年

第 1 卷

第 1 期

光華大學理科期刊

民國二十二年

張壽鏞題

創刊號

要目

光華大學科學會出版

民國二十三年一月

本刊啓事一

本刊得蒙　校長先生，各位師長，暨執委會諸君熱忱捐助，特此鳴謝。

本刊啓事二

本刊承勞　多方惠以鴻文，至以爲感，惟以篇幅所限一次未能盡載，容後再行續刊，務祈原諒是幸。

目　錄

插　圖

光華大學科學會全體攝影

論　著

通　俗　科　學

雜　組


光華大學科學會全體攝影
二十二年十一月十日
啟昌照相

黎李二氏積分及其比較

范　會　國

積分學固開端於牛頓 (Newton) 及本來之 (Leibnitz) 二氏，但彼時之所謂積分者，其義甚狹，自從黎曼 (Riemann) 氏後，積分之理論始大進步，其範圍亦爲較廣，殆及李別格 (Lebergue) 氏，更在此塊領域，矗起崇樓傑閣，巍然輪奐，雖難謂觀止，——其實科學是永無底止，除非宇宙覆滅，——然數理學誠已增加不少力量矣。是篇所論者，卽黎李二氏之積分，並略爲比較之。

I. 梨曼積分

設 $f(x)$ 爲在 (a, b) 節 (interval) 中之確定及有限函數 (definite and bounded function)；在含在 (a, b) 節中之各節 δ 中，$f(x)$ 有一上限爲 L 及一下限爲 l；其差 $L-l=\omega$ 稱爲此函數 $f(x)$ 在此節 δ 中之顫動度 (oscillation).

設 A 爲 (a, b) 節中之一點，並設

$$\delta_1, \quad \delta_2, \cdots\cdots, \quad \delta_i, \cdots\cdots$$

爲無窮多節之一斜列 (Sequence)，δ_2 含在 δ_1 中，δ_3 含在 δ_2 中，……，δ_i 含在 δ_{i-1} 中，……，此各節 δ_i 均含有 A 點，並當 i 無窮增大時，δ_i 之極限爲 A：若命 L_i, l_i 及 $\omega_i = L_i - l_i$ 爲函數 $f(x)$ 在 δ_i 節中之上限，之下限，之顫動度，則無論敘列 δ_i 爲如何，但當 i 無窮增大時，此三數 L_i，l_i，ω_i 恆有其極限爲 L, l, ω 滿足於下之等式

$$L-l=\omega$$

L 稱爲函數 $f(x)$ 在 A 點之極大值，l 稱爲函數 $f(x)$ 在 A 點之極小值，ω 稱爲函數 $f(x)$ 在 A 點之顫動度。(註1) 若 $\omega=0$，則此函數 $f(x)$ 在 A 點爲連續；倒轉之，若此函數 $f(x)$ 在 A 點爲連續，則 $\omega=0$.

若函數 $f(x)$ 在 (a, b) 節中非爲確定，而只在含在此節中之一點集 E (Set of points) 中爲確定，則凡在點集 E 之引點集 E' (derived set) 中之任一點 A，以上各定義均可適用，特別的，若 E 爲一滿點集 (perfect set)，則凡在 E 之任一點，以上各定義均可適用。(在此，只須命 L_i 及 l_i 爲 $f(x)$ 在含在 δ_i 節中之 E 之各點中之上限及下限，若在 A 點之顫動度爲零，則 $f(x)$ 在點集 E 之 A 點爲連續，倒轉之，亦爲的確。)

茲設各節 δ_i 之左端俱與 A 點重疊；所謂爲函數 $f(x)$ 在 A 點之右極大值 L_d 及右極

小值 l_d 者，卽當 i 無窮增大時，函數 $f(x)$ 在 δ_i 節中之上限 L_i 及下限 l_i 之兩極限；至於此兩極限之差 $\omega_d = L_d - l_d$，則稱此爲函數 $f(x)$ 在 A 點之右顫動度，(A點除外).

若

$$L_d = l_d,$$

並若命 x 爲 A 點之橫標，則當正數 h 趨近於 0 時，函數 $f(x+h)$ 有一極限爲 $f(x+0)$. 若 $f(x+0)=f(x)$，則此函數在右邊爲連續。

同樣的，左極大值 L_g，左極小值 l_g 及左顫動度 ω_g 亦是如此決定，當

$$\omega_d = \omega_g = 0$$

時，二數 $f(x+0)$ 及 $f(x-0)$ 俱存在，而 A 點乃爲尋常斷點，或第一類斷點，至于差數

$$f(x+0)-f(x-0)$$

之絕對值，則稱爲函數 $f(x)$ 在 x 點之跳度，在其他各情形中，斷點 x 爲第二類斷點，或顫動斷點。

試以諸點

$$a_0 = a, a_1, a_2, \cdots\cdots, a_{n-1}, a_n = b,$$

將 (a, b) 節分爲 n 分節，並取總和

$$\Omega = \frac{1}{b-a}\sum_{i=1}^{i=n}\left(a_i - a_{i-1}\right)\omega_i;$$

當分點之數 n 無窮增大而使 $|a_i - a_{i-1}|$ 之最大者趨近于 0 時，此總和 Ω 有一確定極限，是卽李別格氏之所謂爲函數 $f(x)$ 在 (a, b) 節中之平均顫動度也 (註2)

玆取總和

$$S = \sum_{i=1}^{i=n}\left(a_i - a_{i-1}\right)f(x_i),$$

其中 x_i 爲在分節 (a_{i-1}, a_i) 中之任一點。若分點爲固定，則諸數 S 均含在二極限 $\overline{S}$ 及 $\underline{S}$ 中：

$$\overline{S} = \sum_{i=1}^{i=n} L_i\left(a_i - a_{i-1}\right),$$

$$\underline{S} = \sum_{i=1}^{i=n} l_i\left(a_i - a_{i-1}\right).$$

達爾布 (Darboux) 氏曾証明當分點之數無窮增多而使 $|a_i - a_{i-1}|$ 之最大者趨近於 0 時，此二數 $\overline{S}$ 及 S 各有其確定極限：(註3)

$$\lim \overline{S} = \int_{+a}^{b} f(x)\,dx,$$

$$\lim \underline{S} = \int_{-a}^{b} f(x)\,dx$$

第一極限稱爲上積分，第二極限稱爲下積分。若此上下積分之值相等，則函數 f (x) 在 (a, b) 節中稱爲可取黎曼積分，而此上下積分之共同值乃爲此函數之積分之值，至於諸總和 S 之極限之值顯然亦卽此積分之值，吾人恆以符號 $\int_a^b f(x)\,dx$ 表之。

若要有一限函數 f (x) 爲可取黎曼積分，其必要及充分之條件是可將 (a, b) 節分爲諸分節而使凡令 f (x) 之顫動度大于 ε（任何小之正數）之諸節之和小於任何小之一正數。此定理係得自黎曼氏。(註4)

設在 (a, b) 節中有一點集，若能將此點集之各點關閉在其長度之和可爲任何小之有限數節中，則此點集稱爲可積分羣 (integrable group). 如此之點集之外量 (exterior measure) 顯然是等於零。

若引入積分羣之概念，則可將上之黎曼定理變爲別一形狀，而顯出函數 f (x) 之斷點之分佈狀態：若要一有限函數爲可取黎曼積分，其必要及充分之條件是令此函數之顫動度大於 ε (任何小之正數)之各點所成之點集爲一可積分羣。

李別格氏於引用平均顫動度定義及集量 (measure of set) 定義，又將此定理再變爲別一形式。

若察出

$$\overline{S} - \underline{S} = \sum_{i=1}^{i=n} \left(a_i - a_{i-1}\right) w\,,$$

則可很容易的推出：若要一有限與數爲可取黎曼積分，其必要及充分之條件是此函數之平均顫動度等于零。

設有一點集，若此點集之各點均可關在有限數或可數的 (enumerable) 無窮多數線段中，而諸此線段之長之和又可爲任何小，則由定義，此點集之量爲零。

若應用其量爲零之點集之定義，則得：若要一有限函數爲可取黎曼積分，其必要及充分之條件是此函數之斷點所成之點集之量爲零。(註5)

黎曼積分滿足於下各關係：

$$(\alpha)\quad \int_a^b f(x)\,dx + \int_b^a f(x)\,dx = 0,$$

$$(\beta)\quad \int_a^b f(x)dx+\int_b^c f(x)dx+\int_c^a f(x)dx=0,$$

$$(\gamma)\quad l\leqq\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx\leqq L,$$

其中 l 表函數 f(x) 在 (a, b) 節中之下限，L 表函數 f (x) 在 (a, b) 節中之上限。

黎曼積分尙有下各特性：

(α) 若兩函數均可取黎曼積分，則此兩函數之和亦可取黎曼積分，並其和之積分等於兩積分之和。

(β) 設一一齊收斂 (umformiy Convergent) 級數之各項俱爲可取黎曼積分之函數，則此級數之和爲一可取黎曼積分之函數，並其和之積分爲其各項之積分之和。

(γ) 兩個可取黎曼積分之函數之乘積及商數亦爲可取黎曼積分之函數。

若 $f(x)$ 爲可取黎曼積分，並若 $\sqrt[m]{f(x)}$ 有一意義，(sense) 則函數 $\sqrt[m]{f(x)}$ 亦爲可取黎曼積分；若 $f(x)$ 爲正數及可取黎曼積分，並 $\varphi(x)$ 亦可取黎曼積分，則函數 $[f(x)]^{\varphi(x)}$ 爲可取黎曼積分。諸此變換屬於普遍運算 $f(\varphi)$ 之形狀中，f 及 φ 俱爲可取黎曼積分之函數。

李別格氏曾察出 $f(\varphi)$ 非恆可取黎曼積分，並舉下例以証之：(註6)

設 $f(x)=1$, 若 x 異於 0, 及 $f(0)=0$；並設 $\varphi(x)=0$, 若 x 爲無理數，及 $\varphi\left(\frac{p}{q}\right)=\frac{1}{q}$，$\frac{p}{q}$ 爲不可約分數。在此各情形中，可見若 x 爲有理數，則函數 $f(\varphi)$ 等於 1, 若 x 爲無理數，則函數 $f(\varphi)$ 等於 0，是卽底列格利 (G. L. Dirichlet) 函數 $X(x)$, 可用分析式表之如下：

$$X(x)=\lim_{m=+\infty}\left[\lim_{n=+\infty}(\cos m!\,\pi x)^{2n}\right]$$

無論在任何一點x,此函數都爲斷函數,(discontinuous function)故非可取黎曼積分。

II. 李別格積分。

在上已見爲要得黎曼積分，起手卽將積分節 (interval of integration) 分爲諸分節，再以 $f(x_i)$ 乘各分節之長 (a_i-a_{i-1}) 及取如此之乘積之總和。李氏所取步驟，適與此反，他係先將數函 $f(x)$ 之變値節 (interval of variation) (m, M) 分爲諸分節

$$y_0=m,\ y_1,\ y_2,\cdots\cdots\cdots\cdots y_n=M.$$

若 $f(x)$ 由 a 至 b 非爲降函數，(decreasing function) 則滿足於下之條件

$$y_{i-1}<f(x)<y_i$$

之諸點 x, 將只在一節中，設 l_i 爲此節之長。至於滿足等式

$$f(x)=y_i$$

之諸點 x, 則可設其在其長爲 e'_i 之一節中，(e_i 及 e'_i 可等於零) 如此，則黎曼積分顯然乃爲下二總和

$$(1)\qquad S=\sum_{i=1}^{i=n} e_i\, y_i+\sum_{i=o}^{i=n} e'_i\, y_i,$$

$$(2)\qquad S=\sum_{i=1}^{i=n} e_i\, y_i+\sum_{i=o}^{i=n} e'_i\, y_i,$$

之極限。就此極限，吾人倘取之以爲李別格積分之值。惟若將 e_i 及 e'_i 之意義推廣，則李氏積分比黎氏積分之適用範圍較大也。

設 $f(x)$ 在可量而又有限 (measurable and bounded) 之點集 E 中爲一確定函數。倘在點集 E 中之合於條件

$$A<f(x)<B$$

之點集 F 爲可量，其中 A 及 B 爲任何數，及合於條件

$$f(x)=A$$

之點集 G 亦爲可量，其中A亦爲任何數，則 $f(x)$ 在此點集 E 中稱爲可取李別格積分之函數。特別的，所取之點集可爲一節 (a, b).

若要此定義爲合理，必須証明在以上所假設之諸條件中，二總和 (1) 及 (2) 各有其確定極限，並爲相等，玆爲述之。

於証明之前，玆先察出下之結果：因爲點集 G 之諸點乃屬於合于條件

$$A-\frac{1}{n}<f(x)<A+\frac{1}{n}$$

之點集 F_n, 故若無論 A 及 B 爲任何數，點集 F 都爲可量，則點集 G 亦爲可量，若代上之若不等式以

$$A-\frac{1}{n}\leqq f(x)\leqq A+\frac{1}{n},$$

則還可見若合於條件

$$A\leqq f(x)\leqq B$$

之點集爲可量，則函數 $f(x)$爲可取李別格積分。

設 m 及 M 爲函數 $f(x)$ 在點集 E 中之下限及上限，$y_1, y_2, \cdots\cdots, y_{n-1}$ 爲合在 m 及 M 間之遞升數，並設 $y_o=m$, $y_n=M$. 玆可命 l_i 爲合於條件

$$y_{i-1} < f(x) < y_i$$

之點集之量，及 e'_i 爲合於條件

$$f(x) = y_i$$

之點集之量•

如是，則 (1), (2) 二式各有其確定値，並若用達爾布氏所用以証明黎曼積分之推理法，則可見當各分節 $y_i - y_{i-1}$ 之長趨近於零時，此二式俱各有其確定極限•

此外，因

$$S - s = \sum_{i=1}^{i=n} l_i \left(y_i - y_{i-1} \right) \leqq e \Delta y,$$

其中 e 表點集 E 之量，Δy 表諸分節 $y_i - y_{i-1}$ 之最大者之長，故若 Δy 趨近於零，則 S − s 亦趨近于零，而此二總和之極限乃爲相等。此共同極限卽函數 f (x) 在點集 E 中之李別格積分，恆以符號 (L) $\int_E f(x)\, dx$ 表之.(註 7) 特別的，若 E 爲一節 (a, b)，則函數 f (x) 在此節中之李別格積分爲 (L) $\int_a^b f(x)\, dx$.

率先研究可量函數 (measurable function) 者爲李別格氏，其定義如下：設 f (x) 在點集 E 中爲一有限或無限 (non bounded) 函數，若下四點集

$$E(f \geqq A),$$
$$E(f < A),$$
$$E(f > A),$$
$$E(f \leqq A)$$

之一爲可量，則 f (x) 稱爲可量函數，其中 $E(f \geqq A)$ 表在點集 E 中合於條件 $f(x) \geqq A$ 之點集，$E(f < A)$ 表在點集 E 中合於條件 $f(x) < A$ 之點集……，A 爲任一常數.——吾人甚易看出若此四點集之一爲可量，則其他俱爲可量，換言之，卽以上之四條件爲同價 (equivalent).

凡可取李別格積分之函數均稱爲可和函數, (summable function) 由是，故凡可量有限函數均爲可和函數，蓋由可量函數之定義，可知凡可量有限函數均可取李別格積分也

李別格積分有以下諸特性：

(1) 此積分滿足於中數定理，(law of the mean) 換言之，卽若命 m 及 M 爲 f (x) 在點集 E 中之下限各上限，e 爲點集 E 之量，則有

$$Me \leqq (L) \int_E f(x)\, dx \leqq Me.$$

(2) 若點集 E 爲有限數可量點集 E_k 或可數的無窮多個可量點集 E_k 之和，則有

$$(L)\int_E f(x)\,dx=\sum_{k=1}^{k=n}(L)\int_{E_k} f(x)\,dx,$$

或

$$(L)\int_E f(x)\,dx=\sum_{k=1}^{n=+\infty}(L)\int_{E_k} f(x)\,dx,$$

其中各點集 E_k 自然的係假設沒有共同點。

(3) 若在點集 E 中，有二函數 $f(x)$ 及 $\varphi(x)$ 滿足於條件 $\varphi(x)\geqq f(x)$，則有

$$(L)\int_E \varphi(x)\,dx\geqq(L)\int_E f(x)\,dx.$$

(4) 設 $f_1(x)$, $f_2(x)$,……, $f_n(x)$ 爲 n 個可量有限函數，則有

$$(L)\int_E[f_1(x)+f_2(x)+\cdots+f_n(x)]dx=(L)\int_E f_1(x)dx+\cdots$$

$$\cdots\cdots+(L)\int_E f_n(x)\,dx.$$

(5) 設 a 爲一常數，則有

$$(L)\int_E a\,f(x)\,dx=a\left[(L)\int_E f(x)\,dx\right].$$

(6) 若以 $|f(x)|$ 表 $f(x)$ 之絕對值，則有

$$\left|(L)\int_E f(x)\,dx\right|\leqq(L)\int_E |f(x)|\,dx.$$

(7) 若二函數在點集 E 中只在其量爲零之一點集之各點，其值不同，則此二函數在點集 E 中之積分相同。

(8) 若敘列

$$f_1(x), f_2(x),\cdots\cdots, f_n(x),\cdots\cdots$$

趨近於極限 $f(x)$, 則 $f_n(x)$ 之積分趨近於 $f(x)$ 之積分：

$$\lim_{n=\infty}\left[(L)\int_E f(x)\,dx\right]=(L)\int_E f(x)\,dx,$$

其中假設無論 n 爲任何數，都有 $|f_n(x)|<M$, M 爲一有限數。

以上係假定 $f(x)$ 爲有限函數，但李別格積分亦可推至無限函數，(non bounded function) 玆略言之。

試先取永不爲負數之一可量函數 $f(x)$ 設 n 爲整數，$f_n(x)$ 爲一輔助函數：在 $f(x)$ 小或等於 n 之各點，此函數 $f_n(x)$,等於 $f(x)$,但在 $f(x)$ 大於 n 之各點，此函數 $f_n(x)$ 則等于 n. 爲此所做之函數 $f_n(x)$ 爲有限可量函數，而其在有限可量之一點集 E 中之李別格積分即爲以前所述者，由於定義，所謂爲函數 $f(x)$ 在點集 E 中之李別格積分者，即函數 $f_n(x)$ 在點集E 中之李別格積分之極限：

$$(L)\int_E f(x)\,dx = \lim_{n=\infty}\left[(L)\int_E f_n(x)\,dx\right]$$

此極限可爲有限，(finite) 或正無窮大，若爲有限，則 $f(x)$ 在點集 E 中稱爲可和函數，換言之，即可取李別格積分．

若 $f(x)$ 爲永非爲正數之函數，則由定義，此函數之李別格積分乃其絕對值之積分而變其號． $f(x)$ 爲可和函數或否，乃視其絕對值是否爲可和函數而定．

在普遍情形中，$f(x)$ 爲兩個永不爲負之函數 $f_1(x)$ 及 $f_2(x)$ 之差 $f_1(x)-f_2(x)$, 其中 f_1 及 f_2 乃由下二等式確定之：

$$2f_1(x) = |f(x)| + f(x),$$

$$2f_2(x) = |f(x)| - f(x).$$

若 $f_1(x)$ 及 $f_2(x)$ 俱爲可和函數，則 $f(x)$ 亦然，而由定義，有

$$(L)\int_E f(x)\,dx = (L)\int_E f_1(x)\,dx - (L)\int_E f_2(x)\,dx.$$

由以上之定義，可知若 $f(x)$ 爲可和函數，則其絕對值 $|f(x)|$ 亦然，並其積分至少等於 $f(x)$ 之積分之絕對值，是乃上邊第六特性之推廣．倒轉之，若 $|f(x)|$ 爲可和函數，則 $f(x)$ 亦然．以上之積分尙有下諸特性：

(1) 若點集 E 爲有限個或可數的無窮多個點集 $E_1, E_2, \cdots\cdots$ 之和，則可和函數 $f(x)$ 在點 E 中之積分等於此函數在各點集 $E_1, E_2, \cdots\cdots$ 中之積分之和．(其中各點集 $E_1, E_2, \cdots\cdots$ 自然係假設沒有共同點．)

(2) 有限個可和函數之和爲一可和函數，並其和之積分爲各函數之積分之和．

(3) 若 $f(x)$ 在點集 E 中爲一可和函數，F 爲含在 E 中之一點集，則函數 $f(x)$ 在點集 F 中之積分與點集 F 之量同時趨近於零．

(4) 若敘列

$$f_1(x), f_2(x), \cdots\cdots, f_n(x), \cdots\cdots$$

中之各函數在點集 E 中俱爲可和函數，並若其絕對值恆小於與 n 無關之一個正函數 Φ, 及此敘列有一極限函數 $f(x)$, 則此極限函數 $f(x)$, 乃爲可和函數，而有 (註8)

$$\lim_{n=\infty}\left[\,(L)\int_E f(x)\,dx\,\right] = (L)\int_E f(x)\,dx.$$

以上所述之李別格積分，俱假設點集E爲有限點集，(bounded set) 但此積分倘可推至無限點集，(non bounded set) 茲從略之。

III. 梨曼積分所及李別格積分之比較。

由上所述，可知李別格積分之所以異於黎曼積分者何在；但若李氏積分爲一有用推廣，則必應包含黎氏積分爲一特別例；然而正是如此，蓋吾人可証明：若一函數在 (a, b) 節中可取黎曼積分，則此函數在此節中必可取李別格積分並此二積分之值相等。

設 E 爲合於條件 $A \leqq f(x) \leqq B$ 之點集，e 爲不屬於 E 的 E 之極限點 (limiting point) 點集：此點集 e 之諸點乃爲函數 $f(x)$ 之斷點，並爲其量爲零之一可量點集，蓋由假設，此函數 $f(x)$ 爲可取黎曼積分也。他方面，點集 E + e 爲閉 a, (closed) 因之爲可量，而點集 E 亦爲可量。由此，故函數 $f(x)$ 在 (a, b) 節中爲可取李別格積分。

試以按序遞升之諸點

$$x_0 = a,\ x_1,\ x_2,\ \cdots\cdots,\ x_{n-1},\ x_n = b$$

將 (a, b) 節分爲許多分節。設在分節 $x_i - x_{i-1}$ 中，$f(x)$ 之上限爲 m_i,下限爲 M_i 則有

$$m_i\,(x_i - x_{i-1}) < \int_{x_{i-1}}^{x_i} f(x)\,dx < M_i\,(x_i - x_{i-1}),$$

其中 $\int_{x_{i-1}}^{x_i} f(x)\,dx$ 表 $f(x)$ 在 (x_i, x_{i-1}) 節中之黎曼積分；及

$$m_i\,(x_i - x_{i-1}) < (L)\int_{x_{i-1}}^{x_i} f(x)\,dx < M_i\,(x_i - x_{i-1}),$$

由是，得

$$\left|\,(L)\int_{x_{i-1}}^{x_i} f(x)\,dx - \int_{x_{i-1}}^{x_i} f(x)\,dx\,\right| < (M_i - m_i)\,(x_i - x_{i-1}).$$

但是

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_{x_0}^{x_i} f(x)\,dx + \cdots\cdots + \int_{x_{n-1}}^{b} f(x)\,dx,$$

$$(L)\int_a^b f(x)\,dx = (L)\int_{x_0}^{x_i} f(x)\,dx + \cdots\cdots + (L)\int_{x_{i-1}}^{b} f(x)\,dx,$$

因之

$$\left|(L)\int_a^b f(x)\,dx - \int_a^b f(x)\,dx\right| < \sum (M_i - m_i)(x_i - x_{i-1}) < (M-m)\,\sigma + \varepsilon\,[(b-a) - \sigma],$$

其中 M 及 m 表 f (x) 在 (a, b) 節中之極大值及極小值， σ 表令 f (x) 之顫動度大或等於 ε 之諸節之和•因爲函數 f (x) 可取黎曼積分，故可令 ε 及 σ 爲任何小，而此二積分之差乃爲零。換言之，卽此二積分之值爲相等•

由此證明法， 特別的可見凡連續函數均可取李別格積分， 是乃吾人所可直接看出者也•

若黎曼積分存在，則李別格積分恆等於黎曼積分，但若李別格積分存在， 則黎曼積分不一定亦存在也• 例如若有一函數 f (x) 當 x 爲有數時，其值爲零， 當 x 取其他數值時，其值爲 1，則此函數在 (0, 1) 節中非可取黎曼積分，蓋在任何一點， 此函數之顫動度都爲 1 也•但此函數可取李別格積分，蓋在 (0, 1) 節中之有理點點集 (set of rational points) 爲可數，因之爲可量，及其量爲零；同樣， 在此節中之其他各點所成之點集亦爲可量， 及其量爲 1, 故此函數在此節 (0, 1) 中有一李別格積分， 其值爲 1

黎李二氏積分之外，還有別種積分， 惟不如此二氏之積分之重要， 且非屬本篇範圍，故概從略之•

一九三三，十二，十，於上海交大

(1) 諸此定義係得自白兒 (R. Baire) 氏 (Ann. math pure app. (3) 3 1899, p. 4; Lecons sur les fonctions discontinues, Paris 1905, p. 70).

(2) Lebesgue, Lecous, sur l'integration, p. 22, 或 G. Robin, ocuvres scientifiques, 1, p. 47; 或 C. Jordan, cours d'analyse (20 edition), Paris, 1893, p. 36

(3) Darboux, memsire sur les fonctions discontinues, (Ann. de l'Ecole normale 1875).

(4) Riemann, Über die Darstellbarkeit einer funktion durch line trigonometrische Reihe (Habilitationsschrift, Göttingue 1854 §5); 或 Werke, publ. by H. Weber, Leipzig 1892, p. 241; 或 tran. L. Langel, Paris 1899, p. 241.

(5) 可參閱 G. Vitali, Reale 1st. Lombardo Rendic (2) 37 (1904), p. 69—73

(6) H. Lebesgue, Lecons sur l'integration, p. 30.

(7) H. Lebesgue, These, Paris 1902.

(8) H. Lebesgue, Annales de l'Ecole normale (1910); 及 ch. de la valle Poussin, Transactions of the american math. soc. 1915.

Über die philosophische Begründung der Relativitätstheorie.

Von A. BARANOFF.

[相對論發明至今，忽忽已二十餘年。此二十餘年之物理學，幾全爲相對論所磅礴充塞；其影響於人類文化者不可謂不大。惟相對論中基本假設之來源與本質，至今尙爲聚訟未决之問題，未始非當今學術界一大憾事也。吾友"班樂夫"久留心於此問題，特草此文以問世，其說偏宗"康德"而導源於"納爾松"及"培拿斯"，精深獨到，爲研求此學者別闢塗徑，海內賢達，幸注意焉！言鈞附識。]

Die physikalische Theorie hat in den letzten zwanzig bis dreissig Jahren eine erstaunliche Entwicklung durchgemacht, und es möchte scheinen, als ob das Ziel einer alle physikalischen Phänomene umfassenden Theorie nicht mehr sehr fern sein kann. Charakteristisch fur diese optimistische Einschätzung sind etwa die Worte, mit denen H. WEYL die 5. Auflage (1923) seines bekannten Buches "Raum, Zeit, Materie" einleitet: "Mit der Einsteinschen Relativitätstheorie hat das menschliche Denken über den Kosmos eine neue Stufe erklommen. Es ist, als wäre plotzlich eine Wand zusammengebrochen, die uns von der Wahrheit trennte: nun liegen Weiten und Tiefen vor unserm Erkenntnisblick entriegelt da, deren Möglich keit wir vorher nicht einmal ahnten. Der Erfassung der Vernunft, welche dem physikalischen Weltgeschehen innewohnt, sind wir einen gewaltigen Schritt näher gekommen."

Inzwischen sind noch weitere Gebiete der physikalischen Forschung erschlossen worden (Quantentheorien von BOHR, HEISENBERG und SCHRÖDINGER), trotzdem sind die Erwartungen hinsichtlich der "Erfassung der Vernunft, welche dem physikalischen Weltgeschehen innewohnt", sehr viel gedämpfter und vorsichtiger.

Der Grund hierfür ist unter anderem im Ausbleiben einer naturphilosophischen Theorie zu suchen. Physiker, wie H. WEYL, geben zwar zu, dass der philosophischen Klärung eine grosse Aufgabe zufällt, aber eine "Aufgabe von völlig anderer Art, als sie den Einzelwissenschaften zufällt." "Mit den Kettengewichten der in jener Aufgabe liegenden Schwierigkeiten behänge und behindere man aber nicht das Vorwärtsschreiten der, konkreten Gegenstandsgebieten zugewandten, Wissenschaften", fährt WEYL fort. So richtig es ist, dass die Aufgabe der Philosophie eine andere ist. als diejenige der Erfahrungswissenschaften, ein umso verhängnisvollerer Irrtum ist es, anzunehmen, dass jene "Einzelwissenschaften" imstande seien, ohne vorhergehende philosophische Klärung "vorwärtszuschreiten". Denn jede physikalische Theorie oder auch nur einfache Erklärung muss notwendigerweise philosophische Voraussetzungen enthalten. Die Philosophie freilich, die sich unter den zeitgenossischen Physikern einer gewissen Beliebtheit erfreut, tritt häufig im Gewande einer "Nicht—Philosophie" auf und hat daher wesentlich zu der Verwirrung beigetragen, unter der heute das Verhältnis von Philosophie und Physik zu leiden hat.

Der vorliegende Aufsatz bezweckt an Hand der sogenannten "Speziellen Relativitatstheorie EINSTEIN's den Nachweis zu erbringen, dass dieser Theorie sehr weitgehende "philosophische" Voraussetzungen zugrunde liegen, freilich Voraussetzungen einer sehr anfechtbaren Art, die zudem von vielen Physikern garnicht als solche anerkannt werden. Es liegt im Interesse sowohl der Physik als auch der Philosophie die Diskussion der grundlegenden naturphilosophischen Prinzipien von neuem aufzunehmen. Die Physik, im Glauben, einer philosophischen Hilfe nicht zu bedürfen, hat sich—ohne sich dessen bewusst zu sein—an sehr unbefriedigende philosophisehe Lehren angelehnt; die Philosophie andererseits—zerspalten in eine Reihe verschiedener Richtungen—hat sich bisher als wenig geeignet erwiesen, den Bedürfnissen des Physikers zu dienen. Dieser Zustand kann jedoch nicht lange bestchen bleiben, ohne dass beide Seiten den Nachteil als sehr schwer empfinden.

(1) Vorbemerkung über philosophische Schulen.

Es empfiehlt sich für uns, an derjenigen Stelle der Philosophie anzuknüpfen, wo auch historiseh der Ursprung der wissenschaftlichen Philosophie liegt: beim sogenannten HUME'schen Problem. D. HUME (1711—1776) hat die Entdeckung gemacht, dass es unter den fundamentalen Begriffen unserer Naturerkenntnis solche gibt, deren Ursprung jedenfalls nicht empirisch sein kann, weil sie über das empirisch Gegebene hinausführen. HUME selbst dachte dabei an die Begriffe der "Kausalitat" und der "Substanz"' Wie KANT später zeigte, gehören zu diesen nicht—empirischen (in der kantischen Terminologie "apriorischen") Begriffen unter anderem auch die mathematischen, insbesondere geometrischen, Begriffe. Das philosophische Problem, das den Namen HUME's trägt, ergibt sich nun aus der Frage nach dem Ursprung und dem Erkenntniswert der Begriffe "a priori". Dieses Problem hat bis auf den heutigen Tag keine allgemein anerkannte Losung gefunden.

Die heute am meisten verbreitete Schule des Empirismus (Positivismus und Phänomenalismus) leugnet sogar die Existenz eines HUME' schen P r o b l e m s , insofern sie mit dem Nachweis des nicht—empirischen Ursprungs einiger Begriffe die Frage als abgeschlossen betrachtet: jene nicht-empirischen Begriffe seien unberechtigte Bestandteile des unkritischen mensehlichen Geistes, Produkte des Aberglaubens, der Willkür oder einer "Denkgewohnheit", die es gilt, zu beseitigen. Demgegenüber hatte KANT den fundamentalen Erkenntnischarakter der apriorischen Begriffe behauptet und hatte insbesondere in der "Vernunft" und in der "reinen Anschauung" Quellen der Erkenntnis nachzuweisen gesucht, die uns gestatten, über den Rahmen des empirisch gegebenen Wahrnehmungsinhalts hinauszugehen.

Es ist wichtig, den Gegensatz zwischen der "empiristischen" und der "apriorischen" Philosophie mit aller Deutlichkeit festzuhalten. Der Empirismus behauptet die Immanenz der Erkenntnis, d. h. das Nicht-Hinauskommen über den Rahmen des empirisch gegeben en Wahrnehmungs—inhalts. Das tatsächlieh stattfindende Hinausgehen über die Empirie, wie es z. B. in jedem geometrischen Axiom geschieht, muss daher von dieser Philosophie durch besondere Zusatzhypothesen (wie "Konvention") oder gar durch Betrachtungen biologischer Art erklärt werden. Die geometrischen Axiome sind daher gemäss dem Empirismus als solche noch nicht Raumerkenntnis. Erst die

Erfahrung entscheidet über ihre Anwendbarkeit. Demgegenuber behauptet die "apriorische" Philosophie, dass jede Erkenntnis über den empirisch gegebenen Inhalt hinausgeht, indem dieser Inhalt in einer bestimmten Form erst Erkenntnis wird, einer Form, die ihrerseits ihren Ursprung in der "Vernunft" oder der "Anschauung" hat. Erkenntnis ist demnach immer schon das Ergebnis einer Verarbeitung des empirischen Wahrnehmungsinhalts durch anschauliche oder "metaphysische" "Formen der Erkenntnis", die den "apriorischen" Bestandtteil der Erkenntnis ausmachen.

Der Empirismus hat den scheinbaren Vorzug einer Voraussetzungslosigkeit. Freilich stellt sich bei näherem Zusehen heraus, dass diese "Voraussetzungslosigkeit" des Empirismus erkauft werden muss durch eine dogmatische oder formalistische Haltung, wie das am Beispiel der Relativitätstheorie (einer ausdrücklich unter empiristischer Flagge segelnden Theorie) deutlich wird. Vom Standpunkt einer nicht—empiristischen Philosophie ist eine derartige Wendung des Empirismus erklärlich, denn die Preisgabe der apriorischen Erkenntnisformen muss notwendig zur Einführung von "Ersatzformen" fuhren, die dann in einem asthetischen Formalismus und einem Dogmatismus fast unvermeidlich gefunden werden.

(2) Der Begriff der "Gleichzeitigkeit".

In den folgenden Betrachtungen über die Spezielle Relativitätstheorie wird die Kenntnis ihres physikalischen Inhalts als bekannt vorausgesetzt. In dieser Theorie spielt der Begriff der "Gleichzeitigkeit von raumlich getrennten Ereignissen" eine wichtige Rolle, indem die "absolute Gleichzeitigkeit" zu Gunsten einer "Relativen" eliminiert wird. Indem wir auf das Problem der Gleichzeitigkeit etwas näher eingehen, soll gezeigt werden, dass der Empirismus sich die Eliminierung der absoluten Gleichzeitigkeit zu Unrecht als Verdienst anrechnet, denn der Begriff der relativen Gleichzeitigkeit, wie er durch die LORENTZ' sche Ortszeit gegeben ist, widerspricht in keiner Weise der kantischen Naturphilosophie.

Es ist unbestreitbar, dass die Physik über kein Mittel vefügt, von zwei Ereignissen, die nicht an ein und demselben Orte stattfinden, die Gleichzeitigkeit festzustellen. In der Tat, dazu bedarf man gleichgehender "Uhren" an den in Frage kommenden Orten. Die Aufgabe jedoch, die "Uhren als gleichgehend zu erkennen, setzt die Existenz unendlich schneller Signale voraus. Ein nur mit endlicher Geschwindigkeit forteilendes Signal braucht Zeit, und um diese Zeit zu messen, bedarf man schon der gleichgehenden Uhren. Da nun das Licht ein nur mit endlicher Geschwindigkeit fortschreitendes Signal ist, so ist, es in der Tat nicht möglisch aus jenem Zirkel hinauszukommen. Das Problem ist physikalisch sinnlos. Nun feruht aber diese Sinnlosigkeit auf der empirischen Tatsache der endlichen Geschwindigkeit von Lichtsignalen. Es ist nicht von vorne herein ausgemacht, dass es keine unendlich schnellen Signale gibt, erst die Erfahrung belehrt uns darüber. Die Gründe für den "nicht—empirischen" Charakter des Gleichzeitigkeitsbegriffs sind somit selbst empirischer Natur, womit die Stellungnahme der Physik hierzu von vorne herein gegeben ist. In der Tat muss die Physik den Begriff der "Ortszeit" einführen. Die Ortszeiten zweier gegeneinander bewegten Systeme A und B unterscheiden sich von einander, indem die Zeit des "bewegten" Systems B (z. B. der Erde)

$$t_B = t_A - \frac{v}{C^2} x \qquad (1)$$

ist, wo t die Ortszeit des "ruhenden" Systems (z. B. des Fixsternhimmels) ist, v—die Geschwindigkeit von B relative zu A, und x—die Lagenkoordinate in Richtung der Bewegung von B. Die Uhr in B geht gemäss (1) "langsamer" als die in A, und zwar umso langsamer, je grösser x ist. Der Begriff der Gleichzeitigkeit verliert hierdurch offenbar seinen "absoluten" Charakter. Ereignisse die innerhalb des Systems A als gleichzeitig gelten, sind—auf das System B bezogen—nicht mehr "gleichzeitig" (wovon man sich durch eine einfache, von der Bezichung (1) ausgehende, Rechnung überzeugen kann).

Man verdankt H. A. LORENTZ die Einführung des Begriffs der durch (1) definierten Ortszeit, der dadurch die Unmöglichkeit sogenannter Effekte

1. Ordnung in der Bewegung von Massen relativ zum Ather nachwies.

Die Kritik des Gleichzeitigkeitsbegriffs ähnelt in gewisser Weise derjenigen Kritik, der HEISENBERG gewisse Vorstellungen der älteren Quantentheorie unterworfen hat. Es sei sinnlos, sagt er, Aussagen über solche Vorgänge im Atom zu machen, die niemals Gegenstand einer physikalischen Messung sein können, wie z. B. Elektronenbahnen. Im weiteren Ausbau dieses Gedankens ist HEISENBERG dann zu der sogenannten "Unschärferelation" gekommen, wonach Aussagen etwa über Ortskoordinaten und Impuls atomarer Massen notwendig mit einer "Unschärfe" (Ungenauigkeit) verbunden sein müssen, weil eben die empirische Messung des "Orts" unvermeidlich den "Impuls" in unkontrollierbarer Weise beeinflusst. Eine Theorie, die im Sinne der klassischen Mechanik eine vollständige Bestimmung von Ort und Impule geben wollte, wurde daher im Fall des Atoms empirisch nicht nachprüfbar sein. Durch SCHRÖDINGER, BORN und JORDAN ist die Atomtheorie sodann auf eine statistische Grundlage gestellt worden, was offenbar durch denselben Sachverhalt bedingt ist: atomaren Vorgängen lassen sich nicht eindeutige Orts- und Impuls—Koordinaten zuordnen, sondern nur wahrscheinliche, d. h. statistisch definierte.

In allen diesen Fallen handelt es sich um die Kritik empiriseh nicht naehprüfbarer Vorstellungen und Begriffe. Es ist an dieser Stelle wichtig einer Verwechslung dieser Kritik mit einer anderen, gegen die Gültigkeit geometrischer Raumvorstellungen gerichteten Kritik entgegenzutreten. Besonders von Seiten der empiristischen Philosophie wird manchmal die Behauptung aufgestellt; als sei die EUKLIDische Geometrie aus genau denselben Grunden fur die Deutung physikalischer Vorgänge zu verwerfen, aus denen z. B. die Voraussetzung gleichgehender Uhren und Atommodellen physikalisch unhaltbar ist. Es bestcht jedoch zwischen der Gruppe dieser Vorstellungen und denen der EUKLIDischen Geometrie ein sehr wesentlicher Unterschied: während die Vorstellung des Atommodells und die Vorstellung der Gleichzeitigkeit die materiale Beschaffenheit der Natur betreffen (Messuug der Gleichzeitigkeit setzt unendlich schnelle Signale voraus; Messung atomarer Vorgänge setzt die

Existenz subatomarer Messapparate voraus), handelt es sich bei den geometrischen Vorstellungen und die formale Beschaffenheit unserer Naturerkenntnis. Materiale Vorstellungen (ein grobes Beispiel: die Marsbewohner) können als gegenstandslos verworfen werden,ohne dass hierdurch die materiale Naturerkenntnis auf anderen Gebieten beeinflusst wird. Die Preisgabe einer formalen geometrischen Vorstellung jedoeh zicht unvermeidlich Konsequenzen nach sich, die die gesamte materiale Naturerkenntnis berühren. Ein einfaches Beispiel möge das erläutern: angenommen, die Winkelausmessung eines aus Lichtstrahlen gebildeten Dreiecks ergebe als Winkelsumme einen anderen Wert als 180 ; wollte man hieraus auf die Ungültigkeit des EUKLIDischen Satzes über die Winkelsumme schliessen, so würde dieser Schluss implizite eine Voraussetzung über die Geradlinigkeit der Lichtstrahlen enthalten, d. h. das Aufgeben eines geometrischen Satzes führt in diesem Fall zu einer dogmatischen Festsetzung über einen materialen Vorgang (Lichtausbreitung).

Während die Kritik materialer Vorstellungen, die aus einem empirischen Grunde gegenstandslos sind, Sache der empirischen Wissenschaft selbet ist, führt die Kritik der EUKLIDischen Geometrie auf ein Problem gänzlich anderer Art, das man als ein philosophisches zu bezeichnen pflegt.

(3) Das Prinzip von der Konstanz der Lichtgeschwindigkeit.

Historisch war die LORENTZ" sche Ortszeit allerdings ein Glied in der Entwicklung, die dann zur Aufstellung der Speziellen Relativitatstheorie durch EINSTEIN geführt hat. Diese Theorie wurzelt aber letzten Endes in den Schwi ꞏigkeiten, die mit Lichtatherhypothese im Zusammenhang stehen. Alle Versuche, den Lichtather als ein fur optische Vorgange bevorzugtes Bezugssystem empirisch festzustellen, verliefen ergebnislos. Diese Schwierigkeit löste EINSTEIN durch Preisgabe der anschaulichen Vorstellungen von Raum und Zeit, die der klassischen Mechanik zugrunde lagen, und durch Aufstellung eines neuen Prinzips, demzufolge die Lichtgeschwindigkeit gegenüber allen relativ zu einander gleichförmig bewegten Systemen denselben Wert hat. Dass dieses sogenannte Prinzip von der Konstanz der Lichtgeschwindigkeit unanschaulich ist, erkennt man daran, dass es den elementaren geometrischen Vorstellungen widerspircht und daher auch nicht etwa zeichnerisch konstruierbar ist. Dieses Prinzip führt zu einigen Konsequenzen, wie etwa Verkürzung bewegter Masstabe, Nachgehen bewegter "Uhren" u. a. Bemerkenswert ist es ferner, dass EINSTEIN zu einer von LORENTZ abweichenden Ortszeitdefinition kommt, indem innerhalb der Speziellen Relativitatstheorie die Beziehung gilt.

$$t_B = \frac{t_A - \frac{v}{c^2} x}{\sqrt{1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2}} \qquad (2)$$

Aus dem bisher Gesagten geht schon hervor, dass es sich hier um eine Theorie handelt, die auch fur die Philosophie von erheblichem Interesse ist. Denn die Relativitätstheorie hebt anschaulich geometrische Vorstellungen zu Gunsten eines der Anschauumg widersprechen Prinzips auf, d. h. sie betrifft die Form unserer Naturerkenntnis und berührt dadurch unmittelbar philosophische Fragen. Es empfiehlt sich daher das Prinzip, welches zur Aufhebung der EUKLIDischen Geometrie geführt hat, einer Untersuchung zu unterziehen.

Es wird manchmal—und besonders in philosophischen Abhandlungen— die Behauptung aufgestellt, das Prinzip von der Konstanz der Lichtgeschwindigkeit sei empirischen Ursprungs. Das kann jedenfalls nicht so gemeint sein, dass man durch unmittelbare Erfahrungen die Unhaltbarkeit der anschaulichen raum— zeitlichen Vorstellungen erkannt hatte. Solche Erfahrungen sind nicht möglich, denn unsere anscha ulichen Vorstellungen treten im Bewusstsein als notwendig und allgemein auf und sind die notwendige Form jeder unmittelbaren Naturerkenntnis. In der Tat sind auch die Erfahrungen, die zur Aufstellung der Prinzips geführt haben, in keiner Weise zwingend fur die Annahme dieses Prinzips. Schon allein die Vorstellungen über die Natur des Lichts beruhen auf theoretischen Annahmen der elektromagnetischen Lichttheorie, und man hatte ebenso gut die gesamte elektromagnetische Theorie in Frage ziehen können, als diese Theorie beizubehalten und stattdessen die klassische Mechanik derart zu modifizieren, dass die Optik ihr nicht widerspricht. Bekanntlich ist es der MICHELSON'sche Interferenzversuch gewesen, der als wichtigste empirische Stütze der Speziellen Relativitatstheodie gedient hat. Das Ergebnis dieses Versuchs kann zwar durch das Lichtgeschwindigkeitsprinzip "erklärt" werden, aber das bedeutet nicht, dass diese Erklärung die einzig mögliche ist (E. SCHRÖDINGER hat kürzlich die Bemerkung gemacht, dass die Diskussion der Speziellen Relativitätstheorie ohne Berücksichtigung der quantentheoretischen Ergebnisse ausgeführt worden sei. Bei Berücksichtigung der Quantentheorie konnte man daher unter Umständen zu anderen Ergebnissen oder Deutungen kommen).

Es wird ferner darauf hingewiesen, dass gewisse Folgerungen der Relativitätstheorie eine empirische Bestätigung erfahren haben, so dass die Prinzipien auf diese Weise durch Erfahrung bewiesen werden. Dieser Einwand ist insofern richtig, als in der Tat die Übereinstimmung der Erfahrung mit theore tischen Folgerungen für die Richtigkeit der Theorie spricht. Es ist jedoch hierbei folgendes in Betracht zu ziehen:

E r s t e n s : die Spezielle Relativitätstheorie ist darauf zugeschnitten, die Diskrepanz zwischen der elektromagnetischen Lichttheorie und gewissen Versuchen (insbesondere dem MICHELSON'schen Versuch) zu beseitigen. Sie tut es durch Änderung der Mechanik. Auch wenn der Fehler nicht in der NEWTON'schen Mechanik, sondern in der Lichtäthertheorie stecken würde, kann die Änderung der Mechanik sehr wohl dazu führen, dass die neue Theorie (obgleich falsch) dennoch eine ganze Reihe von Erscheinungen richtig wiedergibt. Die Übereinstimmung der Relativitätstheorie mit einigen, bisher theoretisch unerklärbaren, Tatsachen ist daher noch nicht hinreichend fur den Beweis der Richtigkeit der Theorie.

Hinreichend—und damit kommen wir zum z w e i t e n Einwand—wäre erst die Übereinstimmung aller Konsequenten der Theorie mit der Erfahrung. Aber dieser Zustand ist offenbar fur keine physakalische Theorie zu erreichen, weil die Zahl der Konsequenzen unendlich ist, während die Erfahrung immer nur eine endliche Zahl von Tatsachen feststellen kann. Jede physikalische Theorie ist in dieser Hinsicht nicht abgeschlossen, d. h. es ist immer mit der Möglichkeit zu rechnen, dass sich die empirische Unzulänglichkeit der Theorie erweist. Eine auch noch so grosse Anzahl empirischer Bestätigungen fällt daher nicht ins Gewicht gegenüber einem nicht—empirischen, gegen die Theorie gerichteten, Argument (philosophischer oder logischer Art).

Leugnet man--auf dem Boden des Empirismus stehenddas Vorhandensein einer Naturphilosophie, durch die empirische Argumente abgeschwächt werden konnten, so ist dadurch für die Verteidiguug der Relativitätstheorie offenbar nichts gewonnen, denn es kann vom Standpunkt der Empirie hinsichtlich der Grundloagen der Relativitätsheorie keine eindeutige Entscheidung geben. Man kann allenfalls "denkökonomische" Gesichtspunkte ins Feld führen und erklären, dass es angesichts der vielen Bestätigungen der elektromagnetischen Theorie bequemer sei, sie beizubehalten und stattdessen die durch E. MACH bereits in Misskredit gebrachte NEWTON'sche Mechanik zu opfern. Aber derartige Überlegun gen sind gewiss ebensowenig zwingend, wie die Versuche selbst. Beachtet man das, so wird klar, dass das Prinzip von der Konstamz der Lichtgeschwindigkeit letzten Endes dogmatisch ist, worin übrigens der konsequente Empirist keinen Vorwurf sehen kann ; denn offenbar muss jede prinzipielle, d. h. allgemeine, Behauptung über den Rahmen des empirisch Gegebenen hinausführen und kann daher für den Empiristen nicht anders als dogmatisch sein.

Trotzdem wäre es voreilig, von der Unhaltbarkeit der empiristischen Philosophie auf die Unhaltbarkeit der Relativitätstheorie zu schliessen, denn es ist noch immer möglich, dass die Sätze der klassischen Naturphilosophie in ihrer KANTischen Fassung nicht richtig sind, und dass die Relativitätstheorie durch bessere philosophische Argumente, als sie der Empirismus zu liefern vermag, gestützt werden kann.

Wir stehen daher vor folgender Alternative: die Spezielle Relativitatstheorie ist entweder physikalisch falsch, oder aber sie bedarf einer naturphilosophischen Begründung.

(4) Die philosophische Fragestellung.

Das philosophische Problem der Relativitätstheorie ist das von der anschaulichen Erkenntnis. D. h. die Frage ist die anschaulich klare geometrische Raumvorstellung, wie sie in der EUKLIDischen Geometrie systematisch vorliegt, eine Erkenntnis der objektiven Natur?

Es ist nicht unsere Absicht, auf diese Frage eine Antwort zu geben. Es soll ledlglich versucht werden eine Darstellung der möglichen Antworten zu geben, und daher wenigstens etwas sur Klärung des Problems als solchen beizutragen.

Wir haben schon im Abschnitt (1) gesehen, dass die empiristische Philosophie einerseits und die nicht-empiristische andererseits verschiedene Auffassungen über den Ursprung von Erkenntnis haben. KANT hatte den apriorischen Charakter der Anschauung gelehrt, während der Positivismus die Ansicht vertritt, dass jede Erkenntnis und damit auch die der Geometrie empirischen Ursprungs sei. Dieser "naiven" Auffassung des Empirismus tritt aber eine etwas kritischere entgegen, wonach die Geometrie wegen der Allgemeinheit und Notwendigkeit ihrer Aussagen unmöglich der Empirie entstammen könne. Auf dem Boden des Empirismus stehend, bleibt daher nichts anderes übrig, als der Geometrie den Charakter der Erkenntnis überhaupt abzusprechen und sei entweder als ein System von willkürlichen Sätzen oder als ein System von Sützen, deren Aufstellung durch anderweitige Gesichtspunkte bestimmt ist, anzusehen. Dieser "Kritische" Empirismus, zu dem auch EINSTEIN's Auffassung zu rechnen ist, gewährt der anschaulichen Raumvorstellung eine b e s c h r ä n k t e Erkenntnisgültigkeit, indem ihr Anwendungsbereich durch gewisse physikalische Prinzipien (z. B. das Prinzip von der Konstanz der Lichtgeschwindigkeit) eingeschränkt wird. Wir hatten schon früher das physikalische Prinzip der Speziellen Relativitätstheorie als ein dogmatisches erkannt, sodass also die Beschränkung des Erkenntnischarakters der Anschauung in diesem Fall ebenso als eine dogmatische zu bezeichnen ist, Beide Abarten des Empirismus—der naive und der dogmatische—sind im Hinblick auf ihre philosophische Begründung von einer derart auffälligen Ungereintheit, dass sie kaum noch einer Widerlegung bedürfen. Gegen den naiven Empirismus (oder Realismus) ist einzuwenden, dass er an der (zunachst einmal psychologisch gegebenen) Tatsache der mit dem Anspruch auf Allgemeinheit und Notwendigkeit auftretenden anschaulichen Vorstellungen vollkommen vorbeigeht. Gegen den "dogmatischen" Empirismus, der den Fehler des naiven Realismus allerdings vermeidet, ist aber der Vorwurf zu erheben, dass Dogmatismus auf diesem Gebiet einen durchaus verführten Verzicht bedeutet. Obendrein ist ein "dogmatischer Empirismus" erst recht unhaltbar, denn wo das Dogma entscheidet, da bleibt für der Empirie überhaupt kein Raum.

Dem Empirismus entgegengesetzt steht die apriorische Philosophie, die mit KANT den apriorischen Ursprung der Raumvorstellung und gleichzeitig den unbeschränkten Erkenntnischarakter dieser Raumvorstellung behauptet. Vom Standpunkt KANT's wäre die Relativitätstheorie abzulehnen, denn die anschauliche Erkenntnis könnte unmöglich durch empirische oder dogmatische Gesichtspunkie eine Korrektur erfahren. Nun ist neuerdings von P. BERNAYS (einem Mitarbeiter D. HILBERT's) da auf hingewiesen worden, dass man durch eine schärfere psychologische Analyse des Wesens der Anschauung zu einer ähnlichen Beschränkung des Erkenntnischarakters der Anschauung gelangen konnte, wie sie durch die Relativitästheorie nahegelegt wird. Nach BERNAYS haften der KANT-FRIES'schen Auffassung gewisse Unklarheiten an, sodass es nicht ausgeschlossen ist, dass die Überwindung dieser Mängel auch zu der philosophischen Begründung der Relativitätstheorie führen konnte.

Wir wären an dieser Stelle nicht auf jenen BERNAYS'schen Gedanken eingegangen, wenn nicht durch ihn wenigstens ein Problem formuliert wäre, das—wie die bisherigen Auseinandersetzungen zeigen—von grosser Bedeutung für die Physik werden kann. Das Ziel der von BERNAYS angedeuteten Untersuchung wäre die Auffindung einesPrinzips oder einer Norm, mit deren Hilfe eine Beschränkung des Erkenntnischarakters der Anschauung vorgenommen werden könnte. Diese Beschränkung würde im Gegensatz zu den auf empiristischem Boden entstandenen Lehren nicht dogmatisch sein, sondern musste mit den Mitteln der Philosophie selbst begründet werden konnen.

Die verschiedenen Stellungnahmen zum Problem der anschaulichen Erkenntnis lassen sich in einem Schema darstellen, wobei die mit dem Namen BERNAYS ausgefüllte Stelle nicht ein philosopbisches System, sondern ein noch offenes Problem enthalt. Eine ausführliche Darstellung dieses Problems oder gar ein Versuch, es zu lösen, liegt nicht in der Absicht des vorliegenden Aufsatzes. Wenn es gelingen sollte, die Aufmerksamkeit der Leser auf das Vorhandensein eines derartigen Problems hinzulenken, so ist der Zweck dieser Ausführungen vollauf erfüllt.

Stellungnahmen zum Problem der anschaulichen Erkenntnis.

		Ursprung der Anschauung	
		empirisch	nicht-empirisch
Erkenntnis-charakter der Anschauung	Unbeschränkter Erkenntnis-charakter	Naiver Realismus	Apriorismus (KANT)
	Beschränkter Erkenntnis-charakter	Dogmatischer Empirismus	? ? (BERNAYS)

Zum Schluss sei noch auf einige Literatur hingewiesen, die dem Interessierten vielleicht von Nutzen sein kann:

1) P. BERNAYS, Die Grundgedanken der Fries'schen Philosophie in ihrem Verhältnis zum heutigen Stand der Wissenschaft. In Band V. Heft 2 der "Abhandlungen der Fries'schen Schule", Göttingen. 1930.

2) L. NELSON, Ist metaphysikfreie Naturwissenschaft möglich? Erschienen in der Sammlung "Die Reformation der Philosophie", Leipzig, 1918.

自超短波至紅外波

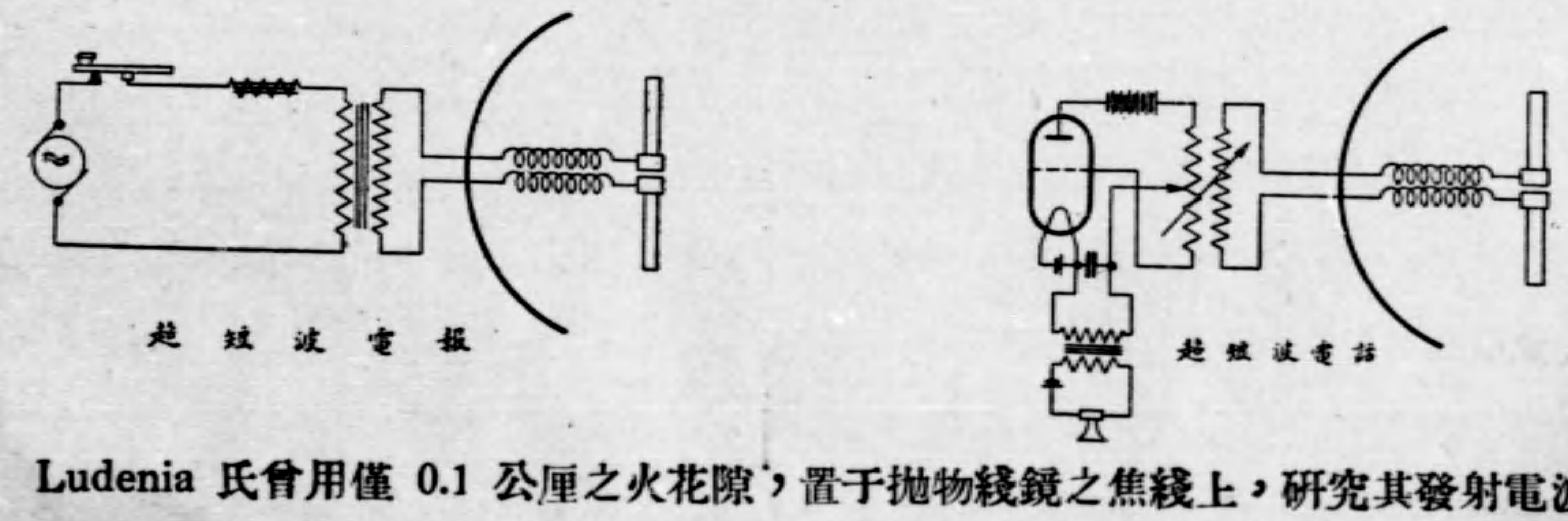
包可永

Maxwell 與 Hertz 既發見電磁波與光波係屬同一類。但尋常無綫通信用之電磁波，其波長範圍爲自數萬公尺至八公尺左右。而光波之波長範圍，則僅爲 0.4 μ 至 0.7 μ (1 μ = 1/1000 公厘)。自八公尺至 0.7 μ, 其間相隔一極大之波長範圍。包刮約二十三重音階。挽近無綫電交通日漸擴展。原有波長範圍漸將不敷應用。遂有探討上述波長範圍之需要。同時眞空管及供此種探討用之儀器及工具，在理論及實用方面，亦隨臻完美。故從事於上述波長範圍之開發工作，已大有人在。對於此種電波之產生，發射，探收等方法，及其傳播之特性，漸有端倪。推而可測其將來之用途何在，及重要性何若也。

（一） 產生方法

(a) 波長帶 8 m 至 1.5 cm. 此帶內之電波，或名之曰超短波。因其短于尋常之短波也。產生此種電波，仍可用 Hertz 氏最初賴以發明電波之佈置。卽于雙端振盪綫 (Dipole) 之中心點，置一火花隙是也。惟賴此項佈置所產生者，爲衰幅式之電波 (damped wave)。衰幅式電波之普通缺點，乃其擾及他波之作用。致探收時，選拔隔離不易。但此缺點可用方向性發射以避之。按 Hertz 氏振盪佈置，每秒鐘可發出之能量 E, 爲 $E = \frac{1}{2} n CV^2$。n 爲每秒鐘內電量積聚之次數。C 爲振盪佈置之積電率。V 爲火花隙之打穿電壓、C 與波長有關，不可擅改。故如欲增加振盪能率，惟有增大 n 或 V 之法。V 則須與火花隙之長度偕增。火花隙長，則衰幅率 (decrement) 大。故 n 數亟應提增。增加 n 之法，可用眞空管產生等幅 (undamped) 之振盪電壓，或用交感電路 (conpled circuits) 產生微衰幅 (weakly damped) 之振盪電壓，作爲激起超短波振盪用之打穿電壓。利用此法，Esan 氏及 Busse 氏于每秒鐘得火花 3×10^5 次。故發射能率可增至 50 Watt, 而所發之超短波，其波長爲 30 cm 云。(圖一)

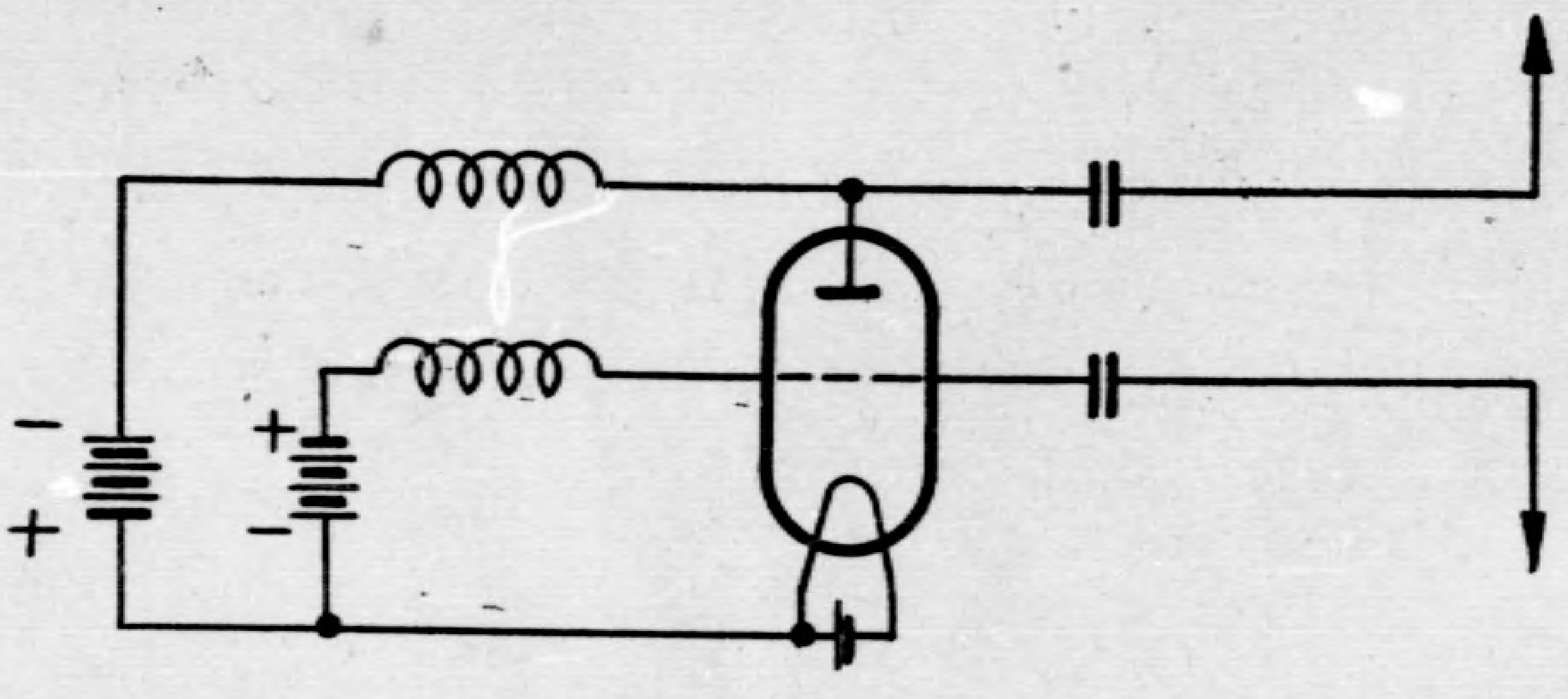
圖一 火花隙超短波產生器



Ludenia 氏曾用僅 0.1 公厘之火花隙，置于拋物綫鏡之焦綫上，研究其發射電波之情狀。所得結果，則發射能率．除與雙端發射綫之尺寸，及激起振盪之電流型綫 (curve form) 有關外，更于火花隙之電極材料有關。此事之如何解釋，發射之過程若何，須留待後日闡明之也。

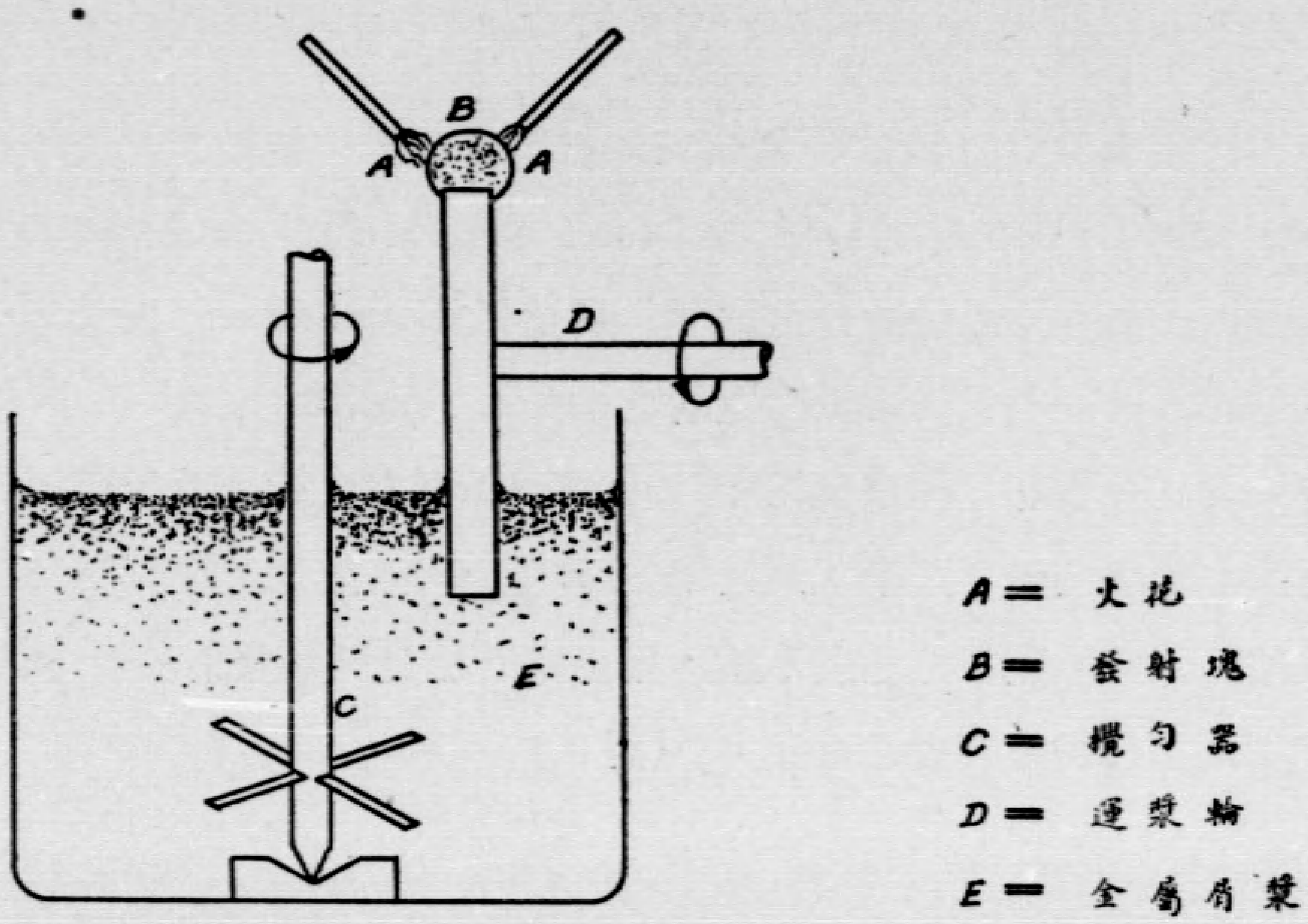
用眞空管亦可產生等幅超短波。尋常三極眞空管可產生波長 80 公分以上之電波。較 80 公分更短之電波，則用尋常自勵回飼 (self excited feed back) 綫路，殊不易得良好之結果。如欲產生數公寸或數公分之電波，最好用 Barkhausen 氏及 Kurz 氏之倒場法 (braking field method). 其法使柵極電位 (grid potential), 高出于屏極及陰極。使電子之越過柵極者，在柵屏二極之倒場中，受到一種倒力。於是電子在柵極之附近，起一種擺動之運動。此項擺動之週率，與綫路之 L 或 C 量無關。僅視柵極電壓及屏極圓筒直徑而變。波長旣與屏極直徑相差不遠，則眞空管己身已爲發射體。故將眞空管置於拋物綫鏡之焦點上，卽得方向性之發射。(圖二)

圖二　倒場法產波綫路



(b) 波長帶 3.5 cm 至 1.8 mm, 及 1.8 mm 至 30 μ. 此種電波之產生，非將火花隙縮至極小度不可。同時發射體亦隨之而微小。Glagolewa - Arkadiewa 夫人之方法，以金屬粉屑攪勻於漿狀液中。使粉屑與粉屑間發生無數之火花，乃致發射此類極短之電波。此種發射體，不若 Hertz 之氏僅用一個大型雙端發射綫，但亦不若射熱物質之以每個分子爲發射單位。故其所產生之波長，恰亦在 Hertz 式電波及熱波之間。該項發射佈置可名之曰集衆發射器。所產生之波長，如取用其基本波 (fundamental wave)，則可短至 1.8 mm 如取用其倍週波 (harmonics), 則可短至 30 μ. 濾取倍週波之法，可用折射柵。(Diffraction grid). (圖三)

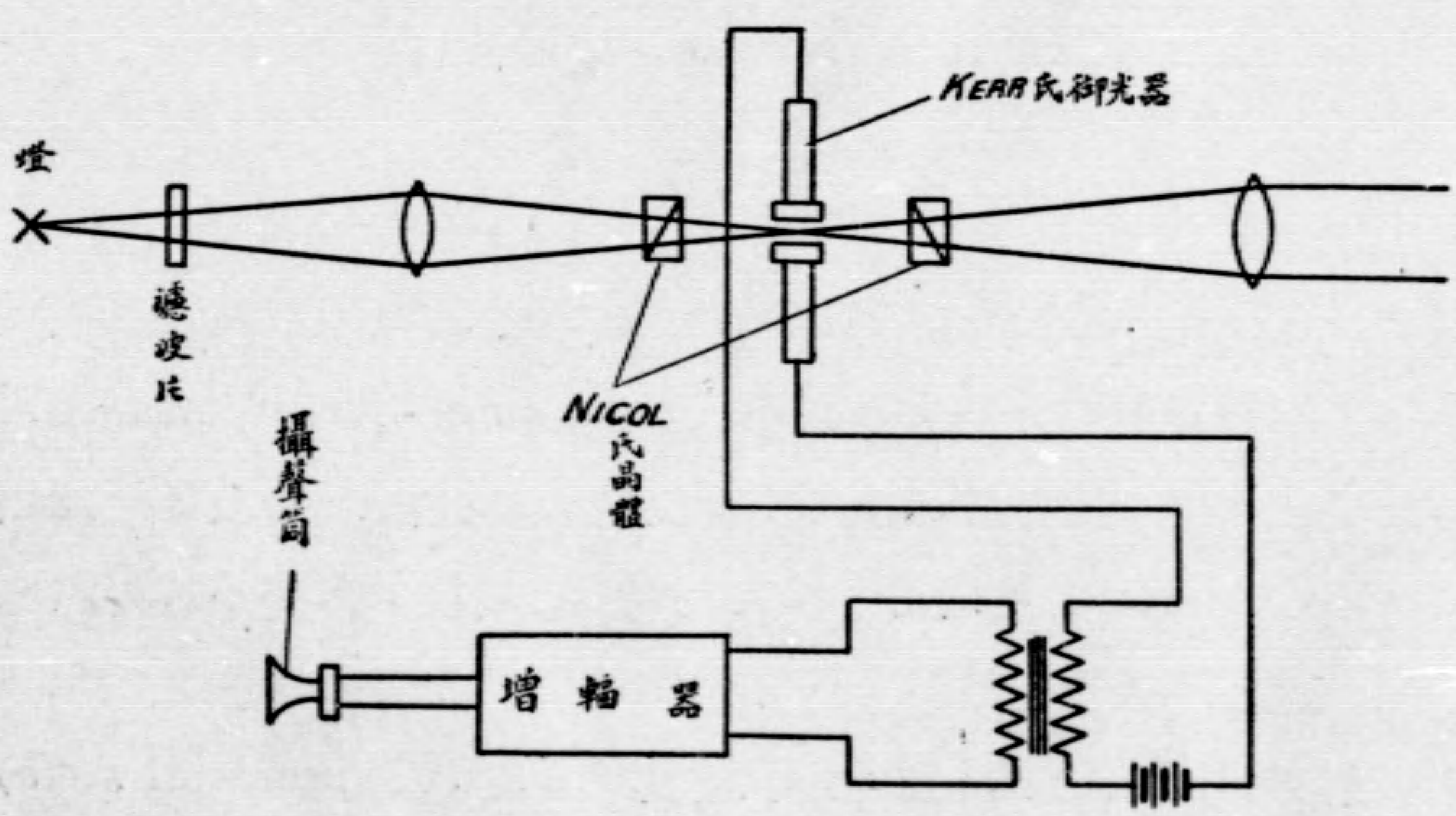
圖三 集衆發射器



重負荷之汞汽燈，所發熱波，其波長帶有在 30μ 至 400μ 範圍之內者。是賴上述集衆發射器，物理學家已將最短之電波，引渡至最長之熱波矣。

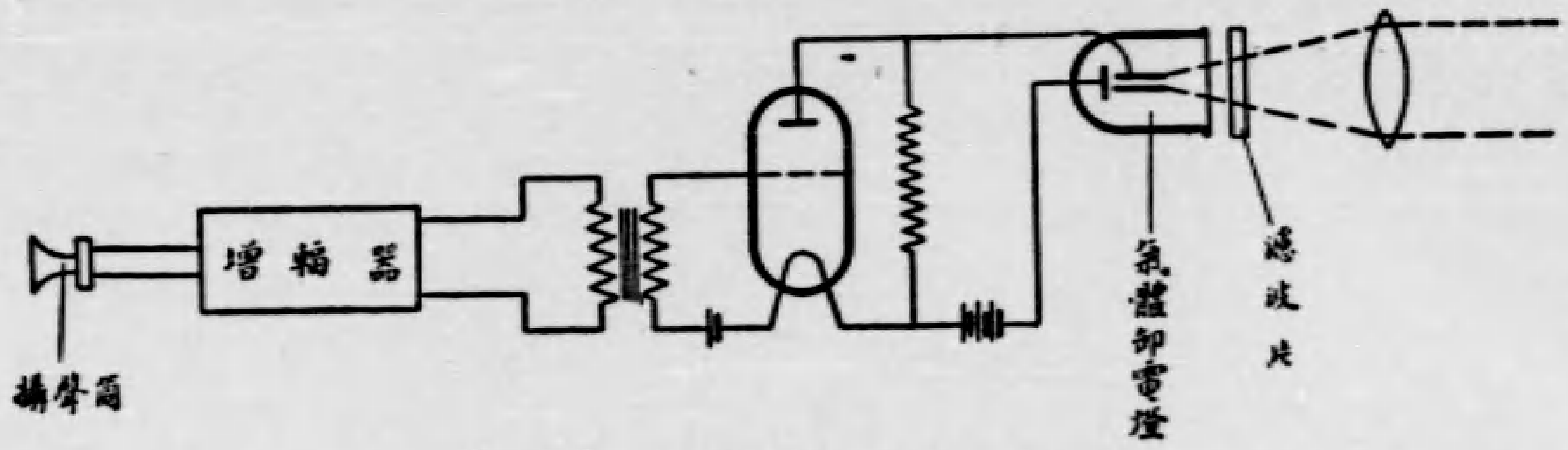
(c) 波長帶 400 μ 至 0.7 μ. 此波長帶爲目不能見之熱波。卽紅外波 (Infra red wave). 產生之法，可用前節所述之汞汽燈。尋常各種工業用燈類，亦發出多量之熱波。該項熱波如用以通信，須用絃式電流儀 (String galvonometer)，或畫電鏡 (Oscillogreph mirror)，或 Kerr 氏御光器 (Kerr light relay) 以調幅 (to modulate). 其法均用一固定之發波燈。其所發之波，經過上述御光器之任何一種，以調節被通過之波之强度。(圖四)

圖四 KERR 御光器調幅紅外波



除此法外，亦可將發波燈本身所得之能量，用調幅之法，使其隨發言人聲浪而變易，以致發生强弱之熱波。此種發波燈，僅許有極微之隋性。凡氣體卸電燈 (gas discharge lamp) 隋性恆少，可用。所用氣體大都爲氖 (Neon), 氦 (Hellium), 二養化炭 (co^2),氬 (Argon) 及鉀汽 (Potassium vapour) 等。(圖五)

圖五 氣體卸電燈調輻紅外波



(二) 發射方法

凡電波之可以聚向一規定之方向發射者，其所需之發射能力，可較無方向性發射爲少。故尋常無綫短波電台之用於跨洋通信者 (transocean Communication), 恆有方向性之天綫設備。按最完美之發射設備，莫若一拋物綫鏡。但如欲爲波長數十公尺之電波，構一拋物綫鏡，勢將龐大不便。故彼種方向性天綫，係用多數之放射體，佈成一定之陣圖，各飼以相位相當之振盪電流，致湊成其方向性也。此項佈置雖有一特强之發射方向，但不能避免他方向之完全無電波發射。非若用拋物綫鏡製之射光燈，可以保持光道以外空間之黑暗也。

自超短波以至紅外波，波長逐漸減短，拋物綫鏡逐漸易于應用。蓋拋物綫鏡之尺寸。應遠大于波長也。在超短波之範圍內，拋物綫鏡之直徑，往往亦尙須大至數十公尺者。至於紅外波帶，則拋物綫鏡之尺寸問題已無困難。所用拋物綫鏡，在超短波帶可爲金屬網或金屬片，在紅外波帶則需光滑之水銀或他種金屬之鏡面。

用方向性發射通信之優點，除節省電力外，尙可避免與他波之互擾。蓋自拋物綫鏡所射出之電波沿規定之波道而行。非在該波道中，不得收到電波也。

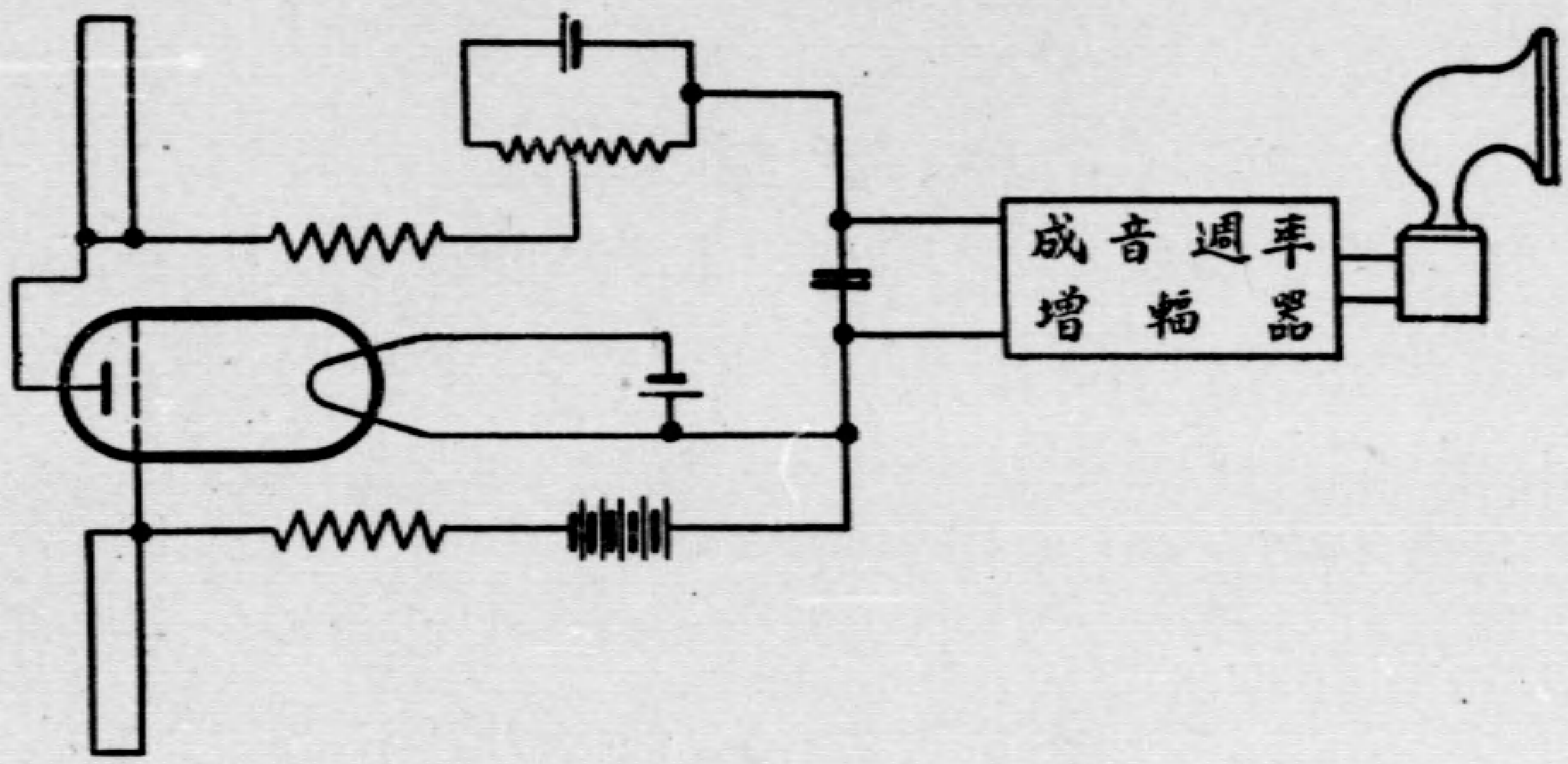
(三) 探收方法

(a) 波長帶 8 m 至 3.5 cm. 波長數公尺之電波，其探收及增幅方法，恆採用疊波回飼法 (superregeneration). 即用另一較聲音週率爲高之輔助週率振盪電壓，疊加之于回飼檢波器 (regenerative audion) 之柵極綫路屏或極綫路上。檢波器得高低不同之電壓，乃隨輔助週率，擺動於自振狀態及將振狀態之間。所收之信號，乃或斷續之衰輻式電波組 (damped wave series). 此項電波組之輻，視信號之强弱而增減。濾去高週波後，即得信號本身。

數公寸之電波，則用上節所述方法，尙未能得圓滿結果。仍以雙端諧振綫探收，而納之於晶體檢波器爲善。由檢波器，再取其成音週率而放大之。但晶體檢波器之接觸點，時須對準。而超短波收波器，常須置於離地面甚高之地位，故甚不便。

如用眞空管收波， 則儘可置之於高處， 而由地面通綫上去。 Barkhausen 氏及 Kurz 氏之倒場法。至此亦可應用。其法可將眞空管置於雙端諧振綫之中心點，用電位器 (potentiometer) 此調整屏極之倒場。使管中之電子擺動，與所探收之電波諧振。同時該眞空管亦卽是檢波器。(圖六)

圖六 倒場法收波綫路

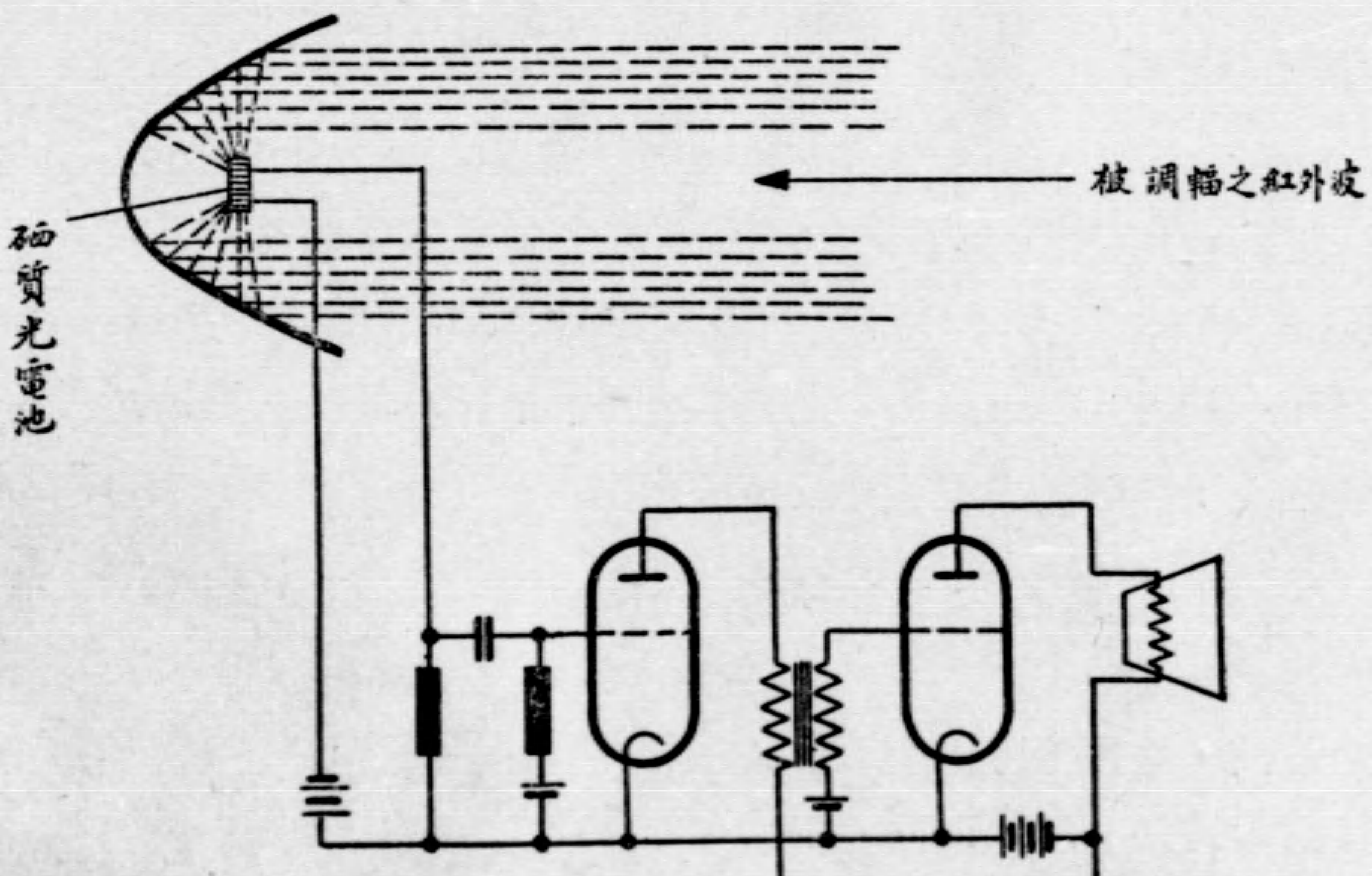


如收波器亦用拋物綫鏡，則鏡面須向電波傳來之方面。

(b) 波長帶 3.5 cm 至 30 μ. 此種電波之探收，現尙祇能測其熱以證之。測熱之器爲熱電偶 (Tkermocouple) 或雙阻測熱器 (Bolometer).

(c) 波長帶 30 μ 至 0.7 μ. 探收此種紅外波之法，亦可用上節所述之各項測熱器。惟如通信或通話時，其電波須受信號週率之調幅，則上項測熱器皆因其有甚大之隋性而

圖七 紅外波探受器



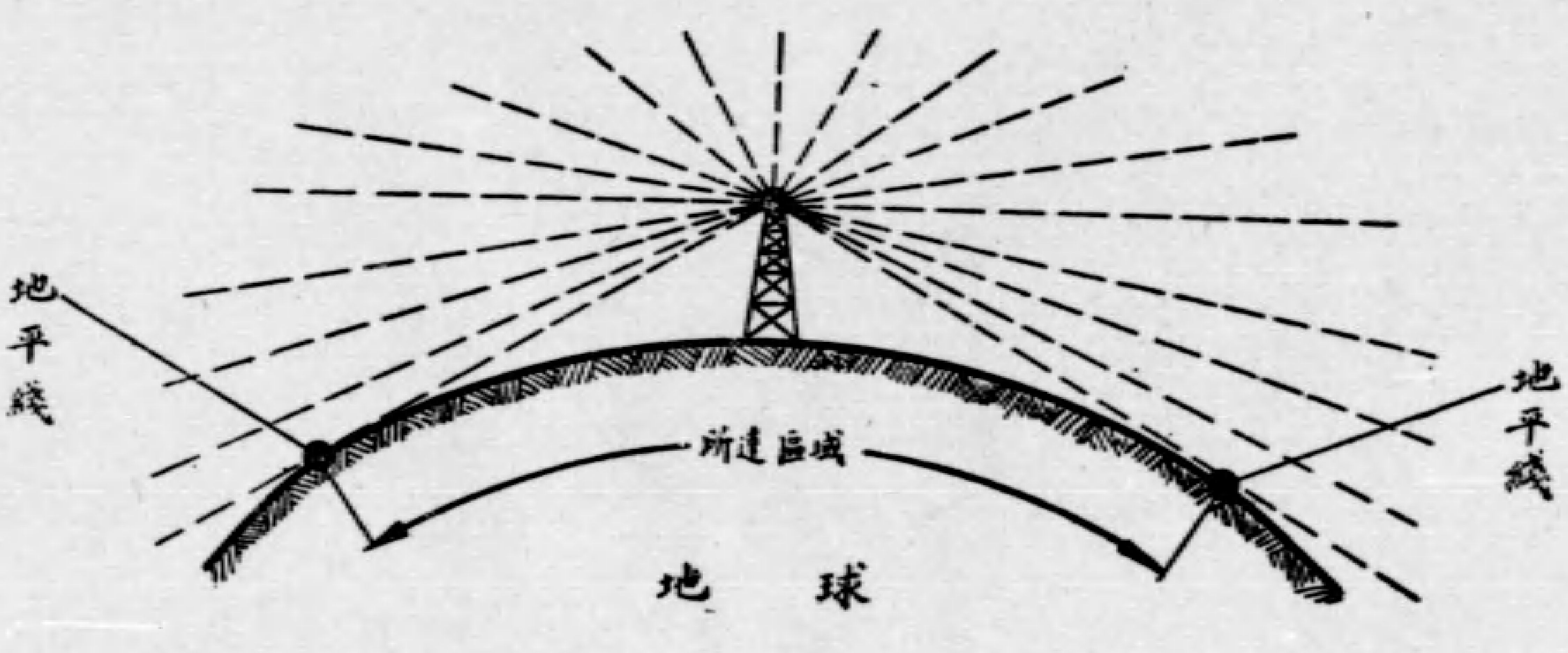
不適用。(圖七)另有應用光電效應(photo electric effect)原理之各種方法爲較善。如硒(Selenium),亞銻酸鹽(Antimonite),輝銅礦(Molybdenite),硫化金屬(Metal Sulphur Compounds)等之晶體之電阻,受强光而減,受弱光而增。紅外波對于硒質,亦可如尋常光波之增減其電阻。又如鹼類金屬,受光波或紅外波,即發射電子。電子之數量,亦視電之强弱而異。

應用電阻變易方法時,所用晶體層,須極薄者,因太厚則電波不克深入層中,同時隋性亦增大。隋性最少者,厥惟用鹼類金屬發射電子之法。故凡調幅週率高于音週率者,祗用此法。

(四) 傳播特性

波常短波傳播時,其所以能越大陸海洋而達數千里以外者,吾人知其賴 Heaviside 氏天空離子層之故也。查短波向上空行,遇離子層而復折射向下。然八公尺以下之電波,遇離子層時,並不折下。反穿過之,脫離地球而不復回。故不適宜于遠距離通信,致於短矩離通信,則此種電波似頗適宜。蓋因收發佈置簡單,且易于利用方向性發射,及方向性探收也。(圖八)又此種電波皆沿直綫而傳播,故探收點,應設于由發射點出發之

圖八 直綫發射所達區域



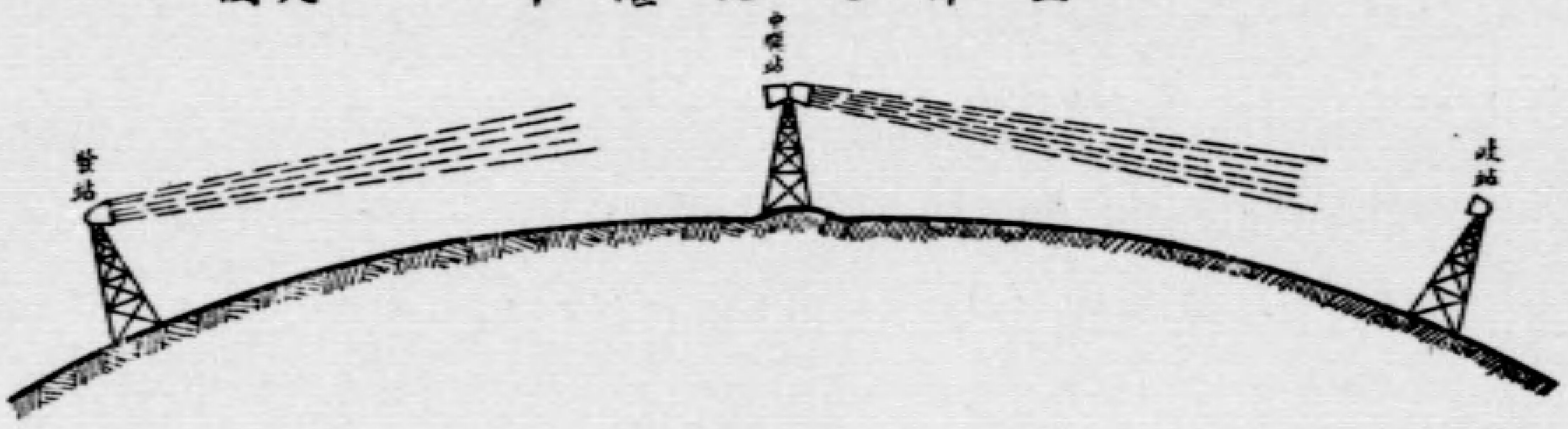
直綫可達之處。凡探收點之在發射點遠眺地平綫之下者,不能探收該發射點之信號。故每一發射點,祇波及到一小部份之地面。又利用狹道之方向性發射時,不致影響到另一並行之波道。此種電波既不循天空離子層而行,遂不受該離子層之影響。故尋常短波傳播時之起伏(Fading),回聲(Echo),信號加長(Signal lengthening)等現象,皆無。無起伏現象,則通信安全。無回聲,無信號加長現象,則適宜于快速度之信號傳遞。天電擾亂,之在此長波帶內者,甚少。土地對于此種電波之吸收性,甚大。沿地面傳播時,衰幅率較尋常電波爲大。故發射點與探收點,最好皆設于高處。蓋一則直綫可達距離可擴遠,二則波道離地面可較高也。發收二點之間亦不可有山峯等阻隔。一公寸以下之電

波，易爲水分所吸收。空氣中之水汽，使其不能達遠。于是一公寸以下之電波，在通信事業上，遂失其重要性，但電波短至數μ時，水汽之吸收性又無。除水汽外，空氣中之二養化炭，對于 2.4 μ 以上之電波，亦有吸收性。故自 2.4 μ 至 0.7 μ 之紅外波，又可適用於通信。再，空氣中之離子數，對於數公尺以下之電波，亦有衰輻作用。此作用尤以日光强盛時爲甚。

（五） 用途

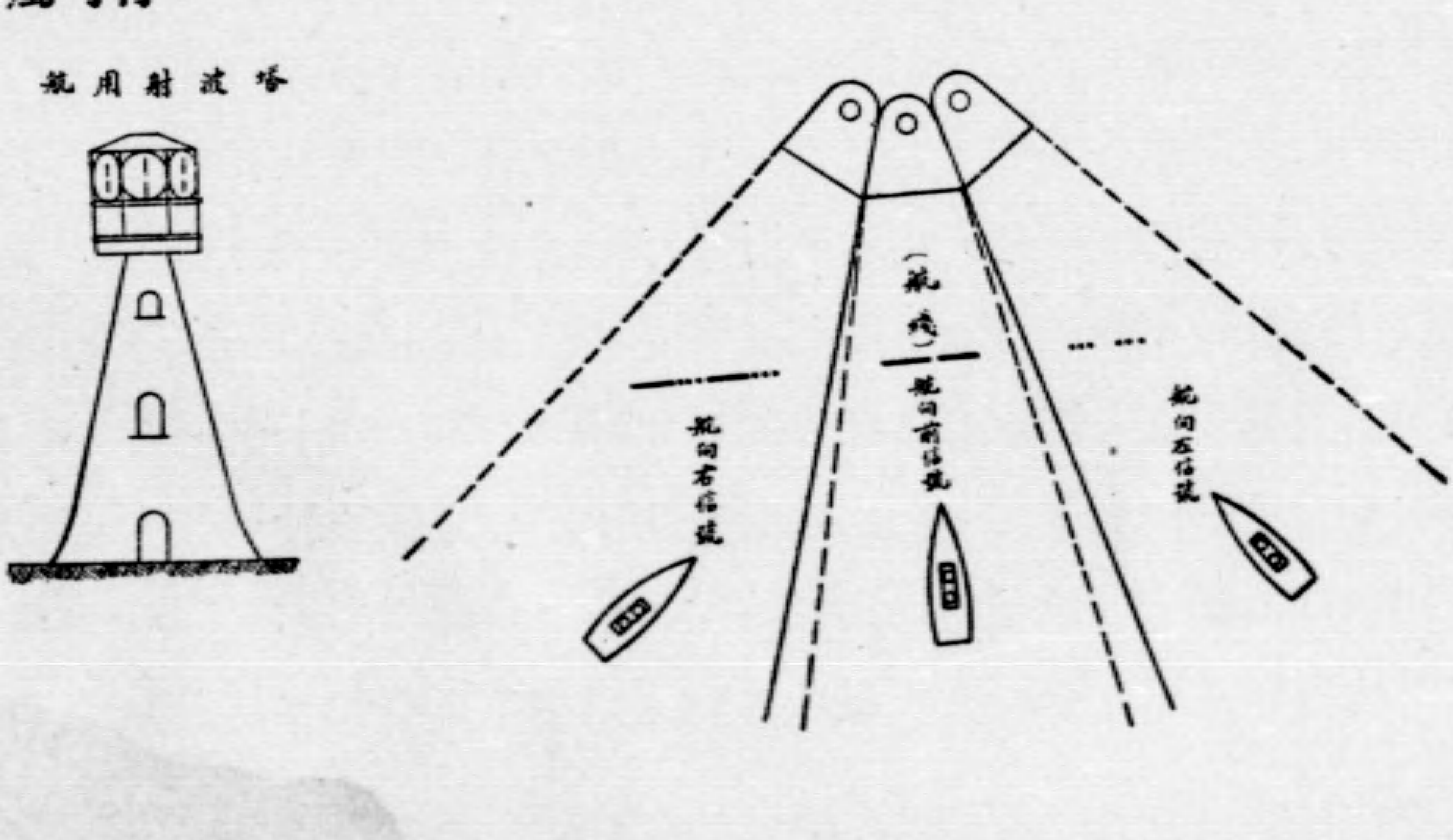
綜觀以上，通信方面可用之波長帶有二。一爲 8m 至 1 dm. 一爲 2.4 μ 至 0.7 μ 利用前者之通信設備，吾人名之曰超短波通信 (Ultra short wave communication). 利用後者謂之紅外波通信 (Infra red wave communication).

圖九　中繼站之佈置



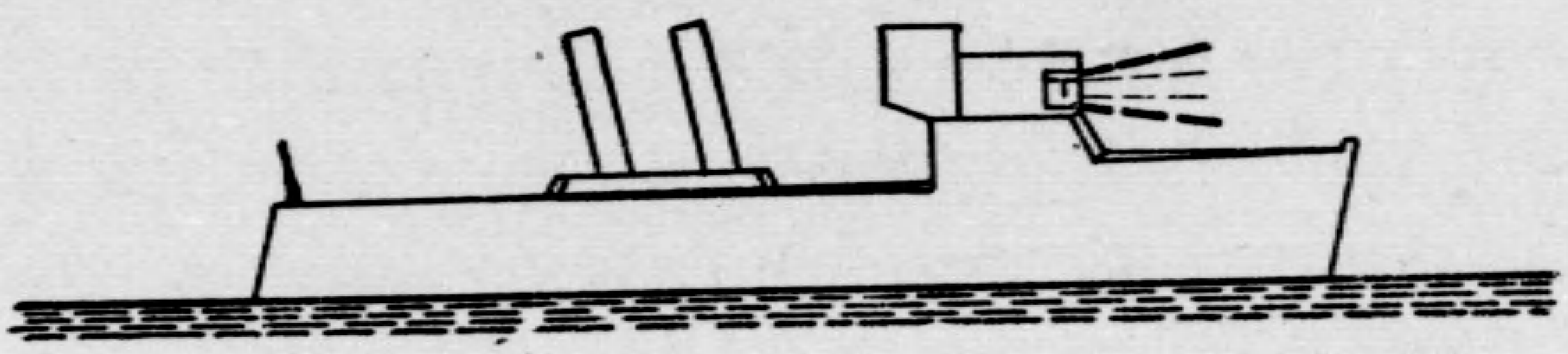
(a) 超短波通信。凡移動性質之短距離通信，如軍用，航用頗爲適宜。取其簡便也。况方向性通信時，不影響其他波道。故在同一區域，同時有多個設備時，不致互相擾亂。且探收器非在波道之內，不克得信號。波道在地平綫以下，無法再探收。凡此皆軍事上絕好守秘密之法也。如距離稍遠，則尙可設置所爲中繼站者。法在收發二站之中間，沿波道設中繼站若干處。每中繼站，一方面方向性的收波，加以增大後，一方面再方向性的發射之。至鄰站。如此逐步繼續，雖地球面之灣性，亦可無礙于傳遞。(圖九) 超短波通信又適宜于快速度之信號，卽可應用極高之調輻週率。于是電視及多重載波電話等各種方法亦屬可行。

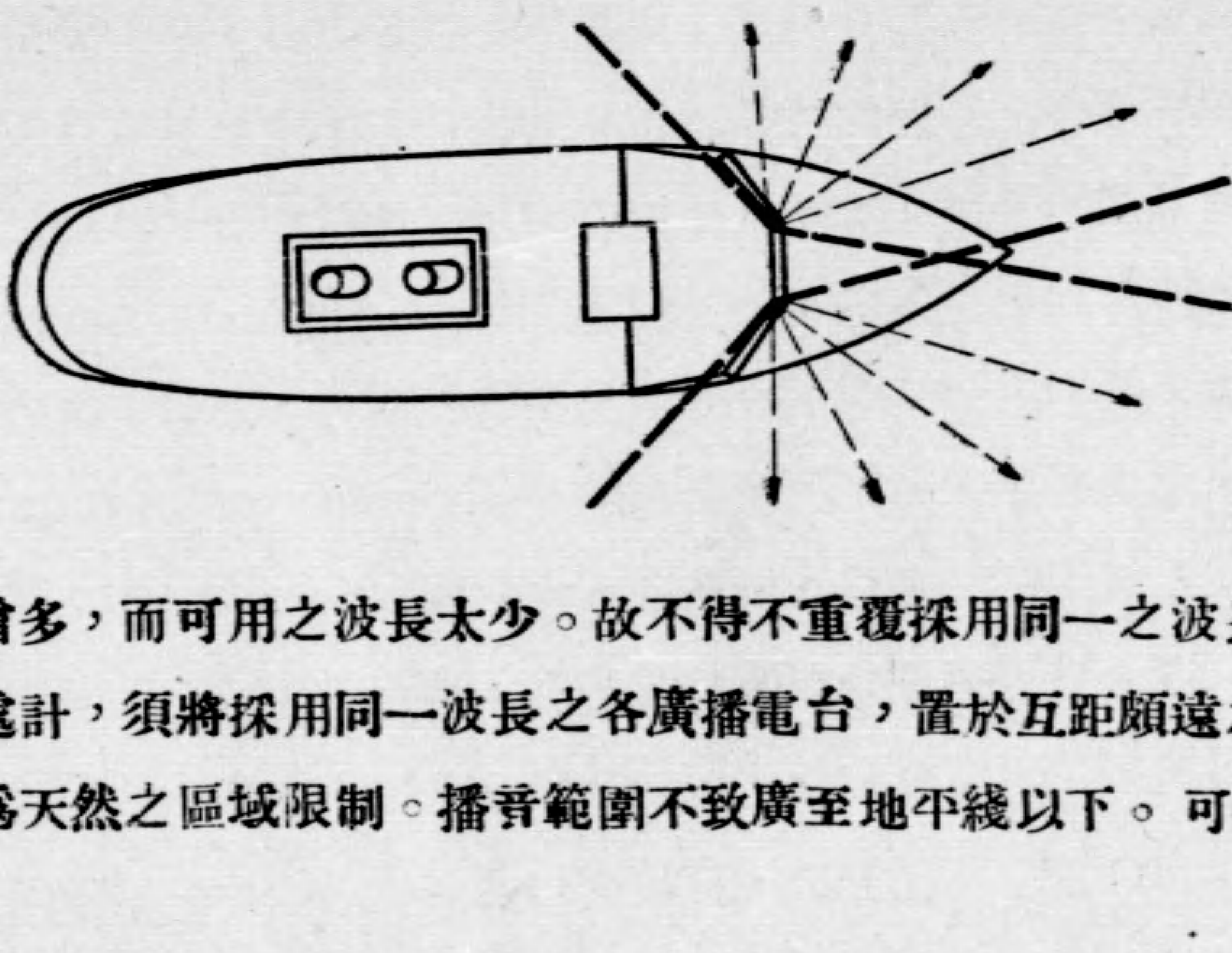
圖十　航用射波塔



航海航空用之各種信號器及測量方向器。每多應用光學者，如燈塔，光學測向器，船上紅綠燈以辨明左右，並避免互撞等是也。亦有應用無綫電者，如船與岸及船與船間之通信(報告天氣等)，或無綫電測向器等。今皆可代以超短波。凡尋常光綫，遇霧則不能透達。且超短波之測向器，可較尋常之測向器爲準確。 (圖十，圖十一)

圖十一 船用左右射波器





廣播電台日漸增多，而可用之波長太少。故不得不重覆採用同一之波長。但爲避免收音者同時收得二處計，須將採用同一波長之各廣播電台，置於互距頗遠之地方。如用超短波，則地平綫爲天然之區域限制。播音範圍不致廣至地平綫以下。可保不致互相擾雜也。

超短波通信，尋常祇須用一二瓦特，可達二三十公里。視發射點之高低而定。

(b) 紅外波通信 凡上節所述，移動用，軍用，航用通信，航用信號，測量紅外波亦均適宜。惟電力恆用一百瓦特左右，傳遞距離僅約四五公里而已。收發器械則較超短波所用者更簡小。霧中亦可應用。但衰輻率較超短波爲大。在軍隊中本有一種所謂光道信號者，(flash signalling) 其缺點在敵軍之可窺見。現可改用此種目不能見之紅外波，增加其祕密性。有時更可利用其可用高週率調幅之性質，用一種特別之調幅方法，使信號週率畸變。俾無伺復調幅器 (Demodulator) 之人，不得竊聽云。

變分學中之直接方法

朱言鈞

變分之學，所以極盛於今日者，其原因有二。晚近數理分析之學，日益昌明；惟其中理論，大半與變分學發生密切之關係。苟以變分之理，整理而解析之，則支離瑣碎之學說，可以鎔爲一爐；故欲求系統之森嚴，精神之一貫，有不得不注意變分之學者，此其一。自然現象，森羅萬有，錯綜紛紜，然苟詳審其究竟，其間實有一大理之貫注，而凡百之理，皆歸結於是。此大理者，可以藉變分之法，表而達之。故欲窮自然之理，有不得不注意變分之學者，此其二。考變分學發展之歷史，有一種方法已獲得相當之成績者，世常以間接方法稱之。所謂間接方法者，簡單言之，將變分學之問題歸之於微分方程之問題而已。吾人既爲某種變分問題建立其歐益累之微分方程 (die Eulersche Diferential-gleichung)，求此微分方程之答案，更求此答案適合已知之邊際條件 (Randbedingungen；然後藉華斯泰斯(Weierstrass)之方法以決定此答案果否解決上述之變分問題。循是以觀，欲解一變分問題，必先解一微分方程，是變分問題之答案，實間接由微分方程之答案獲得之。間接方法，自十九世紀以來，經華斯泰斯及其他學者之研究，固已圓滿周到，諸美悉備；雖然，苟問題之性質比較艱深者，間接方法恐時有技窮之歎。近年以來，物理學中之邊際及特值問題 (Randwert-und Eigenwertprobleme) 層見疊出，大勢所趨，似非於間接方法之外，另闢途徑不可，於是直接方法遂因之而起。

直接方法中所應用之思想，實發源於柏落里 (Johann Bernoulli，惟其時學者方沈溺於他種研究，其著作幾未爲人所注意。至李滿 (Riemann) 出，建立其名山不朽之函數理論，此理論者，實以一變分問題爲其基礎，赫百德 (Hilbert) 繼李滿之後，將李滿所提出之問題，新創一方法以解決之，於是變分之學，忽開一新紀元。其後羅立芝 (Ritz) 柯朗脫 (Courant) 輩復發揚光大，且用之以處理物理學中之邊際及特值問題，至今直接方法遂日益精進。直接方法之目的，要而言之，如何可以不假道微分方程，直捷了當求一函數以適合變分問題之所要求是已。茲將其主要思想及最近發展之趨勢約而論之。

（一） 直接方法之主要思想

變分學中所治之問題爲何如乎？試先明定種種條件以限制函數之性質，如對於函數之繼續性有所限制者謂之繼續性條件，對於函數在其變區之邊際，所有之値有所規定者謂之邊際條件。此種條件既定，則必有函數焉以滿足之。變分問題之所要求無他，如何由此種函數中求一函數使一函數之函數 (Funktionen-funktion) 得其最小値是已。舉

例明之；試於一切繼續函數之滿足如下之邊際條件者：

$$\varphi(0)=\varphi(1)=0$$

求一函數，使下列函數之函數：

$$\int_0^1 \varphi'^2(x)\,dx$$

得其最小值，此變分問題中最淺易者也。何謂函數之函數？凡一函數，其值隨別種函數而定者，謂之函數之函數；凡定積分中含有一未定之函數者，如

$$\int_0^1 \varphi''^2(x)\,dx, \qquad \int_0^1 [\varphi'^2(x)+\varphi''^2(x)]\,dx$$

$$\iint_g (\varphi_x^2+\varphi_y^2)\,dx\,dy$$

其值皆視 φ 之變而變，故謂之函數之函數可也。凡此種函數之函數，吾人此後均以 $D[\varphi]$ 之符號表之；其中之 φ 表示函數，其變隨一個變數或多於一個變數均無不可，要之，$D[\varphi]$ 之值，必視 φ 之變而變耳。循是以論，變分問題者，求一適合先設之邊際及其他條件且又使一 $D[\varphi]$ 得其最小值之函數而已。

變分問題之所要求既明，吾人乃可進而討論如何解決之法。如上所述之 $D[\varphi]$ 其果有一最小值否乎？苟其無之，則此問題自無解決之可能。但 $D[\varphi]$ 之有無最小值，當視其本身性質而定，不可一概而論，故此事在着手研究之初不可不首先證明者。$D[\varphi]$ 既有一最小值矣，果有一函數 u，使其獲得此最小值：

$$D[u]=\text{最小值}$$

否乎？此答案之存在問題，吾人於求索答案之先，不可不解決者。以上兩者得證，始可進而討論如何尋求答案之法。

用直接方法以求索答案者，其步驟可分爲二。如 $D[\varphi]$ 果有一最小值，則必有一敍列(Folge) φ_1 φ_2 φ_3 ……，吾人姑以趨小敍列 (Minimalfolge) 名之，使

$$\lim_{n-\infty} D[\varphi_n]=\text{最小值}$$

若 $D[\varphi]$ 果有一最小值，則此趨小敍列之存在，乃必然之結果。惟吾人將用何法以創造之？此問題或可歸併於微分學中所治之最小問題，當於下節中詳論之；要之，創造一趨小敍列，實直接方法之第一步驟也。既有一趨小敍列之後，此敍列果能向此問題之答案收斂否乎？此直接方法之第二步驟，實問題之最要關鍵也。種種直接方法，就其大體言

之，不外此兩種步驟。兩種步驟維何？創一趨小敍列，然後使其向答案收斂而已。惟如何實施此兩種步驟，乃極費硏討之問題；蓋常見趨小敍列未肯收斂；即向函數收斂，此函數未嘗爲問題之答案者。因此之故，吾人宜如何將趨小敍列，加以一番磨刮之工夫，使其向問題之答案收斂而後已。今於討論上述兩大步驟之先，略言變分問題建立之先所當注意者數事。

(二)繼續性條件與邊際條件

變分問題者，欲求一滿足先設之繼續性及邊際條件，且又使 D[φ] 得其最小值之函數，前已屢言之矣。凡函數之適合先設之繼續性及邊際條件者，爲數必甚多，此種函數，吾人咸以認可函數(Zulaessige Funktionen)名之。由是以論，變分問題之所要求者無他，於此種種認可函數中求一使已知之 D[φ] 得其最小值之函數而已。吾人對於認可函數自必要求相當之繼續性；惟事實所示，似亦可以不必過於苛求。何則，認可函數即無極强之繼續性(所謂極强之繼續性，言其高次之導微函數均爲繼續)，而答案之繼續性恆强於認可函數，蓋變分問題中所包含之極小要求實具有使繼續性轉强之能力故也。例如下列之問題：

$$\int_0^1 \varphi'(x)^2\,dx = \text{最小值}，\quad \varphi(0) = \varphi(1) = 0$$

其答案爲 $u=0$，可以斷言。然對於認可函數繼續性之要求，可以極微，蓋其初次微導(first-derivative)亦不必隨處繼續。他如位能理論 (Potential Theory) 中所硏究之

$$\iint_g (\varphi_x^2+\varphi_y^2)\,dx\,dy = \text{最小值}$$

(此處 φ 在邊際上所有之值，均先規定)，其情形亦復相同。要而言之，答案之繼續性常較認可函數之繼續性爲强，此事雖小，亦不可不注意及之。

次就邊際條件言之，種種認可函數，除適合繼續性條件外，若更加以邊際條件，則其爲數必大減，此必然之理，無待贅述者。不惟如此，吾人當創造趨小敍列之時，亦必同時顧及邊際條件之所規定，選擇之範圍較小，周轉之餘地頓減，種種爲累，何可勝言。故問題之附帶邊際條件者，常較其他問題難於應付。昔克蘭 (Kalein)所舉之例：求一連接A與B兩點最短之綫，並求此綫在A，B兩處與 $\overline{AB}$ 相垂直，其所以無答案者，實邊際條件爲之阻礙。如是之例，不一而足。因此之故，近人頗有提倡自然邊際條件之論者。何謂自然邊際條件？當提出變分問題之初，不先附以任何邊際條件；苟此問題果有解

決之可能，則其答案除滿足歐益累 (Euler) 之微分方程外，自能適合相當之邊際條件。

如下列問題

$$\int_a^b F\,(x\,y\,y')\,dx = 最小值$$

之答案除滿足

$$\frac{d}{dx}F_{y'} - \frac{\delta F}{\delta y} = 0$$

外，必適合

$$F_{y'}(a) = F_{y'}(b) = 0$$

此邊際條件之滿足爲自然的而非强求的；因之遂稱之曰自然邊際條件，而變分問題之無邊際條件者謂之自然問題。自然問題比較易於應付，已如上所言矣。然則吾人果有何法使附有邊際條件之問題變爲自然問題乎？欲使此事實現，亦殊不難，請舉例言之。如欲求

$$\int_0^1 \varphi'\,(x)^2\,dx = 最小值$$

並求下列邊際條件之適合

$$\varphi'(0) - t\,\varphi\,(0) = 0$$

$$\varphi'(1) + t\,\varphi\,(1) = 0 \qquad t = 常數$$

此問題實附有邊際條件，將用何法以去之。欲去之，但求

$$\int_0^1 \varphi'\,(x)^2\,dx + t\,\varphi\,(0)^2 + t\,\,(1)\varphi^2 = 最小值$$

可已。如是則前後兩問題形異而實同，而後者實爲一自然問題，因其復無邊際條件之牽制也。循是以推，他可知矣。明乎以上所述，可知種種困難因邊際條件而發生者，未始不可設法解除之。

復次，算學中任何問題，倘有意義之可言，其答案必隨問題中所包括之要求，作繼續式的變化、何以言之？若問題之所要求稍稍變更，其答案必隨之而稍變，彼有微變，此亦微變，如是相隨而變，謂之繼續。若問題之變極微，而答案之變極驟 則此問題謂之無意義可也。

如

$$\int_0^1 \left(1 - \frac{1}{1 + \varphi'\,(x)^2}\right) dx = 最小值$$

$$\varphi\,(0) = \varphi\,(1) = 0$$

此其答案，必爲 $\varphi = u = 0$。蓋如上之定積分有一最小值 0，而 $u = 0$ 不特適合邊際條件，且代入此定積分後，必能使之獲得此最小值也。但吾人不難想像一與 $u = 0$ 完全差異

之函數 $g(x)$，除要求其適合邊際條件外，代入以上之定積分，使其得一與0相差極微之值。是最小值之相差極微，而答案之相差極遠，此問題之無意義，於此可以概見。此於建立變分問題之時，不可不深注意者。

(三)趨小敍列之創造

今有一定積分 $D[\varphi]$ 於此，其中含有 φ 及 φ 之初次導微。吾人所要求者，爲

$$D[\varphi]=\text{最小值}$$

若此問題之答案果能存在(存在與否必先證明)，則吾人必先創一趨小敍列，然後使此敍列向答案收斂；此直接方法之兩大步驟也。在此節中吾人所欲討論者，即趨小敍列如何創造之法是已。

爲求易於明瞭之故，可先假定此未知函數爲一個獨立變數之函數。吾人將獨立變數之區域分爲n區，於是任何認可函數，φ 必可用n段綫式函數相接而成之函數代替之。若 n 爲一極大之數時，則不特此兩者相差極微，卽 φ 之初次導微，亦可由此法近似得之。若吾人對於認可函數，未嘗要求其初次導微之繼續，則此 n 段綫式函數相接而成之函數，亦未始非一認可函數。此種函數，吾人試以 φ_n 名之，則 $D[\varphi_n]$ 與 $D[\varphi]$ 之相差必極微，此又理之顯而易見者。φ_n 之爲認可函數，旣已如上所述：此種 φ_n 在每分區之內，均爲綫式，至其在兩區交界處應有之值，若以 $D[\varphi_n]=$ 最小值之條件規定之，則 φ_n 必爲一趨小敍列無疑。至於用此法以規定 φ_n 在兩區交界處之值，在如上所作繼續性之條件下必有一答案，則又不待論也。不甯惟是，若未知函數爲多於一個獨立變數之函數，或 $D[\varphi]$ 之中含有 φ 之高次導微時，欲創一趨小敍列，亦未始不可應用此種方法。

明于以上所述，乃可進而論羅立芝之方法。昔羅立芝曾創一普遍方法以造趨小敍列，如上所云，固已包括在此方法之中。羅立芝之言曰，變分問題之要求，旣已明定，吾人可隨此要求之內容，選擇一羣座標函數 (Koordinatenfunktionen) e_1 e_2 e_3…… 何謂座標函數？座標函數之特性有二：其一，任何座標函數乘以常數後相加之結果如 $c_1 e_1+c_2 e_2+c_3 e_3+\cdots+c_n e_n=\varphi_n$ 必爲問題之認可函數。其二，如有一任何認可函數 φ 於此，必可將座標函數綫式相聯得 φ_n，使 $D[\varphi_n]$ 與 $D[\varphi]$ 之差無論如何微渺均無不可。此種座標函數選定之後，然後將常數 c_1 $c_2\cdots c_n$ 規定之使 $D[\varphi_n]=$最小值。於是 φ_n 必爲一趨小敍列，可以斷言。欲規定 $c_1\cdots c_n$ 等數，乃微分學中之問題；要而言之，僅求

$$\frac{\delta D(\varphi_n)}{\delta C_i} = 0 \qquad i = 1, 2, 3, \cdots n$$

可已。惟座標函數之選擇，關係事之成敗，不可不愼重出之耳。

（四） 趨小敍列是否向答案收斂之問題

今欲求 $D[\varphi]$ = 最小值

所謂此問題答案者，卽一函數 u，代入此定積分後，確能使獲得此最小值之謂也。在多數問題中，吾人苟能將此最小值，用近似之法計算之，則爲願已足。惟其如是，則答案之獲得，似無必要，何則，趨小敍列已可代表答案，蓋將趨小敍列代入定積分後，其值與最小值相差已極微；由克蘭所倡之"近似數學"(Approximation mathematik) 言之此種立論，亦未嘗無學理上之根據。雖然，此非根本解決之道，吾人欲利用已得之趨小敍列以求索此答案，其法果何如乎？

苟趨小敍列爲一個獨立變數之函數組織而成者，則變分學中已有一普遍定理，謂其必向問題之答案收斂。故一切難題，遂得迎刄而解；至此定理之証明，可求之專論。

若變分問題所欲求索之答案爲多於一個獨立變數之函數，則上述之定理不能有效。因此之故，卽有一趨小敍列，此敍列之是否收斂，固未可必；卽收斂矣，是否向問題之答案收斂，似更不可期。請舉例明之；求一函數，其初次及兩次導徵均爲片段繼續（所謂片段繼續，其意除盡有之點外，均爲繼續），其在邊際之值爲零者，使如下之定積分

$$D(\varphi) = \iint\limits_{g} (\varphi_x^2 + \varphi_y^2)\, dx\, dy$$

得最小值。此向題之 φ 案必爲 $\varphi = 0$。何則，$\varphi = 0$ 旣適合所規定之條件，且又使此定積分得其最小値故也。吾人倘在自變區域內任擇一點 P，改用極座標 φ, φ，則如上之定積分，一變而爲

$$D(\varphi) = \iint \left(\varphi_r^2 + \frac{1}{r^2} \varphi_\delta^2 \right) r\, dr d\delta$$

更用如下之法造一趨小敍列：以 P 爲中心，在自變區域內作一圓，其半徑爲 a^1 a 爲小於 1 之一數，又以下列條件規定一函數 φ

$$\varphi = 0 \qquad \text{當} \qquad r \geqq a$$

$$\varphi = \frac{1}{\log a} \log \frac{r}{a} \qquad \text{當} \qquad a^2 \leqq r \leqq a$$

$$\varphi = \frac{1}{\log a} \log a = 1 \qquad \text{當} \qquad r \leqq a^2$$

如是規定之 φ 必爲一認可函數，自無疑義。若代入 D[φ] ，則得

$$\frac{2\pi}{(\log a)^2}\int_{a^2}^{a}\frac{1}{r^2}\, rdr = -\frac{2\pi}{\log a}$$

今使 a 逐漸變小爲 a_1 a_2 …… 而向 0 收斂，於是遂得一叙列 φ_1 φ_2…… 。以此代入 D[φ]，可知 D[φ] 亦必向最小值 0 收斂。由是以觀，φ_n 必爲趨小叙列無疑。但在 P 點上，此趨小叙列之值始終爲 1，故無論如何，不能向答案 φ = 0 收斂，由是論之，吾人雖明知答案之存在，惟趨小叙列大可不必向答案收斂也。

欲解上述之困難，有兩種途徑，可得而言者。吾人不必因趨小叙列之未嘗收斂而有所顧忌，蓋叙列之發散現象 (Divergenzerscheinungen) ，可以設法避免之；避免之道維何，根據雷勃克 (Lebeque) 之理論將積分及收斂之槪念加以擴張，此一法也。將趨小叙列加以一番磨刮陶鎔之工夫，使其性質比較柔順，或將問題路變其形式，使不能收斂之趨小叙列，先時屏去，此又一法也，使函數柔順之法多端，積分之法最爲通用，惟應用此法，勢必將趨小叙列逐步更改，手續繁瑣，是其短處。若原有問題爲

$$D(\varphi) = 最小值$$

此問題之歐盒累微分方程爲 $\mathfrak{L}(\varphi) = 0$，則將原問題中加入一項如

$$t\int_{g}[L(\varphi)]^2\, dg$$

其中之 t 爲一輔變數 (Parameter) ，其值於始終爲正， dg 爲自變區之微分，求

$$D[\varphi] + t\int_{g}[L(\varphi)]^2\, dg = 最小值$$

於是後者之問題中， 其所含未知函數之導微， 必高於前者，何則，L (φ) = 0 旣爲 D[φ] = 最小值之歐盒累之微分方程，故 L (φ) 中 φ 之導微，其高必兩倍於 D[φ] 所含之導微，若 D[φ] 含有 φ 之初次導微，則 $\mathfrak{L}(\varphi)$ 必含有 φ 之兩次導微；若 D[φ] 含有 φ 之兩次導微，則 φ 之四次導微將出現於 $\mathfrak{L}(\varphi)$ 以是之故，吾人若將 $\mathfrak{L}(\varphi)$ 加於原有之定積分中，必有 φ 之高次導微出現。惟如上定積分之隨 φ 而變，常因高次導微之出現而增高其感覺性，易詞言之，φ 對 D[φ] 所發生之影響， 常因高次導微之故而增長，D[φ] 所含之導微愈高，則其影響愈大。因此之故，

$$D[\varphi] = 最小值$$

之趨小叙列，常不復爲

$$D[\varphi] + t\int_g [L(\varphi)]^2 dg = \text{最小值}$$

之趨小敍列，而後者之趨小敍列，因其範圍較狹，擇別較嚴，性質較柔，故可望其必有收斂性。但後者之趨小敍列如果收斂，必向前者之答案收斂，何則，

$$D(\varphi) + t\int L(\varphi)^2 dg > D(\varphi)$$

故後者必以前者之答案爲其答案也。於此吾人乃得一種方法以强制趨小敍列之收斂性而上述之困難，竟得迎刃而解。此方法在實際上效能如何，已有事實之證明，此處無容贅述。

以上所論，不過直接方法之主要思想而已。近年以來，因此種思潮之突起，他種數理分析問題亦隨之而發生。如某種函數欲用他種函數近似替代之，其條件必如何而後可。差分方程 (Differenz engleichungen) 與微分方程其間之關係如何，蓋規定趨小敍列者，差分方程之事而規定變分問題之答案者，則爲微分方程；必如何而差分方程之答案始向微分方程之答案平均收斂。凡二種種問題，皆與直接方法之發展有深切之係關者也。綜觀近代算學史，因一種發明而掀起極大波瀾者，不一而足，變分學中之直接方法，亦其一例也。

參考書： D. Hilbert and R. Conrant: Methoden der mathematischen Physik Bd. I

Riemann — Weber: Differentialgleichungen der Physik Bd. I Neue Auflage.

R. Courant: Ueber direkte Methoden der Variationsrechnung.

$$D[\varphi] + t\int_g [L(\varphi)]^2 dg = \text{最小值}$$

之趨小敍列，而後者之趨小敍列，因其範圍較狹，擇別較嚴，性質較柔，故可望其必有收斂性。但後者之趨小敍列如果收斂，必向前者之答案收斂，何則，

$$D(\varphi) + t\int L(\varphi)^2 dg > D(\varphi)$$

故後者必以前者之答案爲其答案也。於此吾人乃得一種方法以强制趨小敍列之收斂性而上述之困難，竟得迎刃而解。此方法在實際上效能如何，已有事實之證明，此處無容贅述。

以上所論，不過直接方法之主要思想而已。近年以來，因此種思潮之突起，他種數理分析問題亦隨之而發生。如某種函數欲用他種函數近似替代之，其條件必如何而後可。差分方程 (Differenz engleichungen) 與微分方程其間之關係如何，蓋規定趨小敍列者，差分方程之事而規定變分問題之答案者，則爲微分方程；必如何而差分方程之答案始向微分方程之答案平均收斂。凡二種種問題，皆與直接方法之發展有深切之係關者也。綜觀近代算學史，因一種發明而掀起極大波瀾者，不一而足，變分學中之直接方法，亦其一例也。

參考書： D. Hilbert and R. Conrant: Methoden der mathematischen Physik Bd. I

Riemann – Weber: Differentialgleichungen der Physik Bd. I Neue Auflage.

R. Courant: Ueber direkte Methoden der Variationsrechnung.

T.N.T.—三硝基甲苯—火藥裝彈廠全部設計

胡甯生　廖溫義　合擬

目　錄

(一) T.N.T. 裝彈之舊法概述

(一) 引言

裝放 TNT 入彈子法之研究頗少，卽使有之，亦多祕而不宣，是故各種書籍雜誌中之載有此項研究者，誠極少也。

(二) 舊法概述

歷來裝放 TNT 入彈子之法，大別有五，茲分別論之。

(1) 先熔後傾法

此法係先以蒸汽夾層壺熔融 TNT 於 80.2°c 然後將此已融之火藥直傾於彈子內。熔法甚簡，而傾法則須稍加注意。已融之火藥，不能一次盛滿彈子，否則彈子內部之火藥凝結後，必生微孔，因減炸力。通常皆作數次傾入，每次傾入前，須將彈子內已有火藥表面所生之硬殼擊碎。當彈子幾爲火藥盛滿時，插入漏斗，然後加已融火藥以至漏斗之頂，如此行之，則火藥凝冷時，微孔僅生於漏斗內而不致現於彈子中。此時擊去漏斗，并鑽一孔（直徑約四分之三英寸）於彈子底火藥中，以盛爆烈劑如 tetryl 之用。

上節略述先熔後傾法之步驟，茲進而論行此法時所應注意之各點：

(a) 火藥前擁現象 Setting forward

(b) 火藥後擠現象 Setting back

此二現象，由於惰性作用，因彈子內爆烈劑或推動劑炸後而生。避免之法，在裝入高密度之 TNT 火藥。

(c) 微孔生成現象——此種現象生於彈子內 TNT 火藥凝結之後，其生成原因有二：其一由於 TNT 滲出之油汁，其二由於被困之空氣。不純潔之 TNT, 常含 DNT 及其他雜質，故凝冷時，始行滲出油汁；如用純潔 TNT 則無此種現象。空氣被困而生微孔，乃因一次傾入 TNT 所致，如分多次傾入，則空氣悉逸而微孔遂消。綜上所舉，自明免避微孔生成之法，在用純潔之 TNT 與夫增加傾入 TNT 之次數而已。

(d) 傾時 TNT 之溫度——傾時 TNT 之溫度通常爲 80.2°c.

(e) 彈子容 TNT 時之溫度——關於彈子應具之溫度一節，意見不一：有主張將彈子冷至攝氏零度然後盛以火藥者，亦有建議卽用具尋常溫度（試驗室溫度）之彈子者。然通常所用裝 TNT 彈子之溫度，卽試驗室或工廠室內之溫度。

(f) TNT 傾入彈子之次數——爲免除微孔生成現象起見 TNT 須作數次傾入彈子。

(g) 彈子轉冷之速率－彈子盛滿高溫度之 TNT 後，其轉冷之速率，宜加注意。速冷之，則彈子內 TNT 中微孔必生。是故彈子轉冷之速度，宜乎緩慢與一致。

(2) 先作形後裝放法 Carton Method

此法在傾已融之 TNT 於與各種彈子大小相同之模型內，迨需用時，則將成形之 TNT 取出而置於彈子內。以硬紙或輕金屬製與彈子大小相同之模型，盛以 TNT 火藥然後輸運至中央裝置廠，取出已成形之 TNT 以放入相似之彈子內。由輕金屬所製成之模型，恆塗以假漆，由硬紙所製成者，恆浸入石油瀝青內，以增其耐水性。

此法爲德人所倡用，其利有二：

(a) 可免除火藥與彈子壁長時間之直接接觸。

(b) 可延長火藥儲藏時間而不致生意外危險。至其弊在其手續之麻煩工作之遲緩，故不適於戰時之用。

(3) 小球法 Pellet Method

此法乃傾一部已融之 TNT 於彈子內，然後再加已鑄成之 TNT 小球，任液體 TNT 盡量容納小球，直俟全部凝固而後止。此法之優點，在其裝放所需時間之較短，但其一最顯然之劣點，在極難得大小一致之小球以供裝放也。

(4) 壓入法

將 TNT 壓入彈子內之法有二：一爲將 TNT 鬆壓於彈子內，二爲將 TNT 緊壓於彈子內是。

(5) 搗入法

此法極爲粗陋，以杖將 TNT 火藥搗入彈子內而已。

(三) 結論

上述五法中，「先熔後傾法」流行最廣，最後兩法：用之者鮮。此五法之共同缺點，不外工作步驟之不連續與夫裝放速率之極遲緩。戰事發生，需用實彈甚般，故同時須有一連續而敏捷之裝彈法，方濟於事。「先熔後傾法」雖爲上述五法中之最佳者，但因其裝放之速率過緩，顯不能充戰時之用。

(二) 新法簡論

爲謀工作步驟連續與夫收高大效率起見，審生等現擬一 TNT 火藥裝彈新法，依此法行，則每天廿小時內可繼續裝完三吋彈子一千發。

(一) 新法理論

此法可謂爲「壓法」與「鑄法」(前章已述之「先熔後傾法」等亦可稱爲「鑄法」)之

融合。壓法之一要素，在將固體 TNT 以高壓壓入彈子內，俾被壓火藥達相當密度，故其缺點在需高壓，至鑄法之須傾倒數次，未免過於糜費時間，亦爲一顯然之缺點。此新法無此二缺點，既不需過高之壓力，復可免繼續之裝放，其工作步驟連續而不中斷。裝入彈子之材料，爲固體 TNT 與已熔 TNT 所成之可塑性混合體。已裝火藥之密度，通常爲 1.6 有奇，可以二法同時得之：其一，卽容可塑性混合體自 75°c 至 80°c 漸冷至一致之室溫；其二，由平衡重量對於裝入火藥所施之相反壓力，當彈及載彈之車爲裝入火藥擠退之時。裝放之速率，受制於「馬達」，如此管束，得於七十二秒內裝完一彈，俾念小時內裝完三吋直徑彈一千發。

(二) 所需條件

(1) 已裝火藥之密度，當在 1.6 以上。

(2) TNT 熔融之溫度，須達 80.2°c

(3) TNT 可塑性混合體之溫度，得保持於 75°c 至 80°c 之間。

(4) 室溫 (卽彈子溫) 須均勻一致 20°c 左右可用。

(5) 螺旋裝放機 Screw-filling Machine 須斜裝於地上，致使之與軌上之列車成一定角度。

(6) 彈子係置在固定於車頂之小旋動臺上，每一車僅荷一彈。

(三) 優點

(1) 工作步驟連繼不斷。

(2) 省時

(3) 省工

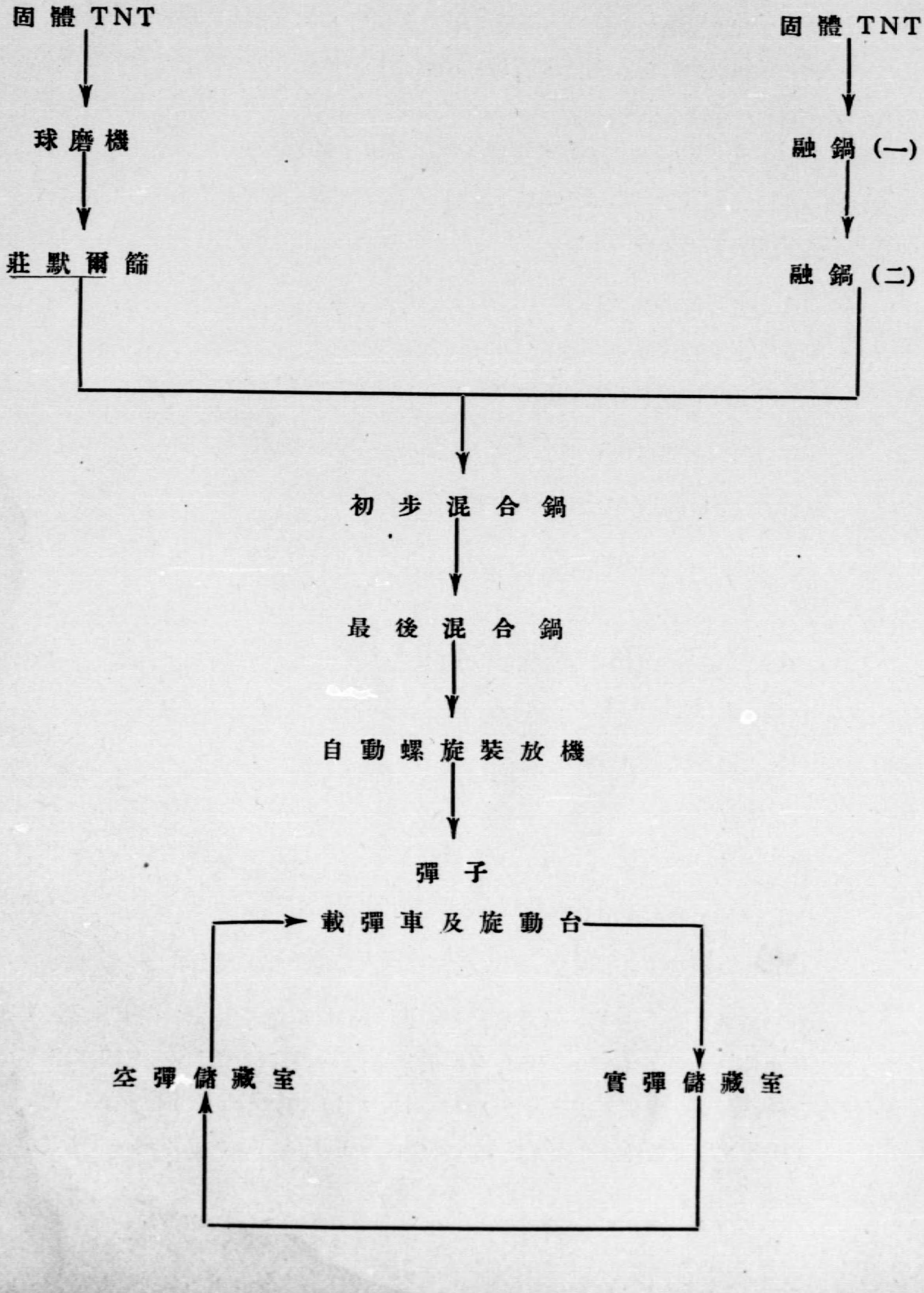
(4) 節制壓力，純出自動。

(5) 平衡重量，可酌增加，藉增已裝火藥之密度因此大減微孔生成現象。

(6) 裝放火藥之速率，係受制於「馬達」，若增馬達之速度，則裝放之速率亦增。設二倍馬達之速度，則念小時內當可繼續裝完彈子 (三吋) 二千發。然裝放速率之宜有限制，亦屬重要，蓋螺旋轉動過速，易於損壞，且易困住空氣以生微孔也。

(7) TNT 可塑性混合體，已裝入彈子內，由 75°-80°c 漸冷至一致室溫，可大減微孔之生成。

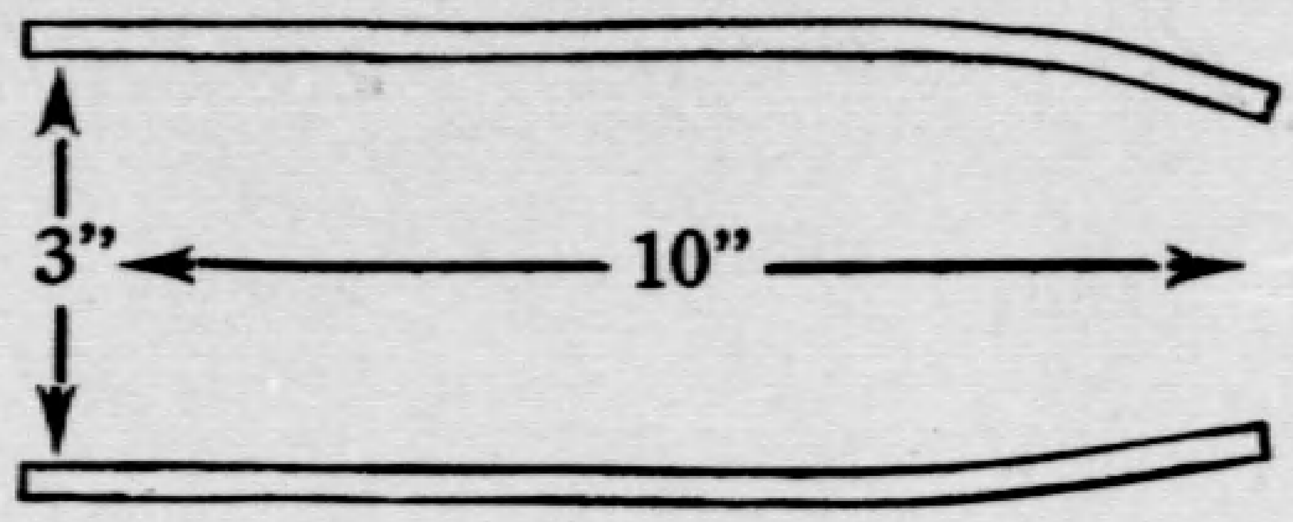
(三) T.N.T. 裝彈廠之工作程序表 (flow sheet)



(四) 裝彈廠各部之設計

(一) 自彈子體積及裝放密度計算所需火藥之重量法

(1) 彈子可約視為一圓柱體(如下圖)



彈子之體積 $= \pi r^2 h$

$= 3.14 \times (1.5)^2 \times 10$

$= 70.686$ 立方吋 或 0.04 立方呎。

(2) 己裝 TNT 所需之密度

己裝 TNT 之密度 $= 1.6$

$= 1.6 \times 62.4$

$= 100$ 磅(每立方呎)

(3) 每一三吋直徑彈子所需之 TNT 量

三吋彈子所裝之 TNT 量 $= 100 \times 0.04$

$= 4$ 磅

是以每天廿小時內裝完一千三吋彈子,當需四千磅 TNT.

(4) 球磨機暨融鍋(一)各需之固體 TNT——TNT 可型性混合體,係由固體 TNT 與己熔 TNT 相合而成;但固體 TNT 須 2.5 倍液體 TNT 方可製成適宜之可型性混合體。是以

球磨機約需 $\frac{2.5}{3.5} \times 4000 = 2857$ 或 3000 磅

融鍋(一)約需 $\frac{1.0}{3.5} \times 4000 = 1143$ 或 1150 磅

(二) 融鍋(一)體積之計算法

$$\pi r^2 h = \frac{1150}{62.4} = 18.5 \text{ 立方呎}$$

$$r^2 h = \frac{18.5}{3.14} = 5.87 \text{ 立方呎}$$

是以 $h = 5'$, $r = 1.1'$, d (直徑) $= 2.2'$

（三） 融鍋（二）之體積

融鍋(二)之體積，與融鍋(一)同；

$h = 5'$ ， $r = 1.1'$ ， $d = 2.2'$

（四） 球磨機體積之計算

$$\frac{1}{3}\pi r^2 h = \frac{3000}{62.4}; \qquad \pi r^2 h = 144.3;$$

$$r^2 h = \frac{144.3}{3.14} = 45.9 \text{ 立方呎}$$

是以 $h = 8'$ ， $r = 2.5'$ ， $d = 5'$

（五） 莊默爾篩 Trommel Screen

篩之側面 $= 2\pi r h$

姑定 $h = 6'$ ， $r = 1.5'$ ， $d = 3'$

則 $2\pi r h = 2 \times 3.14 \times 1.5' \times 6' = 56.5$ 平方呎

此篩須規定每平方吋內含一百網眼

（六） 初步混合鍋之體積

$$\pi r^2 h = \frac{4000}{62.4} = 64 \text{ 立方呎}$$

$$r^2 h = \frac{64}{3.14} = 20.4 \text{ 立方呎}$$

是以 $h = 4'$ ， $r = 2.5'$ ， $d = 5'$

（七） 最後混合鍋之體積

最後混合鍋之體積，與前者同，卽

$h = 4'$ ， $r = 2.5'$ ， $d = 5'$

（八） 戽斗昇降機

$h = 35'$ ， w（闊度）$= 1.5'$

（九） 旋動台及軌道

1. 隨圓軌道之橫軸 = 20 呎
2. 隨圓軌道之直軸 = 10 呎
3. 隨圓軌道之圓周 = 54 呎
4. 車上旋動台之闊度 = 8 吋
5. 軌之闊度 = 6 吋
6. 車身之大小(軌上應置車 50 輛) = $1' \times 6''$ 或 1 呎 × 6吋

（十） 螺旋裝放機

1. 機基之長度 = 6 呎

2.	機基底層之高度	= 5 吋
3.	機基上層之高度	= 3 吋
4.	平衡重量支柱之高度	= 6 呎
5:	平衡重量支柱底基之長度	= 5 吋
6.	平衡重量支柱底基之高度	= 6 吋
7.	彈簧之長度	= 2 呎 3.5 吋
8.	彈簧支柱底基之長度	= 3 吋
9.	彈簧支柱與平衡重量支柱間之距離	= 1 呎
10.	漏斗 (hopper) 與彈簧支柱間之距離	= 2 呎
11.	漏斗支柱之長度	= 1 呎 2 吋
12.	連接於「馬達」Motor 齒輪之直徑	= 8 寸至 1 呎
13.	漏斗之總高度 (自底基起計算)	= 5 呎 6 吋
14.	漏斗上段之高度	= 2 呎
15.	漏斗口之直徑	= 1 呎 6 吋
16.	漏斗室 (中段) 之高度	= 2 呎 6 吋
17.	漏斗上段底之直徑	= 1 呎
18.	袖管 Sleeve 長度	= 3 呎
19.	袖管直徑	= 1 吋

(五) 各部構造所需材料

(一) 融鍋(一)——琺瑯質塗過之鑄鉄

(二) 融鍋(二)——同上

(三) 哈丁球磨機——機身爲鑄鉄，球爲鋼球

(四) 莊默爾篩

1. 鋼架

2. 銅絲網 ——每平方吋含八十至一百網眼

(五) 初步混合鍋

1. 鍋身——鑄鉄

2. 重攪動器——鋼

(六) 最後混合鍋所需材料同上。

(七) 旋動台及軌

1. 旋動台 —— 鑄鉄

2. 軌 —— 鑄鉄

3. 車 —— 鑄鉄

（八） 戽斗昇降機 —— 鋼片

（九） 螺旋裝放機

1. 平衡重量 —— 鑄鉄

2. 彈簧 —— 優良特製鋼

3. 拉車之絲及鈎——錳鋼

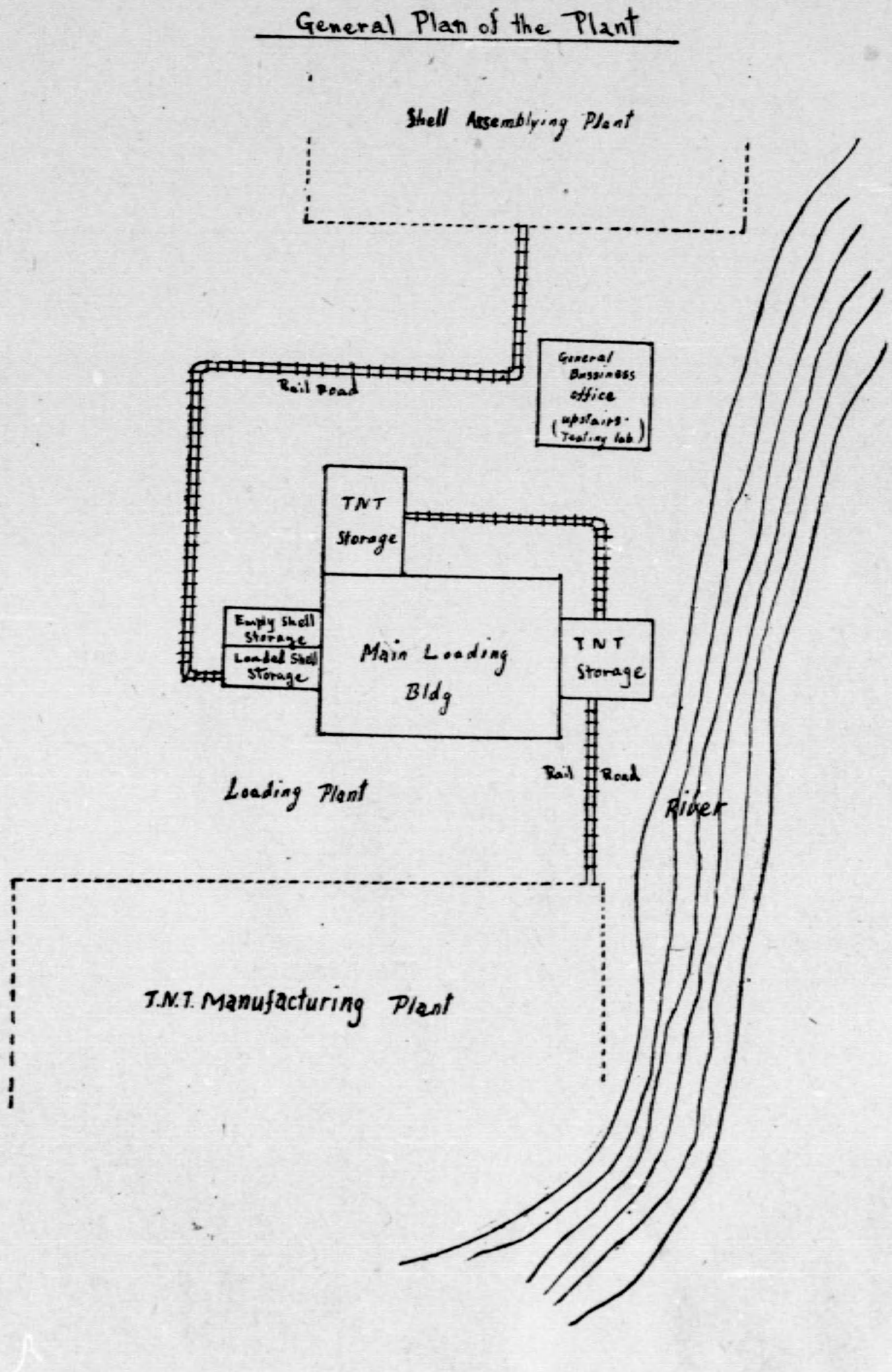
4. 袖管 —— 鋼

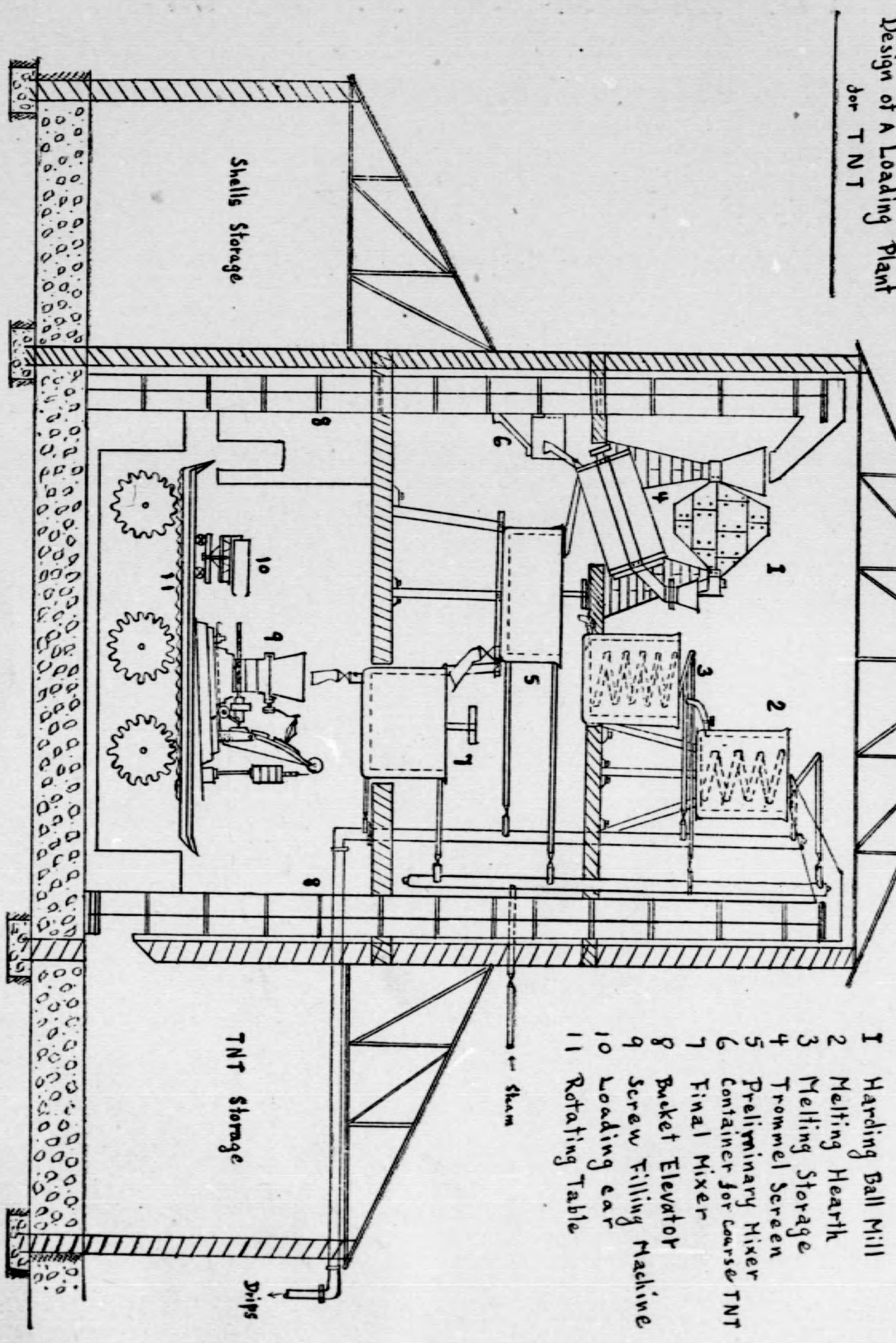
5. 漏斗 —— 鑄鉄

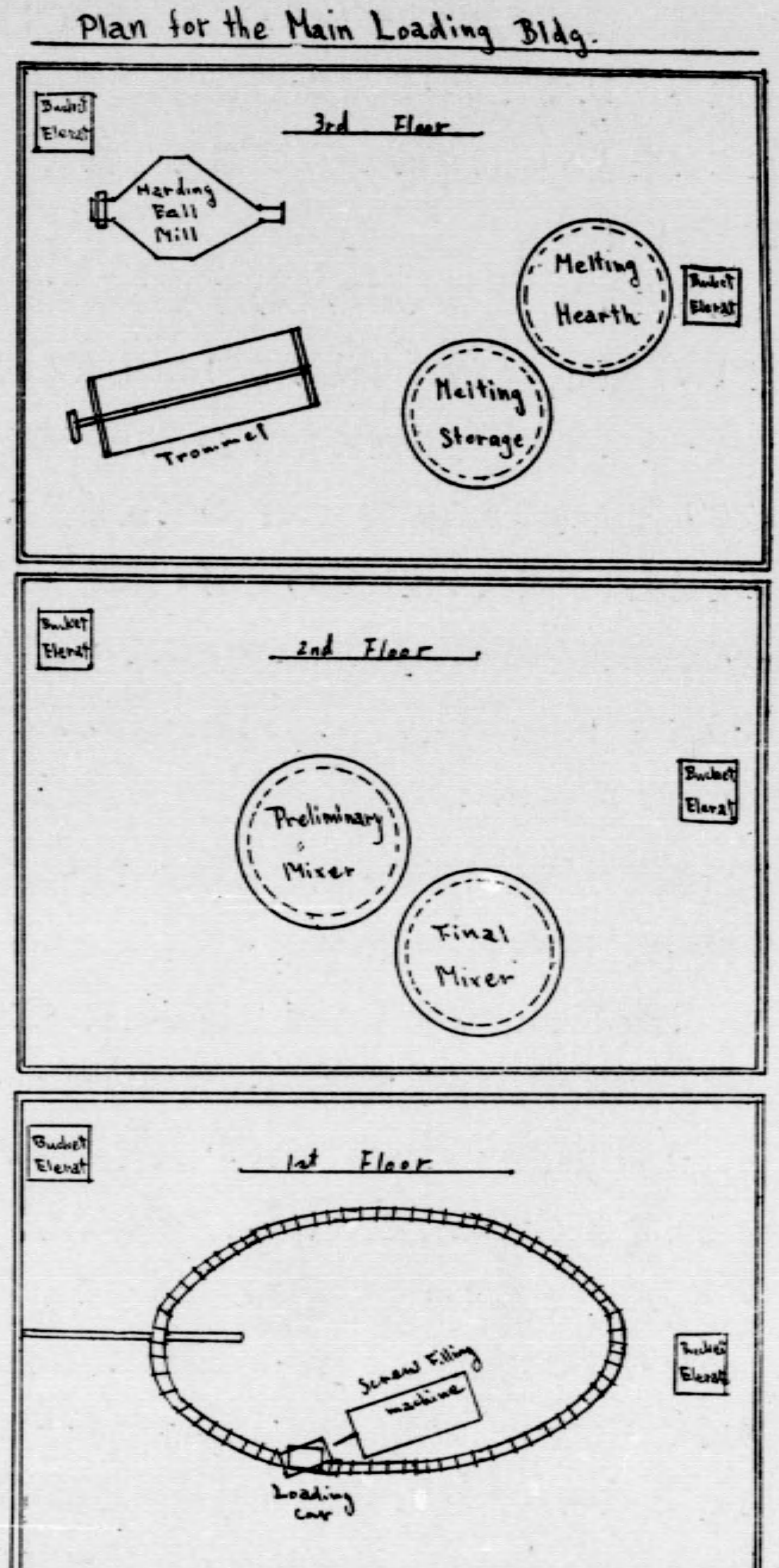
(六) 裝彈廠之一般計畫

全廠須建屋兩座，其一爲工廠，其二爲辦事室及試驗室。工廠係三層樓房，第一層高十四呎，第二三層高均爲十三呎，每層闊卅呎，深廿呎。工廠兩旁有儲藏室四間，二間儲彈，二間儲固體 TNT。此廠所佔面積有限，且易於管理。再者，此廠亦可設於TNT火藥製造廠附近地方，以利輸運。若裝彈廠距製造廠頗近，則前者所需之水蒸汽，得仰給於後者之鍋爐（汽鍋）；否則裝彈廠旁須另設一汽鍋房與水塔也。

(七) 裝彈廠全廠圖


General Plan of the Plant
Shell Assemblying Plant
Rail Road
General Bussiness office (upstairs-Testing lab)
TNT Storage
Empty Shell Storage
Loaded Shell Storage
Main Loading Bldg
TNT Storage
Rail Road
Loading Plant
River
T.N.T. Manufacturing Plant


Design of A Loading Plant for TNT
Shells Storage
TNT Storage
Steam
Drips
1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11
1 Harding Ball Mill
2 Melting Hearth
3 Melting Storage
4 Trommel Screen
5 Preliminary Mixer
6 Container for Coarse TNT
7 Final Mixer
8 Bucket Elevator
9 Screw Filling Machine
10 Loading car
11 Rotating Table



(八) 工作步驟之敍述

(一) 由右邊之戽斗昇降機將固體 TNT 自樓下第一層輸送至三樓融鍋內，同時由左邊之戽斗昇降機輸送固體 TNT 至三樓哈丁球磨機內。

(二) 裝入球磨機之固體 TNT 經磨碎後即導入莊默爾篩，於是碎細質點即過篩而入初步混合鍋，至粗大者乃移至一容器而由戽斗昇降機送回至球磨機以受二次之輾壓。

(三) 當球磨機輾壓 TNT 塊時，融鍋 (一) 則熔融固體 TNT 融鍋爲具低壓水蒸汽夾層之鍋，中置蒸汽螺旋器，以保持溫度常住於 80.2° C。此種內外夾熱之裝置，意在使全部固體 TNT 均勻融解。已融之 TNT 流經蒸汽所熱之槽以入融鍋 (二) 此處受同樣之處置，俾得更一致之液體 TNT 在融鍋 (一) 之槽後，恆置一多孔之鋼片以阻固體 TNT 質點通過而入於融鍋(二)內。

(四) 融鍋 (二) 內已融之 TNT 經蒸汽所熱之槽而入於初步混合鍋內。由莊默爾篩導入初步混合鍋之固體 TNT 量應 2.5 倍於由融鍋 (二) 所流入之液體 TNT 量，俾「可型性混合體」得因以生成。是以 TNT 可型性混合體之製法在節制已融 TNT 流入初步混合鍋之速率，致使其流入之量約爲導入固體 TNT 量之五分之二。初步混合鍋係具蒸汽夾層之鍋，以保持溫度於七十五至八十度(攝氏)之間，俾得一易流之可型性混合體。

(五) 當可型性混合體佔滿初步混合鍋容積之三分之二時，始開鍋旁之門，以容火藥流入最後混合鍋，此處仍設攪動器繼續轉動，以得完全一致之可型性混合體。此時混合體之溫度仍須保持於 75°c 至 80°c 之間。

(六) 當最後混合鍋所盛之可型性混合體，已佔三分之二之容積時，則導之入螺旋裝放機之漏斗內。茲分段說明螺旋裝放機之工作步驟。

(1) 環繞螺旋裝放機之軌上，設車五十輛，每輛上載一空彈，軌下設一大轉動臺，臺之動，受制於齒輪，齒輪則爲馬達 (馬達 (一) 或發動機 (一)) 所發動也。

(2) 先是馬達 (一) 開始發動，大轉動台旋轉，軌因以同時轉動，於是軌上之車亦隨之而行。迨一車達至相當地位，致螺旋裝放機上之橫袖管邇近一空彈之底部時 (橫袖管僅距底部一二吋)，停馬達 (一) 以止大轉動台之旋轉，且同時將車繫於連接於平衡重量之一鋼絲之鈎上。平衡重量之功用有二：其一爲壓縮火藥至相當密度，其二爲管束彈簧之伸縮，藉能節制火藥由漏斗上段流入漏斗室之速率。及一車爲鋼絲上鈎繫住後，則發動連於一輪之馬達 (二) 於是袖管中之螺旋開始轉動，火藥 (TNT 可型性混合體) 遂被推出袖管而入於空彈內。當空彈漸漸多裝火藥時，則全車因裝入火藥之壓縮而倒退，但同時由平衡重量經鋼絲所傳之彈力阻止車之後退，此二力之作用相反，故彈內所裝之火藥遂壓至相當密度。平衡重量愈大，則彈內火藥之密度愈高。當車後退，平衡重量因以漸升，同時連於平衡重量之彈簧乃彈回，致使漏斗上段之底門自行關閉。迨一空彈盛滿火藥時，停馬達(二)以止袖管內螺旋之轉動，隨即解去車上所繫之鋼絲鈎。此時復發動馬達(一) 以移去載實彈之車，同時在後之載空彈車替入此位置以待裝放。於是復停馬達(一)而開馬達(二) 直俟第二空彈照樣裝滿爲止。此種步驟繼續進行，循環不已。

(七) 每一空彈係置於裝在車中之小旋動台上。螺旋裝放機須斜裝於地上，致使與軌上之列車成一定角度。此種裝置之目的，在使空彈之口與袖管之口成一角度，以後由小旋動台之配合轉動，袖管因以恰能垂直伸入空彈之底部。馬達(二)可用以管束袖管內螺旋轉動之速率，因能節制火藥裝彈之速度。若於七十二秒鐘裝完一彈，則每日念小時能裝完一千彈子。

(九) 討 論

(一) 彈內火藥密度，得因預加一適宜氧化劑而增高。

TNT 為一極穩定與耐久之炸藥，且用於軍事上時，其密度咸感不足。是故加以適宜之氧化劑，不僅其密度可增高，且其炸力亦得轉强。玆略述加氧化劑法於後：

混合 TNT 與膠質綿結之 DNT 熱此混合體至 82°c 然後加入氧化劑如 $KClO_3$ 等以成一適於裝放之可型性混合體。下表表明德法二國所用之各成份及其百分率：

成 份	百分率(德國)	百分率(法國)
TNT	14%	14%
含 0.6 膠棉之 DNT	18%	18% 充綿結劑
$KClO_3$ 或 $KClO_4$	68%	60%
$Ph(NO_3)_2$	—	8%

以此可型性混合體裝彈，有三優點：

(1) 彈內火藥密度甚高，易達 1.8 甚至可增至 2.5 故可完全免去微孔現象。

(2) 火藥含氧化劑，故其炸力或可增强。

(3) 每彈所需之 TNT 量較少，故此法較為經濟。

(二) 混 TNX (30% 至 50%) 與已融 TNT (70% 至 50%) 以成可型性混合體後，用以裝彈。

此法之優點如下：

(1) 已裝之火藥，不致生滲出之現象。

(2) 所用之 TNT ，無需絕對純淨。

(3) 用以燃着火藥之爆烈劑 (如 tetryl) 量，可稍節省。

(4) 此種可型性混合體，較固液 TNT 所成之可型性混合體易於作形。

上法有利，亦有弊 TNX 嘗含 DNX 不易除淸，為害至大。加之 TNX 之融點極高，達 181.5°C 故不易製成一可型性混合體也。

(三) 採用新法時所應注意各點

(1) 螺旋裝放機之運用及旋動台之管理，非簡易事，非精巧與受優良訓練之工人，不得令其擔任此種工作也。

(2) 融鍋 (二) 中之已融 TNT 流入初步混合鍋之速率，須小心節制，致使液體固體 TNT 相遇 (一與五分之二之比，固體爲一，液體 TNT 爲 2/5) 以成可型性混合體。

(3) 工廠內之三層樓，應保持於一均勻一致之溫度，尤以最低一層爲最重要，蓋實彈之漸冷乃進行於此處。

(4) 此設計係適用於直徑三吋之彈子，若裝 TNT 於大彈子內，則依比例將各機件放大可也。

(十) 參考書

A. Army Ordnance

- a. Army Ordnance January, Feburary 1922 No. 10 P 209
- b. Army Ordnance 1925 No. 5. PP 858-70
- c. Army Ordnance, Vol. VII No. 37 July, August 1926

B. Books

- a. Arthur Marshall: Explosives
- b. Captain Colver: High Explosives

C. Chemical Age

- a. Chemical Age, Vol. I PP 385-6, 1919
- b. Chemical Age, Vol. I PP 407-8, 1919

D. Patents

- a. British Patent, No. 181,030 June 2nd 1922
- b. French Patent, No. 322,944, August 6th 1908
- c. German Patent, No. 201,306, September 29th 1906
- d. United State Patent
    1. U. S. P. No. 1,329,566, 1920
    2. „ „ „ No. 1,329,503, 1920 Feburary 3
    3. „ „ „ No. 1,337,940, 1920 April 20
    4. „ „ „ No. 1,317,422, 1920
    5. „ „ „ No. 1,420,367, 1922 June 27
    6. „ „ „ No. 1,438,399, 1922 December 12
    7. „ „ „ No. 1,477,040, 1923 December 11
    8. „ „ „ No. 1,633,656, 1927 June 28

民國廿二年國慶日胡甯生撰於光華

人面演化簡論

黃賡祥

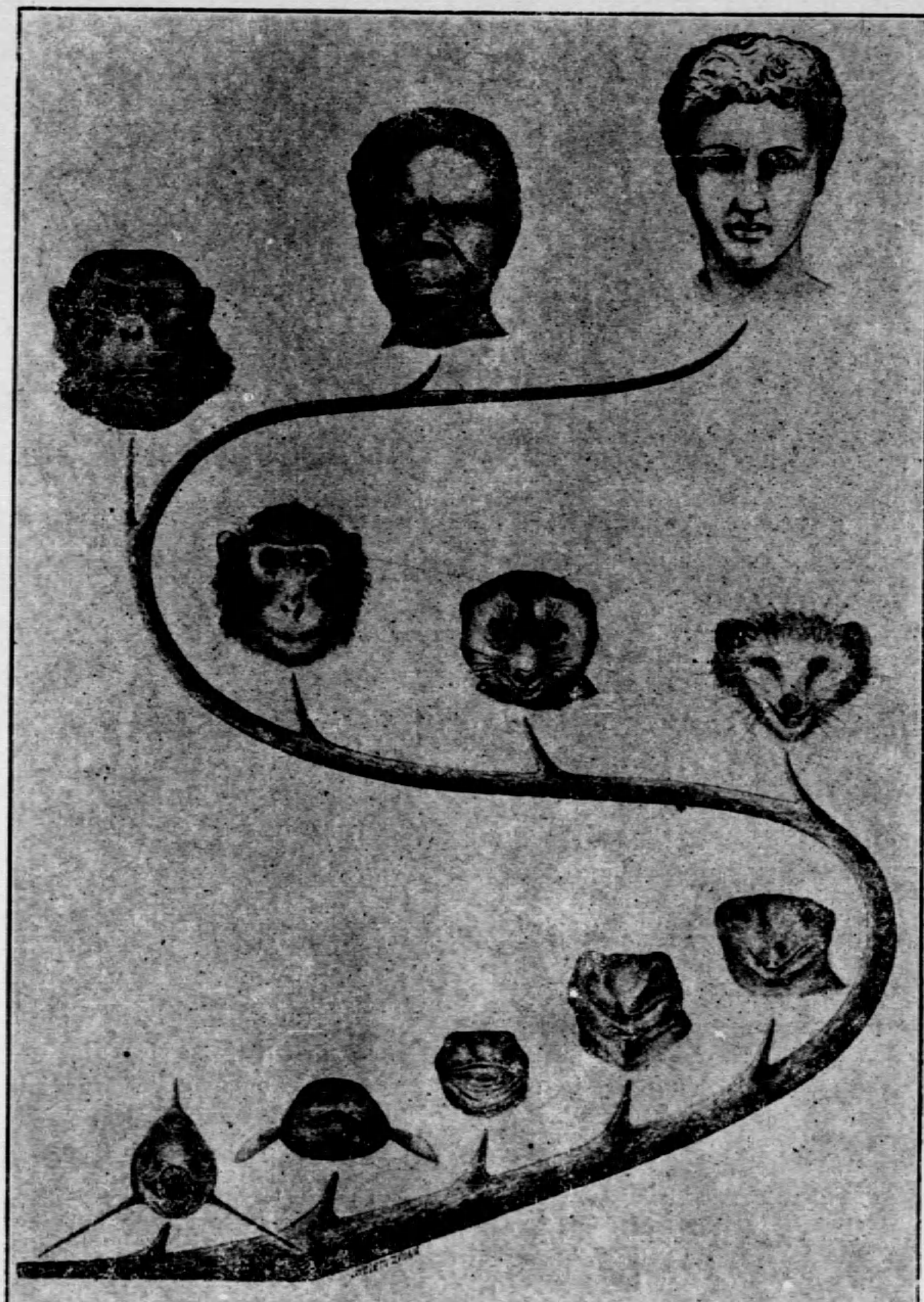
宇間萬物，如果盡屬創造，則不至有天演論之發現。讀者如係創造論之純粹信徒，當然視人面演化之理論為癡為狂。作者不求異派之同情，祗望同道之互助。總之：一切理論重證據；因事實與證據之追求，人面演化論有不得不言其所欲言者。

人面演化，並不是新理論。古之聖賢，已有明言：人獸之異者幾希，人不讀書，不知廉恥，不識禮教，其與禽獸何異！誠哉斯言。人類之所以異於其他動物者；無非獨俱理想而然。初生嬰孩，飢不能自食，寒不能自衣，父母乳哺之，懷抱之，與其他初生禽獸，依父母之養育，毫無分別。人與禽獸初期之生活現象，遙遙相對，其間蛛絲馬蹟，必有不可盡言之關係在焉。

面之功用，不論何種動物；不外指導動作趨向，覓取食品養料諸端。在為萬物之靈之人類，更為引誘異性之要素。

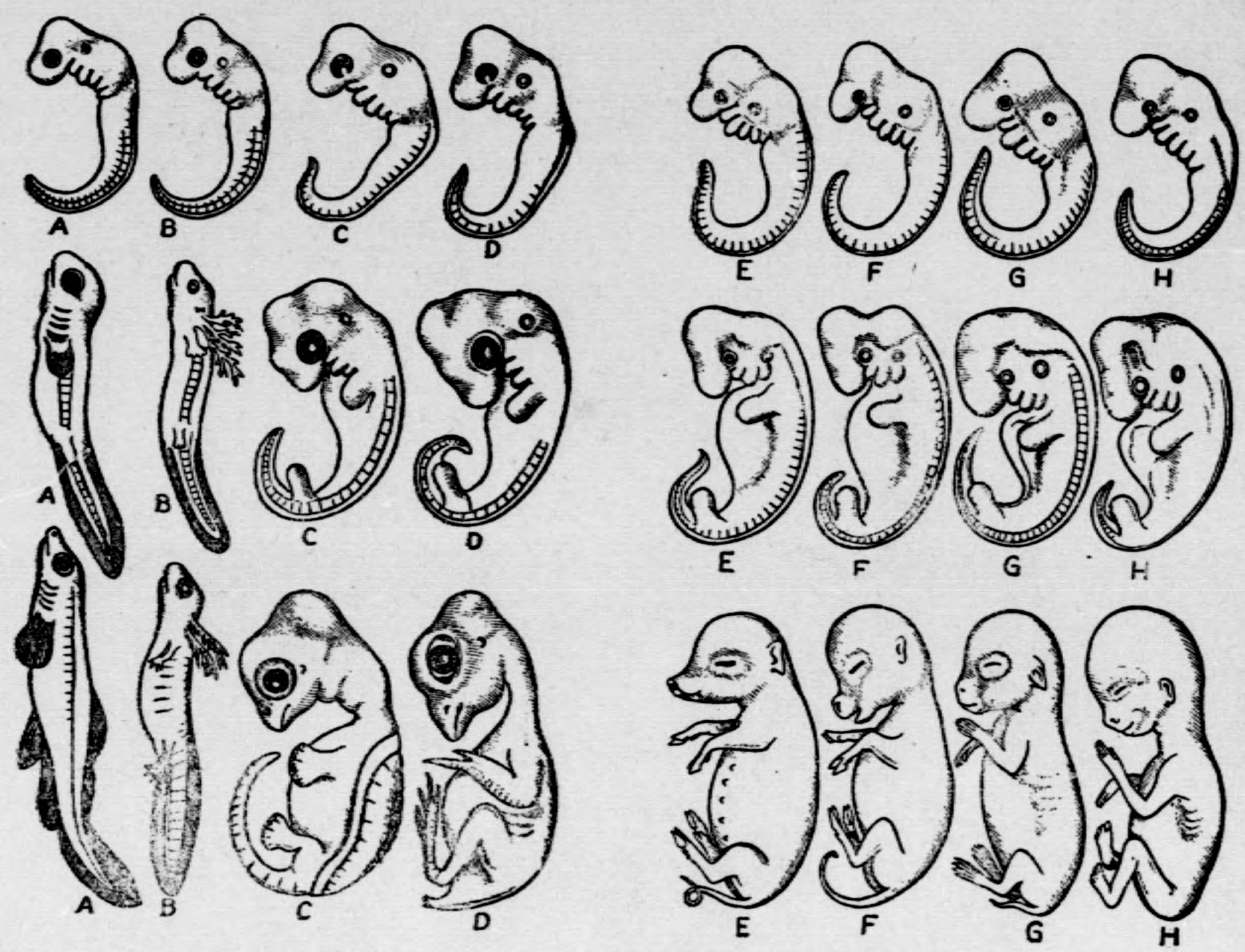
面部位於動物個體之最前端；其應有器官，為耳，目，口，鼻，諸部。諸器官之位置，不論何種動物，皆屬一致。諸器官功用，不論何種動物，未常變更。但面部及其附屬器官之形態，非特各類動物各異，且人與人亦各不同。面部形態之不同，實由於變化無窮之結果；人面之演化，自無可諱言。（圖解一）

人類在胚胎時期，其發達程序，及環境與現象；與下等動物互相比較之下，類似之處甚多。複細胞動物：除兩胚層之水綿，及腔腸動物外；皆俱三胚層。各胚層所變成之構組，任何動物，完全一律。胎兒於發達時期，其個體形態與生活狀況，最初與魚類極似：體形長圓，為許多顯明之體節組成；位於滿貯流質之羊膜內；呼吸用鰓；經數度變化，肺部漸臻完備；鰓則變為他種組織，或完全退化。從水棲而進為陸棲。與雙棲類中蝌蚪之變化，極形相似。總而言之：人類於胚胎變化程序中，愈早愈類下等動物：如魚類，雙棲類。此後變化速率愈高，胎兒本身之構組漸增；與下等動物個體之構組相去漸遠，與高等動物漸形接近，最後乃全露其本來面目。如是，則胎兒個體之發生史重溫種族之系統史。（圖解二）



圖解一 各類動物面部之比較。

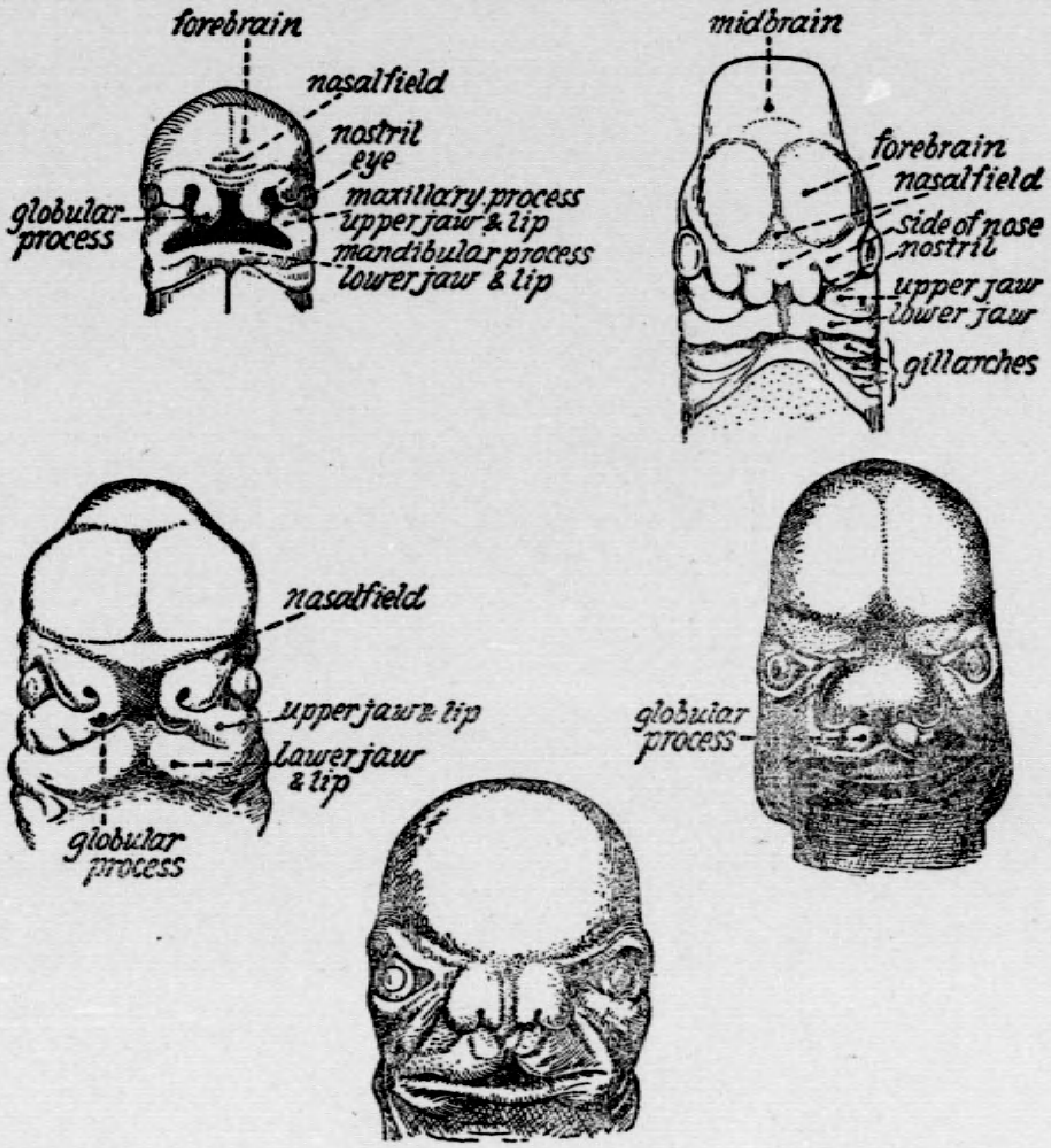
(由下順枝往上) 1. 泥盆紀之鯊， 2. 泥盆紀垂鰓魚， 3. 古生代之雙棲類， 4. 古生代之爬蟲類， 5. 三疊紀哺乳類似爬蟲， 6. 白堊紀之哺乳類， 7. 狐猴， 8. 猿猴， 9. 黑猩猩， 10. 塔司馬尼亞人， 11. 羅馬人，



圖解二　各種動物在胚胎時期個體構之比較

A 魚類，　B 蠑螈類，　C 龜類，　D 鷄類，　E 猪類，　F 牛類，　G 兔類，　H 人類，

胎兒最初兩鼻廣離，與南美猿猴之鼻甚似。此後兩鼻漸接漸近成爲一體。惟其形狀扁平，闊度極顯，與大猩猩及黑猩猩之鼻甚似。矮小黑種人之鼻部扁平，直與早期胎兒無異。許多猶太人之鼻樑高縱，鼻尖下垂，成一鈎狀，可謂發達於極點。夫鼻部之高低，與中間隔離鼻骨之是否發育，有密切關係。就演化方面推論，高度鼻樑，當屬較善之面部。（圖解三）



圖解三　胎兒面部及器官之變化程序

動物之口腔，蓋原自外胚層之內翻。在兩胚層之動物類中；如水螅，與水母，已開始發現。原脊索類中之蛞蝓魚，與玉鉤蟲，更形進步。口腔中同時且俱尖狀齒，則首推八目鰻。此種尖形之齒，雖與靈長類之齒組成不同；所含之原質亦異。但齒部之發現，與脊椎動物牙齒之演化，不能無關。胎兒口腔由外胚層內翻而成。週年後所發生之乳齒，與八目鰻口腔之齒遙遙相應。

脊椎動物之眼部，皆由外翻，內翻，及前腦之延長部所組成；與腦部及其他神經同一來源。因之彼此有互相密切之關係。視覺器官在無脊椎動物中極爲普遍，但與脊椎動物眼部之演化，尚無直接關係。惟扁形類中之片蛭；眼之位置，及其與腦神經之關係，不亞於高等脊椎動物。因此未嘗不可稱爲高等動物之導者。脊椎動物最初之有視覺器官者：雖無證據以考其祖先；但蛞蝓魚或因習居水底沙中，因環境之關係，無顯著之眼部

。但體之兩旁，混於神經管之間，有極多眼狀胞。在神經管之前端，有一個特大之眼狀胞。此眼胞之功用，雖無特殊視覺效能；但其位置，及其與神經之關係，則與高等脊椎動物絕似。蛞蝓魚之失視覺效能，蓋因環境之不需。拉馬克所謂：一切構組，善利用之，則更形進步；失其所用，則漸形退化，其斯之謂歟。

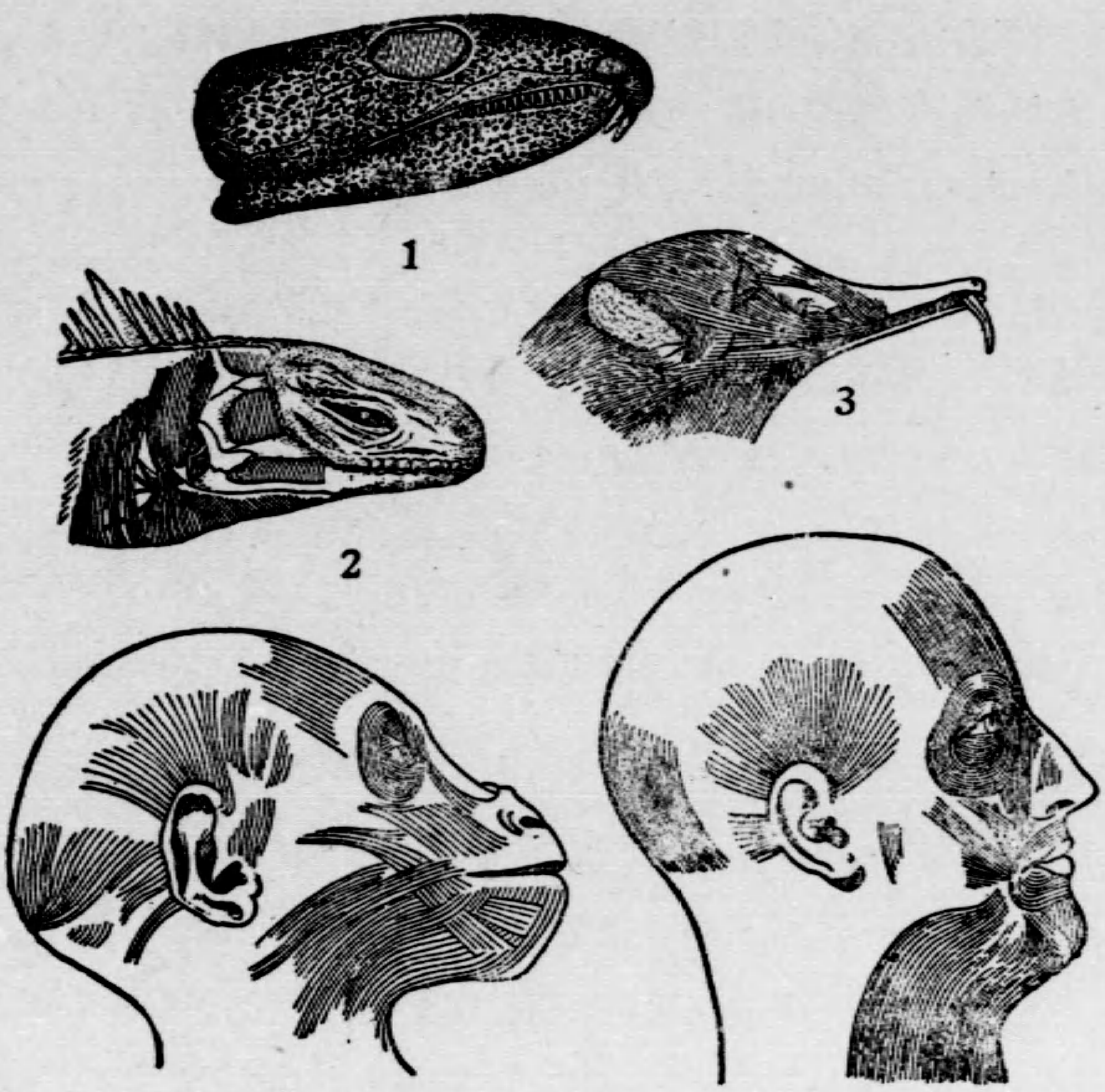
軟體動物類中之墨魚，視覺器官構組之完備，直與人眼無異。諸組織如水晶體，瞳孔，虹彩，前房，大房，角膜，視覺神經，圓柱層，及眼球肌肉等；應有盡有。但各組織之位置及佈置，與最完備之視覺器官，互相比較，則稍有出入。

脊椎動物，視覺器官之源始，迄今尙乏確切證據；但據 Studnicka 學說：八目鰻，在胚胎時期，視覺器官凡四；一對位於頭之頂，一對位於頭之旁。當時諸眼皆具吸收光線效能；頭頂之眼，在高等脊椎動物，變成松子腺與副松子腺；邊眼再經數度變化，於是一切組織，乃構成爲純粹視覺器官。

脊椎動物之眼，自魚至人，除各組織完全相似外，第三眼簾，即瞬膜，Nictating membrane 原爲水棲動物，保護眼球之重要組織；于人已無何種功用。然此瞬膜仍存在，比之水棲動物，不過較爲退化耳。考上各種事實，人眼於演化程序中，與下等動物不能無相當關係。

耳爲聽覺器官，最完備之構組，含外耳，中耳，內耳，三部：外耳具耳朵及外聽道；中耳具聲膜，及聽骨；內耳具半規管，及蝸牛殼等組織，魚類與雙棲類等，皆無外耳，中耳，且無需用，故不必與乳哺類作何比較。鯊魚祇有內耳，在胚胎時期，其發達步驟，自外胚層外翻，位於後腦之邊。與人類胎兒之內耳之變化，同出一轍。與人類內耳之蝸牛殼相等之組織，在許多雙棲類動物，已開始發現，狀爲兩小乳頭形。兩乳頭中之一，在鱷魚類中，已延長彎曲。在人類內耳中，其彎轉洽似蝸牛殼。蛙之中耳，源自喉道之外凸，與人類中耳中之耳咽管 Eustachian tube 之始源相同。至於人類外耳之外聽道，與鯊魚之排水孔 Spiracle 之部位相等。且源始相似，皆由外胚層之下凹而然。

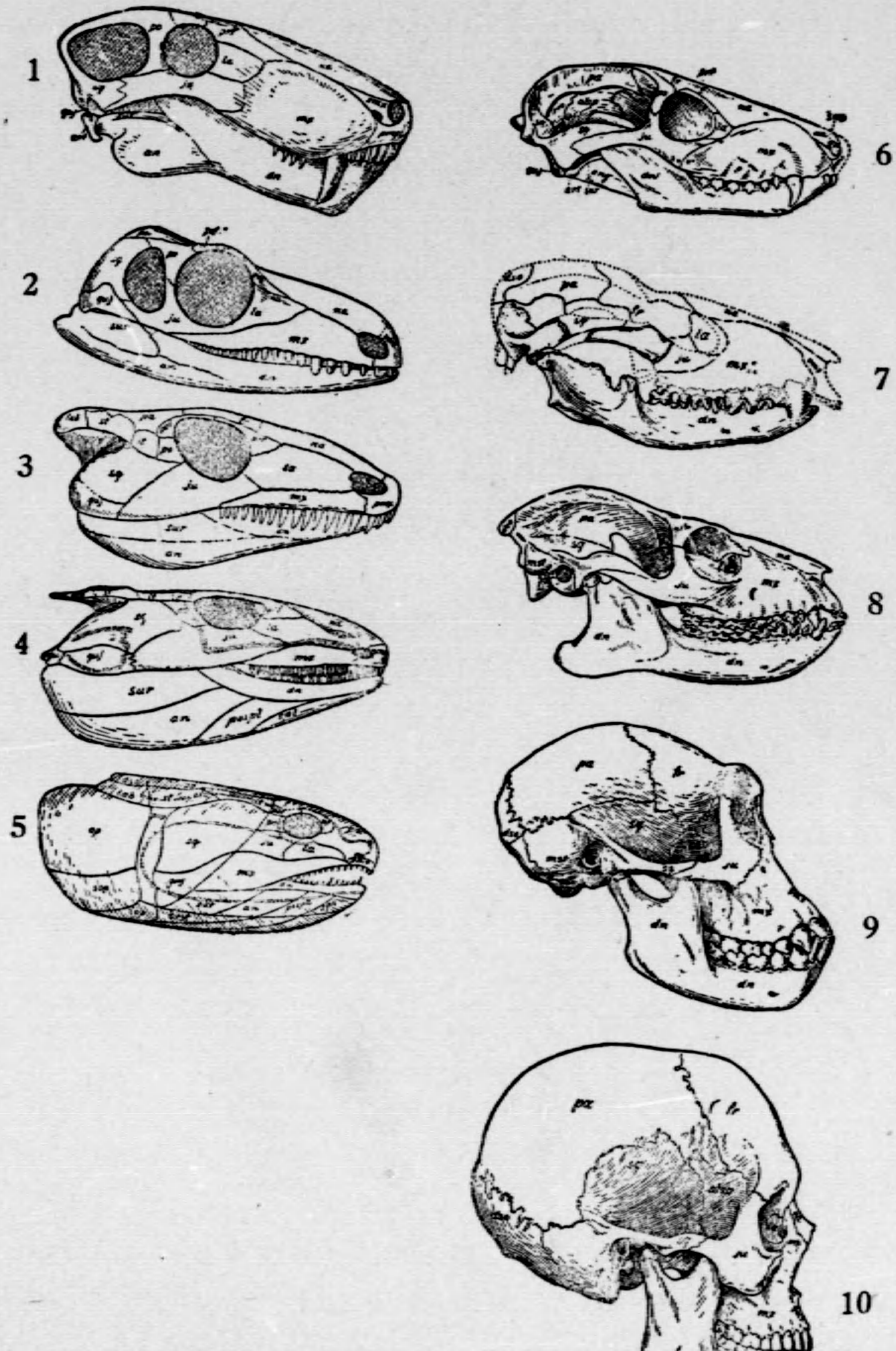
在比較解剖學上，自魚類以至於人，其間各類動物，面部之肌肉，骨骼，因演化之需求，故同一組織。不免變更其形狀，但各組織之構組如初，其始源同一，其位置不變，其功用相等。詳細比較各組織之構組等等，自有專書討論，無容本文提及，(圖解四)



圖解四　解釋人面肌肉之演化及源始

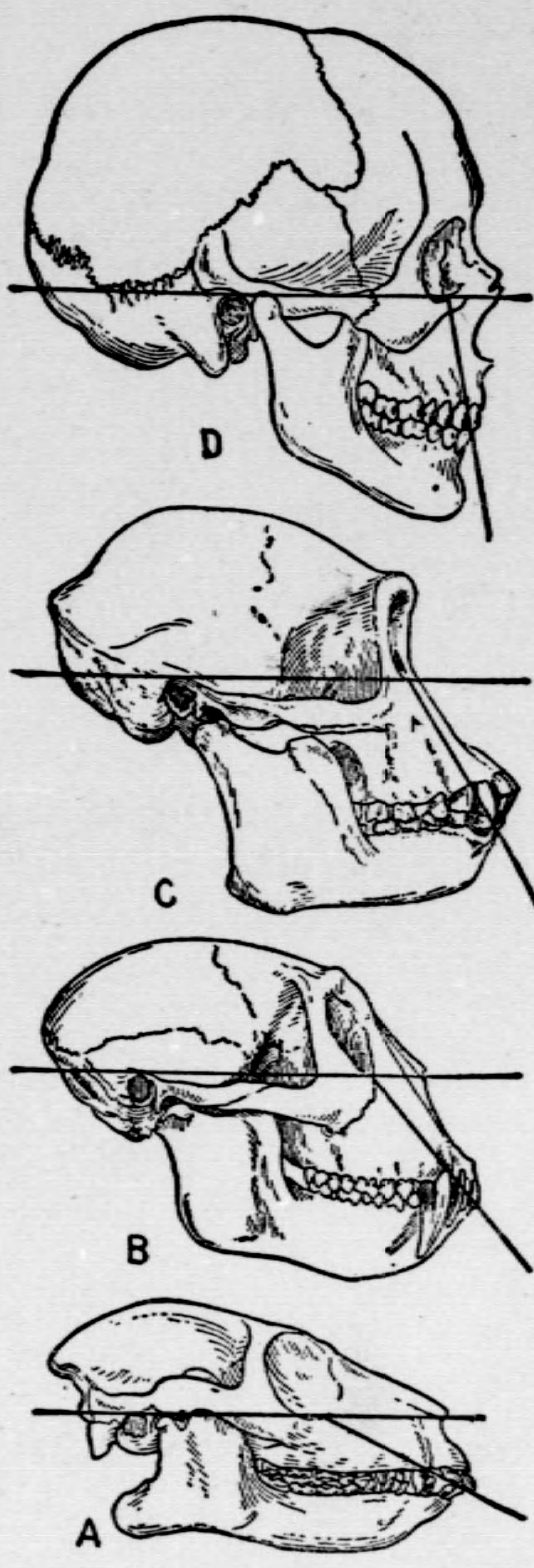
1. 古代爬蟲類　2. 近代爬蟲類　3. 古代乳哺類　4. 大猩猩　5. 近世人

就圖解中參考，比較肌肉與骨骼，因各組織在各種動物中，其功用效率不一，故於演化程序中，逐步改良，以達適其所需。同一組織，在彼類動物非常發達　在此類則漸形退化。高等動物因前腦增大，故前頭骨，顱頂骨，蝴蝶骨，顳顬骨等格外發達。上顎與下顎，爲攫取食品之惟一工具，因食食品之不同，故其功用效率有異。上顎骨與下顎骨在下等脊椎動物：如魚類等，因所取養料，皆易吞嚥，無需咬嚼，故甚鬆碎。在高等脊椎動物：如乳哺類，所需養料須經咬嚼，故上下顎骨各結成一片，非常堅固，藉增功用效率。下顎骨治成一弓形，上顎骨之容積亦增加；其結果由一扁斜之頭顱，逐漸變成圓方形。面部之角度，自三十度而至九十度，其最顯著者，猶以狐猴以至於人 (圖解六)



圖解五　解釋人類頭顱之演化及源始

1. 泥盆紀之垂鰓魚　2. 古生代之雙棲類　3. 古生代之爬蟲類　4. 古生代之熱血爬蟲　5. 二疊紀之爬蟲類　6. 三疊紀之爬蟲類　7. 白堊紀之有袋類　8. 始新世之靈長類　9. 黑猩猩　10. 近世人



圖解六　靈長類面部及頭顱之演化

A 始新世之狐猴　B 猿猴　C 黑猩猩　D 近世人

考諸古動物學，魚類與雙棲類之出世，當在古生代 Paleozoic era 迄今約 300,000,000年；爬蟲類在中生代 mesozoic era 迄今約 150,000,000 年；乳哺類出世於新生代 Cenozoic era 迄今約 50,000,000年；人類之歷史最短，出世於最近之心靈紀元 Psychozoic era 其期間不過 1,000,000年

一九八一年荷蘭人 Dubois在爪哇中部，所覓得之原人骨骼Pithecanthropus erectus同時掘得二十餘種乳哺類動物之骨骼。考其年齡，皆屬鮮新代 Pliocene period用人體解

剖學方法，考究原人之頭顱長而窄，腦殼斜而小．腦之容量爲九四〇糎，比大猩猩之五八〇糎大，較歐人之一五〇〇糎小；齒爲犬齒 Cynodont 與近世人猿之齒相似；考其年齡，約在 400,000-500,000 年之間。頭顱之形式與角度，與第三紀層之人似猿甚近。他如 Eoanthropus dawsoni, nearderthal man, Cro-magnon man 之頭顱，其形式與角度與猿類比較亦甚接近，其中尤推 Cro-magnon man 面部之角度，與今人最像；幾近九十度。腦之容量之大，眉峯之高，牙牀之堅厚，下顎之長展，又與近世人相等。古動物學據可靠之證物，藉以解釋人類之演化；人類之演化，又恃個體各組織之變態爲標準。面部之變態，尤推演化中之最著者。（圖解七）

1

2

3

4

圖解七　自原人至近人面部之演化

1. Pithecanthropus erectus, 2. Eoanthropus dorosoni, 3. neanderthal man 4. Cro-mognon man

遺傳，爲天演之基本機械，對天演方面，雖無豐富材料，但天演非藉遺傳，無以自解。種瓜得瓜，種豆得豆，物理自然，未有種瓜而得豆者。俄國之狗似人 adrian geftich gen 面部之毛，其排列方位，與犬無異，以此爲事實，則人犬不免有血統關係，遺傳學上之解釋，則不外復祖現象而已。復祖現象，在他種動物爲平凡常有之現象，於天演方面，實一直接證據。（圖解八）

圖解八　俄國之狗似人

參考書

Apes and Man :—— Peake and Fleure.

Man of the Old Stone Age :—— Henry F. Osborn.

Man Rises to Parassus :—— Henry F. Osborn.

Manual of Human Embryology :—— Keibel and Mall.

Our Face from Fish to Man :—— William K. Gregory.

Organic Evolution :—— Richard S. Lull.

A Laboratory Manual for Comparative Vertebrate Anatomy:——Libqie H. Hyman

馬的演化

W. D. Mathew 原著
江 振 聲 譯

(一) 導言

馬的祖先在地質學上的記載是演化最好的例子；它的理由有三：第一個理由，馬是一個尋常的動物：它的形態和習慣是人人知道的；而馬之所以演化，也是人們興趣研究的；第二個理由，馬的化石記錄在高級動物中是最完全的；第三個理由，馬齒和骨骼的變異是很容易區別的，而其中之力學和適應的意義也不難了解。

馬的演化記錄已經有五十多年，在這幾十年之間——尤其是在最近二三十年之中，它的化石證據大大的增加。以前馬許 (Marsh) 可布 (Cope) 和萊狄 (Leidy) 研究馬，只靠了幾個零片不全的標本，而我們今日有許多完整的骨骼和頭顱；以前他們對於地質時代的知識是不完全的，而我們現在有很精確一定的學識。雖然他們的學說與現在的有點不同，而這幾位先鋒對於研究馬的科學方法和見解給我們一個很大的貢獻；他們往年的工作為我們近代知識的基礎。

在這篇文裏，第一我要把關於這些事實的記錄之綱要舉出來，和化石證據在今日所佔的地位；第二我要詮釋這種記錄在近代各種搜求中所代表的意義和所證明的事實。至於論及這類的事實，不是從古代權威傳下來的；除了很少的例子之外，都是從觀察和新發現的知識敘述出來的。有許多作家發表一些理論都是根據這些詳細的證據；並且在本文的後面有許多更重要的作品。在美國博物院裏和近來在別處所搜集的材料還有許多未發表，而這些未發表的材料是關於近代理論與以前作家理論不同之點。詮釋證據是代表我自己的意見，而與研究有脊化石動物的人之見解大相契合。雖然有些不同之點，我的朋友辯駁以為誤解，而這裏所舉出的見解是合理的，的確的，而與自然科學相契合。這裏所舉出的引證大半是從有脊動物的古生物學的稿件而來的；我另外又增加幾個圖解，而更改了幾個別的圖解，以合近代思潮。

（二） 骨骼的性質

骨骼是馬的祖先之記錄文件。軟骨骼不能在化石裏保存着；所以要了解化石所表示的東西，我們必須首先知道馬齒和骨骼是像什麼，以及它的齒骨和傍的動物齒骨之不同。

馬的骨骼與人的骨骼比較起來，有許多不同之處，而也有相似的構造。人的頭顱是短的，圓的，差不多都是腦殼；馬的頭顱是長的，差不多盡是面部；然而牠們都是同樣的骨質接合的，而彼此的關連都是一樣，如肌肉附連的方法，神經系和血管之小孔，牙齒的關係和各種感覺器官都相同。人馬骨骼之大小形式是不同，而根本構造是一樣的。

馬的面部向前伸出，以適合牠的銳利之磨齒和切齒。馬齒有四十二：在上下顎的每邊有門牙三 (incisors) 犬牙一 (canine) 前臼牙四，臼牙三 (Molars) 除了臼牙和下部前臼牙爲乳齒所更替之外，一切牙齒都是永久的。下部前臼牙很小，在早年失去，而雄馬只有上面犬牙。這樣看來，馬齒普通只有四十——十四個切牙和二十六個磨齒。人齒有三十二——在上下顎的每邊有門牙二，犬牙一，前臼牙二和臼牙三。

馬的切齒同人的門牙一樣，但較長；其中有一個深槽以與內外羽冠隔絕。齒槽名曰齒痕，因馬齒漸漸消蝕，終消磨殆盡。這樣看來，馬的齒痕之大小，以定馬的年齡。

除了上顎第一個小前臼牙之外，磨牙是四方的三棱體，四圍俱有牙磁，在消蝕的牙面有複雜的花紋，而牙磁的凹處充滿着膠質。三棱體在齒面漸漸消磨；在消磨之際齒的一邊有細膩變成小脊，而其他一邊有膠質。細膩原在齒內；在未從牙肉破出之前，膠質是積蓄在齒上。牙磁和膠質在牙齒發生之初已經在牙隙內長成。馬的三棱體形之齒，其中所含的各部同人類牙齒一樣；但是馬的齒冠直長，而其膠質是從含有鹹性石灰分泌之口涎所蓄積的一種新質料。齒冠是從牙齦伸出，而牙齦在未完成之前，齒冠開始消蝕。自五年到八年的時候，牙齦連合起來；因此牙齒停止其生長而漸消磨。馬死是因爲馬齒不能咀嚼食物。

馬的長冠磨齒是從簡單的短冠牙齒演進而來的，如同人的臼牙一樣。馬底骨骼的構造也同人類骨骼構造一樣，而分配比例是很不同的。

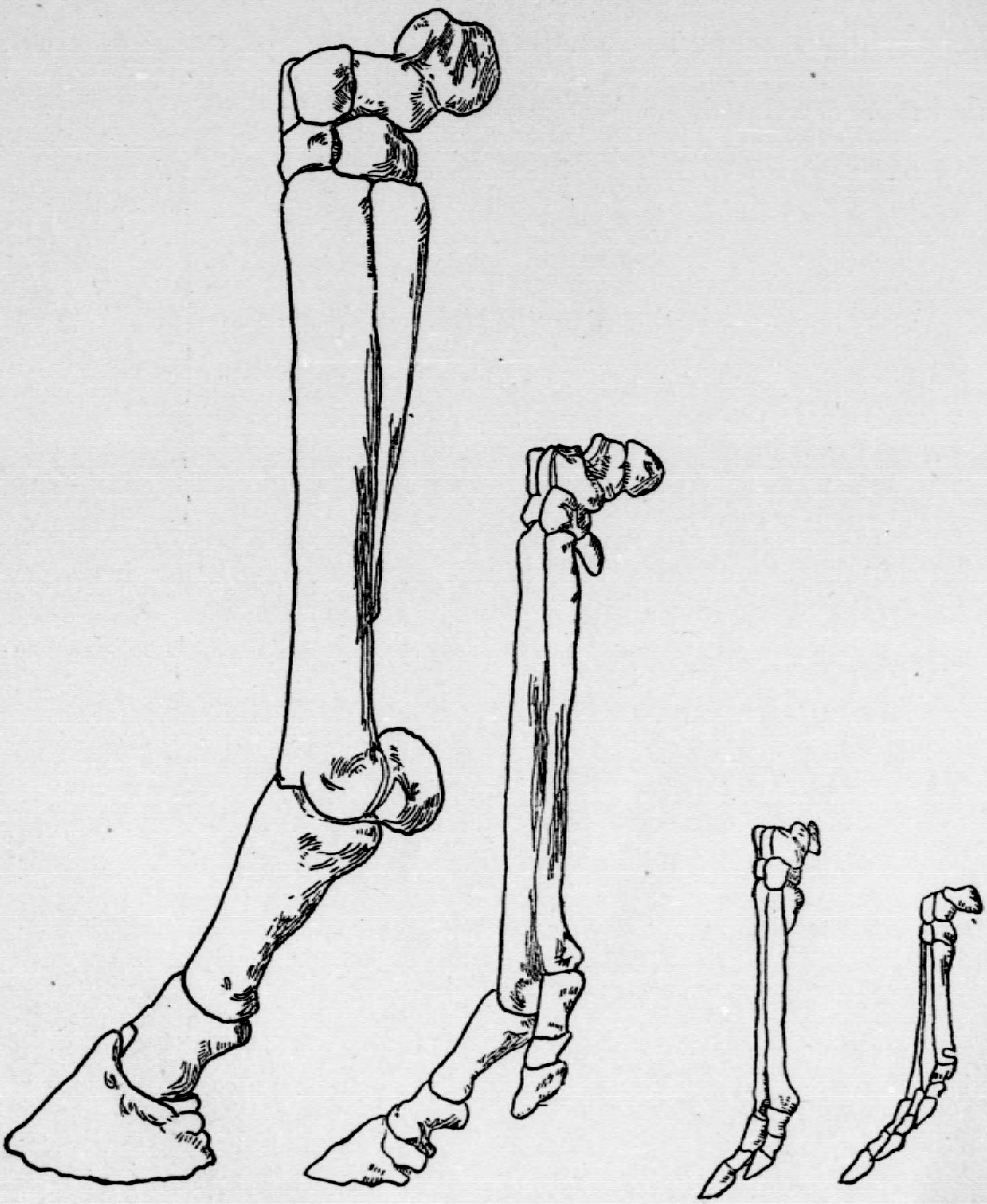
馬的頸脊骨有七，其各部和組織方法雖與人的頸脊骨一樣，但比人的脊骨長些。馬的肋脊骨有十九，而人只有十二；馬的肋脊與中脊相連而構成馬頸上面之彎處；其肋骨和胸骨構成一個深窄的箱匣，而人的胸部寬淺。至於馬的盆骨 (pelvis) 之各部和關連也同人的一樣，而與人的盆骨之分配比例完全不同。馬尾長而運動自由，人只有盤曲的痕跡；牠的肩臂長而不闊，腿骨健重而不細長。

人的膀臂和腿各有兩根分開的骨頭。膀臂含有前膊外骨 (Radius) 和正肘骨 (Ulna) 而腿則有大脛骨 (Tibia) 和小脛骨 (Fibula) 前膊外骨和正肘骨運動，能使手轉動，而大脛骨和小脛骨運動，能使足轉動；而馬則完全失却這種本能。馬的前膊外骨和正肘骨變為堅硬，而正肘骨之軸是一根細線依附在前膊外骨的後面。小脛骨也變為堅硬而退化，其軸隱沒不見，而不與大脛骨之軸相聯合。

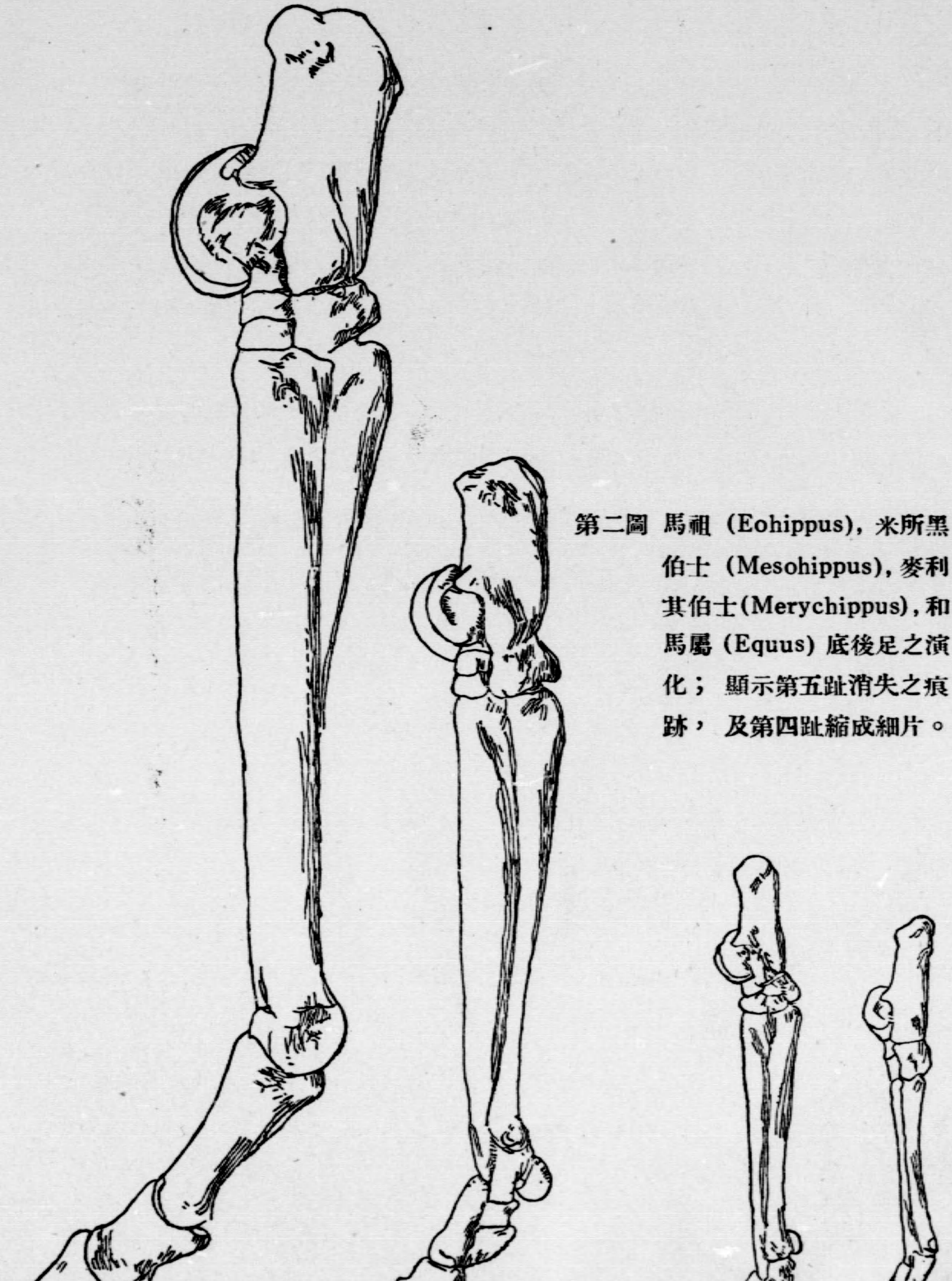
馬足很特別：其行走是靠着中足趾，而傍足趾已經失去。馬的前後腿脛骨是長圓之軸；在軸的後面有蹠骨和第二第四足趾的遺跡。若是我們細細的解剖馬足，我們可以尋出一個小骨節，這就是前足第五個足趾。馬的骨節與人的骨節不同之點甚多；馬的骨節之構造發出一種揉性，而有一種强有力的槓杆作用，以適應其運動。

馬足在古代同其他古代乳哺動物和現存多數乳哺動物之足極類似：這些乳哺動物與人一樣，每足有五趾，而其肢足以適應各種使用。馬足之漸次變異是指示其運動器官之特殊使用而演化。在最初的時候，馬的前足有四個同等的而完全分開的足趾，而後足有三個足趾和兩個失去的遺跡。將來之發現可使我們追溯馬的祖先有五個足趾。

馬的骨骼學，齒的發展和普通的解剖學在各種教科書中可以尋出，……… 尤其是在徹布 (Chubb 1921), 來得刻 (Lydekker 1912) 和西遜 (Sisson 1910) 書中可尋出最佳的報告。



第一圖 馬祖 (Eohippus)，米所黑伯士 (Mesohippus)，麥利其伯士 (Merychippus) 和馬屬 (Equus) 底前足之演化；顯第五趾和第四趾之漸次消失



第二圖 馬祖 (Eohippus), 米所黑伯士 (Mesohippus), 麥利其伯士(Merychippus), 和馬屬 (Equus) 底後足之演化; 顯示第五趾消失之痕跡, 及第四趾縮成細片。

(三) 現存馬種和其他類屬

家養馬種的形體變異極大，而它們的顏色和其他各種表面之特質也有分別：如設得蘭羣島之駒 (Shetland pony) 和伯齊魯的引重載貨之馬 (Percheron chaft-horse) 其形體之大小，甚相懸殊。還有善走的跑馬，其體質結實而瘦小；負重的常馬，其身軀肥胖而龐大。除了牠們的特性之外，也有相同之點，如齒的花樣相似，骨骼的相同。

家養驢類與馬無大分別，不過驢齒，頭驢和骨骼有堅定的性質，並且不育異類，這是與馬不同的。至於驢齒的花樣也是固定不變的——最顯著的，驢子的上顎臼齒沒有摺疊。

各類野種與家養之馬交合不能生育。它們不同之處在表面性質甚爲顯著，但是它們的牙齒和骨骼都很相似。它們不同之點很不容易分別，譬如北非洲之野驢有人信以爲家養馬類之祖先。在眞野馬之中以及在亞洲中部所獲見的野種，大概是家養馬類之原始野種之苗裔。在撒哈拉沙漠之南有三種斑馬 (Zebra) 現仍存在，而野驢 (Quagga) 在十九世紀已經澌滅。斑馬的斑蚊花樣各有不同，而牠們的頭顱之形式亦異，但是他們的牙齒與家養馬類的牙齒無區別。

這樣看來，馬科一切種類的骨骼和牙齒都很相似；如此，牠們彼此是有關係的。但是牠們與傍的動物大不相同。大解剖學家奧文 (Richard Owen) 以爲馬，貘 (Tapirs) 和犀牛 (Rhinoceroses) 之形體大小雖不同，而骨骼之構造和牙齒之花樣是一樣。把他牠們列入奇蹄類 (Order perissodactyla)，而與猪，野猪，河馬，駱駝，鹿，長頸鹿，羚羊，羊，和牛類之偶蹄類 (Artiodactyla) 分開。

奇蹄類之踝骨 (Astragalus) 與大脛骨有一個斜滑車似的骨節，而末端差不多是平面。後腿之平衡樞軸經過中趾的中間；前臼齒常似臼齒；這是奧文的搜求，指示奇蹄類之臼齒花樣相同，雖然各科稍有變異。

犀牛每足有三趾；其足短堅而展開；其齒俱有外冠和兩個橫切頂的簡單花紋，而膠質甚少；其前齒或完全凋落或僅剩下顎一對堅固長尖齒，有時上顎一對長對齒亦存在。現在所有的犀牛都有聯接的角。

貘的前足有四趾；後足有三趾；其頰齒短而俱有十字橫頂之簡單花紋；其上顎之齒俱有外環，其前齒像鳥喙的形狀，與馬齒稍同，但少內頂和齒痕。其鼻口(Muzzle)可伸出捲曲的長鼻，而其頭顱稍有變異以黏附其肌肉。

有蹄動物可分爲三種；牠們的外形，生活習慣以及牠們的環境都不同。馬常生于空曠的平原，食乾草，善走能迅速避敵，是爲第一種有蹄動物。犀牛多長于灌木叢林中，食粗葉小枝；身被強重的冑甲，以爲攻守之利器，是爲第二種特殊獸類。貘棲息稠茂森林和澤地之莽叢，食多汁蔬類，善泅水游泳以避敵，是爲第三種有蹄動物。

奇蹄類的化石記載最爲完全，其中載明馬，貘和犀牛三種不同的特殊生存動物在第三紀爲繁殖的有蹄動物。這類有蹄動物在古代包含其他特殊動物，而今已澌滅。或變爲中介物種。我們追溯第三紀時期 (Tertiary Period) 我們就知道他們是從原始共同種類漸次演化出來的。在第三紀時期之初已經發現這種原始種類之記載；從這種原始種類我們可以追溯馬，貘和犀牛三種特殊生存動物之演化的許多時期，以及雷獸 (Titanotheres)，砂獷 (Chalicotheres) 和其他已經澌滅物種之祖先。

這種記載是從美國和歐洲的地層裏研究出來的；古代奇蹄類是在第三紀之最古紀 (Eocene) 的開始在歐美兩洲偶然發現的。有人推測牠們是從別的地方遷徙過來的，然而地質學家仍未完全考察出來，並且也沒有這種地質的紀錄。假使牠們生在歐美兩洲，我們可以希望發現牠們的祖先，追溯原始奇蹄類的五趾時代的祖先，可以代表奇蹄類和其他胎生乳哺動物是從共同祖先出來的。假使牠們是從別的地方遷徙過來的，我們要用解剖和其他間接證據解決高級乳哺動物之原始，證明將來的乳哺動物同現在的乳哺動物一樣。

(四) 人的時代之化石馬類

馬的遺跡在第三紀後之一紀 (Pleistocene Age) 地層裏可以發現。在以前幾世紀的近代土壤裏，我們可以發現許多家養動物之骨頭。若是把牠們變成石質，牠們是屬于家養馬類名叫客伯魯士馬屬 (Equus caballus)。歷史家，考古學家 (archaeologists) 和搜求各類馬種之來源者對于這些骨頭是很有興趣的。

第三紀後之一紀馬類 (Pleistocene horse) 是極古的，是在史乘以前而與原始人類和冰川時代的人同時。牠們是在第三紀後之紀以前幾千年，差不多從十萬年到百萬年時期之久。除了奧洲 (Australia) 之外，在各洲都可以尋見這種馬——有些現仍生存，有些已經滅亡。在新大陸所有的化石馬種已經澌滅，而在南美洲只能發現第三紀後之一紀的化石馬種。有些研究馬的權威相信當十六世紀在阿根廷平原 (Argentine Plains) 所產生之一種野馬 (Mustangs) 是從這類馬種出來的。普通的人都承認在南美洲和北美洲所生存之馬都是野馬；牠們是從家養馬種逃出來的，而不是眞野馬。有人說牠們是西

班牙人和古代殖民所帶來的動物之後裔。牠們具有家馬之性質，是與家馬自由交合而生的。

在非洲的第三紀後之一紀馬種現在仍然生存，如各種斑馬和索馬利蘭(Somaliland)的野驢都是。野驢是家驢的祖先。中亞細亞洲的野驢有三四種；牠們是細長，美麗而輕捷的動物，與眞馬和家驢不同。在中亞細亞洲還有眞野馬，而人視之以爲家種馬類之祖先。愛瓦特 (Ewart) 和旁的人以爲現代的馬是從三個不同的種類出來的：第一種是棲住歐洲北方森林中；第二種是中亞細亞和歐洲東部；第三種是在非洲北部一帶平原和沙漠以及亞細亞洲之西南。這些馬種是否在第三紀後之一紀從中亞細亞洲之野種出來的，牠們是否與原始各類馬種分開，或是牠們是從亞洲遷移過來的，而用家養方法改變牠們，使牠們適宜森林，草原和沙漠之環境。這些問題是有興趣的，到現在還沒有解決。

現代一切馬，驢斑馬以及歐洲和北美洲的第三紀後之馬種之齒和骨骼都相同，所以我們可以把牠們列入馬屬 (Genus Equus)。至于牠們的四肢之大小分配稍有區別，而牠們的皮膚之顏色和花紋更不同；所以近代許多分類學家把斑馬，驢和眞馬分爲不同之屬。爲古生物學家的便利起見，還是稱爲馬屬好些。

除了馬屬的各種化石之外，在南美洲可以在第三紀後之一紀地層裏尋出已經澌滅的馬種，名叫黑皮弟安馬種(Hippidium)。這類馬種具有特別構造的鼻骨；牠的齒形與花樣也很不同，而牠的腿和足亦較短。這個奇異的馬種的完全骨骼是在倍諾斯愛勒 (Buenos Aires)，而在美國博物院裏和旁的地方也有一些這類馬種的骨骼。至于細長鼻骨的解釋各有不同；有些人想這種動物有一個長鼻 (Proboscis)；還有些人以爲這種動物的面部的眼睛前有一種長腺。大概在鼻孔的後面有一個大軟塊可以伸展，如同西貢(Saiga)的羚羊的臉一樣，所以與鼻孔通氣道的特別作用發生關係。

(五) 馬的第三紀的祖先

馬的祖先之記錄是從美國西部各邦之第三紀地層裏得來的。這些地層是連續的，是包括加拿大 (Canada)，得克撒斯 (Texas) 之西部大平原以及銀特蒙否流域以西的地方；地層多是平行，在河的流域兩岸的瘠土和斜坡上多暴露出來。每層組織有牠一定的乳哺化石動物的特性。那一時代的動物的結果是由于地土重疊的緣故。那一時代的動物之完全產物不是在一處，而與各處的各種不完全的地層有關連。這種互相關連的詳細記載是在奧茲本的新生界之關係 (Osbotn's Cenozoic Correlation)裏面；並且奧氏發表他的雷獸科之專篇 (Monograph of Titanotherudae)。這一篇文是他後來搜求的結果。

在地質繼續組織裏，我們可以尋出馬的祖先繼續演化的遺跡，——一直演變到而爲現在之馬，犀牛，駱駝，貘，鹿，貓，狗和許多別的動物。其他動物的祖先沒有馬的祖先之顯著，因爲關于其他動物之系統發表很少。因種種原因，其他動物之系統不適宜于初學，雖然對于專門研究的人有同等的價值。玆將馬科演化 (Equidae evolution) 的重要時期錄之於后：

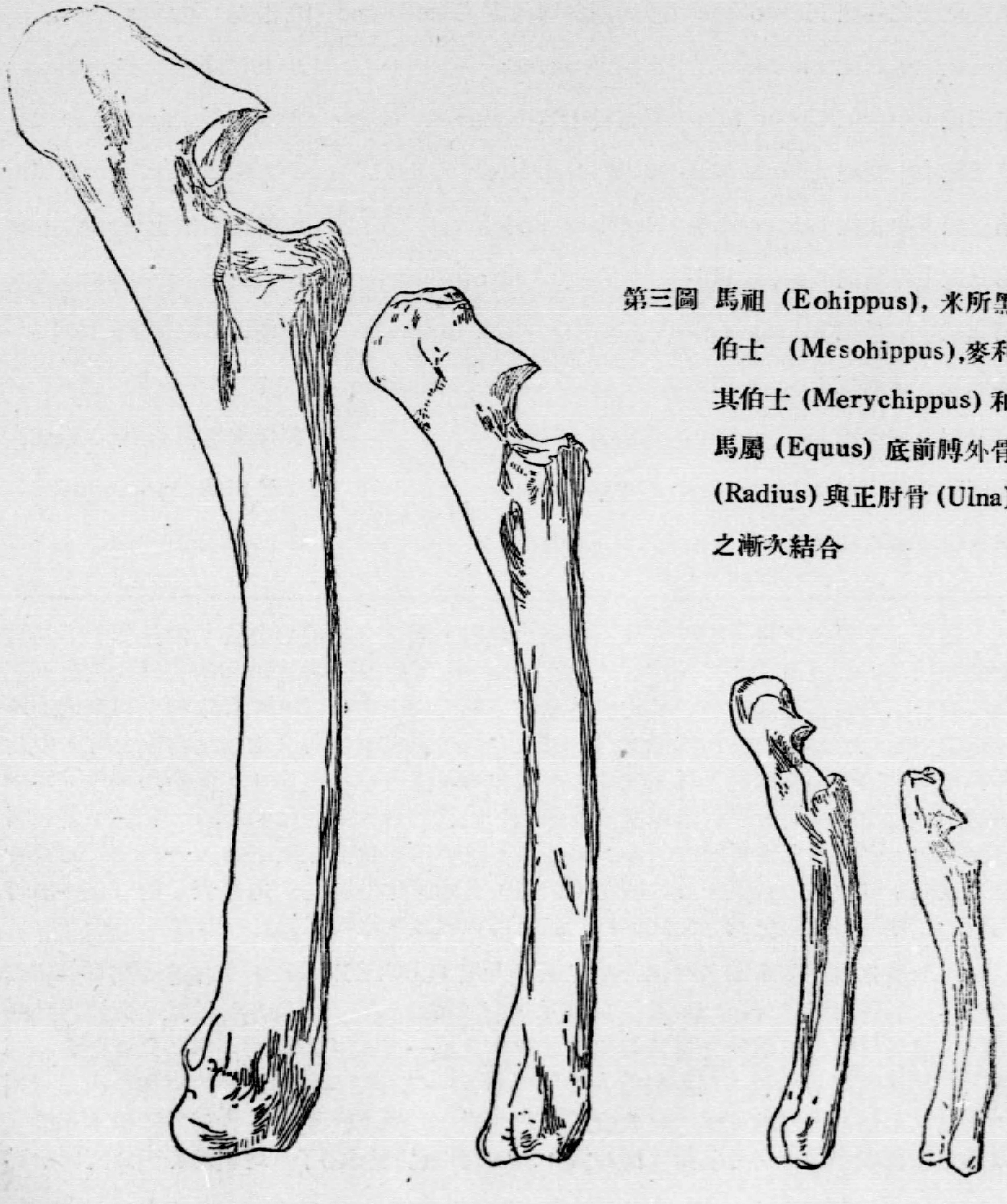
世紀名	地名	馬名
第三紀後之一紀 Pleistocene	冰河期與間冰期 Glacial and Interglacial	10 馬屬 Equuas
第三紀之最新紀 Pliocene	布朗可 Blanco	9 卜利歲伯士 Plesippus
第三紀上中新紀 Upper Miocene	勒布拉士客 Nebraska (Ogalalla	8 鮮新馬 Pliohippus
第三紀中中新紀 Middle Miocene	深河 Deep River } Arikaree	7 麥利其伯士 Merychippus
第三紀下中新紀 Lower Miocene	Harrison Rosebud 哈里生 } Arikaree	6 拍拉黑伯士 Parahippus
第三紀上漸新紀 Upper Oligocene	White River 白河 { Protoceras beds (原始腔體)	5 中新馬 Miohippus
第三紀中漸新紀 Middle Oligocene	White River 白河 { Oredon beds (岳齒獸)	4 米所黑伯士 Mesohippus
第三紀下漸新紀 Lower Oligocene	White River 白河 { Titanotherium (雷獸)	
第三紀上最古紀 Upper Eocene	烏因台 Uinta	3 以皮黑伯士 Epihippus
等三紀中最古紀 Middle Eocene	Washakie 布里格 Bridger	2 始新馬 Orohippus
第三紀下最古紀 Lower Eocene	Wind River 窩薩赤 Wasatch	1 馬祖 Eohippus

從以上重要的時期看起來，化石學家承認馬的演化有屬類的價值。但是牠們容易被中介物插入，所以很難分開的。第三紀後之前一紀馬的頭顱構造和齒的花樣比較第三紀後之後一紀馬的頭顱構造和齒的花樣爲簡單。第三紀上中新紀的鮮新馬和卜利歲伯士馬相近；中新紀的地層與麥利其伯士馬有關係；而麥利其伯士馬又與拍拉黑伯士馬，中新馬和米所黑伯士馬有關連。以上說法，照現在的證據，是沒有分好。始新馬可以分爲兩個時期。以上時期的分法都是根據地質學和一時代的動物之演化而來的。牠們不是在同時發現的，而是由于地質漸次演變而與其他不同時代的動物相關連的。一個時代的動物分爲幾種；從牠們的性質上有的演化得快些，有的演化得慢些。這是表示物種在一個時期變異之差別。從以上的分類之綱目，我們可以詳細考察我們記錄的事實。

馬的演化第一個時期名叫第三紀之下最古紀 (Lower Eocene)。在這時期有一著名四趾馬，名叫馬祖 (Eohippus)，其前足俱有四個發展完美而有用的足趾，但無內趾的痕跡；其後足俱有三個發展圓滿的相等足趾，其第一第五兩足趾的小痕跡只有小骨節那樣大。馬祖的臼齒很短，有六個齒尖 (Cusps)，一部分變爲外頂，前內頂和後內頂三頂，其餘三頂俱有特別的花樣，如希臘字母之π形。這個花樣是原始奇蹄類之根本花樣。這個花樣在犀牛身上仍可認出，而在貘，馬的體上已經變化了。馬祖的前臼齒較臼齒爲

小，而花樣亦較簡單。第一第二兩個前臼齒是單頂切齒，第三齒有一個內齒尖，第四齒有一個外齒尖雙生着。除了兩個前臼齒有退化的頂和變成臼齒花樣的齒尖之外，馬祖的齒漸變成臼齒的模型。

馬祖的四肢也極簡單；其前腿有分開而完全的前膊外骨和正肘骨，而正肘骨之軸細長適中；其後腿之大脛骨和小脛骨亦分開而完全，但小脛骨很細長。



第三圖 馬祖 (Eohippus)，米所黑伯士 (Mesohippus)，麥利其伯士 (Merychippus) 和馬屬 (Equus) 底前膊外骨 (Radius) 與正肘骨 (Ulna) 之漸次結合

第四圖 馬祖 (Eohippus)，米所黑伯士 (Mesohippus)，麥利其伯士 (Merychippus) 和馬屬 (Equus) 底小脛骨 (Fibula) 之縮小

這樣看來，馬祖具有乳哺動物的腿骨和足骨，但少姆指。其後足趾的外面大足趾差不多完全失去。其蹠骨 (Tarsal) 和踝骨 (Astragalus) 俱有奇蹄類之形狀和組織；其骨節可使足骨轉動。近代之貘的驢骨仍保存馬祖的原始構造，不過稍有小變異；犀牛的跗骨寬闊而突出；馬的蹠骨堅結而短小。

在馬許 (Marsh) 的一千八百七十六年的書圖裏，在勒爾 (Lull) 的一千九百零七年所發表的論文裏，以及各種教科書裏都指明馬祖有姆指的片骨。這是一種錯誤。馬許僅有幾根碎片脚骨，他把牠們再組成前後足，把姆指痕跡的半面叫作腓骨。總之，他誤指幾片碎骨。一千八百八十五年柯普 (Cope) 在他的搜集材料裏記載鼠貍 (Hyracotherium) 有一個完全的骨骼，他說明在任何馬祖的種類裏尋不出姆指的痕跡。卽或馬祖有

姆指的痕跡，也不能像馬許的畫圖裏所表示的這樣細長而緊貼的腓骨。原始乳哺動物的姆指與外指對峙，附連球窩關節 (ball and Socket joint)， 而受特別的屈筋和伸筋轉動。從普通的字義講起來，這是半相對之向(Semi-opposable) 的構造。這種構造與許多爬行動物的各趾大不相同。這樣看來，這種構造俱有乳哺動物的最初習慣之重要意義。

吉德來先生 (Mr. J. W. Gidly) 在最近一篇論文裏把以上兩個意見連合起來，而反對半相對之向的構造。但是半相對之向一名詞用在曉新統 (Paleocene) 世紀的一切乳哺動物和適應樹上生活的動物之共同情形上是很準確的。些個證據在新墨西哥的曉新統世紀的乳哺動物的記錄裏已經證實。以後這個記錄要發表出來。

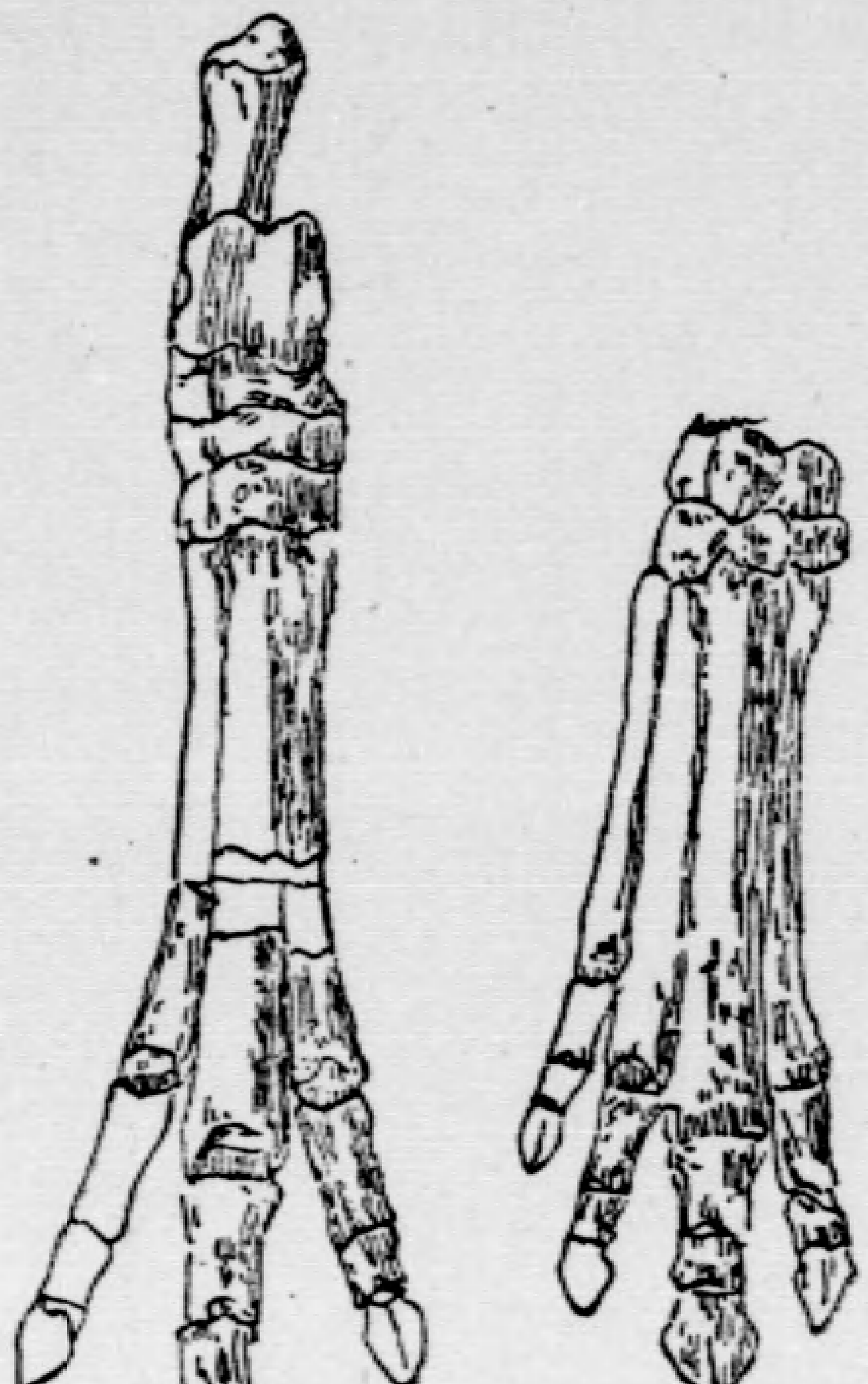
現在有十三種馬祖，從貓到獵狐狗(Fox-terrier)之各種形體都已經描述了。但是大半材料如頜骨牙齒等都是零碎斷片的。在美國博物院裏有三個完整的骨骼，在安麥斯特 (Amherst) 的博物院裏有一個。 在窩民 (Wyoming) 和新墨西哥 (New Mexico)有許多第三紀之下最古紀的頜骨和頜骨碎片，有幾片是從烏台(Utah) 來的。英格蘭(England) 比利時 (Belgium) 和法蘭西 (France) 的第三紀之下最古紀也有幾個標本，而最好的頭顱名叫鼠貍 (Hyracotherium)。這個名詞比馬祖還老，所以難把牠們分開。

若是我們多多地研究，或許我們可以多尋出馬祖的種類，和已經澌滅的奇蹄類，以及其他之貘和犀牛。有人以為 (Homogalax) 是貘的祖先。這一點對於近代研究評論，和從蒙古發現之第三紀之下最古紀的新證據有些不合；實則牠與古貘種 (Lophiodonts) 有密切的關連；而牠們的足也沒有分別，不過大小不同，和在後肢的還節沒有第一第五足趾的痕跡罷了。

美洲馬祖的標本是從第三紀之下最古紀的各層地殼得來的。馬祖牙齒的演化是指明由地殼的上下層以為定，與其他同時的乳哺動物一樣。這種演化大概是馬的祖先之次一代的特性。但是有時細細地研究也不能尋出這種演化。馬祖是偶然發現的，在窩薩赤地層裏有許多馬祖的骨骼證明是從別的地方來的，而不是那一個地方的動物之祖先。

第五圖 馬底上臼齒之演化：一至七爲短齒冠，有白堊質；八至十二爲長齒冠，無白堊質。其大小均依照馬齒之原形。

馬祖的祖先在髁節類 (Condylarthra) 之中爲五趾有蹄類。原蹄類 (phenacodus) 是最著名的形體，是與馬祖同時。從曉新統紀和以後髁節類可以尋出馬的演化。這些種類是在中亞細亞或在北亞細亞。美洲的馬祖和歐洲的鼠獀都是從這些地方來的；但是這些動物還沒有尋見。北亞細亞洲是這類動物的中心點。



第六圖

馬祖之前後足

(原形三分之二)

馬的演化第二個時期名叫第三紀之中最古紀。在這一紀地層裏可以尋出始新馬種 (Orohippus)。關於這馬種的材料，在美國博物院裏有一個完全的骨骼，在耶耳博物院 (Yale Museum) 裏有一個很好的頭顱和前足現正保存着；牠的頷骨和片條骨頭是有名的。這些骨骼是代表與馬祖相近的種類。牠的牙齒的特質比較進步，而其形式大小也相同。始新馬的前足與馬祖的前足不同；牠的中趾比較大些，而牠的後足之第一第五兩趾之痕跡也沒有。至於牠的臼齒之頂比較顯明，而牠的第三第四之前臼齒之花樣大小與臼齒相似。始新馬的原始種類只在第三紀之最古紀地層之下部，但在地層上部的比較進化。這樣看來，在始新馬種裏我們可以尋出演化。

馬的演化第三個時期名叫第三紀之上最古紀。這一紀不十分完全知道。以皮黑伯士馬種 (Epihippus) 是這一紀的產物，但是現在還沒有尋出完整的頭顱和骨骼，不過有許多上下頷骨和各種零碎骨骼及前後足而已。現在已經尋出高冠和銳頂之臼齒；其前臼齒差不多與臼齒之花樣極相同，而前後足之中趾比較大些。其前足之第五趾雖完全有用，然而比較細小。這種遺跡是在烏台第三紀之上最古紀尋見的 (in the Upper Eocene

Uinta formation of Utah)。這些標本是在美國博物院裏，耶耳，普林士登和卡內基博物院裏 (Yale, Princeton and Carnegic Museums) 保存着。

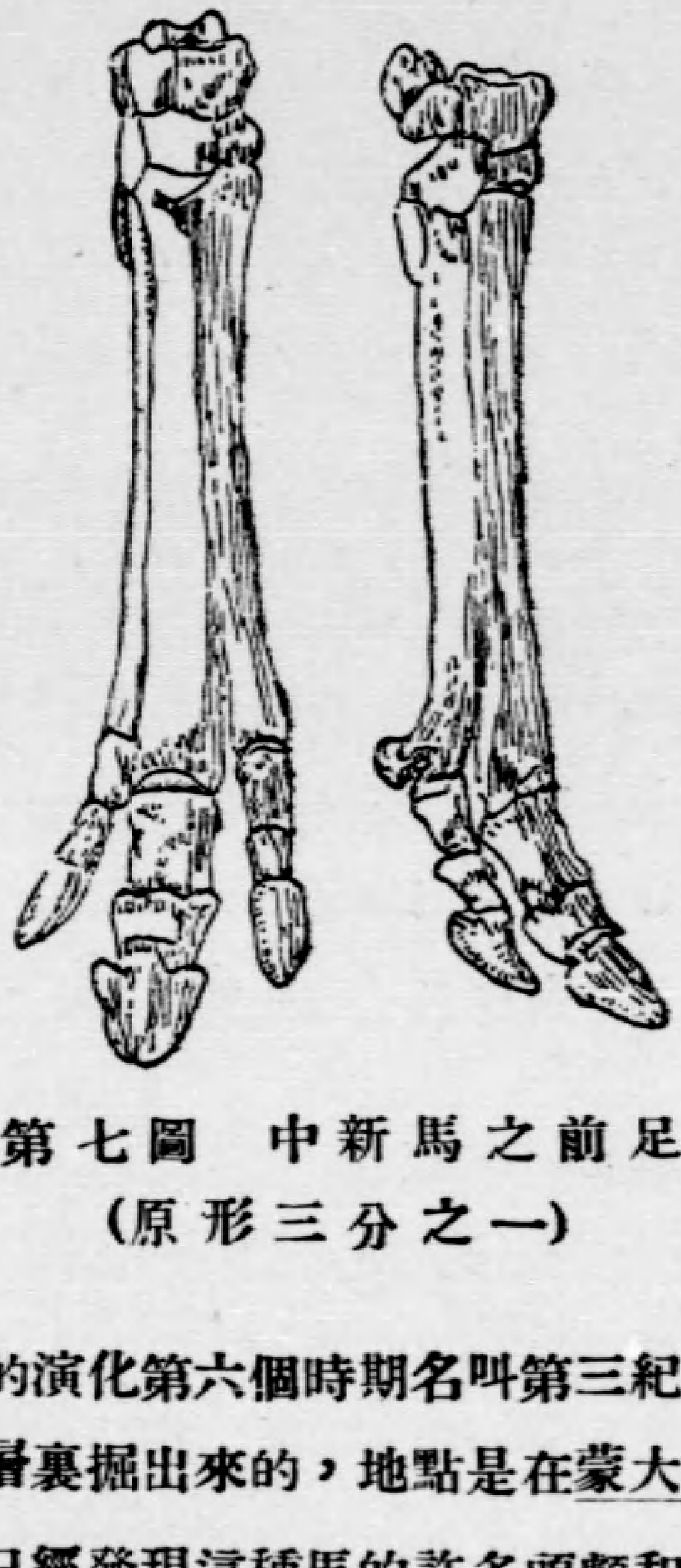
馬的演化第四個時期名叫第三紀之下漸新紀和中漸新紀。米所黑伯士馬種 (Mesohippus)是在這一紀地層裏發見的。從撒喀其萬(Saskatchewan)到哥羅拉馬(Colorado)的西邊平原尋出這馬種的遺跡；有許多頭顱和完整的骨骼已經被知道了，還有許多頷骨，足和旁的零片已經發現。這馬種頗很多；牠的形體與平原的豺狼相同。這馬比較以皮黑伯士馬進一步。牠的前臼齒有三個，是臼齒的形狀，因其形狀完全一樣，所以不容易與臼齒分開，不過比較大些罷了。第一個前臼齒還是簡單而小，漸漸隱沒不見。牠的前後足有三趾，其旁邊足趾較中趾爲小，雖然邊趾在平常步行時可達到地上。

以皮黑伯士馬的前足之外趾只有一個很短小的片條痕跡與小骨節相等。其正肘骨之軸雖完整，然而變成一個細長而平的枝條，靠近前膊外骨的後面。正肘骨的末端是適於硬化的。小脛骨之軸變爲細長的裂條骨，其下部與大脛骨相接，而一部分也與大脛骨硬化了。

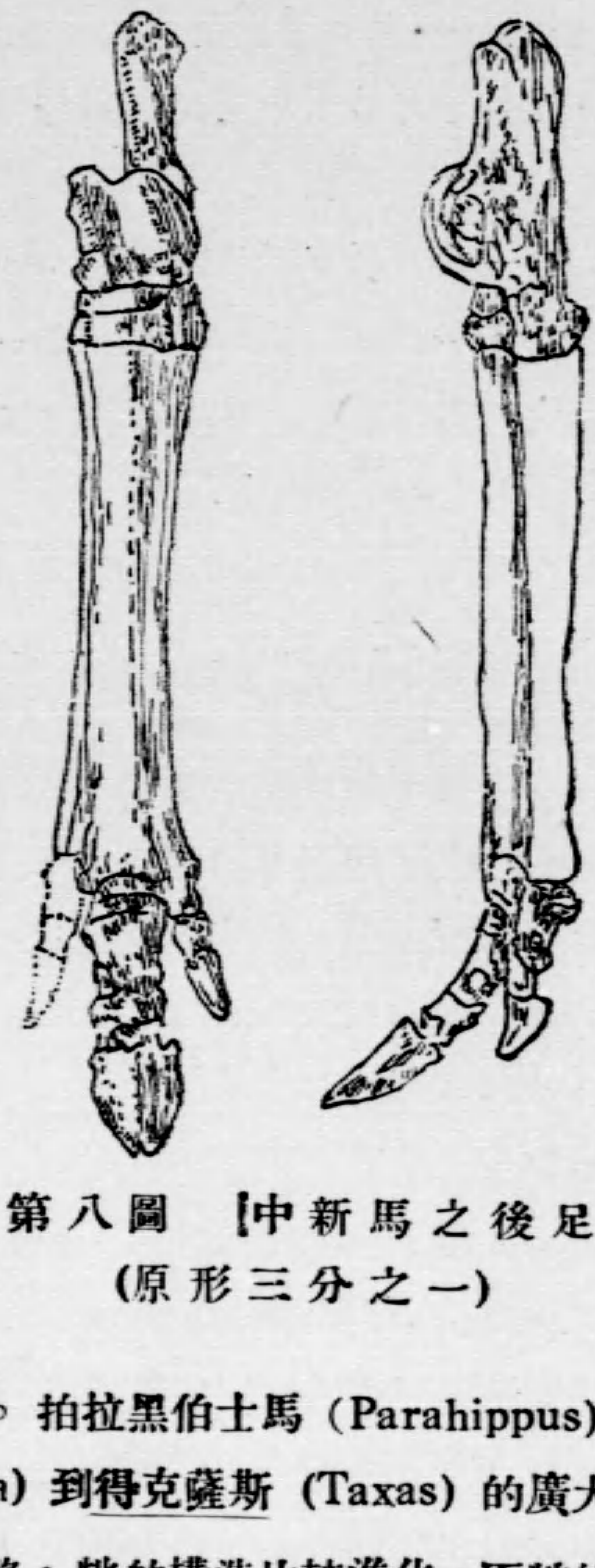
在以皮黑伯士馬和米所黑伯士馬中間有一個深淵隔絕。欲解決這個深淵，我們要多知道以皮黑伯士馬的標本和種類，以及對於這馬的組織和特性有相當的了解。第三紀之下漸新紀的米所黑伯士馬與第三紀之中漸新紀的著名馬種相同，然而我們不能知道牠們的關係。這兩個時期的馬種之關連人們不能完全了解。其中之隔絕很大。我相信米所黑伯士馬不是直接從以皮黑伯士馬產生出來的 而是從一種不著名的馬產生出來的。這馬種比較進步些，大概住在北美洲的北部。

馬的演化第五個時期名叫第三紀之上漸新紀。中新馬(Miohippus) 是這一紀的馬種；牠與米所黑伯士馬有密切的關係。這樣看來，中新馬是否應當與米所黑伯士馬分開，這是一個問題。我們知道中新馬比較大些，但是我們難說牠是進步些。馬許 (Marsh) 在一千八百九十二年所畫的圖解，爲勒耳 (Lull) 在一千九百零七年重印了，而在各種教科書裏有這種圖解的抄錄。馬氏發表第五趾的片骨 (Spliut) 在米所黑伯士馬足上看來是退化的。但是不是這樣情形。有一種演化的步趨，馬許沒有看清楚；這種步趨不是不變的，它是區別中新馬的特性。米所黑伯士馬的後足之中蹠骨 (Metatarsal) 不是跗骨 (tarsus) 的外楔形骨 (ecto cunei form bene), 而在邊趾上面完全是立方形 (Cuboid) 和內楔形 (inner cuneiform), 如古代標本一樣。中新馬的中蹠骨有一個立方形的痕跡，如近代馬相似。近代馬的邊趾退化，致使跗骨在中趾上有一個堅實的支持而不致于動搖，這是機械的進步。以後我們再看次一時期的馬的中蹠骨上也有一個內楔形的痕跡。馬許沒有把米所黑伯士馬和中新馬的後足之跗骨和蹠骨的關係 (tarso－metatarsal relations) 表明出來。

米所黑伯士馬和中新馬的邊趾大大的縮小，然而牠們還可達到地上以支持其肢體：這是由於趾骨 (Phalanges) 或趾的本部異常短小的緣故。在次一個馬的演化時期這種比例的變遷很快而且更進步。



第七圖 中新馬之前足
(原形三分之一)



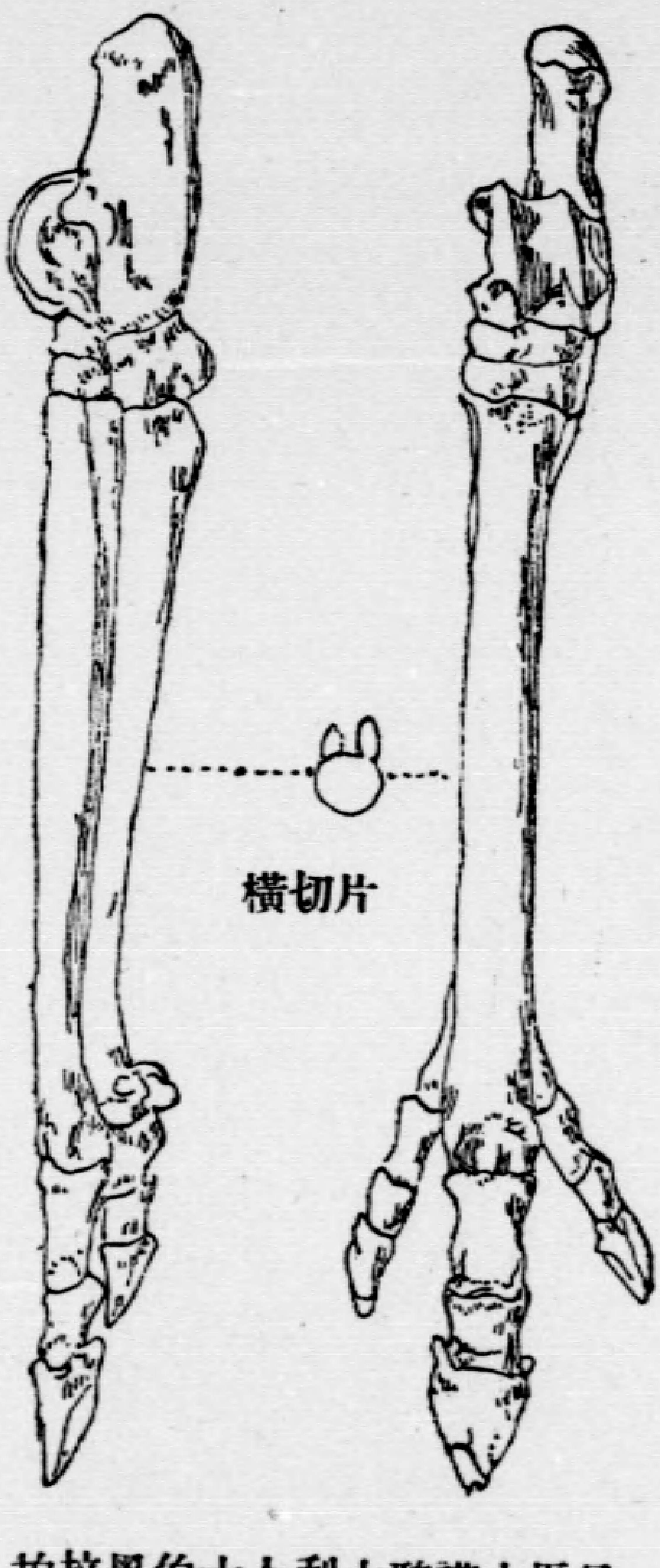
第八圖 中新馬之後足
(原形三分之一)

馬的演化第六個時期名叫第三紀之下中新紀。拍拉黑伯士馬 (Parahippus) 是從這一紀地層裏掘出來的，地點是在蒙大拿 (Montana) 到得克薩斯 (Taxas) 的廣大的面積。現在已經發現這種馬的許多頭顱和不完全的骨骼，牠的構造比較進化，而牠的形體之大小也不一致。這馬有些骨骼構造不容易與中新馬的骨骼構造分別出來；有些難與麥利其伯士馬的骨骼構造分開。從地質學上看起來，這馬的老種比較簡單，而新種比較進化；但是牠的演化不是齊一的；有些體形進步很快，有些馬齒的構造演進，有些馬足演化。這馬變異很大，是表明牠們與別的馬種雜交，其結果變成演化奇速的馬種。

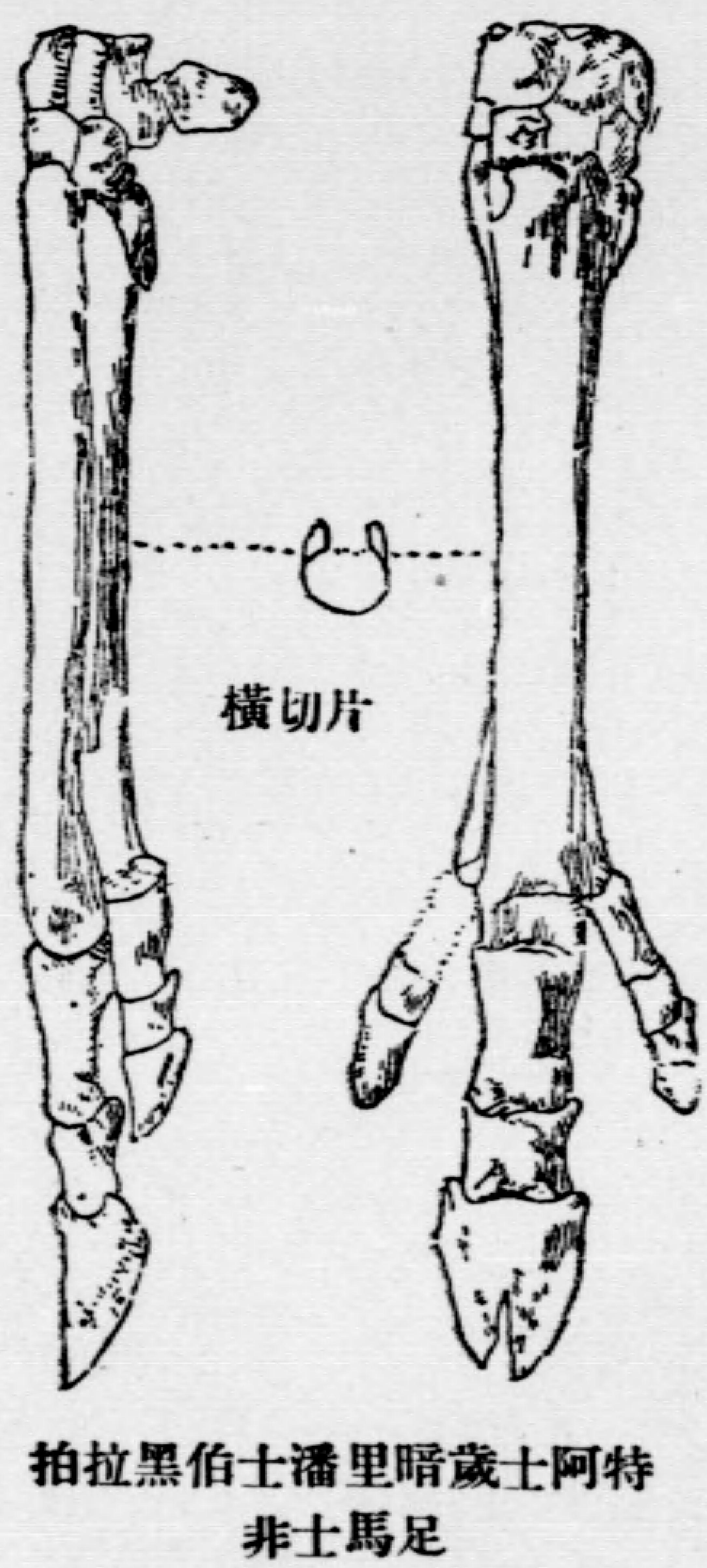
至于論及拍拉黑伯士馬齒的花樣之變異，其齒直頂兩個變成一對斜半月形，而後向首尾方向演進 (antero-posterior in direction)；其齒頂的內柱，特別是首部一個，漸漸分開。這種變異到麥利其伯士馬種才繼續完成。同時在齒頂的凹處或齒谷裏開始充滿了一種新構造，叫作膠齒的白垩質 (cement)。這種白垩質是由于在齒冠上一種蓄積的齒垢

構成的。拍拉黑伯士馬的齒膠比較甚薄，但有時也不薄；而在這馬最後的種類之齒谷裏完全充滿着膠質，並且環繞着齒冠的外部，如麥利其伯士馬齒一樣。

拍拉黑伯士馬足變異平均；牠的旁趾差不多同中新馬的旁趾一樣大，而趾骨 (Phalanges) 較小。另有一種拍拉黑伯士馬的旁趾大大的縮小，其蹠骨之軸與一根火柴一樣大；其退化的第五趾也很小，有時像一個很小的片骨，有時變成一個極小的骨節。牠正肘骨之軸縮成一根細長而平的枝條，黏附在前膊外骨的後面，但是正肘骨之軸仍可與前膊外骨分開。



拍拉黑伯士卜利士聽諾士馬足
(Parahippus Pristinus)

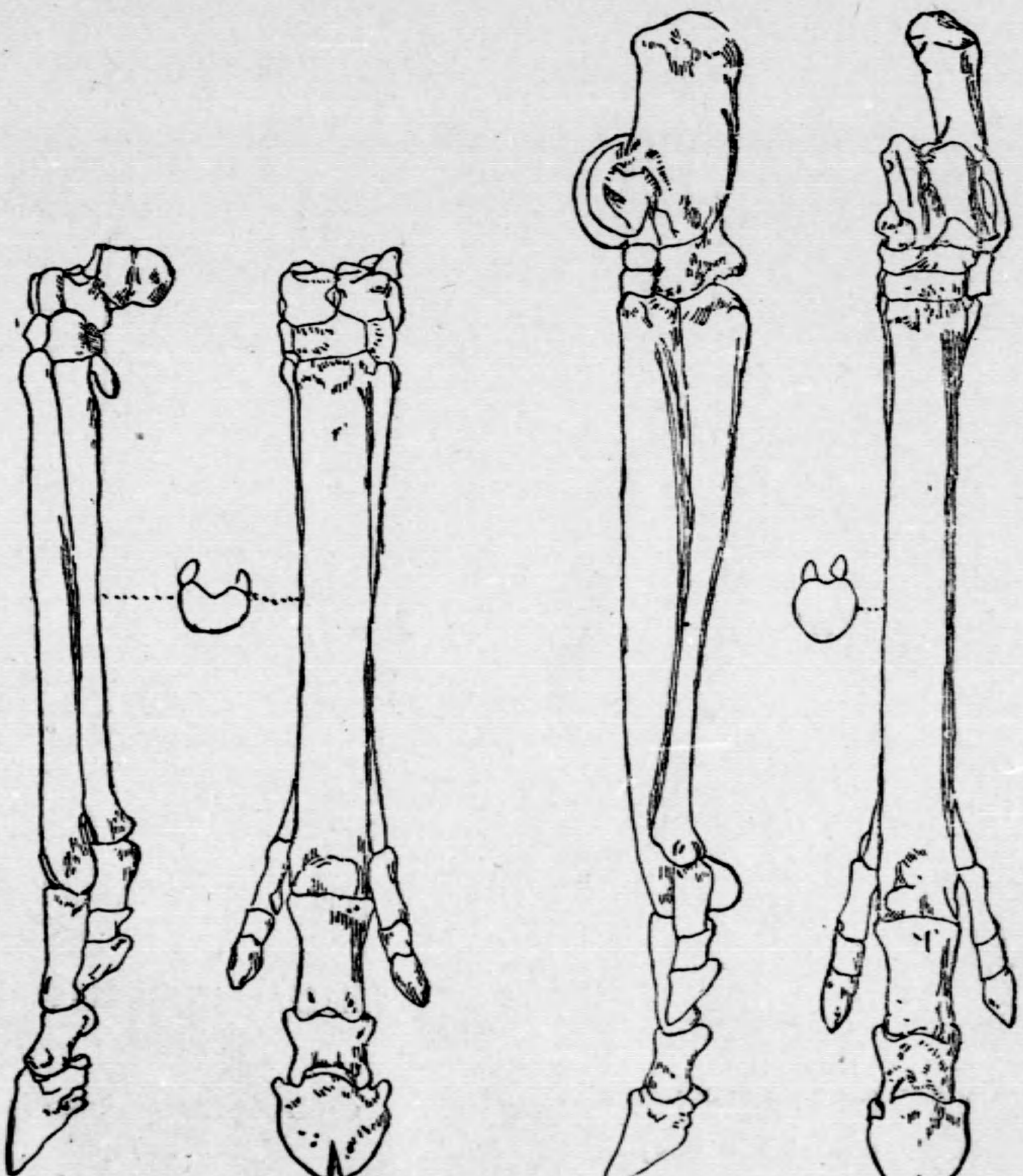


拍拉黑伯士潘里晤歲士阿特非士馬足
(Parahippus pawniensis atavus)

第九圖 拍拉黑伯士馬之前後足 (原形五分之二)

馬的演化第七個時期名叫第三紀之中中新紀。麥利其伯士馬是在這一紀地層裏發現的。頰齒伸長，是這馬的特點。這馬可分兩種：其老種之上臼齒寬與高等；其後種之齒寬有齒高的兩倍或兩倍半。牠的乳齒冠較短，其花樣很古，與拍拉黑伯士馬的乳齒花樣很相同。牠的永久不變的臼齒和前臼齒已經變成一對外半月形，一對內半月形，和一對內柱，其首端之內柱與旁的內柱分開。

麥利其伯士馬的永久不變的牙齒有很厚的齒膠白堊質充滿了齒谷，並且黏附着齒的外部。所以牙磁(enamel)一邊爲齒膠支持着，而一邊爲齒的細膩所保護。近代馬齒之磨面有一個脊樑，這種脊樑時常更新。齒膠之積蓄是在齒的生長最後一個時期裏。當齒與顎骨連接時，膠齒開始蓄積起來，並且完成以爲割切牙肉之用。乳齒牙的白堊質很少，以後也在上面蓄積着。



第十圖　麥利其伯士馬之前後足　(原形三分之一)

麥利其伯士馬足俱有長圓的蹠骨；與中新馬比較起來，牠有較長的趾骨和較凸的蹄子，與近代小馬種相似。牠的旁趾細長而短，平常步行不能到地，與近代各種爪類動物相似，然而其旁趾常完全。這馬到長大時，牠的肘骨與前膊外骨的後面都化成硬骨。

現在有二十五種麥利其伯士馬已經記載了；還有許多種沒有列入。這馬廣布繁多，因此變異很大。從佛羅里達 (Florida) 得克薩斯 (Texas) 加利福尼亞 (California) 到蒙大拿 (Montana) 及俄勒岡 (Oregon) 地方都可尋見。

有許多麥利其伯士馬種的面旁有一個穴在眼窠的前面。這穴有時寬而淺，有時窄而深，而形成一個深槽；有時這穴分為兩個深槽，卽淚窩 (Lachymal) 和顴骨穴 (Malar fossae)。以後有許多馬種有一個或兩個顴骨穴，但是馬屬 (Equus) 的顴骨穴完全隱沒不見了。對于顴骨穴的意義有許多爭論：有些權威以為顴骨穴同反芻獸的面部之淚窩相似，在裏面有一種香腺；有些權威以為顴骨穴同貘的長鼻肌肉的槽一樣。大概顴骨穴是在張大的盲腸 (Diverticulum) 裏面或是在盲囊裏。近代馬的鼻孔裏有這種小盲囊。但是這種器官的功用還不清楚。作者以為顴骨穴是支持頭顱的機械需要而生長的；頭顱中空處有伸出之齒，內部鼻骨和盲腸。頭顱擴展的演化，是因其機械的需要而規定。當頭顱空處需用時，盲腸隱沒不見。顴骨穴在馬面上的位置，是因馬種而變異；至于牠們的功用和重要的宗旨，我們尙難斷定。

麥利其伯士馬種第一次發現是在羅衞小河底 (Lower Sheep Creek beds) 和鄰近之處；此處所發現的馬種是小而簡單；在坡泥小河底 (Pawnee Creek beds) 所發現的馬種是大而比較進化；在聖大非河底 (In the Santa Fé beds) 所發現的馬種與其他馬種混合，而難與原馬 (Protohippus)，鮮新馬 (Pliohippus) 和古驁 (Hipparion) 分開。有幾種麥利其伯士馬是在共和河底 (Republican beds) 而後牠們漸滅不見。

歐洲與北美洲之第三紀後期馬科之地質分布表

世紀與時期		美洲地層與普通地帶		馬屬之發現 歐洲	馬屬之發現 北美洲
第三紀之最新紀 (Pliocene)	卜雷桑與 Plaisancian	布蘭克 (Blanc)	古驣 (Hipparion)	特別變相之古驣種 Hipparion Specialized aberrant species	卜利哉伯士馬種 (Plesippus) 特別變相之古驣種 (Hipparion specialized aberrant species) 比較進化之馬種 (More advanced species) (1) 鮮新馬 (Pliohippus) (2) 原馬 (Protohippus) (3) 古驣 (Hipparion)
第三紀之中新紀 (Miocene)	潘新 Pontian	共和河 Republican			
		發楞泰因河 (Valentine)	麥利其伯士馬 (Merychippus)	中新馬 (Anchitherium)	鮮新馬 (Pliohippus) 原馬 (Protohippus) 古驣 (Hipparion) 與麥利其伯士馬之古種相似
	薩美細亞 Sarmatian	聖大非河 (Santa Fé)			麥利其伯士馬 (Merychippus) 之進化種
	明賽里安 Tortonian	坡泥河 (Pawnee creek)			麥利其伯士馬之最大種
	黑爾黴細亞 Helvetian	麥士客爾河 (Mascal L'r. sheep creek)			簡單而小之麥利其伯士馬種(其變異甚大)
		上赫利生河 (Upper Harrison) 上洛士柏 (UpperRosebud)	拍拉黑伯士馬 (Parahippus)		拍拉黑伯士馬 (Parahippus), 變異很廣的馬種，有一個以上的演化特點，有的演化到麥利其伯士馬種
	柏地格利安 Burdigalian	下赫利生河 (L'r. Harrison)			簡單的拍拉黑伯士馬種
		下洛士柏河 (L'r. Rosebud) 孟綠河 (Monroe Cr'k.)			小原始拍拉黑伯士馬種 特別而大之中新馬種 (Miohippus)
	阿啓退尼亞 Aquitanian	將對 (John Day)	中新馬	無馬科 No Equida	中新馬(大小馬種都有)

馬的演化第八個時期名叫第三紀之上中新紀。鮮新馬 (Pliohippus)是這一紀的代表；牠是直接從麥利其伯士馬種產生出來的，起初難與麥利其伯士馬分開。牠的牙齒演化變長，有牙磁橫線圍繞着。齒的內部灣曲，其內柱與半月牙密切的連接。牠的乳齒很高，比較麥利其伯士馬的乳齒高兩倍，而其齒的橫闊較窄，與現代之馬比較起來，只有四分之一到三分之一寬，並且有很厚的膠殼。

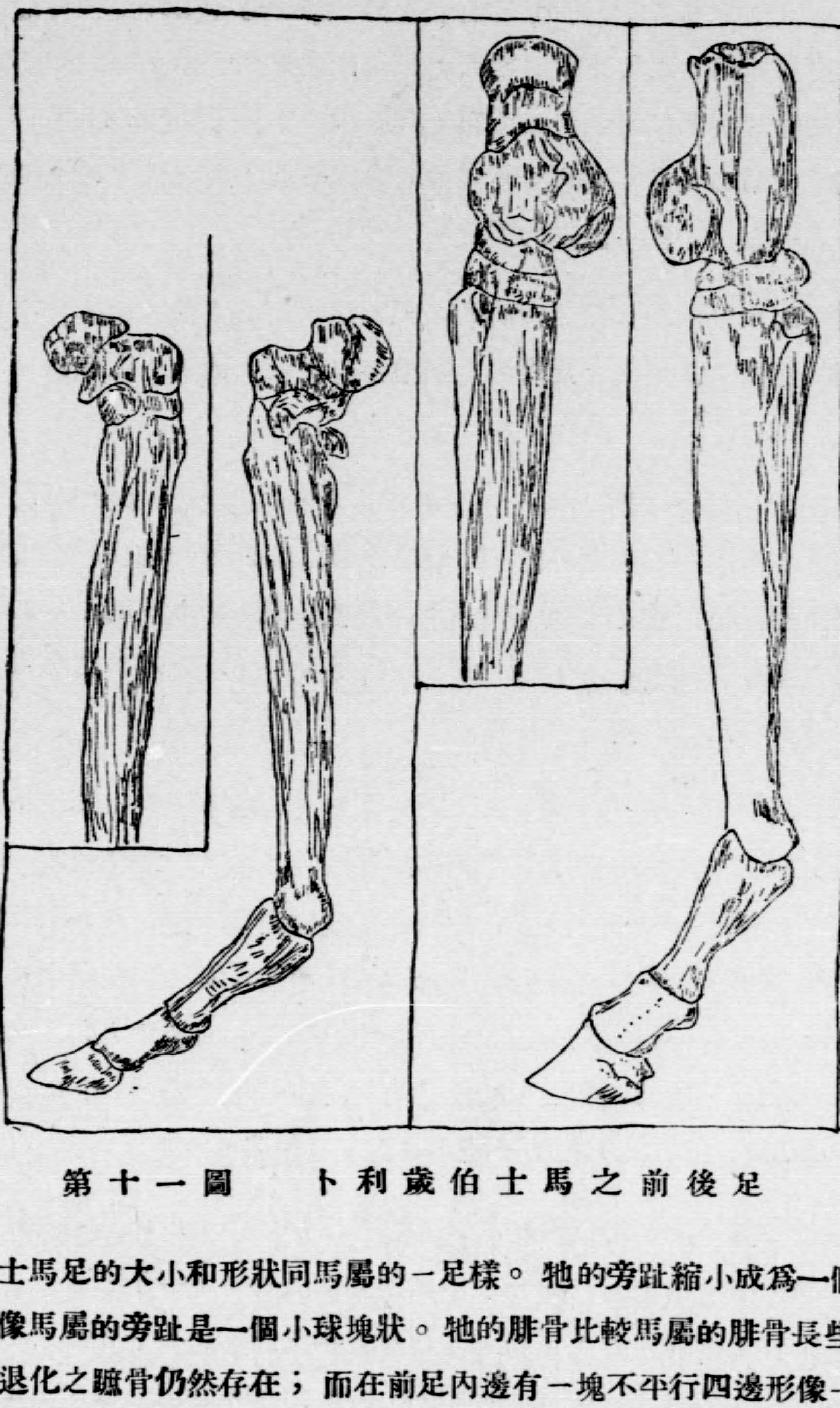
鮮新馬的頭顱和全部的骨骼比以前的馬種大些，比驢小些，與家養小馬相等。牠的骨骼和頭顱因種類而稍有變異。此馬的老種臉旁有深而大的穴，但在後期馬種的臉旁，其穴較淺。

鮮新馬足比麥利其伯士馬足强健，但較笨重。比較進化而大的鮮新馬種有强健的肢和踝骨。牠的足不及第三紀後之一紀 (Pleistocene) 的馬足和現代馬足寬而硬，但是牠的旁趾仍完全而不減小。牠的軀體不壯碩，因爲牠是從中中新紀的極小而單弱的古駑產生出來的。這古駑是在佛羅里達 (Florida) 和得克薩斯 (Texas) 地方發現的。歐美也有這種古駑，但在美洲馬種中沒有。

有人說鮮新馬只有一個足趾。這馬的旁趾骨大大的縮小，甚至完全不見。他的旁邊蹠骨完全達到完整的末端之骨節；但是現在沒有這種標本。持洛客色爾 (Troxell) 描述一個幼小的馬的足骨像一個爪形, (Monodactyl) 牠的尖端不是完全化石灰質的。所以當這種動物未長成之前，牠的趾骨不一定是化石灰質的。再看從得克薩斯地方所得的鮮新馬之頭顱和齒，至少有一種是完全的；牠的旁趾俱有完全的趾骨，與麥利其伯士馬的趾骨相等。總而言之：鮮新馬的足趾和拍拉黑伯士馬齒一樣不堅定。有的鮮新馬有旁趾，有的沒有。但是馬屬 (Equus) 的旁趾縮小，而足骨進步。

馬的演化第九個時期名叫第三紀之最新紀。卜利歲伯士馬種是這一紀的產物。牠是從得克薩斯和加利福尼亞 (California) 兩個地方發現的。在一千九百二十四年之前，這馬種極不完全，只有幾個牙齒，所以不能另分爲一個馬屬。一千九百二十四年辛普孫先生 (Mr. George Simpson) 同我在布朗可 (Mount Blanco) 和得克薩期尋出兩架骨骼，把整個的馬的解剖學詳細地分出來。這馬種與阿拉伯馬種大小相同，而馬蹄比較極小；牠的背骨較短，而牠的圓骨管 (Barrel) 凸而不圓。

卜利歲伯士馬齒的花樣與鮮新馬齒的花樣相同；但是牠的齒冠較長而不大灣曲；其詳細的花樣與馬屬 (Equus) 齒的花樣類似。總之，卜利歲伯士馬的齒質與鮮新馬的齒質相同。



第十一圖　卜利歲伯士馬之前後足

卜利歲伯士馬足的大小和形狀同馬屬的一足樣。牠的旁趾縮小成爲一個薄平而展開的腓骨，而不像馬屬的旁趾是一個小球塊狀。牠的腓骨比較馬屬的腓骨長些。牠的前足外邊的第五根退化之蹠骨仍然存在；而在前足內邊有一塊不平行四邊形像一個小結骨，比麥利其伯士馬的和鮮新馬的小些。這些骨頭在馬屬偶然化爲石灰質，所以有一點不平常。

卜利歲伯士馬的小脛骨比任何馬屬的小脛骨爲短，並且縮小成爲腓骨。這個骨頭在以後馬科中變爲不適用。麥利其伯士馬和馬屬的腓骨很進化，而卜利歲伯士馬和幾種古黨的腓骨更進化。

卜利歲伯士馬的頭顱與馬屬的頭顱大小相同；面上有長而直的條紋，不像老馬種的短而凸的頭顱。至于鮮新馬的深面槽在卜利歲伯士馬面上完全沒有了，不過剩了一個淺渦。

馬的演化第十個時期是自第三紀後之一紀到現在。馬屬是這時期的馬種。最古的馬屬紀錄是在歐洲和美洲第三紀後之一紀發現的。在阿諾流域 (Arno Valley) 的士探諾里士馬屬 (Equus Stenonies) 是很小的。牠的牙齒構造是簡單的，與卜利歲伯士馬齒相近。牠的上臼齒之前內柱平而窄，而與前內半月形相聯結；後內柱減小而沈沒于前半月形。

有一種很著名的化石乳哺動物 (Val. d'Arno and Asti fossil Mammals)是在第三紀上最新紀發現的。照現在的關係講起來，牠們是在第三紀後之下一紀。北美洲之第三紀後之一紀地層裏有各種馬屬之遺跡：有些像馬屬士探諾里士 (Equus Stenonis) 那樣簡單；有些馬齒進化如同近代馬齒一樣；有些馬的頭顱和骨骼與馬屬客伯魯士 (Equus Caballus) 相同。

馬屬是馬類最多的一屬。在北美洲和南美洲的全部，特別是在歐美各國和非洲的阿爾及利亞 (Algeria) 到納塔耳 (Natal) 地方都可尋出這種化石生物。 (未完)

共 點 線

(Concurrent lines)

金 品

設
$$\alpha \equiv a_1 x + a_2 y + a_3 = 0$$
$$\beta \equiv b_1 x + b_2 y + b_3 = 0$$
爲二直線之方程式，本篇用 $\alpha = 0$ 及 $\beta = 0$ 記之。

定理一 若 $\alpha = 0$，$\beta = 0$ 爲二直線方程式，則方程式 $k\alpha + l\beta = 0$ 表過兩直線交點之一切直線。

[證] 以 $\alpha = 0$，$\beta = 0$ 交點之坐標代入方程式 $k\alpha + l\beta = 0$, 可得 $k(0) + l(0) = 0$, 故 $k\alpha + l\beta = 0$ 過 $\alpha = 0$, 及 $\beta = 0$ 之交點。

定理二 三直線 $\alpha = 0$，$\beta = 0$, 及 $\gamma = 0$ 交於一點 (三線共點) 之充分且必要條件爲有不悉爲零之三數 λ, μ, 及 v 使 $\lambda\alpha + \mu\beta + v\gamma = 0$. .... (I)

若 (I) 成立 則 λ, μ, v 中至少有一不爲零 設 $v \neq 0$ 則 (I) 式可寫爲

$\gamma \equiv -\dfrac{\lambda}{v}\alpha - \dfrac{\mu}{v}\beta$ 此卽表示 $\gamma = 0$ 及 $-\dfrac{\lambda}{v}\alpha - \dfrac{\mu}{v}\beta = 0$ 爲同一直線。但從定理一知 $-\dfrac{\lambda}{v}\alpha - \dfrac{\mu}{v}\beta = 0$ 過 $\alpha = 0$ 及 $\beta = 0$ 故知 $\gamma = 0$，$\alpha = 0$，$\beta = 0$ 有一公共點。

反之 若三線交於一點則

$$\gamma \equiv k\alpha + l\beta$$

由是
$$k\alpha + l\beta - \gamma \equiv 0 \quad \cdots\cdots\cdots\cdots \text{(II)}$$
故條件 (I) 亦成立。

以 $\pm\sqrt{a_1^2 + a_2^2}$ 及 $\pm\sqrt{b_1^2 + b_2^2}$ 分別除方程式 $\alpha = 0$ $\beta = 0$ 各項則得

$$\frac{a_1 x + a_2 y + a_3}{\pm\sqrt{a_1^2 + a_2^2}} = 0 \quad \cdots\cdots\cdots\cdots (1)$$

及

$$\frac{b_1 x + b_2 y + b_3}{\pm\sqrt{b_1 + b_2^2}} = 0 \quad \cdots\cdots\cdots\cdots (2)$$

(1) 及 (2) 名曰 $\alpha = 0$, $\beta = 0$ 之法線式 (normal form), 因 (1) 與 $\alpha = 0$, (2) 與 $\beta = 0$ 各代表同一直線，故爲簡便計，以下悉以 $\alpha = 0$ $\beta = 0$ 代表 (1) 及 (2) 卽 $\alpha = 0$, $\beta = 0$ 爲直線方程式之寫成法線式者。如此可得某種利益，希閱者注意及之。

定理三 直線 $\alpha - k\beta = 0$ 爲與二直線 $\alpha = 0$, $\beta = 0$ 距離之比，爲 k 之諸點之軌跡。若 $k > 0$ 則此直線在兩已知直線圍成之兩區域內。但其中有一包含原點 (origin). 若 $k < 0$ 則此直線在他兩區域內。

[證] 設 $P_1(x_1\ y_1)$ 為直線 $\alpha-k\beta=0$ 之一點，則 $\alpha_1-k\beta_1=0$ 其中 α_1 為以 x_1,y_1 代 α 中 x 及 y 所得之結果，餘做此。

由是

$$k=\frac{\alpha_1}{\beta_1}=\frac{P_1\text{ 至 }\alpha=0\text{ 之距離}}{P_1\text{ 至 }\beta=0\text{ 之距離}}$$

反之：若 P_1 適合所設條件，則必在直線 $\alpha-k\beta=0$. 故如定理云云。

系 $\alpha=0$ $\beta=0$ 交角之二等分角線各為 $\alpha-\beta=0$ 及 $\alpha+\beta=0$

定理四 三角形之三內等分角線交於一點。

[證] 取原點於三角形內，則三內等分角線之方程式各為

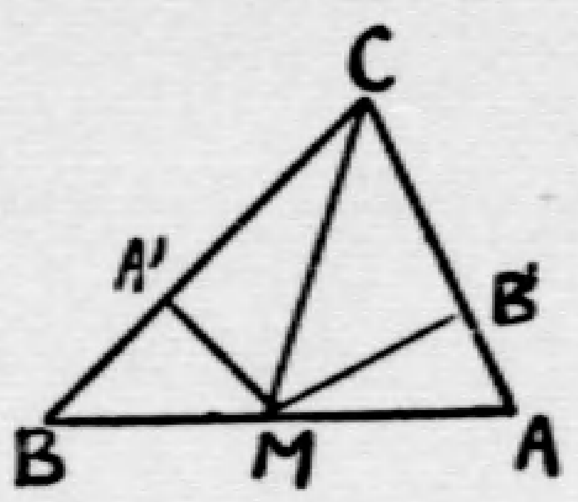
$\alpha-\beta=0,\qquad \beta-\gamma=0$ 及 $\gamma-\alpha=0$ (見定理三及系)

$$\because\ (\alpha-\beta)+(\beta-\gamma)+(\gamma-\alpha)\equiv 0$$

故從定理二知三直線 $\alpha-\beta=0,\ \beta-\gamma=0\ \gamma-\alpha=0$ 必交於一點，卽三內等分角線必交於一點。

定理五 三角形之三中線交於一點。

[證] 設原點取在三角形內，M 為 A B 之中點，



MA', MB' 各為自 M 向 BC, CA 所作之垂線則

$MA'=\frac{1}{2}c\sin B$，$MB'=\frac{1}{2}c\sin A$.

其中 c 為 AB 邊之長，

故中線 CM 之方程式為 $\alpha\sin A-\beta\sin B=0$

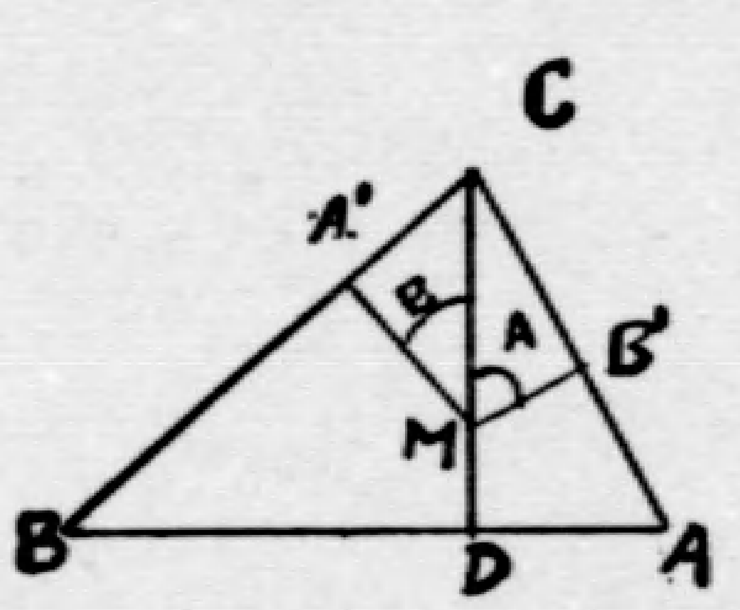
同理得他二中線之方程式各為

$\beta\sin B-\gamma\sin C=0$ 及 $\gamma\sin C-\alpha\sin A=0$

$$\because\ (\alpha\sin A-\beta\sin B)+(\beta\sin B-\gamma\sin C)+(\gamma\sin C-\alpha\sin A)\equiv 0$$

故三中線交於一點。

定理六 三角形之三垂線交於一點。



設 M 為垂線 CD 上之任意點，$MA'\perp BC$, $MB'\perp CA$;

則 $MA'=CM\cos B$, $MB'=CM\cos A$,

故垂線 CD 之方程式為

$$\alpha\cos A-\beta\cos B=0.$$

又他二垂線之方程式為

$\beta\cos B-\gamma\cos C=0$ 及 $\gamma\cos C-\alpha\cos A=0$

故三垂線交於一點。

定理七 三角形之二外等分角線，與一內等分角線交於一點。

[證] 二外等分角線之方程式爲 $\alpha+\beta=0$ 及 $\beta+\gamma=0$, 而內等分角線爲 $\gamma-\alpha=0$,

$$\because\quad (\alpha+\beta)-(\beta+\gamma)+(\gamma-\alpha)=0$$

故交於一點。

定理八 $k\alpha-l\beta=0$ 及 $l\alpha-k\beta=0$ 與 $\alpha-\beta=0$ 成等角。

[證] $\because\ \alpha-\frac{l}{k}\beta=0$ 及 $\alpha-\frac{k}{l}\beta=0$, 卽 $k\alpha-l\beta=0$, 及 $l\alpha-k\beta=0$, 故此二直線與 $\alpha=0, \beta=0$ 距離之比一爲 $\frac{l}{k}$ 又一爲 $\frac{k}{l}$ 從定理三可知。由是 $k\alpha-l\beta=0$ 與 $\alpha=0$ 所成之角，等於 $l\alpha-k\beta=0$ 與 $\beta=0$ 所成之角；又 $k\alpha-l\beta=0$ 與 $\beta=0$ 所成之角，亦等於 $l\alpha-k\beta=0$ 與 $\alpha=0$ 所成之角。故必與等分角線成等角也明甚。而等分角線之方程式爲 $\alpha-\beta=0$ 故如定理云云。

又 $k\alpha-l\beta=0$, 及 $l\alpha-k\beta=0$ 二直線，卽名曰等角共軛線 (isogonal conjugate lines).

定理九 若過頂點之三直線交於一點 P_1，則其等角共軛線亦必交於一點 P_2. P_1 及 P_2 名曰等角共軛點 (isogonal conjugate points).

[證] 設 $k\alpha-l\beta=0, l\beta-m\gamma=0$ 及 $m\gamma-k\alpha=0$ 爲交於 P_1 之三直線，則其等角共軛線各爲：

$$l\alpha-k\beta=0,\quad m\beta-l\gamma=0\quad 及\ k\gamma-m\alpha=0;$$

因
$$m(l\alpha-k\beta)+k(m\beta-l\gamma)+l(k\gamma-m\alpha)\equiv 0,$$

故從定理二知：三等角共軛線交於一點。

系 一三角形之類似中線 (symmedian line) 必交於一點。此點名曰類似重心 (symmedian point)。

[證] 因三中線之方程式各爲：

$$\alpha\sin A-\beta\sin B=0,\quad \beta\sin B-\gamma\sin C=0\ 及\ \gamma\sin C-\alpha\sin A=0$$

故類似中線之方程式當各爲：

$$\alpha\sin B-\beta\sin A=0,\quad \beta\sin C-\gamma\sin B=0\quad 及\ \gamma\sin A-\alpha\sin C=0$$

又因 $\sin C(\alpha\sin B-\beta\sin A)+\sin A(\beta\sin C-\gamma\sin B)+\sin B(\gamma\sin A-\alpha\sin C)\equiv 0$

故必交於一點。

定義 以 a 代表一點 (x_1, y_1), b 表 $(x_2\ y_2)$, c 表 $(x_3\ y_3)$ 等，又一點 (kx_1-lx_2, ky_1-ly_2) 可以 $ka-lb$ 表之，餘倣此。

定理十 在二點 a, b 之聯線上，而分成比 $\frac{l}{k}$ 之點爲形式 $ka-lb$.

[證] 從普通解析幾何學中，可知：分 a $(x_1\ y_1)$, b $(x_2\ y_2)$ 二點聯線成比 μ 之點，其坐標爲

$$x=\frac{1}{1-\mu}x_1-\frac{\mu}{1-\mu}x_2 \qquad \text{及}\ y=\frac{1}{1-\mu}y_1-\frac{\mu}{1-\mu}y_2$$

與 $$x=kx_1-lx_2 \qquad \text{及}\ y=ky_1-ly_2$$

比較得 $$k=\frac{1}{1-\mu} \qquad l=\frac{\mu}{1-\mu}$$ 由是得

$$\frac{l}{k}=\frac{\mu}{1-\mu}\div\frac{1}{1-\mu}=\mu$$ 故本定理已證明矣。

定理十一 (Ceva 氏定理) 在三角形 ABC 中，過頂點作三直線交對邊於 D, E, F 若 $BD\cdot CE\cdot AF=DC\cdot EA\cdot FB$, 則 AD, BE, CF 交於一點。反之亦然。

[證] 設 a, b, c 爲三角形之三頂點，則因

$$BD\cdot CE\cdot AF=DC\cdot EA\cdot FB \quad \text{卽} \quad \frac{BD}{CD}\cdot\frac{CE}{AE}\cdot\frac{AF}{BF}=-1$$

故 D, E, F 各點可表成

$$lb+mc, \qquad mc+ka \qquad \text{及}\ ka+lb$$

因從定理十可知 $$\frac{BD}{CD}=-\frac{m}{l} \qquad \frac{CE}{AE}=-\frac{k}{m} \qquad \text{及}\ \frac{AF}{BF}=-\frac{l}{k}$$

而 $\frac{BD}{CD}\cdot\frac{CE}{AE}\cdot\frac{AF}{BF}=\left(-\frac{m}{l}\right)\left(-\frac{k}{m}\right)\left(-\frac{l}{k}\right)=-1$ 故也。

又因 $(lb+mc)+ka$ 爲 AD 上之一點 (1)

$(mc+ka)+lb$ 爲 AE 上之一點 (2)

但 (1) (2) 兩點爲同一點 $ka+lb+mc$, 故 $ka+lb+mc$ 必爲 AD, BE 之交點。但 $ka+lb+mc\equiv(ka+lb)+mc$, 故知此點亦在 CF 線上。故 AD, BE, CF 三線共點，此所共之點卽爲 $ka+lb+mc$。

反之 設 a, b, c 爲三頂點，而另設 AD, BE, CF 之交點 0 爲 $ka+lb+mc$. 則因

$$(ka+lb+mc)-ka\equiv lb+mc$$

卽 $(ka+lb+mc)-ka$ 及 $lb+mc$ 表同一點 (same point), 但前者表 0 A 線上之一點，後者表 BC 線上之一點，故 $lb+mc$ 卽代表 0 A 與 BC 之交點，卽 $lb+mc$ 表 D 點。同理可知 E 爲點 $mc+ka$, F 點爲 $ka+lb$. 由是可知

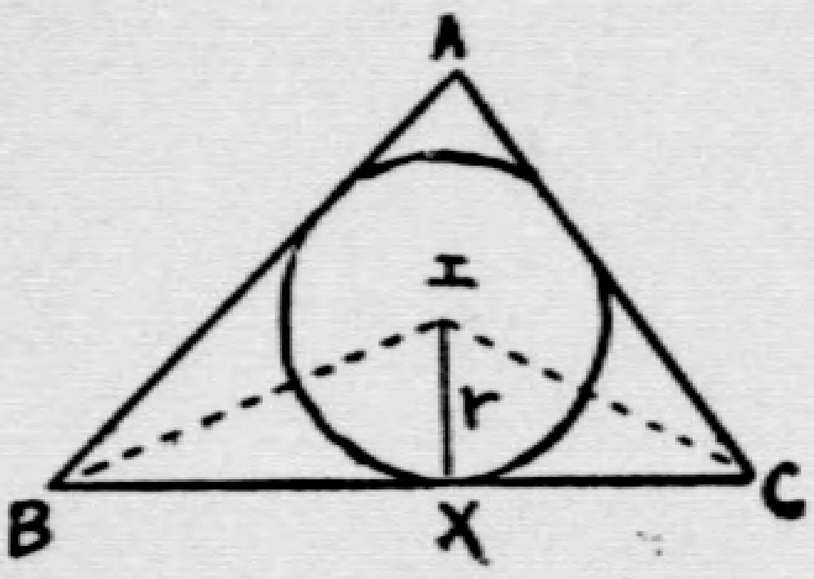
$$\frac{BD}{CD}=-\frac{m}{l}\ ,\ \frac{CE}{AE}=-\frac{k}{m}\quad 及\quad \frac{AF}{BF}=-\frac{l}{k}$$

而 $$\frac{BD}{CD}\cdot\frac{CE}{AE}\cdot\frac{AF}{BF}=-1 \text{ 或 } BD\cdot CE\cdot AF=DC\cdot EA\cdot FB$$

例 三角形 ABC 之內接圓切各邊於 X, Y, Z 則 AX, BY, CZ 交於一點。

[證] $$BX=r\cot\frac{B}{2}\qquad XC=r\cot\frac{C}{2}$$

$$\therefore\ \frac{BX}{XC}=\cot\frac{B}{2}\Big/\cot\frac{C}{2}$$



同理得 $$\frac{CY}{YA}=\cot\frac{C}{2}\Big/\cot\frac{A}{2}\ ,\ \frac{AZ}{ZB}=\cot\frac{A}{2}\Big/\cot\frac{B}{2}$$

$$\therefore\ \frac{BX}{XC}\cdot\frac{CY}{YA}\cdot\frac{AZ}{ZB}=1$$

故 AX, BY, CZ 交於一點。

移棋相間法

楊　肆

第一章　導言

俞曲園春在堂隨筆，有移棋相間法，列舉黑白棋各三子至各二十子移爲黑白相間；俞氏所示之法各各不同，而於二十子以後則未論及。此種遊戲是否能行於二十子以上，亦一有趣之問題，不揣淺陋爰爲解答。

問題：以黑白棋子各 n 粒，並列成一直線，求用推移法使其黑白相間，但須遵下列之條件：

1. 推移之次數，須等於每種棋子之粒數，如黑白棋子各 3 粒，則移 3 次；各 4 粒，則移 4 次；各 n 粒，則移 n 次。
2. 每次被移之棋子限定兩粒，此兩粒棋子須緊接不可隔開。
3. 在推移途中，棋子彼此之地位不可變更，如所移棋子爲一黑一白，其在未移以前之位置爲黑左白右；則經過推移後，此兩粒棋子之位置仍須黑左白右。
4. 當棋子排列成一直線而無間隙時，則被移之棋子皆移向棋子之左端或右端，有間隙時則被移之棋子皆移往填此間隙。
5. 經末一次之推移後，棋子須緊接成一直線不可隔開。

此問題將分段討論，今先研究 n = 1, 2 或 3 時諸法：

a. 當 n = 1 時，不需推移，或任意推移，皆成爲所求之形式，故無容研究。

b. 當 n = 2 時，設給與之形式爲

○ ○ ● ●
1 2 3 4

(○ 代表白棋，● 代表黑棋) 如推移 1, 2 或 3, 4 則僅黑白轉換，而仍得相同之形式，如推移 2, 3 則可得移種形式

1, ○　● ○ ●
　 1　 4 2 3

2, ○ ● ○　●
　 2 3 1　 4

就形式方面論，此兩式實相同，蓋兩者，均爲黑白相間之形式。惟其間尙有空隙，故 n = 2 爲一種特別情形，可置諸不論。

c. 當 n = 3 時，設給與之形式爲

○ ○ ○ ● ● ●
1 2 3 4 5 6　　A

移 1, 2 於左端得

○ ● ● ● ○ ○
3 4 5 6 1 2　　B

再移 6, 1 于左端，而以 3, 4 塡其隙，得所求之形式如下：

●	○	●	○	●	○	
5	3	4	2	6	1	C

如先移 5, 6 於右，則經相似之步伍，得相同之形式，惟方向異耳。如先移 2, 3; 3, 4; 或 4, 5, 從實驗知其爲不可能，故移 A 式爲黑白相間式，雖有兩種移法，然如認定一方向，則只有一法耳，(注意：A 式移爲 C 式後，全式共向左移前四步)。

當 $n > 3$ 時　玆分爲四組，分別於下章討論之。

第二章　$n = 4k$ 式之推移

爲便利及一致起見，應用下列之規律及記號：

a. 將棋子順排，而以所在之位置名之。如在第 2 位置，則得 2 之名；如從第 2 位移至第 5 位，則失 2 之名而得 5 之名。

b. 棋子之給與形式爲黑左白右。

c. 第一次之推移，皆移向棋子形成之直線之左端。

d. 用記號 (a) 表示一次推移，所移之棋子爲在第 a 位及第 a + 1 位者。

此種規律及符號並不損及此問題之普遍性。

今於討論普通方法之前，先舉二例如下：

例 1.　$k = 1$　$n = 4$

設棋子排列如下：

○	○	○	○	●	●	●	●	
1	2	3	4	5	6	7	8	A

經 (2) (5) 兩次推移後，得以下之形式：

○	●	●	○			●	●	○	○	
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	B

再經 (8) (1) 後，推移次數適等於 4 而得所求之形式如下：

		●	○	●	○	●	○	●	○	
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	C

例 2.　$k = 2$　$n = 8$

設棋子排列如下：

○	○	○	○	○	○	○	○	●	●	●	●	●	●	●	●	
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	A'

經 (2) (13) 後，得

○	◉	◉	○	○	○	○	○	◉	◉	◉	◉			◉	◉	○	○	B'
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	

經 (6) (9) 後，得

○	◉	◉	○	○	◉	◉	○			◉	◉	○	○	◉	◉	○	○	C'
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	

經 (12) (5) 後，得

○	◉	◉	○			◉	○	◉	○	◉	○	◉	○	◉	◉	○	○	D'
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	

再經 (16) (1) 後，推移次數適等於 8，而得所求之形式

◉ ○ ◉ ○ ◉ ○ ◉ ○ ◉ ○ ◉ ○ ◉ ○ ◉ ○ E'

觀察例 1，2 中之 B 式及 C' 式，中間皆有一間隙，其形式幾完全相同。設以 4 子爲一束，則間隙之右各束之形式爲 ○ ◉ ◉ ○，而間隙之左各束之形式爲 ◉ ◉ ○ ○。當 $k=1$ 時，左右各一束。當 $k=2$ 時，左右各二束。原式推移成此式時，適達全程之半，故名之曰半程式。

現再引入幾種記號命：

P 代表原式

P_1 代表原式經一次推移後之式

P_n 代表原式經 n 次推移後之式

P_h 代表半程式

F 代表所求之式即黑白相間式

f 代表 ◉ ○ ◉ ○

X 代表 ○ ○ ○ ○

Y 代表 ◉ ◉ ◉ ◉

A 代表 ○ ◉ ◉ ○

B 代表 ◉ ◉ ○ ○

I 代表間隙

(n)P 代表各種棋子等於 n 粒之原式

(n)F 代表各種棋子等於 n 粒之黑白相間式

$P \xrightarrow{(a)} F$ 表如 P 經 (a) 之推移後得 F

當 $n=4$ 時，$P_h = A \,|\, B$；當 $n=8$ 時 $P_h = AA \,|\, BB$。從例 1 考察由 P 至 P_h 之步驟，知先從 X 束中取中間兩子移往 Y 束之左，而於 Y 束中取右端兩子往補 X 束之隙，遂得 A B 兩束而留一間隙於 B 束之右。從例 2 中考察，知其步驟相似，設用符號表示則得

$P \equiv X_1\ X_2\ Y_1\ Y_2$

用同於例 1 之方法，將 X_1，Y_2 兩束移為 A_1，B_2 而得一間隙於 B_2 束之右，用同法處理 $X_2\ Y_1$，得 $A_2\ B_1$，兩束，而間隙亦移至 B_1 束之左，遂得 $Ph \equiv A_1 A_2 \,[\, B_1 B_2$。

更考察由 Ph 至 F 之步驟，知先從 B 束取中間兩子往補 Ph 之隙，而於 A 束中取右端兩子補 B 束之隙，遂得 F。此時間隙移於全式之右端。例 2 中之步驟亦復相同。惟先移 $A_2 \,[\, B_1$ 為 $[\, f\ f$ 後，再移 $A_1\ B_2$ 耳。如以兩次推移為一組，而視原式之左端亦為一間隙，則經各組之推移後，間隙逐步右移至全式之右端而止。

現再將例 1, 2 之結果用下式表出而考察之

1. $_{(4)}P \xrightarrow{(2)\,(5)\,(8)\,(1)} F$

2. $_{(8)}P \xrightarrow{(2)\,(13)\,(6)\,(9)\,(12)\,(5)\,(16)\,(1)} F$

從 2 式中可發見 2 與 6, 13 與 9, 12 與 16, 5 與 1 之關係，為加 4 或減 4; 而從 1 與 2 式可發見 2 與 6, 5 與 9, 8 與 12, 1 與 5 之關係皆為加 4。

從以上之討論及 1, 2 兩式之數的關係建立一普遍式如下：

$$\text{I.}\quad T_{n=4k>0} = \overrightarrow{\prod_{z}^{(0,\,k-1)}} (2+4z)\,(2n-3-4z)\ \overleftarrow{\prod_{z}^{(0,\,k-1)}} (2n-4z)\,(1+4z)$$

此式共表示 4k 次推移，展開則得下式：

$$T_{n=4k>0} = (2)\,(2n-3)\,(6)\,(2n-7)\cdots\cdots(2+4\,\overline{k-1})\,(2n-3-4\,\overline{k-1})$$
$$(2n-4\,\overline{k-1})\,(1+4\,\overline{k-1})\cdots\cdots(2n-4)\,(2n)\,(1)$$

I 式中前段 $\overrightarrow{\prod_{z}^{(0,\,k-1)}}$ 各種推移，乃所以使 $P \longrightarrow Ph$; 其後段 $\overleftarrow{\prod_{z}^{(0,\,k-1)}}$ 所表示之各種推移，所以使 $Ph \longrightarrow F$. 從 P 至 Ph 系首移兩端各束，而後及於中央，順次移各 X 束中間之兩子，及各 Y 束之右端兩子，因每束為 4 子，故 X 束之處理，皆逐次加 4; Y 束之處理，逐次減 4。因此得 $(2+4z)\,(2n-3-4z)$ 而 z 之值由 0 而 k－1. 從 Ph 至 F 系首移中央各束，而後及於兩端，順次移各 B 束之中間兩子，及各 A 束之右端兩子，故 B 束之處理，逐次減 4, 而 A 束之處理逐次少加 4, 因此得 $(2n-4z)\,(1+4z)$ 而 z 之值由 k－1 而 0。

例 1, 2 之兩組推移皆包括于 I 式內 。

定理一 設 $n=4k$, $k>0$ 則 I 式前部 $\overrightarrow{\prod_{z}^{(0,\,k-1)}}$ 可以使 P 至 Ph 而間隙適居全式之中央，

I 式後部 $\prod_{z}^{\overrightarrow{(0,\,k-1)}}$ 可以使 P^h 至 F, 而間隙移至全式之右端。

證： 當 k=1, 2 時，此定理已眞。求證當 k=任何大於 ○ 之整數時爲眞，則用數學歸納方法，假定此定理當 k=m 時爲眞，求證當 k=m+1 時亦眞卽可。

設 $P \equiv X_1\, X_2 \cdots\cdots X_m\, X_{m+1}\, Y_1\, Y_2 \cdots\cdots Y_m\, Y_{m+1}$

將 $X_{m+1}\,Y_1$ 兩束置而不論，則定理一當 k=m 時爲眞，故經 $\frac{4m}{2}$ 次推移後，得

$$P_{2m} \equiv A_1\, A_2 \cdots\cdots A_m\, X_{m+1}\, Y_1 \rfloor B_2\, B_3 \cdots\cdots B_m\, B_{m+1}$$

此間隙必在 Am 及 B_2 之中 (定理 I), 更從前之討論，知推移 X Y 使成爲 A B 時皆取 Y 右端之兩子往補 X 中間之隙，故 A B 式成後，間隙必緊隨 B 之右而得 P_{2m} 如上式。

由 P 至 P_{2m} 所經之推移，爲 I 式之前部

$$\prod_{z}^{\overrightarrow{(0,\,k-1)}} (2+4\,z)\,(2\,n-3-4\,z) \qquad \alpha$$

代入 n=4m 之値，得

$$\prod_{z}^{\overrightarrow{(0,\,m-1)}} (2+4\,z)\,(8\,m-3-4\,z) \qquad \beta$$

在處理 X 諸束時，棋子之位置，與在 $_{(m)}P$ 內完全相同；但處理 Y 諸束時，因有 X_{m+1} Y_1 兩束在其前，故各棋子之序數，皆需加 8, 此亦可從 $(2+4\,z)\,(8\,m-3-4\,z)$ 看出，因前者不含 m 而後者含 m 也，故 β 當爲

$$\prod_{z}^{\overrightarrow{(0,\,m-1)}} (2+4\,z)\,(8\,m-3-4\,z+8) \qquad \gamma$$

然後再觀 $X_{m+1}\,Y_1$ 兩束

$$X_{m+1}\,Y_1 \rfloor \equiv \begin{array}{cccccccc} \circ & \circ & \circ & \circ & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet \\ 4m+1, & 4m+2, & 4m+3, & 4(m+1) & 4m+5, & 4m+6, & 4m+7 & 4(m+2) \end{array}$$

經 $(4m+2)\,(4m+5)$ 後得 $A_{m+1} \rfloor B_1$,

但 $\qquad (4m+2) \equiv (2+4\,z)_{z=m}$,

$\qquad (4m+5) \equiv (8\,\overline{m+1}-3-4\,z)_{z=m}$,

將此二推移加入 γ, 得

$$\prod_{z}^{\overrightarrow{(0,\,m-1)}} (2+4\,z)\,(8\,\overline{m+1}-3-4\,z) \qquad \delta$$

P 經 δ 式推移後，得

$$P_{2(m+1)} \equiv A_1 A_2 \cdots\cdots A_{m+1} \,\big[\, B_1 B_2 \cdots\cdots B_{m+1} \equiv P_h \text{。}$$

用相似之方法，將 P_h 中之 A_1 及 B_{m+1} 暫時置之不理，經 I 式後部之推移，卽

$$\prod_{z}^{\overleftarrow{(0,\,k-1)}} (2n-4z)(1+4z) = \prod_{z}^{\overleftarrow{(0,\,m-1)}} (8m-4z)(1+4z) \qquad \alpha'$$

得 $\qquad P_{4m+2}\,E\,A_1 \,\big|\, f_2\, f_3 \cdots\cdots f_{2m+1}\, B_{m+1},$

此間隙必在 f_2 之前，因定理一對於 $k=m$ 爲眞也。

$$A_1 \,\big[\, \cdots\cdots B_{m+1} = \underset{1}{\bigcirc}\ \underset{2}{\bullet}\ \underset{3}{\bullet}\ \underset{4}{\bigcirc}\ \big[\ \cdots\cdots\ \underset{8m+7,}{\bullet}\ \underset{8m+8,}{\bullet}\ \underset{8m+9,}{\bigcirc}\ \underset{8m+10}{\bigcirc}$$

經 $(8m+8)$ 及 (1) 後，得

$$P_{4(m+1)} \equiv F\text{。}$$

當應用 I 式後部處理 $A_2 \cdots\cdots A_{m+1} \,\big[\, B_1 B_2 \cdots\cdots B_m$ 時，因有 A_1 一束在前，故各棋子之序數皆需加 4，故 α' 當爲

$$\prod_{z}^{\overleftarrow{(0,\,m-1)}} (8m-4z+4)(1+4z+4), \qquad \beta'$$

此式可改寫爲

$$\prod_{z}^{\overleftarrow{(1-m)}} (8\overline{m+1}-4z)(1+4z), \qquad \gamma'$$

又 $\qquad (8m+8) \equiv (8\overline{m+1}-4z)_{z=0},\ (1) \equiv (1+4z)_{z=0}$

將此二推移加入 γ'，得

$$\prod_{z}^{\overleftarrow{(0,\,m)}} (8\overline{m+1}-4z)(1+4z), \qquad \delta'$$

從 δ 及 δ' 得

$$T_{n=4(m+1)} = \prod_{z}^{\overleftarrow{(0,\,m)}} (2+4z)(8\overline{m+1}-3-4z) \prod_{z}^{\overleftarrow{(0,\,m)}} (8\overline{m+1}-4z)(1+4z),$$

此與將 $k=m+1$ 之値，代入 I 式所得，完全相同。又當 P 至 P_h 時，間隙適在中央，P_h 至 F 後，間隙乃至全式之右端，故定理一至此已完全證明。

定理一 可另述之如下：設 $n=4k$, $k>0$ 則經 I 式之推移，可使 P 至 F，但 F 較 P 原有之位置，向左前進兩位。

第三章　n=4k+1 式之推移

例 1　$k=1,\quad n=5.$

$P\equiv$	○	○	○	○	○	◉	◉	◉	◉	◉
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10

經 (2), (8) 得

$P_2\equiv$	○	◉	◉	○	○	◉	◉			◉	○	○
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12

經 (5) 得

$P_3\equiv$	○	◉	◉	○			◉	○	◉	◉	○	○
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12

設以 $\frac{f}{2}$ 代表 ◉ ○，則得

$$P_3\equiv A\ \Big|\ \frac{f}{2}\ B,$$

從第一章，知此式經兩次適當之處置，卽能得黑白相間式，再經 (10), (1) 後，推移次數適等於 5, 而得 F. 其結果可以 F 式表之：

$$T_{n=5}=(2)\ (8)\ (5)\ (10)\ (1)。$$

例 2　$k=2,\qquad n=9,$

$P=$	○	○	………	○	◉	◉	………	◉
	1	2		9	10	11		18

經 (2) (15) (6) (12) (9) 後得

$$P_8\equiv A_1\ A_2\ \Big|\ \frac{f}{2}\ B_1\ B_2$$

再經 (18) (5) (14) (1) 後，推移次數適等於 9, 而得 F, 其結果可以下式表之：

$$T_{n=9}=(2)\ (15)\ (6)\ (12)\ (9)\ (18)\ (5)\ (14)\ (1)$$

從例 1, 2 建下式：

$$\text{II.}\quad T_{\substack{n=4k+1\\ k>0}}=(2)\ \underset{z}{\overset{\overrightarrow{(0,\,k-2)}}{\Pi}}\ \left[(2n-3-4z)\ (6+4z)\right]_{n\geqq 9}\ (n+3)\ (n)$$

$$\underset{z}{\overset{\overleftarrow{(0,\,k-1)}}{\Pi}}\ (2n-4z)\ (1+4z)。$$

$n\geqq 9$ 表示該項至 $n\geqq 9$ 方出現。例 1, 2 之結果，包括於此式內。

定理二　設 $n=4k+1,\ k>0$, 則經 II 式之推移，可使 P 至 F, F 較 P 原有之位置向左前進兩位。

證： 此定理對於 $k=1,2$ 時已眞，仍用歸納法，假定其對於 $k=m$ 時爲眞，而證其當 $k=m+1$ 時亦眞。

$$_{(4\overline{m+1}+1)}P \equiv X\ _{(4m+1)}P\ Y \equiv \underset{1}{\bigcirc}\ \underset{2}{\bigcirc}\ \underset{3}{\bigcirc}\ \underset{4}{\bigcirc}\ _{(4m+1)}P\ \underset{2n-3,}{\odot}\ \underset{2n-2,}{\odot}\ \underset{2n-1,}{\odot}\ \underset{2n.}{\odot}$$

經 (2) 及 $(2.\overline{4\overline{m+1}+1}-3)$ 得

$$P_2 \equiv A\ _{(4m+1)}P \,\big|\, B,$$

因當 $k=m$ 時，此定理爲眞，故經 II 式推移後，得

$$P_{4m+3} \equiv A \,\big|\, _{(4m+1)}FB,$$

因有 A 在前，故 $_{(4m+1)}P$ 中各棋子之序數皆加 4，得 II 式如下：

$$T_{n=4m+1} = (2+4) \underset{z}{\overset{\xrightarrow{(0,\,k-2)}}{\mathrm{II}}} [(2n-3-4z+4)\ (6+4z+4)]_{n\geqq 9}\ (n+3+4)$$

$$(n+4) \underset{z}{\overset{\xleftarrow{(0,\,k-1)}}{\mathrm{II}}} (2n-4z+4)\ (1+4z+4)\text{。}$$

將 $n=4m+1$ 代入，得

$$T_{n=4m+1} = (6) \underset{z}{\overset{\xrightarrow{(0,\,m-2)}}{\mathrm{II}}} [(8m+2-3-4z+4)\ (6+4z4)]_{n\geqq 9}$$

$$(4m+1+3+4)\ (4m+1+4) \underset{z}{\overset{\xleftarrow{(0,\,m-1)}}{\mathrm{II}}} (8m+2+4-4z)\ (1+4z+4)\text{。}$$

再觀察 P_{4m+3},

$$P_{4m+3} \equiv \underset{1}{\bigcirc}\ \underset{2}{\odot}\ \underset{3}{\odot}\ \underset{4}{\bigcirc}\ \big|\ _{4m+1}F\ \underset{2n-1,}{\odot}\ \underset{2n,}{\odot}\ \underset{2n+1}{\bigcirc}\ \underset{2n+2}{\bigcirc}$$

經 $(2.\overline{4\overline{m+1}+1})$ 及 (1) 後得

$$P_{\overline{4m+1}} \equiv \ _{\overline{4m+1}}F,$$

將各推移相併，得

$$T_{n=4m+5} = (2)\ (2.4\overline{m+1}+1-3)\ T_{n=4m+1}\ (2.4\overline{m+1}+1)\cdot(1)$$

此式可改寫爲彼之相等式

$$T_{n=4m+5} = (2) \underset{z}{\overset{\xrightarrow{(0,\,m-1)}}{\mathrm{II}}} [(2.\overline{4\overline{m+1}+1}-3-4z)\ (6+4z)]\ (4\overline{m+1}+1+3)$$

$$(4\overline{m+1}+1) \underset{z}{\overset{\xleftarrow{(0,\,m)}}{\mathrm{II}}} (2.\overline{4\overline{m+1}+1}-4z)\ (1+4z).$$

此與將 $k=m+1$ 之值代入 II 式，所得完全相同，而從 P_{4m+3} 至 $P_{\overline{4m+1}}$ 之推移，可知間隙移至全式之右端，即全式向左前進兩位，故定理二至此已完全證明。

第四章　n=4 k+2 式之推移

例 1　　$k=1,$　　$n=6,$

$$P\equiv\underset{1}{\bigcirc}\ \underset{2}{\bigcirc}\ \underset{3}{\bigcirc}\ \underset{4}{\bigcirc}\ \underset{5}{\bigcirc}\ \underset{6}{\bigcirc}\ \underset{7}{\bullet}\ \underset{8}{\bullet}\ \underset{9}{\bullet}\ \underset{10}{\bullet}\ \underset{11}{\bullet}\ \underset{12}{\bullet}$$

經 (2) (8) 得

$$P_2\equiv A\ \underset{5}{\bigcirc}\ \underset{6}{\bigcirc}\ \underset{7}{\bullet}\ \ \mathrm{I}\ \ \underset{10}{\bullet}\ B,$$

經 (4) (9) 得

$$P_4\equiv A\ f\ \mathrm{I}\ B,$$

再經 (12) (1) 推移次數適等於 6, 而得

$$P_6\equiv F.$$

例 2　　$k=2,$　　$n=10,$

$${}_{(10)}P\equiv X\ {}_{(6)}P\ Y\equiv\underset{1}{\bigcirc}\ \underset{2}{\bigcirc}\ \underset{3}{\bigcirc}\ \underset{4}{\bigcirc}\ {}_{(6)}P\ \underset{17}{\bullet}\ \underset{18}{\bullet}\ \underset{19}{\bullet}\ \underset{20}{\bullet}$$

關于 X Y 之處理，依第一章所示之方法，經 (2) (17) 後得

$${}_{(10)}P_2\equiv A\ {}_{(6)}P\ \mathrm{I}\ B.$$

從例 1 知 ${}_{(6)}P$ 經 6 次推移之處理，可得 ${}_{(6)}F$, 而向左前進兩步，故經 (6) (12) (8) (13) (16) (5) 後得

$$P_8\equiv A\ \ \mathrm{I}\ \ {}_{(6)}F\ B.$$

再依第一章處理 A B 之法，經 (20) (1) 後得

$$P_{10}\equiv F.$$

將例 1, 2 之結果排列而比較之：

$$T_{n=6}=(2)\ (8)\ (4)\ (9)\ (12)\ (1),$$

$$T_{n=10}=(2)\ (17)\ (6)\ (12)\ (8)\ (13)\ (16)\ (5)\ (20)\ (1),$$

考察此二式之數字關係，T_6 中各項之數加 4, 適等於 T_{10} 中 6 至 5 各數，此亦應然，因在此二式中，此 6 次推移，皆用於處理 ${}_{(6)}P$ 也。T_{10} 中 (2) (17) 及 (20) (1) 4 項爲處理首尾兩束，當遵定理一之法則，由此可得普通之法則：

$$\text{III}\quad T_{\substack{n=4k+2\\ k>0}}=\prod_{z}^{\overrightarrow{(0,\,k-2)}}\left[(2+4z)\ (2n-3-4z)\right]_{n>6}\ (n-4)\ (n+2)\ (n-2)\ (n+3)$$

$$(n+6)\ (n-5)\ \prod_{z}^{\overleftarrow{(0,\,k-2)}}\left[(2n-4z)\ (1+4z)\right]_{n>6}。$$

例 1, 2 之結果，皆包括于此式內。

定理三 設 $n=4k+2, k>0$ 則經 III 式之處理，可將原式移為黑白相間式，位置較原式向左前進兩步。

證： 設

$$P \quad X_1 X_2 \cdots\cdots X_{m-1} \ {}_{(6)}P\, Y_1 Y_2 \cdots\cdots Y_{m-1},$$

將${}_{(6)}P$ 暫時置之不理，用定理一處理 X Y 各項，將 $X_1 Y_{m-1}, X_2 Y_{m-2} \cdots\cdots X_{m-1} Y_1$ 配合為 $m-1$ 組，則每組經兩次 $(2+4z), (2n-3-4z)$ 之推移得一組 A B, 故經 $2(m-1)$ 次推移後，得

$$P_{2(m-1)} \equiv A_1 A_2 \cdots\cdots A_{m-1} \ {}_{(6)}P \,\big[\, B_1 B_2 \cdots\cdots B_{m-1},$$

間隙在 B, ${}_{(6)}P$ 之間，可用定理一證之，從例 1 之推移，處理 ${}_{(6)}P$, 因有 $m-1$ 束在 ${}_{(6)}P$ 之前，故其中各子之序數，皆需加 $4\overline{m-1}$, 而得 6 次推移如下：

$$T_6 = (4\overline{m-1}+2)(4\overline{m-1}+8)(4\overline{m-1}+4)(4\overline{m-1}+9)\ 4\overline{m-1}+12)(4\overline{m-1}+1)$$

代入 $n=4m+2$, 得

$$T_6 = (n-4)\ (n+2)\ (n-2)\ (n+3)\ (n+6)\ (n-5)$$

經 T6 之推移後 ${}_{(6)}F$ 較 ${}_{(5)}P$ 向左前進兩位得

$$P_{2(m-1)+6} \equiv A_1 A_2 \cdots\cdots A_{m-1} \ \big]\ {}_{(6)}F\, B_1 B_2 \cdots\ B_{m-1}。$$

用 I 式處理 A B, 因各 A 中被移者為右兩項，而各 B 中被移者為中兩項，故間隙雖從 B_1 之右而移至 A_{m-1} 之左，然仍居 A B 之中，對於定理一之應用，不生影響，故各 A B 經 $(2n-4z)(1+4z)$ 處理後，得

$$P_{4m+2} \equiv {}_{4m+2}F.$$

因 $m=1$ 時，只有 ${}_{(6)}P$ 至 $m \geqq 2$, 即 $n>6$ 時，X Y 束方發生，故 I 式之應用，z 之值不能等於 $m-1$, 實際上 $m-1$ 須再減一而為 $m-2$, 故在 I 式中 Z 值之變換限於 ○ 至 $n-2$ 之中；綜上之結果，得

$$T_{n=4m+2} = \overset{\xrightarrow{(0,\, m-2)}}{\underset{z}{\Pi}} \lfloor (2+4z)\ (2n-3-4z) \rfloor_{n>6} (n-4)\ (n+2)\ (n-2)\ (n+3)$$

$$(n+6)\ (n-5) \overset{\xrightarrow{(0,\, m-2)}}{\underset{z}{\Pi}} \lfloor (2n-4z)(1+4z) \rfloor_{n>6}。$$

更從 I 式之應用，知間隙逐步右移，至全式之右端而止，即 F 式較 P 式向左前進兩位，定理三至此已完全證明。

第五章 n=4 k+3 式之推移

例 1 $k=1$, $n=7$,

$$P \equiv X\ {}_{(3)}P\ Y \equiv \underset{1}{\bigcirc}\ \underset{2}{\bigcirc}\ \underset{3}{\bigcirc}\ \underset{4}{\bigcirc}\ {}_{(3)}P\ \underset{11}{\odot}\ \underset{12}{\odot}\ \underset{13}{\odot}\ \underset{14}{\odot}$$

關于 ${}_{(3)}P$ 之討論，已於第一章詳之，惟該節所示之法，將 ${}_{(3)}P$ 移爲 ${}_{(3)}F$ 後，全式向左前進四步，在此頗不適用，依 I 左之法，經 (2) (11) 後，得

$$P_2 \equiv A\ {}_{(3)}P\ \big]\ B。$$

現討論 ${}_{(3)}P$ 之推移法，設有一間隙在全式之左端

$${}_{(3)}P \equiv \underset{5}{\bigcirc}\ \underset{6}{\bigcirc}\ \underset{7}{\bigcirc}\ \underset{8}{\odot}\ \underset{9}{\odot}\ \underset{10}{\odot}$$

此式經 (5) (10) (7) 後，得

$${}_{(3)}P_3 \equiv \frac{f}{2}\ \big]\ f,$$

由此得

$$P_5 \equiv A\ \frac{f}{2}\ \big]\ f\ B,$$

再經 (14) (1) 後得

$${}_{(7)}P_7 \equiv F,$$

而較原式向左前進兩位。

從此例中，知 ${}_{(3)}P$ 之右，如有一間隙，則經三次適宜而一定推移，可得 $\frac{f}{2}\ \big]\ f$ 式，${}_{(3)}P$ 既能解決，而首尾各束，可依定理一處理，故可推得普通式如下：

$$\text{IV.}\qquad T_{\substack{n=4k+3\\ k>0}} = \prod_{z}^{\overrightarrow{(0,\,k-1)}} [(2+4z)\ (2n-3-4z)]\ (n-2)\ (n+3)$$

$$(n)\ \prod_{z}^{\overleftarrow{(0,\,k-1)}} [(2n-4z)\ (1+4z)]。$$

定理四 設 $n=4k+3$, $k>0$, 則經 IV 式之處理，可將 P 式，F 式位置較 P 式向左前移兩位。

證： 設 k = 任何大於零之整數 m, 則

$$P \equiv X_1\ X_2 \cdots\cdots X_{m-1}\ {}_{(3)}P\ Y_1\ Y_2 \cdots\cdots Y_{m-1}\ Y_m,$$

將 ${}_{(3)}P$ 暫時置之不問，則此式屬於 n = 4 k 式，依定理一，知經 $\prod_{z}^{\overrightarrow{(0,\,m-1)}} (2+4z)$ $(2n-3-4z)$ 移得 A B 式，而有一間隙居 B 之右，因 z 最大之値爲 m—1, 故 $(2+4z)$

所示之推移，悉在 $_{(3)}P$ 之前，而 $(2n-3-4z)$ 所示之推移，悉在後，但 $(2n-3-4z)\equiv(8m-3-4z)$，將 $_{(3)}P$ 插入後，各 X 束棋子之序數仍同前，而各 Y 束中棋子之序數須加 6，然 $(8m-3-4z+6)\equiv(2\overline{4m+3}-3-4z)$ 取 $n=4m+3$，則此式又變為 $(2n-3-4z)$，故雖有 $_{(3)}P$ 之居中，定理一之前部可完全應用，得

$$P_{2m}\equiv A_1A_2A_3\cdots\cdots A_m\ {}_{(3)}PB_1B_2\cdots\cdots B_{m-1}B_m.$$

依例 1 中所示之法則處理 $_{(3)}P$，得三次推移 $(4m+1)$ $(4m+6)$，$(4m+3)$，代入 $n=4m+3$ 得 $(n-2)$ $(n+3)$ (n)，至此得

$$P_{2m+3}\equiv A_1A_2\cdots\cdots A_m\frac{f}{2}\quad\Big[\quad fB_1B_2\cdots\cdots B_{m-1}B_m.$$

同以上之理由，此式可應用 I 式後半部之推移處理之，故經 $\overset{\xleftarrow[(0,\,m-1)]{}}{\underset{z}{\Pi}}$ $(2n-4z)$ $(1+4z)$ 後，得

$$P_{4m+3}\equiv{}_{(4m+3)}F,$$

而從定理一，可得 F 式較 P 式向左前移兩步，定理四至此已完全證明。

第六章　結論

一切大於 3 之自然數，皆可包括於 $4k, 4k+1, 4k+2, 4k+3$；$k>0$ 之中；而 I 式所示之推移，卻為 $4k$ 次，II, III, IV 式各表示 $4k+1, 4k+2, 4k+3$ 次，故關於此問題，可謂已完全解決。

依前數章之結果，發見原式移為黑白相間式後，有普通之性質二：(一)原式經推移後，除 3 為例外，向左推進四步外，其他皆向左推進兩步；(二)原式為白子居前而移成相間式後，反以黑子起首。

本篇所示之方法，并非為惟一之方法。就以前 20 子而論；與俞氏春在堂隨筆所載，頗多不同，蓋關於此問題并非僅有一解答也。惟當 $n=4, 5, 6, 7$ 時，則僅有一解答；大於 8 之數，有 X Y 束多於 2 或等於 2，皆不僅有一解答，因每一 X 束非僅能與一定之 Y 束相配也。故解答之數，與 X Y 束之多寡有關，而成一正比。

此篇成於匆促之間，加以作者學識淺薄，謬誤之處，在所不免，拋磚引玉，是所望也。

二十二年十二月於光華

萘(Naphthalene)之氧化論詳

胡 昭 聖

(一) 緒 言

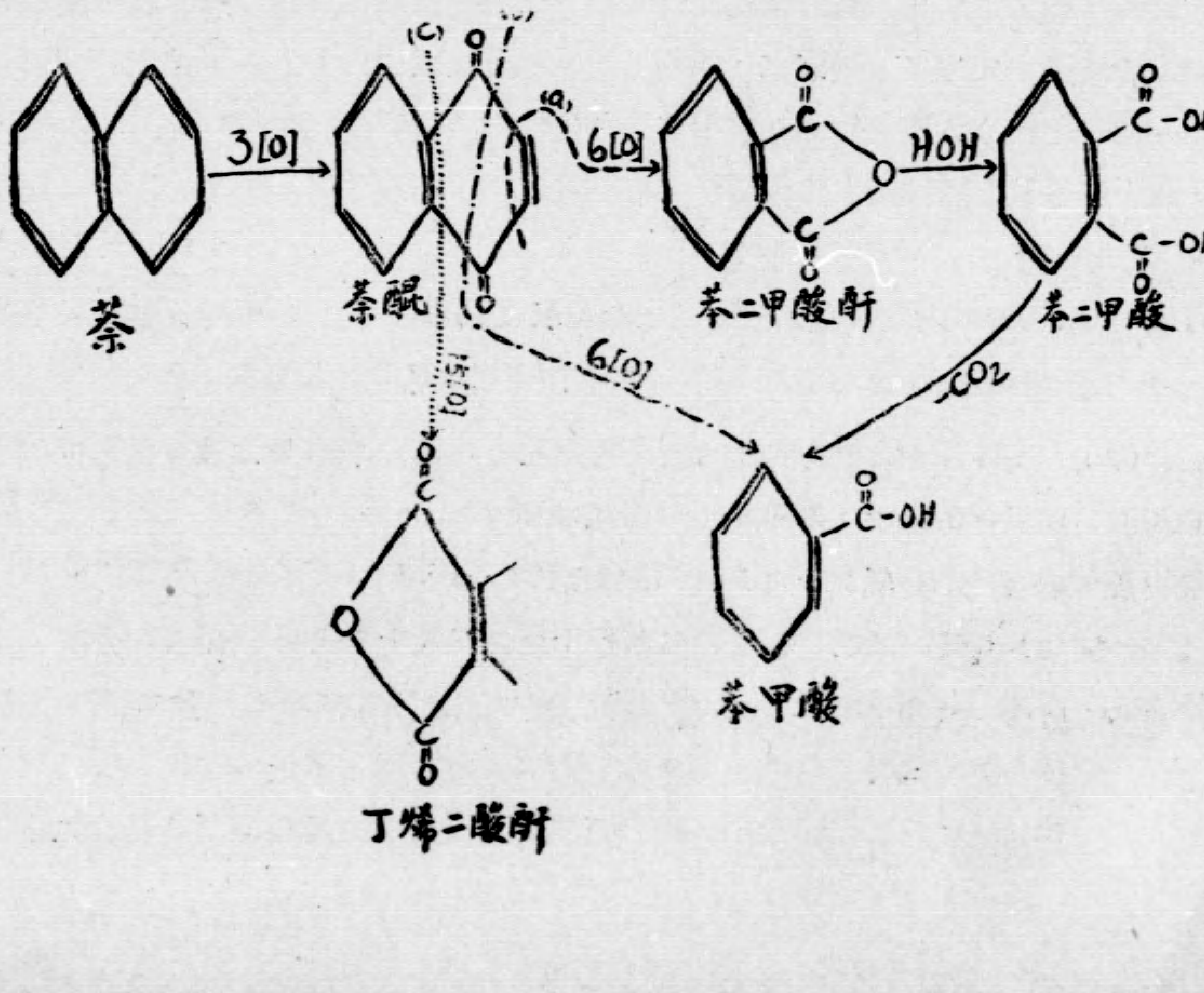
萘 (Naphthalene) 氧化後，可以得着數種有用的東西；這些東西，在工業上，醫藥上，都占着很重要的位置。所以在有機化學工業裏面，氧化萘，亦頗重要的。

自一八九二年，德國有機化學家瓦爾特 (Walter)，利用氧化釩爲接觸劑，使萘在空氣中氧化而成 β－ 萘酚 (β－Naphthol) 後，一九一六年，吉布士 (H. D. Gibbs) 隨卽發明萘氣，藉接觸劑之助，得於空氣中氧化而生苯二甲酸酐 (Phthalic anhydride)。但是現在的趨勢，是由萘製苯二甲酸酐而以五氧化釩，釩酸錫爲接觸劑，因市場上需苯二甲酸酐爲製蒽醌 (Anthraquinone) 之原料。

以適當的接觸劑，萘得氧化而成萘醌，丁烯二酸及其酸酐 (Maleic acid and maleic anhydride)，苯甲酸 (Benzoic acid)，二氧化碳和水，苯二甲酸及其酸酐 (Phthalic acid and phthalic anhydride). 在普通情形之下，苯二甲酸酐是主要產品，其餘的東西，皆爲副產品。但是二氧化碳和水之所以產生，由於作用時溫度之處置不當。如溫度處置恰當，可不致產生二氧化碳和水。

(二) 萘之氧化作用之理論

董斯 (C. R. Downs) 對於萘氧化之步驟，已有詳細的解釋。他是根據化合物的構造以解釋萘氧化之各步驟。他的意見，可由下列方程式表明：



在上面方程式裏，一環之一部份氧化成醌 (Quinone) 之構造，(以線斷 (a) 表明) 再氧化而成苯二甲酸酐。了烯二酸酐為此作用之一副產物，是從萘醌分子內之未氧化環氧化 (沿小點 (c)) 而成。由上二點，我們可以知道，這環的分裂，係經過「間位」之單鏈而容丁烯二酸酐及苯二甲酸酐中之複鏈依然如故。第二副產品——苯甲酸——是從萘醌沿 (b) 線 (點線連合線) 再氧化而成，只經過單鏈，不過相成「對位」。兩個氫原子須移入新位置，方可解釋苯甲酸生自萘醌之原理。但是苯甲酸也可從苯二甲酸分解，放出二氧化碳後而得，董斯還是贊成最後的一種解釋。實際的試驗，確已證明苯甲酸是可由苯二甲酸酐的氧化而得到的。

(三) 一九二八年前萘之氧化方法概略

(I)　以五氧化釩為接觸劑，萘可氧化而生苯二甲酸酐　當萘在空氣中氧化而生苯二由酸酐時，所用的接觸劑——五氧化釩——須精細磨碎，置於器中，與將作用之氣體接觸，則氧化作用甚速。

(II)　萘在醋酸溶液中氧化所用氧化劑為二氧化二氫　察銳爾 (Charrier) 與摩格 (Moggi) 發明一新方法，從萘產生苯二甲酸。他們的方法於下：

萘十克，冰醋酸二百立方糎，二氧化二氫三十立方糎，混合後，任其迴歸蒸餾；再於規定時間，加入二氧化二氫，使其在混合液內之總體積為二百立方糎。當此混合體迴歸蒸餾六十時後，先冷之；再濾之。並蒸發至其原有體積之三分之一，換言之，使其體積減至一百三十四立方糎。然後加水少許，并使其沉澱溶於濃炭酸鈉溶液。復加濃鹽酸少許，以中和過量之炭酸鈉，然後再使已溶解之沉澱，在沸水中。又成結晶體。此結晶即 β— 苯二甲酸。

(III)　以釩酸錫或釩酸鉍為接觸劑，萘可氧化成苯二甲酸　麥克斯持得 (E. B. Maxted) 曾以釩酸錫或釩酸鉍為接觸劑，使萘在空氣中氧化而成苯二甲酸。

(A)　釩酸錫接觸劑是從牠的沉澱鹽變乾後而得。牠在低溫度才活潑。因之凡是只能在低溫度氧化的東西，都可用牠來做接觸劑。

萘以釩酸錫為接觸劑氧化時，有三點要留意：

(a)　最宜溫度是在攝氏二百六十至二百八十度之間。如溫度太低，則萘醌開始生成，而產品遂帶黃色。

(b)　如欲得多量的產品，則於萘氧化時，加入多量的空氣。

(c)　在此氧化作用中，可得百分之八四，三的產品。

(B) 以釩酸鈊爲氧化作用中之接觸劑時，所得結果與用釩酸錫同。不過釩酸鈊要比釩酸錫高一百度方能促進氧化作用。

萘以釩酸鈊爲接觸劑氧化時，有兩點要注意：

(a) 最宜溫度爲攝氏三百五十至三百八十度。

(b) 在此氧化作用中，可得百分之八四的產品。

(IV) 苯二甲酸之化純法

苯二甲酸或其酸酐，自萘氧化取得後，使其蒸氣與適當之固體如浮石，膠性的二氧化矽，活性炭或異極鑛石等，接觸，則可轉雜爲純。

(四) 一九二八年後，萘氧化法的新發展

(I) 緒言

簡單的說，最近萘氧化法的新發展，是很少的。這原因有二：(一)因研究這個方法的人很少；(二)雖然有很少的人研究，但是大家都保守祕密的。後來，還是很多的文庫裏面，得着幾個新方法：在這幾個方法裏面，用不同的東西，或是幾個東西的混合體，爲接觸劑；對於氧化時所用的接觸器，也有特殊的規定；節制溫度的方法，也有了計劃；產品的化純法，也曾加以改良。

(II) 氧化萘的新方法

(A) 自萘氧化成苯二甲酸

導萘與空氣(或其他氧化劑)之混合體速經一狹管口，而與一極熱之平面相接觸，此熱平面爲一接觸劑所製成，或含有接觸劑，則苯二甲酸，就可產生。

(B) 用白金網爲正極，藉電力使萘氧化成 α— 萘醌。

華特與勞威 (White and Lowy) 用一新電極，藉電化作用，以氧化萘。他們依着下列三點，得百分之三〇•(三〇•三七)三七的 α— 萘醌。

(a) 溫度——攝氏二十四至二十六度。

(b) 置白金網之正極於百分之一硫酸溶液內。

(c) 正極的電流密度爲每平方粉 0.861 安培。

(III) 以各種不同的東西，或幾種東西的混合體爲接觸劑。

(A) 一種氧化物或氫氧化物與一種鹼金屬化合物或鹼土金屬化合物之混合體，可以爲接觸劑。

苯二甲酸酐之產生，在使萘與一種能氧化的氣體（如空氣）作用；所用之接觸劑除含一氧化物或氫氧化物外，尚須有一種（自少一種）鹼金屬化合物或鹼土的屬化合物爲接觸劑，如氯化銫 (CsCl)。

(B) 含有沸石 (Zeolite) 之接觸劑

(a) 使萘氣與一種能氧化之氣體（如空氣）作用，同時用含有沸石之混合物爲接觸劑，則可產生苯二甲酸酐。

(C) 以鹽基交換之非矽質物爲接觸劑

使萘氣與一種能氧化的氣體(如空氣)作用，同時用一適當物體含有一種（自少一種）鹽基交換之非矽質物的化合物爲接觸劑。此非矽質物的化合物，是從鹽基交換之非矽質物和釩化物作用得來的。如此則可得苯二甲酸酐。

(D) 以五氧化釩爲接觸劑

格銳音 (S. J. Green) 對於用五氧化釩爲接觸劑以氧化萘之作用，頗有研究；茲申論之。

(a) 重要條件：

(i) 當萘與空氣遇五氧化釩而起作用時，須用多量的空氣去分散作用中之熱。格銳音所用的空氣比應需之量，多六至七倍。由下面方程式，可知應加多少空氣之理：

$$C_{10}H_8+9[O] \longrightarrow C_6H_4(CO)_2O+2CO_2+2H_2O$$

如用少量的空氣時，則氧化不完全，得深黑的產品，並含有未變化的萘與 α－萘醌；充分之空氣時，所得的產品，爲無色爲結晶體。如空氣愈少，或用不適當的接觸劑，則必產生多量的 α－萘醌。

(ii) 所用的萘，須很純潔。牠的沸點，是攝氏 80 度。

(iii) 所用的接觸劑，是一百克的小粒浮石，和十五克的釩酸錏之混合體置之於作用管之中部。在未氧化萘之前，先將熱空氣慢慢通入此作用管，使其成五氧化釩。

(iv) 在一小時內，須通入一百四十研的空氣。

(b) 氧化萘的簡單步驟

導濾過綿絨之空氣，經熱萘之表面，旋經一熱管以達接觸劑之作用管。作用後之產品，係以一廣闊空氣凝冷管取得，這凝冷管之他端，須塞有綿絨。實驗完竣後，用空氣將所得之苯二甲酸酐送入空氣凝冷管內。然後使其溶解於熱水中，而以一法鹼溶液去滴定之，滴定時所用之指示劑爲斐諾夫他林 (Phenolphthalein).

(C) 結果

格銳音之試驗結果，示明以新製成的五氧化釩爲接觸劑時，則在攝氏二百五十至二百七十度之間，萘始緩慢氧化。如温度增高，則氧化作用加速，局部燃燒以成苯二甲酸酐，並同時全部燃燒以成二氧化碳和水。在攝氏三百四十至三百七十度時，則所用接觸劑之活潑性頗能特久。因之可得百分之 66.2 的純潔苯二甲酸酐。

(IV) 萘氧化時，所用之接觸室之質料

(A) 萘氧化時，所用之接觸室，爲鎳所製成，因鎳在萘氧化時，不易受氧化，或爲鋁所製成，因鋁之氧化物，鹽基性頗弱，不致與苯二甲酸酐作用以生苯二甲酸鹽。通常接觸室之材料可爲鉻，銀，鎳鉻鉄之合金，矽鉄之合金，或鉻鎢鈷之合金等製成。在此種接觸室內作用後，所得之產品，不致含有丁烯二酸。

(B) 尙有一法，萘氧化時，所用接觸室之質料如 (A) 大致相同。不過係接觸室內部的四週，用鉻，銀或鎳等金屬製成而已。

(V) 萘氧化時溫度之節制

(A) 副接觸劑 (Promoters) 之採用

萘氧在空氣中氧化 (以五氧化釩爲接觸劑) 以成苯二甲酸酐時，發出巨量之熱。若吾人不能去此熱，或使散佈於作用混合體之全部，或加一惰性物於接觸劑內，則所成之酸酐必受影響而氧化。且所用之五氧化釩亦同時還原爲較低之鹼性氧化物，而與苯二甲酸酐化合，於是全部作用完全被毀。通常免去此患之法，在加入一種酸性物質，如氧化鉬，氧化鎢，氧化鈽，氧化鉻或氧化鈾等爲副接觸劑，使之與接觸劑混合，或加二氧化硫於作用氣體中。

(B) 合金之採用

導空氣與萘氣之混合體經 425°C. 之五氧化釩接觸劑，然後以沸點爲 425°C. 之合金節制此作用所生之巨熱，此合金現由 30% 鉛 30% 錫與 40% 鍒所合成。當此合金收熱時，鍒氣升入一迴歸之空氣凝冷器內，復凝聚而流回於盛此合金之容器中，惟此合金之組成與沸點須保持常住。

(VI) 發爾賓因德 (Farbinind) 先前所用之化純法之改進

萘氣與空氣之混合體氧化後，卽使之與固體之物質 (如碎浮石或水礬土礦石) 相接觸，如此則所得之苯二甲酸酐，頗爲純潔。因浮石與水礬土礦石在高温度不變，且可吸去一切的雜質。

(五) 對於將來發展之揣測

(I) 緒 言

在未揣測以前，有數點須注意：

(A) 苯二甲酸酐既爲製造蒽醌之需要品，故吾人於氧化萘時，須側重於盡量得苯二甲酸酐。是以吾人須設法減少萘醌，丁烯二酸酐，苯甲酸等副產物之產量。

(B) 須用適當及有效力之接觸劑，與適合接觸室質料。

(C) 節制溫度一事，非常重要；因溫度太高，則產生多量的二氧化碳和水；溫度太低，則產生多量的萘醌。

(D) 須用適當之吸凝劑以化純苯二甲酸酐。

(II) 據以上四點而論，可得下列之揣測

(A) 論萘氧化時所需之接觸劑，則釩酸錫似較五氧化釩爲佳；若以釩酸錫與適當之副接觸劑如週期表之第六類 (a) 中之金屬之氧化物結合後，其效力格外增加。同時，作用溫度，得達攝氏四百至四百五十度左右，可使萘醌之產量減至極少，使苯二甲酸酐之產量增至極多。且所產之二氧化碳和水之量也不致於增加；蓋因副接觸劑之功用極大，不但增加接觸劑之效力，且使主要之接觸劑變稀，因可分散巨量之作用熱，以防苯二甲酸酐氧化成二氧化碳和水。

(B) 因欲防止苯二甲酸酐在高溫度氧化，故須用凝冷器以去作用之熱，而同時保持作用溫度不變。合金可用，惟其價太昂。

(C) 所用空氣與萘之比，宜乎一定（不得超過十五份氧氣與一份萘之比）。如空氣之量太多，則產生多量之丁烯二酸酐，且同時易使苯二甲酸酐氧化成二氧化碳和水。用矽鉄製成之接觸劑室，可以防止丁烯二酸酐之產生。

(D) 吸凝劑如膠性二氧化矽，漂白土，礬土，水礬土等，可以用來除去苯二甲酸中之雜質。倘所得之苯二甲酸頗純，則爲節省起見，吸凝劑可以不必用。

廣東石灣陶泥分析

劉策余

我國素以陶器著名，出品遍於全國，尤以江西之景德，江蘇之宜興，廣東之石灣諸地爲最盛。所產陶泥之品質，往往因地而殊，而各具有優點；欲研究其優點，必先從其成分探討，及考其製造之方法。惟後者乃屬工程問題，非本篇範圍所及，茲不具論。

江西江蘇安徽及湖南等省之陶泥分析，已見於中央研究院之詳細報告。惟廣東一隅，尙付缺如。茲謹就廣東石灣陶泥研究之。此外該省之韓江一帶，亦爲陶泥之產地，惜採取樣本不易，未能加以研究，誠屬憾事。(按韓江陶場，曾聘國內專家從事研究，其公開報告，不日諒可刊行矣)。

(一) 石灣陶泥概況

石灣位於廣東南海縣西北，去廣州不遠，接近佛山，交通頗便。出產多爲日用品，銷行廣東廣西福建及南洋諸地，卽上海市面亦常見之。價廉適用，中下之家，尤樂用之。攷廣東南海縣縣誌，載有石灣所產之陶器；形製古樸，有百級紋者。在江西窰之上，餘則日用品耳。

該地產泥四種，每以泥殊而出品亦異。試樣四種，得諸該地陶窰商。且得該地場工以內容概略見告。

(A) 原料之採鍊：　原料皆產於該地，間或雜以附近出產者，然爲數甚徵。柸料則採取附近田山者。採法與外處同，明採者多，間有暗採者。鍊泥之法，略分爲三步：

(1) 粉碎：　原料初出土，常作硬塊狀，應擣之粉碎使得混合平均，此項工作，多用人力。

(2) 水簸：　陶泥雖作粉碎狀，但仍雜有粗粒，應使其分離。其法將粉碎之泥傾入池或桶中，加水攪拌，粗粒下沈，較細者與水混合成漿，浮於上部，再將此泥漿，注入他器，復加水攪拌，仍將上層移出。如是數次，最後使泥質盡行沈澱，與水分離。粗細泥質，得以分別。此項工作，適用於製造精細器物；其用於粗器者，可不需此。

(3) 鍊泥：　此爲最後而最重要之一步，成器之優劣，端視鍊泥之適當與否。法將沈澱之泥待其乾濕適度時，卽用木桿，用力不絕拍擊之，使其泥質發膠黏性。所製器之粗細，均經此法。攷諸國內，凡產陶器之地，其鍊泥之法，莫不大同小異，此殆陶業必經之步驟歟？苟能利用機械，改良工作，出品必較精良也。

(B) 坯料之配製：　各地陶器，因泥而異；間有須配合者，陶泥色澤不同，成分亦不一。配合得宜，成器當堅實美觀。惜各陶場於其配合之法，多秘不示人，無從調查，斯爲憾耳。

(二) 陶泥化學分析

本篇分析方法，依 Thorp's 氏之『化學實用字典』內之陶泥分析法，及 Mahin's 氏之『定量分析』內之矽酸礦分析法，參與 Scott 氏之『標準化學分析法』其法略及於下：

各樣本先用瑪瑙磨砵，研成粉末狀，然後置入汽爐乾之。熱度須攝氏百二十度，冷後分別舉行下列分析法。

(1) 灼熱後之減重：　稱乾泥置已知重量之鉑坩堝內，用本生燈炙燒至紅熱。約一小時後，冷後稱之。所失之重，卽爲灼熱後之減重。

(2) SiO_2 之考驗：　稱乾泥及五倍其重之溶濟物 (Na_2CO_3 及 K_2CO_3)，混合平均。置鉑坩堝內，加高熱溶化之。冷後加水，倒置於另一蒸發盃內，洗其坩堝，洗液亦置蒸發盃內。加 HCl 待其起泡停止，加緩熱蒸發使乾。冷後復加小量濃 HCl，最後用水過濾。濾下之液另貯之，以作其他考驗。洗所得之沈澱，乾後炙燒，冷而稱之：此卽 SiO_2 及 TiO_2。將 TiO_2 之量減去，所得之量爲 SiO_2。

(3) TiO_2 之考驗：　將 HCl 之沈澱炙燒後，冷而稱之，復加濃 H_2F_2，及微量之 H_2SO_4，緩熱乾之。所得之淡赭色結晶體爲 TiO_2，稱之爲 TiO_2 之量。

分 HCl 之濾液爲二份，以一作 Fe_2O_3 之考驗，一作 Al_2O_3, CaO 及 MgO 之考驗。

(4) Fe_2O_3 之考驗：　將 HCl 之濾液，加 $SnCl_2$ 使濾液失其黃色，復加 $HgCl_2$ 及 $KMnO_4$ 之標準液滴定之，$MnSO_4$ 必須加在滴之前。由所用之標準液，計算 Fe_2O_3 之值。

(5) Al_2O_3 之考驗；　將 HCl 之濾液，加略多之 NH_4OH。熱之至沸，使其沈澱。此項沈澱物，包有 Al_2O_3, Fe_2O_3 及 MnO。過濾洗之，乾後炙燒，冷後稱之。將 Fe_2O_3 及 MnO 等量減去，所得爲 Al_2O_3 之量。過濾及洗液另貯之，以作 CaO 及 MgO 之考驗。

(6) MnO 之考驗：　稱另一乾泥，加 H_2SO_4 及 HNO_3 之混合酸，熱之使沸；再加小許，繼續沸之，冷後加稀 $AgNO_3$ 與 $(NH_4)_2S_2O_8$ 及稀 NaCl 液，用 Na_2HAsO_3 之標準液滴定之。由所用之標準液，計算 MnO 之值。

(7) CaO 之考驗： 將 NH_4OH 之濾液，蒸發使濃，加 $(NH_4)_2C_2O_4$ 液，經若干時後，有白色之沈澱。此爲 CaC_2O_4 濾過保存其液，洗其沈澱，用強熱炙燒之，將 CO_2 逐去，冷後稱之，其重卽爲 CaO。

(8) MgO 之考驗： 將 $(NH_4)_2C_2O_4$ 之濾液加熱蒸發使濃，加 Na_2HPO_4 使之沈澱，此爲 $Mg_2P_2O_7$ 濾過洗之．乾後炙燒如前，冷後稱之，從 $Mg_2P_2O_7$ 之重，計得 MgO 之値。

(9) K_2O 及 Na_2O 之考驗： 稱乾泥與再昇華之 NH_4Cl 參於瑪瑙磨砵內研之。再加約六倍其重之 $CaCO_3$ 重研之，移入鉑坩堝內，用本生燈燒之約十數分鐘，使 NH_4Cl 完全熔化，然後增至紅熱，繼續約三刻鐘之久。加紅熱時應蓋堝口。冷後移入蒸發盃。洗鉑坩堝，洗質亦歸入蒸發盃內。加水熱之至沸，過濾洗之。加 HCl 於沈澱質，使其熔解。將此二種混合液，蒸發使濃，加小許 NH_4OH 及適當之 $(NH_4)_2CO_3$，略置之，過濾 濾液置於已知重量之蒸發盃內。緩熱蒸發至乾，復將 NH_4Cl 用暗紅熱逐去炙乾之。冷後稱其重，此爲 KCl 及 $NaCl$ 也。用煖水溶解之，$NaCl$ 溶解較易，移其液，復乾之，此爲 KCl. 冷後稱之，以最先之重量，減去 KCl 得 $NaCl$ 之重矣。

用熱水溶解 KCl 加 $HClO_4$ 蒸之使其結晶，此項結晶物爲 $KClO_4$ 乾於汽爐內，冷後稱之。由所得之重，計算出 K_2O 之値矣。復由 $NaCl$ 之重算出 Na_2O 之値，二者之和爲 K_2O 及 Na_2O。

本篇所用之試樣，得諸該地陶場，據稱可代表該地出產。試樣共四種：

(1) 嫩紅泥： 色微紅而赭，與宜興之紅假土相若，狀頗密緻，磨研時覺其質甚細膩。灼熱後，顏色褐紅，以其含鐵較多也。用以製造裝飾細品，如檀香爐等之高價陶器。

(2) 次紅泥： 色較嫩紅泥略深，亦頗密緻。磨研時覺其質亦細軟。灼熱後色成深赭，含鐵更多也。成器多爲日常用品如茶壺水缸等類。

(3) 嫩白泥： 色呈黃灰，質地不純一，間雜有粗粒及植物纖維。磨研時覺其質細而不滑。灼熱後，成微赭色，含鐵較小。成器如碗碟花瓶等細器，所成陶器頗能暢銷。

(4) 次白泥： 色作淡灰，質亦不純一，雜有粗砂及白粒。磨研時覺其質頗細而不柔。灼熱後，則呈微赭色惟較深於嫩白泥。所成陶器，多屬粗品，器之表面見粗粒狀，硬度較強。用作瓦煲（廣東省流行之爨具）及建造（如瓦筒屋脊水槽）等類頗有銷路。

分析結果爲二次試驗之平均數

陶泥化學成分

	SiO_2	AL_2O_3	Fe_2O_3	TiO_2	MnO	CaO	MgO	K_2O 及 Na_2O	灼熱減量	總計
(一) 嫩紅泥	64.96	17.31	6.12	0.49	0.03	0.34	0.95	2.51	5.14	97.85
(二) 次紅泥	62.35	19.26	6.22	0.41	0.05	0.37	0.82	2.13	6.15	97.76
(三) 嫩白泥	64.95	20.43	2.85	0.58	0.06	0.23	0.49	1.98	8.35	99.92
(四) 次白泥	66.68	19.30	1.79	0.42	0.05	0.31	0.13	1.73	8.59	99.00

紅泥二種，色素略同，成分亦相差無幾。白泥色亦相類，成分頗接近，故石灣陶泥，或可簡分爲二類。

(三) 討論

(A) 陶泥之種類

陶泥因產地而殊，卽同一名稱，成分亦有不同者。然每據有其特殊之點。今就石灣所產而論，以色素言，本有四種，紅白各二；就成分論，則類爲二，紅泥二種，屬未堅硬之頁巖，所含 Fe_2O_3 獨多，二者相差不遠，卽 SiO_2 及 Al_2O_3 含量亦極接近。餘亦相類，獨顏色稍異，成器亦不同耳。白泥亦二種類似燒瓷用之易熔巖，含鐵較小。二者成分亦接近，可歸於一類。論者謂陶泥之優善，視其含 Al_2O_3 之多寡。如是則石灣所產，當以後二者較優矣。

(B) 灼熱後之陶泥成分

陶泥成分，除去灼熱後之減量，估計其紅熱後之化學成分。以百分表之，以作陶業配合坯料之參考：

陶泥灼熱後之成分

	SiO_2	AL_2O_3	Fe_2O_3	TiO_2	MnO	CaO	MgO	K_2O Na_2O
(一) 嫩紅泥	70.07	18.67	6.60	0.52	0.03	0.35	1.03	2.70
(二) 次紅泥	67.76	20.82	6.71	0.44	0.05	0.40	0.89	2.31
(三) 嫩白泥	70.92	22.31	3.11	0.63	0.06	0.25	0.53	2.16
(四) 次白泥	73.75	21.34	1.97	0.46	0.05	0.34	0.14	1.91

(C) 陶泥分子分式，耐火熔線圖及耐火係數

用 Ludwing 氏之陶泥分子分式之法求出 YRO : Al_2O_3 : $XSiO_2$ 以決其耐火熔線。復用 Bischof 氏之耐火係數法求其結果。

分子分式

(1) 嫩紅泥 0.857 RO : Al_2O_3 : 6.36 SiO_2

(2) 次紅泥 0.749 RO : Al_2O_3 : 5.66 SiO_2

(3) 嫩白泥 0.438 RO : Al_2O_3 : 5.39 SiO_2

(4) 次白泥 0.316 RO : Al_2O_3 : 5.85 SiO_2

Ludwing 氏之耐熔線已在三十號謝荀錐 (Segerconc) 之外，未能引爲討論。從 Bischof 氏之耐火係數，其數皆不及一，故石灣陶泥不可稱爲耐火土。

(D) 長石類嚴石之熔化係數

石灣陶泥誠非耐火土，已證於上節。今從熔化係數研究之。據 H. A. Seger 氏所研究之結果，以分子比，得計算其熔化係數：

$$熔化係數=\frac{Al_2O_3之(0)}{RO之(0)}\times\frac{SiO_2之(0)}{Al_2O_3之(0)}$$

$$=\frac{SiO_2之(0)}{RO之(0)}$$

在易熔之土石其熔點似與 Al_2O_3 之成分無關，此上公式可窺之矣。

計算結果

	熔化係數 F. Q.
(1) 嫩紅泥	14.83
(2) 次紅泥	15.10
(3) 嫩白泥	29.06
(4) 次白泥	36.79

此就化學成分之熔化係數而言，至其組織疎密，顆粒大小，始未廉顧。此項推測不若耐火係數之可靠。就其公式論之，以作參考。

(E) 陶泥中之雜質

泥中含鐵多寡，在熱燒中，不同溫度之氧化，能生五彩不同顏色。石灣陶泥色澤分別顯著，其爲含鐵量不同也。TiO_2 在陶泥中本有降抵熔點可能，據 Rises 氏之研究，0.5% 足以降半個謝苟錐 (Seger Conc), 1.5% 可降至一個；復亦可使陶柸成深青灰色。然在分析結果 TiO_2 成分不足 0.6% 似無影響陶泥也。餘若 MnO, 及 MgO 成分不多。與國內所產無大差異。鹼量本影響鐵之光澤，復與成器之軟硬有互相關係。我國所製之陶器與歐洲出品，雖然原料相若，我國製品較爲易熔，此無他含鹼量較多耳。石灣陶泥，鹼量旣小，最高者不過 3% 若能加意提鍊，或可更抵，成器當更有進步。

（四） 結論

陶器之研究，雖不能專從化學成分，可解決一切，然在成分此例上及鑛物雜質，實有重大關係。且可推測其耐火，熔化等係數以作進步參考。

本篇所論，從分析之結果，石灣陶泥適合國內製陶家之原料，更勵該處陶窰各戶，求改進之方，則我國陶業或不至衰落也。

（本篇本爲畢業論文之改作，得容主任之同意，其中間有簡略者，不當之處尚多，幸爲識者指敎）

力學原理之研究

吳逸民

晚近自然科學有一共同之趨勢；此趨勢維何？曰自然科學之數學化。數學之特性，要而言之，是系統森嚴，推理周密；蓋以少數至爲淺明之原理爲基，其他之理皆可用邏輯方法由此推論得之。我們倘承認其原理，卽不得不承認此推論之結果，此由於思想之必然性，不容懷疑者。自然科學中發達最早者首推力學，故其數學化之程度亦最深。力學中之最高原理爲漢密頓 (Hamilton) 原理，其他如歐益累 (Euler) 及耶可比 (Jacobi) 原理亦佔有重要之地位；蓋以歐氏或耶氏之理爲基，力學定律亦可推論得之。惟漢氏原理範圍最廣，應用最便，故世人常喜用之。

以上三種原理，皆須用變分之法表而達之。因此之故，本篇第一節所論者爲變分問題之討論；然後用之以立漢氏原理，更由漢氏原理推論力學中之重要定理；最後復用第一節中之理論以闡明漢歐耶三氏原理彼此之關係。

第一節　變分問題之討論

在本節中不妨先說一說變分理論內容的梗概。變分理論乃今日方興未艾的一種理論，它在數學上佔着一個極重要的地位；其主旨在於討論並解決極大極小問題。普通微積分學中所討論的極大極小問題，目的在於決定某一給與函數 $y=f(x)$ 中自變數的數値，務使此決定後之數値代入所給與之函數 $y=f(x)$ 中而能使之得有極大或極小之値，此種問題之解決屬於代數方程中所討論者。若夫變分理論，其中所論究者，則與此殊異。代數方程之解，目的在於決定自變數之數値；變分理論中所論的問題則在於決定未知函數，務使此決定後函之數代入定積分如 $\int_{x_1}^{x_2} F(x\ y\ y')\ dx$ 中而能使此定積分得有極大或極小之値。

Euler 於一七四四年發明如下之定理：任何函數 $y=f(x)$ 如適合

$$J=\int_{x_1}^{x_2} F(x\ y\ y')\,dx = \text{極小量}\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(1)$$

必同時適合方程式

$$\frac{d}{dx}\frac{\delta F}{\delta y'}-\frac{\delta F}{\delta y}=0\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(A)$$

(A) 普通稱曰 Euler 微分方程。至於其如何推演而得，高等微積分學及變分理論書中均有證明，此處從略。

今有一變分問題於此，我們可用一種移換的方法引進到一個新的問題。所謂甲問題與乙問題爲同性，其意卽甲問題之 Euler 方程式同於乙問題之 Euler 方程式。易言之，甲如得解，乙亦得解，反之亦然。這兒我們所要着手討論的問題，可以從兩個完全相反的方向出發，而論究其爲同性與否。此所謂兩相反方向者何？曰（一）以某種移換的方法，將原有問題中之未知函數（unknown function）加多，同時減低其微分次數（order of derivative）（二）以某種移換的方法將原有問題中之未知函數減少，同時增高其微分次數。茲依次論之如下。

原問題
$$\int_{x_1}^{x_2} F\,(x\,y\,y')\,dx = \text{極小量}\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(1)$$

$$y' \equiv \frac{dy}{dx}$$

此處之問題在於決定未知函數 $y(x)$, 務使 (1) 適合。

今令 $y'=p$, 代入 (1) 中則

$$\int_{x_1}^{x_2} F\,(x\,y\,p)\,dx = \text{極小量}\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(2)$$

在 (1) 式中出現之 $y(x)$ 的導微函數不復出現於 (2). (2) 中之 $y(x)$ 及 $p(x)$ 爲未知函數。此處之問題在於決定 $y(x)$ 及 $p(x)$, 務使 (2) 式適合。

茲引進新函數 $\lambda(x)$, 立一問題如下

$$\int_{x_1}^{x_2} [\,F\,(x\,y\,p) + \lambda(x)\,(y'-p)\,]\,dx = \text{極小量}\ldots\ldots\ldots\ldots(3)$$

其中之 $y(x)$, $p(x)$ 及 $\lambda(x)$ 爲未知函數，均待決定。(3) 式與 (1) 式爲同性，易言之，(3) 之 Euler 方程式同於 (1) 之 Euler 方程，(3) 如得解，(1) 亦得解。證明：

(1) 之 Euler 方程式爲

$$\frac{d}{dx}\frac{\delta F}{\delta y'} - \frac{\delta F}{\delta y} = 0\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(a)$$

(3) 之 Euler 方程式爲

$$\frac{d}{dx}\frac{\delta F}{\delta y'} - \frac{\delta F}{\delta y} = 0$$

卽
$$\frac{d\lambda}{dx} - \frac{\delta F}{\delta y} = 0\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(b_1)$$

又 $$\frac{d}{dx}\frac{\delta F}{\delta p'}-\frac{\delta F}{\delta p}=0$$

即 $$\frac{\delta F}{\delta p}-\lambda=0 \quad\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (b_2)$$

又 $$\frac{d}{dx}\frac{\delta F}{\delta\lambda'}-\frac{\delta F}{\delta\lambda}=0$$

即 $$y'-p=0 \quad\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (b_3)$$

從 (b_3) 得 $$y'=\frac{dy}{dx}=p$$

以之代入 (b_2) 得 $$\frac{\delta F}{\delta y'}-\lambda(x)=0$$

移項後 $$\frac{\delta F}{\delta y'}=\lambda(x)$$

再以之代入 (b_1) 則得 $$\frac{d}{dx}\frac{\delta F}{\delta y'}-\frac{\delta F}{\delta y}=0$$

此乃 (1) 式之 Euler 方程式。故知 (3) 與 (1) 爲同性。

若以上面所得 $\lambda(x)=\frac{\delta F}{\delta y'}$ 代入 (3) 式中則得

$$\int_{x_1}^{x_2}\left[F(xyp)+\frac{\delta F(xyp)}{\delta p}(y'-p)\right]dx=\text{極小量}$$

或簡寫之爲 $$\int_{x_1}^{x_2}\left[F(xyp)+F_p(xyp)(y'-p)\right]dx=\text{極小量}\ldots\ldots(4)$$

(4) 與 (1) 爲同性，證明：

(4) 之 Euler 方程式爲

$$\frac{d}{dx}\frac{\delta F}{\delta p}-\frac{\delta F}{\delta y}-(y'-p)\frac{\delta^2 F}{\delta p\delta y}=0$$

簡寫之爲 $$\frac{d}{dx}F_p-F_y-(y'-p)F_{py}=0\ldots\ldots\ldots\ldots(C_1)$$

又 $$\frac{\delta F}{\delta p}+(y'-p)\frac{\delta^2 F}{\delta p^2}-F_p(xyp)=0$$

即 $$(y'-p)F_{pp}=0$$

從 (C_2) 得 $$y'-p=0$$

或 $$F_{pp}=0$$

但據 Legendre 之條件 $F_{pp} \equiv \frac{\delta^2 F}{\delta P^2} \neq 0,$

故知 $y' - p = 0$ 卽 $y' \equiv \frac{dy}{dx} = 0.$

以 $y' = p$ 代入 (c_1) 得 $\frac{d}{dx} F_{y'} - F_y = 0$

此乃 (1) 之 Euler 方程式也；故知 (4) 與 (1) 爲同性。

今命 $F_p (x y p) = \pi (x y p)$

由此可得 $p = p (x y \pi)$

以 $p(x y \pi)$ 代入 $F(x y p)$，則

$$F (x y p) = \overline{F} (x y \pi)$$

$\overline{F}$ 卽 $F (x y p)$ 中之 p 易以 π 之結果。

次命 $-\overline{F} + \pi p = L (x y \pi)$

以之代入 (4) 式中，消去 p，則

$$\int_{x_1}^{x_2} [F (x y \pi) + \pi (y' - p)] dx = \text{極小量}$$

卽
$$\int_{x_1}^{x_2} [(\pi p - L) + (\pi y' - \pi p)] dx = \text{極小量}$$

簡之得
$$\int_{x_1}^{x_2} [\pi y' - L (x y \pi)] dx = \text{極小量} \ldots\ldots\ldots\ldots (5)$$

(5) 乃由 (4) 誘導之結果，故當然同性於 (1).

(5) 之 Euler 方程式爲

$$\frac{d}{dx} \frac{\delta F}{\delta \pi'} - \frac{\delta F}{\delta \pi} = 0$$

卽 $-\left[y' - \frac{\delta L}{\delta \pi}\right] = 0$ 或 $y' - \frac{\delta L}{\delta \pi} = 0$

卽
$$\boxed{\frac{dy}{dx} = \frac{\delta L}{\delta \pi}} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (\alpha_1)$$

又 $\frac{d}{dx} \frac{\delta F}{\delta y'} - \frac{\delta F}{\delta y} = 0$

即 $$\boxed{\frac{d\pi}{dx}+\frac{\delta L}{\delta y}=0}\cdots\cdots\cdots\cdots(\alpha_2)$$

(α_1) 與 (α_2) 在力學上佔着一個重要的地位，容後詳論。

上面 (1) (2) (3) (4) (5) 各式，推廣並普遍化，則得如下之結果。

令 $x(t)=x_1(t)$ $y(t)=x_2(t)$ $z(t)=x_3(t)$

$x(t)$ $y(t)$ $z(t)$ 爲未知函數，均待決定。

$$\int_{t_1}^{t_2} F\ (t\ X_1\ X_2\ X_3\ \dot{X}_1\ \dot{X}_2\ \dot{X}_3)\ dt=\text{極小量}\cdots\cdots\cdots\cdots(1')$$

式中 $\dot{X}_1=\frac{dx_1}{dt}$ $\dot{X}_2=\frac{dx_2}{dt}$ $\dot{X}_3=\frac{dx_3}{dt}$

(1') 之 Euler 方程式爲

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\delta F}{\delta\dot{X}_i}\right)-\frac{\delta F}{\delta X_i}=0 \qquad i=1, 2, 3.$$

令 $\dot{X}_1\equiv P_1$ $\dot{X}_2\equiv P_2$ $\dot{X}_3\equiv P_3$

以之代入 (1') 式則得

$$\int_{t_1}^{t_2} F\ (t\ X_1\ X_2\ X_3\ P_1\ P_2\ P_3)\ dt=\text{極小量}\cdots\cdots\cdots\cdots(2')$$

X_i (t) 及 P_i(t) 爲未知函數，均待決定； $i=1, 2, 3.$

茲引進新函數 λ_i(t), 立一問題如下：

$$\int_{t_1}^{t_2} F\left[F\,(t\ X_i\ P_i)+\sum_{i=1}^{3}\lambda_i(t)\left(\dot{X}_i-P_i\right)\right]dt=\text{極小量}\cdots\cdots(3')$$

其中 X_i(t) P_i(t) 及 λ_i(t) 爲未知函數，均待決定。

(3') 之 Euler 方程式爲

(a_1): $$\frac{d}{dt}\frac{\delta F}{\delta\dot{X}_i}-\frac{\delta F}{\delta x_i}=0$$

即 $$\frac{d\lambda_i}{dt}-\frac{\delta F}{\delta X_i}=0\cdots\cdots\cdots\cdots i=1, 2, 3.$$

又 (a_2): $$\frac{d}{dt}\frac{\delta F}{\delta\dot{P}_i}-\frac{\delta E}{\delta P_i}=0$$

即 $$\frac{\delta F}{\delta P_i}-\lambda_i(t)=0\cdots\cdots\cdots\cdots i=1, 2, 3.$$

又 (a_3): $$\frac{d}{dt}\frac{\delta F}{\delta \dot{\lambda}_i}-\frac{\delta F}{\delta \lambda_i}=0$$

即 $$\dot{X}_i-P_i=0 \qquad i=1,2,3.$$

以 (a_2) 之 $Fp_i=\lambda_i(t)$ 代入 (3') 中則得

$$\int_{t_1}^{t_2}F\left[F(t\,x_i\,p_i)+\sum_{i=1}^{3}Fp_i(\dot{X}_i-P_i)\right]dt=\text{極小量} \quad \text{..........(4')}$$

(4') 之 Euler 方程式爲

(b_1) $$\frac{d}{dt}\frac{\delta F}{\delta \dot{P}_i}-\frac{\delta E}{\delta p_i}=0$$

即 $$(\dot{X}_i-P_i)\,Fp_ip_i=0$$

即 $$Fp_ip_i\,(\dot{X}_i-P_i)=0$$

因 $Fp_ip_i \fallingdotseq 0$ 故 $\dot{X}_i-P_i=0 \qquad i=1,2,3.$

又 (b_2): $$\frac{d}{dt}\frac{\delta F}{\delta \dot{x}_i}-\frac{\delta F}{\delta x_i}=0$$

即 $$\frac{d}{dt}\frac{\delta F}{\delta p_i}-\frac{\delta F}{\delta x_i}-(\dot{X}_i-P_i)\frac{\delta Fp_i}{\delta x_i}=0$$

簡之得 $$\frac{\delta F\dot{p}_i}{dt}-F_{x_i}-(\dot{X}_i-P_i)\,F_{p_ix_i}=0 \qquad i=1,2,3.$$

今令 $Fp_i(t\,x_i\,p_i)=\pi_i(t\,x_i\,p_i)$

π_i 中之 P_i 可陽表之， 即 $P_i=P_i(t\,x_i\,\pi_i)$

以 $P_i(t\,x_i\,\pi_i)$ 代入 $F(t\,x_i\,p_i)$ 則

$$F(t\,x_i\,p_i)=\overline{F}(t\,x_i\,\pi_i)$$

$\overline{F}$ 即 F 中之 P_i 易以 π_i 之結果。

又令 $-\overline{F}+\pi_ip_i=L(t\,x_i\,\pi_i)$

以之代入 (4') 中，消去 P_i 則得

$$\int_{t_1}^{t_2}\left[\overline{F}(t\,x_i\,\pi_i)+\sum_{i=1}^{3}\pi_i(\dot{X}_i-P_i)\right]dt=\text{極小量}$$

$$\int_{t_1}^{t_2}[-L+\pi_i P_i+\pi_i\dot{X}_i-\pi_i P_i]\,dt=\text{極小量}$$

簡之，得 $$\int_{t_1}^{t_2}[\pi_i \dot{\chi}_i - L(t\,x_i\,\pi_i)]\,dt = \text{極小量} \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (5')$$

(5') 之 Euler 方程式爲

$$(C_1):\quad \boxed{\frac{d\pi_i}{dt} + \frac{\delta L}{\delta x} = 0}$$

$$i = 1, 2, 3.$$

$$(C_2):\quad \boxed{\frac{dx_i}{dt} - \frac{\delta L}{\delta \pi_i} = 0}$$

上面 (2) (3) (4) (5) 及 (2') (3') (4') (5') 乃以 (1) 及 (1') 爲基，與以某種之移換而得之結果。玆再論一與之相反之移換如下，

原問題：$$\int F(s\,x\,y\,x_s\,y_s)\,ds = \text{極小量} \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (I)$$

x(s) y(s) 爲未知函數，均待決定。$x_s = \dfrac{dx}{ds}$ $y_s = \dfrac{dy}{ds}$

這裏用以移換原問題的方法是週轉的方法 (eyclisch) 所謂未知函數 $y(x)$ 爲週轉 (eyclisch) 意卽出現於原問題中之未知函數 $y(x)$ 本身不復出現於新問題中，同時在新問題中當自變數 $S = S_2$ 時，$y(S_2)$ 不給與之謂。此爲週轉之定義。

玆將原問題 (I) 中之 y(s) 隱之；則 (I)

變爲 $$\int_{s_1 x_1 y_1}^{s_2 x_2 y_2} F(s\,x\,x_s\,y_s)\,ds = \text{極小量} \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (II)$$

$$x(S_1) = x_1 \qquad x(S_2) = x_2$$
$$y(S_2) = y_1 \qquad y(S_2) = y_2$$

玆引進一常數 C, 立一問題如下：

$$\int_{s_1 x_1 y_1}^{s_2 x_2} [F(s\,x\,x_s\,y_s) - cy_s]\,ds = \text{極小量} \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (III)$$

y(s) 爲週轉。

(III) 與 (II) 爲同性；證明；

(II) 之 Euler 方程式爲

$$\frac{d}{ds}F_{x_i} - \frac{\delta F}{\delta x} = 0 \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (a_1)$$

又 $$\frac{d}{ds}F_{y_s}=0 \quad \cdots\cdots\cdots\cdots (a_2)$$

(III) 之 Euler 方程式爲

$$\frac{d}{ds}\frac{\delta F}{\delta x_s}-\frac{\delta F}{\delta x}=0 \quad \cdots\cdots\cdots\cdots (b_1)$$

又 $$\frac{\delta F}{\delta y_s}-C=0$$

即 $$F_{y_s}=C \quad \cdots\cdots\cdots\cdots (b_2)$$

$$(a_1)\equiv(b_1) \quad ; \quad (a_2)\equiv(b_2)$$

於是得

$$\left.\begin{array}{l} \displaystyle\int_{s_1x_1y_1}^{s_2x_2}[F-cy_s]\,ds=\text{極小量} \\ \text{及} \quad \displaystyle\frac{\delta F}{\delta y_s}=C \end{array}\right\} \cdots\cdots\cdots\cdots (IV)$$

以 $C=F_{y_s}$ 代入 (IV) 之上式得

$$\left.\begin{array}{l} \displaystyle\int_{s_1x_1y_1}^{s_2x_2}\left[F-y_s\frac{\delta F}{\delta y_s}\right]ds=\text{極小量} \\ \text{及} \quad \displaystyle\frac{\delta F}{\delta y_s}=C \end{array}\right\} \cdots\cdots\cdots\cdots (V)$$

(V) 稱爲 Euler 方程式。

次從 $\frac{\delta F}{\delta y_s}=C$ 將其中之 y_s 陽表之

得 $$y_s=\varphi(x\ x_s\ c)$$

以之代入上式，消去 y_s，則得

$$\int_{s_1x_1}^{s_2x_2}F(x_s\ x\ s)\,ds=\text{極小量} \quad \cdots\cdots\cdots\cdots (VI)$$

其中 $x(s)$ 爲未知函數，待決定。

(VI) 稱爲 Jacobic 方程式。

第二節 力學上之應用

以數學爲立場來作問題的論究，便得到上面種種的結果。這種由數學方面所得到的種種方程式，對於物理學上各種原理之聯繫及應用到底怎樣呢？這是一個最值得討論而且不許輕輕放過的問題。物理學上的原理以及種種解釋並描寫物質運動現象的運動定律，在數學上表現出來卽成爲少數的微分方程，反之，我們只要將這些微分方程解答了，

我們便可知道物質運動的詳情。現在再讓我們把上面由數學方面所得到的結果對於力學原理的聯繫來作一梗要的論究。

在力學上，漢密登原理 (Principle of Hamilton,) Euler 原理及 Jacobi 原理是被推爲最高的原理的。其中以漢密登原理爲最普遍。以此原理爲基，便可推得能常住定律以及運動定律等箏。同時以數學的方法更可說明這三個原理的互相關係。在先，讓我們將漢密登原理的內容以文字來作一個簡單的敘述。漢密登原理內容對是說；當一粒質 (particle) 受一給與的外力所作用時，其所沿以運動的途徑適使漢密登的積分 (Hamilton's integral) 之數值得有極小量。以數學式表之於下

$$I \equiv \int_{t_0}^{t_1} (T-U)\,dt = \text{極小量} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(A)$$

其中之 T 及 U 卽所謂該粒質之動能及位能是也。

$$T=\tfrac{1}{2}m(\dot{X}^2+\dot{Y}^2+\dot{Z}^2) \qquad \dot{X}-\frac{dx}{dt} \qquad \dot{Y}-\frac{dy}{dt} \qquad \dot{Z}-\frac{dz}{dt}$$

$$U=u(x\,y\,z)$$

I. 從漢密登原理到運動定律

由漢密登原理以數學的方法可以推得運動定律，玆證之如下。

(A) 之 Euler 方程式爲

$$\frac{d}{dt}\frac{\delta(T-u)}{\delta\dot{x}}-\frac{\delta(T-u)}{\delta x}=0$$

$$\frac{d}{dt}\frac{\delta(T-u)}{\delta\dot{y}}-\frac{\delta(T-u)}{\delta y}=0$$

$$\frac{d}{dt}\frac{\delta(T-u)}{\delta\dot{z}}-\frac{\delta(T-u)}{\delta z}=0$$

以 $T=\frac{1}{2}m(\dot{X}^2+\dot{Y}^2+\dot{Z}^2)$ $U=U\ (x\,y\,z)$ 代入各式，則得

$$m\frac{d^2x}{dt^2}+\frac{\delta u}{\delta x}=0 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(a)$$

$$m\frac{d^2y}{dt^2}+\frac{\delta u}{\delta x}=0 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(b)$$

$$m\frac{d^2z}{dt^2}+\frac{\delta u}{\delta z}=0 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(c)$$

(a) (b) (c) 乃運動定律所說的，一般的運動方程式。式上之 m, 表物體的質量，U_x U_y U_z 表 x y z 方向之分力。

II. π 及 L 在力學上的意義

在 (5) 及 (5') 式中出現的 π 及 L 在力學上的意義到底怎樣呢？

$$\pi = \sum_{i=1}^{3} \pi_i = \sum_{i=1}^{3} F_{p_i} = \sum_{i=1}^{3} \frac{\delta(T-u)}{\delta p_i} \qquad P_1 = \frac{dx}{dt}$$

$$P_2 = \frac{dy}{dt}$$

$$= m\dot{X} + m\dot{Y} + m\dot{Z} = m(\dot{X} + \dot{Y} + \dot{Z}) \qquad P_3 = \frac{dz}{dt}$$

$$= \sum_{i=1}^{3} q_i = q = \text{momentum (動量)}$$

故知上面之所謂 π 即物理學上之動量 q.

又 $$F \equiv T-U = \tfrac{1}{2} m(\dot{X}^2 + \dot{Y}^2 + \dot{Z}^2) - U(x\,y\,z)$$

$$= \frac{q_1^2}{2m} + \frac{q_2^2}{2m} + \frac{q_3^2}{2m} - U(x\,y\,z) = \overline{F}$$

$$L = -\overline{F} + \pi_i P_i = -\left(\frac{q_1^2}{2m} + \frac{q_2^2}{2m} + \frac{q_3^2}{2m} - U(x\,y\,z)\right) + \sum_{i=1}^{3} q_i \dot{X}_i$$

$$\dot{X}_i = \frac{dx}{dt} \qquad \dot{X}_2 = \frac{dy}{dt} \qquad \dot{X}_3 = \frac{dz}{dt}$$

$$L = \left(-\frac{q_1^2}{2m} + q_1 \dot{X}_1\right) + \left(-\frac{q_2^2}{2m} + q_2 \dot{X}_2\right) + \left(-\frac{q_3^2}{2m} + q_3 \dot{X}_3\right) + U(x\,y\,z)$$

$$= \left(-\frac{q_1^2}{2m} + q_1 \frac{m\dot{X}_1}{m}\right) + \left(-\frac{q_2^2}{2m} + q_2 \frac{m\dot{X}_2}{m}\right) + \left(-\frac{q_3^2}{2m} + q_3 \frac{m\dot{X}_3}{m}\right) + U(x\,y\,z)$$

$$= \left(-\frac{q_1^2}{2m} + \frac{q_1^2}{m}\right) + \left(-\frac{q_2^2}{2m} + \frac{q_2^2}{m}\right) + \left(-\frac{q_3^2}{2m} + \frac{q_3^2}{m}\right) + U(x\,y\,z)$$

$$= \frac{q_1^2}{2m} + \frac{q_2^2}{2m} + \frac{q_3^2}{2m} + U(x\,y\,z) = \frac{1}{2m} \sum_{i=1}^{3} q_i^2 + U(x\,y\,z)$$

$$= \frac{1}{2m} \sum_{i=1}^{3} m^2 \dot{X}_i^2 + U(x\,y\,z) = \tfrac{1}{2} m \sum_{i=1}^{3} \dot{X}_i^2 + U(x\,y\,z)$$

= 動能 + 位能 = 能總和 (E)

是知上面所謂 L 卽力學上之能的總和 E. 於是，由數學上所得到的

$$\int_{t_0}^{t_1}[\pi_i \dot{\chi}_i - L(t\,\chi_i\,\pi_i)]\,dt = \text{極小量}$$

在力學上則變爲

$$\int_{t_0}^{t_1}[q_i \dot{\chi}_i - E(t\,x_i\,q_i)]\,dt = \text{極小量} \cdots\cdots\cdots\cdots (cr)$$

$$\int_{t_0}^{t_1}[q_i \dot{\chi}_i - E(t\,x_i\,q_i)]\,dt = \int_{t_0}^{t_1}[m\dot{\chi}_i \dot{\chi}_i - (T+U)]\,dt$$

$$= \int_{t_0}^{t_1}[m\dot{\chi}_i^2 - (T+U)]\,dt = \int_{t_0}^{t_1}[2T - (T+U)]\,dt$$

$$= \int_{t_0}^{t_1}(T-U)\,dt = \text{極小量}$$

是知 (cr) 卽漢密登之原理。

(cr) 之 Euler 方程式爲

$$\boxed{\frac{dq_i}{dt} + \frac{\delta E}{\delta \chi_i} = 0}$$

$$\boxed{\frac{dx_i}{dt} - \frac{\delta E}{\delta q_i} = 0} \qquad i=1,2,3.$$

III. 從漢密登原理到能常住定律

從漢密登原理，以數學的方法可以推知運動定律，同樣從此原理出發，我們也可推得能常住的定律。

(cr) 之 Euler 方程式爲

$$\frac{d}{dt}q_i + \frac{\delta E}{\delta x_i} = 0 \cdots\cdots\cdots\cdots (d)$$

又

$$\frac{dx_i}{dt} - \frac{\delta E}{\delta q_i} = 0 \cdots\cdots\cdots\cdots (e)$$

以 $\frac{dx_i}{dt}$ 乘 (d), $\frac{dq_i}{dt}$ 乘 (e), 相減，則得

$$\frac{\delta E}{\delta x_i}\frac{dx_i}{dt} + \frac{\delta E}{\delta q_i}\frac{dq_i}{dt} = 0$$

故得 $$\frac{\delta E}{\delta q_i}\frac{dq_i}{dt}+\frac{\delta E}{\delta x_i}\frac{dx_i}{dt}=0$$

即 $$\frac{dE}{dt}=0$$

積分之得　　E = constant (常數)

此即能常住定律所說，能的總和爲一常數。

IV. 漢密登原理與 Euler 原理之關係

Hamilton 原理： $$\int_{x_1y_1z_1t_1}^{x_2y_2z_2t_2}(T-U)\,dt = \text{極小量}$$

$$x(t_1)=x_1 \qquad x(t_2)=x_2$$
$$y(t_1)=y_1 \qquad y(t_2)=y_2$$
$$z(t_1)=z_1 \qquad z(t_2)=z_2$$

茲將自變數 t 變爲週轉 (cyclisch)，則得

$$\int_{t_1x_1y_1z_1}^{x_2y_2z_2}(T-U)\,t_x\,dx = \text{極小量} \qquad t_x\equiv\frac{dt}{dx}$$

$$F=(T-U)\,t_x$$

$$T=\frac{m}{2}(\dot{X}^2+\dot{Y}^2+\dot{Z}^2)=\frac{m}{2}\frac{1}{t_x{}^2}\left[1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2+\left(\frac{dz}{dx}\right)^2\right]$$

由是 $$F=(T-U)\,t_x=\frac{m}{2}\frac{1}{t_x}\left[1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2+\left(\frac{dz}{dx}\right)^2\right]-Ut_x$$

故得 $$\frac{\delta F}{\delta t_x}=-\frac{m}{2}\frac{1}{t_x{}^2}\left[1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2+\left(\frac{dz}{dx}\right)^2\right]-U$$
$$=-T-U=-(T+U)=-c=C$$

C 爲一常數。

以 F 及 $\frac{\delta F}{\delta t_x}$ 之數值代入

$$\int_{t_1x_1y_1z_1}^{x_2y_2z_2}\left[F-t\;\frac{\delta F}{\delta t_x}\right]dx=\text{極小量}$$ (此式相應於 (V) 式)

得 $$\int_{t_1x_1y_1z_1}^{x_2y_2z_2}\left[F-t_x\frac{\delta F}{\delta t_x}\right]dt=\int_{t_1x_1y_1z_1}^{x_2y_2z_2}\left[\frac{m}{2}\frac{1}{t_x}(1+Y_x{}^2+Z_x{}^2)-Ut_x-t_x(-T-U)\right]dx$$

$$= \int_{t_1x_1y_1z_1}^{x_2y_2z_2} [Tt_x - Ut_x + Tt_x + Ut_x]\,dx$$

$$= \int_{t_1x_1y_1z_1}^{x_2y_2z_2} 2\,Tt_x\,dx = \text{極小量}$$

其中 2 爲一常數，去之

故 $$\int_{t_1x_1y_1z_1}^{x_2y_2z_2} T\,dt = \text{極小量}$$

此卽 Euler 原理以式表之，是也。

V. Euler 原理與 Jacobi 原理之關係

以 $T = \frac{m}{2}V^2$ 及 $V = \frac{ds}{dt}$ 代入 Euler 原理中

則得 $$\int_{t_1x_1y_1z_1}^{x_2y_2z_2} T\,dt = \int_{x_1y_1z_1}^{x_2y_2z_2} \frac{m}{2} V\,ds = \text{極小量}$$

式中 $\frac{m}{2}$ 爲一常數，略之，則得

$$\int_{x_1y_1z_1}^{x_2y_2z_2} Vds = \text{極小量}$$

又從 $\frac{1}{2}mV^2 + U = C$ C 爲常數

得 $$V = \sqrt{\frac{2}{m}(c-u)}$$

以之代入上式得 $$\int_{x_1y_1z_1}^{x_2y_2z_2} \sqrt{\frac{2}{m}(c-u)}\,ds = \text{極小量}$$

其中之 $\frac{2}{m}$ 爲一常數，去之，遂得 Jacobi 的原理如下

$$\int_{x_1y_1z_1}^{x_2y_2z_2} \sqrt{c-u}\,ds = \text{極小量}$$

又因 $$X_s^2 + Y_s^2 + Z_s^2 = 1 \qquad X_s = \frac{dx}{ds}$$

再將上式化之則得

$$\int_1^2 \sqrt{c-u}\,\sqrt{dx^2+dy^2+dx^2} = \text{極小量}$$

如外力作用爲零，則得

$$\int_1^2 ds = \text{極小量}$$

最後讓我們再把在力學上佔個很重要地位的一個偏微分方程導出，以作結論。

VI. 漢密登偏微分方程之獲得

$$J \equiv \int_{t_0}^{t_1} \left[F(t\,x\,\dot{x}) - \frac{\delta F}{\delta \dot{x}}(\dot{x}-p) \right] dt = \text{極小量}$$

假定 Euler 之方程式已得解，則

$$J \equiv \int \left[F(t\,x\,\dot{x}) - \frac{\delta F}{\delta \dot{x}}(\dot{x}-p) \right] dt$$

$$= \int \left[F(t\,x\,\dot{x}) - p\frac{\delta F}{\delta \dot{x}} \right] dt + \int \frac{\delta F}{\delta \dot{x}}\,\dot{x}\,dt$$

$$= \int \left[F(t\,x\,\dot{x}) - p\frac{\delta F}{\delta \dot{x}} \right] dt + \int \frac{\delta F}{\delta \dot{x}}\,dx$$

即 $$J(x\,t) = \int \left[F(t\,x\,\dot{x}) - p\frac{\delta F}{\delta \dot{x}} \right] dt + \int \frac{\delta F}{\delta \dot{x}}\,dx$$

$$dJ = \frac{\delta J}{\delta t}\,dt + \frac{\delta J}{\delta x}\,dx$$

$$\frac{\delta J}{\delta t} = F(t\,x\,\dot{x}) - p\,\frac{\delta J}{\delta \dot{x}} = L(x\,\pi) \quad \cdots\cdots\cdots (\alpha)$$

$$\frac{\delta J}{\delta x} = \frac{\delta F}{\delta \dot{x}} \quad \cdots\cdots\cdots (\beta)$$

$$\left(\frac{\delta J}{\delta \dot{x}} = \pi \right)$$

以 (β) 之關係代入 (α) 中則得

$$\frac{\delta J}{\delta t} = \dot{L}\left(x, \frac{\delta J}{\delta x} \right) \quad \cdots\cdots\cdots (B)$$

上式稱爲漢密登偏微分方程。此偏微分方程解答後，則牛頓之運動的方程式亦隨之而解答。此偏微分方程有個特性，卽未知函數 J 本身不出現於式中。一般的說，解普通微分方程式易，解偏微分方程難。但在未知函數 J 本身不出現於方程式中的條件下，偏微分方程 (B) 之解不難。牛頓之運動的方程式如甚複雜時，則解方程式立卽發生困難！如果我們把問題引進 (B) 的階段，則問題立卽變難而爲易 (B) 在這兒是個很大的獻給。

甲苯—水—正丁醇系之溶解度曲線

張培深

導 言

分配定律 Distribution Law 逐漸改進，在不均一平衡現象 Heterogeneous Equilibrium 中，很多難解之事理，皆因而得以說明；物理化學產生許多有趣之結果。尤其是三種物質互相溶解時所發生之現象耐人尋味。

設三種液體 A, B, C 可以組成 A+B, B+C, C+A, 三對混合液。假若此三對液體，皆是互相溶解；無疑，在三者混合時，呈現均一平衡之單純溶液。Homogeneous Equilibrium Simple Solution 但是這種現象，不是常有的狀態，牠們時常在一定限制之濃度時，卽分爲兩層互不溶解之液體；必待 A+B+C 達到適當之定比，方呈均一之單純溶液。若 A+B 之比一定， C 之加入超過牠們互相溶解之定比時，則雖無限增加，亦不擾及溶液之均一平衡。

Gibbs 因定三等邊三角形之圖解，代表此種現象。以三頂點各表示一種 100% 之純粹液體，各底邊均分爲 100 等分，連出許多平行於各底邊之線分；如此，三角形內任一點皆可代表一種相當比例之溶液，而三成分之和爲 100. 如圖 I, M 點所表示：

$A\% = Ma$, $B\% = Mb$, $C\% = Mc$, 而 $Ma + Mb + Mc = 100\%$

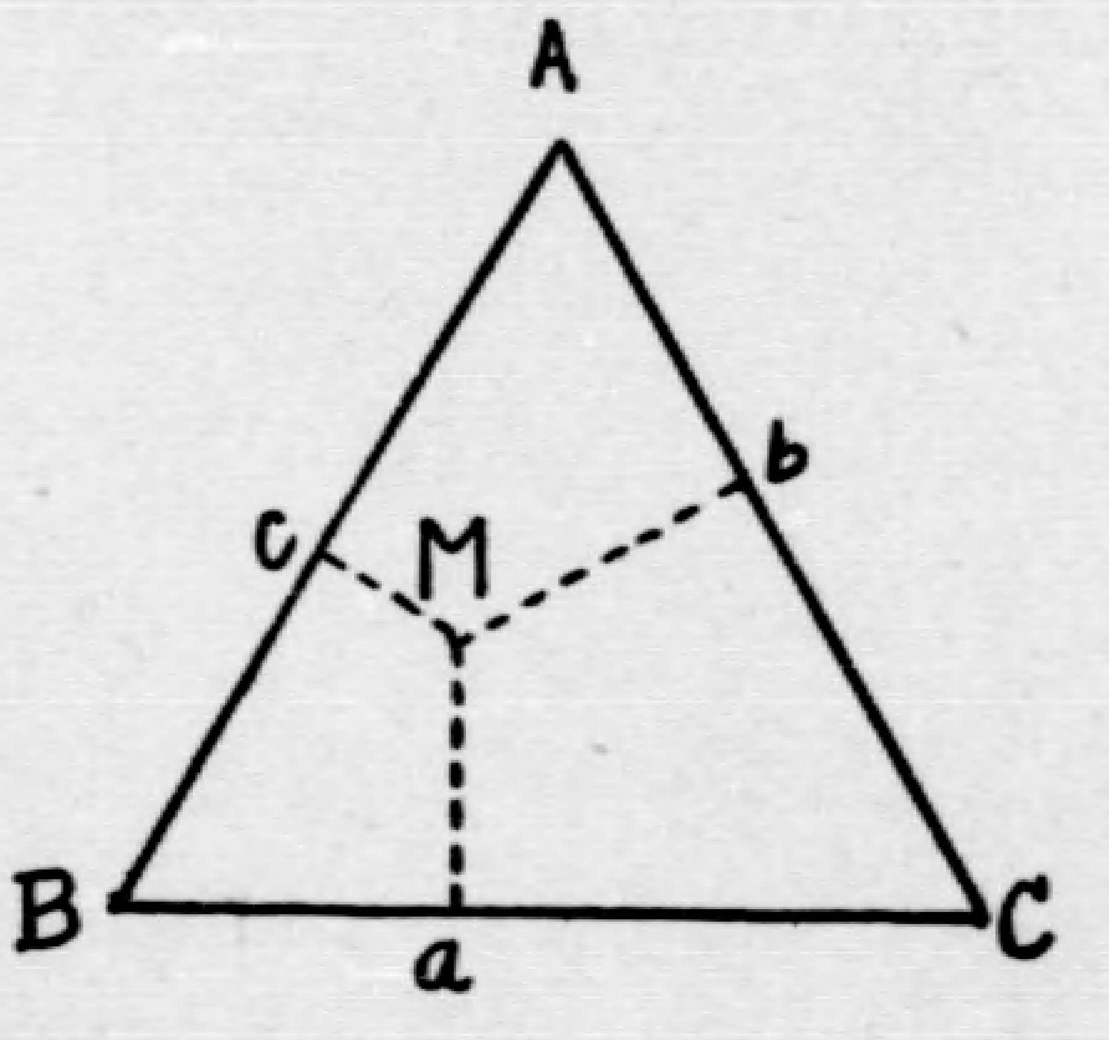


圖 I

因此，如先知某定温某三種液體互相溶解時，達到均一平衡之諸定比，則在此圖中可尋出牠們移動之軌跡；連此諸點得一曲線，稱之爲溶解度曲線 Solubility curve.

三種液體互相溶解時之溶解度曲線

一種普通現象，常發現於三種液體混合之時，即第三者若易溶於其他二者之中，則當第三者加入於他二者之定比混合液時，必增加他二者間之互相溶解度。但若第三者難溶於他二者時，則第三者之加入於他二者之定比混合液時，反減低他二者間之互相溶解度。茲申論之：

1. 三種液體中有一對局部溶解者之現象。

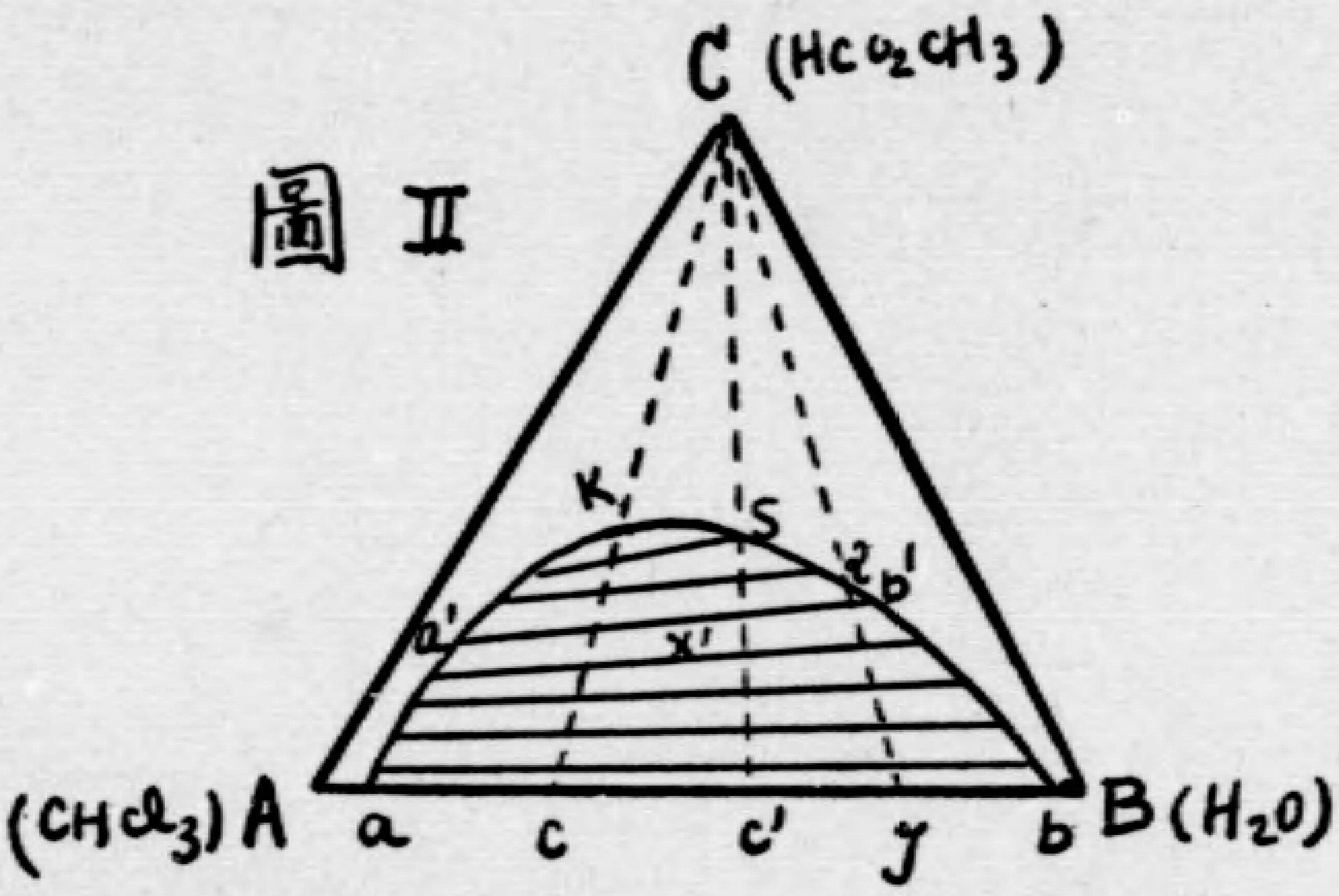
如三氯甲烷—水—醋酸 $CHCl_3-H_2O-HCO_2CH_3$ 系中，三氯甲烷與醋酸或水與醋酸皆互相無限溶解，而三氯甲烷與水呈下列兩種現象：—

a. 水溶於三氯甲烷內所成之飽和溶液爲 99% 三氯甲烷： 1% 水

b. 三氯甲烷於水內所成之飽和溶液爲 99.2% 水： 0.8% 三氯甲烷

醋酸之加入於水及三氯甲烷之混合液時，分配溶解於此二液體中；並增加他們彼此間之溶解度。達到 定比例時，即顯均一平衡。依 Gibbs 之圖解法及試驗結果得圖 II

圖 II



上圖中　$a=99\%$ 三氯甲烷： 1%水

$b=99.2\%$ 水： 0.8% 三氯甲烷

K 爲臨界點 Critical Point. 在此點，上列兩種飽和溶液，當適量之醋酸加入時變爲均一溶液。 *a* K 曲線上之諸點表示溶液中富有三氯甲烷。 *b* K 曲線上諸點表示溶液中富有水分。 *a' b'* 爲一連合線 Tie Line, 其兩端之 *a'* 與 *b'* 兩點代表兩"共軛溶液"。Conjugate Solutions.

因醋酸解於兩共軛溶液中之分量不等，故連合線不能平行於底邊。當兩共軛溶液逐漸相似時，連合線亦逐漸縮短；迨二者完全相同，則連合線縮成一點(臨界點)。因連合線不與等邊三角形之底邊平行，故臨界點不在溶解度曲線之最高點。溶解度曲線 *aKb* 爲均一系與不均一系之分界，在界外之任一點，代表一均一現象；而在曲線內之任何一點，所代表之任何混合體，當分成兩層；此兩層之組成，則爲經過該點之連合線之兩端所代表。例如，總組成爲 X 之混合體，當分成組成爲 a' 與 b' 之兩層。

曲線 *aKb* 因溫度之改變，而易其位置，故臨界點亦因而易位。加醋酸於水與三氯甲烷所得之混合液之組成，不僅依賴醋酸加入之多寡，亦且依賴三氯甲烷與水之原始混合比例，倘此二者之原始混合比例爲 C' 點，則加入醋酸後所得之各混合液之總組成，必爲 CC' 虛線上之諸點所代表。當醋酸繼增，則二層溶液之相對量相差愈遠，迨達 S 點時，則一液層之量當降於零，而僅一均一溶液存留矣。

2: 三種液體中有兩對局部溶解者之現象

如水－乙醇—琥珀酸睛(Water - Ethyl alcohol－Succinic nitrile) 系之溶解現象，水與乙醇完全溶解，其他兩對僅局部溶解；並且 Water-Nitrile 在 18.5°－55.5°C 可成兩層溶液而 Alcohol－Nitrile 則於 13°－31°C 可成兩層溶液，倘若在此兩種溫度之限制間，加乙醇於 Water-Nitrile 之混合液中，或加水於 Alcohol-Nitrile 之混合液中，則生兩種不均一之三液系 Ternary System 所得之結果可畫成兩個分界曲線(圖III) 溫度降低此二曲線逐漸向三角形中部擴散；若溫度繼續降低，則二不均一區域互相交錯以成圖 IV 之形。

圖 III

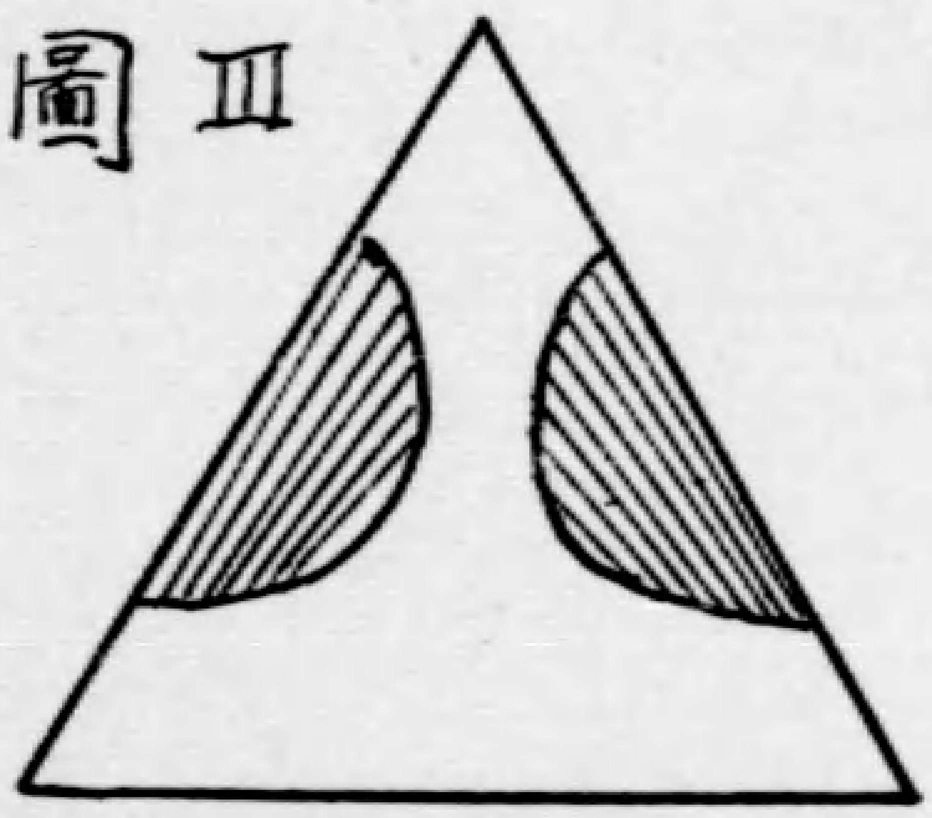
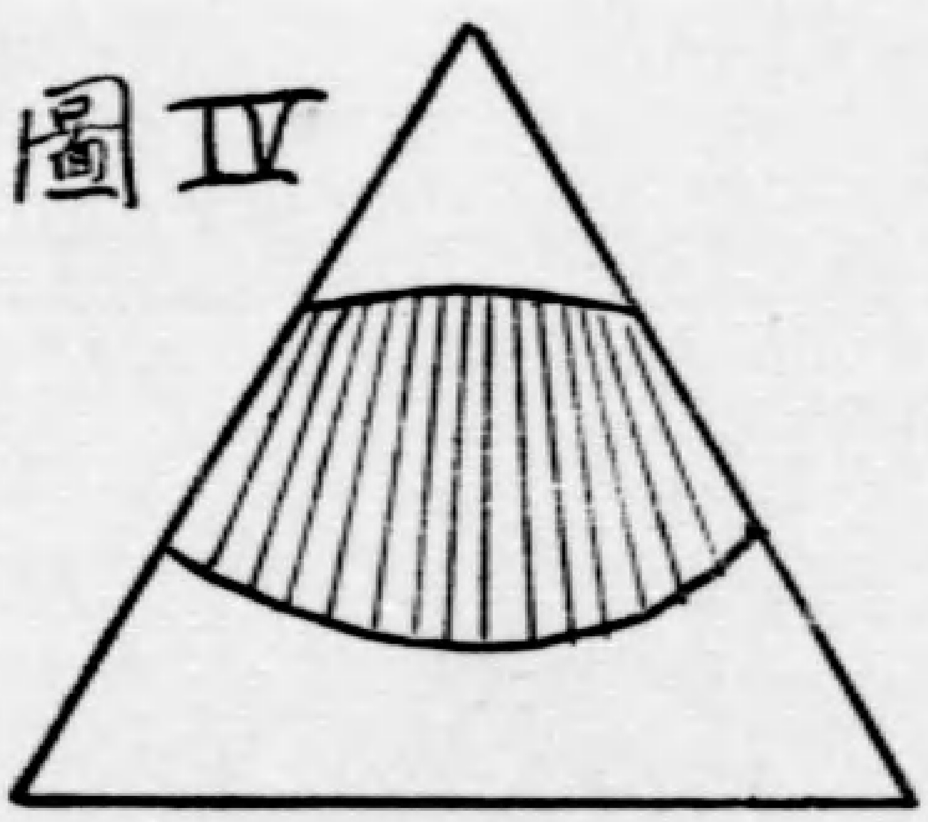


圖 IV

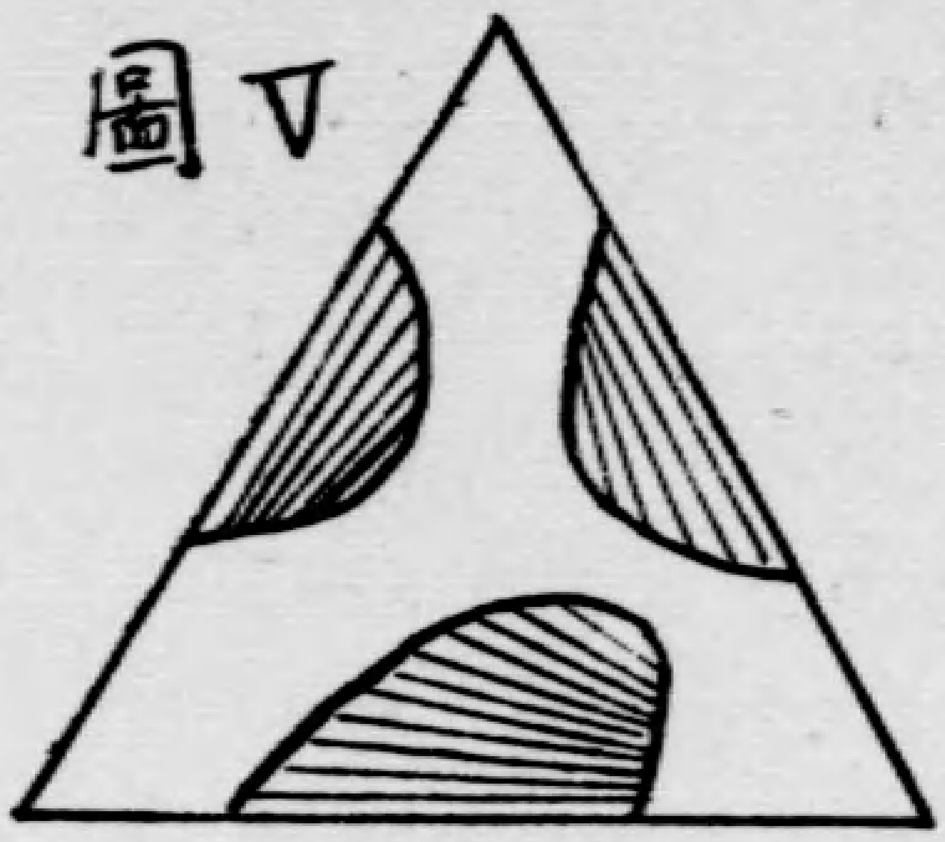


3. 三種液體中三對溶液皆爲局部溶解之現象

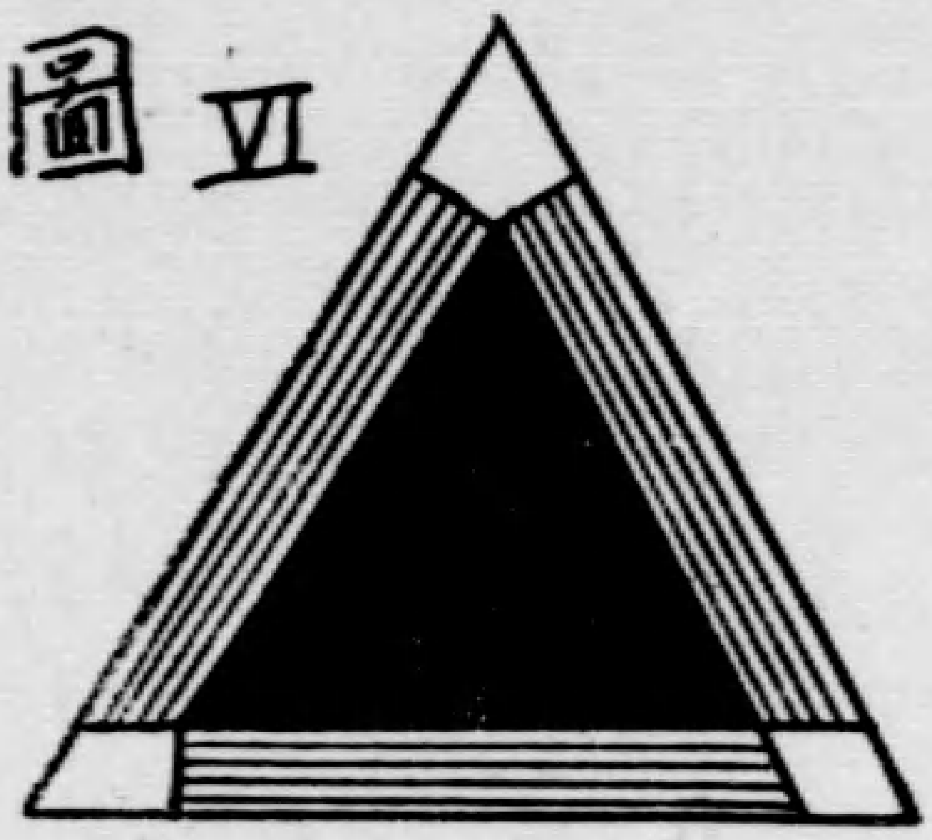
如水—醚－琥珀酸睛 (Water-Ether-Succinic nitrile) 系中因爲所成之三對溶液皆不均一，故所得結果有三個分界曲線 (圖V)，當溫度逐漸降低，此三曲線亦向內擴散，

形成 (圖VI) 在三角空白處爲均一區域，即成一均一溶液，中心黑暗處代表三層溶液之區域，三邊有連合線處代表兩層溶液之區域。後二者皆係不均一之區域也。

圖V



圖VI



甲苯一水一正丁醇系溶解度曲線之决定

1. 曲線之决定

a. 方法——此系可成三對混合液 (甲苯＋水，甲苯＋正丁醇及水＋正丁醇)。甲苯與水幾不互相溶解，而其他二對僅局部互相溶解。若用正丁醇滴定定比之甲苯與水混合液，達到定比時，此混合液即當呈現均一平衡溶液。變換甲苯與水之定比，即得許多之定比點。依 Gibbs 的三等邊三角形圖解，此諸點之軌跡，即爲此系之溶解度曲線之一部。更次甲苯與正丁醇幾完全互相溶解若用滴定法，以水滴定定比之甲苯與正丁醇混合液，達一定比例時，均一之溶液即呈渾濁之不均一溶液。如上法變換甲苯與正丁醇之定比時，亦可得諸定比點，置入 Gibbs 圖解，則此諸點與上法所得諸點相合，定成此系之溶解度曲線。

b. 實驗結果

混合液	甲苯 $C_6H_5CH_3$	水 H_2O	正丁醇 N. C_4H_9OH			總量
			第一次	第二次	平均值	
1	20 cc.	1 cc.	18.56 cc.	18.56 cc.	18.56 cc.	39.56 cc.
2	10 cc.	1 cc.	14.08 cc.	13.82 cc.	13.95 cc.	24,95 cc.
3	5 cc.	1 cc.	11.98 cc.	11.58 cc.	11.78 cc.	17.78 cc.
4	5 cc.	2 cc.	19.28 cc.	19.32 cc.	19.30 cc.	26.30 cc.
5	5 cc.	3 cc.	29.32 cc.	29.68 cc.	29.50 cc.	37.50 cc.
6	5 cc.	6 cc.	48.46 cc.	48.34 cc.	48.40 cc.	59.40 cc.
7	5 cc.	10 cc.	72.50 cc.	72.22 cc.	72.36 cc.	87.36 cc.
8	5 cc.	15 cc.	97.82 cc.	98.02 cc.	98.92 cc.	118.92 cc.

表 I: 正丁醇 N.C_4H_9OH 滴定不同比之甲苯一水 ($C_6H_5CH_3$-H_2O) 混合液所得結果

混合液	$C_6H_5CH_3$%	H_2O%	N. C_4H_9OH%
1	50.55	2.53	46.92
2	40.01	4.01	55.98
3	28.12	5.62	66.26
4	19.01	7.60	73.39
5	13.33	8.00	78.67
6	8.42	10.10	81.48
7	5.73	11.45	82.82
8	4.21	12.61	83.18

表 II：以百分率表示 $C_6H_5CH_3-H_2O-N.\ C_4H_9OH$ 各液之體積

混合液	$C_6H_5CH_3$ in cc.	$N.C_4H_9OH$ in cc.	H_2O			總體積 in cc.
			第一次 in cc.	第二次 in cc.	平均值 in cc.	
1	20	1	0.15	0.15	0.15	21.15
2	10	1	0.12	0.12	0.12	11.12
3	5	1	0.10	0.10	0.10	6.10
4	1	5	0.54	0.50	0.52	6.52
5	1	10	1.32	1.28	1.30	12.13
6	1	15	2.18	2.22	2.20	18.20
7	1	20	3.18	3.18	3.18	24.18
8	1	25	3.94	3.94	3.94	29.94

表 III ：以水滴定不同比之甲苯—正丁醇 ($C_6H_5CH_3$-$N.C_4H_9OH$) 混合液所得之結果

混合液	$C_6H_5OH_3$%	$N.\ C_4H_9OH$%	H_2O%
1	94.56	4.73	0.71
2	89.92	8.99	1.09
3	81.92	16.40	1.68
4	15.34	76.70	7.96
5	8.13	81.30	10.57
6	5.49	82.41	12.10
*7	5.21	82.72	12.07
8	3.34	83.50	13.16

表 IV: 以百分率表示表 III 中各液之體積

*此點在線外不確

c. 圖解

(i) 據表 II 中之諸百分比，於 Gibbs 三等邊三角形內，求得諸點，連此諸點而得一部曲線。 (圖 VII, 黑色所表示之諸點)

(ii) 據表 IV 中之諸百分比，於同一之三等邊三角形內求得諸點，則此諸點與一部曲線相合， 必成此系之溶解度曲線 X (圖VII, 圓圈所表示者)。

(iii) 用 3.58cc 之水可滴定 20cc 之正丁醇使呈渾濁不均一現象而知水溶解於正丁醇中所成之飽和溶液為 15.20% 之水與 84.80% 之正丁醇・延長所得曲線適截正丁醇一水軸於此點(15.20% H_2O: 84.80% $N.C_4H_9OH$)

(iv) 用 0.95cc. 之正丁醇滴定 10cc. 之水使成均一溶液。而知正丁醇溶解於水中所成之飽和溶液為 (9.16% N. C_4H_9OH: 90.84% H_2O) 在正丁醇一水軸上求得 A 點，因以推知必尚有一小曲線 Y 經過此 A 點，以切甲苯一水軸；此切點須以極小量之甲苯滴定大量之水，方可求得。依此法求得用 1.60cc 之水而滴定 20cc. 之甲苯 (92.60% $C_6H_5CH_3$: 7.40% H_2O) 溶液即呈渾濁不均一現象；由此連 A 點與此切點，而得 Y 曲線。

(v) 在此 X Y 兩曲線內之諸定比點所代表之混合液均為不均一之二層液體。反之在此兩曲線外諸定比點，所代表之混合液，均為均一單純溶液。

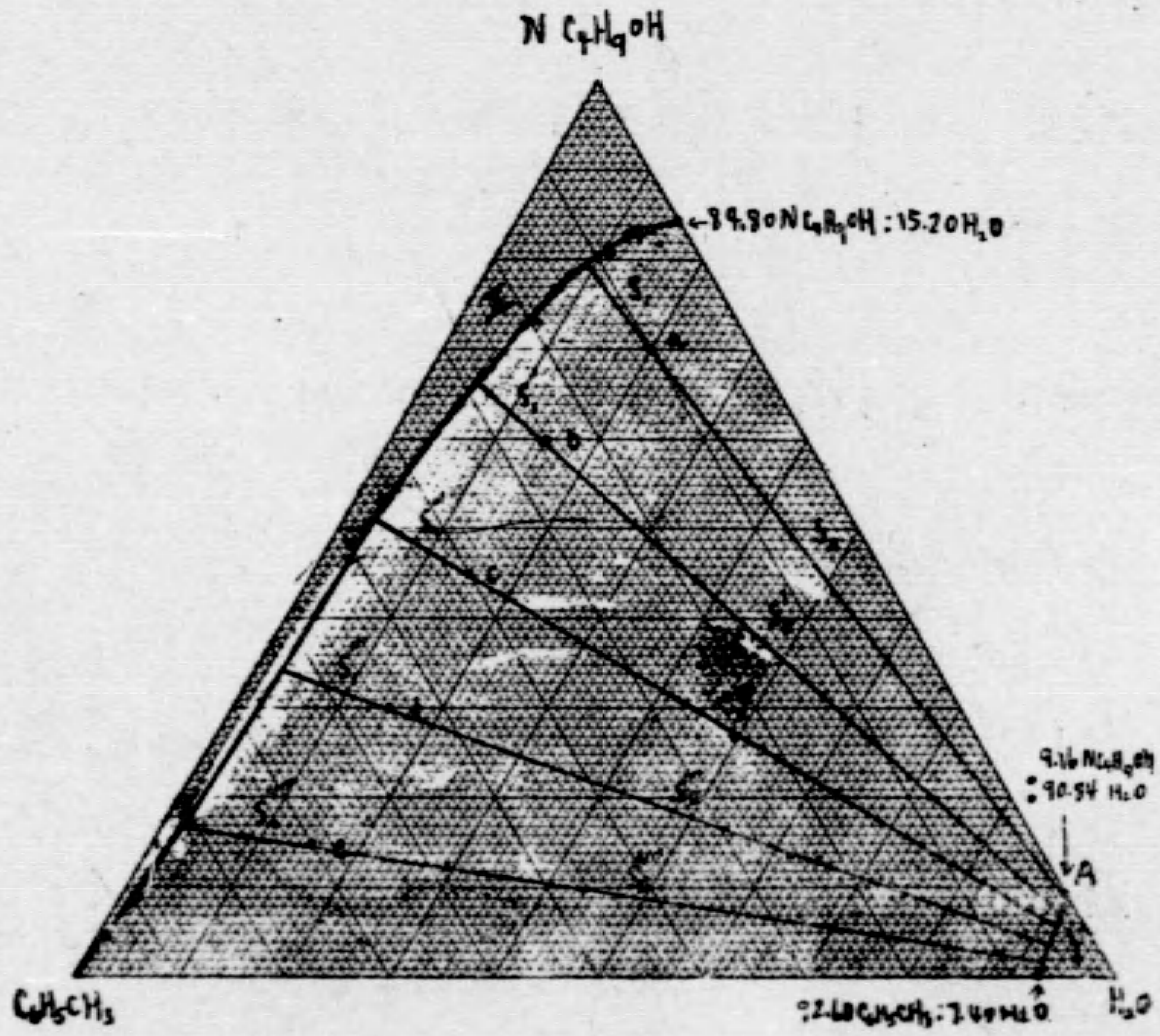


圖 VII.

2. 連合線之決定

a. 連合線之意義——凡連結曲線上代表兩共軛溶液之兩點所成立之直線，爲連合。上面所述之兩曲線內，諸定比之混合液，必分爲兩層，此兩層溶液，雖然他們體積之比因混合比之改變而異；而上層溶液渾濁富有甲苯，下層溶液透明富有水分。若據某定點之比例混合一溶液，震盪五分鐘後，使兩溶液分開，量出他們之體積比例。吾人知此二體積之比例，與經過此點而切於 X Y 兩曲線之直線，所成之二線分之比爲反比。是故若求得一直線過此點至兩曲線所成之二線分適等於此二體積比例之反比時，則此直線爲連合線。

設某定點"a"所成溶液之上層溶液體積爲 V_1，下層溶液體積爲 V_2，而由此點到 X 曲線之直線長度爲 S_1 到 Y 曲線之直線長度爲 S_2，則

$$\frac{V_1}{V_2}=\frac{S_2}{S_1}$$

註：V_1 與 S_1 相當 V_2 與 S_2 相當故此比爲反比。

b. 方法——在（圖VII）內選擇適當距離點依其定比配合各種溶液，經震盪五分鐘後，使兩層溶液分離量其體積，得出各個相當比。依此各比之反比可定過此各點並在 X Y 兩曲線中之諸直線上之二相當線分。

c. 實驗結果——以上法求得過下列諸點之連合線 S_1, S_2, S_3, S_4, S_5（圖 VII）其他諸連合之決定可想而知矣。

a 點（70% 正丁醇：10% 甲苯：20% 水）

b 點（60% 正丁醇 25% 甲苯 15% 水）

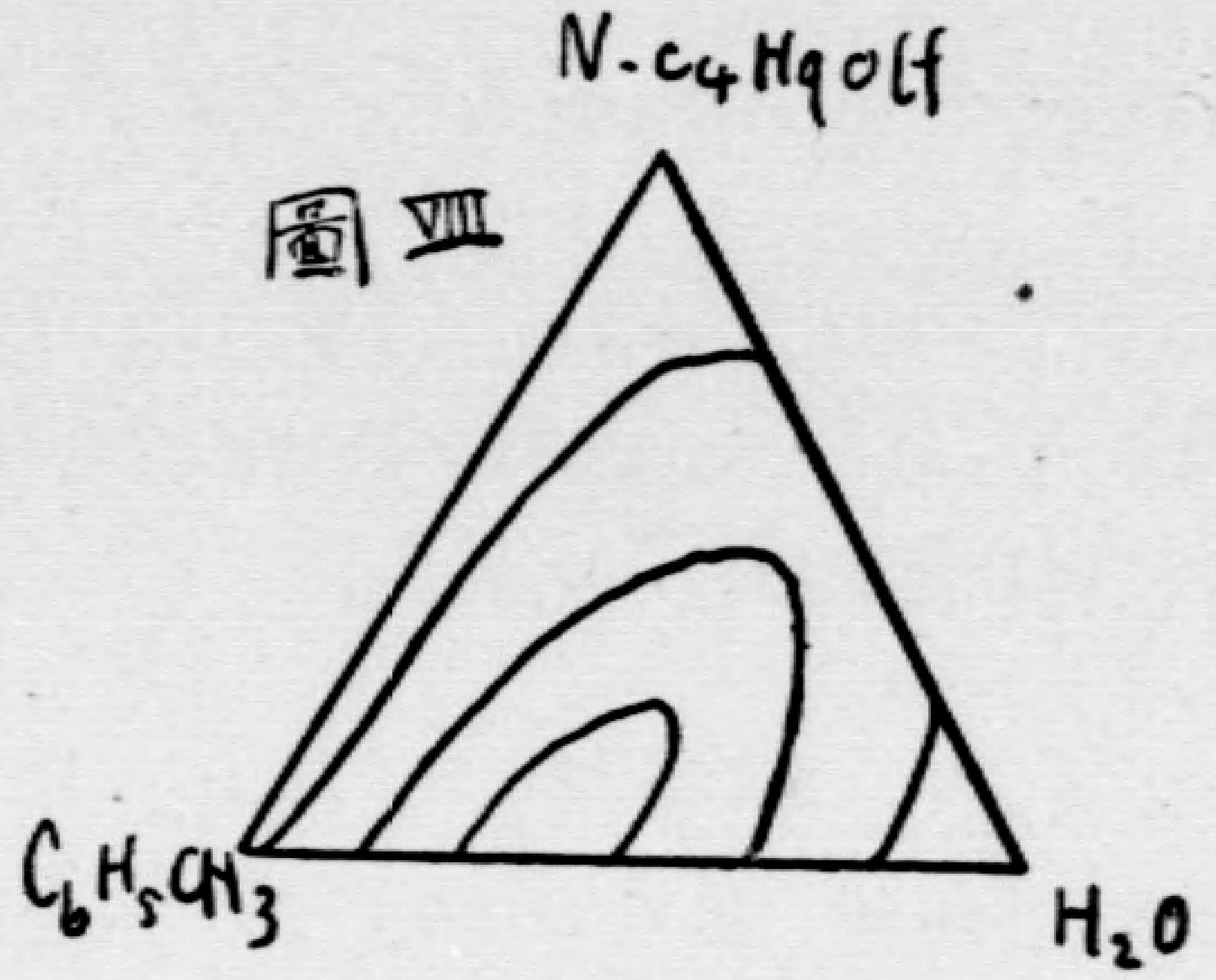
c 點（45% 正丁醇 40% 甲苯 15% 水）

d 點（30% 正丁醇 55% 甲苯 15% 水）

e 點 15% 正丁醇 70% 甲苯 15% 水）

討　論

甲苯一水一正丁醇系之溶解度曲線已概定如此。但研究三液系之溶解度時，壓力蓋視爲常數 Constant, 而所得之溶解度曲線，恆因溫度而變。此曲線乃在 14°C 求得，至於溫度改變影響此曲線之情形如何，因課餘少閒，未能詳究。惟在試驗進行中有數次 X 曲線之一部地位降下，而 Y 曲線上升；考其故，方知室溫變化所致。由是可推知此二曲線必因溫度之上昇而向內移動，俟達適當之溫度時，方結合爲一。至於何時結合，據理論之推算，當在 50°C 以上。來日有暇，容再求之。目前揣測高溫時之溶解度曲線，約如圖 VIII. 同好諸君，幸指正也！



參　考　書

1. Lincoln XV, Solutions of Liquids in Liquids
2. Briggs XV, Equil. & Phase Rule
3. Findlay's Phase Rule
4. Lincoln, Jour, of Phys. Chem. 4. P. 161. 8, P. 248
5. Taylor, Treatise on Phys. Chem. Vol. 1

廿二年十二月十日於光華

質量2的氫同位元素[1]

F. W. Aston 原著

陳劍雲譯

近數年來，關於新基本實體[2]的發見，足以震驚科學界，而同時在專門研究上，具有特出的應用者，就是氫的重同位元素。它的發見經過，殊可使我們深感興趣。正氫的凝縮分數[3]，由質量分光器[4]精確測量，指出它的原子質量爲1.00778，和它的化學上原子質量完全相符。此結果已載於一八二七年之 Bakeran 演講辭中。氧的重同位元素之存在經發見與證實之後，Birge 和 Menyel 爲使氫氧同歸於一致起見，指出氫亦應有同位元素，其相差[5]約爲 1% 的五十分之一。Urcy, Brickwedde, 和 Murphy 對此問題同時着手研究。他們連續分溜[6]液態的氫，使其轉濃之後，由包滿線的光分析[7]發，覺質量 2 的同位元素存於豐沃之殘餘[8]中。

他們的發見宣布於一九三二年。嗣後關於發展的工作，幾乎全爲美國研究家所包辦；而進步之神速，實是值得驚歎。此二種氫 (H^1 和 H^2)[9] 的質量的比，在各種元素中，可算是最爲單一，而量子力學建議以簡易的電鮮法分離它們。此方法Washburn 在華盛頓己加深切的研究。他所得到的結果和許多其他論文的理論上的預測完全符合。(這些論及氫同位元素的論文，最近在舉行於支加哥的科學會議中宣讀。) 然而用電鮮方法而獲得濃的液體者，當推 Lewis。他在百加利地方得到數立方粍的重水 H^2 H^2O, ——依計算所得，其中所含的正氫，祇有 0.01% Lewis 報告該液質外狀和普通水無異，但在 25°C 它的密度爲 1.1056, 沸點爲 101.42°, 冰點爲 + 3.8°, 且其最高密度係在 11.6°它的克分子蒸發熱量[10]較普通水所具者大 259 卡路里。這幾個數字，不但使我們對於據水常住性而設物理單位制度的學者，發生懷疑，且使我們明瞭先前所極審慎選出的標準，確是不能無誤了。

H^2 發見不久之後，Bainbridge 用 urey 所供給的氫濃試液，以質量分光器測量 H^2 的質量。由三原子的[11]分子 $H^1H^1H^2$ 的線和 He^4 的線直接比較，他得到最可靠的結果是 2-0136。此新同位元素所用之量倘能以法節制，則將能規定輕原子在物理質量標度上的位置[12]。Bainbridge 應用此方法，已求得鋰同位元素的同位元素量，其準確之程度，爲從來所未有。

往昔用以崩解[13]原子核的陽電子，今已爲重氫原子核所代替了。據 Lewis, Livingstone, 和 Lawreuce 的實驗，從水中產出含有 50% H^2 量的二原子的離子 $H^1 H^2$，曾爲Lawreuce 所造成的「同步加追器[14]」加增其速率。像這樣造出來的混合光條[15]，約具有百萬費打的力量，對於各種靶[16]，都能發生極顯著的効力。鋰靶除了受陽電子的衝擊[17]而生之普通効果外，還產出穿透度[18] 14-5 糎的質點，這種効果係由於 H^2 和 Li^6 轉變成爲 $2He^4$ 的緣故。若以鈹爲靶，則這二種氫，除使其發生同類之 α 線外，同時更有「高能」產出……重氫原子核當有百倍强於陽電子的効力。若以重元素爲靶，則衝擊後，常常產生多數高速度的陽電子，有些陽電子的穿透度，竟達到 40 糎。

Rutherford 在 Caveudish 實驗室內所舉行之物理學會中，將 Lewis 所餽贈之少量「重水」展示於聽衆之前，同時說明他自已和 Oliphant 對於 Lawreuce 的工作加以證實和擴充的實驗。他們實驗時，用低電壓而高强度的重氫原子核的均一光條[19]。

普通水中的 H^2 容量究竟多少，現在還是一個未解決的問題。起初有人以爲四千份水中含有一份 H^2，然近來鹽酸的紅外光景[20]的强度[21]實驗，却又建議四千份水中祇含有八十分之一的H^2。因爲他們所用的試樣未知是否純淨，故我們對之，不無致疑之處。但無論如何，H^2 旣從水中發見，則其比例數諒亦必頗有可觀。質量 3 的同位元素亦曾經深切探討，然所得到結果很果斷的告訴我們雖在數百萬份水中，亦不會有一份 H^3 的踪跡。

因這特出的物質在化學上，尤其在有機化學十的威權至鉅，故我國(指英國)實應急起直追，趕快設法尋求，不可絲毫放鬆。五種不同的甲烷[22]之可能性和其他復雜分子之無數變易性，已屬顯明——卽使對於旋光性等問題所能得到之新解釋，置之不論。不甯惟是，分子中 H^2 替 H^1 之事旣屬可能，則生細胞中未始不可爲此，且此現象遍及於細菌，蝌蚪以至人類之事，得由讀者諸君自行悟解。現在一種新化學和一種新生物學已經擺在我們的面前了。

對於此新物質的命名，已經有了好幾個建議，然最後的決斷尙須仔細考慮。蓋求其名稱適合，竟爲從來所未有的困難。它的 Moseley 原子數爲 1，所以它當然是氫，决不會是一新元素。反之，它不像任何其他同位元素，因爲的可以分離，并且像純粹試劑[24]一般的可供應用。因此爲便利化學討論起見，我們應予以專名，以別之於正氫。同時它的原子核亦有給以一定名稱之必要，俾得將它所生之物理効應，與陽電子和 α 質點所生者，作一個比較。

(1) The Hydrogen Isotope of Mass 2, 登于 Science Progress Vol. XXVIII, No. 110.

(2) New Fundameutal entities.

(3) Packiug Fraction (卽一陽電子與一電子凝合以成氫原子時所失去之質量)

(4) Mass-spectrograph.

(5) Discrcpaucy.

(6) Continuous Fractionation.

(7) Opticae analysis of the Balmer lines.

(8) Enriched residue.

(9) 2 爲 H 的 mass number (質量數).

(10) Heat of Vaporization per mol.

(11) Triatomic.

(12) Position on the physical sccle of mass.

(13) Disiuteyrcte.

(14) Synchronous acceleration.

(15) Mixed beams.

(16) Target.

(17) Bomfardment.

(18) Rauge.

(19) Homogeneous beams.

(20) Infra-red spectra.

(21) Inleusiy.

(22) Methane.

(23) Optical activity.

(24) Pure reagent.

製造硫酸的接觸器

陳樹藩

在化學工業上，硫酸有極廣的用途，所以各工業國家都有規模極大的硫酸廠，供給巨量的生產。我國工業方在萌芽，硫酸製造初無專廠，邇來雖有一二硫酸廠，然營業仍不發達，歷年來所有需要，大都仰給於外國。金錢的外溢，確是不少，所以我國欲振興實業，務先提倡硫酸的製造。本文述及以接觸法製硫酸的接觸器，庶熱心實業者有所觀感。

在以接觸法製造硫酸的全部工程裏，接觸器是佔最重要的部份，他的功效是使觸媒(Catalyst) 與氣體發生密切的接合，并且使氣體發生作用時，易達平衡的地步。最初所發明的接觸器，對於上述的二要件，不能得完全的適合，所以大半不甚經濟。近來有一種內部換熱接觸器 (internal heat-exchange converter)，與一種二系接觸器 (two pass system converter)的發明，備有這二項條件。但是二養化硫養化而成三養化硫的時候，發生極高的熱度。在理論上，高熱度時養化作用的效率很低，所以高熱應當除去。然在商業上應用時，卽使用適當之觸媒，在尋常溫度，尙不能達到相當之作用速度，所以吾人須設一接觸器，其溫度能促成一相當之作用速度，而同時又復能產生百分之九十五的產物。這就是現在設計接觸器的一個大問題。以下詳述各種新舊接觸器的構造與利弊。庶可採其長而棄其短。

西洛特格里羅接觸器 (Schroeder-Grillo Converter)

這種接觸器是最早發明的一種，是西洛特格里羅 (Schroeber-Grillo) 所創造，因定此名。他的構造是一個簡單的鑄鐵圓筒，或是幾個較短的圓筒，互相起疊，中間裝四五層有孔的鐵板，上面放着觸媒。用這種格里羅器時，氣體由底引進，通過觸媒，從頂上引到冷凝器和吸收器內。在此類接觸器內，作用發生的熱度，完全浪費，反須設一燃爐去預熱未進器的氣體，使他達相當的溫度，然後入器內，纔可以發生作用，所以在成本方面，就不經濟。後來格里羅把他改成雙層式，他的構造也祇是一個圓筒，內藏觸媒，此外再繞一圓筒在外面，因此一部份預熱的氣體升到頂上後，再從觸媒層中囘至底下而出。這種改良，是可以利用一部份作用所生之熱，并且使氣體有更多機會與觸媒接觸，最後這種單層或雙層器的觸媒層中，裝置阻礙板，可以使氣體流動率減低和分散面積擴大，直至近年發明釩爲觸媒後，此種接觸器就不爲人所注意了。

梅哈姆器 (Mannheims Converter)

這種梅哈姆器的發明也很早，三養化鐵 (Fe_2O_3) 充作觸媒，同時輔以鉑以完成此接觸作用。用這種接觸器時，硫黃大都是從黃鐵礦中得來，且三養化鐵觸媒是得自黃鐵礦的灰燼，而鉑觸媒是由氯化鉑液澱出在石棉蓆上而成。此類含鉑的石棉蓆是放在一個狹小長圓筒裏面的多層有孔的鐵板上。從理論方面講，三養化鐵在攝氏六百度下，活潑性頗小，故只能產生百分之六十的變化 (Conversion) ，然在實際上他所能生之變化，沒有超過百分之五十，其餘都賴鉑的效力。

據最近的調查，採梅哈姆器制度之工廠，在全美國祇有三只，並且沒有一家是在工作，西洛特器尚有許多用於美國，他的原因，是他可以用冶金產生的氣體，其價值較賤，或是廠主不願有更大的擴充。此種接觸器大概每日可出五噸到八噸的純硫酸。

內部換熱接觸器 (Internal Heat-exchange Converter)

最近發明的新式接觸器有二種，他們的差別，是在利用作用熱法和節制溫度法的不同；他們的名稱，一種就是內部換熱器，和另一種叫做二系接觸器 (two pass system converter)，後的一種，又可稱他爲海立孝夫式 (Herreshoff system) ，因爲是他發明的。最近又把他改成三系或多系，所以稱做多系接觸器 (Multipass system converter)。這二種的接觸器，又有幾處改變，都是照各公司運用時的便利。以下就是各種不同的內部換熱器：

拔地沙式 (Babische Type)

這種內部換熱器，最先由德國拔地沙公司使用，他含有一種裝置，好像管形的汽鍋，鉑石棉的觸媒係放置在多數小托盤上，這種托盤如此構造，使之可以落於管子裏。當冷的氣體從接觸器底下進來，漸漸上昇，繞過附設阻礙板之諸管再回到底下，從出氣管出去，既然所進來的氣體得完全散佈於所有換熱表面上，故設計此種接觸器時，須安排一已知强度的氣體之換熱表面，因爲知道所進來的氣體的一定强度，是極困難的；這種拔地沙式，就可以變動他的裝置，使得在器之各部導入冷氣，其意在强氣體於一已知體積內，能發出較大之熱時，卽由器之某部導入冷氣，使之不致散佈於所有換熱表面。後來因爲適應氣體的强度的變動起見，氣管的裝置遂愈形複雜了。但是自拔地沙公司改用釩觸媒以後，此種內部換熱接觸器，也改成了二系接器。

戴得利式 (Tentelew Type)

這種內部換熱器，最先由戴得利公司發明，他的構造好像一個長圓筒，長是闊的二

倍，內分二部，上半部較闊，裝一有孔片，上放多數短截的鐵錐體。鉑石棉的觸媒，就放在此片上，致使鐵錐穿過石棉，鐵錐的好處是可以把熱由觸媒傳至空處，因此可以預熱通進的氣體。這氣體是從上面進來，經過觸媒之後，到下部裏去；下部較狹，裝着許多有孔片，上放薄層的觸媒，然無傳熱的設備。這種接觸器，在戴得利公司用時，大致需一外部換熱器；經最後的改變，此式的構造同拔地沙式相仿，不過前者管上有較大的空處，且用一外部換熱器同時工作，然此種裝置在美國極少，不過一二而已。

美國式 (American Type)

最近幾年美國發明一種新內部換熱接觸器，他與上述二種接觸器之不同，是把觸媒放在管子的外面。他用的觸媒是釩，用這種觸媒，是不需像用石棉的那樣多，他祇需用二層觸媒，下層放總數的百分之六十至六十五，其餘的都在上層片上。下層的觸媒，擱置在一有孔片上的碎石礫面上，這片上繞着許多一端塞住的大管子，這大管子的中間，置着許多兩端都通的細管，接到靠近觸媒的片前。上層觸媒前，也是同樣的裝着，在他觸媒層中間，可以裝置阻礙板或者可以不用。

在工作時候，先把氣體預熱到三百度後通進細管子裏，再從大管子不通的一端，向下通到另一端，達到觸媒的附近孔隙的地方，然後再通到上層觸媒上，由頂上引到一外部換熱器內。然這外部換熱器的用與否，是依氣體的强弱來決定。普通此器應用，多以硫黃作二養化硫的原料，而產生的二養化硫必先濾過，再冷到三百度後，才灌進器內。同時空氣常常打進去，以減低溫度。

內部換熱器每部發生的溫度如下。

氣體未達下層觸媒時的溫度…………………………300°C

氣體已達下層觸媒時的溫度…………………… 460－480°C

氣體在下層觸媒時最高的溫度…………………………600°C

氣體出下層觸媒時的溫度…………………… 465－475°C

氣體出接觸媒時的溫度…………………………280°C

這最後的溫度，並不能代表在層觸媒作用時的溫度，因爲這氣體已經被上層觸媒上的空氣凝冷過，上層觸媒之表面的實在溫度，大約在 450°－460°C 在這溫度的平衡變化達 97.5－98%。

多系接觸器 (Multipass Converter)

這種多系接觸媒器就是海立孝夫式，或叫做外部換熱器。他的構造，是二個長圓筒，一個小的叫做第一接觸室，裏面裝百分之三十的觸媒；一個大的叫做第二接觸室，裝

着其餘的觸媒，二筒間設有二個換熱器。當工作時，冷的二養化硫先通入第二換熱器裏，再通到那個第一換熱器裏，這時候氣體已有適當的溫度，他就從第一接觸室的頂上下去，經過觸媒後，從底下出，以入於第一換熱器裏，此氣體經過此器之管內時，遂將其熱傳於其管外之進來的氣體，故其溫度降至入第二接觸室前所需之溫度。此氣體由第一換熱器入於第二接觸室，自上而下，經過觸媒而入於吸收器內。

這種接觸器內部的構造，也很簡單，他用鉑石棉作觸媒。第一接觸室的構造，是一個鑄鐵造成的長圓筒，頂和底是成凸起的形狀，中間有二三十只托盤，上面很平均的散佈着一層薄觸媒，這許多的托盤，是一層層的疊起在鐵片上，普通最高的一層上面，罩着一層薄簾，以防進來的氣體的衝動，以致擾亂觸媒。在大多數情形之下，氣體進來之前，先經過石棉濾層，然後達於觸媒。他的第二接觸室的構造，與前一個相同，但在他的裏面有五十到七十只托盤。

假使用釩做觸媒的時候，普通第一接觸室裏，藏二層觸媒，和第二接觸室裏藏三層觸媒，因爲釩有極大的功效，可以不需過多，但是在入氣管口，裝一塊分散板，可使進來的氣體分散於頂層接觸媒內。至於觸媒層的中間，裝有阻礙板，以使氣體完全混合。

在美國有幾公司裏，用這種接觸器時，以特製之鉑作觸媒，所以他的構造是同用釩觸媒的一樣；他的不同是在裏面裝四層或五層的觸媒，和以石礙做觸媒的支持物。這幾種用不同觸媒的外部換熱器，大致多用硫黃作二養化硫的來源；而他的第二換熱器，常須把空氣打入，作三養硫的凝冷器，這已熱的空氣，常直接或間接利用做製造水蒸氣之用。

外部換熱器每部發生的溫度如下：

氣體入第一接觸室的溫度…………………………400°C
氣體出第一接觸室的溫度…………………………575°C
氣體入第二接觸室的溫度…………………………405°C
氣體出第二接觸室的溫度…………………………450°C

最新美國某公司，用三個長圓筒連接成一個接觸器，中設凝冷器。在理論上，增加凝冷表面，應當可以使較強的氣體進來，產生更大的變化；但是從實際方面得到的結果，告訴我們，此種裝置有利亦有弊，利弊相抵銷了。

內部換熱接觸器與外部換熱接觸器的比較

內部換熱器與外部換熱器的構造和應用，早已在上面述及，似乎各不相同，但是實際的分別，祇在利用作用熱的方法不同而已。我們知道三養化硫的化成，是一個極強的發熱作用

$$2SO_2 + O_2 \rightleftharpoons 2SO_3 + 21{,}700\ \text{cals.}$$

所以我們應當除去此熱，然後始得美滿的效果。內部換熱器的設計，在理論上是應當把他發出的高熱除去，欲達到這目的，當在構造上留意，應當使接觸器面積極小，或者裝置許多小管和另外的凝冷設備，致熱易由觸媒表面逸出。這點在內部換熱器方面已經達到。

至於外部換熱氣的設計，是利用二養化硫在 400°C 以上時氧化成三養化硫的速率增加的事實。況且多系接觸器確有二個好處：(一)能利用原始的熱作用速率。(二)氣體在第二接觸室裏，得有機會與更多的觸媒接觸，或有充份的時間接觸於適宜溫度之下。

美國式的內部換熱器，他所發生的最高溫度，和離最後觸媒層時的溫度，是約八十度高於二系接觸器內之相當溫度，這較高溫度的緣故，是在補償此器作用時管壁上所消失的熱。是以從各方面觀察，內部換熱器與外部換熱器的優劣，有下列諸點：

第一點，內部換熱器的地位，比之外部換熱器所佔的節省。但是在構造方面，內部換熱器的內部複雜，構造費用遂大。

第二點，從工作方面着想，內部換熱器內部的管子是容易損壞，因爲二養代硫或三養化硫發生了腐蝕作用，或因大管子一端不通，氣體進去時的力量，可使他變形，以致損壞，須加修理。於是全部工作停頓，移去觸媒，再行修理，待修好後，從復裝置，耗費很久的時間，并且失去以前的溫度。若外部換熱器發生了損壞，不須停頓全部工作，立刻就可修理，並且可以保持以前的溫度，繼續工作。

第三點，內部換熱器所用的觸媒，比外部換熱面所用的多百分之三十，於是他的面積也應當稍大，所以他要得完美的結果，就需稍強的氣體進來，否則不能得到足夠的溫度。

第四點，內部換熱器內有一定的換熱面積，并且須在接觸器的進口把冷氣打進去，同時進去的氣體的強度要一律；不可過強或過弱。但是在外部換熱器方面，可以使用強度不同的氣體，不論任何強度的氣體進去，他可以伸縮他的換熱面積，以使內部的溫度不變；這一點在用冶金發出的二養化硫爲原料時極爲重要。

全世界接觸器的鳥瞰

接觸器在世界最近的情形大致如下：

歐洲除德國外，許多格里羅器仍多使用，他的形式大半都是複層式，大部份的格里羅器用一外部換熱器工作。但是仍有用另外的燃料預熱氣體的。有一廠裏在器內裝置散射扇，他的好處，是可以把 4% 的氣體不須預熱，可使發生作用。戴得利器使用也廣，

好幾處改成二系接觸式，因為用釩觸媒之故。這種接觸器，在歐洲各廠裏的構造，大概小於美洲所用的，就是在大廠裏，也祗備幾只小的而已。

加拿大用格里羅器的很多，有幾處用二系接觸式，以鉑作觸媒，也有幾處用釩做觸媒的。他們的規模，比歐洲的大，幾乎同美國的彷彿。

澳大利亞多用格里羅器，並且有幾處為夾層式，他們的規模極小。

日本所用的大半是格里羅式，彼一個廠裏有戴得利器，和一個廠裏新從美國購到較大的二系接觸器，他們的規模比歐洲更小。

墨西哥，美洲中部和南部，所用的大多也是格里羅器，但是每處祗少有一只二系接觸器與一只內部換熱器。

美國最近用格里羅器的仍有，大概多用冶金得來的二養化硫做原料。在近六七年內建設的，有外部換熱器亦有內部換熱器，大都多用釩做觸媒。他們的趨勢，是創設規模極大的工廠，以製巨量的硫酸。

概括的說，美國的二系接觸器，最可採用。在構造和改良方面着想，應當注意成本輕，和作工消費少。並且對於佈置，尺寸和構造的材料，也要切實的計劃。他構造的材料，大概用鑄鐵，然在美國某一廠裏，用鋼製成此器，總之此器的製造，要選不易腐蝕的材料，照此理論，最可取的材料，當推鉻鋼，然其價太昂，至今尚未有用之以製換熱管者。

弗來得爾與柯雷法斯反應之研究

P. H. Groggins and R. H. Nagel 原 著

梅 卿 編 譯

讀化學的人，都知道弗來得爾與柯雷法斯 (Friedel and Crafts) 的反應，在有機化學上佔有很重要的位置，因爲利用牠而能製出很多有機化物來。這個反應很簡單，就是兩個或兩個以上的物質(通常一爲芳族碳氫化物一爲氯化物)化合，而用固體氯化鋁做接觸劑，使牠們很順利而完全的反應起來；但是若不用氯化鋁的話，則這種反應完全沒有，所以在這裏，我們就可以看出弗柯二氏反應的重要性了。

我們知道，利用這個反應，可以製出許多炭氫化物，醛，酮，酮酸等；但是毫沒有問所用的氯化鋁表面的大小，或形狀的不同，對於我們所得的效果，有否差異。若所得的效果是一樣，則此反應的價值，不過如是，亦無須多的討論；若不然 則我們就要尋個究竟，到底牠的表面應用的時候大點，我們所得的效果大，或小點我們所得效果大，這就是本題所要討論的目的。

製酮酸時，所用之氯化鋁，其形狀大小對於產量之關係。

研究這個問題，當然用不着舉出製各種酮酸時所得的效果， 僅舉其一，姑以 4'-氯-2苯甲醯苯甲酸 (4'-chloro-benzoylbenzoie acid) 爲代表。在製此酸之前，我們要注意下列幾點：

(1). 製 4'-氯-2-苯甲醯苯甲酸時， 氯化鋁形狀大小之效果與作用時攪動之效率，有密切之關係，如攪動效率高，卽應用豆狀大的氯化鋁結果亦很好；(2). 但是若作用混合體貯有多量的氯化氫氣 (Hydrogen chloride) gas， 則產酮酸量爲之大減；反以，若逐出反應時所發生之氯化氫氣，則產酮酸量就可增加； (3). 我們可先決定 4'-氯-2-苯甲醯苯甲酸在各不同溫度時之水內溶解度。溫度愈高，則此酮酸在水中之溶解度愈大。是以爲避免失去過多之酮酸於水中計，一切過濾及洗滌手續，均須於 24°C. 左右舉行。

應用弗柯二氏反應時，吾人究用粒狀或塊狀之氯化銘，必要實際上商榷一下；若與粉狀相比較，則前二者有(1)於貯藏時與應用時均少吸收濕氣，及 (2) 易傳入反應器內兩優點。但在另一方面言之，粉狀氯化鋁，雖無特著之優點，然而用之甚廣，論文及雜誌上屢列舉之。本文卽討論氯化鋁之形狀大小對於所產生酮酸量之影響。

I. 在玻璃器械內，製 4'-氯-2-苯甲醯苯甲酸時，氯化鋁形狀大小對於產量之影響。

今就製 4'-氯-2-苯甲醯苯甲酸而言，我們用四種體狀不同之氯化鋁來做試驗：第一，塊狀——直徑約爲 15 至 20 耗；第二，豆狀——直徑約爲 4 耗：第三，海沙狀——直徑約爲 0.5 至 1 耗；及第四，粉狀。大概的體狀有上述四種；但是嚴格的說起來，前三種內粉狀仍有。

第一次所行之多數試驗，係用一 2 姘三頸圓底罇爲作用器，所用之玻璃攪動器，直徑爲 1.5 吋或 3.8 糎，每分旋轉 150 次，不能造成一種均勻一致的作用的混合體，以致產量大受影響；若用較細之氯化鋁則易得一種較均勻一致之作用混合體，致產量較增。在這種情形之下，卽再增加反應時間，對於所得結果，亦無所補。

表一•

	實驗次第	氯化鋁	時間 鐘點	產量 百分率	所得產物之融點* 攝氏
第一組	1	塊狀	6	70.5	148°5'
	2	豆狀	6	85.0	148°6'
	3	沙狀	6	92.3	147°8'
	4	粉狀	6	92.3	148°0'
第二組	1	塊狀	9	63.0	148°0'
	2	豆狀	9	81.0	147°6'
	3	沙狀	9	90.3	148°0'
	4	粉狀	9	93.0	148°4'

本實驗所用各化合物，及其分量濃度與試驗溫度如下：

(1)　苯二甲酸酐(工業上製的) 148 克 = 1 克分子量

(2)　氯化鋁　306 克 = 2.3 克分子量

(3)　氯苯(沸點 132°C•)　675 克 = 6 克分子量

試驗溫度 = 50°C•

*註：純 4'－氯－2－苯甲醯苯甲酸之融點 = 150·0°C.

由上表觀察，我們知道所用氯化鋁的體狀大小與所得產量適成反比例，卽其體狀愈大，所得產量愈少，體狀愈小所得產量愈多。在第一組內，由 70.5(塊狀)至 92.3 (粉狀)之間，相距有 21.8 百分率之差；在第二組內，由 63.0 (塊狀) 至 93.0 (粉狀) 之間，更有 30.0 百分率之差•假在這些實驗裏，我們均用塊狀氯化鋁，那我們的損失是多么

的大；反之，若我們均用粉狀氯化鋁，我們所得增加的利益，是多么的大。由此，我們就可知道氯化鋁體狀大小與產量之密切關係了。在這些實驗裏，二組所用的時間雖不同，然產量上的差別不大。

II. 在瓷釉罈內，製 4'－氯--2－苯甲醯苯甲酸時，氯化鋁體狀大小對於產量之影響。

爲要得比較充分的攪動，第二次實驗乃在一瓷釉圓底八研容積罈內舉行。反應器內裝有一個鉄錨式攪動器，這攪動器每分鐘能旋轉 25 次。器上並安有簿鐵片，其作用在能刮動到罈底的全部。依這種設施所行的實驗，產酮酸量稍有增加。觀下表卽知其詳。

表二•

實驗次第	氯化鋁	產量	所得產物之融點
		百分率	攝氏
1	塊狀	88.5	148°6'
2	豆狀	92.5	148°4'
3	沙狀	94.0	147°8'
4	粉狀	94.3	148°0'

本實驗所用各化合物及其分量濃度與時間及溫度如下：

(1) 苯二甲酸酐 296 克＝2 克分子量

(2) 氯化鋁 612 克＝4.6 克分子量

(3) 氯苯 (沸點＝132°C.) 1350 克＝12 克分子量

試驗溫度＝50°C.

試驗時間＝5 點鐘

由這實驗所得的結果，與第一表相比較，我們就知道所用任何體狀之氯化鋁，產量均有增加；愈粗的，增加愈多。單就塊狀而言，如第一表第一組 70, 第二組 63.0 與本表之 88.5 相比較，則有 18.5 及 25.5 百分之差；由此我們可知不但氯化鋁體狀對於產量有關，而攪動效率對於產量，亦大有關係；於是我們就知道體狀與攪動都是重要的了。

III. 在瓷釉罈內，於低壓之下，製 4'－氯－2－苯甲醯苯甲酸時，氯化鋁體狀大小對於產量之影響。

在第二次試驗時，可以觀察到作用質量是具黏性的，冷却後幾成膠狀；因此，原有攪動不足以破除表面簿膜，致氣化物，如氯化氫氣，不易逸出；然解除這困難亦甚易，祇需稍減低反應壓力，因以吸入熱而乾之空氣。此空氣乃用氯化鈣乾之，及通過電管熱

之。反應罇之管口須與吸收唧筒連接，就可以保持低壓力在 1.5 至 2.0 英吋或 3.8 至 5 糎之水左右。這種設施的優點，就是能從這作用質量裏，很有實效的逐出多量的氯化氫氣，以致產量增加。觀察下表，卽可明瞭。

表三.

實驗次第	氯化鋁	產量 百分率	所得產物之融點 攝氏
1	塊狀	88.9	147°6'
2	豆狀	96.8	147°6'
3	沙狀	96.0	147°0'
4	粉狀	97.0	148°0'
5	粉狀，含百分之1.5三氯化鐵	96.2	148°0'

水實驗所用各化合物及其分量濃度與時間及溫度如下：

(1)	苯二甲酸酐(工業上製的)	296 克＝ 2 克分子量
(2)	氯化鋁	612 克＝ 4.6 克分子量
(3)	氯苯(沸點＝132°C)	1350克＝ 12 克分子量

溫度＝50°C.

時間＝ 5 鐘點

註:本表產量，是兩次或三次實驗的平均値。

由此表與第二表比較，我們卽知產量又有相當的增加。從此可知除氯化鋁體狀及攪動對於產量有關係外，減低壓力，也是一個很重要的要素。

IV. 在球磨機內，製 4'－氯－2－苯甲醯苯甲酸時，氯化鋁體狀大小對於產量之影響。

最後一種實驗，是在一球磨機內行之，在這裏氯化鋁體狀之大小對於產量之影響甚小；因爲所用之任何體狀之氯化鋁，一入球磨機內，不久卽被此機磨碎。用此法所得產量不甚高，平均約在百分之 85 左右，且兩次重複實驗，不能得同樣的結果。但是若應用此機以製其他酮酸，最著者，如 2-苯甲醯苯甲酸 (2-benzoylbenzoic acid) 及 4'－甲烷－2－苯甲醯苯甲酸 (4'-methyl-2-benzoyl benzoic acid) 確能奏效。如用不同種類之氯化鋁，對於實驗亦無大影響。這實驗所用之工業上製之氯化鋁，含有百分之 1.5 三氯化鐵，所得結果，與應用不含鐵而無色的三氯化鋁所得者相差不遠。

觀察第二第三兩表所載之實驗結果，吾人藉悉除用塊狀氯化鋁所得結果大有不同外，其餘用豆狀，沙狀，粉狀所得者却很相近。這就是表明氯化鋁在塊狀時尚有小部分未曾加入反應；因爲這小部份是被一層紅色酮酸與氯化鋁之複合物所覆，致內部不能加入反應，於是產量爲之減低。但用豆狀氯化鋁時，由反應罇內所得之產品，是成一均勻一致之漿糊狀物。從此我們就可得一個結論，卽，得良好的產量，不一定由於用粉狀的氯化鋁，祇需有充分的攪動，就可以得同樣的結果。

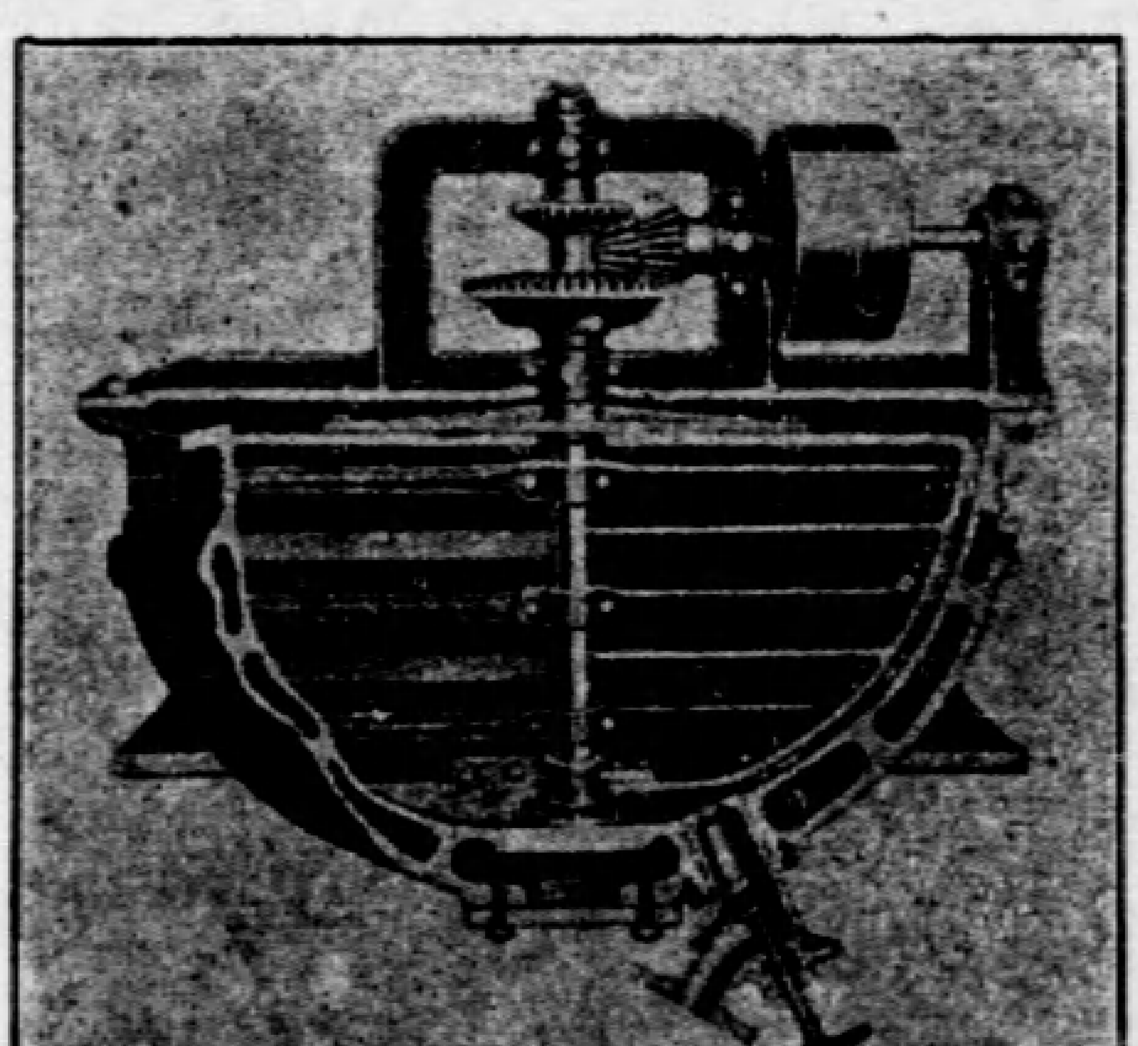
由前面的實驗及結果，我們知道弗柯二氏酮酸的綜合法，在液體狀態時，需要得均勻一致的作用質量及逐出易揮發之氯化氫氣。爲此，所用器械必須能促成完全混合，須能刮到反應罇之壁，及須能破開作用質量之表面，致易逐出多量的氯化氫氣；因此極平常的鉄錨式的攪動器，不易奏效；但如用下列二攪動器(圖一與二)則效率很大。再者，弗柯二氏之反應必需在無水狀況下舉行，反應罇定要用蓋蓋緊，定要有合宜的凸邊接合，並預備些軟墊箱，以避反應時濕氣透入。

圖一。直葉攪動機

此機中裝一軸，軸上安數直葉，旋轉時可將大塊之物打碎，使生均勻之混合作用，並破其表皮，致易逐出所發生之氣體。

圖二•雙動作攪動器

此器裝有兩排分開之活葉數個，向相反方向旋轉。另有鋼刮葉可刮動罇內所積之黏性物質，免其黏於罇壁上，致礙反應。



酮酸損失量之確定法

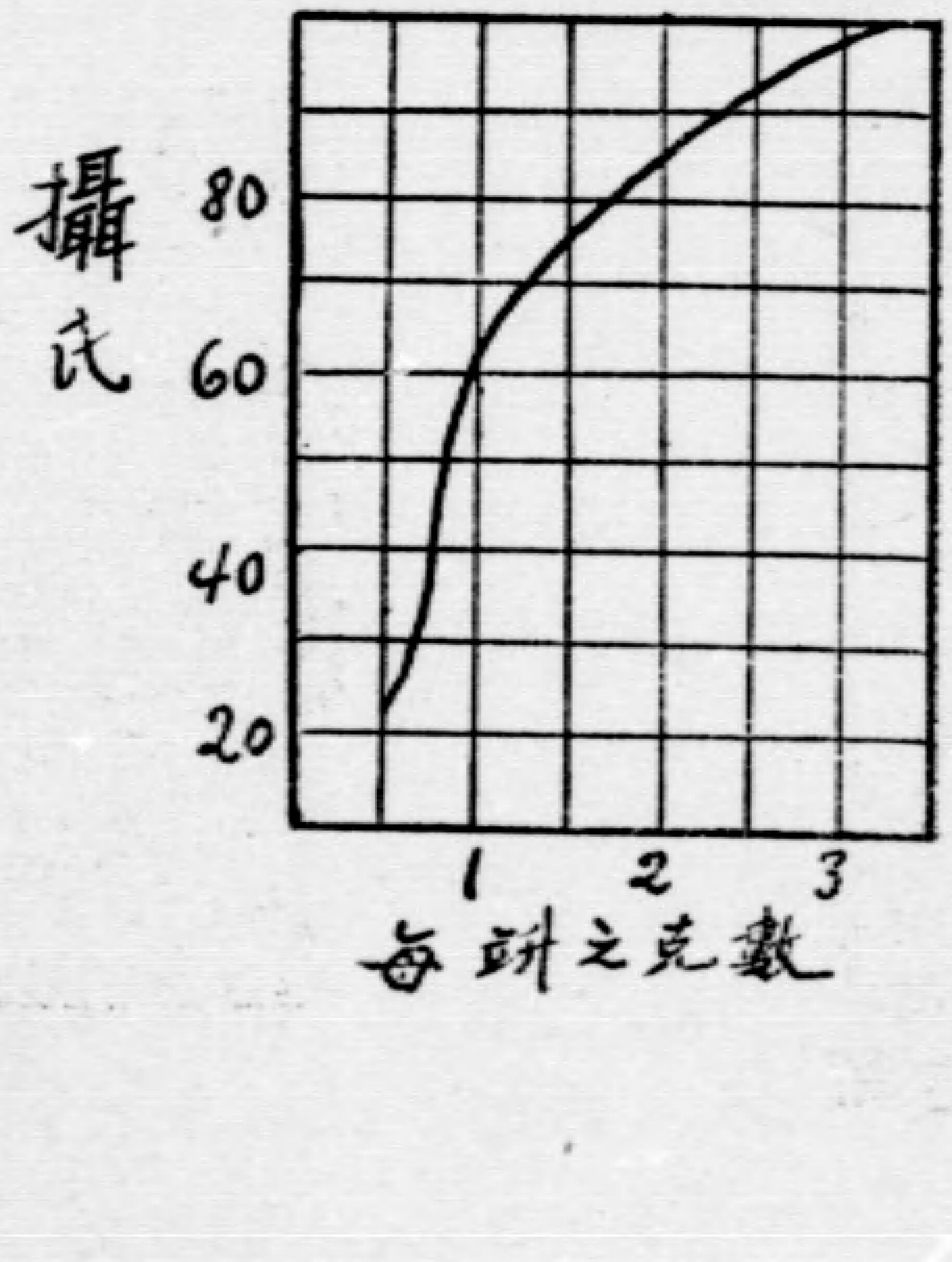
在製酮酸時，往往有少數的產量損失，損失多寡，不可不知。在這裏所行的提取及化純法，就是用 26 竔之水的去洗滌兩個克分子量的產物。這溶液包括：(1)約 8 竔之 1 法流酸溶液，內含有由鋁複合物水解所生之 2.3 克分子量之硫酸鋁(2) 約 8 竔因酮酸重複沉澱而遺之酸性水；及(3) 約 10 竔洗此不純及重複沉澱之酮酸之洗滌水。

由其他實驗， 4'-氯-2-苯甲醯苯甲酸在水的溶度，已先決定； 結果，如下圖所示，所損失酮酸量與溫度成正比例；換言之，卽溫度增高失量愈多。爲此，過濾及洗滌手續宜在低溫行之，最好在攝氏 24 度；甚至在此溫度，單就洗滌一項，都要失去 4.6 克。

爲確定因溶解於水所生之總損失量起見，取用一純 4'-氯-2-苯甲醯苯甲酸試樣，依平常方法提取及化純此粗酮酸。總失量尋出爲百分之 1.96.此數卽表示在這酸溶液裏約增加了百分之 1 的損失量。現在我們加入百分之 2 (作爲損失量) 之酮酸至實得的產量，則所得結果卽與理論的產量相近，由此我們就可知弗柯二氏反應的價值了。

圖三 4'氯-2苯甲醯苯甲酸

在水之每竔克數之溶度



民國廿二年十二月於光華大學

氮——生命之保全者與毀滅者

譚國榮

氮之一物，吾人熟知久矣。其性質之離奇，作用之怪僻，實不能不使吾人大為驚異。何則？蓋彼之性格靜如處女，動若脫兔；保全生命者氮也，而毀滅生命者亦氮也。此種矛盾現象，氮一身實而有之，豈不奇哉！欲明其致此之由，不能不略知其心質。

普通之氮，性極高孤，不輕與外物發生關係；蓋普通之氮，由二氮原子合成，各以三親和力線 (Triple Bonds of Affinity) 相結合。其分子中之親和力，取給於本身，無須仰給外物，其結合極堅，欲將氮分子分離為氮原子，非加以强大之外力不可；然此種强力，得之不易，故氮常為分子而存在，保存其高孤之個性。

設將氮之親和力破壞，使成為游離之原子，則氮又變為極活動之份子，隨處搗亂，四出尋求配偶，以供給其所需之親和力，此種結合本非氮之素願，乃出於不得已，一旦有機可趁，卽行逃離，亦若如此社會將無甯日。由碘及氨 (Ammonia) 互相化合而成之三碘化氮，$N \lessdot^{I}_{I}{}_{I}$，可為明例。將此三碘化氮小心乾之，略加一觸，此不幸之結合，卽宣告離婚，而復為孤男寡女矣。

對於氮之性質，已略說明。其所以成為生命之保全者及毀滅者卽基於此二極端之性質。茲再言其對於生命之影响。

吾人日處空氣包圍中，而不覺有極端之壓力加於吾人身上，其實吾人身上，每平方寸常受十五磅之壓力。此種空氣之成份，簡言之，除少量之雜質及惰性氣體外，其容量氮約佔79%，氧約佔 21%，氧者吾人日常吸進以養生者也。至於氮之效用，在調節吾人所吸進之氧氣，使其在體內所生之氧化作用，不至過劇，以適合於生物之生活。設無此多量之氮調節其間，吾人必因氧化作用過劇而致死亡，如此則吾人所藉以養生者一變為喪生者矣！

再者空氣中若無多量之氮混合其間，則當吾人取火吸煙時，恐因燃燒過烈，延及他物則不但吾人生命受其毀滅，卽全宇宙各物將易變為灰燼，有氮為空氣中氧之調節劑，動植物乃得繼續繁榮於其間。

動植物之營養物中，氮為主要元素之一，動物食品可分為脂肪質蛋白質澱粉及炭氫水化物。其中之蛋白質乃由氮所組成，植物之肥料，俱以氮為主要原料。氮之被吸取形態為氮化物；或由生長于植物根上之能固定氮之微生物 (Nitrifying Bacteria)，先將空中之氮固定，然後由植物吸收，而將之轉化為各種複雜之氮化物。再由食料中輾化生於動物體內，經消化作用，此複雜之氮化物，復分解為較簡單之形式；一部為動物所吸取，

以爲原動力，一部排洩於外，爲含氮之肥糞。此排泄物施於田中，復生食品，於是完成循環週，名曰氮氣循環。(Nitrogen Cycle)。空中雖充滿氮氣，然不幸動植物皆不能直接吸取之，必須由氮化物方能吸進；否則吾人一呼吸間之量，足抵一早餐之滋養力有餘，如此又何須乎鷄卵牛乳哉！

前段曾述氮原子性質極爲活潑，與他物化合時，極易分離；其分離時且發生多量之熱而爆炸。此乃由於氮原子常有與本身互相結合，而復爲安定分子 (N_2) 之趨勢。於是人類卽利用氮之此種特性，以殘殺人類，摧毀文明。

氧與氮互相化合而成之 NO_2，乃爆炸物中最烈之基，此基由硝酸與各種炭氫化物及其衍生物相合而成各種爆炸品。其殺害力之廣與摧毀力之强，遠非刀矢鎗劍所可比擬。歐戰中德之徐柏林 (Zeppelin) 之能作虐於倫，而使英人聞聲膽裂者；一二八之役，飛機之能作惡於閘北而同時轟毀吳淞者，皆硝化物之作怪也。苟無氮任其利用，則彼之飛機大炮雖犀利，然又何所憑藉哉！

歐戰之役，傷亡之衆，何止千萬，强半由硝化物之賜。當戰事之初起，雙方皆兢兢以斷絕敵方硝化物之接濟爲急務；結果德人不敵而受困。苟非德化學家之努力，發明固定氮氣之法，則戰事早已結束矣，何至延長數年之久！(戰前各國所用之硝化物，多仰給於智利之硝石。)

最初用以作戰爭之硝化物爲硝化鉀 (Potassium Nitrate)，混以硫及炭而成之火藥。惟性不甚烈，且燃燒時有固體殘餘，故現已爲用不廣。後化學家取硝酸及硫酸之混合液，使之與各種炭氫化物及其衍生物化合而成各種猛烈之爆炸物；性旣猛烈，燃燒後絕少灰燼，故較完美。其最重要者約有下列數種：玆分述如下。

(1) 硝化纖維 (Nitrocellulose)：一置淨棉花或他種纖維於硫硝二酸之混合液內，約經十五分鐘，取出洗淨其酸質卽得。硝化纖維亦名棉花火藥。因燃燒後生無色之氣體，故又名無煙火藥。其爆炸力極强，若將其研爲粉末而裝置，能將鎗炮爆破，故先溶於醚 (Ether) 及酒精 (Ethyl Alcohol) 中，使成爲膠狀物體，切成小片，以便裝置。

(2) 硝化甘油 (Nitroglycerine)：一加硫硝二酸於甘油中卽得。性極危險，蓋易沛爆發也。硝化甘油乃液體，不便轉運，故常以多孔之泥土吸收之，以制炸藥。若使與硝化纖維相和，成膠狀之炸藥 (Gelatine Dynamite)，性更完美；此法爲瑞典化學家諾貝爾 (Nobel) 所發明，卽著名世界諾貝爾獎金之主人翁也。

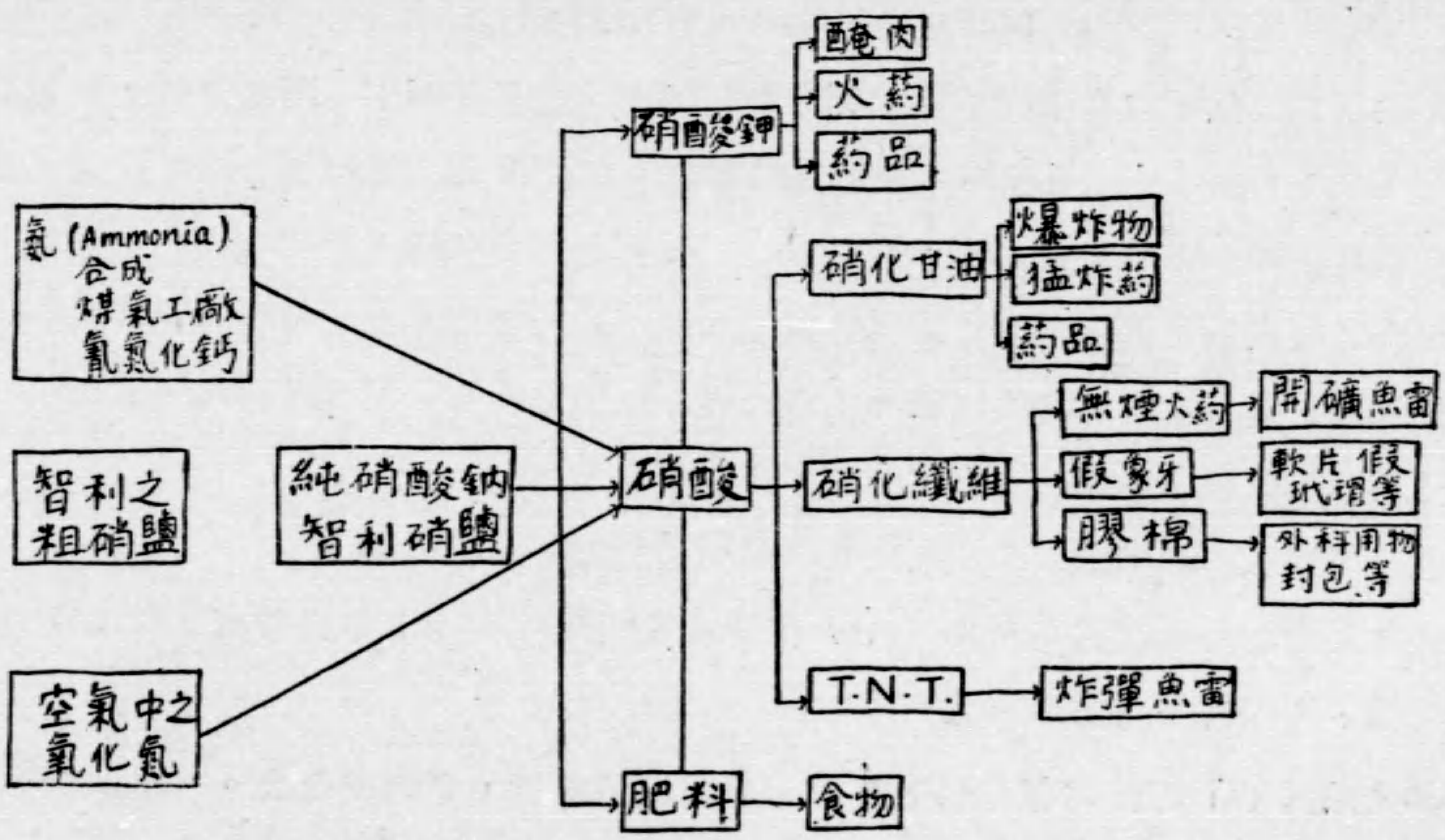
(3) 三硝基甲苯 (Trinitrotoluene)；一此著名之炸藥 T. N. T. 也。加濃硫硝二酸於高溫之甲苯 (Toluene) 中，經相當時間，卽得 T. N. T. 三硝基甲苯爲白色固體；受平常之衝擊，並不爆發；但一爆發後，則猛烈無比。T. N. T. 爆炸時常帶黑煙，故彈從何處，可由黑煙見之；惟發自何方，亦易被敵人查見耳。多用之以填炸彈地雷及魚雷等。

(4) 三硝基酚 (Picric abid or trinitrophenol) 亦名苦味酸：一將酚與硝硫二酸混合，即生成黃色之三硝基酚。歐戰時法人最有利之炸藥也。融解三硝基酚於 100° 之水中，則極少爆炸之危險，必藉他物之導引，方能爆炸。用以製造炸藥時，常混以松香，以減少其爆烈性。三硝基酚又可用爲媒染劑。

觀乎此可知氮之一物，不論在戰事上或在肥料及食品上，極均重要。戰時固需要多量之氮以製硝化物以抗敵人；在和平時，亦需巨量之氮以培養生物。然此多量之氮，來自何處乎？歐戰以前各國所用之硝化物，多來自智利。其地所藏之硝礦，其面積廣凡二英里，長凡二百英里，厚約五英尺；每年輸出各國，只出口稅一項之收入，已數千萬金。自歐戰期中，德國首先發明固定空中氮氣之法，此後經各國之殫精竭慮，加以改良，固定氮氣之法，乃大告成功。因固定氮氣之事業，平時既可增加國家之財富，戰時復不懼海口之封鎖。

自九一八事發生後，國人奔走相告，莫不以收復失地爲急務；然欲收欲失地，非先充實國防不可，而硝化物之供給，尤須急謀自給。蓋以我國家海軍力之弱，開戰後，海口可隨時可受人封鎖；如此則海外硝化物之來源，即行斷絕，苟不能自給，吾人將坐而待斃矣。

茲將硝化物之來源及用途，列表於下，以明其重要。



言至此，不能不略說固定空中氮氣之法；但只能將其原理，略加說明，至其詳細步驟，非區區數言所能盡。

固定氮氣之法，種類繁多，其已著成效者，有電弧法 (Arc Process)，哈柏法 (Haber Process)，氰氮化物法) (Cyanamide Process)，茲分述於下。

(1) 電弧法 (Arc Process)：——法用電弧之强熱，使空中氮氧二氣，直接互相化合而成氧化氮。(NO)。

$$N_2 + O_2 \longrightarrow 2NO$$

此氧化氮復與氧氣結合而成二氧化氮。(NO_2).

$$2NO + O_2 \longrightarrow 2NO_2$$

二氧化氮與熱水相和而成硝酸。

$$3\,NO_2 + H_2O \longrightarrow 2HNO_3 + NO.$$

氧與氮化合，在 3000 度平衡狀態下，約得 6% 之氧化氮。其所得甚小，而所費之電力極大；苟非有極廉之水電力，此法多不能成功。雖然用人較少，工資較廉，但其所產之硝酸，銷場有限，終得不償失也。

(2) 合柏法(Haber Process).——此法乃在高壓及適當溫度下，由接觸作用，使氮與氫互相化合爲氨。(NH_3)

$$N_2 + 3H_2 \longrightarrow 2NH_3 + 26{,}000\ \text{cal.}$$

再由奧斯特握法 (Ostwald Pracess) ，藉鉑之接觸作用，將氨氧化爲硝酸，可得 90-95% 之硝酸。

$$NH_3 + 2O_2 \longrightarrow HNO_3 + H_2O.$$

此法所需之氮，取自液體空氣；氮沸點比氧高，先蒸發而出。所需之氫，則取給於水煤氣 (Water gas)。二氣旣備，先適量混和之；在 200 之大氣壓及 500oC. 之溫度中，使其通過接觸劑；其生成之氨，約得 6%。氨再爲水所吸收，可得 20% 之溶液。其未經化合之氮與氫之混合氣體，使再通過接觸劑，如此循環不息，可得 70-90%氨。

接觸劑之最有效者，爲氧化鐵及稀有金屬，如鈾化物等。然此種接觸劑之配合，及管理法，德人猶嚴守祕密，故哈柏法在德國特著成效。

近來亦有改良哈柏法以固定氮氣者，玆限於篇幅，只得從略。

此法之優點爲 (a) 製氫最廉， (b) 所得之氨頗純淨， (c) 原料豐富，及 (d) 小規模之工廠，可因需要而隨地建造。

其缺點爲 (a) 工程尙有難題待决，及 (b) 創辦費巨，而修理費大。

(3) 氰氮化物法 (Cyanamide Process)：——此法將生石灰及焦炭于電爐中熱至 3000°C., 使化成二炭化鈣 (Calcium Carbide)。由爐中取出，待冷後研爲粉末。置此二炭化鈣粉末於溫度 1000°C. 之特式電爐內，而導純潔之乾氮入內以生氰氮化鈣 (Calcium Cyanamide)。

$$CaC_2 + N_2 \xrightarrow{1000^\circ C} CaCN_2 + C$$

將氰氮化鈣研成粉末後，置於盛水之旋轉混合器 (rotary mixer) 內，各種雜質，如未變化之二炭化鈣及磷化鈣等，卽行分解而除去。然後置入高壓蒸煮器 (autoclave), 再放進水蒸氣，於是二炭化鈣卽與水化合爲氨及炭酸鈣 (Calcium Curbonate)。

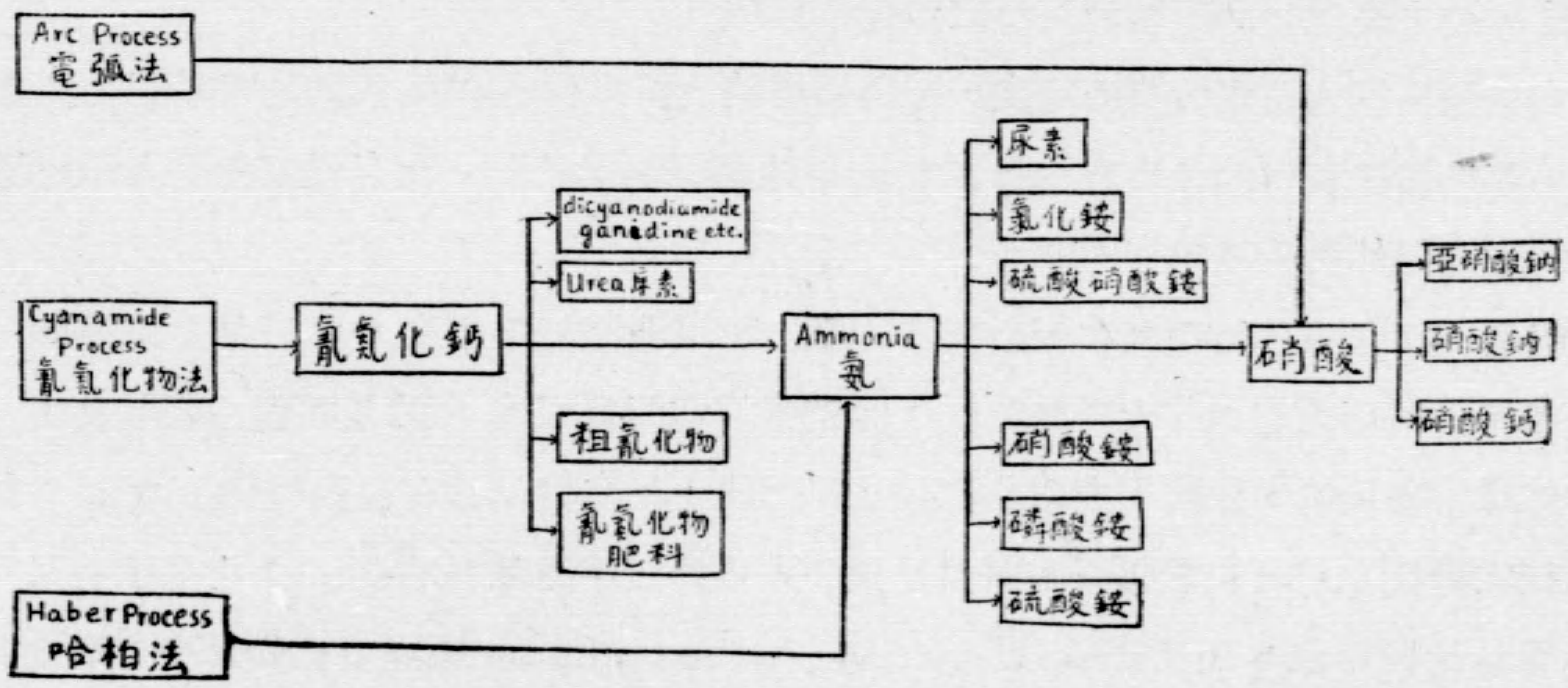
$$CaCN_2 + 3H_2O \longrightarrow CaCO_3 + 2NH_3$$

此法之優點有；(a) 用電較少，(b) 氰氮化鈣，可作肥料之用， (c) 製成品易於轉運，及管理方法已明白。

其缺點有 (a) 管理複雜，部分過多，(b) 用人較多，工資遂昂 (c) 灰塵過多，有礙衞生，及 (d) 所製成之氨，較哈柏法爲昂。

吾書至此，可告結束矣。總之氮之地位，不但操生殺之權；且在戰時固極重要，卽在和平時亦不可或缺。各國政府，對固定氮氣事業，竭力提倡。我國政府，近亦有建造制氨廠之議，吾望其早觀厥成。現再將各種固定氮氣之方法及其生成品之關係，列表於下，以作此篇之結束。

固定氮氣法及其產物相互關係表



太陽系的極限

Henry Norris Russell 原著

沈煜譯

(一)

我們的太陽系是何等廣大？現在已發現的最遠的行星和太陽間的距離，約有5,000,000,000 哩；但這是還不是極限，因爲有很多的慧星較此更遠。我們可以相信，許多慧星是由比較地球和太陽間的距離遠一千倍的那裏過來的，他們現在所走的囘路只少與來時所走的相等，可是，要確定最外的極限，却量不十分容易。

從沒有在十倍於地球的距離那邊，曾經發現過慧星。他們是達到了不能目視的長度後，漸漸地消失了。我們要去找尋他們路徑的極端範圍，祇有用計算的唯一方法，此法端賴測量他們在可以觀望的區域中之運動速度。在任一離開太陽的已知距離中間，有一定的速率，叫做“抛物線的速度”(Parabolic Velocity)，一物體以此與太陽相關的速度在任何方向運動時，恰能從太陽的引力中脫出，進 沒有限制的空間。運動愈快的物體，其避脫得愈速；但較緩的，於達到最大的距離後，就要撤囘。在地球和太陽間的距離，或一個“天文單位”(Astronomical Unit) 時、那抛物線的速度，等於每秒 42.09 粁。一顆慧星的最高距離達一百天文單位時，其速度要減小二百分之一，倘其最大距離達一天文單位時，其速度就減小二千分之一，依此類推。除非我們觀察準確而能包括軌道的一千條長弧時，我們就很難希望將一個具有 10,000 單位的最高距離，而在 350,000 年中囘轉的慧星，和另外有抛物線軌道而永遠不回轉的一個相明辨———雖然 10,000 天文單位，較之最近星的距離的百分之四還要短些。

究竟慧星得能達到何等的遠度，而仍是屬於太陽系呢？假使我們的系是完全孤立在空間，那麽當然無疑的是沒有極限了。如果他很慢的退回到一個有限定而很大的距離，太陽的引力仍然能夠將他拖回來。

但是空間散佈着這些也在吸引慧星的星。所以我們可以預期，當慧星走到那樣遙遠以致任何星的引力超過了太陽的時候，他就墜入空間的深處，於是我們不能復見了。這是當然時常發現的，倘使太陽和星都在空間停留，只有慧星是在自由行動、於是，那太陽的統轄範圍也就可以於每一方向引伸到最近星的一半距離左右—— 大小是依着星與太陽的質量比例而定。在我們和南門第二星 (Alpha Centauri 係現時已知星中之離地球最近者) 的中間，極限約 110,000 爲天文單位或一又四分之三光年。在其餘各方向中，將有二倍或有三倍的遙遠。

但是星是在流動着的，因此就產生了一個很大的差異，Öpik 教授新近所發表的有趣

味的討論，足以示明此點。Öpik 是一個著名的 Esthonian 天文學家，並且在流星的觀察計劃者中是一個主要人物。這計劃我們在上月己討論過了。

降近遠日點，彗星移動很緩。例如，一個具月一百萬年周期的慧星有 20,000 天文單位的最高距離，行經此距離的最後一百單位，他離去後再撤回來的時間，須要 90,000 年。反言之，星都以每年在六個或是八個天文單位的平均速度移動。在 10,000 單位的距離中，一個和太陽質量相等的星，能夠吸引慧星的力量，較之太陽在遠日點時之吸引力要大四倍：但是，星以上述這樣的速度移動，三千多年來，還未有照上述的那樣接近慧星。故他對於慧星的吸引，不過是一極短的拉動，而太陽確是穩固地悠久地在吸引着慧星。所以，雖在很大距離的中間，太陽總是有力的廣佈着，而他的有效的範圍，是比較曾經假定的大得多了。此星吸引慧星的純粹影響是將他拉近其軌道上最近一點。當星走得愈近，吸引力越大；但是，在接近的時候，所需的時間也就縮短了。是以，這個影響的增加，不及一固定物體之穩固拉動所生者增加的那樣大。

(二)

當星實在接近着慧星的時候，就發生一很大的擾動，這擾動足以將慧星由太陽那邊拖向一拋物線或是雙曲線的軌道上去。若一個慧星距太陽 20,000 單位時，則此星須將行近在 200 單位左右，倘太陽慧星相隔一百萬單位，則此星只須行近 1400 單位左右。這些星都是離開的很遠，那麼接近是很稀罕的。據 Öpik 計算倘使太陽有一叢慧星，他們有很長的軌道，以致最大距離約是一百萬天文單位；那麼，須要 3,000,000,000 年後，慧星全數中的一半，因途中與流星猝然相遇的緣故，終於散失了。距遠日點十分之一的上述距離中間，僅有百分之七的慧星，於同一時期內失去（這是大概是行星系的估計壽命）。在較遙遠的距離中，一個慧星的周期大約是 350 百萬年，若是距離很近，大約 11 百萬年，所以在他們未隱沒於空間以前，前一類慧星，或者可以數歸於太陽，而後者回歸之次數更多。

周期頗長的慧星，能繼續撤回而復現於太陽的近側，誠非偶然，如欲說明這種事實，那近日點的距離一定比較兩個天文單位的距離要短一些。在這個距離之中，軌道的速度等於每秒 30 粁。在遠日點，倘距離是 100,000 單位，依了面積的定律，軌道的速度為每秒 30 粁之五萬分之一，或每秒六十粁，或兩尺左右。如欲增高到每秒八呎的速度，應將近日點的距離加倍，且從地球上去觀瞻慧星，也就絕望了。

若在這個距離中間，流星所加於慧星的引力，可以授與他每秒十呎的速率，我們人類便不能再見此慧星。上述速度，不過是慧星逸去的速度之四十四分之一，且產生相當影響之相遇的機會，約 2,000 倍於前者。所以，一個已經發現了的，有 10,000,000 年的

周期的慧星，當他轉回被地球上人所見着的時候，具有比載少的同等機會去接近太陽。Dr. Öpik 據一次詳細的硏究，遂下了一個結論：一個有一百萬年的周期的慧星，至多得有一同樣的機會，在太陽系的過去歷史中，繼續回至他能發射光暉和產生尾巴的地方。至於，周期還沒有到 30,000 年的慧星，所受到的影響更小。但是此類的慧星，有很好的機會去改變他們行動的方向，以及軌道平面的斜角。進一步說：長周期的慧星的軌道平面，實際上是處於無秩序的狀態中，且具有一切的可能斜角。

星的吸引，并不是慧星所慮的唯一與主要的危險。慧星一旦趨近於大行星時，其軌道平面，將有極大的移轉，甚至其速度大增，飛翔而去，永不復返了。此類擾動差之平均值，以 Halley的慧星說明，此慧星是永遠不會過於趨近任何一個行星，致大變其軌道。然而，在已經發現的二十七次撤回的中間，此類行星的擾動，已經產生了一年半的平均差異於繼續回轉的年限的中間。這回轉的時間是變動不定的，大約平均是七十七年。

(三)

在距太陽一個天文單位時，這周期上的改變和速度上每秒 7.8 粎的更迭相合。此種改變固屬不大，但是很長周期的慧星的速度作等量的改變時，必產生很驚人的結果。一千年的周期中之平均變化，爲一世紀；10,000 年的周期，能夠增加 8,000 年，或是減少 3,500 年。當有 100,000 年的原始周期時，慧星就可乖離到拋物線的軌道上去，而後散失了。

行星的引力，比較一般星體的引力爲大，於是對於我們系統的範圍，就加以限制。一個具有 10,000 年的周期和距離遠日點九百三十天文單位的慧星，已經很顯明地表示出退回的距離和退回的時期有很大的差異。一個具有已經達到了三四千單位距離的慧星，當他第二次撤回時，就會發生被逐出系統外的危險。除了這些游離不定的以外，那麼我們的太陽系似乎要這樣規定一個限極，這限極是不能過大於地球與最近星體間的距離的百分之一。

慧星雖不斷的失去，而剩下的仍是很多，却是一件異常的事實。恐怕比較現在所屬於我們統系還多的慧星，一定是已經在從前由太陽系逐出來了。無論他們是受到行星或是星體的影響，他們終於隔離了。流星的引力，雖然足夠於太陽的管轄區域內，去引出一個慧星來，但是，他決不能將慧星拖在一起、使他跟着在他的軌道上走。慧星獨自飄流着，隨即沿直線的路徑，進行於「間星」的空間族受流星的引吸，忽兒偏東，偏西，忽兒朝南，朝北，但不與任一流星結伴——如古代聖經上所云飄流的星，永遠藏在黑暗的中間

宇宙線

康普頓著

王舜緒編譯

宇宙線的研究，在近代物理上，因其現象的細微，觀察的精密，實驗者旅途的冒險，分析的正確，和推論的廣大；已被認爲唯一的奇跡。我們相信牠可以告訴我們許多宇宙現象的消息；大而至於世界的進化，小而至於原子核心的構造。可是宇宙線究竟怎樣的發覺呢？牠的性又質是如何？這些問題，現在讓我們來討論一下。

自從密里根敎授(Professor Millikan)在七年前發表了他的宇宙線起源論以後，就引起許多科學家和學者注意到宇宙線研究的旨趣。密里根氏認爲宇宙線是由於間星 (interstaller space) 中間原子的構成而生。並且證明這只是宇宙連續前進的一個循環程序的步驟。 根據他自己的學說， 密里根氏就假定宇宙線是一種電磁輻射 (electromagnetic radiations) 或稱做光子 (photon). 這種光線和 X 光線， γ 光線相似，不過波長較短，穿透力較大。我們知道 X 光線的穿透力，已是不小，可是由實驗證明：吸收一半X光線需要一吋厚的水：吸收一半 γ 光線，需要一呎的水；而吸收一半宇宙線，就得需要二十呎的水。這也就是牠之所以能穿過大氣層，經房屋頂板，而影響到實驗室內試驗儀器的緣故。據密里根氏計算：四個氫原子組成一個氦原子時所放出來的能，足以生一宇宙線。是故密里根氏以爲每一宇宙線係廣闊寒冷間星中間，每一原子誕生的啼聲。在同一程序當中，假定較重原子的構成(如氧，硅，鉄等)就會發生穿透力更强的宇宙線。在萬有引力之下，這許多已構成的原子，集合攏來，形成一組星羣或一團星雲；(nebulae) 這時就會放散出光或熱來。而這光能和熱能，經過廣闊天空，復由於一種不可思議的方法，又轉變爲陽電子和陰電子。從這兩種電子的結合， 又可以產生一個簡單的氫原子。於是宇宙間的大循環，就這樣週而復始的輪流不絕，世界也就繼續不斷的永存着。這便是密里根氏關於宇宙線的起源和性質的理論。

不久以後，有詹姆斯傑安氏 (Sir James Jean) 發表了他的輪替學說。 (alternative view) 他以爲這許多宇宙線的發生，是由於物質毀滅的結果，而不是由於物質的轉換。傑氏認爲：倘使宇宙線是光子，和普通光及 X 光線一樣的話， 宇宙線內穿透力最强的一部分，就應當有等於陰陽電子猝然結合以成氫原子時所放出來的能力。但是密里根氏却指出穿透力最弱的宇宙線的能力與由氫原子合成氦原子的能力相當。傑氏則主張穿透最强的宇宙線是生於氫原子本身的毀滅。因此傑氏以爲宇宙一天天的衰敗，也就是這個

線故。接着傑氏之後，法國青年物理學家杜維葉氏 (Dauvillier) 又提出一個關於宇宙線性質的輪替學說，可是他不根據宇宙線是光子的說法，而根據宇宙線是從太陽上射到地球來的電子的觀念。這種學說 和史篤謨氏 (Störmer) 的理論相似。史氏以爲北極光的誕生，就是由於向地球射來的電子而成的。杜氏得到了太陽表面上微點具有極强電場的佐證，并且估計這上面有幾千萬萬弗打的電壓；他假定這樣極强的電場，就會使電子向各方面放射。而其中一部分，當然會向地球射來。一旦與地球接近，牠們就會受地磁場的影響；同時產生集中在地球兩極的極光線、比國物理學家羅美得氏 (Abbé Lemaître) 關於宇宙線的起源，更提出一個有趣的學說。因爲威爾遜天文臺强力望遠鏡和分光鏡觀測的結果：宣佈着很遙遠的天體，是在急速的離開地球移動。因此他根據這個結論，發表了他的宇宙學說，他以爲幾千萬萬年前，的宇宙，比現在來得集中。從那時起，開始爆力的擴散，距離很遠的星雲，用着永久加速度的速率，繼續向外飛去。他忖度在初期爆炸的時候，不僅星雲和星羣向遠處投射出去；同時微體如原子，電子，光子，也是向外飛散。依他的理想，這許多很久遠以前世界本體的碎質到幾千萬萬年以後的現在，仍舊飛繞在太空中間，而造成了宇宙線。

以上幾家的學說，誰是誰非，還沒能確切的認定。不過我們所應當知道的，就是：究竟宇宙線是密里根氏和傑氏所假定的不荷電的光子呢？還是如杜維葉氏所假設的荷電的電子呢？或是如羅美得氏所說的各種光線的混和呢？這就需要實際上實驗的證明。五年以前兩個德國物理學家巴得和柯里斯特 (Bothe and koihörster) 用計算管法做了一種實驗。證明宇宙線是荷電的微粒。假使這結論是對的話，那末這種線的强度，在地球表面的各部分，就會因地球磁場的關係，發生很大的差別。我們知道，地球本身就是如同一塊大的磁石，當這些線射向地球來的時候，這塊大磁石，就要使許多射來荷電的微粒起偏斜作用。兩極間的影響最小，赤道附近的影響最大。結果我們倘從赤道走向兩極，這宇宙線的强度也就逐漸增大。關於這種理論，曾有人做過六七次不同的實驗。可是其中大多數實驗者，沒能找到如預測的宇宙線强度那的樣差別。只有克萊相信他可以探求出在荷蘭和爪哇間宇宙線强度的差別。這種實驗是非常重要究意能否尋出宇宙線的强度隨磁緯的地位而變？假使不然的話，巴得和柯黑斯特的結論，就完全不對；也就是說宇宙線內，不含荷電微粒。再者，若是和預測的結果，大致相符，那就表示至少宇宙線內一部分是含帶電的質點。

因此支加哥大學就組織了九個旅行隊，內中大約有六十位物理學家，由康普頓教授 (A. H. Compton) 率領，在過去十八個月當中，分赴各地實地斟測宇宙線的强度。他們

的蹤跡，遍及東西半球的赤道帶，北冰洋及菲洲南部，美洲和新西蘭等地。只有南極地帶沒去，計劃着今年前去。這許多觀測者從海面地方爬上了四哩高的安得斯山 (Anbes) 和喜馬拉耶山 (Himalayas) 的頂巔。並且兩個有能耐的爬山者卡爾伯 (Carpe) 和柯汶 (Koven) 在阿拉斯加附近麥金里山 (Mt. Mc. Kinley) 下遇着冰川喪失了他們生命。可是他們在靠近北極地方，得到地面最高處的記錄。這許多旅行隊所得到的結果，示明兩極宇宙線的强度是比較赤道附近宇宙線的强度，要大百分之十五，和預測所示的："由於射來荷電微粒受着地球磁性影響的緣故，這强度是跟着緯度的地位而變化的"恰相吻合。並且還示明地球磁性影響，在高處，要比海平面大上若干倍。當這結果宣佈以後，最初密里根氏以為和他所得的結果相反；可是一仔細檢查他的實驗結果以後，他覺得很滿意的發現他的記錄和康普頓氏所得者，並沒多大出入。

綜合以上幾種實驗結果，已知宇宙線至少含有一部分荷電的微粒，雖然其中也許有一部分是不大受地和磁場影響的不荷電體。此外還有畢卡德和黎鎮乃 (Piccarc and Regener) 在高空氫球內的測法，以及巴得和柯黑斯特的計算管測法，也給與我們一個結論：就是許多宇宙線中間極少數是光子，而大半多數是原子或低原子量的原子核式的放射。這個結果，和羅美得氏假定的宇宙線起源學說相符，我們此時無需假想這些原子是否太初時候，曾經在空間內飛舞過，蓋此說過於縹渺；頗難置信。而斯溫格恩 (Swaun Gun) 及其他許多學者曾以為羣星在空間得視為一很大的高電壓發電器，從這上面，不斷的瀉出高速度的荷電微粒，宇宙線也就因此而產生。這種假定的確實性如何？還是問題。因此現在要想認清宇宙線的本來面目，尚嫌時機未熟哩！

總結起來說；宇宙線確是本世紀新發現的一個奧祕的東西。我們現在固然不能確定其眞性，可是近幾年來，經過許多學者在這方面的努力研究的結果，比較起來，康普頓氏以宇宙線為荷電的質點，密里根氏以宇宙線為一種波浪的輻射或光子；各有其理由和立場，我們眼前只好暫時承認宇宙線內同時含椅電質點與光子。然而宇宙線的重要，以及所以引起世人驚奇的，乃在其所含的巨能。設以電子弗打 (electson volt) 為"能"單位，則燃燒一個氫原子，可以放散出二電子弗打的能；一α微粒從鐳中放射出來時候，就生有二百萬電子弗打的能；而造成一條宇宙線所需的能，要一百萬萬電子弗打，這是多麼可驚的能的含量哩！因此今後我們首要的問題，是在探討如何汲取和利用這驚人的巨能。這事在目前看起來是一個謎，可是一經打破之後，世界又將要開一新紀元哩！

十二，七，一九三三，於上海

氯化苦劑 CHLOROPICRIN CCl_3NO_2 實驗室內製造法概況

張 培 深

毒質之用於歐戰者不下五十餘種，且有用各種毒質之混合劑者，品類繁雜，不勝枚舉。常因原料之缺乏，設備之不周，而難以製造。然製法簡易，功効偉大者亦復不少。氯化苦劑卽其一也。玆略述其在實驗室中製造之方法及所得結果，以供有志于毒質研究者之參考。

氯化苦劑爲英人 Stenhouse 於 1848 年所發現，其法以漂白粉 Blaching Powder 及苦味酸 Picri Acid 合而成，德人初用之于 1917 年一月 Champange 之役，此毒質具催淚性，窒息性與糜爛性。工業上巨量之出產，有下列三種普通方法：—

(a) 用漂白粉及苦味酸直接化合——以漂白粉之水溶液置鍋中，圍以冷卻器，徐徐注入苦味酸，時常搖盪，保持 30°C 之温度，再以分析蒸溜法提淨。

(b) 用漂白粉與苦味酸鈣化合—— Trumbull 氏方法，加水於漂白粉以成漿，再加苦味酸於 CaO 之水溶液中成苦味酸鈣溶液。混合上列兩種溶液，保持在 30°C 旋稍增高温度，竭力搖拌，待黃色退完爲止。再用分析蒸溜法提淨。

上列二法，大同小異，所起之化學反應略如下式：

$$2C_6H_2(NO_2)_3OH+22CaOCl_2 \longrightarrow 6CCl_3NO_2+6CaCO_3+13CaCl_2+3Ca(OH)_2$$

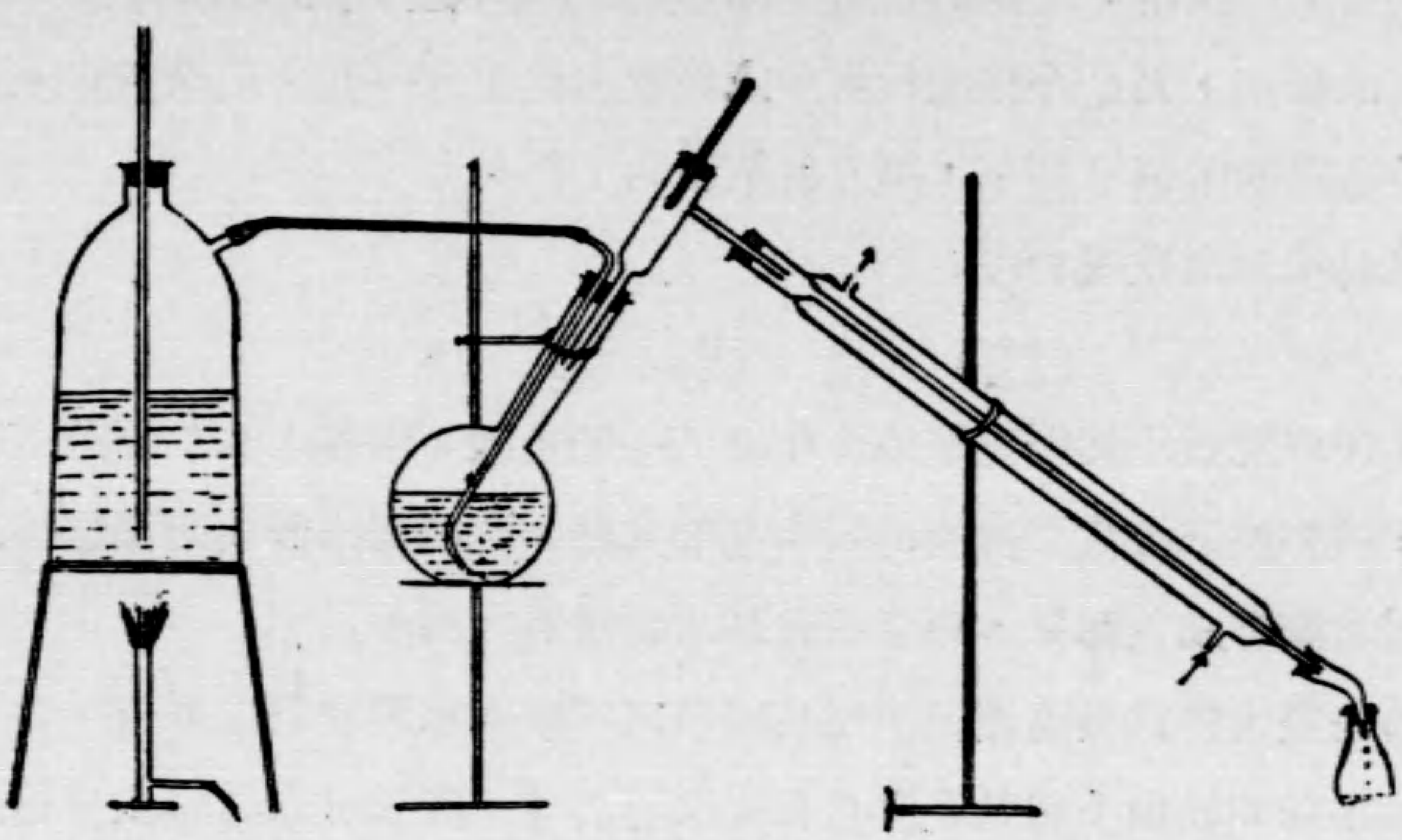
(C) 氯與苦味酸直接化合 — Orton 及 Pape 二氏於鹹性溶液中，溶解苦味酸，使之中和；再通入氯氣，温度約在 5°—10°C 反應如下：

$$C_6H_2(NO_2)_3OH+11Cl_2+5H_2O \longrightarrow 3CCl_3NO_2+13HCl+3CO_2.$$

上舉三法，常用者爲 Trumbull 氏方法，因其簡便尤宜于實驗室中。通常工業上所用之比例如下表：

漂白粉	4,000 磅	第一混合液	30°C
水	1,000 咖崙		
苦味酸	400 磅	第二混合液	
氫氧化鈣	68-75 磅		
水	500-1000 咖崙		

實驗室中可依上表分量之比例，小量配合。先得第一混合液及第二混合液，再合併於一圓底燒瓶內。燒瓶之容量約二倍所配度之溶液。略加以熱，待到30°C 時，停止加熱，用蒸汽蒸溜法蒸溜之，溫度逐漸上昇，約到 85°C 左右，反應開始，氯化苦劑卽分析而出，待燒瓶內黃色退盡，則氯化苦劑全部析出。因其伴水溜出，聚集在容器內之下層，上層爲水所蓋。常溫時頗穩定，故無毒質散出，維蒸汽蒸溜器當適合裝置，各連接處宜緊，勿使氯黃苦劑氣體逸出，適當之蒸溜器可裝置如下：



盛有混合液之燒瓶傾斜置於鐵架上封以二孔塞，一孔連接蒸汽導管，使之達於距瓶底約 0.5 糎之地方。他一孔裝一蒸溜保險頭 Still Head，上封以插有溫度計之塞，置水銀球恰在出氣邊管之口，連此邊管于一冷卻器，出液之一端配以滴液器 Adapter 連入容器內。所用之塞，最宜爲橡皮塞，使全部裝置器緊閉而無氣逸出流入之虞，如此，氯化苦劑始可不至逸出。

依上列方法：配合 100g. 漂白粉，與 208c.c. 水之第一混合液，且復配合 1.8g $Ca(OH)_2$, 166c.c. 水及 10g. 苦味酸之第二混合液。二液合併，熱至 30°C, 再行蒸汽蒸溜所得結果爲 14.85g. 或 9cc. 氯化苦劑。(1 克苦味酸約生 1.6 克氯化苦劑). 檢査此液密度爲 1.65 (16°C). 化此液爲氣，而通此氣體於厚玻璃管。加熱，再導其生成物（卽氯氣）於碘化鉀澱粉溶液中，呈青藍色，故此液爲氯化苦劑無疑。

氯化苦劑之生理作用頗烈。中毒者兩眼受傷而流淚，咽喉薄膜被刺。受毒重者于十分鐘內嘔吐，呼吸短促，漸失知覺以至于死。在含毒 $\frac{1}{200,000}$ 空氣中停留 30 分鐘之羊猴等卽死。沸點爲 112°C 常溫時爲無色液體，化學性頗隱定，可作礮彈之填料。德國用之與雙光氣混合 (75:25) 或與光氣配合 (50:50)，英法用之與四氯化錫 (80:20) 混合，並可用於拋管氣筒手榴彈等，在空氣中得支持五六小時，而毒仍存在，爲毒氣中常用者。

一年來之科學會

許 正 直

(一) 引 言

簡要的說，科學會是一個研究學術的集團。

隨着學校的誕生到現在，科學會已經有八年多的歷史了；八年來的會務，是與日俱進的發展着，會員的激增，工作的推廣，都是確切的明証。但過去的美善，是今日前進的模範，現有的缺陷，乃是今後應行增補或修改的地方。一九三三年來的科學會是在推廣美善與改進缺陷的兩個原則下，努力着革新的工作。

述一年來科學會的狀況於後。

(二) 組 織 述 略

科學會是理學院同學爲研究學術而組織的一個集團，但各人參加與否却一任自由據歷年的統計，理學院三分之二以上的同學是加入的。同時爲求師生間關係之有連絡，與研究工作之切實際有成效起見，理學院教師均爲當然會員。

科學會的全體大會爲最高機關，舉凡職員之選舉，重要會務之推行，均由大會決定之。大會在每學期開始由上屆執委會召集；又必要時，經三分之二以上會員的提議，也可臨時召集之。大會之下有執行委員會，執行大會交議會員建議以及其他一切的事項。此外聘導師二人，以資指導會務。執委會採委員制，設委員若干人，其下設若干部，分別處理各項事務。各部的設立與委員的人數，隨需要而由大會決定。一九三三年春學期的組織，導師與委員人選列後。

導師　顏任光先生　容啓兆先生　主席　許正直　文書　何祚炘
會計　梅　卿　庶務　李景侃　交際　李名嶽
研究　錢　棟　謝賡年　編輯　胡霽林　李增焯　葉鹿祥

本學期第一次大會時，多數的會員，認爲研究工作應當擴充，編輯工作應當加緊，體育工作應當提倡；於是議決研究部增加委員兩人，編輯部增加委員一人，同時添設體育部，置委員一人；因之執委會的組織由七部增至八部，委員總數由十人增至十四人。本學期的組織導師與委員人選列後。

導師　朱公謹先生　容啓兆先生
主席　許正直　文書　沈　焜　會計　李名嶽
體育　姜吟月　庶務　李景侃　交際　梅　卿
編輯　胡淑卿　萬賢揚　戴仁堯　陳宗發　研究　張培深　于紹勳　程競芬　惲　雅

(三) 研 究 工 作

一年來的研究工作，歸納起來，一可以分為三大類，即(一)分組研究，(二)參觀與調查，(三)學術演講。

一•研究組　研究組的分類，是以本校理學院各學系為單位的。在數學方面有中國數學研究組，物理方面有無線話研究組，化學方面有小工業研究組與軍用化學研究組，生物方面有生物學研究組。各組研究員均係自由參加，每組有研究部委員一人主持一切，另有顧問兩人。各組經費除由各研究員平均担負外，科學會亦予以相當的補助。

各研究組所採取的研究方式是不同的。中國數學研究組採取學術演講與公開討論的方式，於一定期內敦請對於中國數學有研究的學者演講，同時並舉行公開討論會，研究問題與發表個人研究的心得等。無線電研究組的工作，可以分做兩部，就是收音機的製造與拍發電報的練習。小工業研究組與軍用化學研究組於製造與比較的兩方面努力，一方研究小工業品與軍用品的製造方法，另一方則比較各種同樣東西的利弊。生物研究組的工作，大都分注重在解剖與製作標本兩方面。就形式言，五組中組務比較發達的要算無線電研究組，小工業研究組與軍用化學研究組；這三組的研究員比較多，工作比較忙，這是因為會員中主修物理與化學的較多的原故。然以成績論，則各組都有相當的進步。

二•參觀與調查　參觀的主要目標，是要求得到課外的實際知識，曾經參觀過的有中央造幣廠，開成硫酸廠，上海製釘廠，上海機器廠等等。正在計劃參觀中的有電話局，水電廠，無線電台，鋼鐵廠等。

三•學術演講　學術演講是研究工作中的啓導部分。科學會於一定期內敦請對於各種專科有研究的學者到校演講各種專題，曾經來講過的專家有中國數學名家顧養吾先生，上海市工務局長沈君怡先生，橡皮製造專家陳國滄先生，本校教授容啓兆先生胡昭望先生等。

(四) 週 刊 與 期 刊

一年的編輯工作，是在努力週刋與期刊的發行，發行週刊的目的有二。第一在發表研究的心得，第二在研究疑難的問題。週刊的發行，以不誤期不脫刊質量充實為原則，一年來這小小的志願，總還勉强可以算是達到。上學期曾經為求質量的集中起見把週刊改為半月刊，本學期起則仍恢復原狀；按期出版，質量並茂，這是不能不感謝幾位編輯委員的。

在本學期中，科學會又決定要出版期刊，編輯部的委員諸君既負責於週刊，當然

是無力兼顧期刊，於是另組期刊委員會，以編輯委員四人爲當然委員，另推委員四人爲特任委員，辦理出版期刊的一切事務。同時并聘請教授多人爲顧問，以審核稿件，贊助一切出版事項；期刊委員會的組織，顧問，委員人選如後。

顧問　朱公謹先生　班樂夫先生　（數學）　顧任光先生　包可永先生　（物理）

容啓兆先生　胡昭望先生　（化學）　黃賡祥先生　江振聲先生　（生物）

主席　許正直　　文書　于紹勳　　會計　陳宗發　　庶務　李名濂

編輯　張培深　　胡淑卿　　萬賢揚　　戴仁堯

期刊的內容，可以分做五部，卽專論研究演講通俗科學與雜俎是；而且整個的目的則在推廣通俗科學與介紹科學新聞。

（五）體育活動

科學會有鑒於身心兩健的重要，並爲連絡會員的感情起見，於是極力提倡體育，一年來的體育活動，頗具成效。

在上學期中曾經開過一次運動會參加的運動員竟超過了預算的數目。朱公謹副校長任名譽會長致開會詞，容啓兆主任任總裁判，主持一切。結果傅登魁君得個人總分第一，化學系得團體總分第一。

本學期增設體育部，又得姜吟月女士主持會務，因之體育工作得格外發達。足球小球籃球排球乒乓球等球隊，已先後成軍，與各學會各級等舉行比賽，姜女士並捐贈乒乓球架全副，以便舉行乒乓球錦標賽，此外還有踢毽子比賽等。

（六）今後的希望

一年來大略的情况，可以說是報告完了，在這裏我要寫些對於今後科學會的希望。我所要的希望有三點。

第一會務的能否發達，人才之外經費也是一個重要的因素。八年來的科學會，無時無刻不在籌圖發展進步，可是經濟的缺乏，限制了理想的實現。所以爲求會務的發展起見，我們便不得不籌劃一個開源節流的經濟計劃。節流的辦法，是不浪費，用錢於必要；開源的辦法是補充會員的名額。我認爲要實現這個希望將自然入會的辦法改可强迫入會。凡理學院的同學都應該加入爲會員。拿理學院全體同學的經濟來辦科學會，則其成功自爲較大。

第二我希望會務有更進步的擴充。擴充的原則有二，一是擴大已經進行或正在進行的工作，例如加緊研究工作，繼續出版週刊與期刊，提倡體育等。二是推行未曾進行而必須進行的工作，例如舉行論文比賽，學術演講競賽，外埠參觀，實業調查等。

最後我對於科學會組織與精神也有些奢望。我認爲任何事業的能否進步與成功，完全以他的組織是否健全與精神的是否團結爲轉移。科學會內部的組織，是每因事實的需要而增減的我認爲這是一個很好的辦法；以後總要繼續把他維持下去。最近一年來，因爲工作的加緊，會員的精神有更進一步的表現。我希望這種可貴的精神，能夠繼續的延長下去，並發揚光大於將來。

(七) 結 論

科學會是科學會全體會員的科學會，換言之，是理學院全體師生精誠團結，共同研究學術的科學會；科學會事業的成敗顯示着會員們的已否努力和能否努力；過去的成績，不足誇耀，將來的希望，是應當追求的；我願同志們在追求的理想中努力下去。

介　紹

自希臘人到達爾文

奧茲本著

江振聲譯

全書二百餘頁，歷述各進化論者對於生物之來源和進化論之觀念，可說是一部進化論之哲學史。其中引證很多，如法文，德文，希臘文和拉丁文之引證和名詞在譯文中均一一錄載，以供讀者之研究。

定價一元

正 誤 表

頁	段	行	誤	正
3	5	5	與數	函數
5	4	4	代上之若	若代上之
6	末	2	各	及
9	末	末一式	f( )	f (x)
12	2	5	owohlder	Sowohlder
15	1	10	feruht	beruht
24	2	11	3×10次	3×10^5次
27	1	1	Co^2	Co_2
27	5	3	路屏或	路或屏
29	1	2	輝銅磺	輝銅礦
29	3	1	波常短波	尋常短波
32	1	15	塗	途
35	1	第七式	$t\,(1)\,\varphi^2$	$t\,\varphi\,(1)^2$
37	4	7	φ, φ	r, δ
37	4	第二式	$\iint$	$\iint_g$
37	4	9	$a_1\ a$	a, a
38	1	3	$D[\varphi]$	$D[\varphi n]$
46	(九)	1. 2. 3.	隨	橢
53	3	表內	$Ph\,(N0_3)_2$	$Pb\,(N0_3)_2$
57	圖解二	題目	構之	構組之
70	6	2	對	尖
71	2	6	擴	獷
75	1	3	驢	跗
86	1	1	一足	足一

頁	段	行	誤	正
90	定理七	3行之式	$=0$	$\equiv 0$
96	I式之展開二排		$\cdots\cdots(2n-4)\ (2n)$	$\cdots\cdots(2n-4)(1+4)(2n)$
97	1	1	$\longrightarrow$	$\longleftarrow$
97	末	末	$\overrightarrow{(0, m-1)}$	$\overrightarrow{(0, m)}$
98	1	第三式	E	$\equiv$
98	γ'式內		$\overleftarrow{(1-m)}$	$\overleftarrow{(1, m)}$
101	例2	9	$P_O\equiv F$	$P_{10}\equiv F$
103	定理四	1	P式，F	P式移爲F式，F
107	1	5	八四	八一・四
122	1	9	$F_{p_i p_i}=0$	$F_{p_i p_i}\neq 0$
123	末	末	F_{x_i}	F_{x_s}
125	2	9	$\dot{X}-, \dot{Y}-, \dot{Z}-,$	一號皆爲＝號
128	末	倒二式	$t\dfrac{\delta F}{\delta t_x}$	$t_x\dfrac{\delta F}{\delta t_x}$
130	VI	第一式	$\dfrac{\delta F}{\delta x}$	$\dfrac{\delta F}{\delta \dot{x}}$
137	(iv)及圖VII	甲苯—水軸上之切點當爲 92.60 水：7.40 甲苯		
149	3	2	4'—Chloro-benzoyl	4'—Chloro-2-benzoyl
149	5	1	銘	鋁

光 華 大 學 科 學 會

光 華 大 學

理 科 期 刊

創 刊 號

編行者　光華大學科學會

印刷者　協進印刷所
貝勒路望德里六號 電話八二二四〇

經售者　各大書局

定價三角