2b)\pm(a+2b)\}$　　答 $\frac{a}{2},\ -b$

〔例三〕 $9x^2-15ax+\frac{13}{2}a^2=0$ ヲ解クコト.

解 $\sqrt{D}=\sqrt{225a^2-4.9.\frac{13}{2}a^2}=\sqrt{-9a^2}=3ai$

$\therefore\ x=\frac{1}{18}(15a\pm3ai)$　　答 $\frac{5a+3ai}{6},\ \frac{5a-3ai}{6}$

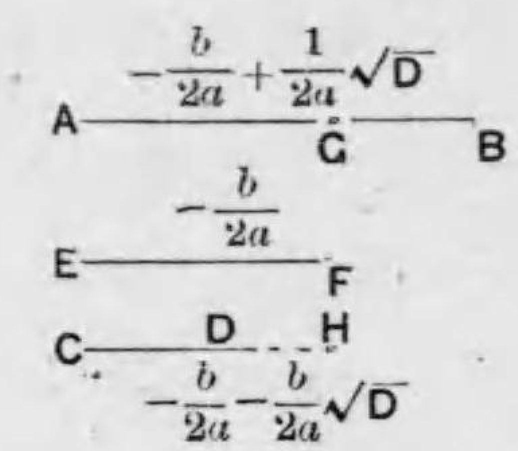
〔2〕 一元二次方程式 $ax^2+bx+c=0$ に於て, **(一)判別式 b^2-4ac の値が正の數なれば,二つの根は實數なり.** 而して b^2-4ac が完備なる平方數なる時に限りて,二つの根は有理數なり. **(二)判別式 b^2-4ac の値が0なれば二つの根は相等しくして共に實數 $\frac{-b}{2a}$ なり. (三)判別式 b^2-4ac の値が負の數なれば二つの根は共軛なる虚數なり**(係數ガ有理數ナルトキ).

【注意1】 例一ノ如ク,一元二次方程式ハ其二次ノ項ノ係數ガ正ノ數ナルモノニ導キテ解クベシ.

其場合に既知項が負の數なれば,判別式の値は

正の數となり,其方程式は常に二つの實根を有し,一つは正の數,他の一つは負の數なり(第59節注意3).

【注意2】 $ax^2+bx+c=0$ ノ二根ハ $\frac{-b}{2a}+\frac{1}{2a}\sqrt{D}$ ト, $\frac{-b}{2a}-\frac{1}{2a}\sqrt{D}$ トナリ. 故ニ



$-\frac{b}{2a}$ は $ax^2+bx+c=0$ の二根の和の半に等しく, $\frac{1}{2a}\sqrt{D}$ は其差の半に等し.

〔例題〕 根ノ公式ニヨリテ次ノ各方程式ヲ解ケ.

1. $x^2+4.3x=27.3$　　$4x-13-x^2=0$
2. $3x^2-8x+\frac{16}{3}=0$　　$3x^2+ax-3bx=ab$

次ノ各方程式(3-4)ノ根ノ種類ヲ判別セヨ(即チ實數ナルカ,虚數ナルカ).

3. $4x^2+21x+5=0$　$11x^2-12x+9=0$　$3x^2+x+7=0$
4. $(x-p)(x-q)=5$　$x^2+2(s+t)x+2(s^2+t^2)=0$
5. 1-2 ノ各方程式ニ就テ,其二根ノ和ノ半ヲ答ヘヨ.
6. 3. ノ各方程式ニ就テ,其二根ノ差ヲ求ム.

〔3〕 (一) 一元二次式 ax^2+bx+c は次の如く一次因數に分解せらる. 但シ $D=b^2-4ac$

$$ax^2+bx+c=\frac{1}{4a}(2ax+b-\sqrt{D})(2ax+b+\sqrt{D})$$

(二) ax^2+bx+c を平方に括れば　$-\sqrt{D}$

$$ax^2+bx+c=\frac{1}{4a}(2ax+b)^2-\frac{1}{4a}(b^2-4ac),$$

$-\frac{1}{4a}(b^2-4ac)$ を**平方剰餘**といふ.

(三) **$b^2-4ac=0$ なる場合には,** ax^2+bx+c は, x に就て一次式の**完全平方に括らる**. 即ち

$b^2-4ac=0$ なれば $ax^2+bx+c=\frac{1}{4a}(2ax+b)^2$

此場合ニハ係數 $\frac{1}{4a}$ ヲ顧ミズ, x ノ一次式ノ完全平方ニ括ラレタリトイフ.

〔例四〕 (一) $15x+7-8x^2$ ヲ因數ニ分解スルコト.

解 $10x+7-8x^2=-(8x^2-15x-7)$

$\sqrt{D}=\sqrt{449}$ (例一)

∴ (原式) $=-\frac{1}{32}(16x-15-\sqrt{449})(16x-15+\sqrt{449})$ 答

驗算 $-\frac{1}{32}(16x-15-\sqrt{449})(16x-15+\sqrt{449})$

$=-\frac{1}{32}\{256x^2-480x+225-449\}$

$=-\frac{1}{32}(256x^2-480x-224)$

$=-8x^2+15x+7$

(二) $x^2+7x+16$ ヲ因數ニ分解スルコト

解 $\sqrt{D}=\sqrt{49-64}=i\sqrt{15}$

∴ (原式) $=\frac{1}{4}(2x+7-i\sqrt{15})(2x+7+i\sqrt{15})$ 答

【注意3】 因數解法ハ原式ヲ之ト同値ノ式ニ變形スベキモノナルヲ以テ, $\frac{1}{4a}$ トイフ係數ヲ取リ落サヌ樣注意スベシ.

〔例題〕 次ノ各式ヲ因數ニ分解セヨ (1-2).

1. $x^2-7ax+3a^2$　　$5x^2-38x+48$　　$20x^2-x-99$
2. x^2+ax+a^2　　$x^2-3x+2xy+y^2-3y-40$
3. (一) $-24x^2+5x+14=0$ ヲ解ケ.
   (二) $-24x^2+5x+14$ ヲ因數ニ分解セヨ.
4. 次ノ各式ヲ x ニ就テ平方ニ括レ.
   $3x^2-8x+\frac{16}{3}$　　$3x^2+7xy+y^2$　　$(k+3)x^2-4x+k$

〔4〕 (一) 一元二次方程式 $ax^2+2bx+c=0$ の二つの根は, $x=\frac{1}{a}(-b\pm\sqrt{D})$, (但し $D=b^2-ac$) によりて求めらる. $\frac{-b}{a}$ は兩根の和半, $\frac{1}{a}\sqrt{D}$ は兩根の差半なり.

(二) $ax^2+2bx+c=\frac{1}{a}(ax+b-\sqrt{D})(ax+b+\sqrt{D})$

此等ハ一次ノ項ノ係數ガ偶數ナル場合ナリ.

〔例題〕 1. 次ノ各方程式ヲ解ケ.

$3x^2+10x+2=0$　$5x^2+4ax=-a^2$　$x^2+2(k+1)x+k^2=0$

2. $(a+b+c)x^2-2(a+b)x+(a+b-c)$ ヲ平方ニ括レ.

〔例五〕 (一) $\frac{4}{x-1}+\frac{5}{x-2}=\frac{12}{x-3}$ ヲ解クコト.

解 公分母Lヲ $(x-1)(x-2)(x-3)$ トシテ(第48節)

$$4(x-2)(x-3)+5(x-1)(x-3)=12(x-1)(x-2)$$

$$3x^2+4x-15=0 \qquad \therefore\ x=\frac{5}{3} \text{ 或ハ } -3$$

$\frac{5}{3}$ ト -3 トハLヲ0トセズ故ニ根ナリ. 答 $\left\{\begin{array}{l}\frac{5}{3}\\ -3\end{array}\right.$

(二) $\frac{3}{(x-2)(x-5)}+\frac{x}{x-5}+\frac{1}{x-2}=\frac{3}{x-5}$ ヲ解クコト.

解 公分母Lヲ $(x-2)(x-5)$ トシテ

$$3+x(x-2)+(x-5)=3(x-2)$$

$$\therefore\ x^2-4x+4=0 \qquad (x-2)(x-2)=0 \ldots\ldots(A)$$

故ニ2ノ等根ヲ得. 而シテ2ハLヲ0トス.

然ルニ(A)ニヨレバ,原方程式ノ兩邊ノ差ハ

$$\frac{(x-2)^2}{(x-2)(x-5)} \quad \text{卽チ} \quad \frac{x-2}{x-5} \ldots\ldots\ldots\ldots(B)$$

而シテ,$x=2$ ハ(B)ヲ零トス,故ニ根ナリ. 答 2

〔例六〕 $3x^2+3-u(x^2-x+1)=0$ ハ u ノ數値ガ幾許ナレバ實根ヲ有スベキカ.

解 $(3-u)x^2+ux+(3-u)=0$

$$\sqrt{D}=\sqrt{u^2-4(3-u)^2}=\sqrt{-3(u-6)(u-2)} \ldots\ldots\ldots(A)$$

故ニ $(u-6)(u-2)$......(B) ガ0或ハ負ノ數トナレバ $\sqrt{D}$ ハ實數トナリ,根モ實數トナル.

而シテ(B)ノ値ガ負ノ數トナルニハ,其大ナル因數 $u-2$ ガ正トナリ,小ナル方 $u-6$ ガ負トナレバヨシ.

$$\therefore\ u-2>0 \text{ 且 } 0>u-6 \qquad \therefore\ 6>u>2$$

之ト(B)ノ0トナル場合トヲ併セテ

答 $6\geqq u\geqq 2$

例ヘバ u ヲ5トスレバ方程式ハ $-2x^2+5x-2=0$ トナリ,實根 $2,\ \frac{1}{2}$ ヲ得.

問題 第四十七集

1. 次ノ各方程式ヲ解ケ.

$$\frac{1}{x-2}+\frac{2}{x-7}=\frac{2}{x-8} \qquad \frac{2}{x^2-1}+\frac{x-2}{x-1}=\frac{3x-1}{x+1}$$

2. 次ノ各方程式ガ實根ヲ有スル樣ニ既知數ヲ表ス文字ノ數値ノ限界ヲ求ム.

$$3x^2-ux+45=0 \qquad x^2+(k-5)x=2k-10 \qquad \frac{x^2-5x+10}{2-x}=u$$

3. $bx^2-(b-c)x-(b+c)=0$ ノ根ノ種類ヲ判別セヨ.

4. $5x^2+4xy+y^2$ ヲ平方ニ括レ(x ニ就テ,又 y ニ就テ).

次ノ各方程式ヲ解ケ(5-8).

5. $12x^2+7x-10=0$ $\qquad x^2+3\sqrt{3}x-30=0$

6. $\dfrac{a^2}{x-1}=\dfrac{1}{x-1}$ $\qquad \dfrac{5x-12}{(x-2)(x-3)}=\dfrac{x}{x-3}+1$

7. $\dfrac{7x-5}{10x-3}=\dfrac{5x-3}{6x+1}$ $\qquad \dfrac{5x-7}{9}+\dfrac{14}{2x-3}=x-1$

8. $2x-1=\sqrt{x^2-3x+3}$ $\qquad 2\sqrt{x+2}-\sqrt{2x-3}=3$

9. 次ノ各式ヲ因數ニ分解セヨ.

$12x^2-37x-144$ $\qquad (a^2-b^2)(x^2+1)-2x(a^2+b^2)$

次ノ各式ヲxニ就テ平方ニ括レ(10-11).

10. $ax^2-bx+cx-a$ $\qquad (a^2+1)x^2-(3a-2)x+2$

11. $(9a-7b+3x)(9b-7a+3x)-(3a+3b+x)^2$

12. xニ如何ナル數値ヲ代入シタル時,次ノ各式ノ數値ガ極大或極小トナルベキカ(平方ニ括リ).

(一) $(a-x)(b+x)$ $\qquad$ (二) $(x-a)(x+b)$

13. 次ノ各方程式ガ實根ヲ有スル爲ノuノ數値ノ限界ヲ求ム.

$(a-x)(b+x)=u$ $\qquad \dfrac{3x^2+3}{x^2-x+1}=u$ $\qquad \dfrac{5x^2+8x-1}{x^2+1}=u$

14. 次ノ各方程式ノ根ノ種類ヲ判別セヨ

(一) $x^2+(a-x)^2=u^2$ $\quad$ (二) $(b^2-4ac)x^2+4(x+c)x-4=0$

(三) $ax^2-2ax-bx+2b=0$

15. 次ノ各方程式ヨリ等根ヲ得ル樣ニ文字ノ數値ヲ定メヨ.

(一) $3x^2-4x+k=0$ $\qquad$ (二) $(b^2-ac)x^2+ax+cx=1$

16. 次ノ式ガ,(一) xニ就テ完全平方トナル樣ニyノ數値ヲ定ム. (二) yニ就テ完全平方トナル樣ニxノ數値ヲ定ム.

$x^2y^2-3xy+x^2+2x+2$

次ノ各方程式ヲ解ケ(17-21).

17. $a^2-x^2=(a-x)(b+c-x)$ $\qquad ax^2+2abx-x+b^2=0$

18. $(x+a+b)(x-a+b)+(x+a-b)(x-a-b)=0$

19. $(2x-a)^2=b(2x-a)+2b^2$ $\qquad 3\left(\dfrac{x-1}{x+1}\right)-2\left(\dfrac{x+1}{x-1}\right)=5$

20. $\dfrac{2x+3}{2x+1}+\dfrac{3(x-2)}{3x-2}+\dfrac{4x+5}{4x+3}=3$ $\qquad \dfrac{nx+3}{n+3x}=\dfrac{px+2}{p+2x}$

21. $x^2-273x+3626=0$ $\quad x^2+0.51388x-0.33333=0$

【注意】 一元二次方程式ハ開平方ノ應用トシテ,之ヲ第55節ノ方法ニヨリテ解クヲ得.

〔例一〕 $x^2-273x+3626=0$ ハ $x(273-x)=3626$ ト導カル. 故ニxト$(273-x)$トノ和及積ヲ知ルヲ以テ,公式$(A-B)^2=(A+B)^2-4AB$ニヨリテ,此二因數ノ差$(A-B)$ハ$\sqrt{273^2-4\times3626}=\sqrt{60025}=245$ 故ニ二數ハ$\dfrac{273\pm245}{2}$即チ**259**ト**14**トナリ.

〔例二〕 $x^2+18x-1600=0$ ハ $(x+18)x=1600$ ト導カル. 故ニ$(x+18)$トxトノ差及積ヲ知ルヲ以テ,公式$\left(\dfrac{A+B}{2}\right)^2=\left(\dfrac{A-B}{2}\right)^2+A.B$

ニヨリテ,此ノ二因數ノ和半 $\left(\frac{A+B}{2}\right)$ ハ $\sqrt{\left(\frac{18}{2}\right)^2+1600}=41$ 故ニ $(x+18)$ ト x トハ 41 ± 9 卽チ **50** と **32** とナリ. **−32** と **−50** トニ於テモ其差 18, 其積 1600 ナルチ以テ, x ハ **32** 或ハ **−50** ナリ.

〔**例三**〕 $x^2+273x+3626=0$ ノ如クニツノ負根チ有スルモノハ, 其絕對値チ $x^2-373x+3626=0$ ニヨリテ求ムルコトチ得.

補 習 問 題

22. (一) $14x^2+45.5x+36.26=0$ ノ二根ノ差(絕對値)チ求ム.

(二) $x^2+19x=7920$ ノ二根ノ絕對値ノ和チ求ム.

23. 次ノ各方程式ガ實根チ有スル爲ノ文字ノ數値チ求ム.

$\frac{x^2-5x+10}{2-x}=u$　　$a^2x^2+x^2=3ax-2x-2$　　$x^2+2(1+k)x+2(1+k^2)=0$

24. $\frac{40}{x}$ ノ數値ガ $\frac{264}{4x+1}$ ノ數値ヨリ 3 少サクナル樣ニ x ノ數値チ定メヨ.

25. (一) $x-y$ ガ 70, xy ガ 296 ナル時 x, y チ求ム.

(二) $x+y$ ガ 731, xy ガ 134520 ナル時 x, y チ求ム.

26. $x^2-px+15=0$ ノ兩根ノ差ガ 4 ナレバ p ハ幾何.

27. $x^2-7x+a=0$ ノ一ツノ根ガ 2 ナレバ, a 如何.

28. $100(1+x)^2-3(1+x)-1134=0$ ノ正根(根ノ中正ノ數ノ方)如何.

29. 次ノ各式ガ x ニ就テ完備ナル平方トナル樣ニ, 文字ノ數値チ定メヨ.

$x^2-(k-2)x+k$　　$(x-n)(1-x)-1$　　$(x-n)^2-2px$

次ノ各方程式チ解ケ(**30−36**).

30. $\frac{x^2}{x+1}=2+\frac{1}{x+1}$　　$\frac{x^2-3x}{x^2-1}+2+\frac{1}{x-1}=0$　　$x+\frac{1}{x}=a+\frac{1}{a}$

31. $1+\frac{1}{x+6}+\frac{9}{x-6}=\frac{9}{x^2-36}$　$\frac{b}{2a-x}-\frac{a}{b+x}=\frac{1}{2}$　$\frac{2x-1}{x-2}+\frac{3x+1}{x-3}=\frac{5x-14}{x-4}$

32. $x-\frac{1}{x}=\frac{a}{b}-\frac{b}{a}$　　$\frac{a^2}{x-b}+\frac{b^2}{x-a}=a+b$　　$\frac{a-x}{b+x}-\frac{b+x}{a-x}=\frac{m}{n}-\frac{n}{m}$

33. $\left(\frac{a-x}{x-b}\right)^2=8\left(\frac{a-x}{x-b}\right)-15$　$(x-n)^2+3x-3n=5(x-n)$　$\frac{2}{x+3}+\frac{x+3}{2}=\frac{10}{3}$

34. $(2x+3)(3x+4)(4x+5)-(2x-3)(3x-4)(4x-5)=184$

35. $(3a-5b+x)(5a-3b-x)=(7a-b-3x)^2$

36. (一) $x^2=4n^2-20an+25a^2+2a^2n-5a^3+\frac{1}{4}a^4$

(二) $x^2-4.1853x+4.37276=0$

64. 根と係數との關係, 根の對稱式

[**1**] 一元二次方程式 $ax^2+bx+b=0$ の二つの根を α, β とすれば $\alpha+\beta=-\frac{b}{a}$, $\alpha.\beta=\frac{c}{a}$ なり.

説明 (一) 二ツノ根ノ中何レカ一ツヲ α, 他ヲ β トシテ, 例ヘバ

$$\alpha=\frac{1}{2a}(-b+\sqrt{b^2-4ac})\cdots\cdots(1)$$

$$\beta=\frac{1}{2a}(-b-\sqrt{b^2-4ac})\cdots\cdots(2)$$

トシテ, (1)+(2), (1)×(2) ヲ求メテ明カナリ.

(二) $\frac{1}{2a}(-b+\sqrt{b^2-4ac})$ ト $\frac{1}{2a}(-b-\sqrt{b^2-4ac})$ ト卽チ α ト β トハ $ax^2+bx+c=0$ ノ根ナルヲ以テ, $(x-\alpha)$ ト $(x-\beta)$ トハ ax^2+bx+c ノ約數ナリ (第25節剩餘定理). 故ニ次ノ恒等式アリ.

$$ax^2+bx+c=a(x-\alpha)(x-\beta)\cdots\cdots\cdots\cdots(1)$$

兩邊ヲ a ニテ割リ, 右邊ヲ展開スレバ

$$x^2+\frac{b}{a}x+\frac{c}{a}=x^2-(\alpha+\beta)x+\alpha\beta\cdots\cdots(2)$$

(2)ハ恒等式ナルニヨリ $\alpha+\beta=-\frac{b}{a}$, $\alpha\beta=\frac{c}{a}$ ナリ.

【注意 1】 二ツノ根ハ共軛ナル無理數(或ハ虚數)ナルヲ以テ,其和ト,其積トハ何レモ有理數トナルナリ.

二根ノ差$(\alpha-\beta)$或ハ$(\beta-\alpha)$ハ交代式ナリ. 單ニ二根ノ差トイフ時ハ,二様ニ答フベシ.

$ax^2+bx+c=0$ の二根の差は $\pm\frac{1}{a}\sqrt{b^2-4ac}$ なり.

〔2〕 二つの數の和が $-\frac{b}{a}$, 其積が $\frac{c}{a}$ なれば,其二つの數を根とする方程式は $ax^2+bx+c=0$ なり.

第60節(2)ハ此特別ノ場合ナリ.

〔例一〕 二數ノ和 $\frac{17}{12}$, 其積 $\frac{1}{2}$ ナリ. 各數幾許.

[解] $\frac{17}{12}$, $\frac{1}{2}$ ヲ通分スレバ $\frac{17}{12}$, $\frac{6}{12}$

$\therefore\ 12x^2-17x+6=0$ $\therefore\ (4x-3)(3x-2)=0$ 答 $\frac{3}{4}$, $\frac{2}{3}$

〔例二〕 二數ノ差 2, 其積 120 ナリ. 各數幾許.

[解] $x^2-2x-120=0$ $\therefore\ (x-12)(x+10)=0$

$\therefore$ 二根ハ 12, −10 答 (12, 10) (−10, −12)

[説明] 求ムル二數ヲ α,β トスレバ

$\begin{cases}\alpha-\beta=2\\ \alpha.\beta=120\end{cases}$ 故ニ $\begin{cases}\alpha+(-\beta)=2\\ \alpha.(-\beta)=-120\end{cases}$

$\therefore$ α ト $(-\beta)$ トハ $x^2-2x-120=0$ ノ根ナリ.

然ルニ $x^2-2x-120=0$ ノ根ハ 12 ト −10 トナリ.

故ニ $\begin{cases}\alpha=12\\ (-\beta)=-10\end{cases}$ ナルカ或ハ $\begin{cases}\alpha=-10\\ (-\beta)=12\end{cases}$ ナリ.

故ニ答ハ (12 ト 10) 或ハ (−10 ト −12) ナリ.

〔3〕 二つの數 α,β の差が d, 其積が p なれば, α と $-\beta$ とを根とする方程式は $x^2-dx-p=0$ なり.

〔4〕 二つの數 m と n との差が d, 其積が p なれば,二つの數 $-n$ と $-m$ とも其差 d, 其積 p なり.

〔例題〕 次ノ各方程式ニ就テ兩根ノ和 $(\alpha+\beta)$, 及兩根ノ積 $(\alpha.\beta)$ ヲ求ム (1−2).

1. $5x^2+3=2x$ $71x+33-14x^2=0$ $ax^2+bx=0$
2. $ax^2+c=0$ $4x^2-9=0$ $2x+\frac{1}{x}=3$ $(x-7)(x+5)=0$
3. 次ノ各方程式ニ就テ兩根ガ正ノ整數トナル様ニ( )ノ中ヘ入ルベキ數ヲ求ム.

(一) $x^2-10x+(\ \ )=0$ (二) $x^2-(\ \ )x+36=0$

4. $ax^2+bx+a=0$ ノ兩根ノ積ヲ求ム. 又之ヲ解キテ驗セ.

【注意2】 此種類ノ方程式ヲ逆數方程式トイフ.

5. 二ツノ數ノ和 s ト其積 p, 或ハ其差 d ト其積 p ガ次ノ如キ場合ニ於ケル,二數如何.

$(s=24,\ p=140)$　$\left(s=\frac{22}{15},\ p=\frac{8}{15}\right)$　$(d=100,\ p=9821)$

〔例三〕 $3x^2-11x+6=0$ ノ二根ノ平方ノ和ヲ求ム.

[解] $\alpha^2+\beta^2=(\alpha+\beta)^2-2\alpha\beta=\left(\frac{11}{3}\right)^2-2\left(\frac{6}{3}\right)=\frac{85}{9}$ 答

[説明] $\alpha^2+\beta^2$ ハ, $(\alpha+\beta)^2$ ノ展開式 $\alpha^2+2\alpha\beta+\beta^2$ ニ共通ナル二項ヨリ成ルヲ以テ,

$\alpha^2+\beta^2=(\alpha^2+2\alpha\beta+\beta^2)-2\alpha\beta=(\alpha+\beta)^2-2\alpha\beta$ トセリ.

$\alpha+\beta$ ト, $\alpha\beta$ トノ數値ハ方程式ヲ解カズトモ, $\frac{11}{3}$ ト, $\frac{6}{3}$ トナルコトガ分ルヲ以テ,上ノ如ク容易ニ計算セラレタルナリ.

若シ原方程式ヲ解キテ $(x-3)(3x-2)=0$　故ニ $3,\ \frac{2}{3}$ ヲ得テ, $\alpha^2+\beta^2$ ヲ求ムレバ $(3)^2+\left(\frac{2}{3}\right)^2=\frac{85}{9}$ ナリ.

此方法ハ根ガ複雜ナル場合ニハ不便ナルヲ以テ, $\alpha^2+\beta^2$ ノ如ク根ノ對稱式ノ數値ハ初メノ如ク求ムルガ簡便ナリ.

〔例題〕 $5x^2-15x+11=0$ ノ二ツノ根ヲ α,β トス. ヨリテ次ノ各式ノ數値ヲ求ム.

$7\alpha+7\beta$　$3\alpha\times2\beta$　$\alpha^2+2\alpha\beta+\beta^2$　$\alpha^2+\beta^2$　$\alpha^3+\beta^3$

$$\boxed{5}\begin{cases} n\alpha+n\beta=n(\alpha+\beta) \\ \alpha^2+\beta^2=(\alpha+\beta)^2-2\alpha\beta \\ \alpha^3+\beta^3=(\alpha+\beta)^3-3\alpha\beta(\alpha+\beta) \\ \alpha^4+\beta^4=(\alpha+\beta)^4-4\alpha\beta(\alpha+\beta)^2+2(\alpha\beta)^2 \\ \alpha^5+\beta^5=(\alpha+\beta)^5-5\alpha\beta(\alpha+\beta)^3+5(\alpha\beta)^2(\alpha+\beta) \end{cases}$$

〔例四〕 $x^2-2x+2=0$ ノ根ヲ α,β トス,ヨリテ次ノ各式ノ數値ヲ求ム.

(一) $(\alpha+2\beta-3)(\beta+2\alpha-3)$　　(二) $\frac{\alpha^2}{\beta^2}+\frac{\beta^2}{\alpha^2}$

[解] $\alpha+\beta=2,\ \alpha\beta=2$

(一) (與式)$=(\alpha+\beta-3+\beta)(\alpha+\beta-3+\alpha)$

$=(-1+\beta)(-1+\alpha)=\alpha\beta-(\alpha+\beta)+1=1$　答

(二) (與式)$=\frac{\alpha^4+\beta^4}{(\alpha\beta)^2}=\frac{(\alpha+\beta)^4-4\alpha\beta(\alpha+\beta)^2+2(\alpha\beta)^2}{(\alpha\beta)^2}$

$=\frac{2^4-4.2.2^2+2.2^2}{2^2}=-2$　答

〔例五〕 $2x^2-6x+7=0$ ノ根ヲ α,β トス,ヨリテ $\frac{1}{3\alpha+\beta}$, $\frac{1}{3\beta+\alpha}$ ヲ根トスル方程式ヲ作ルコト.

[解] $\alpha+\beta=3,\ \alpha\beta=\frac{7}{2}$

$$\frac{1}{3\alpha+\beta}+\frac{1}{\alpha+3\beta}=\frac{4(\alpha+\beta)}{3(\alpha^2+\beta^2)+10\alpha\beta}=\frac{4(\alpha+\beta)}{3(\alpha+\beta)^2+4.\alpha\beta}$$

$$=\frac{4\times 3}{3\times 3^2+4\times\frac{7}{2}}=\frac{\mathbf{12}}{\mathbf{41}}\cdots\cdots(1)$$

又 $\frac{1}{3\alpha+\beta}\cdot\frac{1}{\alpha+3\beta}=\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{41}}\cdots\cdots(2)$

∴ 本節公式〔2〕ニヨリテ　答 $\mathbf{41x^2-12x+1=0}$

〔**例題**〕 **1.** $2a^2-6x+7=0$ ノ根ヲ α, β トス．ヨリテ次ノ各式ノ數値ヲ求ム．

$(\alpha-3)(\beta-3)$　$\frac{\alpha^2}{\beta}+\frac{\beta^2}{\alpha}$　$\frac{\beta}{\alpha-3}+\frac{\alpha}{\beta-3}$　$\alpha^5+\beta^5$

$3x^2+3ax+a^2=0$ ノ根ナ α, β トス．ヨリテ次ノ各組ノ數ナ根トスル方程式ナ作レ(2−3).

2. $(\alpha+2,\ \beta+2)$ $(\alpha-5,\ \beta-5)$ $(n\alpha,\ n\beta)$ $\left(\frac{\alpha}{n}, \frac{\beta}{n}\right)$ $\left(\frac{n}{\alpha}, \frac{n}{\beta}\right)$

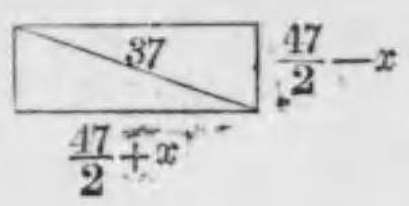
3. $\left(\frac{\alpha}{n}+t, \frac{\beta}{n}+t\right)$ (α^2, β^2) $(\alpha-\beta, \beta-\alpha)$ $\left(\frac{\beta}{2\alpha}, \frac{\alpha}{2\beta}\right)$ (α^3, β^3)

4. $2x^2+3x+m=0$ ノ二根ノ平方ノ和ガ 2 トナル様ニ m ノ數値ヲ求ム．

5. α, β ハ $ax^2+bx+c=0$ ノ根トス．$\alpha^2+\beta^2$, $(\alpha-2\beta)\times(2\alpha-\beta)$ ヲ求ム (a, b, c ノ式ニテ表セ).

65. 應用問題の例

〔**例一**〕 周圍94米ナル矩形ノ對角線37米ナラバ二邊如何．



解 二邊ヲ $\left(\frac{47}{2}+x\right)$ 米, $\left(\frac{47}{2}-x\right)$ 米トスレバ三四五ノ理ニヨリテ (第55節).

$$\left(\frac{47}{2}+x\right)^2+\left(\frac{47}{2}-x\right)^2=37^2 \quad \therefore \quad 2\left(\frac{47}{2}\right)^2+2x^2=37^2$$

$$\therefore \quad 4x^2=37^2\times 2-47^2=529 \qquad \therefore \quad 2x=\pm 23$$

$\frac{47}{2}+\frac{23}{2}=35,\ \frac{47}{2}-\frac{23}{2}=12$　答 35米, 12米

x ヲ $-\frac{23}{2}$ トスルモ二邊ハ12米, 35米ナリ．

驗算 $\sqrt{35^2+12^2}=\sqrt{1225+144}=\sqrt{1369}=37$

〔**例二**〕 甲乙二臺ノ發電機アリ,毎分乙ハ甲ヨリ100回多ク廻轉ス,甲ガ900廻轉スルニ要スル時間ハ乙ガ700廻轉スルニ要スル時間ヨリ $\frac{1}{12}$ 分多シトイフ．毎分ノ廻轉數各如何．

解 甲,乙ノ毎分ノ廻轉數ヲ x, $x+1000$ トスレバ,甲ガ900廻轉スル時間ヲ比ベテ

$$\frac{900}{x}=\frac{700}{x+100}+\frac{1}{12}$$

100ヲ n トシ,公分母Lヲ $12x(x+n)$ トシテ

$$108n(x+n)=84nx+(x^2+nx)$$

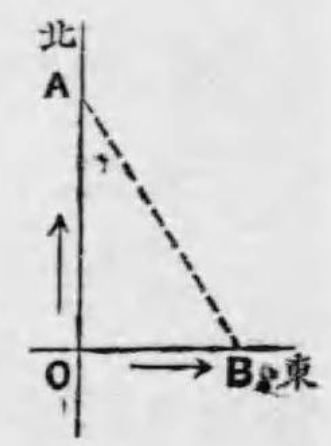
$$x^2-23nx-108n^2=0 \quad (x-27n)(x+4n)=0$$

$x=27n$, (負根ヲ捨ツ). 答 甲2700回, 乙2800回

[驗算] $\dfrac{700}{2800}+\dfrac{1}{12}=\dfrac{1}{4}+\dfrac{1}{12}=\dfrac{1}{3}$ ......(1)

$\dfrac{800}{2700}=\dfrac{1}{3}$ ......(2)

〔例三〕 A, B二船アリ, Aハ港ヲ出帆シテ正北ニ向ヒ, 9節ノ速力ニ進ミ, Bハ其後1時間ヲ經テ同港ヲ出帆シテ正東ニ向ヒ7節ノ速力ニテ進マバ, A, Bノ距離53海里トナルハ, 乙出帆ノ後何時間ナルカ.



[解] B出帆ノ後, A, Bノ距離53浬ニ達スル迄ノ時間ヲx時トスレバ, ソレ迄ノA, Bノ行程ハ $6(1+x)$ 浬, $7x$浬ナリ. 而シテ正北ト正東トハ直角ヲ爲ス. 故ニ

$\{9(1+x)\}^2+(7x)^2=53^2$ ......(1)

$(81+49)x^2+81\times 2x-(53^2-9^2)=0$ ......(2)

$\sqrt{D}=\sqrt{81^2+130.62.44}=\sqrt{361201}=601$

$\therefore\ x=\dfrac{1}{130}(-81\pm 601)=4$ (負根ヲ捨ツ). 答 4時間

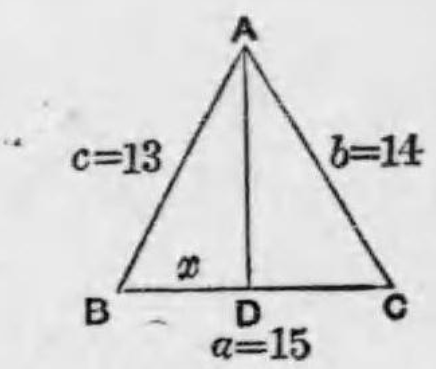
[驗算] $\sqrt{45^2+28^2}=\sqrt{2025+784}=53$

〔例題〕 1. 例一ニ於テ二邊ノ差14米, 對角線

ノ長サ$\sqrt{1066}$米ナラバ如何.

2. 例二ニ於テ廻轉數ノ差100回ヲ300回トシ, $\dfrac{1}{12}$分ヲ$\dfrac{1}{6}$分トスレバ如何.

3. 例三ニ於テA, Bノ速力ヲ16節ト, 13節, A船出帆後2時間ニシテB船出帆スルトシ兩船ノ距離89海里トナル時ヲ求ム.



〔例四〕 (一) 三邊ノ長サガ15, 14, 13ナル三角形ノ15ヲ底邊トシタル高サヲ求ム.

[解] ADヲBCニ垂直ニ引キ, 先ヅBDノ長サヲxトスレバ

$AD^2=AB^2-BD^2=13^2-x^2$ ......(1)

又 $AD^2=AC^2-DC^2=14^2-(15-x)^2$ ......(2)

(1)ト(2)トニヨリテ

$13^2-x^2=14^2-(15-x)^2$ ......(3) $\therefore\ x=\dfrac{33}{5}$ ......(4)

(1)ニヨリテ $AD^2=13^2-\left(\dfrac{33}{5}\right)^2=\dfrac{1}{25}(65+33)(65-33)$

$\therefore\ AD=\dfrac{56}{5}=11.2$ ......(5) 答 11.2

(二) 三邊ノ長サガa, b, cナル三角形ノaヲ底邊トシタル高サヲ求ム. 但シ $a+b+c=2p$ トス.

解　前ノ等式(3)ニヨリテ

$$c^2-x^2=b^2-(a-x)^2 \qquad \therefore\ x=\frac{a^2+c^2-b^2}{2a}$$

$$\therefore\ AD^2=c^2-x^2=\frac{4a^2c^2-(a^2+c^2-b^2)^2}{4a^2}$$

$$=\frac{1}{4a^2}(2ac+a^2+c^2-b^2)(2ac-a^2-c^2+b^2)$$

$$=\frac{1}{4a^2}(a+b+c)(a-b+c)(a+b-c)(-a+b+c)$$

$$=\frac{1}{4a^2}(2p)(2p-2b)(2p-2c)(2p-2a)$$

$$=\frac{4}{a^2}p(p-a)(p-b)(p-c)$$

$$\therefore\ AD=\frac{2}{a}\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$$ 答

(三)　三邊ガ a, b, c ナル三角形ノ面積ヲ s,

$p=\frac{1}{2}(a+b+c)$ トスレバ

$$s=\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)} \cdots\cdots\cdots\cdots [1]$$

應用　三角形ノ三邊ガ21間, 17間, 10間ナレバ, 其面積如何.

$$\begin{array}{r} 21 \\ 17 \\ +10 \\ \hline 78\div2=24 \end{array}$$

$\therefore\ s=\sqrt{24.3.7.14}=84$ 答

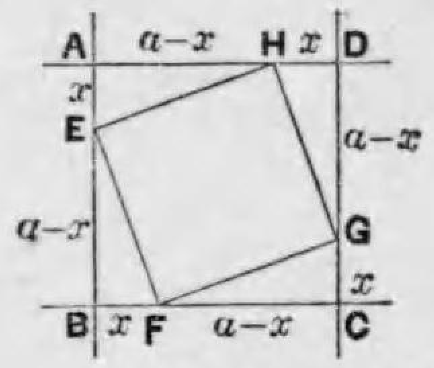
$\sqrt{24(24-21)(24-17)(24-10)}$ ヲ諳算ニテ求メタルナリ.

相似圖ニ就テ高サ AD ノ近似値ヲ求メ, ソレニ

ヨリテ面積ヲ求メ(圖的解法), 前ノ結果ト比較セヨ.

〔例題〕　四邊形 ABCD ノ四ツノ邊 AB, BC, CD, DA ノ長サガ夫夫25間, 37間, 13間, 39間ニシテ, 對角線 BD ノ長サガ40間ナラバ, 其面積幾許.

〔例五〕　圖ノ如ク, 一邊ガ a ナル正方形 ABCD ニ內接シタル正方形 EFGH ノ面積ヲ表ス式 $x^2+(a-x)^2$ ヲ平方ニ括ルコト.



解　$2x^2-2ax+a^2=\frac{1}{2}(2x-a)^2+\frac{1}{2}a^2$　答

之ニヨレバ $2x-a=0$ ナル時, 卽チ ABCD ニ其各邊ノ中點ニ於テ內接スル正方形ガ極小ナリ.

〔例題〕　二ツノ正方形ノ周ノ和ガ $4p$ ナル時, 其面積ノ和ヲ表ス式ヲ平方ニ括レ. 但シ一ツノ正方形ノ一邊ヲ x トス.

〔例六〕　$x^2+px+q=0$ ノ二根ノ比ガ $3:2$ ナルトキ, p, q ノ關係式ヲ求ム.

解　$\alpha:\beta=3:2$　故ニ　$\alpha=3n,\ \beta=2n$

$$\text{故ニ}\ \begin{cases}\alpha+\beta=5n \\ \alpha\beta=6n^2\end{cases} \qquad \therefore\ \begin{cases}-p=5n \cdots\cdots\cdots\cdots(1) \\ q=6n^2 \cdots\cdots\cdots\cdots(2)\end{cases}$$

n ヲ消去スル爲メニ $(1)^2\div(2)$ ニヨリ

$p^2:q=25:6$…………答

〔例題〕 $x^2+3x+u=0$ ノ二根ヲ α, β トス. $\alpha:\beta$ ガ 4:1 ナレバ u, α, β ハ各幾許ナルカ.

問題 第四十八集

1. 二ツノ數ノ比ハ 5:4 ニシテ, 各ノ數ニ 15 ヲ加ヘタルモノノ平方ノ差 999 ナリ. 各數如何.

2. 川蒸氣船アリ. $3\frac{1}{2}$ 哩ノ間ヲ往復スルニ $1\frac{2}{3}$ 時ヲ要ス. 若シ水流ノ速サ毎時 2 哩トスレバ靜水ニ於ケル此船ノ速サ如何.

3. 矩形アリ, 之ヲ一邊ノ長サ 110 米ナル正方形ニ比ブルニ周圍ハ 4 米長ク, 面積ハ 4 平方米小ナリ. 矩形ノ横縱ヲ求ム.

4. 384 ヲ二ツノ因數ノ積ニ分解シテ, 其二ツノ因數ノ差ヲ 8 ニ等シカラシムルコトヲ求ム.

5. 或數ト其逆數トノ和ハ a ニ等シ. (一) 其數ヲ求ム. (二) 答ニ實數ヲ得ル爲メノ a ノ値ノ限界如何. (三) 答ガ有理數トナル樣ニ a ノ一ツノ價ヲ求ム.

6. 互ニ嚙ミ合ヒテ廻ル甲, 乙二ツノ齒車アリ, 齒ノ數甲ハ 144 ニシテ, 1 分間ニ 100 回轉ス. 若シ乙ノ齒車ノ齒ノ數ヲ 10 增サバ其一分間ノ回轉數ハ 16 回減ズベシト云フ. 乙ノ齒車ノ齒ノ數ヲ求ム.

7. 長サガ l ナル直線 AB 上若クハ其延長上ニ一點 C ヲ取リ, AC ヲ一邊トスル正方形ノ面積ヲ, BC ト AB トヲ相隣レル二邊トスル矩形ノ面積ニ等シカラシメントス. AC ノ長サハ AB ノ長サノ何割何分ナルカ (黃金分割).

8. $(x+a)(x+b)(x+c)$ ノ展開式ノ一次ノ項 (x ニ就テ) ノ係數ガ 47 ニシテ, a, b, c ガ連續セル三ツノ整數ナレバ, a, b, c ハ各幾許 ($a>b>c$ トス).

9. 或商人ガ商業資本トシテ金 1050 圓ヲ借リ入レ, 一年ノ後 605 圓ヲ返シ, 其後又一年ヲ經テ 605 圓ヲ返シテ, 丁度皆濟トナレリト云フ. 年利率幾許ニ當ルカ (1 年毎ノ複利トス).

10. 三角形ノ三邊ノ長サガ, $2(n^2+1)$, $3(2n^2-1)$, $(4n^2+1)$ ニテ表サルル時ハ其面積ヲ表ス式如何.

11. 日給ノ相異ナレル甲乙二人ノ職工共力シテ

一ツノ仕事ニ從事シ,其間甲ハ休マズ,乙ハ6日間休ミタリ,而シテ此期間ノ終リニ於テ,甲ハ19.2圓,乙ハ10.8圓ヲ受取レリ. 若シ乙ガ1日モ休マズシテ,却テ甲ガ6日休ミタリトスレバ兩人ハ同一ノ賃金ヲ受取ルベカリシト云フ. 此期間ノ日數及兩人ノ日給各幾許.

12. 同時ニ或鐵道ノ兩端驛(其間ノ距離 l 哩)ヲ發セル二ツノ列車甲,乙アリ,出發後12時間ヲ經テ擦レ違ヒ,甲ハ乙ヨリ7時間早ク終端驛ニ著キタリ. 二ツノ列車ガ全距離ヲ行クニ要スル時間各幾許ナルカ.

13. $x^2+px+q=0$ ノ根ヲ α, β トス. 次ノ各等式ヨリ, α, β ヲ消去セヨ.

$(y-\alpha)(y-\beta)=0$ $\quad \{z-(m\alpha+n\beta)\}\{z-(n\alpha+m\beta)\}=0$

14. $(a-x)^3+(b-x)^3=(a+b-2x)^3$ ヲ解ケ[第64節(5)].

15. 幅3寸,長サ4.8寸ノ印刷用紙ノ周邊ニ一樣ナル幅ノ黑枠ヲ附シテ其面積ヲ全紙面ノ$\frac{1}{5}$ニナサントス. 黑枠ノ幅ヲ何分何厘トスベキカ(厘位迄).

16. 水ヲ注入スル爲ノ甲管ト水ヲ拔キ出スタメノ乙管トヲ備ヘタル8石入ノ水桶アリ,乙管ヨリ1分間ニ出ル水ノ量ハ甲管ヨリ1分間ニ注入スル水ノ量ヨリ5升ダケ多ク,甲管ニテ此水桶ノ$\frac{1}{2}$ダケ水ヲ充スニ要スル時間ハ乙管ヨリ6.6石ノ水ヲ出スニ要スル時間ヨリ1.5分間ダケ少ナシトイフ. 甲管ニテ此水桶ヲ充タスニ要スル時間ヲ求ム.

17. (一) $(9-2x)^2-(1-3x)^2$ ノ數値ハ x ノ數値ガ 3, 2, 1, 0, -1, -2, -3, -4, -5 ナル時,幾許ナルカ.

(二) $(9-2x)^2-(1-3x)^2=m$ ヨリ實根ヲ得ルタメノ m ノ値ノ限界ヲ求ム.

18. 8ヲ二ツノ因數ノ積ニ分解シテ,其二ツノ因數ノ和ヲ極小ナラシムルコトヲ求ム.

19. (一) $(m-2)(m+5)$ ノ値ヲ正ノ數トナラシムル m ノ値ノ限界如何.

(二) $x^2-2(m-1)x+5m-11=0$ ノ判別式ヲ正ノ數ナラシムル m ノ値ノ限界如何.

(三) $\frac{x^2+2x-11}{2x-5}=m$ ヨリ實根ヲ得ル爲ノ m ノ値ノ限界如何.

20. 直角ニ交ル甲乙兩直線アリ,Aハ甲直線上ニBハ乙直線上ニ夫夫交叉點ヲ距ル50尺ト100尺トノ位置ヨリ共ニ交叉點ニ向ヒ同時ニ進行ヲ始メ,Aハ毎秒4尺,Bハ毎秒3尺ノ速度ヲ以テ方向ヲ變ズルコトナク其進行ヲ續クルモノトセバ,AトBトノ距離ガ最モ近クナルハ幾秒ノ後ナルカ,又其距離及位置如何.

補習問題

21. 一ツノ多角形ノ對角線ノ總數ガ35ナルトキハ其多角形ノ邊ノ數如何.

22. (一) ax^2+bx+c ヲ $x-\dfrac{-a+\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$ ニテ割レ.

(二) ax^2+bx+c ハ $2ax+b$ ニテ割リ切レル時ハ平方ニ括ラルルコトヲ示セ.

23. (一) 二ツノ數ノ和20,其三乘ノ和2240ナル時,其二數ノ積ヲ求ム[第64節(5)].

(二) $x+\dfrac{1}{x}=1$ ナル時, $x^2+\dfrac{1}{x^2}$, $x^3+\dfrac{1}{x^3}$, $x^4+\dfrac{1}{x^4}$, $x^5+\dfrac{1}{x^5}$ ノ數値ヲ求ム.

(三) $\left(x+\dfrac{1}{x}\right)^2=3$ ナル時, $x^3+\dfrac{1}{x^3}$ ノ數値ヲ求ム.

24. 或汽車ノ機關車ノ車輪ノ周 $14\dfrac{2}{3}$ 呎アリ,1時間ニ x 廻轉ス.若シ此車輪ガ一廻轉スルニ之ヨリ1秒多ク要スルトキハ1時間ノ速度ハ $5\dfrac{1}{3}$ 哩(1哩=5280呎)ヲ減ズベシトイフ,x ヲ求ム.

25. (一) 第65節例四,三邊ヲ a, b, c トシタルモノニ就テ BD∼DC ヲ求ム.

(二) 第65節例四ノ例題ノ四邊形ノ對角線 AC ヲ求ム.

(三) 三角形ノ三邊ガ $2(n^2+1)$, $(4n^2+1)$, $(2n^2+1)$ ナル時, $(4n^2+1)$ ヲ底邊トセル高サヲ求ム.

26. $15+x$, $16+x$, $24+x$ ガ一ツノ直角三角形ノ三邊ノ長サヲ表ス數ナル時,x ヲ求ム.

27. 甲乙二村ヲ貫流セル小川アリ,各村ニテ之ニ一ツヅツ橋ヲ架ケタルニ其費用何レモ3600圓ナリ. 之ヲ其村ノ各戸ニ平等ニ負擔セシムルトスレバ,甲村ノ戸數ハ乙村ヨリ100戸少ナキヲ以テ一戸ノ負擔ハ50錢多クナルベシトイフ. 各村ノ戸數ヲ求ム.

28. $ax^2+bx+c=0$ ノ根ヲ α, β トス, $(\alpha+l)$ ト $(\beta+l)$ トヲ根ニ有スル方程式ヲ作レ. 又 l ガ幾許ナレバ結果ガ純二次方程式 $(Ax^2+B=0)$ トナルカ.

29. $x=\dfrac{3+i\sqrt{31}}{4}$ ガ或一元二次方程式ノ二根ノ中ノ一ツナラバ其方程式如何.

30. $x^2-3x+5=0$ ノ根ヲ α, β, $x^2-7x+2=0$ ノ根ヲ m, n トス. $\{y-(\alpha m+\beta n)\}\{y-(\alpha n+\beta m)\}=0$ ヨリ, m, n, α, β ヲ消去セヨ.

31. (一) $3x^2+7x+2$ ヲ 372 ト略記シタル時 x ヲ記數法底數ト呼ブ. 二百五十ガ此記法ニヨリテ 372 ト表サルルニハ何ヲ底數トスベキカ.

(二) 如何ナル數ヲ記數法底數トスレバ九十三ハ333ト表サルルカ.

32. $ax^2+bx+c=0$ ノ二根ヲ α, β トス. $\alpha^4+\beta^4$ ト, $\alpha^2\left(\frac{\alpha^2}{\beta}-\beta\right)+\beta^2\left(\frac{\beta^2}{\alpha}-\alpha\right)$ トヲ各 a, b, c ニテ表セ.

33. $(x^2-2x+1)+k(x^2+3x+5)$ ガ完備ナル平方トナル様ニ k ノ値ヲ定メテ後之ヲ平方ニ括レ.

34. 横縱ガ $a, b\ (a>b)$ ナル矩形ノ周圍ヲ變ゼズシテ a ヲ減ジ, b ヲ増シタル時ノ面積ヲ表ス式ヲ平方ニ括レ.

35. 次ノ各方程式ガ實根ヲ有スル爲ノ既知數ヲ表ス文字ノ値ノ限界如何

$$\frac{2x-3}{x^2}=k \qquad x^2+2(a-1)x+5a-9=0 \qquad \frac{x^2-ux-12}{x^2+12}=3$$

36. $26x-35-3x^2$ ノ値ヲ正ナラシムル爲ノ x ノ値ノ限界如何.

37. $x^2+px+\frac{1}{2}p$ ヲ平方ニ括リタル剩餘ヲ求ム. 又 p ノ値ヲ幾何トスレバ此式ノ値ハ x ノ値ニ係ハラズ恒ニ正ノ數トナルベキカ.

38. 米ト麥ト合セテ1石アリ, 更ニ米1石ヲ買ヒ足シタル時ノ米ト麥トノ比ハ, 麥1石ヲ買ヒ足シタル時ノ米ト麥トノ比ノ9倍ナリ. 米麥各幾許.

39. 次ノ各方程式ヨリ x ノ等根ヲ得ル様ニ u ノ値ヲ定メヨ.

$$x^2+3x-2u(x-1)=0 \qquad x^2+6x-1+u(x^2-3x+1)=0$$

40. 速度1時間ニツキ a 浬ナル汽船ガ河流 b 浬ヲ上下スルニ t 時間ヲ要セリトイフ. 河流ノ速度幾許ナルカ.

聯立二次方程式

66. 一次と二次との聯立方程式

〔**例一**〕　第65節例一ニ於テ矩形ノ二邊ヲ x 米, y 米トスレバ

$$(A)\cdots\cdots\begin{cases} x+y=47 \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(1) \\ x^2+y^2=37^2 \cdots\cdots\cdots\cdots(2) \end{cases}$$

(A) ハ**二元の一次と二次との聯立方程式**ナリ.

一次と二次との聯立方程式の標準の形(二元)

$$\begin{cases} \boldsymbol{mx+ny=r} \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(1) \\ \boldsymbol{ax^2+bxy+cy^2+dx+ey=f} \cdots\cdots(2) \end{cases}$$

〔**例二**〕　$\begin{cases} 2x-3y=1 \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(1) \\ 2x^2-5xy+y^2+10x+12y=100 \cdots(2) \end{cases}$ ヲ解ケ.

解　(1) ヨリ　$x=\frac{3y+1}{2} \cdots\cdots\cdots\cdots(3)$

之ヲ(2)ニ代入スレバ

$$\frac{2(3y+1)^2}{4}-\frac{5y(3y+1)}{2}+y^2+\frac{10(3y+1)}{2}+12y=100 \cdots(4)$$

$$\therefore\ 4y^2-55y+189=0 \qquad (y-7)(4y-27)=0$$

$$\therefore\ y=7 \quad 或ハ \quad y=\frac{27}{4}$$

之ト(3)トニテ　　答 $\begin{cases} x=11 \\ y=7 \end{cases}$ $\begin{cases} x=\dfrac{85}{8} \\ y=\dfrac{27}{4} \end{cases}$

[驗算] $\boldsymbol{x=11,\ y=7}$ トスレバ

$$\begin{cases} (1)\quad 22-21=1 \\ (2)\quad 242-385+49+110+84=485-385=100 \end{cases}$$

$\boldsymbol{x=\frac{85}{8}}$　$\boldsymbol{y=\frac{27}{4}}$ トスレバ

$$\begin{cases} (1)\quad \dfrac{85}{4}-\dfrac{81}{4}=\dfrac{4}{4}=1 \\ (2)\quad 2.\dfrac{7225}{64}-5.\dfrac{85}{8}.\dfrac{27}{4}+\left(\dfrac{27}{4}\right)^2+10.\dfrac{85}{8}+12.\dfrac{27}{4} \end{cases}$$

$$=\frac{1}{32}(7225-11475+1458+3400+2592)=\frac{3200}{32}=100$$

(4) ハ x **を消去したる方程式**ナリ. 初メニ y ヲ消去シテモヨシ.

規則 一次方程式の方より, x を y の項にて表し,之を二次方程式の中の x に代入して, x を消去し, y のみの二次方程式を作りて解くべし. 初めに消去する元は x に限らず**(代入法)**.

〔例題〕 次ノ各方程式ヲ解ケ(1—6).

1. $\begin{cases} 3x+17y=73 \dots\dots\dots (1) \\ xy=12 \dots\dots\dots\dots\dots (2) \end{cases}$　**2.** $\begin{cases} x-y=2 \dots\dots\dots\dots (1) \\ 3x^2-2xy=5 \dots\dots\dots (2) \end{cases}$

〔注意1〕 上ノ規則ハ最モ完全ナル方法ナレドモ特別ナル場合ニハ簡單ナル方法ヲ見出シ得ルコトアリ.

〔例題1〕 ニ於テ $(1)\times y-(2)\times 3$. …$17y^2=73y-36$ ヲ得或ハ(2)ヨリ $x=\dfrac{12}{y}$ 之ヲ(1)ニ**入レテ** $36+17y^2=73y$ ヲ得.

〔例題2〕 ニ於テ二次ノ方ノ方程式(2)ノ中ニハ y ノ含マルル項ハ唯一ツノミナレバ,初メニ y ヲ消去スレバ,容易ニ $(2)-(1)\times 2x$ ….. $x^2=5-4x$ ヲ得.

3. $\begin{cases} xy=12 \\ 2x+3y=18 \end{cases}$　**4.** $\begin{cases} 2y-3x=1 \\ 13x^2-8xy=-3 \end{cases}$　**5.** $\begin{cases} 3x+4y=18 \\ 5x^2+2=3xy \end{cases}$

6. $[2x-3y=1 \quad 2x^2-5xy+y^2+12x+10y=100]$

〔例三〕 (一) $\begin{cases} \boldsymbol{x+y=126} \dots\dots (1) \\ \boldsymbol{xy=3888} \dots\dots (2) \end{cases}$ ヲ解クコト

[解] $z^2-126z+3888=0 \dots\dots\dots (3)$

$$\therefore\ \sqrt{D}=\sqrt{63^2-3888}=\sqrt{81}=9$$

$$\therefore\ z=63\pm 9=\begin{cases} 72 \\ 54 \end{cases}\quad 答\ \begin{cases} x=72 \\ y=54 \end{cases}\ \begin{cases} x=54 \\ y=72 \end{cases}$$

[説明] x ト y トハ和ガ 126, 積ガ 3888 ナルヲ以テ, x ノ値ト, y ノ値トヲ二根トスル方程式(3)

ヲ作リテ解キタルナリ[第60節(2), 第64節(2)].

【注意2】 各方程式ガ x, y **ノ對稱式**ヨリ成ルヲ以テ, x ノ値ト y ノ値トヲ入レ換ヘタルモノモ根ナリ.

(二) $\begin{cases} x-y=100 \ldots\ldots(1) \\ xy=9821 \ldots\ldots(2) \end{cases}$ ヲ解クコト(第64節例題5).

$\boxed{解}$ $z-100z-9821=0 \ldots\ldots(3)$ ……[第64節(3), (4)].

$\sqrt{D}=\sqrt{2500+9821}=111$

$\therefore\ z=50\pm111=\begin{cases}161 \\ -61\end{cases}$　答 $\begin{cases}x=161 \\ y=61\end{cases}$ $\begin{cases}x=-61 \\ y=-161\end{cases}$

〔例四〕 (一) $\begin{cases} x^2y^2-18xy+32=0 \ldots\ldots(1) \\ x+y=3 \ldots\ldots\ldots(2) \end{cases}$ ヲ解クコト.

$\boxed{解}$ (1)ヨリ　$(xy-3)(xy-16)=0$

故ニ次ノ二ツノ場合ヲ解ケバヨシ.

(A) $\begin{cases} xy=2 \\ x+y=3 \end{cases}$　(B) $\begin{cases} xy=16 \\ x+y=3 \end{cases}$

故ニ總テニテ四組ノ答アリ(之ヲ試ミヨ).

(二) $\begin{cases} 4x^2-9y^2=0 \ldots\ldots\ldots\ldots(1) \\ 4x^2+y^2=8(x+y) \ldots\ldots(2) \end{cases}$ ヲ解クコト.

$\boxed{解}$ (1)ヨリ　$(2x-3y)(2x+3y)=0$

故ニ次ノ二ツノ場合ヲ解ケバヨシ.

(A) $\begin{cases} 2x=3y \\ 4x^2+y^2=8(x+y) \end{cases}$　(B) $\begin{cases} 2x=-3y \\ 4x^2+y^2=8(x+y) \end{cases}$

$2x=3y$ なれば $x=3n$, $y=2n$ トシテ之ヲ他ノ方ニ代入シテ先ヅ n ヲ求ムベシ.

(三) $\begin{cases} x^2=4 \ldots\ldots\ldots\ldots(1) \\ y^2=1 \ldots\ldots\ldots\ldots(2) \end{cases}$ ヲ解クコト.

$\boxed{解}$ (一)ハ $x=2$ ト $x=-2$ トニ分タル.

$\therefore$ (A) $\begin{cases} x=2 \\ y^2=1 \end{cases}$ (B) $\begin{cases} x=-2 \\ y^2=1 \end{cases}$ ノ二ツノ場合ヲ解ケバヨシ(之ヲ試ミヨ).

【注意3】 一組ノ聯立方程式 $\begin{cases} A\cdot B=0 \\ C\cdot D=0 \end{cases}$ ハ次ノ四組ノ聯立方程式ニ分タル.

$(a)\begin{cases} A=0 \\ C=0 \end{cases}$　$(b)\begin{cases} A=0 \\ D=0 \end{cases}$　$(c)\begin{cases} B=0 \\ C=0 \end{cases}$　$(d)\begin{cases} B=0 \\ D=0 \end{cases}$

〔例五〕 (一) $\begin{cases} (x+y)(8-x)=10 \ldots\ldots(1) \\ (x+y)(5-y)=20 \ldots\ldots(2) \end{cases}$

答 $\begin{cases} x=7 \\ y=3 \end{cases}$ $\begin{cases} x=\dfrac{14}{3} \\ y=-\dfrac{5}{3} \end{cases}$

解　(1)＋(2)　$(x+y)\{13-(x+y)\}=30$

$\therefore\ (x+y)^2-13(x+y)+30=0$

$\therefore\ x+y=10$……(A)，或ハ $x+y=3$……(B)

$\therefore$ 〔(A) ト (1)〕及ビ〔(B) ト (1)〕ヲ解ケバヨシ.

或ハ (1)÷(2)……$\dfrac{8-x}{5-y}=\dfrac{1}{2}$ ニヨルモ，x, y ノ間ノ一次ノ關係式ヲ得.

(二) $\begin{cases} \boldsymbol{x+y+\sqrt{x+y}-6=0} \text{……(1)} \\ \boldsymbol{x^2-y^2=27} \text{…………………(2)} \end{cases}$　答 $\begin{cases} x=\dfrac{43}{8} \\ y=\dfrac{-11}{8} \end{cases}$

解　(1) ヨリ $(\sqrt{x+y}+3)(\sqrt{x+y}-2)=0$

然ルニ $\sqrt{x+y}$ ハ實數ナレバ正ノ數ヲ表ス. 故

$\boldsymbol{\sqrt{x+y}+3\neq 0}$

$\therefore\ \sqrt{x+y}-2=0$　　$\therefore\ x+y=4$…………(3)

又 (2)÷(3)　　$x-y=\dfrac{27}{4}$…………(4)

(3) ト (4) トニヨリテ　　$x=\dfrac{43}{8},\ y=\dfrac{-11}{8}$

〔例題〕 次ノ各方程式ヲ解ケ.

1. $\begin{cases} x+y=354 \\ xy=30240 \end{cases}$　　2. $\begin{cases} x-y=19 \\ xy=11466 \end{cases}$

3. $\begin{cases} x-y=6 \\ x^2+y^2=180 \end{cases}$　　4. $\begin{cases} x(x+y+2)=14 \\ y(x+y+2)=21 \end{cases}$

5. $\begin{cases} x+\dfrac{2}{y}=\dfrac{5}{2} \\ y+\dfrac{3}{x}=4 \end{cases}$　　6. $\begin{cases} x+y=11 \\ x-y+\sqrt{x-y}=20 \end{cases}$

7. $\begin{cases} x+y=5 \\ x^3+y^3=65 \end{cases}$　　8. $\begin{cases} (x-2)(y-1)=0 \\ 2x^2-3xy+5y=5 \end{cases}$

補　習　問　題

9. $\begin{cases} x-y=3 \\ xy=-11 \end{cases}$　　$\begin{cases} x+y=12 \\ x^2+y^2=80 \end{cases}$　　$\begin{cases} (x+4)(y-3)=0 \\ (x+7)(y-7)=0 \end{cases}$

10. $\begin{cases} x^3+y^3=189 \\ x+y=9 \end{cases}$　　$\begin{cases} x^2-xy+y^2=3 \\ x^3+y^3=9 \end{cases}$　　$\begin{cases} x-y=3 \\ x^2-3xy+y^2=-19 \end{cases}$

11. $\begin{cases} 3x-y=5 \\ x(y-1)=0 \end{cases}$　　$\begin{cases} \dfrac{x}{x-y}=\dfrac{7}{2} \\ x(x-y)-5y^2=6 \end{cases}$　　$\begin{cases} x:y=2:3 \\ xy+72=6(2x+y) \end{cases}$

12. $\begin{cases} 2x^2+y^2=17 \\ x^2+3y^2=31 \end{cases}$　　$\begin{cases} \dfrac{1}{x^2}-\dfrac{1}{y^2}=20 \\ \dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}=10 \end{cases}$　　$\begin{cases} x^2y^2+4xy=96 \\ x+y=6 \end{cases}$

13. $\begin{cases} x(y-1)=10 \\ y(x-1)=12 \end{cases}$　　$\begin{cases} x(x+y)=15 \\ y(x+y)=10 \end{cases}$　　$\begin{cases} 3x^2+5x-8y=36 \\ 2x^2-3x-4y=3 \end{cases}$

14. $\begin{cases} x+y=58 \\ \sqrt{x}+\sqrt{y}=10 \end{cases}$　　$\begin{cases} x\sqrt{x+y}=a \\ y\sqrt{x+y}=b \end{cases}$　　$\begin{cases} \dfrac{a-x}{b-y}+\dfrac{b-y}{a-x}=\dfrac{34}{15} \\ x-y=3(a-b) \end{cases}$

67. 二次と二次との聯立方程式

〔例一〕 $\begin{cases} \boldsymbol{15x^2+14xy-8y^2=0} \text{…(1)} \\ \boldsymbol{2x^2+3xy+y^2=63} \text{……(2)} \end{cases}$ ヲ解クコト.

|解| (1)ヨリ $(5x-2y)(3x+4y)=0$

$$\therefore\ (\mathrm{A})\begin{cases}5x-2y=0\ldots\ldots\ldots\ldots(3)\\ 2x^2+3xy+y^2=63\ldots\ldots(2)\end{cases}$$

$$(\mathrm{B})\begin{cases}3x+4y=0\ldots\ldots\ldots\ldots(4)\\ 2x^2+3xy+y^2=63\ldots\ldots(2)\end{cases}$$

(A) (3)ヨリ $\boldsymbol{x=2m,\ y=5m}$

$\therefore\ 2(2m)^2+3.(2m).(5m)+(5m)^2=63$

$\therefore\ 63m^2=63 \qquad \therefore\ \boldsymbol{m=\pm1}$

(B) (4)ヨリ $\boldsymbol{x=-4n,\ y=3n}$

$\therefore\ 2(-4n)^2+3.(-4n).(3n)+(3n)^2=63$

$5n^2=63 \qquad \therefore\ \boldsymbol{n=\pm\frac{3\sqrt{35}}{5}}$

$$答\begin{cases}x=2\\ y=5\end{cases}\quad\begin{cases}x=-2\\ y=-5\end{cases}\quad\begin{cases}x=-\dfrac{12\sqrt{35}}{5}\\ y=\dfrac{9\sqrt{35}}{5}\end{cases}\quad\begin{cases}x=\dfrac{12\sqrt{35}}{5}\\ y=-\dfrac{9\sqrt{35}}{5}\end{cases}$$

〔例題〕 〔$3x^2-25xy+28y^2=0 \quad xy-y^2=3$〕ヲ解ケ.

〔例二〕 $\begin{cases}3x^2-xy=2\ldots\ldots\ldots\ldots(1)\\ 4x^2+2x-y^2=11\ldots\ldots(2)\end{cases}$ ヲ解ケ.

|解| (1)×11−(2)×2 $\quad 25x^2-15xy+2y^2=0$

$\therefore\ (5x-y)(5x-2y)=0$

$$(\mathrm{A})\begin{cases}5x-y=0\ldots\ldots\ldots(3)\\ 3x^2-xy=2\ldots\ldots(1)\end{cases}\qquad(\mathrm{B})\begin{cases}5x-2y=0\ldots\ldots\ldots(4)\\ 3x^2-xy=2\ldots\ldots(1)\end{cases}$$

(A) (3)ヨリ $\boldsymbol{x=m,\ y=5m}$

$\therefore\ 3m^2-5m^2=2 \qquad \therefore\ -2m^2=2 \quad \boldsymbol{m=\pm i}$

(B) (4)ヨリ $\boldsymbol{x=2n,\ y=5n}$

$\therefore\ 12n^2-10n^2=2 \qquad \therefore\ \boldsymbol{n=\pm1}$

$$答\begin{cases}x=i\\ y=5i\end{cases}\quad\begin{cases}x=-i\\ y=-5i\end{cases}\quad\begin{cases}x=2\\ y=5\end{cases}\quad\begin{cases}x=-2\\ y=-5\end{cases}$$

本例ハ方程式ノ各ガ一次ノ項ヲ含マザル二次方程式ニシテ,本節ニ於テ標準トスル場合ナリ.

規則　方程式の各が一次の項を含まざる二元二次の聯立方程式

$$\begin{cases}\boldsymbol{ax^2+bxy+cy^2=d}\ldots\ldots(1)\\ \boldsymbol{a'x^2+b'xy+c'y^2=d'}\ldots(2)\end{cases}$$

を解くには,先づ既知項を消去したるものを,二つの一次方程式に分解し,此各と原方程式の一つとを聯立せしめたる二組の聯立方程式を解くべし.

【注意1】 二次ト二次トノ聯立方程式ガ一次ノ項ヲ含ム場合,例ヘバ 〔$x^2+x+y=3 \quad x^2+y^2=5$〕ヨリ$y$ヲ消去スレバ, $x^2+(3-x^2-x)^2=5$ 即チ

$x^4+2x^3-4x^2-6x+4=0$ ヲ得

斯様ナル場合ハ,特別ナルモノノ外ハ,本書ニ於テ之ヲ論ゼズ.

〔例題〕 次ノ各方程式ヲ解ケ(1-2).

1. $\begin{cases} x^2-3xy=-9 \\ 4x^2-2xy-3y^2=12 \end{cases}$ **2.** $\begin{cases} x^2+xy+2y^2=44 \\ 2x^2-xy+y^2=16 \end{cases}$

【注意2】 一次ノ項ヲ含マザル二元二次方程式 $\boldsymbol{ax^2+bxy+cy^2=d}$ ニ適合スル x, y ノ値ヲ $x=\alpha$, $y=\beta$ トスレバ $x=-\alpha$, $y=-\beta$ モ亦之ニ適合ス. 之ヲ驗證セヨ.

〔例三〕 $\begin{cases} \boldsymbol{2x^2+3xy+y^2=70} \ldots(1) \\ \boldsymbol{6x^2+xy-y^2=50} \ldots\ldots(2) \end{cases}$ 答 $\begin{cases} x=3 \\ y=4 \end{cases}$ $\begin{cases} x=-3 \\ y=-4 \end{cases}$

$\boxed{解}$ (2)×7−(1)×5 $32x^2-8xy-12y^2=0$

$\therefore\ 8x^2-2xy-3y^2=0 \qquad \therefore\ (4x-3y)(2x+y)=0$

(A) $\begin{cases} 4x-3y=0 \ldots\ldots\ldots(3) \\ 6x^2+xy-y^2=50\ldots(2) \end{cases}$ (B) $\begin{cases} 2x+y=0\ldots\ldots\ldots\ldots(4) \\ 6x^2+xy-y^2=50\ldots(2) \end{cases}$

(A) (3) ヨリ $\boldsymbol{x=3m,\ y=4m}$

$6.9m^2+12m^2-16m^2=50 \quad 50m^2=50 \qquad \therefore\ \boldsymbol{m=\pm 1}$

(B) (4) ヨリ $\boldsymbol{x=-n,\ y=2n}$

$6.n^2-2n^2-4n^2=50 \qquad \therefore\ 0=50 \qquad \therefore$ 不可能

之ニヨリテ(1)ト(2)トヲ變形スレバ

(c) $\begin{cases} \boldsymbol{(2x+y)(x+y)=70} \ldots\ldots(1) \\ \boldsymbol{(2x+y)(3x-y)=50} \ldots\ldots(2) \end{cases}$

$\therefore\ 2x+y=0\ldots(4)$ ト原方程式ノ各トハ聯立セズ.

【注意3】 斯様ニ(A), (B)ノ中ニ不可能ノ組アラバ原方程式ニ就テ吟味シ置クベシ.

〔例四〕 $\begin{cases} \boldsymbol{x^2-xy+y^2=61} \ldots\ldots\ldots(1) \\ \boldsymbol{x^4+x^2y^2+y^4=1281} \ldots(2) \end{cases}$ ヲ解クコト.

$\boxed{解}$ $\boldsymbol{x^4+x^2y^2+y^4}=(x^2+y^2)^2-x^2y^2$

$\boldsymbol{=(x^2+xy+y^2)(x^2-xy+y^2)}$ ニヨリテ

(2)÷(1) $x^2+xy+y^2=21\ldots\ldots(3)$

(3)−(1) $2xy=-140 \qquad \therefore\ xy=-20\ldots\ldots(4)$

(3)+(4) $(x+y)^2=1 \qquad \therefore\ x+y=\pm 1$

(A) $\begin{cases} x+y=1 \\ xy=-20 \end{cases}$ (B) $\begin{cases} x+y=-1 \\ xy=-20 \end{cases}$

答 $\begin{cases} x=5 \\ y=-4 \end{cases}$ $\begin{cases} x=-4 \\ y=5 \end{cases}$ $\begin{cases} x=-5 \\ y=4 \end{cases}$ $\begin{cases} x=4 \\ y=-5 \end{cases}$

【注意4】 (1), (2) ハ各 x, y ニ就テ對稱ナレバ,其ノ値ヲ交換シタルモノモ適合ス(前節注意2).

又 (1), (2) ノ各ノ x, y ノ項ハ二次或ハ四次ナリ. 故ニ x, y ノ値ノ符號ヲ一緒ニ變ヘタルモノモ適合ス (注意 2).

方程式ノ各ガ x, y ニ就テ對稱ナル時ハ, $[x+y=a,\ xy=b]$ ノ場合ニ導カル (第 64 節 (5)).

〔例五〕 (一) $\begin{cases} \boldsymbol{x+y=4} \cdots\cdots (1) \\ \boldsymbol{x^4+y^4=82} \cdots\cdots (2) \end{cases}$ ヲ解クコト.

解 $x^4+y^4=(x+y)^4-4xy(x+y)^2+2(xy)^2$ (第 64 節 (5))

$\therefore\ 82=4^4-4(xy).4^2+2(xy)^2$

之ヲ解キテ $(xy-3)(xy-29)=0$

$\therefore$ (A) $\begin{cases} xy=3 \\ x+y=4 \end{cases}$　　(B) $\begin{cases} xy=29 \\ x+y=4 \end{cases}$

答 $\begin{cases} x=3 \\ y=1 \end{cases}$ $\begin{cases} x=1 \\ y=3 \end{cases}$ $\begin{cases} x=2+5i \\ y=2-5i \end{cases}$ $\begin{cases} x=2-5i \\ y=2+5i \end{cases}$

(二) $\begin{cases} \boldsymbol{x-y=2} \cdots\cdots\cdots\cdots (1) \\ \boldsymbol{x^5-y^5=242} \cdots\cdots (2) \end{cases}$ ヲ解クコト.

解 第 64 節 (5) ニ於テ y ノ所ニ $-y$ ヲ代入スレバ

$$\boldsymbol{x^5-y^5=(x-y)^5+5xy(x-y)^3+5(xy)^2(x-y)}$$

$\therefore\ 242=2^5+5(xy).2^3+5(xy)^2\times 2$

之ヲ解キテ　$(xy-3)(xy+7)=0$

$\therefore$ (A) $\begin{cases} xy=3 \\ x-y=2 \end{cases}$,　(B) $\begin{cases} xy=-7 \\ x-y=2 \end{cases}$

答 $\begin{cases} x=3 \\ y=1 \end{cases}$ $\begin{cases} x=-1 \\ y=-3 \end{cases}$ $\begin{cases} x=1+i\sqrt{6} \\ y=-1+i\sqrt{6} \end{cases}$ $\begin{cases} x=1-i\sqrt{6} \\ y=-1-i\sqrt{6} \end{cases}$

〔例題〕 次ノ各方程式ヲ解ケ (1-10).

1. $\begin{cases} 8x^2-2xy-3y^2=-12 \\ 2x^2-3xy-y^2=4 \end{cases}$　　**2.** $\begin{cases} x^2+xy+y^2=7 \\ x^4+x^2y^2+y^4=21 \end{cases}$

3. $\begin{cases} x^4+y^4=17 \\ x+y=3 \end{cases}$　　**4.** $\begin{cases} x^5+y^5=21 \\ x+y=1 \end{cases}$

5. $\begin{cases} x^3+y^3=7xy \\ 7xy=28(x+y) \end{cases}$　　**6.** $\begin{cases} x(1+y+y^2)=14 \\ x^2(1+y^2+y^4)=84 \end{cases}$

補習問題

7. $\begin{cases} 65x^2-64xy+15y^2=0 \\ x^2-y^2=-16 \end{cases}$　$\begin{cases} 2x^2-3xy=0 \\ y^2+5xy=34 \end{cases}$　$\begin{cases} x^2+xy=40 \\ xy-y^2=9 \end{cases}$

8. $\begin{cases} 2x^2+3xy=26 \\ 3y^2+2xy=39 \end{cases}$　$\begin{cases} x^2-3xy+2y^2=3 \\ 2x^2+y^2=6 \end{cases}$　$\begin{cases} x^2-2xy=3y \\ 2x^2-9y^2=9y \end{cases}$

9. $\begin{cases} x^2-xy+y^2=39 \\ 2x^2-3xy+2y^2=43 \end{cases}$　$\begin{cases} x^2-2xy+3y^2=3(x-y) \\ 2x^2+xy-y^2=9(x-y) \end{cases}$　$\begin{cases} y^2-xy-6y^2=24 \\ x^2-3xy-10y^2=32 \end{cases}$

10. $\begin{cases} \sqrt{x}-\sqrt{y}=3 \\ xy=100 \end{cases}$　$\begin{cases} x\sqrt{y}+y\sqrt{x}=20 \\ \sqrt{x^3}+\sqrt{y^3}=65 \end{cases}$　$\begin{cases} \sqrt{x+y}+\sqrt{x-y}=4 \\ x^2+y^2=41 \end{cases}$

68. 三元聯立方程式

〔例一〕 (一) 第31節例二復習(加減消去法)

$$\begin{cases} 2x-5y+3z=7 \cdots\cdots (1) \\ 3x+y-2z=6 \cdots\cdots (2) \\ x-3y+z=2 \cdots\cdots (3) \end{cases} \qquad 答 \begin{cases} x=3 \\ y=1 \\ z=2 \end{cases}$$

解 $(1)-(3)\times 2 \quad y+z=3 \cdots\cdots (4)$

$(2)-(3)\times 3 \quad 10y-5z=0 \cdots\cdots (5)$　$\therefore \begin{cases} y=1 \\ z=2 \end{cases}$

之ヲ(3)ニ代入シテ $x=3$ ヲ得.

(二) **前例の別解** 第32節例二復習(代入消去法)

解 z ヲ既知數ノ如ク取扱ヒテ

(2)ト(3)トヨリ $\begin{cases} x=\frac{1}{2}(z+4) \cdots\cdots (4) \\ y=\frac{1}{2}z \cdots\cdots (5 \end{cases}$

之ヲ(1)ニ代入スレバ $(z+4)-\frac{5}{2}z+3z=7$

$\therefore$ $z=2$ 之ト(4), (5)トニテ $x=3$ $y=1$ ヲ得.

(三) 第31節例五復習

$$\begin{cases} 5x+y-4z=0 \cdots\cdots (1) \\ 2x-3y+z=0 \cdots\cdots (2) \\ 3x+2y+3z=220 \cdots\cdots (2) \end{cases} \qquad 答 \begin{cases} x=22 \\ y=26 \\ z=34 \end{cases}$$

解 (1)ト(2)トヨリ $x:y:z=11:13:17$

$\therefore$ $x=11n,\ y=13n,\ z=17n$ $\cdots\cdots (4)$

之ト(3)トニテ $3(11n)+2(13n)+3(17n)=220$

$\therefore$ $110n=220$　　$\therefore$ $n=2$

規則 (一) 三つの方程式の中二つ宛見較べて,それより x を消去したるものを二つ作り,その二つを聯立せしめて y, z の値を求め,從つて x の値を求むべし.

初めに消去する元は x に限らず(加減消去法).

(二) 三つの方程式の中一つを殘して,他の二つより,z を既知數の如く取扱ひて,x, y を z にて表し,之を殘し置きたる方程式の中へ代入して,z の値を求め,從つて x, y の値を求むべし. 初めに既知數の如く取扱ふ元は z に限らず(代入消去法).

〔例題〕 1. ハ $x:y:z$ ヲ求メ, 2. ハ解ケ.

1. [$x+2y=3z$　　$5x+7z=6y$]

2. [$x+2y+3z=32$　　$2x+3y+z=42$　　$3x+y+2z=40$]

【注意】 前ノ規則ハ三元方程式ノ各ガ**一次の場合**ナリ. **三元二次の聯立方程式**ニ就テハ,唯其特別ナル二三ノ例ヲ示スニ止メン.

〔例二〕 次ノ聯立方程式ヲ解クコト.

$$\begin{cases} \mathbf{2x+2y-z=4} \cdots\cdots (1) \\ \mathbf{x-y+3z=8} \cdots\cdots (2) \\ \mathbf{-x^2+yz+2y=9} \cdots\cdots (3) \end{cases} \qquad 答 \begin{cases} x=1 \\ y=2 \\ z=3 \end{cases} \begin{cases} x=15 \\ y=-16 \\ z=-11 \end{cases}$$

解 (1)ト(2)トヨリ, x ヲ既知數ノ如ク取扱ヒテ

$$[z=4-x \qquad y=4-2x] \ldots\ldots\ldots\ldots (4)$$

之ト(3)トニテ $-x^2+(4-2x)(4-x)+2(4-2x)=9$

即チ $x^2-16x+16=0$ $\therefore$ $x=1$, 或ハ $x=15$

之ト(4)トニテ答ヲ得.

〔例三〕 $\begin{cases} \mathbf{x^2+y^2+z^2=21} \ldots\ldots\ldots (1) \\ \mathbf{x+y-z=5} \ldots\ldots\ldots (2) \\ \mathbf{xz=4} \ldots\ldots\ldots (3) \end{cases}$ ヲ解クコト.

解 $\begin{cases} x^2+z^2=21-y^2 \ldots\ldots\ldots (1) \\ x-z=5-y \ldots\ldots\ldots (2) \\ xz=4 \ldots\ldots\ldots (3) \end{cases}$

然ルニ $(x^2+z^2)-(x-z)^2=2xz$ ナルコトニヨリテ

$$21-y^2-(5-y)^2=2\times 4$$

$\therefore$ $2y^2-10y+12=0$ $\therefore$ $y=2$ 或ハ $y=3$

$\therefore$ (A) $\begin{cases} y=2 \\ x-z=5-y \\ xz=4 \end{cases}$ (B) $\begin{cases} y=3 \\ x-z=5-y \\ xz=4 \end{cases}$

答 $\begin{cases} x=4 \\ y=2 \\ z=1 \end{cases}$ $\begin{cases} x=-1 \\ y=2 \\ z=-4 \end{cases}$ $\begin{cases} x=1+\sqrt{5} \\ y=3 \\ z=-1+\sqrt{5} \end{cases}$ $\begin{cases} x=1-\sqrt{5} \\ y=3 \\ z=-1-\sqrt{5} \end{cases}$

〔例四〕 (一) $\begin{cases} \mathbf{yz=20} \ldots\ldots (1) \\ \mathbf{xz=15} \ldots\ldots (2) \\ \mathbf{xy=12} \ldots\ldots (3) \end{cases}$ 答 $\begin{cases} x=3 \\ y=4 \\ z=5 \end{cases}$ $\begin{cases} x=-3 \\ y=-4 \\ z=-5 \end{cases}$

解 (1)×(2)×(3) $x^2y^2z^2=(4.5).(3.5).(3\cdot 4)$

$\therefore$ $xyz=60 \ldots\ldots (4)$ 或ハ $xyz=-60 \ldots\ldots (5)$

之ヲ(1), (2), (3)ニテ割リテ答ヲ得.

(二) $\begin{cases} \mathbf{x(y+z)=27} \ldots\ldots\ldots (1) \\ \mathbf{y(z+x)=32} \ldots\ldots\ldots (2) \\ \mathbf{z(x+y)=35} \ldots\ldots\ldots (3) \end{cases}$ 答 $\begin{cases} x=3 \\ y=4 \\ z=5 \end{cases}$ $\begin{cases} x=-3 \\ y=-4 \\ z=-5 \end{cases}$

解 $\begin{cases} xy+xz=27 \ldots\ldots\ldots (1) \\ yz+xy=32 \ldots\ldots\ldots (2) \\ xz+yz=35 \ldots\ldots\ldots (3) \end{cases}$

(1), (2), (3) ヲ加ヘテ 2 ニテ割レバ

$$xy+xz+yz=47 \ldots\ldots\ldots (4)$$

(4)ト(1), (2), (3)トニテ前例ニ導カル.

(三) 次ノ一組ヲ解クコト.

$\begin{cases} \mathbf{(x+z)(x+y)=20} \ldots\ldots (1) \\ \mathbf{(y+z)(x+y)=15} \ldots\ldots (2) \\ \mathbf{(y+z)(z+x)=12} \ldots\ldots (3) \end{cases}$ 答 $\begin{cases} x=3 \\ y=2 \\ z=1 \end{cases}$ $\begin{cases} x=-3 \\ y=-2 \\ z=-1 \end{cases}$

解 (一)ノ方法ニヨリ (1)×(2)×(3) ヲ開キテ

$$(y+z)(z+x)(x+y)=\pm 60$$

$\therefore$ (A) $\begin{cases} y+z=3 \\ z+x=4 \\ x+y=5 \end{cases}$ (B) $\begin{cases} y+z=-3 \\ z+x=-4 \\ x+y=-5 \end{cases}$ ヨリ答ヲ得.

〔例五〕 次ノ三ツハ解法ノ方針ヲ示スニ止ム.

(一) $\begin{cases} x(x+y+z)=8 \ldots\ldots(1) \\ y(x+y+z)=12 \ldots\ldots(2) \\ z(x+y+z)=5 \ldots\ldots(3) \end{cases}$ $(1)+(2)+(3)$ ニヨル

(二) $\begin{cases} 3y+2z=2yz \ldots\ldots(1) \\ 4z+x=zx \ldots\ldots(2) \\ 3x+2y=xy \ldots\ldots(3) \end{cases}$ (1) ハ $\dfrac{3}{z}+\dfrac{2}{y}=2$ ニ,其他モ同様ニ變形シテ

但シ $x=0,\ y=0,\ z=0$ モ根ナリ.

(三) $\begin{cases} xy+x+y=a \ldots\ldots(1) \\ yz+y+z=b \ldots\ldots(2) \\ zx+z+x=c \ldots\ldots(3) \end{cases}$ (1) ハ $(x+1)(y+1)=a+1$ ニ,其他モ同様ニ變形シテ

〔例題〕 次ノ各組ヲ解ケ(1-6).

1. $\begin{cases} 2x-4y+z=0 \\ x+y-4z=0 \\ (x+1)(z+1)=(y-1)(y+6) \end{cases}$

2. $\begin{cases} 2x+y-z=1 \\ x+2y+z=2 \\ 2x^2+y^2-z^2+yz=3 \end{cases}$

3. $\begin{cases} x+y+2z=11 \\ xy+z^2=15 \\ x^2+y^2+5z^2=58 \end{cases}$

4. $\begin{cases} (x+1)(y+1)=20 \\ (y+1)(z+1)=30 \\ (z+1)(x+1)=24 \end{cases}$

5. $\begin{cases} xy=x+y \\ xz=2(x+z) \\ yz=3(y+z) \end{cases}$

6. $\begin{cases} x(y-z)+6=0 \\ y(z-2x)=5 \\ z(2x-3y)+63=0 \end{cases}$

問題 第四十九集

次ノ各組ヲ解ケ(1-11).

1. $\begin{cases} \dfrac{x+3}{x-3}+\dfrac{y-3}{y+3}=2 \\ \dfrac{x-3}{2x+3}+\dfrac{y-3}{2y+3}=1 \end{cases}$

2. $\begin{cases} \dfrac{2x-1}{x-1}+\dfrac{y+3}{y+1}=3 \\ x^2+y^2=2x+y \end{cases}$

3. $\begin{cases} x=1+\sqrt{y} \\ y=4-3x+x^2 \end{cases}$

4. $\begin{cases} x^2+y^2=34 \\ x^2-y^2+\sqrt{x^2-y^2}=20 \end{cases}$

5. $\begin{cases} x+xy+y=5 \\ x^2+xy+y^2=7 \end{cases}$

6. $[x^2+y^2=10xy-5(x+y)=5(xy-1)]$

7. $\begin{cases} x+y+z=8 \\ x^2+y^2+z^2=30 \\ xyz=10 \end{cases}$

8. $\begin{cases} x+y+z=4 \\ yz+zx+xy=-4 \\ yz=2x^2 \end{cases}$

9. $\begin{cases} y+z=\dfrac{5}{x} \\ z+x=\dfrac{8}{y} \\ x+y=\dfrac{9}{z} \end{cases}$ 10. $\begin{cases} \dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}+\dfrac{1}{z}=13 \\ \dfrac{1}{y}-\dfrac{1}{x}=1 \\ \dfrac{1}{xy}-\dfrac{2}{z}=0 \end{cases}$ 11. $\begin{cases} \dfrac{x^5+y^5}{x^3+y^3}=\dfrac{121}{13} \\ x+y=2 \end{cases}$

12. 次ノ方程式ニ適合スル x, y ノ實根ノ組如何.

$$(x^2+y^2-3xy-3)^2+(2x^2+y^2-6)^2=0$$

13. 矩形ノ對角線89米ナルアリ. 各邊ヲ3米減セバ,對角線ハ4米減ルトイフ. 各邊幾許.

14. 或室ノ床ノ面積ハ a^2 坪,一方ノ壁ハ b^2 坪,其隣ノ壁ハ c^2 坪ナリ. 室ノ縱横高サ各如何.

(一) $a=2\sqrt{5}$, $b=2\sqrt{2}$, $c=\sqrt{10}$ ナラバ如何.

(二) $a^2=72$, $b^2=20$, $c^2=22.5$ ナラバ如何.

15. 四ツノ正ノ數アリ,其中ノ三ツ宛ノ積ガ夫夫60, 40, 30, 24ナラバ各數如何.

16. A, B ノ二船アリ,其速サノ比 2:3 ニシテ, A ハ正東ニ, B ハ正南ニ向ヒテ進行ス,二船ノ間ノ距離初メハ12浬ナリシガ,1時間ノ後8浬トナリ,更ニ1時間ヲ經テ20浬トナレリ. 二船ノ速サヲ求ム.

17. 直角三角形ノ地面アリ,其面積ハ2段歩ニシテ斜邊ノ長サハ50間ナリ. 直角ヲ挾ム兩邊ノ長サヲ求ム. 又斜邊ヲ a,面積ヲ s トシテ, s ノ極大ナル場合ヲ求ム.

18. 二尺八寸ノ周ヲ有スル直角三角形ニ內接スル圓ノ半徑二寸ナラバ,三邊ノ長各幾許.

19. 川ニ沿ヒテ8里隔タリタル甲乙ノ二村間ヲ往復スル汽船アリ. 平時ニ於テ二村間ヲ往復スルニ5時20分ヲ要ス. 或日水勢增シテ其速度平時ノ $\dfrac{6}{5}$ トナリタルトキ,二村間ヲ往復スルニ6時15分ヲ要セリ. 平時ニ於ケル水流ノ速度幾許.

20. 或客車ガ甲驛ヲ出發シテ,乙驛ニ向ヒタルト同時ニ,或貨車ガ乙驛ヲ出發シテ甲驛ニ向ヒ36分間ノ後兩列車相會シ,其後貨車ハ客車ヨリ30分早ク目的驛ニ到着シタリトイフ. 甲乙兩驛ノ距離ヲ30哩トスレバ兩列車ノ毎時ノ速サ何程ナルカ. 又36分ヲ $43\frac{1}{5}$ 分ニ,30分ヲ36分ニ,30哩ヲ36哩ニスレバ如何.

補習問題

次ノ各方程式ヲ解ケ(21−28).

21. $\begin{cases} x+y=-8 \\ xy=-2193 \end{cases}$　$\begin{cases} 3x^2-2y^2=6(x-y) \\ xy=0 \end{cases}$　$\begin{cases} (x-1)(y+5)=100 \\ (x-2)(y+6)=99 \end{cases}$

22. $\begin{cases} xy=(3-x)^2 \\ xy=(2-y)^2 \end{cases}$　$\begin{cases} xy=(x^2-y^2) \\ xy=2(x+y) \end{cases}$　$\begin{cases} x^3+y^3=(a+b)(x-y)^2 \\ x^2-xy+y^2=(a-b)(x-y) \end{cases}$

23. $\begin{cases} xy=a(x-y) \\ xy=b(x+y) \end{cases}$　$\begin{cases} x\left(1+\dfrac{x}{y}\right)=a \\ y\left(1+\dfrac{y}{x}\right)=b \end{cases}$　$\begin{cases} x^2-5y^2-3x+22=y \\ (x-3)(y-2)=(y-1)(y-2) \end{cases}$

24. $\begin{cases} x\sqrt{x+y}=a \\ y\sqrt{x+y}=b \end{cases}$　$\begin{cases} 2x-\sqrt{y}=5 \\ (4y-7)(x-3)=y \end{cases}$　$\begin{cases} x-y-2\sqrt{x-y}=15 \\ x+y+4\sqrt{x+y}=45 \end{cases}$

25. $\begin{cases} \sqrt{\dfrac{x}{y}}+\sqrt{\dfrac{y}{x}}=\dfrac{25}{12} \\ x-y=28 \end{cases}$　$\begin{cases} \dfrac{x+y}{1-xy}=31 \\ \dfrac{x-y}{1+xy}=\dfrac{11}{29} \end{cases}$　$\begin{cases} 4\dfrac{1}{3}xy=x^2+y \\ 4\dfrac{1}{4}xy=x+y^2 \end{cases}$

26. $\begin{cases} (x+y)^2+4(x-y)=37 \\ xy+4(x-y)=16 \end{cases}$　$\begin{cases} (x^2-y+1)(y^2-x+1)=16 \\ x+y=5 \end{cases}$　$\begin{cases} 2x^2+3y^2+x=y+7 \\ 4x^2+6y^2+4y=3x+3 \end{cases}$

27. $\begin{cases} x^2yz=6 \\ xy^2z=12 \\ xyz^2=18 \end{cases}$　$\begin{cases} x(x+y+z)=27 \\ y(x+y+z)=18 \\ z(x+y+z)=36 \end{cases}$　$\begin{cases} yz+5zx-5xy=11 \\ 2yz-2zx+xy=5 \\ -3yz+2zx+xy=-10 \end{cases}$

28. $\begin{cases} \dfrac{yz}{y+z}=\dfrac{5}{6} \\ \dfrac{zx}{z+x}=\dfrac{3}{4} \\ \dfrac{xy}{x+y}=\dfrac{15}{8} \end{cases}$　$\begin{cases} xy+x+y=19 \\ yz+y+z=29 \\ zx+z+x=23 \end{cases}$　$\begin{cases} x+\dfrac{1}{y}=\dfrac{3}{2} \\ y+\dfrac{1}{z}=\dfrac{7}{3} \\ z+\dfrac{1}{x}=4 \end{cases}$

29. $x^2-(2a^2+2ab-3b^2)x+10(a-b)^2=0$ ノ二根ガ 6 ト 30 トナル様ニ a, b ノ値ヲ定メヨ.

30. 72圓ニテ買ヒ得ベキ上米ト,中米トノ分量ノ差5斗ナリ. 若シ1斗ノ價各20錢宛騰貴セバ,此差1俵(4斗)トナルベシト云フ. 1斗ノ價各幾許ナルカ.

31. 三數アリ,其何レノ二數ノ和モ殘リ一數ノ逆數ニ等シ. 各數如何.

32. 二婦アリ,合セテ100斤ノ林檎ヲ携ヘテ市ニ至リ,等額ノ賣揚金ヲ得テ歸レリ.　若シ二婦共1斤ノ賣價ヲ交換シテ其林檎ヲ賣リタランニハ一婦ハ15志,他ノ一婦ハ6志8片ヲ得タルナルベシトイフ. 各婦ノ1斤ノ賣價幾許.

33. $[x^2-5xy-x+6y^2+y=2 \quad x^2+y^2-2x-y=5]$ ヲ解ケ.
但シ初メノ方程式ハ二ツノ一次方程式ニ分解セラル.

34. $[ux-6y=5u-3 \quad 2x+(u-7)y=7u+29]$ ノ x ト y トノ根ガ相等シクナル様ニ u ノ値ヲ定メヨ.

35. 矩形ノ地面アリ,縱 $125\frac{1}{3}$ 間,横 $14\frac{2}{3}$ 間ナリ. 縱ヲ何間減ジ,横ヲ何間増ストキハ,其面積ニ變動ナクシテ,周圍ガ24間減ルベキカ.

36. y ニ就テ一次ノ整式アリ,$y=1.2$ ヲ代入スレバ其數値7.4トナリ,$y=-1.5$ ヲ代入スレバ其數値2トナルトイフ. y ノ値ヲ幾許ニスレバ其式ノ數値ハ,y^2-3 ノ數値ニ等シクナルベキカ.

37. $x^2-(2u-1)x+u=0$ ニ就テ,(一)兩根ノ和ガ5トナル様ニ,(二)兩根ガ相等シクナル様ニ,各 u ノ値ヲ定メヨ.

38. 甲乙ノ二船アリ,200浬隔タレル東西兩港間ヲ,甲ハ東港ヨリ,乙ハ西港ヨリ各一定ノ速サニテ同時ニ出發シ一回ノ往復ヲ爲セシニ往航ノ時出會セル場所ハ復航ノ時出會セル場所ヨリ37.5浬西港ニ近カリキト,二船ノ速度ノ

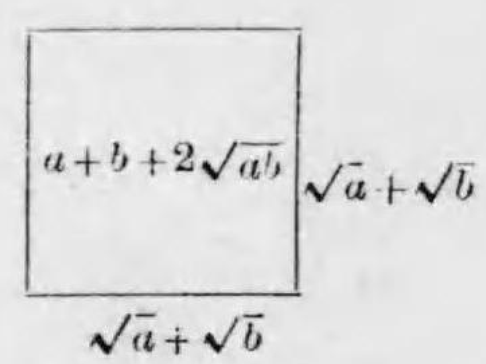
比ヲ求ム．二船何レモ往航ヲ終リタルトキ直ニ復航ノ途ニ就ケルモノトス(解ノ方法ハ任意)．

若又往航ニ出會シタル時ヨリ後，甲ハ其速度ヲ2節減ジ，乙ハ1節增シタルニ，出會セシ時ヨリ甲ハ10時間ニテ西港ニ，乙ハ11時間ニテ東港ニ到着セリトスレバ，各ノ速度如何．

39. 旗竿アリ，其上部風ノ爲ニ折レ其頂上ガ基礎ヨリ20尺ノ地上ニ接着セリ．之ヲ立テ直シタルニ再ビ元ノ所ヨリ5尺下方ヨリ折レ，其頂上ガ前ノ位置ヨリ10尺遠方ニ達シタリ．旗竿ノ高サヲ求ム．

69. $\sqrt{A+\sqrt{B}}$ を變形する例

正方形ノ一邊ノ長サヲ表ス數ガ $\sqrt{a}\pm\sqrt{b}$，$a\pm\sqrt{b}$ ノ形ノ無理數ナレバ其面積ヲ表ス數モ又同ジ形ノ無理數トナル(第58節例六)．今此等ノ各場合ニ於ケル面積ヲ表ス式 $A+\sqrt{B}$ ヲ與ヘテ，其一邊ヲ表ス式ヲ求メントス．



〔例一〕 $\sqrt{8+2\sqrt{15}}$ ハ $\sqrt{5}+\sqrt{3}$ ト變形セラレ，

$\sqrt{8-2\sqrt{15}}$ ハ $\sqrt{5}-\sqrt{3}$ ト變形セラル．

|說明| $\sqrt{x}+\sqrt{y}=\sqrt{8+2\sqrt{15}}$ ト置キテ，兩邊ヲ二乘スレバ $x+y+2\sqrt{xy}=8+2\sqrt{15}$

故ニ $x+y=8,\ xy=15$ ニ適スル樣ニ5ト3トヲ求メテ答ヲ $\sqrt{5}+\sqrt{3}$ トシタルナリ．此等ノ變形ハ次ノ公式ニヨリ簡單ナルモノハ諳算ニテ直ニ其結果ヲ書キ下シ得ルニ至ルコト肝要ナリ．

〔1〕 $\begin{cases}\sqrt{A\pm2\sqrt{B}}=\sqrt{x}\pm\sqrt{y}, \text{ に於て}\\ x+y=A,\ xy=B\end{cases}$

【注意】 $\sqrt{8+2\sqrt{15}}=\sqrt{8+2\times3.872983346\cdots}$

$=\sqrt{15.74596669\cdots}=\mathbf{3.9681}\cdots$ 答

$\sqrt{8+2\sqrt{15}}=\sqrt{5}+\sqrt{3}$

$=(2.23606\cdots)+(1.73205\cdots)=\mathbf{3.9681}\cdots$ 答

又 $\sqrt{8+2\sqrt{15}}+\sqrt{8-2\sqrt{15}}=(\sqrt{5}+\sqrt{3})+(\sqrt{5}-\sqrt{3})$

$=\mathbf{2\sqrt{5}}=2\times(2.23606\ldots\ldots)=\mathbf{4.4721}\ldots\ldots$ 答

此等ノ變形法ハ其近似値ノ計算ニ便利ナリ．

〔例二〕 (一) $\sqrt{9+4\sqrt{2}}=\sqrt{9+2\sqrt{8}}=\sqrt{8}+1$ 答

(二) $\sqrt{6-\sqrt{35}}=\frac{1}{2}\sqrt{24-2\sqrt{140}}=\frac{1}{2}(\sqrt{14}-\sqrt{10})$ 答

(三) $\sqrt{\frac{5-\sqrt{21}}{2}}=\frac{1}{2}\sqrt{10-2\sqrt{21}}=\frac{1}{2}(\sqrt{7}-\sqrt{3})$ 答

〔例三〕 $\begin{cases}\sqrt{8+2\sqrt{6}}=\sqrt{x}+\sqrt{y} \text{ トスレバ}\\ [x+y=8,\ xy=6]\end{cases}$

$\therefore\ z^2-6z+8=0 \qquad \therefore\ z=4+\sqrt{10}$, 或ハ $4-\sqrt{10}$

$\therefore\ \sqrt{8+2\sqrt{6}}=\sqrt{4+\sqrt{10}}+\sqrt{4-\sqrt{10}}$

此結果ハ却テ複雜ナレバ,此場合ニハ原形ヲ變形スルニ及バズ

〔例四〕 $x-2\sqrt{x}=7$ ヲ解クコト.

解 $(\sqrt{x})^2-2(\sqrt{x})-7=0 \quad \therefore\ (\sqrt{x})=1\pm\sqrt{8}$

然ルニ $\sqrt{x}$ ハ實數ナレバ正ノ數ナルヲ以テ, $\sqrt{x}=1-\sqrt{8}$ ハ捨テテ,

$$\sqrt{x}=1+\sqrt{8} \qquad \therefore\ x=9+4\sqrt{2} \quad \text{答}$$

驗算 $(9+4\sqrt{2})-2\sqrt{9+4\sqrt{2}}$

$$=(9+4\sqrt{2})-2(2\sqrt{2}+1)=7$$

〔例五〕 $\sqrt{5+12i}$ ヲ變形スルコト.

解 $\sqrt{5+12i}=\sqrt{x}+i\sqrt{y}$ トシテ兩邊ヲ二乘スレバ　$5+12i=x-y+2i\sqrt{xy}$

$\therefore\ 2i\sqrt{xy}=12i \quad \therefore\ xy=36,$ 又 $x-y=5 \quad \therefore\ 9$ と 4

$\therefore\ \sqrt{5+12i}=\sqrt{9}+i\sqrt{4}=3+2i$ 答

〔例題〕 次ノ各式ヲ簡單ニセヨ(1-3).

1. $\sqrt{12-2\sqrt{35}}+\sqrt{8-2\sqrt{15}}+\sqrt{5-2\sqrt{6}}$

2. $\sqrt{30-12\sqrt{6}} \quad \sqrt{4+\sqrt{15}} \quad \sqrt{\dfrac{15-5\sqrt{5}}{2}}$

3. 次ノ各方程式ニ就テ, x, y ヲ有理數ニテ求ム.

(一) $\sqrt{7+30i\sqrt{2}}=\sqrt{x}+i\sqrt{y}$

(二) $\sqrt{2i}=\sqrt{x}+i\sqrt{y}$

4. 次ノ方程式ヲ解ケ.

$2\sqrt{x}=1+\sqrt{3x} \qquad x+4\sqrt{x}+2=0$

$2x^2-(2+\sqrt{3})x+\sqrt{3}=0$

5. 次ノ各式ヲ簡單ニセヨ.

$\sqrt{4+\sqrt{10}}+\sqrt{4-\sqrt{10}} \qquad \sqrt{\dfrac{a^2-2-a\sqrt{a^2-4}}{a^2-2+a\sqrt{a^2-4}}}$

6. 次ノ各式ノ數値ヲ各小數第三位迄求ム.

$$\frac{\sqrt{12-6\sqrt{3}}}{\sqrt{3}-1},\quad \frac{5}{\sqrt{11-6\sqrt{2}}},\quad \frac{1}{\sqrt{16-2\sqrt{63}}}-\frac{1}{\sqrt{16+2\sqrt{63}}}$$

補　習　問　題

次ノ各式ヲ簡單ニセヨ.

7. $\sqrt{\frac{5}{6}-\frac{1}{3}\sqrt{6}} \quad \sqrt{\frac{9}{2}-\frac{1}{2}\sqrt{77}} \quad \sqrt{2a^2+\sqrt{4a^4-s^2}} \quad \sqrt{-2+2i\sqrt{3}}$

8. $(\sqrt{5}-2)\sqrt{9+4\sqrt{5}} \quad (2\sqrt{2}+\sqrt{6})\sqrt{7-4\sqrt{3}} \quad (\sqrt{3}-\sqrt{2})\sqrt{12+5\sqrt{6}}$

9. $\sqrt{2+\sqrt{2}}+\sqrt{2-\sqrt{2}} \quad \sqrt{a+\sqrt{b}}-\sqrt{a-\sqrt{b}} \quad \sqrt{1+i}+\sqrt{1-i}$

10. $\sqrt{3+4i}+\sqrt{3-4i} \quad \sqrt{4+3i}-\sqrt{4-3i} \quad \sqrt{a+i\sqrt{x^2-a^2}}+\sqrt{a-i\sqrt{x^2-a^2}}$

11. $\sqrt{3+\sqrt{5}}$ ヲ a, $\sqrt{3-\sqrt{5}}$ ヲ b トシテ,次ノ各式ノ値ヲ求ム.

$$a+b \qquad a-b \qquad ab \qquad \frac{b}{a}+\frac{a}{b} \qquad \frac{1}{a}+\frac{1}{b}$$

12. $11\pm\sqrt{84}$ ノ中何レガ $\sqrt{2x+3}-\sqrt{4x-7}=2$ ノ根ナルカ.

13. $3\pm4i$ ノ中何レガ $x-4\sqrt{x}+5=0$ ノ根ナルカ.

次ノ各式ヲ簡單ニセヨ(14-16).

14. $\dfrac{1}{\sqrt{15-2\sqrt{56}}}$ $\dfrac{\sqrt{3+2\sqrt{2}}-\sqrt{2}}{\sqrt{2}+\sqrt{3-2\sqrt{2}}}$ $\dfrac{2+\sqrt{2}}{\sqrt{2}+\sqrt{2+\sqrt{3}}}-\dfrac{2-\sqrt{2}}{\sqrt{2}-\sqrt{2-\sqrt{3}}}$

15. $\dfrac{\sqrt{2}+\sqrt{45}}{\sqrt{2}+\sqrt{7-2\sqrt{10}}}$ $\dfrac{\sqrt{5+2\sqrt{6}}-\sqrt{5-2\sqrt{6}}}{\sqrt{5+2\sqrt{6}}+\sqrt{5-2\sqrt{6}}}$

16. $\dfrac{\sqrt{1+2i\sqrt{6}}-\sqrt{1-2i\sqrt{6}}}{\sqrt{-1+2i\sqrt{6}}+\sqrt{-1-2i\sqrt{6}}}$ $\dfrac{\sqrt{6}-\sqrt{5}-\sqrt{3}+\sqrt{2}}{\sqrt{6}+\sqrt{5}-\sqrt{3}-\sqrt{2}}$

高次方程式

70. 1の立方根其他の例

〔例一〕 **$x^3=1$ を解くこと**……………………(1)

|解| $(x-1)(x^2+x+1)=0$……………………(2)

∴ (A) $x-1=0$ (B) $x^2+x+1=0$

之ヲ解キテ 答 $1,\ \dfrac{-1+i\sqrt{3}}{2},\ \dfrac{-1-i\sqrt{3}}{2}$

|検算| $\left(\dfrac{-1+i\sqrt{3}}{2}\right)^3$

$$=\left(\frac{-1+i\sqrt{3}}{2}\right)\left(\frac{-1+i\sqrt{3}}{2}\right)\left(\frac{-1+i\sqrt{3}}{2}\right)$$

$$=\left(\frac{-1-3-2i\sqrt{3}}{4}\right)\left(\frac{-1+i\sqrt{3}}{2}\right)$$

$$=\left(\frac{-1-i\sqrt{3}}{2}\right)\left(\frac{-1+i\sqrt{3}}{2}\right)\cdots\cdots\cdots(a)$$

$$=\frac{1-i^2.3}{4}=\frac{4}{4}=1$$

〔1〕 **1の立方根の性質** (一) 1の立方根には

$\mathbf{1},\ \dfrac{-1+i\sqrt{3}}{2},\ \dfrac{-1-i\sqrt{3}}{2}$ の三つあり.

(二) 1の立方根の中虚根の一つ $\dfrac{-1+i\sqrt{3}}{2}$ を ω にて表せば他の一つの虚根 $\dfrac{-1-i\sqrt{3}}{2}$ は ω^2 にて表さる.

(三) $1+\omega+\omega^2=0$

〔例二〕 $x^3=8$ ヲ解ケバ,根ハ

$\sqrt[3]{8},\ \omega\sqrt[3]{8},\ \omega^2\sqrt[3]{8}$ 卽チ $2,\ 2\omega,\ 2\omega^2$ ナリ.

|説明| $x^3=8$ ヨリ $\dfrac{x^3}{8}=1$ ∴ $\left(\dfrac{x}{\sqrt[3]{8}}\right)^3=1$ ヲ得.

故ニ例一ニヨリテ

$\dfrac{x}{\sqrt[3]{8}}=1$, 或ハ $\dfrac{x}{\sqrt[3]{8}}=\omega$, 或ハ $\dfrac{x}{\sqrt[3]{8}}=\omega^2$

∴ $x=\sqrt[3]{8}$, 或ハ $x=\omega\sqrt[3]{8}$, 或ハ $x=\omega^2\sqrt[3]{8}$

卽チ $x=2$, 或ハ $x=2\omega$, 或ハ $x=2\omega^2$ ヲ得.

〔2〕 $x^3=\mathrm{A}$ は $\sqrt[3]{\mathrm{A}},\ \omega\sqrt[3]{\mathrm{A}},\ \omega^2\sqrt[3]{\mathrm{A}}$ の三根を有す.

〔3〕 $x^3-\mathrm{A}=(x-\sqrt[3]{\mathrm{A}})(x-\omega\sqrt[3]{\mathrm{A}})(x-\omega^2\sqrt[3]{\mathrm{A}})$

〔例題〕 1. 次ノ各方程式ヲ解ケ.

$x^3=27$ $x^3+64=0$ $8x^3=27$ $x^6-19x^3-216=0$

2. 次ノ各式ヲ三ツノ一次因數ニ分解セヨ.

$x^3-1 \quad x^3+1 \quad a^3-b^3 \quad a^3+b^3$

3. 次ノ各式ノ掛ケ算ヲ行ヘ.

$(1+\omega)(1+\omega^2) \quad \omega^{10} \quad (x+a\omega+b\omega^2)(x+a\omega^2+b\omega)$

〔例三〕 $x^3-2x^2-x+2=0$……(1) ノ一ツノ根ノ 1 ナルコトヲ知リテ解クコト.

[解] $(x-1)(x^2-x-2)=0$…(2)

∴ (A) $x-1=0$

(B) $x^2-x-2=0$

$$\begin{array}{r} x^2-\ x-2 \\ x-1\,\overline{)\,x^3-2x^2-x+2} \\ \underline{x^3-\ x^2} \\ -\ x^2-x \\ \underline{-\ x^2+x} \\ -2x+2 \\ \underline{-2x+2} \end{array}$$

(A), (B) ヲ解キテ

答 $x=1,\ x=-1,\ x=2$

【注意】 α, β, γ ヲ根トスル方程式ハ

$$(x-\alpha)(x-\beta)(x-\gamma)=0$$

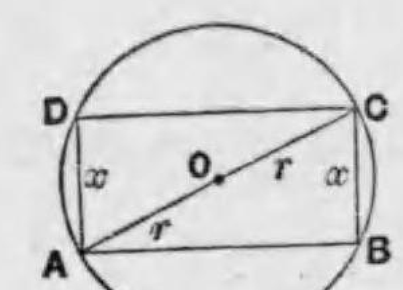
即チ $x^3-(\alpha+\beta+\gamma)x^2+(\beta\gamma+\gamma\alpha+\alpha\beta)x-\alpha\beta\gamma=0$

ナリ. 故ニ前例ノ如ク, x^3 ノ係數ガ 1 ナル三次方程式ガ有理根ヲ有スル場合ニハ, ソレ等ノ根ハ既知項ノ約數ナリ.

〔例題〕 次ノ各方程式ノ有理根ヲ求ム.

$x^3-21x+20=0 \quad x^3-2x^2-7x=4 \quad x(x-1)(x-3)=12$

71. 複二次方程式を解く例



〔例一〕 半徑 r ナル圓ニ內接スル面積 s ナル矩形ノ相隣レル二邊ヲ求ム.

[解] 圖ニ於テ BC ヲ x トスレバ半圓ニ於テノ角 ABC ハ直角ナルヲ以テ $AB=\sqrt{(2r)^2-x^2}$ ナリ. 故ニ矩形ノ面積ヲ較ベテ

$$x\sqrt{4r^2-x^2}=s \text{ …………………(1)}$$

兩邊ヲ二乘スレバ

$$x^2(4r^3-x^2)=s^2 \qquad \therefore\ x^4-4r^2x^2+s^2=0\text{……(2)}$$

∴ $x^4+2sx^2+s^2-(4r^2+2s)x^2=0$ (第 56 節〔5〕).

$$(x^2-x\sqrt{4r^2+2s}+s)(x^2+x\sqrt{4r^2+2s}+s)=0$$

$$\therefore \begin{cases} \text{(A)}\quad x^2-x\sqrt{4r^2+2s}+s=0 \\ \text{或ハ (B)}\quad x^2+x\sqrt{4r^2+2s}+s=0 \end{cases}$$

(B) ヨリノ負根ハ捨テテ, (A) ヨリ二正根ヲ取リ,

$$\frac{1}{2}(\sqrt{4r^2+2s}+\sqrt{4r^2-2s}) \quad ト$$

$$\frac{1}{2}(\sqrt{4r^2+s}-\sqrt{4r^2-2s})$$

方程式 (A) ノ二根ハ實數ナレバ共ニ正ニシテ共ノ積ハ s ニ等シ. 故ニ求ムル矩形ノ二邊ハ

答 $\begin{cases} 2s \gtreqless 4r^2 & \text{トシテ} \\ \dfrac{1}{2}(\sqrt{4r^2+2s}\pm\sqrt{4r^2-2s}) \end{cases}$

吟味 $2s \gtreqless 4r^2$ ナルコトニヨリ,圓ニ內接スル矩形ノ中,最大ナルモノハ正方形ニシノ,其面積ハ外接正方形ノ面積ノ $\frac{1}{2}$ ニ等シ.

應用 $r=25$ $s=1200$ ナレバ

$$\frac{1}{2}(\sqrt{1500+2400}\pm\sqrt{2500-2400})=\frac{1}{2}(70\pm10)$$

故ニ二邊ハ 40 ト 30 トナリ(四十九 17).

方程式(2)ヲ**複二次方程式**トイフ.

複二次方程式の標準の形ハ次ノ如シ

$$ax^4+bx^2+c=0 \qquad (a>0)$$

例二〕 $x^4-5b^2x^2+4b^4=0$ ヲ解クコト(第 36 節〔6〕).

解法 (甲) $\left.\begin{array}{l}(x^4-4b^2x^2+4b^4)-b^2x^2=0 \\ (x^2-bx-2b^2)(x^2+bx-2b^2)=0 \\ \therefore \ (A)\ x^2-bx-2b^2=0 \quad (B)\ x^2+bx-2b^2=0\end{array}\right\}$(甲)

此各ヲ解キテ　　答 $2b,\ -b,\ b,\ -2b$

解法 (乙) $\left.\begin{array}{l}(x^2-4b^2)(x^2-b^2)=0 \\ \therefore \ (A)\ x^2-4b^2=0 \quad (B)\ x^2-b^2=0\end{array}\right\}$……(乙)

此各ヲ解キテ　　答 $2b,\ -2b,\ b,\ -b$

〔例三〕 $x^4-6x^2+1=0$ ヲ解クコト.

(一) 前例ノ(乙)ニヨリテ解ケバ

$$x=\pm\sqrt{3\pm2\sqrt{2}} \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (1)$$

然ルニ第69節ニヨレバ $\sqrt{3+2\sqrt{2}}=1+\sqrt{2}$ ナリ.

故ニ(1)ノ四根ハ $1\pm\sqrt{2},\ -1\pm\sqrt{2}$ ……(2) ナリ.

(二) 前例ノ(甲)ニヨリテ $x^4-6x^2+1=0$ ヲ解ケバ

$$(x^4-2x^2+1)-4x^2=0 \quad (x^2-2x-1)(x^2+2x-1)=0$$

$\therefore$ (A) $x^2-2x+1=0$ (B) $x^2+2x-1=0$

而シテ之ヲ解ケバ $x=1\pm\sqrt{2}$, $x=-1\pm\sqrt{2}$ …(3)

卽チ(2)ト(3)トハ一致ス.

〔例四〕 $\pm\sqrt{6\pm\sqrt{35}}$……(1) ナル四數ヲ根ニ有スル方程式ヲ作ルコト.　　答 $x^4-12x^2+1=0$

說明 $x=\pm\sqrt{6\pm\sqrt{35}}$ ……(2)

$(2)^2$ $x^2=6\pm\sqrt{35}$ $x^2-6=\pm\sqrt{35}$ ……(3)

$(3)^2$ $x^4-12x^2+36=35$ $x^4-12x^2+1=0$ ……(4)

(4) ヲ解法(甲)ニヨリテ解ケバ

$$(x^2-\sqrt{10}x-1)(x^2+\sqrt{10}x-1)=0$$

$$\therefore \ x=\frac{1}{2}(\pm\sqrt{10}\pm\sqrt{14}) \cdots\cdots\cdots\cdots (5)$$

而シテ(1)ノ四數ヲ直接ニ變形スルモ,(5)ノ四數ヲ得(第 69 節).

〔例五〕 $x^4+1=0$……(1) ヲ解クコト.

[解] $(x^4+2x^2+1)-2x^2=0$

∴ $(x^2-\sqrt{2}x+1)(x^2+\sqrt{2}x+1)=0$ ......(2)

∴ (A) $x^2-\sqrt{2}x+1=0$ (B) $x^2+\sqrt{2}x+1=0$

之ヲ解キテ 答 $\frac{\sqrt{2}}{2}(1\pm i)$, $\frac{\sqrt{2}}{2}(-1\pm i)$ ....(3)

【注意】 $x^4+1=0$......(1) ヨリ

$x^4=-1$ ∴ $x^2=\pm i$ ∴ $x=\pm\sqrt{\pm i}$ ...(4)

トスレバ第69節ノ方法ニヨリテ $\sqrt{i}=\sqrt{x}+i\sqrt{y}$ トシテ, x, y ヲ求ムレバ(3)ト同ジ結果ヲ得.

複二次方程式ヲ解クニハ場合ニ應ジテ甲,乙ノ二法ノ中適當ナル一方ヲ選ブベシ.

〔例題〕 次ノ各方程式ヲ解ケ(1-3).

1. $x^4-13x^2+16=0$ $x^4-7x^2+12=0$ $x^4-x^2+1=0$
2. $x^4-21x^2=100$ $x^4=16$ $x^4+16=0$
3. $x^4+a^4=3a^2x^2$ $x^4+3b^2x^2+4b^4=0$ $10x^4-21=x^2$
4. 四數 $\pm\sqrt{3\pm2i\sqrt{10}}$ ヲ根ニ有スル複二次方程式ヲ作レ. 次ニ其方程式ヲ解ケ.
5. 1ノ四乘根(四ツ)ト -1 ノ四乘根(四ツ)トヲ書キ下セ.
6. 次ノ四數ヲ根ニ有スル複二次方程式ヲ作レ.

(一) $\pm\sqrt{4\pm\sqrt{15}}$ (二) $\frac{1}{2}(\pm\sqrt{10}\pm\sqrt{6})$

(三) $\frac{1}{2}(\pm1\pm i\sqrt{7})$ (四) $\pm\sqrt{1\pm6i\sqrt{10}}$

72. 準二次方程式,逆數方程式

〔例一〕 $(x^2+4x+5)^2-12(x^2+4x)-40=0$ ...(1)

ヲ解ケ.

[解] $(x^2+4x)^2+10(x^2+4x)+25-12(x^2-4x)-40=0$

$(x^2+4x)^2-2(x^2+4x)-15=0$ ......(2)

∴ $(x^2+4x-5)(x^2+4x+3)=0$

∴ (A) $x^2+4x-5=0$ (B) $x^2+4x+3=0$

之ヲ解キテ 答 1, -5, -1, -3

方程式(2)ヲ準二次方程式トイフ.

準二次方程式の標準形は $aX^2+bX+c=0$ なり.

〔例二〕 $\frac{x^2}{x+1}+\frac{x+1}{x^2}=\frac{5}{2}$......(1) ヲ解クコト.

[解] $\frac{x^2}{x+1}$ ヲ X ニテ表セバ ......(2)

$X+\frac{1}{X}=\frac{5}{2}$ ∴ $2X^2-5X+2=0$ ......(3)

∴ $(2X-1)(X-2)=0$

∴ (A) $2\cdot\frac{x^2}{x+1}-1=0$ (B) $\frac{x^2}{x+1}-2=0$

之ヲ解キテ 答 $1, -\frac{1}{2}, 1\pm\sqrt{3}$

〔例三〕 次ノ二ツハ解法ノ方針ヲ示スニ止ム.

(一) $(x+1)(x+2)(x+3)(x+4)=120$ ヲ解クコト.

$$(x+1)(x+4).(x+2)(x+3)=120$$

$$(x^2+5x+4)(x^2+5x+6)=120$$

$\therefore\ X(X+2)=120$ ト置キテ

(二) $(x^2+7x+5)^2-3x^2-21x=19$ ヲ解クコト.

$$(x^2+7x+5)^2-3(x^2+7x+5)+15=19$$

$\therefore\ X^2-3X-4=0$ ト置キテ

〔例四〕 $6x^4-35x^3+62x^2-35x+6=0$ (逆數方程式)……(1) ヲ解ケ.

|解| $6(x^4+1)-35(x^3+x)+62x^2=0$…………(2)

x^2 にて兩邊を割れば

$6\left(x^2+\frac{1}{x^2}\right)-35\left(x+\frac{1}{x}\right)+62=0$ ………(3)

$x+\frac{1}{x}$ を y とすれば ………………(4)

$6(y^2-2)-35y+62=0 \quad \therefore\ (2y-5)(3y-10)=0$…(5)

$\therefore$ (A) $2\left(x+\frac{1}{x}\right)-5=0$ (B) $3\left(x+\frac{1}{x}\right)-10=0$

$$\left.\begin{array}{ll} \text{(A)}\ \ 2x^2-5x+2=0 & \therefore\ (2x-1)(x-2)=0 \\ & x=\frac{1}{2},\quad x=2 \\ \text{(B)}\ \ 3x^2-10x+3=0 & \therefore\ (3x-1)(x-3)=0 \\ & x=\frac{1}{3},\quad x=3 \end{array}\right\}\text{答}$$

【注意】 原方程式ノ根ハ$\left(2\text{と}\frac{1}{2}\text{と}\right)$, $\left(3\text{と}\frac{1}{3}\text{と}\right)$ ニシテ各組ノ根ハ互ニ逆數ヲナス. 之ニヨリテ(1)ヲ**逆數方程式**トイフ.

逆數方程式の標準の形ハ次ノ如シ.

$$\begin{cases} ax^2+bx+a=0\ldots(1) \qquad ax^3+bx^2+bx+a=0\ldots(2) \\ ax^4+bx^3+cx^2+bx+a=0\ldots\ldots(3) \end{cases}$$

〔例題〕 次ノ各方程式ヲ解ケ(1—6).

1. $(x^2-x)^2-8(x^2-x)+12=0$
2. $(x^2+x)(x^2+x+1)=42$
3. $x^4-2x^3-7x^2+8x+12=0$
4. $\frac{6x}{2x^2+1}+\frac{2x^2+1}{3x}=3 \qquad x^2+x+\frac{1}{x^2+x}=2\frac{1}{2}$
5. $6x^4+7x^3-36x^2-7x+6=0$
6. $2x^3-3x^2-3x+2=0 \qquad x^3+2x^2+2x+1=0$

73. 無理方程式を解く例

〔例一〕 $\sqrt{5x-1}-\sqrt{8-2x}=\sqrt{x-1}$ ヲ解クコト.

|解| 兩邊ヲ二乘スレバ

$$(5x-1)+(8-2x)-2\sqrt{5x-1}\sqrt{8-2x}=x-1$$

$$\therefore\ x+4=\sqrt{(5x-1)(8-2x)}$$

$$\therefore\ (x+4)^2=(5x-1)(8-2x)$$

$\therefore\ 11x^2-34x+24=0 \qquad (x-2)(11x-12)=0$

$$\therefore\ x=2 \text{ 或ハ } x=\frac{12}{11}$$

驗算 $x=\frac{12}{11}$ トスレバ

$$(\text{左邊})=\sqrt{\frac{60}{11}-1}-\sqrt{8-\frac{24}{11}}=\frac{7}{\sqrt{11}}-\frac{8}{\sqrt{11}}=-\frac{1}{\sqrt{11}}\cdots(1)$$

$$(\text{右邊})=\sqrt{\frac{12}{11}-1}=\frac{1}{\sqrt{11}}\cdots\cdots(2)$$

$\therefore\ \frac{12}{11}$ ハ除分ノ根ナリ.

次ニ $x=2$ トスレバ

$\sqrt{10-1}-\sqrt{8-4}=3-2=1\cdots\cdots(3) \qquad \sqrt{2-1}=1\cdots(4)$

答 $x=2$

$\frac{12}{11}$ ハ $+\sqrt{8-2x}-\sqrt{5x-1}=\sqrt{x-1}$ ノ根ナリ.

〔例二〕 $x^2-5x+6\sqrt{x^2-5x-3}=10$ ヲ解クコト.

解 $x^2-5x-3+6\sqrt{x^2-5x-3}-7=0$

$$\therefore\ (\sqrt{x^2-5x-3}+7)(\sqrt{x^2-5x-3}-1)=0$$

$\therefore$ (A) $\sqrt{x^2-5x-3}+7=0$ (B) $\sqrt{x^2-5x-3}-1=0$

然ルニ $\sqrt{x^2-5x-3}$ ハ實數ナル時ハ正ノ數ナルヲ以テ(A)ハ不可能ナリ. (B)ヨリ 答 $\frac{5\pm\sqrt{41}}{2}$

別解 $\sqrt{x^2-5x-3}=y\cdots(1)$ $\therefore\ x^2-5x-3=y^2\cdots(2)$

トシ,原方程式ヲ $y^2+3+6y=10$ トシテモ解カル.

〔例三〕 $\sqrt{a^2-x^2}+\sqrt{b^2+x^2}=a+b\cdots\cdots(1)$

ヲ解クコト.

解 兩邊ヲ二乘シテ簡單ニスレバ

$$\sqrt{a^2-x^2}\sqrt{b^2+x^2}=ab\cdots\cdots(2)$$

(1)ト(2)トヲ聯立セシメテ

(A) $\begin{cases}\sqrt{a^2-x^2}=a\\ \sqrt{b^2+x^2}=b\end{cases}$ (B) $\begin{cases}\sqrt{a^2-x^2}=b\\ \sqrt{b^2+x^2}=a\end{cases}$

之ヲ解キテ 答 $a\not<0,\ b\not<0$ トシテ, $0,\ \pm\sqrt{a^2-b^2}$

〔例四〕 $\sqrt[3]{x+1580}-\sqrt[3]{x-1136}=4\cdots(1)$ ヲ解クコト.

解 兩邊ヲ三乘スレバ($(a-b)^3=a^3-b^3-3ab(a-b)$ ニヨル)

$$(x+1580)-(x-1136)-3\sqrt[3]{x+1580}\sqrt[3]{x-1136}$$
$$\times(\sqrt[3]{x+1580}-\sqrt[3]{x-1136})=64$$

$\therefore\ 2716-3\sqrt[3]{x+1580}\sqrt[3]{x-1136}(4)=64$

$\therefore\ \sqrt[3]{x+1580}\sqrt[3]{x-1136}=221\cdots\cdots(2)$

(1)ト(2)トヲ聯立セシメテ

(A) $\begin{cases}\sqrt[3]{x+1580}=17\\ \sqrt[3]{x-1136}=13\end{cases}$ (B) $\begin{cases}\sqrt[3]{x+1580}=-13\\ \sqrt[3]{x-1136}=-17\end{cases}$

之ヲ解キテ 答 3333, -3777

〔例五〕 $\sqrt{3x^2-4x+34}+\sqrt{3x^2-4x-11}=9\cdots\cdots(1)$

ヲ解ケ.

[解]　兩邊ニ $\sqrt{3x^2-4x+34}-\sqrt{3x^2-4x-11}$ ヲ掛クレバ

$$45=9(\sqrt{3x^2-4x+34}-\sqrt{3x^2-4x-11})\quad\cdots\cdots\cdots(2)$$

(1) ト (2) トヲ聯立セシメテ

$$\begin{cases}\sqrt{3x^2-4x+34}=7\\ \sqrt{3x^2-4x-11}=2\end{cases}$$

之ヲ解ケバ(何レニヨルモ)　　答 $3,\ -\frac{5}{3}$

〔例題〕 次ノ各方程式ヲ解ケ(1−5).

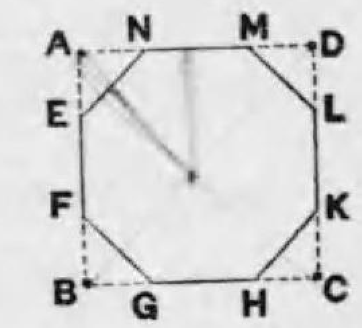
1. $\sqrt{4x-3}+\sqrt{5x+1}=\sqrt{15x+4}$
2. $\sqrt{x+5}=x-3$　　　$x^2+3x+3\sqrt{x^2+3x-2}=6$
3. $\sqrt{145+x}+\sqrt{145-x}=24$　　　$\sqrt{a^2-x}+\sqrt{b^2+x}=a+b$
4. $\sqrt[3]{60-x}+\sqrt[3]{x-11}=\sqrt[3]{4}$　　　$\sqrt[3]{3555+x}+\sqrt[3]{3555-x}=30$
5. $\sqrt{4x+24}+\sqrt{4x+9}=15$　　　$\sqrt{a(x-b)}+\sqrt{b(x-a)}=x$

問題 第五十集

次ノ各方程式ヲ解ケ(1−8).

1. $\sqrt{7x^2-11x+6}+\sqrt{6x^2-11x+15}=2(x+3)$…(第73節例五)
2. $\sqrt[3]{8x+4}-\sqrt[3]{8x-4}=2$
3. $(x-a+2b)^3-(x-2a+b)^3=(a+b)^3$
4. $(\sqrt{x-5}+\sqrt{y+2}=5\quad x+y=16)$

5. $(\sqrt{5-3x+x^2}+\sqrt{5-3y+y^2}=6\quad x+y=3)$
6. $(x+1)(x+3)(x+5)(x+7)=384$
7. $x^4+x^2+1=0$　　　$2\sqrt{x}-\sqrt{2x}=2+\sqrt{2}$
8. $x+\sqrt{x+1}=6$　　　$\sqrt{9x-9}+\sqrt{x+7}=8$
9. 直角三角形アリ,其面積30平方米ニシテ,斜邊ハ他ノ二邊ノ和ヨリ4米小ナリ. 各邊幾許.
10. 一邊ノ長サ a ナル正方形ノ四隅ヲ切リ落シテ作リタル正八邊形ノ一邊ノ長サヲ求ム.



11. 周圍ガ $2a$,底邊ガ $2x$ ナル二等邊三角形ノ面積ヲ s ニ等シカラシムルコトヲ求ム.
12. 與ヘラレタル三角形ノ三邊ヲ a, b, c $(a\geqq b\geqq c)$ トス. 今三邊ガ $a+x, b+x, a+x$ ナル三角形ヲ作リテ,直角三角形ナラシムルニハ x ヲ幾許ニスベキカ. a, b, c ガ (4, 5, 6), (15, 16, 24) ナラバ x 幾許(四七八26).
13. 正方形ABCDノ一邊ADノ延長ノ上ニ一點Pヲ取リテ四ツノ線分ノ和 (PA+PB+PC+PD) ヲ一邊 ABノ5倍ニ等シカラシムルニハPヲ何レノ所ニ取ルベキカ.

14. 矩形 ABCD ノ相隣レル二邊ノ比ヲ **3:4** トス．對角線 BD 或ハ其延長ノ上ニ一點 P ヲ取リテ，二ツノ線分 PA, PC ノ和ヲ一ツノ邊ノ二倍ニ等シカラシムル點 P ノ位置ヲ求ム．

15. 三角形ノ三邊ヲ $\mathbf{2x+3}$, $\mathbf{x^2+2x}$, $\mathbf{x^2+3x+3}$ トシテ各邊ヲ底邊トシタル高サヲ求ム．

補習問題

16. $x=\sqrt[3]{a+\sqrt{a^2+b^3}}+\sqrt[3]{a-\sqrt{a^2+b^3}}$ ナラバ $x^3+3bx-2a=0$ ナルコトヲ驗證セヨ．

次ノ各方程式ヲ解ケ（**17—22**）．

17. $\sqrt{3ax-x^2}-\sqrt{x^2-3bx}=\sqrt{3}\cdot\sqrt{(a-b)x}$

18. $x\sqrt{x-a}+a\sqrt{x+a}=\sqrt{x^3+a^3}$　　$\sqrt{x-1}+\sqrt{3x+1}=\sqrt{2x-6}$

19. $3x^2-12x+18=2\sqrt{x^2-4x+13}$　　$(2x^2-3x+1)^2=22x^2-33x+1$

20. $7\sqrt[7]{x^5}+5x\sqrt[7]{x^3}=66$　　$\sqrt[4]{x^2-7x+19}=\sqrt{x-3}$

21. $\dfrac{x+\sqrt{x^2-1}}{x-\sqrt{x^2-1}}-\dfrac{x-\sqrt{x^2-1}}{x+\sqrt{x^2-1}}=8\sqrt{x^2-1}$　　$\dfrac{1+2\sqrt{4x-7}}{6+5\sqrt{4x-7}}=\dfrac{3-4\sqrt{4x-7}}{3-10\sqrt{4x-7}}$

22. $\begin{cases} x+y+z=2 \\ x^2+y^2=5 \\ xy=2z^2 \end{cases}$　　$\begin{cases} yz+5zx-5xy=11 \\ 2yz-3zx+xy=5 \\ 3yz-2zx-xy=10 \end{cases}$　　$\begin{cases} 3x=\dfrac{y}{z}+\dfrac{z}{y} \\ 4y=\dfrac{z}{x}+\dfrac{x}{z} \\ 5z=\dfrac{x}{y}+\dfrac{y}{x} \end{cases}$

次ノ各式ヲ簡單ニセヨ（**23—24**）．

23. $6\sqrt{8}-5\sqrt{24}-2\sqrt{32}+\sqrt{96}$　　$7\sqrt[3]{54}+3\sqrt[3]{16}+\sqrt[3]{2}-5\sqrt[3]{128}$

24. $\dfrac{\sqrt[3]{36}}{\sqrt{6}}$　$\dfrac{\sqrt{27}}{\sqrt[3]{9}}$　$\dfrac{3\sqrt{3}-\sqrt{6}}{\sqrt{6}-\sqrt{3}}$　$\dfrac{\dfrac{x}{y}-\dfrac{y}{x}}{\sqrt{\dfrac{1}{x}}-\sqrt{\dfrac{1}{y}}}$　$\dfrac{60\sqrt{2}+12\sqrt{3}}{5\sqrt{6}+3\sqrt{2}-2\sqrt{3}}$

25. 次ノ各方程式ヨリ實根ヲ得ルタメノ u ノ値ノ限界ヲ求ム．

（一）$2x+\sqrt{13-4x}=u$　　（二）$x+\sqrt{31+2x-x^2}=u$

次ノ各式ヲ因數ニ分解セヨ（**26—27**）．

26. x^3-x^2-x+1　　$2x^3-7x^2+7x-2$　　$x(x^2-1)-y(y^2-1)+xy(x-y)$

27. $(1-x)(2+x)(4-x)(7-x)-80$　　$x^4-2x^3-7x^2+8x+12$

28. $x^5-10x^2+15x-6=(x-\alpha)^3(x^2+ax+b)$ ガ恒等式トナル樣ニ α, a, b ノ値ヲ定メヨ．

29. 次ノ各方程式ヲ解ケ．

$x^6-1=0$　　$(1-x+x^2)^2=\dfrac{7}{13}(1+x^2+x^4)$

30. $[x+y+z=a,\quad x^2+y^2+z^2=b^2,\quad x^3+y^3+z^3=c^3]$ ナル方程式ノ x, y, z ノ積ノ値ヲ a, b, c ニテ表セ．

31. 次ノ各不等式ヲ解ケ．

$3x^2+3>10x$　　$26x-35>3x^2$　　$\dfrac{(x-3)(x-2)}{(x-6)(x-7)}>0$

32. 次ノ式ノ極大又ハ極小ナル値ヲ求ム．

$2x^2-7x-15$　　$(3-x)(4+x)$　　$\dfrac{x^2-5x+9}{x-5}$　　$2x-\sqrt{x^2-12}$

33. 次ノ各ニ就テ x ノ實根ヲ得ル爲ニ u ノ取ルベキ値ノ限界ヲ求ム．

$(x+a)^3=x^3+ua^3$　　$\dfrac{25}{7-x}-\dfrac{9}{3-x}=u$　　$3x+\sqrt{24x-54-x^2}=u$

第八篇

比及比例

基本の性質

74. 比及比例の基本の性質

〔**例一**〕 1貫目ノ重サハ目方ノ原器ノ重サ(1瓩)ノ四分ノ十五ナリトイフトキノ $\frac{15}{4}$ ヲ「**貫の瓩に對する比**」トイフ.

スベテ圓周 p ハ其直徑 d ノ三倍ト七分ノ一(大約)ナリトイフトキノ $3\frac{1}{7}$ ヲ「**圓周 p の直徑 d に對する比**」トイフ.

同種類の二量或は二數甲乙ありて,甲が乙の幾倍なるか,又は幾分の幾つなるかを表す數(不名數)を**甲の乙に對する比**といふ. 甲は比の前項,乙は比の後項なり.

比ヲ表ス式 **甲:乙** 或ハ $\frac{甲}{乙}$ ヲ**甲の乙に對する比**,或ハ**甲と乙との比**,或ハ**甲對乙**(**比甲對乙**)ト唱フ.

$p:d=22:7$ 或ハ $\frac{p}{d}=\frac{22}{7}$ ヲ**比例**トイフ.

比例(**比例式**)とは,二つの比を表す式の相等しきことを書き表したる等式をいふ.

【**注意 1**】 $p:d=3\frac{1}{7}$, $\frac{p}{d}=3\frac{1}{7}$ ハ何レモ比例トイハレズ,何トレバ右邊ガ比ヲ表ス式ニアラザレバナリ. $p:d=3\frac{1}{7}:1$, $\frac{p}{d}=\frac{22}{7}$ トスレバ各比例ナリ.

今後**比を表す式**トイフベキフ略シテ單ニ**比**トイフ事多シ.

〔1〕 $\begin{cases} a=\frac{c}{d}b \text{ なれば } a:b=c:d \\ a=mb \text{ なれば } a:b=m:1 \end{cases}$

(一) (貫):(瓩)$=15:4$ ハ,貫ヲ瓩ニテ割リテ得ベキ商ハ 15 ヲ 4 ニテ割リテ得ベキ商ニ等シキコトヲ表ス. 此相等シキ商(3.75)ヲ t トスレバ

(貫)=(瓩)$\times t$ $15=4\times t$ ト置カル.

(二) (貫):(瓩)$=15:4$ 卽チ (貫)$=\frac{15}{4}$(瓩) ニヨリテ瓩ヲ 4 等分シタルモノヲ n トスレバ,瓩ハ之ヲ4ッ含ミ,貫ハ之ヲ15含ム. 故ニ

(貫)$=15.n$ (瓩)$=4.n$ ト置カル.

〔2〕 $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$ なれば, $a=bt,\ c=dt$ と置かる.

〔3〕 $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$ なれば, $a=cn,\ b=dn$ と置かる

$\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$ なれば, $\frac{a}{c}=\frac{b}{d}$ なり (更迭の理)

(貫):(瓩)$=15:4$ ナレバ貫ノ4倍ト, 瓩ノ15倍トノ比ハ $15\times4:4\times15$ ニ等シ.

故ニ (貫)$\times4=$(瓩)$\times15$ ナリ.

〔4〕 $a:b=c:d$ なれば $a.d=b.c$ なり. $ad=bc$ なれば $a:b=c:d$, 又 $a:c=b:d$ なり.

説明 〔4〕ハ比例ノ兩邊ノ此ノ値ヲ通分シテ比較スレバ明ナリ.

〔例二〕 (一) 4(貫)$=15$(瓩) ナレバ
8(貫)$=30$(瓩)
0.8(貫)$=3$(瓩) 故ニ $\frac{15}{4}=\frac{30}{8}=\frac{3}{0.8}$

(二) 或職工ノ日給75錢ナレバ,其60日分ノ賃金45圓, 24日分ノ賃金18圓ナリ. 此場合ニ

$$\frac{45}{60}=\frac{18}{24}=\frac{45\pm18}{60\pm24}=\frac{m.45\pm n.18}{m.60\pm n.24}$$

此等ノ分數ガ職工ノ一日分ノ賃金ヲ表スヲ以

テ相等シケレバ,此等ノ分數ガ不名數(比)ナル時モ亦相等シ. 幾ツカノ比ガ互ニ相等シキコトヲ知ルニハ,其各式ガ名數ナル場合ヲ假リルガ便利ナルコトアリ.

$$\frac{nA}{nB}=\frac{A}{B} \qquad \frac{A}{B}=\frac{nA}{nB} \ \cdots\cdots\cdots\cdots〔5〕$$

〔6〕 $\frac{A}{B}=\frac{C}{D}=t$ なれば

$$\frac{A}{B}=\frac{C}{D}=\frac{A\pm C}{B\pm D}=\frac{mA\pm nC}{mB\pm nD}$$

$$=\sqrt[n]{\frac{pA^n+rC^n}{pB^n+rD^n}}=t \ \cdots\cdots \text{(加比の理)}$$

〔系〕 $\frac{A}{B}=\frac{C}{D}=t$ なれば

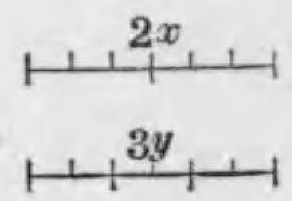
$$\frac{A}{C}=\frac{B}{D}=\frac{A\pm B}{C\pm D}=n$$

$$\therefore\ \frac{A\pm B}{B}=\frac{C\pm D}{D} \qquad \frac{A\pm B}{A}=\frac{C\pm D}{C}$$

$\therefore\ \frac{A+B}{A\sim B}=\frac{C+D}{C\sim D}=q$ と置かる.

〔例三〕 自働車A2時間ノ行程ト,自轉車B3時間ノ行程トガ相等シキ時,各1時間ノ速サ(x里, y里)ノ比ヲ求ム.

[説明] $2x$ ト $3y$ トハ相等シ, 比相等シキ行程ヲ $6n$ トスレバ



$$x:y=\frac{6n}{2}:\frac{6n}{3}=3n:2n=\mathbf{3:2}$$

之ヲ2時ト3時トノ**反比**(逆比)ニ等シトイフ.

甲と乙との反比とは,乙を前項とし,甲を後項とせる比をいふ.

$$[\mathbf{7}]\quad\begin{cases} ax=by \text{ なれば } x=bn,\ y=an \\ ax=by \text{ なれば } x:y=b:a \\ \dfrac{m}{a}:\dfrac{m}{b} \text{ は } b:a \text{ に等し.} \end{cases}$$

之ヲ言葉ニ翻譯スレバ

xのa倍と,yのb倍とが相等しなければ,$x:y$は,其係數の反比$b:a$に等し. 二つの數a,bにて同じ數を割りたる商の比は除數の反比 $b:a$ に等し. 分子の同じ分數の比は分母の反比に等し.

〔例題〕 1. 例二(二)ノ各分數式ニ就テ,其分子分母ノ最大公約數ヲ求ム.

2. 次ノ各比ヲ簡單ニナセ. 又各比ニ就テ其二項ノ最大公度ヲ求ム.

2175:1350 1粁:1里 $3\frac{1}{2}$吋:$4\frac{2}{3}$吋

3. $a:b=3:2$ ナル時,次ノ各比ヲ求ム(整數ノ比ニテ).

$(a+b):(a-b)$ $(3a+2b):(4a-b)$ $4a:9b$ $2a:3b$

4. 次ノ各ニ就テ $x:y$ ヲ求ム.

$\frac{x+y}{x-y}=5$ $\frac{3x+2y}{4x-y}=\frac{13}{10}$ $2x=3y$ $x^2+12y^2=11xy$

5. $\frac{x+60}{5}=\frac{x+24}{3}$ $\frac{x-5}{3}=\frac{x-7}{2}$ $\frac{x+3}{x-1}=\frac{9}{5}$ ノ各ヲ解ケ.

6. $\left(\frac{1}{3}x+\frac{1}{4}y=6 \quad 3x-4y=4\right)$ ニ就テ $x:y$ ヲ求ム.

7. $\begin{cases} x^2-2xy+3y^2=3(x-y) \\ 2x^2+xy-y^2=9(x-y) \end{cases}$ ニ就テ $x:y$ ヲ求ム.

8. A, Bナル二ツノ矩形アリ,其間口ト奥行ハ,Aハ35間ト48間,Bハ42間ト40間ナリ. (一)面積ノ比ヲ求ム. (二)間口ノ比ト,奥行ノ比トヲ求ム. (三)35, 48, 42, 40ヲ用ヒテ比例ヲ八通リ書ケ. 但シ四ツハ他ノ四ツノ左右ヲ置キ換ヘタルモノトス.

75. 前節の續き(連比.複比等)

連比とは,$a:b$, $b:c$ .... を別別に書く代りに $a:b:c:$......... と記したるものをいふ.

〔例一〕　**2.25尺：3.75尺：3尺＝3：5：4** ……………(1)

|説明|　7尺5分ヲnトスレバ2.25尺≒$3n$, 3.75尺＝$5n$, 3寸＝$4n$ト表サルレバナリ.

〔8〕　$x:y:z=a:b:c$ なれば $x=an$, $y=bn$, $z=cn$, 又 $\frac{x}{a}=\frac{y}{b}=\frac{z}{c}=n$ と置くを得. 逆に

$\frac{x}{a}=\frac{y}{b}=\frac{z}{c}$ なれば $x:y:z=a:b:c$ なり.

此等ノ場合ニ於テ二組ノ數 (x, y, z) **と** (a, b, c) **とは互に比例す**トイフ.

二組の數が互に比例すとは,一組の數の中の任意二數の比が他の組の數の中のそれに對應する二數の比に等しきことをいふ.

加比ノ理〔6〕ハ相等シキ比ガ幾ツアル時ニモ成リ立ツ. 即チ

〔系1〕　$\frac{X}{A}=\frac{Y}{B}=\frac{Z}{C}=n$ なれば

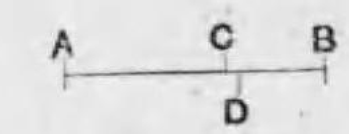
$$n=\frac{lX+mY+nZ}{lA+mB+nC}=\frac{\sqrt[r]{lX^r+mY^r+nZ^r}}{\sqrt[r]{lA^r+mB^r+nC^r}}$$

又 $\frac{X+Y}{A+B}=\frac{Z}{C}$ ニ於テ若シ $X+Y=-Z$ ナレバ, $A+B=-C$ ナリ. 之レニヨリテ

〔系2〕　$\frac{X}{A}=\frac{Y}{B}=\frac{Z}{C}$ なる時,

$X+Y+Z=0$ なれば, **$A+B+C=0$** なり.

〔例二〕　直線ABヲ點Cニ於テ, **AC：CB＝7：5**ニ分チ, 點Dニ於テ. **AD：DB＝5：3**ニ分チタル時, AC, CB, AD, DB, ABノ連比ヲ求ム.



|解|

AC：CB	AD：DB	AB
7：5		：12
	5：3	：8

$4\,)\,12,\ 8$
$\quad\ \ 3,\ 2$

∴　**14：10　：15：9　　：24**　答

ABが24ニテ表サルル様ニシタルナリ.

〔例三〕　金621圓ヲ年齢ガ12, 10, 5ナル三人ノ子供ニ年齢ニ反比例スル様ニ分ツコト.

|説明|　年齢ニ反比例スル様ニ分ツトハ年齢ノ比ガ**12：10**ナレバ其者ノ取リ前ノ比ハ10：12即チ $\frac{1}{12}:\frac{1}{10}$ ニナル様ニ分ツコトナリ. 故ニ三子ノ取リ前ノ比ハ $\frac{1}{12}:\frac{1}{10}:\frac{1}{5}$ 即テ **5：6：12** ナリ.

621圓÷(5+6+12)=27圓

故ニ　　　　答　135圓, 162圓, 324圓

二組の數が互に反比例すとは,一組の數の中の任意二數の比が他の組の數の中,それに對應する

二數の反比に等しきことをいふ.

〔9〕 二組の數が反比例する時は一組の各數の逆數の組は他の組に正比例す.

(x, y, z) ガ (a, b, c) ニ反比例スレバ, (x, y, z) ハ $\left(\frac{1}{a}, \frac{1}{b}, \frac{1}{c}\right)$ ニ正比例ス〔前節(7)〕.

連比例 $a:b=b:c=c:d=\ldots\ldots$ なる時, $a, b, c\ldots\ldots$ は**連比例をなす**といふ.

例ヘバ 24:12, 12:6, 6:3 ハ何レモ 2:1 ニ等シ, 故ニ相等シ. 卽チ 24, 12, 6, 3 ハ**連比例をなす**.

三ツノ數 a, b, c ガ連比例ヲナスコトヲ單ニ比例ヲナストイヒ, b ヲ a ト c トノ**比例中項**, c ヲ a, b ノ**第三比例項**トイフ.

正ノ數ノミ論ズル場合ニ於テ,二數 p, q ノ比例中項 x ヲ p, q ノ**相乘平均數**トイフ.

イカニモ $p:x=x:q$ ∴ $x=\sqrt{pq}$ ナレバナリ.

〔例四〕 $a:b=3:2,\ b:c=4:5$ ナレバ $a:c$ 如何.

説明 $c\times\frac{4}{5}$ ガ b ニ等シク,之ニ更ニ $\frac{3}{2}$ ヲ掛ケタルモノガ a ニ等シキユヱ, $c\times\left(\frac{4}{5}\times\frac{3}{2}\right)=c\times\frac{6}{5}$ ガ a ニ等シ(乘法結合定則).

答 $a:c=6:5$

(6:5) ヲ (3:2) ト (4:5) トノ**複比**トイフ.

複比 二つ以上の比の積を其等の**複比**といふ.

〔10〕 二つの比 $a:b$ と $b:c$ との複比は $a:c$ に等し. $a:b=b:c$ なれば $b=cr,\ a=cr^2$ と置くを得.

$\left\{\begin{matrix}a:b\\b:c\end{matrix}\right.$ 或ハ $\left.\begin{matrix}a:b\\b:c\end{matrix}\right\}$ ハ各 $(a:b)$ ト $(b:c)$ トノ**複比を表す式**ナリ. 次ノ各ヲ**複比例**トイフ.

$$\left.\begin{matrix}a:b\\b:c\end{matrix}\right\}=a:c \qquad \left.\begin{matrix}3:2\\4:5\end{matrix}\right\}=6:5 \qquad \left.\begin{matrix}a:b\\b:c\end{matrix}\right\}=\left\{\begin{matrix}3:2\\4:5\end{matrix}\right.$$

複比例(複比例式)とは,複比の式が單比の式に等しきこと,或は二つの複此の式が相等しきことを記したる等式をいふ.

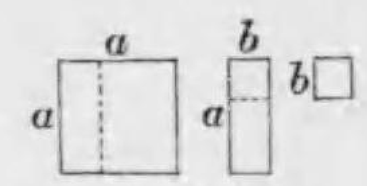
【注意】 或與ヘラレタル複比ヲ求ムトハ其複比ニ等シキ單比ノ式ヲ求ムルコトナリ. **複比を表す式**トイフベキヲ略シテ單ニ**複比**トイフ.

〔例五〕 (一) $\left.\begin{matrix}35:33\\27:49\\3\frac{2}{3}:4\frac{1}{2}\end{matrix}\right\}=10:21$ (二) $\left.\begin{matrix}a:b\\a:b\end{matrix}\right\}=a^2:b^2$

説明 (一) ハ $\dfrac{35}{33}\times\dfrac{27}{49}\times\dfrac{3\frac{2}{3}}{4\frac{1}{2}}$ ヲ求メ, (二) ハ $\dfrac{a}{b}\times\dfrac{a}{b}$ ヲ求メタルナリ. (二) ハ次ノ如クニモ説明セラル.

$a:b=a.a:a.b$ ....(1)

$a:b=\ \ a.b:b.b.$ ....(2)



(1) ト (2) トニ就テ, 左邊ノ複比ト, 右邊ノ複比トヲ比ベテ $\left.\begin{matrix}a:b\\a:b\end{matrix}\right\}=a^2:b^2$

相等シキ二ツノ比ノ複比ヲ元ノ各比ノ**二乘比**, 相等シキ三ツノ比ノ複比ヲ元ノ各比ノ**三乘比**トイフ.

$\dfrac{a}{b}=\dfrac{c}{d}$ ナル時各比ノ二乘比ハ $\dfrac{a^2}{b^2}=\dfrac{ac}{bd}=\dfrac{c^2}{d^2}$ ナリ.

前節 (4) ニ於テ知レル如ク, 二ツノ比ガ相等シケレバ, 一ツノ比ト他ノ比ノ反比トノ複比ハ**等比** (卽チ 1:1) ニ等シ.

〔**例六**〕 次ノ複比例ヲ解クコト.

$\left.\begin{matrix}4\frac{1}{2}:3\\8:5\frac{1}{2}\end{matrix}\right\}=5.4:x$ **解** $x=\dfrac{3.11.54.2}{2.10.9.8}=2\dfrac{19}{40}$ 答

〔**例題**〕 **1.** $a:b=3:4,\ b:c=5:6,\ c:d=8:9$ ナレバ a, b, c, d ノ連比如何.

2. 直線 AD ヲ二點 B, C ニテ三ツノ部分ニ分チ, AB : BD = 3 : 7, AC : CD = 5 : 3 ナラシトル時ハ, AB, BC, CD ノ連比如何. BC = 6.5 粍ナラバ AD 幾許.

3. $[3x+5y-7z=0\quad 11x-13y+17z=0]$, $x:y:z$ 如何.

次ノ各ヲ解ケ (**4**—**5**).

4. $[x:y:24=9:5:4]\quad [x+36:x+12=9:5]$

5. $[x\ \ y:z=3:4:5\quad 5x+3y-2z=85]$

6. b ガ a ト c トノ比例中項ナレバ $(a+b+c)(a-b+c)=a^2+b^2+c^2$ ナルコトヲ驗證セヨ.

7. 年齡ガ 11 歲, 8 歲, 6 歲ナル三人ノ兄弟ニ, (一) 繪葉書 303 枚ヲ其年齡ニ反比例シテ分ツコト. (二) 土地 3 町 3 畝ヲ年齡ニ比例シテ分ツコト.

8. (一) $\dfrac{a}{b}=\dfrac{c}{d}=\dfrac{e}{f}$ ナル時, (二) $\dfrac{x}{y}=\dfrac{y}{z}=\dfrac{z}{u}$ ナル時, 此等ノ三乘比ヲ幾通リモ作レ. 又文字ニ適宜ノ數値ヲ入レテ其等ノ相等シキコトヲ驗セ.

9. $5\frac{1}{7}{}^{日}:x^{日}=\begin{cases}24^{人}:28^{人}\\126^{円}:882^{円}\end{cases}$ ヲ解ケ.

10. 比及比例ノ基本ノ性質ヲ復唱セヨ [(1)—(10)].

比及比例の應用

76. 互に正比例す,或は互に反比例すといふ例

〔例一〕 1分間ノ速サ6.5町ナル汽車ノx分間ノ行程ヲy町トスレバ $y=6.5x$……(A) ナリ.

今xヲ1, 2, 3,………12トスレバ,之ニ對應スルyノ値ハ表ノ如シ

時間x(分)	行程y(町)
1	**6.5**
2	13
3	19.5
4	**26**
5	32.5
6	39
7	45.5
8	52
9	58.5
10	65
11	71.5
12	78
……	……

例ヘバ**4分間の行程が26町**ナルコトヲ標準トシテ考フルモ,時間ガ其2倍(8分), 3倍(12分)‥トナレバ,其行程モ**26**町ノ2倍,3倍‥トナル.

一定ノ速度ニテ駛ル汽車ノ或時間xニ行ク行程yト,其時間xトハ**互に正比例す**.

相伴ひて増減する二つの數x, yの標準の關係を知りたる時其一方の數xが元の**2**倍,**3**倍,……となる時,他の一方の數yの之に對應するものも

亦其元のものの**2**倍,**3**倍となる時は,x, y**は互に正比例す**といふ.

yガxニ正比例スルコトヲ$y \propto x$ニテ表ス.

〔例二〕 **4**分間ニ**26**町駛ル汽車ノ**20**分間ノ行程幾許.

説明 時間ガ$\frac{20}{4}$倍ナルユヱ,

$$26^{町}\times\frac{20}{4}=130\text{ 町}\quad 答.$$

1分間ノ行程$\frac{26}{4}$町ナルユヱ,x分間(何分間ニテモ)ノ行程yハ$y=\frac{26}{4}x$ニテ求メラル. 故ニ$\frac{26}{4}\times 20=130$(町)ガ答ナリ. 此算法(**歸一法**)ニ對シテ初メノ方ヲ**比例解法**トイフ.

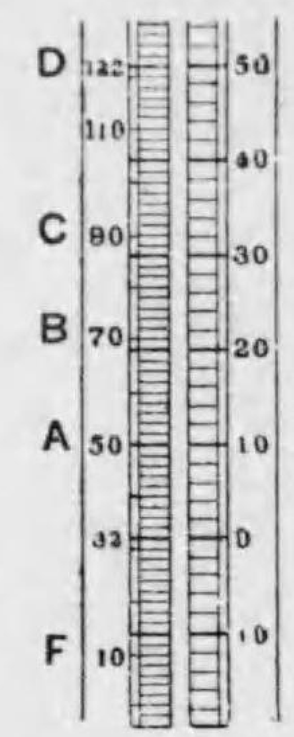
〔1〕 x, yが互に**正比例**すれば,其間の關係式は　$y=kx$,或は$x=k'y$　$(kk'=1)$

〔例三〕 攝氏寒暖計ノ溫度x°ニ對應スル華氏寒暖計ノ溫度ヲy°トスレバ

$$y=\frac{9}{5}x+32 \quad\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\text{(B)}$$

此場合ニyノ增加ト,xノ增加トハ互ニ正比例ス, 卽チxガ1度增セバyハ$\frac{9}{5}$度增ス.

今攝氏 a 度ニ對應スル華氏ノ溫度ヲ b 度トスレバ



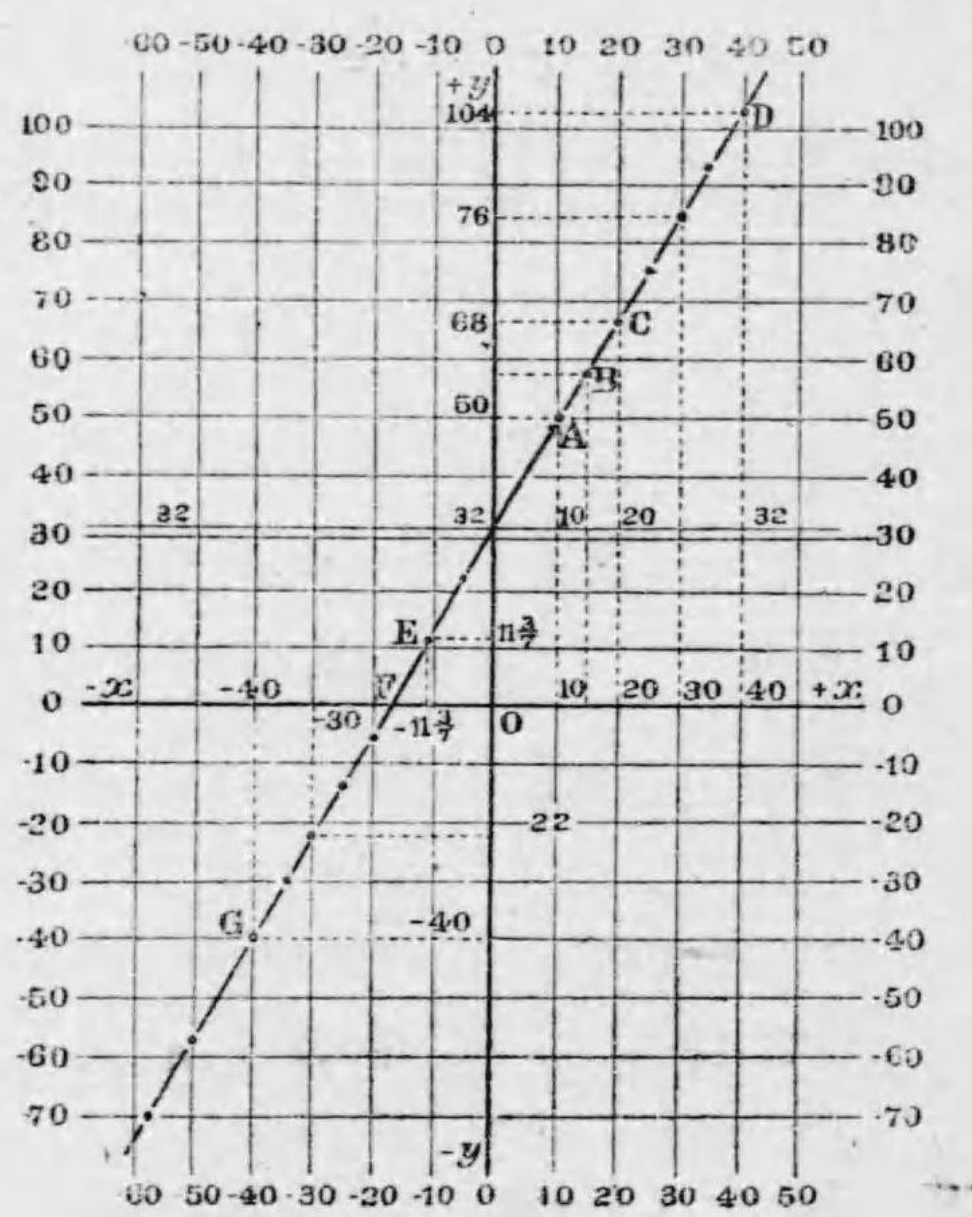
$$b=\frac{9}{5}a+32 \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (1)$$

$$\therefore\ (B)-(1)\quad (y-b)=\frac{9}{6}(y-a) \quad \cdots\cdots\cdots (2)$$

卽チ y ノ增シ $(y-b)$ ト x ノ增シ $(x-a)$ ト ハ互ニ正比例ス.

【注意 1】 x, y ノ對應スル數値ハ第一圖表ノ外ニ第二圖表ノ如ク表サル. 第二圖表ナ x, y ノ關係式ノぐらふ(**方程式** $y=\frac{9}{5}x+32$ **の軌跡**) トイフ.

第二圖表ニ就テ, 點 **A** ニヨリテ攝氏 10° ハ華氏 50° ニ當ルコトガ分ル. $(x=10, y=50)$ ナ **點 A の座標**トイフ, 點 **G** ニヨリテ攝氏 −40° ハ華氏 −40° ニ當ルコトガ分ル, (−40, −40) ハ點 G ノ座標ナリ.



【注意 2】 單立ノ二元一次方程式

$ax+by=c$ ノ根ノ組ハ不定ナレドモ之ナ變形シテ $y=\left(-\frac{a}{b}\right)x+\left(\frac{c}{b}\right)$ トシテ前例ノ如ク考フレバ y ノ增加ハ x ノ增加ニ正比例ス(**二十**規則). 故ニ其**ぐらふ**ハ又直線ナリ.

〔例四〕 例一ノ場合 $(y=6.5x)$ ニ就テ $x+y$ ト $y-x$ トハ互ニ正比例スルコトヲ證明セヨ.

説明 x ハ時間ヲ, y ハ距離ヲ表ス數ナレバ之ヲ加フルコトナキ譯ナレドモ,此處ニテハ x モ, y モ不名數ト考フルヲ以テ之ヲ加フルコトヲ得ルモノナリ.

サテ互ニ相伴フテ變化スル二ツノ數 x, y ハ恒ニ關係式 $x=6.5x$ ニ適合スルヲ以テ, 其對應スル値ニ就テ $x+y : y-x$ ヲ求ムレバ

$$x+y : y-x=(x+6.5x) : (6.5x-x)=\mathbf{15 : 11}$$

故ニ $x+y$, $y-x$ ハ互ニ正比例ス.

〔例五〕 面積ガ 1200 坪ナル矩形ノ横ノ長サヲ x 間,縦ノ長サヲ y 間トスレバ

$$y=\frac{1200}{x} \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (C)$$

今 x ヲ 10, 20, 30........60 トスレバ,之ニ對應スル y ノ値ハ表ノ如シ.

横の長さx(間)	縦の長さy(間)
10	120
20	60
30	40
40	30
50	24
60	20
………	

横10間,縦120間ナルコトヲ標準トスルニ,横ノ長サxガ2倍,3倍………トナレバ,之ニ對應スル縦ノ長サyハ元ノ$\frac{1}{2}$, $\frac{1}{3}$………トナル. 卽チyトxトハ互ニ反比例ス.

伴相ひて增減する二つの數x, yの標準の關係を知りたる時,其一方の數xが其元の數の2倍, 3倍………となる時,他の一方の數yの之に對應する値は其元の數の$\frac{1}{2}$, $\frac{1}{3}$………となる時は, x, y **は互に反比例**(**逆比例**)すといひ,之を $y\propto\frac{1}{x}$ にて表す.

〔**2**〕 x, y が互に**反比例**すれば其間の關係式は　$y=\frac{k}{x}$　或は　$x=\frac{k}{y}$　或は　$xy=k$

〔**例題**〕 **1.** $y=6.5x$ ナルトキハ, y^2-x^2 ハ xy ニ比例スルコトヲ證明セヨ.

2. 列車アリ長サ220碼ノ鐵橋ヲ全ク通過スルニ20秒ヲ費シ,長サ330碼ノ鐵橋ヲ全ク通過スルニ28秒ヲ費ストキ,此列車ガx碼ノ鐵橋ヲ全ク通過スルニ要スル時間ヲy秒トスレバ, yトxトノ關係式如何.

3. 互ニ反比例スル甲乙二ツノ數アリ,甲ガ15ナル時,乙ハ16ナリ. 甲ガ5增サバ乙ハ幾許減ズベキカ.

77. 複比例の例

〔**例一**〕 急行列車ガ7哩駛ル間ニ普通列車ハ5哩駛リ,急行列車ガ375哩ヲ行クニ15時20分カカルトスレバ普通列車ガ108哩ヲ行クニ要スル時間(z)幾許.

解

	(急行車)	(普通車)	
x	7	: 5	反
y	375哩	108哩	正
z	$15\frac{1}{3}$時	z時	

(一) 一定距離ヲ行クニ要スル時間ハ**速度に反比例す**.

(二) 一定速度ニテ或距離ヲ行クニ要スル時間ハ**其距離に正比例す**.

故ニ　$z=15\frac{1}{3}\times\frac{7}{5}\times\frac{108}{375}=6.1824$　∴ **6時11分弱**　答

説明 次ノ三ツノ場合ヲ比較シ

甲	丙	乙
7	7	5
375	108	108
$15\frac{1}{3}$	z'	z

$$\begin{cases} z:z'=7:5 \\ z':15\frac{1}{3}=108:375 \end{cases}$$

ニヨリテ考フレバ上ノ解法ヲ諒解シ得ベシ[第75節(10)]

急行列車(或時間ノ速サ7哩)ガ1哩ヲ行クニ要スル時間ハ$\frac{15\frac{1}{3}\text{時}}{375}$ニシテ,速サ1哩ノ列車ガ1哩ヲ行クニ要スル時間ハ$\frac{15\frac{1}{3}\times7}{375}$時ナリ……(a)

故ニ速サガ5哩,距離ガ108哩ナレバ

$$z=\frac{15\frac{1}{3}\times7}{375}\div5\times108=6.1824\ldots\ldots$$ヲ得.

是(歸一法)ニ對シテ初メノヲ比例解法トイフ.

(a)ニヨレバ速サガx哩,距離ガy哩ナル時ハ

$$z=\frac{15\frac{1}{3}\times7}{378}\div x\times y \qquad \therefore\ z=\frac{343}{1125}\cdot\frac{y}{x}\ldots\ldots(b)$$

相伴ひて増減する三つの數x, y, zありて,zがxに反比例し,yに正比例するときは,zはxの反比とyの正比とに複比例すといひ,之を$z\propto\frac{y}{x}$にて表す.

[3]　zがxに**反比例し**,yに**正比例**する時のx, y, zの間の關係式は

$$z=k\frac{y}{x}\quad\text{或は}\quad xz=ky$$

〔例二〕　氣體ノ立積vハ其絶對度tニ正比例シ,ソレガ受クル壓力pニ反比例ス.　今或氣體アリテ,ソレガ受クル壓力ガ1.5氣壓ニシテ,其絶對溫度533°ナルトキ其立積ガ200立方寸ナリ.　サスレバ,絶對溫度ガ573°,壓力ガ1.8氣壓ナルトキ,此氣體ノ立積如何.

解　$v=200\times\frac{573}{533}\times\frac{1.5}{1.8}=$**179.2弱**(方立寸)　答

〔例題〕　1. A,Bナル二ツノ矩形ノ地面アリ,其面積ノ比2:3ニシテ,間口ノ比8:9ナリ.　Aノ奥行12間ナラバ,Bノ奥行幾間ナルカ.

2. 速サノ比ガ$(x+4:3)$ナル甲,乙二人池ノ周圍ヲ一周スルニ同時ニ同一點ヨリ反對ノ向キニ出發シ,途中ニテ出遇ヒ,ソレヨリ甲ハ$(3-x)$分,乙ハ4分時間ニシテ出發點ニ歸着セリトイフ.　xヲ求ム.

3. 工事受負人アリ百四十四日間ニ四哩四十四鎖ノ鐵道線路ヲ敷設センコトヲ契約シ八十日間

九十四人ノ工夫ヲ使役シテ漸ク二哩二十八鎖ヲ成セリト云フ,期日迄ニ完成セシニハ工夫幾人ヲ増加スベキカ.

4. 球ノ表面積 s ハ半徑 r ノ平方ニ比例シ,體積 v ハ半徑 r ノ立方ニ比例スルトキ s ト v トノ關係式如何.

5. 汽車アリ,其機關車ダケナラバ,其速サ1時間ニ m 哩ニシテ,ソレニ列車ヲ連結スル時ハ其速サノ減小スル量ハ,連結セシ列車ノ數 x ノ平方根ニ比例ス. ヨリテ其汽車ノ速サ v ト m ト x トノ間ノ關係式如何.

6. $y \propto \frac{1}{x^2}$ ニシテ, $x=8$ ナル時, $y=6\frac{1}{4}$ ナリ. x ガ 10 ナレバ y 幾許ナルカ.

78. 比例配分の例

〔**例一**〕 或工場ノ職工男子32人,女子60人,子供48人アリテ,日日支拂フ處ノ賃金總計70圓ナリ. 今各職工賃金ノ割合,男5人分ハ女8人分ニ等シク,女三人分ハ子供5人分ニ等シ. 各1人ノ日給如何.

解

$$\begin{array}{r} 8:5 \\ 5:3 \\ \hline \therefore\ 8:5:3 \end{array}$$

各1人ノ日給ハ $8n$, $5n$, $3n$ ニテ表サル

$$8n\times32+5n\times60+3n\times48=7000$$

$\therefore\ n=10$　　答　男80錢,女50錢,子供30錢

此算法ヲ**比例配分**トイフ.

比例配分とは, $x:y:z:\ldots\ldots=a:b:c:\ldots\ldots$ 且 $lx\pm my\pm nz\ldots\ldots=\mathrm{M}$ なる場合の問題を解くことなり.

〔**例二**〕 甲乙二ツノ相隣レル地面アリ,其面積ノ比 **23:22** ナレドモ,乙ヨリ甲ニ150坪與フレバ共比ハ **17:13** トナルベシトイフ. 面積合計幾許.

解

$$\begin{array}{ccccc} x:y & & (x+150):(y-150) & & (x+y) \\ 23:22 & & & & 45 \\ & & 17:13 & & 30 \\ \hline 46:44 & : & 51:39 & : & 90 \end{array}$$

$$15\,\underline{)\,45,\ 30}$$
$$\quad\ 3,\ \ 2$$

(第75節例二)

$$150\times\frac{90}{51-46}=\mathbf{2700}\ (\text{坪})$$ 答

〔**例三**〕 新橋神戸間ヲ1時間25哩ノ速サノ急行列車ニテ行クノト,1時間20哩ノ速サノ普通列車ニテ行クノトハ時間ニ於テ3時45分ノ差アリ. 新橋神戸ノ間距離ヲ求ム.

[解] 各列車ノ要セシ時間 x, y ノ比ハ其速サ25哩ト20哩トノ反比ニ等シ.

$x:y=20:25 \quad \therefore \quad x:y:x\sim y=\mathbf{20:25:5}$

$(x\sim y)\div 5=3$時45分$\div 5=45$分……公度

急行列車ノ時間 45分$\times 20=15$時

25哩$\times 15=$**375**哩 答

〔例題〕 1. 金3000圓ヲ甲,乙,丙,丁ノ四人ニ分ツニ,甲ト乙トハ3ト4トノ如クシ,乙ノ7倍ト丙ノ3倍ト丁ノ $\frac{2}{3}$ トハ互ニ相等シカラシメントス. 甲ノ所得如何.

2. 三角形ABCノ三邊BC, CA, ABヲ21, 20, 13トス, 角Aノ二等分線及,外角Aノ二等分線ガ邊BC及其延長ト交ル點ヲD, Eトス. BD, DC, BE, CE,及DEヲ求ム(作圖セヨ). 但シ,

BD : DC = AB : AC = BE : CE.

3. 或汽船ガ河流ヲ上下シテ,甲乙兩地間ヲ往復スルニ毎時ノ速サ上リハ6哩,下リハ9哩ニシテ,一往復ハ3時15分ヲ費ストイフ. 甲乙兩地間ノ距離ヲ問フ.

4. 空氣百容積ノ中窒素八十分,酸素二十分ヲ含ミ,

同容積ニテ窒素ト酸素トノ目方ノ割合ハ14:16ナリ. 然ラバ空氣千瓦ノ中ニ窒素酸素各何瓦ヲ含ムカ.

5. $y=kx+c$ ナル形ノ方程式ニ於テ, $x=0$, $y=m$; $x=1$, $y=n$ $(n<m)$ ナル根ノ組ヲ有ス. x ガ幾許ノ時 y ハ零トナルカ(二十規則).

6. $(2-x)(3-x)+(1-8x)(1-3x)$, $(1-5x)^2$ ノ兩式ノ差ヲ y トシ,前題ノ方法ニヨリテ, y ヲ0トナラシムベキ x ノ値ヲ求ム(整差法).

79. 混合法の例

〔例一〕 1圓ニ付48合ノ上米ト,56合ノ下米トヲ混合シテ,平均1圓ニツキ51合ニ賣ラントス. 上米幾圓分ト下米幾圓分トヲ混合スベキカ.

[解] $\mathbf{51}\left|\begin{array}{c|c}\mathbf{48} & \mathbf{5}\\ \mathbf{56} & \mathbf{3}\end{array}\right.$ 答 **上米5圓分,下米3圓分**

[説明] 上ノ算法ハ次ノ如キ配置ヲ簡單ニシタルモノナリ.

	1圓の相場	1圓に付損得	混合金高の比
上米	48合	3合損	5
混合米	51合		
下米	56合	5合得	3

$\therefore$ (上米):(下米) $=5^{円分}:3^{円分}$

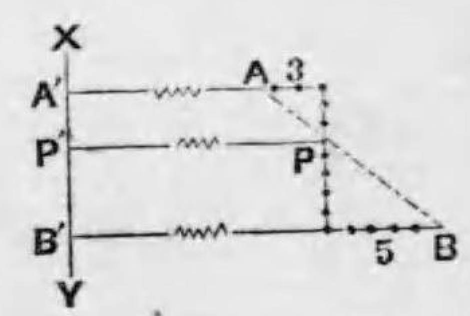
混合ノ升數ノ比ハ $(48^{合}\times 5):(56^{合}\times 3)=\mathbf{10:7}$

最初ヨリ升數ノ比ヲ求メンニハ,次ノ如クス.

$\frac{1}{51}$	$\frac{1}{48}$	$\frac{5}{51\times 56}$	5×48	10
	$\frac{1}{56}$	$\frac{3}{51\times 48}$	3×56	7

$\therefore$ (下米):(下米) $=\mathbf{10:7}$ (桝數ノ比)

【注意 2】 例一ニヨレバ一直線XYノ同ジ側ニ一直線上ニアル三點A, P, BヨリXYマデノ距離A'A, P'P, B'Bガ48, 51, 56ナル時, P'Pノ長サハA'AトB'BトヲPB:PA (=5:3)ノ割合ニ取リテ平均シタルモノニ等シ. 卽チ$P'P=\dfrac{A'A\times PB+B'B\times PA}{AP+PB}$ナルコトガ分ル. 此事柄ハ幾何學ニアリテ應用廣シ.



〔例二〕 1斤ノ價65錢, 70錢, 85錢ナル三種ノ茶ヲ如何ナル割合ニ混合スレバ1斤80錢ノ茶ヲ得ベキカ.

解

80錢	**65錢**	5	1			**1**	65錢ノモノ **1**
	70錢			5	1	**1**	70錢ノモノ **1**
	85錢	15	3	10	2	**5**	85錢ノモノ **5**

ノ割合

說明 混合スベキ原料ノ三種ノ內價高キ物ト, 安キ物トヲ二種宛, (65錢ト85錢), (70錢ト85錢)ヲ選ビ出シテ, 例一ニ依リテ別別ニ共割合(1:3), (1:2)ヲ求メ, 85錢ニ屬スル二ツノ項3ト2トヲ加ヘ合セテ5トシ, 求ムル割合**1:1:5**ヲ得タルナリ.

(1:3)ノ代リニ$(m:3m)$ヲ取リ, (1:2)ノ代リニ$(n:2n)$ヲ取リテモヨキユヱ, 混合ノ割合ハ, $\mathbf{m:n:(3m+2n)}$ナリ.

答 $(\mathbf{1:1:5})$ 或ハ $(\mathbf{m:n:3m+2n})$

〔例三〕 前例ニ於テ下茶ト中茶トヲ**1:2**ノ割合ニ取ル時ノ割合ヲ求ム.

解 $(m:n:3m+2n)$ニ於テ$m:n=1:2$トシテ

答 **1:2:7**

別解 求ムル割合ヲ$(\mathbf{1:2:x})$トシ, 例一ノ說明ノ如ク損益相殺セシムル樣ニ考ヘテ

$(85-80)x=(80-65)\times 1+(80-70)\times 2 \quad \therefore\ x=7$

答 **1.2:7**

〔例題〕 1, 甲乙二種ノ銀塊アリ. 其含ム銀ト銅トノ割合甲ハ91:9乙ハ43:7ナリ. 此二ツ

ヲ如何ナル割合ニ取リテ熔解スレバ其中ニ含マルル銀銅ノ割合 9:1 トナルベキカ.

2. 本邦標準金ノ品位ハ 0.9 ナリ. 之ト純金トヲ如何ナル割合ニ熔和スレバ英國ノ標準金二十二金$\left(\text{卽チ全量ノ}\ \frac{22}{24}\ \text{ノ純金ヲ含ム}\right)$トナルカ.

3. 品位 0.75, 0.57, 0.40 ナル三種ノ銀塊アリ. 今此等ノ銀塊ヲ熔和シテ品位 0.626 ノ銀塊100匁ヲ造ラントス. 熔和スベキ各種ノ銀塊ノ目方幾許(一ト通リ答ヘヨ).

4. 全國中學校ノ最近三年間ノ卒業生ノ平均年齢ハ 18年6ヶ月, 18年10ヶ月, 18年3ヶ月ニシテ其人數ハ $25n$, $24n$, $28n$ ナリ. 三年間ノ卒業生ノ總平均年齢ハ 18年何ヶ月ナルカ.

5. 2% ノ鹽分ヲ含ム海水ヨリ其幾分ノ水ヲ蒸發セシメナバ 18% ノ鹽水ヲ含ム鹽水ヲ得ベキカ

6.7.28. The end

補習問題

6. 50錢, 20錢, 10錢ノ三種ノ銀貨取リ混ゼ100箇アリ. 此金額24圓50錢ナルトキハ各幾箇ナルカ(一通リ).

7. 北半球ニ於テ海陸ノ面積ノ比 50:21 ニシテ, 地球表面ニ就テ其比 3:1 ナリ. 南半球ニ於ケル其比幾許ナルカ.

8. z ハ x, y ノ各ニ正比例ス. x ガ a, y ガ b ナル時, z ノ値ヲ c トスレバ, z, x, y ノ間ノ關係式如何.

9. $x+y$ ガ $x-y$ ニ正比例スル場合ニハ, x, y ハ互ニ正比例スルコトヲ證明セヨ.

10. 深サ 505 米ノ坑底ニテハ溫度 25° ニシテ, 深サ 28 米ノ坑底ニテハ 12° ナリ. 溫度ノ增シヲ深サノ增シニ比例ストセバ, (一) 溫度 18° ナル水ハ深サ幾米ノ所ヨリ湧出スルカ. (二) 又深サ 300 米ノ坑底ノ溫度何度ナルベキカ.

11. $[x+1:y+1:x+y=3:4:5]$ ヲ解ケ.

12. $\left[\frac{1}{3}y=\frac{1}{2}x-1 \quad \frac{1}{4}y=\frac{2}{5}x-1\right]$ ヨリ $x:y$ ヲ求ム.

比例式の證明法

80. 比例式を證明する例

〔**例一**〕 比例ヲナス四ツノ正ノ數 a, b, c, d ノ中, a ガ最大ナレバ $a+d>b+c$ ナリ.

證明 $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$ [假設ニヨリ]

$\therefore \quad =\frac{a-c}{b-d}$ [加比ノ理]

然ルニ a ハ最大ナルヲ以テ各比ハ 1 ヨリ大ナリ.

故ニ $\qquad \frac{a-c}{b-d}>1$ ……………………(1)

又 $a-c>0$ ∴ $b-d>0$ 故ニ(1)ヨリ

$$a-c>b-d\cdots\cdots(2) \qquad \therefore\ a+d>b+c\cdots\cdots(3)$$

〔例題〕 1. 數値ヲ代入シテ例一ヲ驗セ.

2. 相等シカラザル三ツノ正ノ數 a, b, c ガ比列ヲナス時ハ $\dfrac{a+c}{2}>b$ ナリ.

3. 等積ナル二ツノ矩形 A, B アリ. 其相隣レル二邊, A ハ a, d; B ハ b, c ナルトキ, 相隣レル二邊ノ差ノ小ナル方ノ矩形ノ周ガ他ノ周ヨリ小ナリ. 之ヲ證明セヨ.

〔例二〕 $\dfrac{a}{b}=\dfrac{c}{d}$ ナレバ次ノ各比例式ガ成リ立ツ.

(一) $(a+c)(a^2+c^2):(a-c)(a^2-c^2)$

$$=(b+d)(b^2+d^2):(b-d)(b^2-d^2)$$

證明 假設ニヨリテ, $a=bt,\ c=dt$ トシテ

〔第74節〔2〕〕

[(一)の右邊]$=(bt+dt)(b^2t^2+d^2t^2):(bt-dt)(b^2t^2-d^2t^2)$

$=(b+d)(b^2+d^2):(b-d)(b^2-d^2)$ (t^3 ニテ約シ)

卽チ右邊ニ等シ. ∴ (一)ハ眞ナリ.

(二) $\sqrt[n]{a^n+b^n}:\sqrt[m]{a^m-b^m}=\sqrt[n]{c^n+d^n}:\sqrt[m]{c^w-d^m}$

證明 假設ニヨリテ $a=ck,\ b=dk$ トシテ

〔74節(3)〕

[(二)の左邊]$=\sqrt{c^nk^n+d^nk^n}:\sqrt[m]{c^mk^m-d^mk^m}$

$=k\sqrt[n]{c^n+d^n}:k\sqrt[m]{c^m-d^m}$

$=\sqrt[n]{c^n+d^n}:\sqrt[m]{c^m-d^m}$

卽チ右邊ニ等シ. 故ニ(二)ハ眞ナリ.

(三) $a+b+c+d:a+b-c-d$

$$=a-b+c-d:a-b-c+d$$

證明 假設ニヨリテ, $a=bt,\ c=dt$ トシテ

[(三)の左邊]$=\dfrac{bt+b+dt+d}{bt+b-dt-d}=\dfrac{(t+1)(b+d)}{(t+1)(b-d)}$

$=\dfrac{b+d}{b-d}\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(A)$

[(三)の右邊]$=\dfrac{bt-b+dt-d}{bt-b-dt+d}=\dfrac{(t-1)(b+d)}{(t-1)(b-d)}$

$=\dfrac{b+d}{b-d}\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(B)$

(A) ト (B) トニヨリテ, (三)ノ眞ナルヲ知ル.

【注意1】 上ノ證明法(代入證明法)ハ廣ク適用セラレテ便利ナリ. 此場合ニハ良ク注意シテ第74節〔2〕ニヨルベキモノト第74節〔3〕ニヨルベキモノトヲ見分クルコト肝要ナリ. 場合ニヨリテハ次

ノ如キ證明法(**比例變形法**)ノ許サルルコトアリ.

[例二(二)の別法]

$$\frac{a}{b}=\frac{c}{d} \quad \therefore \quad \frac{a}{c}=\frac{b}{d}=\frac{\sqrt[n]{a^n+b^n}}{\sqrt[n]{c^n+d^n}} \cdots\cdots (1) \ [73節〔6〕]$$

$$\frac{a}{c}=\frac{b}{d}=\frac{\sqrt[m]{a^m-b^m}}{\sqrt[m]{c^m-d^m}} \cdots\cdots (2) \ [73節〔6〕]$$

(1) ト (2) トニアリテ(二)ハ眞ナリ.

然レドモ此證明法ハ代入證明法ノ根據ノ上ニ立ツモノナリ. 同樣ニ例二(三)ノ證明法次ノ如シ.

[例二(三)の別法]

$$\frac{a}{b}=\frac{c}{d}=\frac{a+c}{b+d}=\frac{a-c}{b-d} \quad [第73節〔6〕]$$

$$\therefore \quad \frac{a+c}{a-c}=\frac{b+d}{b-d}=\frac{(a+c)+(b+d)}{(a-c)+(b-d)}=\frac{(a+c)-(b+d)}{(a-c)-(b-d)}$$

$$\therefore \quad \frac{a+b+c+d}{a+b-c-d}=\frac{a-b+c-d}{a-b-c+d}$$

【注意2】 例二(三)ヲ次ノ如ク證明スルコトアリ.

$$\frac{a+b+c+d}{a+b-c-d}=\frac{a-b+c-d}{a-b-c+d} \cdots\cdots\cdots\cdots (1)$$

兩邊ヲ通分シタル分子ヲ比ブルニ

[左邊の分子] $=(a+b+c+d)(a-b-c+d)$

$=a^2+d^2-b^2-c^2+2ad-2bc$

$=a^2+d^2-b^2-c^2 \quad [\because \ ad=bc] \cdots\cdots (A)$

[右邊の分子] $=(a+b-c-d)(a-b+c-d)$

$=a^2+d^2-b^2-c^2-2ad+2bc$

$=a^2+d^2-b^2-c^2 \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (B)$

(A), (B) ニヨリテ (1) ノ眞ナルコトヲ知ル.

〔例題〕 $a:b=c:d$ ナル時,次ノ比例式ガ成リ立ツコトヲ證明セヨ.

1. $(a-b)^2:ab=(c-d)^2:cd$

2. $ab+cd:ab-cd=b^2+d^2:b^2-d^2$

3. $a^2+ab+b^2:c^2+cd+d^2=a^2-ab+b^2:c^2-cd+d^2$

4. $(a+b):(c+d)=\sqrt{a^2+b^2}:\sqrt{c^2+d^2}$

5. $a+b:a+b+c+d=a:a+c$

6. $(a^3+a^2b+b^3)(a+b):(c^3+c^2d+d^3)(c+d)=a^4+b^4:c^4+d^4$

〔例三〕 $(pa+qb+rc+sd)(pa-qb-rc+sd)$

$=(pa-qb+rc-sd)(pa+qb-rc-sd)$

ナレバ $bc:ad=ps:qr$ ナリ.

證明 假設ニヨリテ次ノ比例式ヲ得.

$$\frac{pa+qb+rc+sd}{pa+qb-rc-sd}=\frac{pa-qb+rc-sd}{pa-qb-rc+sd}$$

$$\therefore \quad =\frac{2(pa+rc)}{2(pa-rc)}=\frac{2(qb+sd)}{2(qb-sd)} \quad [第74節〔6〕].$$

$$\therefore\quad \frac{2pa}{2rc}=\frac{2qb}{2sd}$$ （第74節〔**6**〕系）

$$\therefore\quad bcrq=adps \qquad \therefore\quad \boldsymbol{bc:ad=ps:rq}$$

〔**例題**〕　$(x+y-3z-3u)(2x-2y-z+u)$

$$=(2x+2y-z-u)(x-y-3z+3u)$$

ナレバ $x:y=z:u$ ナリ.

〔**例四**〕　$\dfrac{x}{b-c}=\dfrac{y}{c-a}=\dfrac{z}{a-b}$ ナル時ハ $x+y+z=0$ ナリ.

証明　各比ノ下項ノ和 $(b-c)+(c-a)+(a-b)=0$ 故ニ上項ノ和モ 0 ナリ〔〔**8**〕系2〕.　$\therefore\ x+y+z=0$ 假設ニ適合スル樣ニ文字ニ數値ヲ入レテ見ヨ.

〔**例五**〕　$\dfrac{y+z}{b-c}=\dfrac{z+x}{c-a}=\dfrac{x+y}{a-b}$ ナル時ハ,各比ハ

$$\sqrt[3]{\frac{xyz}{(b-c)(a-c)(a-b)}}$$ ニ等シ.

證明　前例ニヨリテ $x+y+z=0$ 之ニヨリテ, $y+z=-x$, $z+x=-y$, $x+y=-z$ ヲ夫夫各比ノ上項ニ代入スレバ

$$[\text{元の各比}]=\frac{-x}{(b-c)}=\frac{-y}{c-a}=\frac{-z}{a-b}$$

$$\therefore\quad =\sqrt[3]{\frac{\boldsymbol{xyz}}{\boldsymbol{(b-c)(a-c)(a-b)}}}$$

〔**例題**〕　**1.** 例五ニ適合スル樣ニ文字ニ數値ヲ入レテ見ヨ.

2. $\dfrac{x}{b+c-a}=\dfrac{y}{c+a-b}=\dfrac{z}{a+b-c}$ ナル時ハ

$$(b-c\,x+(c-a)y+(a-b)z=0$$ ナリ.

3. $\dfrac{y+z}{m-n}=\dfrac{z+x}{n-l}=\dfrac{x+y}{l-m}$ ナル時ハ此各比ハ

$$\frac{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}{\sqrt{(m-n)^2+(n-l)^2+(l-m)^2}}$$ ニ等シ.

問題 第五十一集

$a:b=c:d$ ナレバ次ノ關係式ノ成リ立ツコトヲ證明セヨ(**1—4**).

1. $(a^2c+ac^2):(b^2d+bd^2)=(a+c)^3:(b+d)^3$

2. $\sqrt{a-b}:\sqrt{c-d}=\sqrt{a}-\sqrt{b}:\sqrt{c}-\sqrt{d}$

$$=\sqrt{a}+\sqrt{b}:\sqrt{c}+\sqrt{d}$$

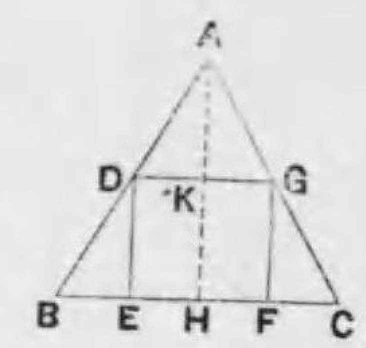
3. $\sqrt{a^2+c^2}:\sqrt{b^2+d^2}=\sqrt{ac+\dfrac{c^3}{a}}:\sqrt{bd+\dfrac{d^3}{b}}$

4. $(a^6+b^6+c^6+d^6)\div\left(\dfrac{1}{a^3}+\dfrac{1}{b^3}+\dfrac{1}{c^3}+\dfrac{1}{d^3}\right)=(abcd)^3$

5. $(3x+7y)\propto(3x+13y)$ ニシテ, $x=5$ ナル時, $y=3$ ナラバ x, y ノ關係式如何.

6. $[2x+y-2z=0\ \ 7x+6y-9z=0\ \ x^3+y^3+z^3=1728]$ ヲ解ケ.

7. 一邊ガ a ナル正三角形ニ內接スル正方形ノ一邊ヲ求ム. 之ニヨリテ一邊ガ b ナル正方形ニ外接スル正三角ノ一邊ヲ求ム.



8. 7月22日午前7時ニ4.5分後レ居タル時計同29日午後2時ニハ3分進ミ居タリ. 此時計ガ正シキ時刻ヲ示シタルハ何時ナリシカ.

9. $x^3-12x^2+px-q=0$ ノ三ツノ根ガ 1, 2, 3 ニ比例スル樣ニ p, q ノ値ヲ定メヨ.

10. $\dfrac{b-c}{bx+cy}=\dfrac{c-a}{cx+az}=\dfrac{a-b}{ay+bz}$ ナル時ハ

$$(a+b+c)(x+y+z)=ax+by+cz$$

ナルコトヲ證明セヨ.

11. 次ノ各ニ就テ x, y, z ノ連比ヲ求ム.

(一) $477x=2226y=3180z$

(二) $a(y+z)=b(z+x)=c(x+y)$

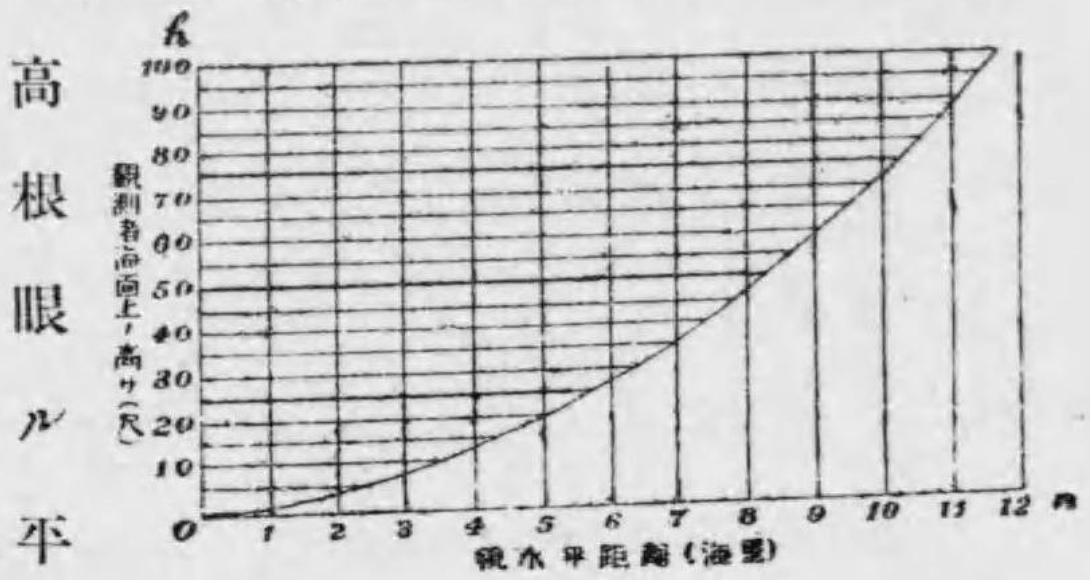
(三) $\dfrac{y}{x+y}=\dfrac{x-y+z}{y+z-x}=\dfrac{x+y+z}{2x+y+2z}$

又此等ノ何レカ一ツノ場合ニ就テ

$$(x^2+3y^2+5z^2)\infty(2x^2+4y^2+7z^2)$$

ナルコトヲ證明セヨ.

12. 海洋ヲ望ミ得ル距離(視水平距離 n浬)ハ海面上觀測者眼高 h尺 ノ平方根ニ比例ス. 眼高 9 尺ナルトキ視水平距離 **3.4869** 海里ナリトスレバ, (一) n, h ノ關係式如何. (二) 或燈臺ニ据エ付ケラレタル望遠鏡(海面ヨリノ高サ **100** 尺)ヨリ展望シ得ル距離如何.



13. a, b ハ相異ナレル正ノ數トス. 次ノ關係符號ノ何レガ成リ立ツカヲ決定セヨ.

$$a^3+b^3:a^2+b^2 >=< a^2+b^2:a+b$$

14. $\dfrac{\sqrt[3]{a-x}-\sqrt[3]{x-b}}{\sqrt[3]{a-x}+\sqrt[3]{x-b}}=\dfrac{a+b-2x}{a-b}$ ヲ解ケ. [第74節〔6〕系].

15. 次ノ各場合ニ就テ, a, b, c, d ガ比例ヲナスコトヲ證明セヨ.

(一) $(a+b+c+d)(a-b--c+d)$
$$=(a-b+c-d)(a+b-c-d)$$

(二) $(3a+6b+c+2d)(3a-6b-c+2d)$

$$=(3a-6b+c-2d)(3a+6b-c-2d)$$

16. (一) 一ツノ直角ヲ共有スル三ツノ正方形ノ面積ノ連比ガ 1:2:3 ナレバ三ツノ邊ノ連比如何(作圖セヨ).

(二) 與ヘラレタル正三角形ヲ其一邊ニ平行ナル三ツノ直線ニテ等積ナル四ツノ部分ニ分テバ,其三ツノ直線ノ長ハ元ノ正三角形ノ邊ノ長サ何割ナルカ(小數第三位迄).

補 習 問 題

17. $a:b=b:c=c:d$ ナル時ハ次ノ關係式ノ成リ立ツコトヲ證明セヨ

(一) $(b^2+bc+c^2)(ac-bc+c^2)=b^4+ac^3+c^4$

(二) $(a^2+b^2+c^2)(b^2+c^2+d^2)=(ab+bc+cd)^2$

8. 或集會ノ費用 x ハ其一部分 m ハ客ノ數ノ多少ニ拘ラズ一定ニシテ,殘部ハ客ノ數 y ニ比例ス. 而シテ 160 人ノ時ノ集會費 256 圓, 240 人ノ時 352 圓ヲ要セリ. 200 人ノ時ノ費用幾許ナルカ.

9. 眞鍮 1640 瓦ノ中ニハ銅ト亞鉛ト各幾瓦含マルルカ. 但シ眞鍮,銅,亞鉛ノ比重ハ夫夫 8.2, 9, 7 ナリトス,

20. 或小學校ニ於ケル男女生徒數ノ比,尋常科ハ 8:7, 高等科ハ 3:2, 尋常高等總計ニ於ケル男女生徒數ノ比 39:31 ナリ. 尋常科生徒數ト高等科生徒數トノ比ヲ求ム.

21. 兄弟ノ現今ノ年齢ノ比ト, n 年後ノ年齢ノ比トハ何レガ大ナルベキカ.

22. $\dfrac{mz-ny}{m-n}=\dfrac{nx-lz}{n-l}$ ナル時,各比ハ $\dfrac{ly-mx}{l-m}$ ニ等シキコトヲ證明セヨ.

23. 一ツノ列車ハ甲地ヨリ,他ノ列車ハ乙地ヨリ同時ニ相向ヒテ發車シ,兩列車ノ出會ヒタル時,其走リシ距離ノ差 63 哩トナレリ,ソレヨリ一ツハ 4 時間ヲ經テ乙地ニ着シ,他ハ 9 時間ヲ經テ甲地ニ着セリト云フ. 甲乙兩地間ノ距離及各列車ノ速サヲ求ム.

24. 同ジ若干ノ距離ヲ甲ハ 4 分 33 秒ニテ走リ,乙ハ 4 分 40 秒ニテ走ル. 然ラバ 1 哩ノ競爭ニ於テ甲ハ乙ニ幾碼勝ツベキカ.

25. 球ノ表面積ハ半徑ノ平方ニ比例シ,體積ハ半徑ノ立方ニ比例ス. (一) 半徑ガ 3, 4, 5 ナル三ツノ球ノ體積ノ和ニ等シキ體積ヲ有スル一ツノ球ノ半徑ヲ求ム. (二) 此一ツノ球ノ表面積ト,前ノ三ツノ球ノ表面積ノ和トノ比如何.

26. 三ツノ正多角形アリ,其邊ノ數ノ比ガ 3:2:1 ナル時,其内角(一ツヅツノ)ノ連比如何.

27. $(3x^3+x^2-8x+4)X=(3x^3+7x^2-4)Y=(x^3+6x^2+11x+6)Z$ ニ就テ $X:Y:Z$ ヲ求ム. 又 $x=10$ ナラバ如何.

28. 壕ヲ堀ルニ其費用 x ハ堀リ出シタル土ノ分量 v ト,深サ h トニ正比例ス. 幅 3 尺, 深サ 7 尺ノ濠長サ 1 間ヲ堀ル費用 90 錢トスレバ, x ト, v ト, h トノ間ノ關係式如何.

29. 南北兩軍ノ戰闘ニ於テ南軍ノ北軍ニ對スル兵數ノ比ハ $a:1$, 戰死者ノ數ノ比ハ $b:1$, 生存者ノ數ノ比ハ $c:1$ ナリシト云フ. 各軍戰死者數ノ其全兵數ニ對スル比幾許ナルカ.

30. 次ノ各方程式ヲ解ケ.

(一) $\frac{3+2x+3x^2}{6+3x+4x^2}=\frac{1+36x+15x^2}{2+57x+20x^2}$

(二) $[xy=24 \quad uv=6 \quad x+u=14 \quad y+v=4]$

(三) $(x+y)(x^2+y^2)=\frac{1}{2}b\left(\frac{x}{y}+\frac{y}{x}\right)=a$

31. 水車ニ於テ r ヲ車ノ半徑トシ, h ヲ落差(水ノ落ル高サ)トシ, p ヲ馬力トスレバ次ノ關係式アリ.

$$r=\frac{k\sqrt{p}}{\sqrt[4]{h^3}}$$

但シ k ハ常數ナリ. $p=100$, $h=10$ 呎ナルトキハ $r=1.5$ 呎ナリ. 今落差40呎ニシテ250馬力ヲ得ントスルニハ車ノ半徑ヲ幾何ニスベキカ(小數二位).

32. $[x=cy+b,\ y=a+cx,\ bx+ay=1]$ ガ聯立スル樣ニ a, b, c (何レモ實數) ノ値ニ關スル條件ヲ求ム.

第九篇

級 數

81. 等差級數の例

次ノ(1), (2), (3)ヲ各級數トイフ.

(1) $(1,\ 3\ \ 5,\ 7,\ \ldots\ldots \overset{\text{第十項}}{19})$ 一般項 $(2n-1)$

(2) $(1^2,\ 2^2,\ 3^2,\ 4^2,\ \ldots\ldots 10^2)$ 〃 n^2

(3) $\left(\frac{1}{1.2}, \frac{1}{2.3}, \frac{1}{3.4}, \frac{1}{4.5}, \cdots \frac{1}{10.11}\right)$ 〃 $\frac{1}{n(n-1)}$

級數とは順序立ちて並びたる一列の數にして, 各數の値と, 其數の位置を最初の數より數へたる時の番號數との間の關係が一樣なるものなり.

(1)ニ於テ其第 n 項ナル $(2n-1)$ ヲ其一般項トイフ. 何トナレバ n ヲ次第ニ 1, 2, 3,...... トシテ此式 $(2n-1)$ ノ値ヲ求ムレバ級數(1)ノ第1項, 第2項, 第3項...... ヲ得レバナリ.

級數の一般項(公項)とは, 其級數の第 n 項を n の式にて表したるものなり.

(3, 5, 7, 9, 11), (5, 2, −1, −4, −7) 等ヲ各**等差級數**(A.P.)ヲナストイフ.

等差級數とは順序立ちて並びたる一列の數にして,其中の**各數と其直ぐ前の數との差**が一定なるものなり. 此一定の差を**公差**(d)といふ.

等差級數の標準の形

$[a,\ a+d,\ a+2d,\ a+3d, \ldots\ldots a+(n-1)d]$

〔1〕 初項 a, 公差 d なる等差級數の第 n 項の値を l とすれば

$$l=a+(n-1)d \cdots\cdots\cdots \text{(A. P. の公項)}$$

或は $l=(a-d)+nd$

卽チ項ノ値ノ増加ハ番號數ノ増加ニ比例ス.

〔**例題**〕 **1.** 5, 8, 11,...... ナル等差級數ノ第十五番目ノ項ト,公項トヲ求ム.

2. (20, 17, 14,......2) ニ就テ,公差,項ノ數,末項ヨリ逆ニ第四番目ノ項及第 n 番目ノ項如何.

3. 第一,第二,第三ノ三ツノ學期點 a, b, c ノ平均ガ第二學期點數 b ニ等シケレバ, a, b, c ハ等差級數ヲナスコトヲ説明セヨ.

〔**補習問題**〕 學生諸子ハ各自次ノ問題ニ就テ等差級數ノ練習ヲ補フベシ.

初項ガ 1, -6, 0, $\frac{8}{3}$, $-\frac{48}{5}$, $2\sqrt{3}$ ナル六ツノ場合ノ各ニ就テ,

公差ガ 1 ナル時,又公差ガ $\frac{2}{3}$, 0, $\frac{3}{2}$, $\sqrt{3}$, $x-2y$ ナル時,各等差級數三十六種ニ就テ,各其第六項迄ト,公項トヲ求ム.

〔**例一**〕 等差級數ヲナス三數アリ,其和21其積168ナリ. 各數如何.

解 求ムル三數ヲ $(x-y)$, x, $(x+y)$ トスレバ

$$(x-y)+x+(x+y)=21 \qquad \therefore\ x=7 \cdots\cdots\cdots (1)$$

其積ノ式ヲ比ベテ

$$(7-y).7.(7+y)=168$$

$$49-y^2=24 \qquad \therefore\ y=\pm5 \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (2)$$

中央項7, 公差ハ 5 或ハ -5 ナリ.

答 (2, 7, 12) 或ハ (12, 7, 2)

等差級數の場合ニハ數ヲ順序立テテ並ベテ答フベシ.

【**注意 1**】 項ノ數 n ガ奇數ナル場合ノ等差級數ノ和ハ中央項ノ n 倍ナリ.

未知ノ等差級數ノ和ガ已知ナル時ハ,中央項ヲ未知元トシテ各項ヲ表スガ便利ナリ.

(一) 等差級數ヲナス三數ハ $x-y$, x, $x+y$
(二) 四數ハ $x-3y$, $x-y$, $x+y$, $x+3y$ ト置カル.

〔**例題**〕 **1.** 8, 16, 24, 32, 40 ノ和ヲ求ム.

2. 等差級數ヲナス四ツノ數アリ,其和ハ28ニシテ,(初項ト末項ノ積)ト,(第二項ト第三項ノ積)トノ比ハ5:8ニ等シ,各數如何.

3. 等差級數ニ於テ $\{l-(a-d)\}\propto n$ ナリ,之ヲ言葉ニ翻譯セヨ.

4. $u_7=10$, $u_{13}=-2$ ナルA.P.ノ u_{25} ヲ求ム(u_7, u_{13}……ハ夫夫第7項,第13項……ノコトナリ).

5. 2ト30トノ間ニ六ツノ**等差中項**(A.M.)ヲ挿入セヨ.

等差中項トハ初項ト末項トノ間ニアル項ヲイフ. 例ヘバ2ト18トノ間ノ三ツノ等差中項トイヘバ(2, 6, 10, 14, 15)ナル**A. P.**ニ於ケル,(6, 10, 14)ノコトナリ. 單ニ2ト18ノ間ノ等差中項トイヘバ(2, 10, 18)ナル**A.P.**ニ於ケル10ノコトニシテ,卽チ2ト18トノ相加平均數ニ等シ.

〔**例二**〕 等差級數12, 14, 16, 18, 20, 22ノ和(s)ヲ求ム.

解 $s=\frac{(12+22)\times 6}{2}=102$ 答

說明 $s=12+14+16+18+20+22$

又 $s=22+20+18+16+14+12$ (+

$$2s=(12+22)+(14+20)+\ldots+(22+12)$$

$$\therefore\ 2s=(12+22)\times 6 \qquad \therefore\ s=\frac{(12+22)\times 6}{2}=102$$

等差級數ノ和ヲ求ムル此方法ハ如何ナル等差級數ニモ適用セラル. 故ニ

$$s=\frac{(a+l)n}{n} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots [2]$$

之ヲ一般ニ次ノ如ク說明ス.

說明 コノ等差級數ノ各項ヲ元ノ順ニ書キタル和ノ式(1)ト,末項ヲ l トシテ逆ノ順ニ書キタル和ノ式(2)トヲ書キ列ベ

$$s=a+(a+d)+(a+2d)\ldots\ldots+\{a+(n-1)d\} \quad \ldots\ldots(1)$$

$$s=l+(l-d)+(l-2d)+\ldots+\{l-(n-1)d\} \quad \ldots\ldots(2)$$

邊邊相加ヘ,右邊ハ縱ニ列ビ居ル項ヲ加フレバ

$$2s=(a+l)+(a+l)+(a+l)+\ldots\ldots(a+l)$$

$$2s=(a+l)\times n \qquad \therefore\ s=\frac{(x+l)n}{2}$$

【**注意2**】 $s=a+(a+d)+(a+2d)+\ldots+\{a+(n-1)d\}$

$$=na+d\{1+2+\ldots\ldots+(n-1)\}$$

$$=na+\frac{n(n-1)}{2}d$$

〔**例題**〕 **1.** 1ヨリ100マデノ整數ノ中,(一)總テノ奇數ノ和,(二)總テノ偶數ノ和,(三)奇數ノ和ト

偶數ノ和トノ比及差ヲ求ム.

2. 1, 3, 5, ... ナル **A.P.** 第 n 項迄ノ和如何.

3. 13, 11, 9, 7, ... ナル **A.P.** ニ就テ, **(一)** 第5項迄ノ和, **(二)** 第9項迄ノ和ヲ求ム.

〔例三〕 初項18, 公差 -3 ナル等差級數ノ和ガ60ナレバ項ノ數幾許ナルカ.

解 求ムル項ノ數ヲ n トスレバ, 注意2ニヨリ

$$18n+\frac{1}{2}n(n-1)(-3)=60 \qquad n^2-13n+40=0$$

$$\therefore\ n=5 \text{ 或ハ } 8 \qquad \text{答 5項, 或ハ 8項}$$

驗算 $18+15+12+9+6=60$

$18+15+12+9+6+\mathbf{3+0-3}=60$

〔例題〕 **1.** 初項 20, 公差 -2 ナル **A.P.** ニ就テ, **(一)** n 項迄ノ和ヲ求ム. **(二)** n ヲ幾許トスレバ和ガ68トナルベキカ.

2. 1, 3, 5, ... ナル **A.P.** ノ第何項迄ノ和100ヨリ大トナルベキカ.

【注意3】 二ツノ公式 **〔1〕**, **〔2〕** ニヨレバ a, d, n, l, s ノ中何レノ二ツガ未知數ナル時ニテモ, 他ノ三ツガ分レバ之ヲ解クコトヲ得(十種ノ場合アリ. 各自之ガ解法ヲ試ミヨ).

問題 第五十二集

1. **(一)** 2, 7.2, 12.4, ... ナル **A.P.** ノ u_8 ヲ求ム.

(二) $n_6=25$, $u_{20}=81$ ナル **A.P.** ノ u_{15} 及 u_n ヲ求ム.

(三) $u_1+u_5=38$, $u_4+u_9=26$ ナレバ d 幾許.

2. 三角形ノ一ツノ角ガ60°ナルトキハ, 三ツノ角ハ等差級數ヲナスコトヲ證明セヨ.

3. 等差級數ノ第 n 項ハ $\frac{1}{6}(3n-1)$ ナリ. 初項ヨリ第 6 項迄書キ下セ.

4. 20 ヲ四ツノ部分ニ分チテ等差級數ヲナサシメ, 其 $(u_1.u_4):(n_2.n_3)=2:3$ ナラシムルコト.

5. 次ノ各ノ就テ共等差中項 **(A.M.)** ヲ挿入セヨ.

(一) 130, 55 ノ間ヘ 4 ツ

(二) 7.4, 20 ノ間ヘ 5 ツ

(三) -1, 2 ノ間ヘ 6 ツ

(四) $\dfrac{x+a}{x-a}$ ト $\dfrac{x-a}{x+a}$ トノ A.M. ヲ求ム.

(五) $u_{11}=37\frac{1}{2}$, $u_{16}=25$ ナル **A.P.** ニ就テ此二項ノ間ノ總テノ項ヲ求ム.

6. 次ノ各等差級數ニ就テ共和ヲ求ム.

(一) 11, 15, 19, ... $n=18$ ニ至ル

(二) $2,\ 3\frac{1}{2},\ 4\frac{2}{3},\ \ldots\ldots\ n=12$ ニ至ル

(三) $4.2,\ 4.9,\ 5.6,\ \ldots\ldots\ n=20$ ニ至ル

(四) $18,\ 15,\ 12,\ \ldots\ldots\ n=5$, 又 $n=8$

(五) $4x-y,\ 3x-2y,\ 2x-3y,\ \ldots\ldots\ n=9$

7. 等差級數ノ第 n 項迄ノ和 $\frac{n}{12}(3n+1)$ ナリ. 之ニヨリテ(初項),(第 2 項迄ノ和),(第 3 項迄ノ和)………(第 6 項迄ノ和)ヲ書キ下セ.

8. 第三項 (u_3) ガ $\frac{17}{6}$, 第八項 (u_8) ガ -3 ナル等差級數ニ於テ,初項ヨリ第何項迄ノ和ガ $\frac{9}{2}$ トナルカ.

9. $a=12,\ d=\frac{1}{2}$ ナル A.P. ニ於テ,何項迄取レバ,(一) 其和 126 トナルベキカ, (二) 其和 150 ヨリ大トナルベキカ.

10. $\frac{n-1}{n},\ \frac{n-2}{n},\ \frac{n-3}{n},\ \ldots\ldots$ ノ n 項迄ノ和ヲ求ム. 又 $n=10$ トシテ驗セ.

11. **自然級數** (1, 2, 3, 4, 5, ……) ヲ次ノ如ク纒メタル時,第 n 組迄ノ總テノ數ノ和ヲ求ム. 之ニヨリテ第 n 組ノ中ノ數ノ和ヲ求ム.

1, (2, 3), (4, 5, 6), (7, 8, 9, 10)……

12. 111 ト 311 トノ間ニアル偶數ノ和ヲ求ム.

13. 二ツノ級數 (2, 5, 8, ……) ト (3, 7, 11, ……) トニ於テ,各ノ百項迄ノ間ニ於テ,兩級數ノ項ニ於テ相等シキモノ幾項アルカ.

14. 二ツノ等差級數アリ. 其第 n 項迄ノ和ノ比ハ $\mathbf{13-7n:3n+1}$ ナリ. 第八項ノ比如何.

15. (一) $(u_n-u_r):(u_r-u_m):(u_m-u_n)$ ヲ求ム.

(二) $m(u_n-u_r)+n(u_r-u_m)+r(u_m-u_n)=0$ ナルコトヲ驗證セヨ.

16. 甲或地ヲ發シ初日ニ行クコト 1 里,第 2 日ニ行クコト 2 里,第 3 日ニ行クコト 3 里ニシテ斯ノ如ク逐日增進セリ,甲ノ出發後 5 日ヲ經テ乙ハ同所ヲ發シ每日 12 里ヅツ行ケリ,乙出發シテヨリ幾日目ニ甲乙相會スルヤ.

82. 等比級數の例

(一) a ニ次次 2 ヲ掛ケ, (二) $\frac{4}{9}$ ニ次次 $-\frac{3}{2}$ ヲ掛ケテ各六項ニ止ムレバ次ノ如シ.

(一) $(\ a,\ \ 2a,\ \ 4a,\ \ 8a,\ \ 16a,\ \ 32a\ )$ 公項 $a.2^{n-1}$

(二) $\left(\frac{4}{9},\ -\frac{2}{3},\ 1,\ -\frac{3}{2},\ \frac{9}{4},\ -\frac{27}{8}\right)$ 〃 $\frac{4}{9}\cdot\left(-\frac{3}{2}\right)^{n-1}$

(一)(二)ハ各**等比級數**,2ト$-\frac{3}{2}$ハ夫夫其**公比**ナリ.

等比級數とは級數の各項と其直ぐ前の項との比が一定なるものなり. 此一定の比を**公比**(r)といふ.

等比級數(G.P.)の標準の形

$[a,\ ar,\ ar^2,\ ar^3,\ldots\ldots ar^{n-1}]$

〔1〕 初項 a,公比 r なる G.P. の第 n 項(**公項**)の値を l とすれば

$l=ar^{n-1}$ ……………………(G.P. の公項)

a, b, c, d ガ G.P. ヲ成ストキノ此等ノ間ノ關係式ハ $\frac{b}{a}=\frac{c}{b}=\frac{d}{c}=r$ ナリ.

〔例一〕 第3項(u_3)ガ2, 第7項(u_7)ガ$\frac{32}{81}$ナル等比級數ヲ求ム.

解 $ar^2=2\quad ar^6=\frac{32}{81}\quad \therefore\ r^4=\frac{16}{81}$

$r=\pm\frac{2}{3}$ (虚根ヲ捨ツ) $a=\frac{9}{2}$

答$\left(\frac{9}{2},\ 3,\ 2,\ \frac{4}{3},\ldots\ldots\right)$或ハ$\left(\frac{9}{2},\ -3,\ 2,\ -\frac{4}{3}\ldots\ldots\right)$

公比ハ實數ナルモノノミヲ求ムルモノトス.

〔例題〕 1. 次ノ各等比級數ノ第6項及公項ヲ求ム.

(一) 9, 3, 1, …… (二) 2, -3, $\frac{9}{2}$ ……

(三) $a=1$, $r=\sqrt{2}$ ナル G.P. ヲ第8項迄求ム.

2. $u_3=4$, $u_6=-\frac{1}{2}$ ナル G.P. ノ u_{10} 如何.

3. G.P. ヲ成ス四數アリ. 第一數,第二數ノ和60, 第三數,第四數ノ和120ナリ. 其G.P.ヲ求ム.

4. 次ノ各ニ就テ,其等比中項(G.M.)ヲ挿入セヨ.

(一) 5, 80ノ間へ三ツ

(二) 12, $\frac{3}{4}$ノ間へ七ツ

5. G.P. ノ連乘積ヲ p トスレバ $p^2=(al)^n$ ナリ.

6. 6, 4, 9, ニ一ツノ數ヲ附加シテ都合四ツノ數トシ,之ヲ G.P. ヲ成ス様ニ置キ換ヘヨ.

7. G.P. ノ各項ニ同一ノ數ヲ掛クルモ又 G.P. ヲ成スコトヲ證明セヨ.

8. 次ノ各式ヲ展開セヨ.

(一) $\frac{1-x^5}{1-x}$ (二) $(1+x+x^2+\ldots\ldots+x^5)(1-x)$

〔例二〕 2, 6, 18, 54, 162, 486 ノ和(s)ヲ求ム.

解 $s=\frac{486\times3-2}{3-1}=728$ 答

説明 $s=2+6+18+54+162+486$ ……………….(1)

兩邊ニ公比3ヲ掛クレバ

$3s=6+18+54+168+486+(486\times3)$….(2)