Prof. Dr. H. Brenner **Osnabrück SS 2021**

Mathematik für Anwender I

Arbeitsblatt 36

Übungsaufgaben

AUFGABE 36.1. Es seien L und M metrische Räume und $m \in M$. Zeige, dass die konstante Abbildung

$$f\colon L \longrightarrow M,\, x \longmapsto m,$$

stetig ist.

AUFGABE 36.2. Es sei (M, d) ein metrischer Raum. Zeige, dass die Identität

$$M \longrightarrow M,\, x \longmapsto x,$$

stetig ist.

AUFGABE 36.3. Es sei (M, d) ein metrischer Raum und $T \subseteq M$ eine Teilmenge mit der induzierten Metrik. Zeige, dass die Inklusion $T \subseteq M$ stetig ist.

AUFGABE 36.4. Es sei (M, d) ein metrischer Raum und seien $a < b < c$ reelle Zahlen. Es seien $f\colon [a, b] \to M$ und $g\colon [b, c] \to M$ stetige Abbildungen mit $f(b) = g(b)$. Zeige, dass dann die Abbildung $h\colon [a, c] \to M$ mit

$$h(t) = f(t) \text{ für } t \leq b \text{ und } h(t) = g(t) \text{ für } t > b$$

ebenfalls stetig ist.

AUFGABE 36.5. Es sei $f\colon L \to M$ eine stetige Abbildung zwischen den metrischen Räumen L und M. Ist das Urbild eines offenen Balles $U(y, \epsilon) \subseteq M$ stets wieder ein offener Ball in L?

AUFGABE 36.6. Es sei (M, d) ein metrischer Raum und sei $f\colon M \to \mathbb{R}$ eine stetige Funktion. Es sei $x \in M$ ein Punkt mit $f(x) > 0$. Zeige, dass dann auch $f(y) > 0$ für alle y aus einer offenen Ballumgebung von x gilt.

AUFGABE 36.7. Zeige, dass die Addition

$$\mathbb{K} \times \mathbb{K} \longrightarrow \mathbb{K},\, (x, y) \longmapsto x + y,$$

und die Multiplikation

$$\mathbb{K} \times \mathbb{K} \longrightarrow \mathbb{K},\, (x, y) \longmapsto x \cdot y,$$

stetig sind.

Aufgabe 36.8. Es seien L, M, N metrische Räume und seien

$$f : L \longrightarrow M \text{ und } g : M \longrightarrow N$$

Abbildungen. Es sei f stetig in $x \in L$ und es sei g stetig in $f(x) \in M$. Zeige, dass die Hintereinanderschaltung

$$g \circ f\colon\ L \longrightarrow N,\ x \longmapsto g(f(x)),$$

stetig in x ist.

Aufgabe 36.9. Zeige, dass die Funktion

$$\mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C},\ z \longmapsto |z|\,,$$

stetig ist.

Aufgabe 36.10. Es sei V ein euklidischer Raum. Zeige, dass die Norm

$$V \longrightarrow \mathbb{R},\ v \longmapsto \|v\|,$$

eine stetige Abbildung ist.

Aufgabe 36.11. Zeige, dass die Funktion

$$f\colon\ \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R},\ (x, y) \longmapsto \max{(x, y)},$$

stetig ist.

Aufgabe 36.12. Betrachte die Funktion $f\colon\ \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, die durch

$$f(x, y) := \begin{cases} 0\,, \text{ falls } x \leq 0\,, \\ 0\,, \text{ falls } y \leq 0\,, \\ y/x\,, \text{ falls } x \geq y > 0\,, \\ x/y\,, \text{ falls } y > x > 0\,, \end{cases}$$

definiert ist. Zeige, dass die Einschränkung von f auf jeder zur x-Achse oder zur y-Achse parallelen Geraden stetig ist, dass aber f selbst nicht stetig ist.

Aufgabe 36.13. Es sei $V \subseteq \mathbb{R}^n$ ein Untervektorraum im euklidischen Raum $\mathbb{R}^n$. Zeige, dass V abgeschlossen im $\mathbb{R}^n$ ist.

Aufgabe 36.14. Es sei $f\colon\ \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine stetige Funktion. Zeige, dass der Graph von f abgeschlossen in $\mathbb{R}^2$ ist.

Aufgabe 36.15.*

Es seien L und M metrische Räume und es seien $f, g\colon\ L \to M$ zwei stetige Abbildungen. Zeige, dass die Menge

$$N = \{x \in L \mid f(x) = g(x)\}$$

abgeschlossen in L ist.

Aufgabe 36.16. Wir betrachten die *trigonometrische Parametrisierung des Einheitskreises*, also die Abbildung

$$\varphi\colon\ [0,2\pi[\longrightarrow \mathbb{R}^2,\ t\longmapsto (\cos t, \sin t).$$

Zeige, dass φ eine Bijektion zwischen $[0,2\pi[$ und dem Einheitskreis definiert, die stetig ist, deren Umkehrabbildung aber nicht stetig ist.

Aufgabe 36.17. Es sei $X = \mathbb{R}^n$ mit der euklidischen Metrik und $Y = \mathbb{R}^n$ mit der diskreten Metrik. Es sei $f\colon\ Y \to X$ die Identität. Zeige, dass f stetig ist, die Umkehrabbildung f^{-1} aber nicht.

Zwei metrische Räume L und M heißen *homöomorph*, wenn es eine bijektive stetige Abbildung $\varphi\colon\ L \to M$ gibt, deren Umkehrabbildung φ^{-1} ebenfalls stetig ist.

Aufgabe 36.18.*

Zeige, dass das offene Einheitsintervall $]0,1[$ und das abgeschlossene Einheitsintervall $[0,1]$ nicht homöomorph sind.

Aufgabe 36.19. Stifte eine Homöomorphie zwischen der abgeschlossenen Kreisscheibe und dem abgeschlossenen Quadrat.

Aufgabe 36.20. Es sei $I = [a,b[$ ein halboffenes Intervall. Kann man I in zwei disjunkte Unterräume $I = T_1 \cup T_2$ derart zerlegen, dass T_1 und T_2 untereinander homöomorph sind?

Aufgabe 36.21. Sei $f\colon\ \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ eine Polynomfunktion und $v_1, \ldots, v_n$ eine Basis von $\mathbb{R}^n$ mit den zugehörigen Koordinatenfunktionen z_i, $i = 1, \ldots, n$. Zeige, dass f auch eine Polynomfunktion in diesen Koordinaten ist.

Aufgabe 36.22. Es sei $f\colon\ \mathbb{K}^m \to \mathbb{K}^n$ eine Abbildung, die in jeder Komponente polynomial sei und sei $g\colon\ \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}$ eine polynomiale Funktion. Zeige, dass dann auch die Hintereinanderschaltung $g \circ f$ eine polynomiale Funktion ist.

Aufgabe 36.23.*

Finde ein Polynom $p(x,y)$ der Form

$$p(x,y) \,=\, a + bx + cy + dx^2 + exy + fy^2,$$

das die Bedingungen

$$\begin{aligned} p(0,0) &= 0,\\ p(0,1) &= 1,\\ p(1,0) &= 0,\\ p(1,1) &= 3,\\ p(0,2) &= 6,\\ p(-1,1) &= 1, \end{aligned}$$

erfüllt.

Aufgabe 36.24. Sei $n \in \mathbb{N}$ und sei $G = \mathrm{Gl}(n, \mathbb{R})$ die Menge der reellen invertierbaren $n \times n$-Matrizen. Zeige, dass die Abbildung

$$G \longrightarrow G,\ M \longmapsto M^{-1},$$

stetig ist.

Aufgaben zum Abgeben

Aufgabe 36.25. (5 Punkte)

Im Nullpunkt $0 \in \mathbb{R}^3$ befinde sich die Pupille eines Auges (oder eine Linse) und die durch $x = -1$ bestimmte Ebene sei die Netzhaut $N \cong \mathbb{R}^2$ (oder eine Fotoplatte). Bestimme die Abbildung $\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$, die das Sehen (oder Fotografieren) beschreibt (d.h. einem Punkt des Halbraumes wird durch den Lichtstrahl ein Punkt der Netzhaut zugeordnet). Ist diese Abbildung stetig, ist sie linear?

Aufgabe 36.26. (8 Punkte)

Ein Billardtisch sei 127 cm breit und 254 cm lang, die Kugeln haben einen Radius von 2 cm und die Ecklöcher seien ein Viertelkreis[1] mit Radius 5 cm um einen Eckpunkt. An den Tisch sei ein Koordinatensystem angelegt, das parallel zu den Tischseiten verläuft und bei dem die linke untere Ecke der Nullpunkt sei.

Berechne für die linke untere Ecke die Koordinaten der beiden Punkte des Lochrandes, durch die der Mittelpunkt einer Kugel hindurch muss, wenn sie eingelocht werden soll. Wie lang ist der Abstand zwischen diesen beiden Punkten, wie lang ist die Lochberandung zwischen diesen Punkten?

Eine Kugel soll nun direkt (ohne Verwendung von Bande oder anderen Kugeln) in dieses Loch versenkt werden, wobei der Queuestoß stets in Richtung der Kugelmitte und an deren „Äquator“ durchgeführt wird. Welche Winkeltoleranz zum Versenken der Kugel liegt vor, wenn der Kugelmittelpunkt die folgende Position besitzt:

a) (63.5, 63.5)

b) (100, 100)

c) (63.5, 192,5)

d) (63.5, 10)

Welche Länge hat das zugehörige Kreissegment auf der Kugel?

Aufgabe 36.27. (3 Punkte)

Sei $n \in \mathbb{N}$. Zeige, dass die Determinante

$$\mathbb{K}^{n^2} \cong \mathrm{Mat}_{n \times n}(\mathbb{K}) \longrightarrow \mathbb{K},\ M \longmapsto \det M,$$

[1] Diese Aufgabe ergibt auch Sinn, wenn die Löcher volle Kreise um die Eckpunkte sind, hat aber ein anderes Ergebnis.

eine polynomiale Funktion ist.

Aufgabe 36.28. (2 Punkte)

Man gebe eine Homöomorphie zwischen $]0,1[$ und $\mathbb{R}$ an.

Aufgabe 36.29. (5 Punkte)

Es sei $I =]a,b[$ ein offenes Intervall. Kann man I in zwei disjunkte Unterräume $I = T_1 \cup T_2$ derart zerlegen, dass T_1 und T_2 untereinander homöomorph sind?

Die Aufgabe zum Aufgeben

Aufgabe 36.30. (10 Punkte)

Es sei $I = [a,b]$ ein abgeschlossenes Intervall. Kann man I in zwei disjunkte Unterräume $I = T_1 \cup T_2$ derart zerlegen, dass T_1 und T_2 untereinander homöomorph sind?

Abbildungsverzeichnis

Erläuterung: Die in diesem Text verwendeten Bilder stammen aus Commons (also von http://commons.wikimedia.org) und haben eine Lizenz, die die Verwendung hier erlaubt. Die Bilder werden mit ihren Dateinamen auf Commons angeführt zusammen mit ihrem Autor bzw. Hochlader und der Lizenz. 7

Lizenzerklärung: Diese Seite wurde von Holger Brenner alias Bocardodarapti auf der deutschsprachigen Wikiversity erstellt und unter die Lizenz CC-by-sa 3.0 gestellt. 7