ভাগশেষ উপপাদ্যের আদ্যোপান্ত

মো. মাহামুদ-উল-হাসান

এই করোনা মহামারীর কারণে গত দেড় সকল স্কুল, কলেজ, শিক্ষাপ্রতিষ্ঠান বন্ধ। এইতো মাস খানেক আগে গত সেপ্টেম্বরে আবার সবকিছু একটু একটু করে স্বাভাবিক হতেই চলেছিল, ফির চলে এলো কোভিডের আরেক ভয়াল থাবা, নাম অমিক্রম। এরই মাঝে আবারও শিক্ষার্থীদের চলে যেত হলো সেই পুরোনো জুম, মিট আর ফেসবুক লাইভের বদ্ধ কারাগারে। এই মহামারীতেও আটকে নেই আমাদের শিক্ষাকার্যক্রম। গত ০১ তারিখেই সাদিক এবং তাসনুভা অষ্টম শ্রেণী থেকে নবম শ্রেণীতে প্রমোশন পেয়েছে। আজকে তাদের দ্বিতীয় অনলাইন ক্লাস ছিল, যেখানে স্যার তাদের একটা মজার উৎপাদকে বিশ্লেষণ সম্পর্কে শিখিয়েছেন। নাম ভাগশেষ উপপাদ্য, ইংরেজিতে বলে রিমাইন্ডার থিওরেম (Remainder Theorem)। সেটা নিয়েই তাদের মধ্যে কথা চলছিল। তাসনুভা এই টপিকটা খুব ভালো করে বুঝে গেলেও সাদিকের বোধহয় কোনো একটা জায়গায় গিয়ে একটু সমস্যা হচ্ছিল এই নিয়মটা, সে ক্লাসটা গোগ্রাসে গিলে নিলেও পরে তাসনুভার সাথে আলোচনার এক পর্যায়ে ঠিকই আটকে গেলো।
এই মুহূর্তে আমাদের গণিত ইশকুলের পাঠকের মাঝেও এমন অনেক সাদিকই আছে, সেটা আমার জানা বাকি নেই, কারণ এই লেখাটা শুরু করার আগ মুহূর্তে যখন বইটা খুলে একটু চোখ বুলিয়ে নিতে গেলাম, বুঝতে বাকি রইলো না যে আমিও একজন সাদিক ছিলাম, অনেকসময় নিয়ে বিসষয়টা বুঝে তোমাদের সাথে গল্প করতে হাজির হয়েছি। তো চলো, শুরু করা যাক আজকের আলোচনা।

একেবারে শুরুতেই আমরা গণিতের কিছু খুঁটিনাটি নিয়ে হালকা আলোচনা করে আসি। **ভাগশেষ** শব্দটা জড়িত আমাদের চিরচেনা ভাগ প্রক্রিয়ার সাথে। ভাজ্যকে যখন ভাজক খেয়ে নেয়, তখন যে অবশিষ্টাংশ থাকে, সেটাকেই আমরা বলি ভাগশেষ। আর এই ভাগশেষ কোনোক্রমে যদি শূন্য হয়ে যায়, ব্যাস কেল্লা ফতে! আমরা ভাজককে বলি ভাজ্যের উৎপাদক বা গুণনীয়ক, ভাজ্যকে বলি ভাজকের গুণিতক। এই আলোচনায় ভাগশেষ শূন্য হবার টার্মটা আমাদের খুবই প্রয়োজনীয় একটা অংশ হবে।
এদিকে **উৎপাদক** বলতে কোনো একটা সংখ্যাকে যদি অপর কোনো একটা সংখ্যা দিয়ে নিঃশেষে ভাগ করা যায়, তবে এই "অপর সংখ্যা"-কে আগের "কোনো একটা সংখ্যা"-র উৎপাদক বলে। সাধারণ ম্যাথমেটিক্স-এ এই বিষয়টা আমাদের কাছে খুব স্বাভাবিক মনে হলেও সামনে যখন বীজগাণিতীক রাশি, এত্তোগুলো চলক চলে আসে, এই সহজ জিনিসটাই বড় দুর্বিষহ হয়ে উঠে।

আরেকটা ম্যাথ টার্মের সাথে পরিচিত করে দেই তবে। বীজগণিতে আমরা যখন উৎপাদকে বিশ্লেষন করবো, তখন যদি দুই বা ততোধিক রাশির (অবশ্যই চলক সংবলিত হতে হবে, চলকবিহীন রাশিকে আমরা এভাবে শূন্য বলতে পারিনা) গুণফল শূন্য হলে আমরা বলতে পারি হয়তো তাদের মধ্যে যেকোনো একটা রাশি শূন্য অথবা তারা পৃথক পৃথক ভাবে সকলেই শূন্য। আর এই তত্ত্বের আলোকে মিডিলটার্ম করে মূল নির্ণয়ের ম্যাথ আমরা কমবেশি সকলেই করেছি।

আমরা মোটামুটি আমাদের আলোচনার সাথে সম্পর্কিত সকল টার্মের সাথে পরিচিত হতে গিয়েছি। এবার আসা যাক আমাদের আসল আলোচনায়। তোমার পছন্দ মতো কোনো একটা এক চলক বিশিষ্ট সমীকরণ $f(x)$ নাও। সেটাতে অবশ্যই একটি অজানা চলক তথা x থাকবে এবং এই x এর যেকোন একটা মান অবশ্যই থাকবে যার জন্য সমীকরণটা সমাধানে আসতে পারে। অবশ্য, সব সমীকরন যে সমাধান পর্যন্ত আসে, সেটা বলবো না। কিন্তু, আমাদের বুঝার খাতিরে সাধারণ কোনো একটা সমীকরন নিয়েই কাজ করবো।

ধরো, ভাজ্য $f(x)$ কে $(x-a)$ ভাজক দিয়ে ভাগ করার ফলে ভাগফল আসবে $h(x)$ এবং ভাগশেষ r । এখানে, ভাজককে হিসাবের সুবিধার্থে $(x-a)$ আকারে নেওয়া হয়েছে যাতে $(x-a)$ এ $x=a$ বসিয়ে শূন্য করা যায়। কারন, আমাদের টার্গেট হলো এখান থেকে কোনোভাবে r এর মানটা বের করা, গোটা উপপাদ্যটাই তো তাকে নিয়েই। আমরা জানি, ভাজ্য = (ভাজক × ভাগফল) + ভাগশেষ
অর্থাৎ, $f(x)=(x-a).h(x)+r..........(1)$
এবার খেয়াল করো, $f(x)$ এর প্রথম অংশকে উধাও করে দিতে পারলে আমাদের r থেকে যাবে। এখানে ভাগফল $h(x)$ কে 0 করার কোনো উপায় না থাকায় অগত্যা $x=a$ ধরে $(x-a)=0$ বানিয়ে জোর করে $(x-a).h(x)$ কে সরিয়ে নিতে হবে। আমরা কিন্তু এইটার জন্যই সেসময় ভাজক হিসাবে $(x-a)$ নিয়েছিলাম। উভয়পক্ষে $x=a$ বসিয়ে পাই,

$f(a)=(a-a).h(a)+r$
বা, $f(a)=0.h(a)+r$
বা, $f(a)=r$

মজার বিষয় দেখো, ভাজ্যের সমীকরন $f(x)$ থেকেই আমরা সহজেই যেকোনো ভাজকের জন্য ভাগশেষ বের করে ফেলতে পারি। মদ্যাকথা হলো, আমাদের কাছে থাকা $f(x)$ এ যেকোনো ভ্যালু c ইনপুট দিলে যে আউটপুট পাবো, সেটা হলো $f(x)$ কে $(x-c)$ দ্বারা ভাগ করায় প্রাপ্ত ভাগশেষ। এইটুকুই। আর এই ভাগশেষ $r=0$ করাই আমাদের একমাত্র এবং একমাত্র টার্গেট। এটাই হলো আমাদের চির-পরিচিত ভাগশেষ উপপাদ্যের মূলতত্ত্ব।

কিন্তু, এখান থেকে উৎপাদকে বিশ্লেষণ কিভাবে করবো? আগেই বলেছি যে ভাগশেষকে শূন্য করতে পারলেই ভাজক হলো ভাজ্যের একটা উৎপাদক। তাহলে এখন $f(x)$ এর জন্য এমন একটা a খুঁজতে হবে, যাতে $f(a)=0$ হয়, এবং এটা পেলেই বলে দিতে পারবো $(x-a)$ দিয়ে ভাজ্যকে নিঃশেষে ভাগ করে ফেলা যায়।

ভাগশেষ উপপাদ্য প্রয়োগ করে আমরা কোনো একটা n ঘাতী সমীকরণের জন্যে একটা একঘাতী উৎপাদক এবং আরেকটা $(n-1)$ ঘাতী উৎপাদক নির্ণয় করে ফেলতে পারি। দ্বিঘাত সমীকরণের ক্ষেত্রে এটুকুই যথেষ্ঠ মনে হলেও ত্রিঘাত বা n ঘাতের কোনো সমীকরন সামনে এলে ওই পরবর্তী $(n-1)$ ঘাতীর উপরে হয়তো আরো এক, দুই বা ততোধিকবার ভাগশেষ উপপাদ্য প্রয়োগ করতে হতেও পারে। কিংবা মিডিলটার্ম করেও সুন্দর কয়েকটা একঘাতী উৎপাদক তোমরা পেয়ে যাবে।

এবার একটু কমপ্লিকেটেড চিন্তা। আমরা $f(x) = r$ করতে $x = a$ বসিয়ে দ্বিতীয় ধাপে $f(a)$ কে অর্থাৎ ভাগশেষ r কে শূন্য বানিয়ে একটা পর্যায়ে গিয়ে বলেছি $(x - a)$ হলো উক্ত ফাংশনের একটা উৎপাদক। অথচ, যদি আমাদের উৎপাদক $(x + a), (ax + b)$ কিংবা $(ax - b)$ আকারের হয়ে থাকে সেক্ষেত্রে আমরা কি করবো?

এই তিন সিচুয়েশনকে সামাল দিতেই পরবর্তী আলোচনা। মনে রাখবে, আমাদের ফাংশনের সকল উৎপাদকই হলো ভাজক, যেহেতু আগেই ভাগশেষ শূন্য নিশ্চিত করেছি। ফাংশন নিজে হলো ভাজ্য এবং আমাদের কাজ হলো এমন একটা ভাজক $(x - c)$ খোঁজা, যার জন্য $f(c) = 0$ হয়।

সিচুয়েশন ০১. $f(x)$ এর একটি উৎপাদক $(x + a)$ হয়,

তাহলে, $f(x) = (x + a).h(x) + r$

পূর্বের ন্যায় $(x + a)$ কে শূন্য করে প্রথম অংশকে নাকচ করতে $x = -a$ বসিয়ে,

$f(-a) = (-a + a).h(x) + r$

বা, $f(-a) = 0.h(-a) + r$

বা, $f(-a) = r$

অর্থাৎ, $f(-a)$ এর জন্য $f(x)$ কে $(x + a)$ দ্বারা ভাগ করে প্রাপ্ত ভাগশেষ পাওয়া যাবে। আর এই ভাগশেষকেই তো আমাদের 0 বানাতে হবে। তাই বলা যায়, আমরা $f(-a) = 0$ দেখাতে পারলে $(x + a)$ কে $f(x)$ এর একটি উৎপাদক বলা চলে।

সিচুয়েশন ০২. উৎপাদক যদি $(ax + b)$ হয়,

$f(x) = (ax + b).h(x) + r$

বা, $f(x) = a(x + \frac{b}{a}).h(x) + r$

অর্থাৎ, $f(x) = (x + \frac{b}{a}).a.h(x) + r$

একই ধারাবাহিকতায় এখানে ভাগফল হলো $a.h(x)$ এবং আমাদের $(x + \frac{b}{a}) = 0$ করার জন্য $x = (-\frac{b}{a})$ নিয়ে এগিয়ে উক্ত সমীকরনের ভাগশেষ তথা $f(-\frac{b}{a}) = 0$ দেখাতে হবে।

সিচুয়েশন ০৩. $(ax - b)$ আকারের উৎপাদকের জন্য,

$f(x) = (ax - b).h(x) + r$

বা, $f(x) = a(x - \frac{b}{a}).h(x) + r$

অর্থাৎ, $f(x) = (x - \frac{b}{a}).a.h(x) + r$

এখানেও আমাদের ভাগফল হলো $a.h(x)$ এবং $(x - \frac{b}{a}) = 0$ করার জন্য $x = (\frac{b}{a})$ নিয়ে এগিয়ে উক্ত সমীকরনের ভাগশেষ তথা $f(\frac{b}{a}) = 0$ দেখাতে হবে।

এই সম্পর্কিত কোনো ম্যাথ দেখতে চাইলে অথবা নিজেরাও ম্যাথ করে প্রাকটিস করতে মাধ্যমিক সাধারণ গণিত বইয়ের অনুশীলনী ৩.৪ (পৃষ্ঠা নম্বর ৫৯-৬৩) ফলো করতে পারো। আমিও এই বইটিকে আমার এই লেখার রিসোর্স হিসাবে ব্যবহার করেছি। যাদের কাছে বইটি নেই, তারা NCTB-র ওয়েবসাইটে গিয়ে সার্চ করলেই পিডিএফ পেয়ে যাবে। গণিত উৎসবের এই মৌসুমে তোমাদের সকলের জীবনের সেকেন্ড ডিফারেনশিয়াল নেগেটিভ হোক, এই আশা রেখে আজকের আলোচনা এখানেই ইতি টানছি। জয়তু গণিত।