Prof. Dr. H. Brenner **Osnabrück WS 2017/2018**

Lineare Algebra und analytische Geometrie I

Vorlesung 22

... und ein guter Lehrer kann
auch einem schlechten Schüler
was beibringen

Beziehung zwischen Eigenräumen

Wir haben in der letzten Vorlesung gesehen, dass der Eigenraum zu 0 der Kern des Endomorphismus ist. Wesentlich allgemeiner als in Lemma 21.7 gilt die folgende Charakterisierung.

Lemma 22.1. *Es sei K ein Körper, V ein K-Vektorraum und*

$$\varphi\colon V \longrightarrow V$$

eine lineare Abbildung. Es sei $\lambda \in K$. Dann ist

$$\operatorname{Eig}_{\lambda}(\varphi) = \operatorname{kern}(\lambda \cdot \operatorname{Id}_V - \varphi).$$

Beweis. Sei $v \in V$. Dann ist $v \in \operatorname{Eig}_{\lambda}(\varphi)$ genau dann, wenn $\varphi(v) = \lambda v$ ist, und dies ist genau bei $\lambda v - \varphi(v) = 0$ der Fall, was man als $(\lambda \cdot \operatorname{Id}_V - \varphi)(v) = 0$ schreiben kann. □

Insbesondere ist ein $\lambda \in K$ genau dann ein Eigenwert von φ, wenn $\lambda \operatorname{Id}_V - \varphi$ nicht injektiv ist. Für ein gegebenes λ lässt sich diese Eigenschaft einfach mit Hilfe eines linearen Gleichungssystems (oder der Determinante) überprüfen und ebenso der Eigenraum berechnen. Dagegen ist es kein lineares Problem, zu entscheiden, ob φ überhaupt Eigenwerte besitzt und diese zu bestimmen. Wir werden weiterhin eine lineare Abbildung $\varphi\colon V \to V$ dadurch untersuchen, das wir die *Differenzen zu den Streckungen* $\lambda \operatorname{Id}_V - \varphi$ für verschiedene λ betrachten.

Bei einer $n \times n$-Matrix M muss man den Kern der Matrix $\lambda E_n - M$ bestimmen. Wenn man beispielsweise wissen möchte, ob die Matrix $\begin{pmatrix} 4 & 7 \\ -2 & 5 \end{pmatrix}$ den Eigenwert 3 besitzt, so sieht man anhand von

$$3E_2 - \begin{pmatrix} 4 & 7 \\ -2 & 5 \end{pmatrix} = 3\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 4 & 7 \\ -2 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & -7 \\ 2 & -2 \end{pmatrix}$$

sofort, dass dies nicht der Fall ist.

Lemma 22.2. *Es sei K ein Körper, V ein K-Vektorraum und*

$$\varphi\colon V \longrightarrow V$$

eine lineare Abbildung. Es seien $\lambda_1 \neq \lambda_2$ Elemente in K. Dann ist

$$\operatorname{Eig}_{\lambda_1}(\varphi) \cap \operatorname{Eig}_{\lambda_2}(\varphi) = 0.$$

Beweis. Sei $v \in \operatorname{Eig}_{\lambda_1}(\varphi) \cap \operatorname{Eig}_{\lambda_2}(\varphi)$. Dann ist

$$\lambda_1 v = \varphi(v) = \lambda_2 v.$$

Also ist

$$(\lambda_1 - \lambda_2)v = 0,$$

woraus wegen $\lambda_1 \neq \lambda_2$ direkt $v = 0$ folgt. □

Lemma 22.3. *Es sei K ein Körper, V ein K-Vektorraum und*

$$\varphi\colon V \longrightarrow V$$

eine lineare Abbildung. Es seien $v_1, \ldots, v_n$ Eigenvektoren zu (paarweise) verschiedenen Eigenwerten $\lambda_1, \ldots, \lambda_n \in K$. Dann sind $v_1, \ldots, v_n$ linear unabhängig.

Beweis. Wir beweisen die Aussage durch Induktion nach n. Für $n = 0$ ist die Aussage richtig. Sei die Aussage also für weniger als n Zahlen bewiesen. Betrachten wir eine Darstellung der 0, also

$$a_1 v_1 + \cdots + a_n v_n = 0\,.$$

Wir wenden darauf φ an und erhalten einerseits

$$a_1\varphi(v_1) + \cdots + a_n\varphi(v_n) = \lambda_1 a_1 v_1 + \cdots + \lambda_n a_n v_n = 0.$$

Andererseits multiplizieren wir die obige Gleichung mit λ_n und erhalten

$$\lambda_n a_1 v_1 + \cdots + \lambda_n a_n v_n = 0\,.$$

Die so entstandenen Gleichungen zieht man voneinander ab und erhält

$$(\lambda_n - \lambda_1)a_1 v_1 + \cdots + (\lambda_n - \lambda_{n-1})a_{n-1}v_{n-1} = 0\,.$$

Aus der Induktionsvoraussetzung folgt, dass alle Koeffizienten $(\lambda_n - \lambda_i)a_i = 0$, $i = 1, \ldots, n-1$, sein müssen. Wegen $\lambda_n - \lambda_i \neq 0$ folgt $a_i = 0$ für $i = 1, \ldots, n-1$ und wegen $v_n \neq 0$ ist dann auch $a_n = 0$. □

Korollar 22.4. *Es sei K ein Körper und es sei V ein endlichdimensionaler K-Vektorraum. Es sei*

$$\varphi\colon V \longrightarrow V$$

eine lineare Abbildung. Dann gibt es maximal $\dim(V)$ *viele Eigenwerte zu φ.*

Beweis. Siehe Aufgabe 22.3. □

Insbesondere besitzt ein Endomorphismus auf einem endlichdimensionalen Vektorraum nur endlich viele Eigenwerte.

Geometrische Vielfachheit

Die Einschränkung einer linearen Abbildung auf einen Eigenraum ist die Streckung um den zugehörigen Eigenwert, also eine besonders einfache lineare Abbildung. Bezüglich einer Diagonalmatrix

$$\begin{pmatrix} d_1 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & d_2 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & d_{n-1} & 0 \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & d_n \end{pmatrix}$$

besitzt die Standardbasis die Eigenschaft, dass jeder Basisvektor ein Eigenvektor zu der durch die Matrix gegebenen Abbildung ist. Bei einer Diagonalmatrix kann man sofort die Eigenräume angeben, siehe Beispiel 21.4, und zwar besteht der Eigenraum zu d aus allen Linearkombinationen der Standardvektoren e_i, für die d_i gleich d ist. Insbesondere ist die Dimension des Eigenraums gleich der Anzahl, wie oft d als Diagonalelement auftritt. Generell sind die Dimensionen der Eigenräume wichtige Invarianten zu einem Endomorphismus.

Definition 22.5. Es sei K ein Körper, V ein K-Vektorraum und

$$\varphi \colon V \longrightarrow V$$

eine lineare Abbildung. Zu einem Eigenwert $\lambda \in K$ nennt man

$$\dim \left(\operatorname{Eig}_{\lambda} (\varphi) \right)$$

die *geometrische Vielfachheit* des Eigenwerts.

Ein $\lambda \in K$ ist insbesondere genau dann ein Eigenwert von φ, wenn seine geometrische Vielfachheit mindestens 1 ist. Es ist einfach, Beispiele anzugeben, wo die geometrische Vielfachheit eines Eigenwertes jeden Wert zwischen 1 und der Dimension des Raumes annimmt.

Lemma 22.6. *Es sei K ein Körper und es sei V ein endlichdimensionaler K-Vektorraum. Es sei*

$$\varphi \colon V \longrightarrow V$$

eine lineare Abbildung. Dann ist die Summe der Eigenräume $\operatorname{Eig}_{\lambda} (\varphi)$ *direkt und es ist*

$$\sum_{\lambda \in K} \dim \left(\operatorname{Eig}_{\lambda} (\varphi) \right) \leq \dim (V) .$$

Beweis. Dies folgt direkt aus Lemma 22.3. $\square$

Diagonalisierbarkeit

Definition 22.7. Es sei K ein Körper, V ein K-Vektorraum und

$$\varphi \colon V \longrightarrow V$$

eine lineare Abbildung. Dann heißt φ *diagonalisierbar*, wenn V eine Basis aus Eigenvektoren zu φ besitzt.

Satz 22.8. *Es sei K ein Körper und es sei V ein endlichdimensionaler K-Vektorraum. Es sei*

$$\varphi \colon V \longrightarrow V$$

eine lineare Abbildung. Dann sind folgende Aussagen äquivalent.

1. *φ ist diagonalisierbar.*
2. *Es gibt eine Basis $\mathfrak{v}$ von V derart, dass die beschreibende Matrix $M_{\mathfrak{v}}^{\mathfrak{v}}(\varphi)$ eine Diagonalmatrix ist.*
3. *Für jede beschreibende Matrix $M = M_{\mathfrak{w}}^{\mathfrak{w}}(\varphi)$ bezüglich einer Basis $\mathfrak{w}$ gibt es eine invertierbare Matrix B derart, dass*

   $$BMB^{-1}$$

   eine Diagonalmatrix ist.

Beweis. Die Äquivalenz von (1) und (2) folgt aus der Definition, aus Beispiel 21.4 und der Korrespondenz zwischen linearen Abbildungen und Matrizen. Die Äquivalenz von (2) und (3) folgt aus Korollar 11.12. □

Wenn φ diagonalisierbar ist und die Eigenwerte mit ihren geometrischen Vielfachheiten bekannt sind, so kann man einfach eine zugehörige Diagonalmatrix aufstellen: Man erstellt die Diagonalmatrix, in deren Diagonalen die Eigenwerte so oft auftreten, wie die geometrischen Vielfachheiten angeben. Insbesondere ist die zugehörige Diagonalmatrix einer diagonalisierbaren Abbildung bis auf die Reihenfolge der Diagonalelemente eindeutig bestimmt.

Beispiel 22.9. Wir schließen an Beispiel 21.5 an. Es gibt die beiden Eigenvektoren $\begin{pmatrix} \sqrt{5} \\ 1 \end{pmatrix}$ und $\begin{pmatrix} -\sqrt{5} \\ 1 \end{pmatrix}$ zu den verschiedenen Eigenwerten $\sqrt{5}$ und $-\sqrt{5}$, so dass die Abbildung nach Korollar 22.10 diagonalisierbar ist. Bezüglich der Basis $\mathfrak{u}$ aus diesen Eigenvektoren wird die lineare Abbildung durch die Diagonalmatrix

$$\begin{pmatrix} \sqrt{5} & 0 \\ 0 & -\sqrt{5} \end{pmatrix} .$$

beschrieben.

Die Übergangsmatrix von der Basis $\mathfrak{u}$ zur durch e_1 und e_2 gegebenen Standardbasis $\mathfrak{v}$ ist einfach

$$M_{\mathfrak{v}}^{\mathfrak{u}} = \begin{pmatrix} \sqrt{5} & -\sqrt{5} \\ 1 & 1 \end{pmatrix} .$$

Die inverse Matrix dazu ist

$$\frac{1}{2\sqrt{5}}\begin{pmatrix} 1 & \sqrt{5} \\ -1 & \sqrt{5} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2\sqrt{5}} & \frac{1}{2} \\ \frac{-1}{2\sqrt{5}} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}.$$

Gemäß Korollar 11.12 besteht die Beziehung

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} \sqrt{5} & 0 \\ 0 & -\sqrt{5} \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{5}}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{-\sqrt{5}}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sqrt{5} & -\sqrt{5} \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \frac{1}{2\sqrt{5}} & \frac{1}{2} \\ \frac{-1}{2\sqrt{5}} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 5 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sqrt{5} & -\sqrt{5} \\ 1 & 1 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

KOROLLAR 22.10. *Es sei K ein Körper und es sei V ein endlichdimensionaler K-Vektorraum. Es sei*

$$\varphi\colon V \longrightarrow V$$

eine lineare Abbildung, die $n = \dim(V)$ verschiedene Eigenwerte besitze. Dann ist φ diagonalisierbar.

Beweis. Aufgrund von Lemma 22.3 gibt es n linear unabhängige Eigenvektoren. Diese bilden nach Korollar 8.10 eine Basis. □

LEMMA 22.11. *Es sei K ein Körper und es sei V ein endlichdimensionaler K-Vektorraum. Es sei*

$$\varphi\colon V \longrightarrow V$$

eine lineare Abbildung. Dann ist φ genau dann diagonalisierbar, wenn V die direkte Summe der Eigenräume ist.

Beweis. Wenn φ diagonalisierbar ist, so gibt es eine Basis $v_1, \ldots, v_n$ von V aus Eigenvektoren. Es ist dann

$$\operatorname{Eig}_\lambda(\varphi) = \langle v_i, \text{der Eigenwert zu } v_i \text{ ist } \lambda\rangle.$$

Daher ist

$$V = \operatorname{Eig}_{\lambda_1}(\varphi) \oplus \cdots \oplus \operatorname{Eig}_{\lambda_k}(\varphi),$$

wobei die Direktheit sich aus Lemma 22.2 ergibt. Wenn umgekehrt

$$V = \operatorname{Eig}_{\lambda_1}(\varphi) \oplus \cdots \oplus \operatorname{Eig}_{\lambda_k}(\varphi)$$

vorliegt, so kann man in jedem der Eigenräume eine Basis wählen. Diese Basen bestehen aus Eigenvektoren und ergeben zusammen eine Basis von V. □

BEISPIEL 22.12. Wir betrachten 2×2-*Scherungsmatrizen*

$$\begin{pmatrix} 1 & a \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

mit $a \in K$. Die Eigenwertbedingung für ein $\lambda \in K$ bedeutet

$$\begin{pmatrix} 1 & a \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix},$$

was zu den beiden Gleichungen

$$x + ay = \lambda x \text{ und } y = \lambda y$$

führt. Bei $\lambda \neq 1$ folgt $y = 0$ und dann auch $x = 0$, d.h. es kann nur 1 ein Eigenwert sein. In diesem Fall ist die zweite Gleichung erfüllt und die erste Gleichung wird zu

$$x + ay = x \text{ bzw. } ay = 0\,.$$

Bei $a \neq 0$ muss also $y = 0$ sein und dann ist $\begin{pmatrix} x \\ 0 \end{pmatrix}$ der Eigenraum zum Eigenwert 1, und $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ ist ein Eigenvektor, der den Eigenraum aufspannt. Bei $a = 0$ liegt die Einheitsmatrix vor, und der Eigenraum zum Eigenwert 1 ist die gesamte Ebene. Bei $a \neq 0$ gibt es also nur einen eindimensionalen Eigenraum und die Abbildung ist nicht diagonalisierbar.

Das Produkt von zwei Diagonalmatrizen ist natürlich wieder eine Diagonalmatrix. Das folgende Beispiel zeigt, dass das Produkt von diagonalisierbaren Matrizen nicht diagonalisierbar sein muss.

Beispiel 22.13. Es seien G_1 und G_2 zwei Geraden im $\mathbb{R}^2$ durch den Nullpunkt und es seien φ_1 und φ_2 die Achsenspiegelungen an diesen Achsen. Eine Achsenspiegelung ist stets diagonalisierbar, und zwar sind die Spiegelungsachse und die dazu senkrechte Gerade Eigengeraden (zu den Eigenwerten 1 und -1). Die Hintereinanderschaltung $\psi = \varphi_2 \circ \varphi_1$ dieser Spiegelungen ist eine Drehung, und zwar ist der Drehwinkel das Doppelte des Winkels zwischen den beiden Achsen. Eine Drehung ist aber nur dann diagonalisierbar, wenn der Drehwinkel 0 oder 180 Grad beträgt. Wenn der Winkel zwischen den Achsen von $0, 90, 180$ Grad verschieden ist, so besitzt ψ keinen Eigenvektor.