科學通訊

黎照寰

第八期

中華民國二十五年三月　　上海交通大學科學學院編輯

科學通訊

第八期　目　錄

談言:

教材:

叢錄:

書評:

專載:

談言

有些代數中$\frac{0}{0}$之誤解

顧澄

本刊自去年四月杪第一期起至今年三月,已照預定出足八期。本談際此第一年結束,略有聲明如下。(一)以前本談爲自修者及大學生說法時較多。本期不能不與中學教師及中學生談談,以符第一期本刊聲明之要旨。(二)本刊第一,二期談言中曾言「實數論另有專載」及「Knopp氏無窮級數論第一編專講實數論　於第四期必能排出」等語。而迄未實現者,實以限於篇幅,專載欄內「近世幾何」既不便中斷,再無餘地可以排入此稿。近已將 Knopp 級數論譯稿陸續排入本校季刊,以符前言。幷用五,六號字密排,雖僅32面,字數已抵商務大學叢書(小本)100面左右。欲睹此譯者,請閱交大季刊第十八期可也。

有些代數學中,講「分數之值」,遇 $\frac{0}{0}$ 時,常强以分數之極限爲分數之值,意在便宜行事而實誤人不淺。蓋中學生一經習慣牢不可破,以後進研高深數學遂發生種種誤會而不自覺也。例如 $\frac{x^2-4}{x-2}$,* 有些代數中謂 $x=3$ 時,此分數之值爲 $\frac{9-4}{3-2}=5$, $x=2$ 時,此分數之值因 $\frac{4-4}{2-2}=\frac{0}{0}$ 爲不定,必先將此分數約爲 $x+2$ 始能得其眞值 $2+2=4$。此種云云實是大謬。

欲知此謬,須先明分數之值與分數之極限。二者意義絕不相

---

*此處不作普遍之論而但以此爲例者,因爲中學生說法,使易明瞭而已。但此談於大學生亦未嘗無益。舉一反三,是在閱者。

同,萬不可混而爲一。例如

$$\lim_{x\to 3}\frac{x^2-4}{x-2}=1 \text{ 及 } \frac{3^2-4}{3-2}=1, \qquad (1)$$

其右邊雖皆爲1,而左邊之意義則全異,此正如

$$4\div 4=1 \text{ 及 } 1+0=1, \qquad (2)$$

右雖同而左意不一。故$x\to 2$時雖$\frac{x^2-4}{x-2}\to 4$,即

$$\lim_{x\to 2}\frac{x^2-4}{x-2}=4。$$

決不能因(1)而謂$x=2$時$\frac{x^2-4}{x-2}$之眞値爲4。此猶決不能因(2)而謂除法之結果即是加法之結果。

凡類於求(1)中第一式之$\lim_{x\to 3}\frac{x^2-4}{x-2}$者,以後簡稱爲「求分數之極限」;凡類於在$x=3$時求$\frac{x^2-4}{x-2}$之値者以後簡稱爲「求分數之値」;以便說明。此後者求法甚易,只須以x之値代入分數即得(例如$x=3$則$\frac{x^2-4}{x-2}$之値爲$\frac{3^2-4}{3-2}=5$)。至於前者則意義複雜不易簡單說明俟後另談。(約略言之,極限之定義爲:x依任何方法趨近a時,若$f(x)$常趨近b則謂之$x\to a$時$f(x)\to b$,而以$\lim_{x\to a} f(x)=b$表之。此最宜注意者(一)「任何方法」四字及「常」字之關係,(二)x趨近a時可與a任意接近而不能等於a。但$f(x)$趨近b時雖不必等於b而有時亦能等於b。$\frac{x^2-4}{x-2}$亦是一種x之函數$f(x)$,故此類分數之極限亦可包括於此定義中)。

難者曰$x=10$時$\frac{x^2-4}{x-2}=\frac{10^2-4}{10-2}=\frac{96}{8}$可約爲12

$x=9$時$\frac{x^2-4}{x-2}=\frac{81-4}{9-2}=\frac{77}{7}$可約爲11

$x=8$時$\frac{x^2-4}{x-2}=\frac{64-4}{8-2}=\frac{60}{6}$可約爲10

………………………………………………………

此皆與「先將$\frac{x^2-4}{x-2}$約去$x-2$得$x+2$後,再以

x 所得之結果」同。故 $x=2$ 時求 $\frac{x^2-4}{x-2}$ 之值亦儘可先將 $\frac{x^2-4}{x-2}$ 約為 $x+2$ 後,再以 $x=2$ 代入 $x+2$ 得 4。倘 $\frac{x^2-4}{x-2}$ 不能約為 $x+2$ 則 $\frac{96}{8}$, $\frac{77}{7}$, $\frac{60}{6}$, 等亦將不能約為 12, 11, 10, 等矣,必無是理。故 $x=2$ 時, $\frac{x^2-4}{x-2}$ 雖等於 $\frac{0}{0}$ 為不定;然一經約去 $x-2$ 得 $x+2$ 後,即可得其眞值為 4。

答曰　何謂約?約者以同數除分母分子也。此由於「以同數除分母分子時,分數之值不變」之定理。故 $x\neq2$ 時 $\frac{x^2-4}{x-2}$ 儘可以 $x-2$ 除其分母分子而約之為 $x+2$。但 $x=2$ 則決不能如此,何則? 0 不可為除數。$x=2$ 則 $x-2=0$, 故 $x=2$ 時決不能以 $x-2$ 除 $\frac{x^2-4}{x-2}$ 之分母分子將 $\frac{x^2-4}{x-2}$ 約為 $x+2$。此如 $\frac{96}{8}$ 儘可等於 $\frac{96-2}{8-2}=\frac{96-4}{8-4}=\frac{96-8}{8-8}=12$ 而決不能等於 $\frac{96-0}{8-0}$, 蓋 $96\div0$ 及 $8\div0$ 皆無意義也。

難者曰　0 固不能除 96。但 $0-0$ 為不定,可為任何數, $x=2$ 時 $x-2$ 固為 0, 但 x^2-4 亦為 0, 而

$$\frac{x^2-4}{x-2}=\frac{(x^2-4)\div(x-2)}{(x-2)-(x-2)}=\frac{0-0}{0-0}。$$

何謂 $x=2$ 時不能以 $x-2$ 除分母分子。如云不能,則仍是預認 $\frac{0}{0}$ 為不是數(然 $\frac{0}{0}$ 實可為任意數), 而陷於辨論循環之錯誤矣。

答曰　既 $0-0$ 可為任何數,則

$$\frac{0\div0}{0\div0}=\frac{\text{任何數}}{\text{任何數}}=\text{任何數},$$

而 $x=2$ 時 $\frac{x^2-4}{x-2}$ 之值不能確定,何能謂其必是 $x+2=4$。又須知「0 不能為除數」並非專指「被除數非 0 時」言,實兼「被除數為 0 時」言。故前

答並不陷於辨論循環之謬誤。

難者曰 $96\div0$ 爲無意義,實因無合於 $0\times x=96$ 中 x 之實數。今 $0-0$ 則一切實數皆合於 $0\times x=0$ 之 x。故 $0-0$ 雖爲不定仍有意義。何能云不能以 0 除 0。

答曰 $96-0$ 爲不能,$0-0$ 爲不定,二者雖有分別,而近世數學所謂「不能以 0 除」仍兼此二者而言者實係一種規約。其目的有二。其一,0 不爲除數時,凡加減乘除之結果皆爲獨一無二,十分確定之數。獨 $0-0$ 可爲任意數,絕不確定。故在四則計算中決不能容此例外,須將除去。其二,$0-0$ 既爲不定,則任何算式中一有 $0-0$ 即全體因之不定。吾人計算要在能得確定之結果,故決不能容此擾亂之物入於算式之中,必須將其擯之計算之外。此如彼認 $x=2$ 時,可

$$\frac{x^2-4}{x-2}=\frac{(x^2-4)-(x-2)^*}{(x-2)-(x-2)}=x+2=4$$

者,其目的亦欲離去 $\frac{0}{0}$ 之不定而得確定之結果。惜未注意 $x-2$ 爲 0 時不可以之除。倘再認 $0-0$ = 任何數可入算式,則

$$\frac{0-0}{0\div0}=\frac{\text{任何數}}{\text{任何數}}=\text{任何數}$$

仍不能得確定之結果。卽此更可知所謂「不可以 0 除」之目的矣。既有此「不可以 0 除」之規約,則 $0-0$ 雖有不定之解釋而爲簡便計,不妨與 $96\div0$ 同謂之無意義;且凡分數之值爲 $\frac{a}{o}$ $(a\neq o)$ 及 $\frac{o}{o}$ 時,不妨皆謂之不存在,何則,此二者皆已擯之除法之外也。

難者曰 既 0 不可以爲除數,則 $\lim\limits_{x\to2}(x^2-4)=0$, $\lim\limits_{x\to2}(x-2)=0$。

*$(x-2)\div(x-2)$ 在形式上雖爲 1。但 $x=2$ 則此式爲 $o-o$, 卽變爲不定而不能謂其必爲 1 矣故 $x\neq2$ 時可確定此式爲 1。若 $x=2$ 則不能必其爲 1。

何以

$$\lim_{x\to2}\frac{x^2-4}{x-2}=\frac{\lim\limits_{x\to2}(x^2-4)}{\lim\limits_{x\to2}(x-2)}=\frac{0}{0}\tag{3}$$

能爲4?

答曰　求此極限不宜寫成(3)之形式*。應先將 $\frac{x^2-4}{x-2}$ 約爲 $x+2$ 而後求其極限,即

$$\lim_{x\to2}\frac{x^2-4}{x-2}=\lim_{x\to2}(x+2)=4。\tag{4}$$

至此可約 $\frac{x^2-4}{x-2}$ 爲 $x+2$ 者,因照極限之定義 $x\to2$ 時 x 不能等於 2。x 既不等於 2,則在 $x\to2$ 之一切途中 $x-2$ 無時爲 0 且永不爲 0,儘可先約 $\frac{x^2-4}{x-2}$ 爲 $x+2$ 而後如(4)求其極限也。**

何以有些代數誤以分數之極限爲分數之値?

有些著代數者,大抵因講求分數之値遇 $\frac{0}{0}$ 時,覺得無法解決,同時想及求分數極限之不定形,[1] 遂欲以李代桃另立一種規

---

*因 $\lim\limits_{x\to a}f(x)=l$, $\lim\limits_{x\to a}\Phi(x)=m$ 及 $m\neq o$ 始能

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{\Phi(x)}=\frac{\lim\limits_{x\to a}f(x)}{\lim\limits_{x\to a}\Phi(x)}。$$

此 $m\neq o$ 之條件須注意。

**高中學生雖讀過高等代數而於極限之意義尚不十分明白者,恐於此數語尙難十分了解。但此處不便再作詳細之說明。關於極限之定義俟後另談。閱者於此,如有疑意,可先就已知之極限定義熟思之。

1 不定形 $\frac{o}{o}$ 乃 $\frac{\lim\limits_{x\to a}f(x)}{\lim\limits_{x\to a}\Phi(x)}$ 爲 $\frac{o}{o}$ 時之一種簡號。與 $\frac{f(a)}{\Phi(a)}$ 爲 $\frac{o}{o}$ 不同。

約。甚或著者雖知形式計算而於數學之一切根本觀念尚未十分清晰,竟二者不分認李爲桃。此後者之謬,從以上所言可知,不必再行詳論。至此前者,雖設立規約,本屬吾人之自由,但此種規約實無設立之必要,且於解析方面生種種之不便。例如 $x=2$ 爲 $\frac{x^2-4}{x-2}$ 之不連續點。若行此規約則不連續將變爲連續矣。

難者曰　$x=2$ 爲 $\frac{x^2-4}{x-2}$ 之可去不連續點,故儘可於 $x=2$ 時,令 $\frac{x^2-4}{x-2}$ 之值爲4而使之連續。然則此種規約亦未嘗不可立。何必加以反對。

答曰　著述數學必求謹嚴。無甚大益之規約不宜設立,且既因「不可以 0 除」,當 $x=2$ 時 $\frac{x^2-4}{x-2}$ 本無定值,則所謂「於 $x=2$ 時令 $\frac{x^2-4}{x-2}=4$ 使之連續」,實無異另定一連續函數

$$f(x)=\frac{x^2-4}{x-2},\quad x\neq 2 \text{ 時},$$

$$=0,\qquad x=2 \text{ 時}。$$

另定一函數.固無不可。但不必立上言之規約。蓋一有此種規約,不但與「o 不可爲除數」相矛盾,且并「$x=2$ 爲 $\frac{x^2-4}{x-2}$ 之可去不連續點」一語爲不通矣。且即立此規約,亦不過規約而已,亦決不能認 4 爲 $x=2$ 時 $\frac{x^2-4}{x-2}$ 之眞值,况此種規約不宜設立乎。

總上所言,$x=2$ 時分數 $\frac{x^2-4}{x-2}$ 之值無定義,謂之不定可,竟謂之不存在亦無不可。正不必畫蛇添足如有些著書者云云也。

教　材

不　等　式（四續）

武 崇 林

§8. 收斂定理之一二。

於前之數節中，所有和式，項數俱屬有限。故收斂問題，自無由發生。然於 Holder 及 Minkowski 不等式中，命 $n\to\infty$，則正項級數收斂之一二定律，立可得出，雖於實用無大裨益，然亦可以視作此二不等式之直接應用也。

(i) 若 $1/p+1/q=1$ 且 Σa_r^p 及 Σb_r^q 俱收斂，則 $\Sigma a_r b_r$ 亦然。

(ii) 若 $p>1$ 且 Σa_r^p, Σb_r^p 俱收斂，則 $\Sigma(a_r+b_r)^p$ 亦然。

證明殊易茲不復贅。

Carleman 定理。 若 $a_1, a_2, \cdots a_n$ 等各數俱爲正，且 $\sum\limits_1^{\infty} a_r$ 收斂爲和 S，則如命 $g_n=(a_1a_2\cdots a_n)^{1/n}$，級數 $\sum\limits_1^n g_n$ 卽收斂爲和 U，其 $U\leqslant eS$。

證　茲先示若

$$b_n=\frac{a_1+2a_2+\cdots+na_n}{n(n+1)},$$

則 Σb_n 亦收斂爲和 S。 吾人習知若敍列 $\{s_n\}$ 之極限爲 S，則敍序 $\{\sigma_n\}$，其

$$\sigma_n=\frac{s_1+s_2+\cdots+s_n}{n},$$

極限亦為 S。 茲命 $s_n=\sum\limits_1^n a_n$ 則

$$\Sigma b_n=\frac{a_1}{1\cdot 2}+\frac{a_1+2a_2}{2\cdot 3}+\frac{a_1+2a_2+3a_3}{3\cdot 4}+\quad+\frac{a_1+2a_2+\quad+na_n}{n(n+1)}$$

$$=a_1\left\{1-\frac{1}{n+1}\right\}+2a_2\left\{\frac{1}{2}-\frac{1}{n+1}\right\}+\quad+na_n\left\{\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right\}$$

$$=\frac{na_1}{n+1}+\frac{(n-1)a_2}{n+1}+\quad+\frac{a_n}{n+1}$$

$$=\frac{s_1+s_2+\quad+s_n}{n+1}=\frac{s_1+s_2+\quad+s_n}{n}\cdot\frac{1}{1+1/n}$$

是以當 $n\to\infty$ 時

$$\sum_1^n b_n\to S。$$

令

$$g_n=(a_1a_2\quad a_n)^{1/n}=\frac{1}{(n!)^{1/n}}(a_1\cdot 2a_2\cdot 3a_3\quad na_n)^{1/n}$$

$$\leqslant\frac{n+1}{(n!)^{1/n}}b_n。\qquad〔由(1\cdot 1)〕$$

但

$$(1+\frac{1}{1})^1(1+\frac{1}{2})^2\quad(1+\frac{1}{n})^n=\frac{(n+1)^n}{n!}<e^n,$$

故

$$\frac{n+1}{(n!)^{1/n}}<e,$$

因而吾人有

$$\sum_1^n g_n<e\Sigma b_n。$$

於上式命 $n\to\infty$,則見 $\sum\limits_1^\infty g_n$ 之為收斂且其和 U 不能超逾 eS 也。

於以上 Carleman 定理內, e 係所謂『最適』常數,『最適』常數者,即

謂其不能更小或更大。于本定理內 e 卽不能更小,更小則定理將不能無往不眞實也。此所用之證法,其原理殊爲單簡,在證常數爲『最適』時,每可以用之。

命 $$a_n=1/n, \qquad n=1,2, \quad m$$
$$a_n=0 \qquad n>m$$

則對任何 m, $\sum_1^\infty a_n$ 必爲收斂。茲吾人將證

$$(8.1)\qquad \lim_{m\to\infty}\frac{\sum_1^\infty g_n}{\sum_1^\infty a_n}=e$$

假如 (8.1) 爲眞實,則 e 之爲『最適』,顯然可見,以若取 $e'<e$, 則當 m 爲充分大時, $\sum_1^\infty g_n$ 將大於 $e'\sum_1^\infty a_n$,而 Carleman 定理將不復爲眞也。今

$$(8.2)\qquad \frac{\sum_1^\infty g_n}{\sum_1^\infty a_n}=\frac{1+\left(\frac{1}{2!}\right)^{1/2}+\left(\frac{1}{3!}\right)^{1/3}+\quad+\left(\frac{1}{m!}\right)^{1/m}}{1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\quad+\frac{1}{m}}=\frac{A_m}{B_m},\ (\text{云如}),$$

由 Couchy 之一定理,(譬如見 Gibson, Advanced Calculus, p.38) 見 (8.2) 之是否有極限,與極限之爲何數,一視 $\frac{A_{m+1}-A_m}{B_{m+1}-B_m}$ 爲依歸。故吾人之所需證,乃在示

$$\frac{\left(\frac{1}{(m+1)!}\right)^{1/m+1}}{\frac{1}{m+1}} \quad \text{或即} \quad \frac{m+1}{[(m+1)!]^{1/m+1}}$$

當 $m\to\infty$ 時極限之爲 e 也。 但此事殊易易,參閱如此處所擧Gibson之書53葉卽得之。

9. Hardy 不等式及 Hilbert 複級數定理。

若 $k>1$ 且 $A_n=a_1+a_2+\quad+a_n$ 爲一正項級數首 n 項之和,則如級數 Σa_r^k 收斂且和等於S,下之二級數

$$\Sigma\left(\frac{A_r}{r}\right)^k \text{ 及 } \Sigma a_r\left(\frac{A_r}{r}\right)^{k-1}$$

亦各收斂,而其和順次以 V 及 T 表之,則有

$$V\leqslant\frac{k}{k-1}T\leqslant\left(\frac{k}{k-1}\right)^k S。\tag{9.1}$$

證 書 $u_n=A_n/n$ 則

$$a_n=nu_n-(n-1)u_{n-1}。$$

于以下,如遇有下誌爲零者,其數當認爲零。

由(1.1),若有 $k-1$ 項爲 u_n^k 而一項爲 u_{n-1}^k 則

$$(u_n^{k(k-1)}u_{n-1}^k)^{1/k}\leqslant\frac{(k-1)\,u_n^k+\,u_{n-1}^k}{k}$$

是卽

$$ku^{k-1}u_{n-1}\leqslant(k-1)u_n^k\;+\;u_{n-1}^k\tag{9.2}$$

勿論 n 爲若何整數,吾人可書

$$u_n^k-\frac{k}{k-1}\left\{nu_n-(n-1)u_{n-1}\right\}u_n^{k-1}$$

$$=\;u_n^k\left(1-\frac{nk}{k-1}\right)\;+\frac{n-1}{k-1}\;\;kn_n^{k-1}u_{n-1}$$

$$\leqslant u_n^k\left(1-\frac{nk}{k-1}\right)\;+\frac{n-1}{k-1}\left\{(k-1)\,u_n^k+\,u_{n-1}^k\right\}\qquad[\text{由}(9.2)]$$

$$\leqslant\frac{1}{k-1}\left\{(n-1)\,u_{n-1}^k-nu_n^k\right\}\tag{9.3}$$

茲命 S_n, T_n, V_n 順次爲三級數首 n 項之和 自(9.3)取 $n=1,2,$ n 而相加,則得

(9.4) $$V_n-\frac{k}{k-1}T_n\leqslant-\frac{nu_n^k}{k-1}\leqslant 0$$

再者由 Hölder 不等式,

(9.5) $$\left(\sum_1^n a_r\ b_r^{k-1}\right)^k\leqslant\left(\sum_1^n\ a_r^k\right)\left(\sum_1^n\ b_r^k\right)^{1/k}$$

若於(9.5)內命u_r為b_r,則其式成為

(9.6) $$T_n^k\leqslant S_nV_n^{k-1}$$

由(9.4)及(9.6)吾人推得

(9.7) $$V_n\leqslant\frac{k}{k-1}T_n\leqslant\left(\frac{k}{k-1}\right)^kS_n$$

但題設$\{S_n\}$,$\{T_n\}$,$\{V_n\}$俱為正項單趨數敍,而$\{S_n\}$當$n\to\infty$時趨近於S,是以知$\{V_n\}$,$\{T_n\}$順次具有極限V及T。故于上式(9.7)內,命$n\to\infty$,則得

$$V\leqslant\frac{k}{k-1}T\leqslant\left(\frac{k}{k-1}\right)^kS.$$

即得證

Hardy 不等式內$\left(\frac{k}{k-1}\right)^k$亦係最適當常數此由 Landau 所證明,但其證較繁,茲不更及.Hardy 之不等式,自謂係當研究如何簡化 Hilbert 複級數定理時所發現者云。

Hilbert 定理　若$a_m\geqslant 0$,且Σa_m^2收斂,則以下之複級數

$$\sum_{m\leqslant n}^{\infty}\frac{a_ma_n}{m+n}$$

常收斂.

證　予Hardy不等式中取$k=2$,則見若Σa_n^2收斂爲S, $\Sigma\frac{a_nA_n}{n}$將收斂爲T,且$T\leqslant 2S$。今

$$\frac{a_1}{n+1}+\frac{a_2}{n+2}+\quad+\frac{a_n}{2n}<\frac{a_1+a_2+\quad+a_n}{n}=\frac{A_n}{n} \tag{9.8}$$

但(9.8)右端實卽$\sum\limits_{m=1}^{n}\frac{a_m}{m+n}$,所以

$$a_n\cdot\sum_{m=1}^{n}\frac{a_n}{m+n}<\frac{n_nA_n}{n},$$

因而

$$\sum_n a_n\sum_{m=n}^{\infty}\frac{a_n}{m+n}<\sum_n\frac{a_nA_n}{n} \tag{9.9}$$

但上之複級數各項均不小於零,故若(9.9)左端之叠級數爲收斂,則複級數亦必收斂而具相等之和,故得證

吾人得證明

$$\Sigma\frac{a_ma_n}{m+n}\leqslant\pi\Sigma a_n^2$$

而π且爲「最適」常數。但最簡之證明,亦須涉及無限二重積分之理論,故將割愛不談,所可進一言者爲Hilbert此定理,最初乃在其積分方程式講義中所發現,而爲Weyl所述以公諸世者也。(完)

感應放射 (Induced Radioactivity)(續)

Ellis 原著　鄭昌時譯

用質子和重氫去使原子核發生變化,引起放射物的產生前面已經提到過,但是因爲這種射線的强弱可以自由操縱,並且用專門方法可以使他大大的增加,這件事便值得特別注意了。Lawrence 曾經做出一種放射物,他的總量竟可以和天然存在的放射物的相比。一個特別有興趣的例便是鈉原子被重氫所撞擊時,生出下面的反應

$$_{11}Na^{23}+{}_1D^2\longrightarrow{}_{11}Na^{24}+{}_1H^1。$$

這個新的鈉同位元素發出 β 質點而分裂,他的半期壽命有十五個半鐘頭。射出的 β 質點並不算特別能量豐富,至多的能量不過一百萬伏特,但是却有一個强烈的高頻率 γ 射綫,約有五百五十萬伏特的能量一同發射出來。用一徵安培 (micro. ampere), 一百七十萬伏特的重氫射綫工作一小時,可以得到二百分之一毫居里(millicurie) 的放射物。這個分量,他的能力已經可以用尋常的游離法 (ionization method) 測驗出來了,我們相信不久還可以大大增加產量。

等到能夠得到相當量的同這(意卽指新的鈉同位元素——譯者註)差不多的一種放射物,有適當長的壽命,並且射出這種高頻率 γ 射綫,那麽又有大批新的研究可做了。

從產生的新放射元素的數目上看起來,Fermi用中子作撞擊質點所得結果最可驚異。試驗中所用的中子是使 α 質點打到鈹

原子上而發生的,做的時候是把鈹和氡同裝在一支小管內。所發生中子的數目只有來源所射出的 α 質點數目的十萬分之一,但是他們使原子核發生變化的功效却大多了。其實,相當多的中子,能射中了原子核而產生一個放射性的原子。這種實驗比用 α 質點或質子時範圍大了許多,因爲中子不帶電荷所以對於輕元素和重元素是無分別的。這樣所做成的新放射性同位元素在全個週期表上分配得很勻,譬如從氟和鎂得放射物,從鉒和鈾也得到放射物。普偏的說,輕元素變成放射性的方法是獲得一中子,同時射出一 α 質點或一質子。其結果原子核內中子與質子的比大於相當的穩定比,爲了必需再使原子穩定,核的內部就發生變化,一個中子放出一個電子變成一個質子。重的元素則開始時便因核的電場吸力大其放出帶正電的 α 質點或質子的機會隨而減少,變化過程中比較是單單獲得一個中子的時候多,做成的放射性原子核仍舊有一個太大的中子與質子的比數。

有幾點關於原子核直接獲得中子的方法現在還不容易明瞭,似乎當中子所有的能量減少時被獲的機會應該加多。Fermi 的確會指出當撞擊時若在中子來源和靶子之間圍以石蠟或水,產生放射元素的效率可以增加十倍以至百倍。因爲來源中初出來的中子經與氫原子核幾次彈性碰撞 (elastic collision)之後,速度慢下來,在這種情形之下,中子比較的容易被所撞擊的物質的原子核所獲住了。

最後,舉一個例來表示產生新原子核的方法的伸縮性,我們可以考察某種放射性的鋁同位元素 $_{13}A^{28}$ 的做成方法。這個元素可以用不同的物質和不同的撞擊粒子來做成,方法不下五種。

中子射到鋁,矽或燐的原子核中可以有下面幾種方法做成

${}_{13}A^{28}$

$${}_{13}Al^{27}+{}_{0}n^{1}\longrightarrow{}_{13}Al^{28}$$

$${}_{14}Sl^{28}+{}_{0}n^{1}\longrightarrow{}_{13}Al^{28}+{}_{1}H^{1}$$

$${}_{15}P^{31}+{}_{0}n^{1}\longrightarrow{}_{13}Al^{28}+{}_{2}He^{4}。$$

也可以用重氫射擊鋁原子或用α粒子射擊鎂原子得到${}_{13}A^{28}$,後面一個反應我們在說明別一種關係時曾提到過的:

$${}_{13}Al^{27}+{}_{1}D^{2}\longrightarrow{}_{13}Al^{28}+{}_{1}H^{1}$$

$${}_{12}Mg^{25}+{}_{2}He^{4}\longrightarrow{}_{13}Al^{28}+{}_{1}H^{1}$$

每種情形之下,最後結果總得到${}_{13}Al^{28}$,再放出β粒子變成${}_{14}Si^{28}$,有$2\frac{3}{4}$分鐘的壽命。

氧與氯之實驗室製法

陳同素

製氧　普通學生實驗製造氧氣類多用 MnO_2 及 $KClO_3$ 之混合物以熱之,以導管通入集氣筒而收集之,所用材料極為普通而價廉,此實驗復表示一種分解作用及接觸作用。故初學者習之甚為相宜。但亦有其弊,試述於下。

(1)氯酸鉀之融熔輒引起試管內之氣流中止,或則忽然發生氣體因使鬆細材料被冲入導管內。此種現象能引起試管之破裂或有時甚至發生爆炸。

(2)倘試管加熱時,橡皮塞末端灼熱過甚,則能在此氧氣中燃着而爆發。

(3)氯酸鉀如無意中混有還原劑如碳,硫,糖等物則加熱時甚為危險。

(4)氯酸鉀加熱至一定溫度時,氧氣卽源源生出,初不以去其熱源而卽停止,故在調換集氣瓶時不免損失。如尙需多量之氧非重行裝置不可。

爰有下述改良之法

於次亞氯酸鈣之懸濁液中加氧化鈷(或鈷之鹽類被次亞氯酸鈣溶液中之游離OH基轉變成氧化鈷),次亞氯酸鈣乃分解而發生氧氣。其作用可表示如下

$$Co^{++}+2OH^{-}=Co(OH)_2$$

$$4Co(OH)_2+Ca(ClO)_2=2Co_2O_3+CaCl_2+4H_2O$$

$$Ca(ClO)_2+(Co_2O_3)=O_2\uparrow+CaCl_2+(Co_2O_3)$$

手續如下: 用一燒瓶裝上長頸漏斗及導管如製氫時所用。加約150 cc水及10 cc之2%氯化鈷($CoCl_2$)溶液。復製備次亞氯酸鈣之懸濁液如下置20克漂白粉於玻杯內,加 100 cc水,攪之至無塊粒爲止。將燒瓶內之液體加熱(80°−85°C),乃以20 cc次亞氯酸鈣液自漏斗管中注下。初生出之100 cc氣體大部份爲空氣,故不用之。以後生出之氣體乃收集瓶中以備試驗之用。若氣體發生延緩則可添加10 cc次亞氯酸鈣液。瓶中液體不使超過沸點。

此法經濟又便利,氧氣發生之速率可以溫度及加次亞氯酸鈣之速率而定之。此瓶於需用時祇須加添次亞氯酸鈣液及加熱卽有氧氣發生。

製氯 普通製氯氣之法,類多用二氧化錳及鹽酸,或有以過錳酸鉀代二氧化錳者,與製氧之法相彷,所用材料亦屬普通而便宜,且表示氧化與還原作用。但亦有其弊,述之於下:

(1)開始作用時極慢。

(2)生成水及用去HCl, 結果稀釋酸液。

(3)使學生做到保持HCl之高濃度及溫度之在沸點以下(以減少水之蒸餾過去而入集氣筒),甚爲難能。茲亦擬一新法以免去上述之弊。用漂白粉(或次亞氯酸鈣)以代二氧化錳,若以HCl注入漂白粉液則氯之發生驟然而不連續,故當以漂白粉液注入HCl,其手續如下

漂白粉液加下少量以免氯氣發生之太速,此實驗宜於通風櫥內行之。裝置與製氧法相仿,但集氣時爲置換空氣法。瓶中盛25竓之濃HCl(比重1.12)。盛15克漂白粉於杯中,加50竓水,攪至均勻無粒,徐徐注10竓於漏斗管中,繼續每次約加5竓。集氣於瓶內,蓋好。以白紙襯視瓶中氯氣之是否盛滿。滿後以塗有凡士林之玻片覆之,繼集他瓶。如倘需多量之氯則可添加漂白粉液。迨不集氣於瓶時,則可將導管通入NaOH溶液內,加水充滿燒瓶則所有氯氣盡行驅入NaOH溶液內,然後可以取去塞子,洗淨此瓶。

按此法製出之氯氣其氣流連續,氣體之發生可以節制漂白粉液之加入以管理之。只要瓶內有酸,則加下漂白粉液,即可得到氯氣,不必加熱,故無水可以蒸餾過去而混入氯氣中。

叢　錄

原子物理學二十五年之回顧

Rutherford 原著　鄭昌時譯

(續)

另一個輻射與物質間相互作用的奇怪形式新近被發見。當一量子能狠大的 γ 射綫與原子核近邊的强電場起相互作用時,γ 射綫的能量會變成一對電子——一個正的,一個負的。因爲電子對(Electron pair)的物質能量(mass energy)近於一百萬伏特,所以這種作用只會在 γ 射綫的能量超過此數時發生。使高頻率輻射(High fregnency Radiation)穿過重原子量的物質是實驗室中產生正電子(positive electron)的最簡便方法。

對於過去數年中差不多世界上許多工作者集中注意的二個重要問題,即宇宙射綫(cosmic rays)和物質蛻變(transformation of matter)此地只作簡單的提論。Kolköster 首言我們大氣中有貫穿力狠强的輻射存在, Millikan, Clay, A H. Compton, Blackett 等繼作此輻射性質之探究。我們只看用驗電器(Electroscope)在地面上觀察這種輻射的電離能力(ionising effect)之微小,就知道常在困難情形下作精確的觀察時,熟練及專門技能的需要。這種研究已遍佈全世界,無論水底深處,陸上及海上,高山上大氣中高度不同之處,並伸張到同溫層(Stratosphere)都做過這種量度。

現在看起來其主要的輻射似乎包含一注運動極快有正有負的電子,或許亦有質子(protons)與高頻率的輻射混在一道。有幾

個質點可以相信他有高到10^9伏特的能量,更有少數有高到10^{10}伏特的能量——這種能量並不與從原子蛻變時所期待着的同級。自然,關於這非常的輻射的來歷和性質有許多推測,有的當他由大氣邊界而來,有的當他由外空(outer space)深處而來質點能具有如此龐大的能量的條件實在是物理學中一個特出的沒有解決的問題。

放射性元素的天然蛻變在1903年已經弄得明白了,用人工的方法變化許多穩定的化學元素是屬於過去二十五年內的成功。這種原子變化的研究狠有成就,由此而發見原子構造中三種重要的實體,即質子,中子(neutron)及正子(positron),正子與負電子相當,帶正電而與電子有相等的小小質量。

欲得到眞正的元素變化必需變換他的核電荷或質量或二者同變。要達到這目的,主要方法不外用進行狠快的質點如質子,中子或α質點去撞擊要試驗的元素。碰巧在許多質點中會有一個穿進原子核而被帶住。這原子核結果會不穩定而爆裂,拋出一個或幾個很快的粒子,有時且發出頻率狠高的輻射。剩下的原子核或者成為一個穩定的元素,或者成為一個同放射元素一樣,仍不穩定的元素。由這個方法最近Curie-Joliot夫婦用α質點施撞擊而得到人爲的放射元素。

第一次原子變化試驗成功是在1919年,當氮原子被α質點撞擊時,發現他自身變爲他元素且發出狠快的質子。Rutherford和Chadwick二人找到約有十二種輕元素在同樣情形下會有相仿的變化發生。因爲擴大這觀察,各處研究室中集中力量試驗利用大批不同的高速度質點連珠發射出來作撞擊之用。Cockcroft和Walton首先證明輕元素如鋰與硼被放在電管(discharge Tube)中

速度增至很快的質子射線所撞擊時會有顯著的變化。Lawrence在加利福尼亞(California)用一種巧妙的方法使粒子在磁場內經多次加速,曾得到能量差不多到二百萬伏特之高的極快的質點。他覺得在產生某一類元素的蛻變中用原子量二的重氫的游子比質子更有效力。在有幾個試驗中,中子會和質子;α質點同樣的在原子蛻變後出現。

Feather與Hark ns指出Chadwick所發見的中子其重要不獨簡單化了原子核構造的意義,並且可視爲許多元素發生變化的非常有力的主動份子。Fermi和他同事在羅馬做了一個重要試驗,他們指出即最重的原子核的組織內,中子也能自由跑進,結果往往得到人爲放射物,每種各有其固有的放射係數,破裂着而發射出很快的負電子。現在已知道的這種放射物已超過五十種。

用這種變化原子的方法,我們知道可以從輕元素造成重元素,又可以把原子打成碎片又可以產生許多放射性的同位元素;幾種新的,意料不到的穩定同位元素如H^3, He^3,及Be^8都經發現了,比天然放射物的γ射綫的頻率更高的γ射綫也曾被觀察到。

原子核蛻變知識的進步所以如此之快,頗得力於各種新式專門研究工具之進步,例如Wynn Williams所設計的自動計數α粒子和質子的方法,記錄正負電子的Geiger-Müller管,以及C. T. R. Wilson所設計的奇妙的儀器『霧室』(Cloud Chamber)。Gaede發明的高速率擴散抽氣機(Diffuison Pump)使高度眞空(high Vacua)能夠很快得到,而高電壓得以應用於放電管。

我們對於原子核構造的種種觀念尚在實驗證明中,但大體上可以相信質子和中子是他的基本單位。不過,如果質子和中子間有什麼一定的關係,那末,這個關係還沒有決定。有人相信在原

子核中他們可以因得到或失去一個電子而互相變換的,並且帶負電的質子或許也能產生。在我們要相得到原子核構造的滿意的解釋之先,我們還需要更多的知識,可以應用到原子核上面去的任何詳細理論,或者離我們還很遠呢。

製革叢談

陳同素

浸皮時之皮內變化

皮浸漬之時間長,則有許多皮內物質溶化水中,如氨,脲,胺 Indole, Skatole, 及已變未變之蛋白質物。欲知皮受各種處理後之變化情形,可試驗如下:切皮成方每邊 1/8 吋,分此皮塊爲數組,每組10克重。分別試驗如下

(甲)組不經處理,(乙)組以飽和鹽液浸之48時,(丙)組以(乙)法處理之皮浸水中24時;(丁)組以經過(乙)(丙)二種手續之皮浸灰120時。經此處理後,洗淨,以20%HCl處理,過剩之酸以眞空蒸餾法(35°C)去之。餘渣集於無氨之水中而分之爲四屬氮化物。此等分屬示皮內氮素之分佈,述之於后

(1)Amid N_2——當眞空蒸餾時發出爲氨,Amine 並示 Di-Carboxylic acid 之存在量。

(2)Melanin N_2——當以酸處理時所生之腐敗物質,大約爲碳水化合物及 Amino acid tryptophane 化合而成。

(3) Basic N_2——爲 Basic amino acid, arginin,lysin, histidin, Cystin之氮素,在 HCl 中以燐鎢酸澱出之酸類。

(4) Non-basic N_2——示 Mono-amino acid 之氮素及不爲燐鎢酸所澱

出之酸類。

試驗結果列如下表

表一 各種處理法之皮內氮素分佈

氮	屬	甲	乙	丙	丁
Amino	N_2	5.12	5.49	4.49	4.52
Melanin	N_2	1.95	0.81	0.98	0.56
Basic	N_2	20.35	19.51	18.20	17.85
Non-basic	N_2	73.20	74.19	76.33	77.08

由此可見皮經各種處理後,發生一種鹽基性的變化(1)Melanin N_2 漸見減少,(2) 自原本之皮起其 Basic N_2 亦漸見減少。故每一種手續使 Basic amino acids 變化。Basic N_2 之半為 Arginin, 此物易分解,此即 Basic N_2 漸見減少之理也。(3) Non-basic N_2 則漸增。

浸漬時間之關係可以下述試法測之。(甲) 生鮮皮不加處理,(乙) 浸 24 時,(丙)浸 48 時,(丁)浸 72 時,(戊) 浸 96 時,(己) 浸 120 時。溫度保持 25°C。乃照上法洗淨,得結果如下表

表二 浸漬時之氮素分佈變化

氮	屬	甲	乙	丙	丁	戊	己
Amid	N_2	4.32	4.22	4.41	4.41	4.55	6.61
Melanin	N_2	0.77	0.81	0.79	1.27	1.04	1.17
Basic	N_2	31.35	25.40	22.10	21.35	21.25	24.55
Non-basic	N_2	62.85	69.57	72.97	72.97	73.25	67.67

由上表可知 (1) Amid N_2 持常度,(2)Basic N_2 在先一日內減少甚多以後則漸緩,(3)Non-basic N_2 漸次增加。

Basic N_2 依浸時之長久而減少,因其主成份之 Arginin (此物為 Guanidine $(NH_2)_2C=NH$ 之衍生物)甚易分解成脲及 Ornithin

$$\begin{array}{l} \quad\ NH_2 \\ \quad\ \ | \\ HN=C \\ \quad\ \ | \\ \quad\ NH-(CH_2)_3-CH(NH_2)COOH \end{array} + H_2O \rightarrow O=\begin{array}{c} NH_2 \\ | \\ C \\ | \\ NH_2 \end{array} + H_2N-(CH_2)_3-CH(NH_2)COOH$$

脲極易氧化爲氨及二氧化碳,考脲及胺均可溶解於水,故在浸漬時可以除去之。然實際上欲在浸皮水內求脲,不可得之。此因脲又被分解之故也。總言之浸漬時間長則皮內之氮素物漸漸消失至水中。

世界礦產分佈概述

陳同素

鋁。——世界鋁礦一半以上均產於歐洲,其餘爲美國,英屬貴阿那,及蘇里南。至於鋁之冶金工業則歐洲與北美各半。

鉻。——菲洲爲鉻礦之中心。產品三分之二爲美國製鋼業所用。

銅。——世界銅工業之半在美國,其次則屬智利,加拿大,及南美中部。銅業勢力爲美國,英國,比利時,握持,而精煉業之百分之八十三爲美國所把持。

鋼鐵——世界鋼鐵工業集中於歐洲西部及美國。

鉛。——鉛之分佈甚廣,但其三分之一之製鉛工業在美國。其次爲墨西哥,澳大利亞及加拿大。

錳。——俄國在 1929 年產全世界錳礦之三分之一,錳工業之發達者,爲英,俄,巴西及美。

汞。——汞大部產於西班牙及意大利。

鉬。——美國出產全額之百分之九十四,可以壟斷該項礦產。

鎳。——加拿大富於是礦,佔全額百分之九十。

石油。——世界石油工業,首推美國,次爲俄國及南美北部。

鉀。——德,法出產甚多,但美國及馬六哥蘊藏亦富。

銀。——墨西哥及美國爲主要產銀國。

硫。——美國產百分之八十五,意國產百分之十一。

錫。——馬來,玻琍維亞,內善倫,東印度均開採錫礦,英國主其產權。

鎢。——我國所產佔全世界總產額之半,蒲馬佔五分之一。

釩。——世界產量之三分之二爲美國製鋼業所用。祕魯產百分之六十,菲洲西南部產百分之二十,美國產百分之十七。

鋅。——此項工業集中於美國,美國產百分之四十,墨西哥,澳大利亞,德國,波蘭,各佔百分之十,

——摘錄"Advance of Science" 106—107頁。

書　評

化學參考書籍選輯(續)

陳同素譯

3. 化學示範實驗　*Chemiche Unterrichtsversuche Prof. Dr H.Reinboldt, Bonn. Theodor Steinkopff, Dresdon, 1934. xx+326 pp. 112 Figs. RM. 10*。

此書雖爲化學實驗示範之摘要,但其主要目標在於訓練化學教師之裝置示範試驗及表演其技術於學生之前。吾國學校化學教員對於此項教授法大多不注意,故此書允宜人手一編也。

實驗方法均詳細敍述,並多附精美之圖解,復有參考材料,尤注意於歷史方面。每種手續均極精密而完善。第一編講實驗室儀器之製法,氣體之製法,使用及液化等。第二編篇幅較廣,係教師實驗操作時之嚮導。實驗種數在五百以上。用過是書後,對於裝置各種儀器及技術方面均可大有進步。實驗題材幾於將普通化學各個重要部份,盡行蒐集於此。除製法外對於化合物或元素之性質亦盡量表示,如製氧一節,則有以擴散法與氫之分離,由植物發生氧氣,塵埃之爆炸,觸媒氧化等。即製法亦收羅甚博,如金屬化合物之還原以氫,以碳,以一氧化碳,以鋁,以鐵,以電離法等。但對於產量一方面不計及之,蓋僅取以表演製造之方法而已。

書末有索引,用者可隨意檢閱。

4. 營養基礎　*The Foundations of Nutrition.Mary Swartz Rose, Ph. D.,*

Prof. of Nutrition, Teacher's College. Columbia Univ. The Macmillan Co., New York City, 1933. 2nd ed. xi+630 pp. 101 Figs. 13×20 cm. $ 3.00

此書爲欲使生活更佳勝而對於自然科學無特別訓練之人而寫。敍述人生營養之基本原理,頗饒興趣,文筆生動。故自1927年初版以來,已經數度翻印。現再版出世,內容更加擴充,自十二章增至二十六章。新近發表之研究亦收羅入書。每種維他命分章論之。附錄亦經修正及增加。

裝幀印刷較前尤爲精美。所論雖屬基本智識,但均爲有根據的及科學化的材料。對於應用於食物選擇及調理等諸問題,亦有討論。

5. **食品論**　*Food Products, Henry C Sherman, Columbia Univ. The Macmillan Co, New York City, 3rd edition, xi+674 pp. 42 Figs. 13×19. 5 cm. $ 3.00*

此書要目如下食品之主要成份及功用,食品之管理,牛乳,蛋,肉,禽肉,野味,魚,海味,五穀,蔬菜,鮮果,油脂,糖,蜜餞,食品之附屬物如焙粉,香料,調味品,茶,咖啡,飲料等。末章則論及食品經濟,附錄中有食品及藥料之取締法令,檢查肉類規則,食品中之鈣,燐,鐵,錳,銅等成份,及食品中之維他命。

諸凡食品之出產,處理,成份,羼雜及檢查,純潔,及分類等均論及焉。每種食品均示其營養價值,及膳食上之地位。食品加工法亦略加申述。涉及每種食品時均有詳細之參考列出。誠爲研究營養者不可少之佳作也。

6. **實業化的蘇俄**　*Industrialized Russia, Alcan Hirsch, Ph. D., Consulting Chemical Engineer, The Chemical Catalog Co.,*

Inc., New York City, 1934, 309 pp. 20.25×13.75 cm.
$ 3 00

蘇俄政府之政策如何姑不論之,而其近年來基本工業之猛進,實至足驚人。著者此書實不啻一冊人類偉大實業之試驗報告也。書中所述均極有趣而可靠。

著者以蘇俄化學工業顧問之卓越地位,故於其基本政策及統計等均得參與討論。彼與蘇俄政工兩界領袖接觸之後覺得與以前往俄考察者所得之影像不同。該書文筆引人入勝,幾使讀者忘其正在讀一統計文字也。且不僅涉及目下已經成功之實業即蘇俄第二步五年計劃之雄心亦有論及。第一步注重基本工業,第二步注重奢侈品與日用品。是書主要意義在乎著者末數語中.吾等勿徒羨其已成功之境域而當慕其克苦砥勵之功夫!此書可以磨勵吾人之志氣。值得一讀。　(完)

專　載

近代幾何

之導引

William C. Graustein 原著

顧澄達指

定理 1　一線 $\alpha+\lambda\beta=o$ 分兩有窮遠線 $\alpha=o,\beta=o$ 之比 μ 爲

$$\mu=-\lambda\sqrt{\frac{b_1^2+b_2^2}{a_1^2+a_2^2}}, \tag{5}$$

此係照(3)取定 D_1,D_2 者(卽照(3)取定 D_1,D_2 則此(5)式成立)。

若 $\alpha+\lambda\beta=o$ 爲有窮遠線,則此定理可從(4)直接推知。*

4　直線之調和分離　若經過一點 P(有窮遠或無窮遠之不同兩直線 M_1,M_2 分經過此 P 之兩直線 L_1,L_2 於兩代數比 μ_1, μ_2, 而此兩比適此爲彼之負數,卽

$$\mu_1=-\mu_2, \tag{1}$$

則謂之 $M_1\,M_2$ 將 $L_1\,L_2$ **調和分離**,或謂之 M_1,M_2 與 $L_1\,L_2$ **調和分佈**。

若 P 爲一有窮遠點及 $\mu_2=1$, $\mu_1=-1$, 則 M_1 及 M_2 爲 L_1 及 L_2 之兩交角之兩平分線。故「交於有窮遠點之兩直線之兩交角之兩平分線」與此兩直線爲調和分佈。

設 L_1,L_2 爲 3 款之兩線 $\alpha=o$, $\beta=o$, 而今將其方程式寫成齊次坐標之形式,卽

$$\alpha\equiv a_1x_1+a_2x_2+a_3x_3=o.\qquad \beta\equiv b_1x_1+b_2x_2+b_3x_3=o,$$

則經過 P 之任意兩線爲 $\alpha+\lambda_1\beta=o$, $\alpha+\lambda_2\beta=o$〔P 爲 $\alpha=o,\beta=o$ 之交點〕。

---

*原註　此 $\alpha+\lambda\beta=o$ 爲無窮遠線時,此定理可說明如下當 $\alpha=o,\beta=o$, 爲平行而 $\alpha+\lambda\beta=o$ 爲無窮遠線(欲以 $\alpha=o,\beta=o$ 之一次連合表無窮遠線,可就(2)之兩方程式寫成齊次坐標形式者着想)時欲證明此定理,必須證明可照「量(3)中兩距離之正向爲相同或相反」而化(5)爲 $\mu=1$ 或 $\mu=-1$, 參觀前頁附註。

旣 $\alpha=o,\beta=o$, 爲平行,則必有一常數 $k\neq o$ 能使 $a_1=kb_1$, $a_2=kb_2$。因此,若 $\alpha+\lambda\beta=o$ 爲無窮遠線,則 λ 之值必爲 $-k$。因 $a_1=kb_1$, $a_2=kb_2$ 及 $\lambda=-k$ 則(5)化爲 $\mu=k/\sqrt{k^2}$。故照 $k>o$ 或 $k<o$ 而得 $\mu=1$ 或 $\mu=-1$。

現在所須證明者,但爲「量(3)中兩距離之正向」可照「$k>o$ 或 $k<o$」而爲相同或相反矣。從(3)之兩公式易知若 $k>o$, 則 $D_1-D_2\equiv$ 常數,又若 $k<o$, 則 $D_1+D_2\equiv$ 常數。故量此兩距離之正向在 $k>o$ 時爲相同,在 $k<o$ 時爲反。

從3款定理1,在(及惟在) $\lambda_1=-\lambda_2$ 時此兩線分 L_1, L_2 之兩比 μ_1,μ_2 適(及方)此爲彼之負數。故得下定理

定理1　兩線,在(及惟在)其方程式可寫作

$$\alpha+\lambda\beta=o, \qquad \alpha-\lambda\beta=o, \qquad \lambda\neq o$$

之形式或與之相等之形式

$$k\alpha+l\beta=0, \qquad k\alpha-l\beta=0, \qquad kl\neq o$$

時,能(及方能)將不同兩線 $\alpha=o,\beta=o$ 調和分離。

此定理在 L_1,L_2 皆爲有窮遠線時已經證明。當此兩線中有一線爲無窮遠線時,可以此定理之內容爲其調和分離之定義。

以下兩定理與2款之定理2及3相類,可以同法證明之。

定理2　若 M_1,M_2 將 L_1,L_2 調和分離,則 L_1,L_2 亦將 M_1,M_2 調和分離。

定理3　若 L_1,L_2 及 M_1 爲三不同共點線,則必有(及只有)一線 M_2 能與 M_1 將 L_1,L_2 調和分離。

此 M_2 謂之 L_1,L_2 及 M_1 之**第四調和線**或謂之關於 L_1,L_2 之 M_1 之**調和共軛線**。此兩雙直線謂之**調和束線**。

例　題

1.　證明兩雙直線

$$\begin{matrix} 2x_1-3x_2+4x_3=o \\ x_1+x_2+x_3=o \end{matrix} \quad \text{及} \quad \begin{matrix} 7x_1-3x_2+11x_3=o \\ x_1-9x_2+5x_3=o \end{matrix}$$

爲調和束線

---

*原註　調和分離及其廣義之交比(第六編),已爲希臘人所知,但方向線段之引入及負量與正量同用,則爲近世之觀念,Moebius氏(1790—1868)在其主要著作 Der barycentrische Calcul(1928) 中首先作成其有效果之狀態。

2. 證明兩雙直線

$$x=o,\quad y=o\quad 及\quad x+2y=o,\ x-2y=o$$

爲調和束線。

3. 求關於 $x_1-2x_2+x_3=o$, $2x_1+x_2+2x_3=o$ 之 $4x_1-3x_2+4x_3=o$ 之調和共軛線。

4. 證明兩互相垂直之線爲「既經過其交點又與其成等傾角之任意兩線」所調和分離。(卽後兩線與前兩線成調和分佈)。

5 調和分離爲射影性質　先言下之二定理

定理1 若四線(用適宜之法將其分爲兩對時)爲調和束線,則另一線截此四線之四截點(將其分爲相應之兩對時)爲調和列點。

定理2 若四點(用適宜之法將其分爲兩對時)爲調和列點,則另一點連此四點之四連線(將其分爲相應之兩對時)爲調和束線。

此兩定理可以同時證明。設 P_1,P_2,Q_1,Q_2 爲共線四點,其坐標爲

(1) $$a,\quad b,\quad a+\lambda b,\quad a+\lambda' b,$$

在此四點所居線外之任一點爲 $r\ (r_1,r_2,r_3)$,及 r 連此四點之線爲 L_1,L_2,M_1,M_2。則 L_1 及 L_2 之方程式爲 $|x\,a\,r|=o$ 及 $|x\,b\,r|=o$,M_1 之方程式爲

$$|x\ \overline{a+\lambda b}\ r|=o,$$

卽 $$|x\,a\,r|+\lambda|x\,b\,r|=o。$$

同理,可得 M_2之方程式。由是,L_1,L_2,M_1,M_2 之方程式爲

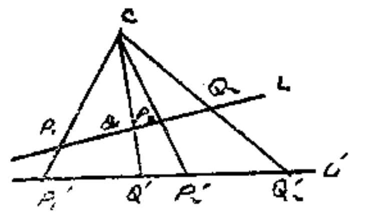
(2) $$\begin{aligned}&|x\,a\,r|=o, && |x\,a\,r|+\lambda|x\,b\,r|=o,\\ &|x\,b\,r|=o, && |x\,a\,r|+\lambda'|x\,b\,r|=o。\end{aligned}$$

P_1, P_2 與 Q_1, Q_2 成調和列點之條件為 $\lambda'=-\lambda$。但此適與「L_1, L_2 與 M_1,M_2成調和束線之條件」相同。故此兩定理已皆證明。

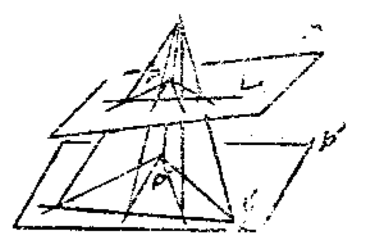
定理3 調和分離為射影性質。

如四圖,線向線上之射影,只須證明若兩雙點 P_1,P_2 與 Q_1,Q_2 成調和列點,則其射影 $P_1'P_2'$ 與 $Q_1'Q_2'$ 亦成調和列點。既 P_1 P_2 與 Q_1,Q_2 成調和列點,則從定理2,兩雙線 CP_1,CP_2, 與 CQ_1 CQ_2 亦成調和束線。再從定理1,此兩雙點 P_1',P_2' 與 $Q_1'Q_2'$ 自成調和列點。

四圖



五圖



面向面上之射影,只須證明調和束線之射影亦為調和束線。如五圖設面 p 中經過點 P 之四線為調和束線,而證明其在面 p'上之射影(即經過點 P'之四線)亦為調和束線如下。既過 P 四線為調和束線,則其被截線 L 所截之四點必成調和列點。因此,L 之射影 L' 截過 P' 四線之四截點亦成調和列點故此過 P' 四線必為調和束線(過 P'四線即五圖中過 P 四線之射影)。

調和分離能為射影性質,就其定義而論頗難預知蓋其定義以距離之比為基礎,而距離之本身實為度量性質也。*

* 原註 讀者或已覺及調和分離之理論,先論有窮遠原素 (element) 再以其結果推廣至無窮遠原素,如以上各款之程序,似於一貫及優秀皆有缺乏。但此種論法別有原因,其理由所在至此已可明白。蓋既欲進論一射影性質,而又覺其進論之基礎建於距離之度量觀念為較善。且距離之定義,只能下於有窮平面之中,而射影性質之定義必須下於廣義平面之全體。此所以調和分離之觀念,先就有窮遠原素立論之後,再推廣其意義,使對於一切原素皆能有效耳。

凡以前所言射影之性質皆有對立之可能。因此，可公認四點所成之調和列點及四線所成之調和束線可作成對立圖形由是，定理1及2為對立定理。

例　題

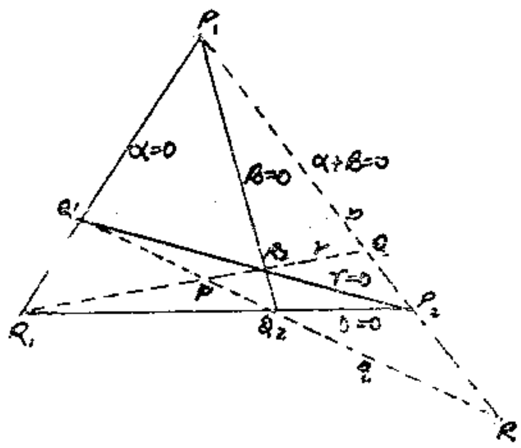
1.　設 L_1, L_2 及 M_1 為經過 O 之不同三線。作一與 M_1 平行之線，此線與 L_1, L_2 交於兩點 P_1, P_2，P_1, P_2 之中點與 O 之連線為 M_2，證明 M_2 為 L_1, L_2 及 M_1 之第四調和線。

2.　設 P_1，P_2 及 Q_1 為線 L 上之不同三點。作經過 P_1, P_2 之兩平行線 L_1, L_2，再作經過 Q_1 之線，此線與 L_1, L_2 之交點為 A_1 及 A_2 在 L_2 上取一點 B_2 使 P_2 適為 A_2B_2 之中點；再作線 A_1B_2，此線與 L 交於 Q_2，證明 Q_2 為關於 P_1, P_2 之 Q_1 之調和共軛點。

6　完全四邊形及完全四角形之調和性質

有許多「關於完全四邊形及完全四角形之調和列點及調和束線」在射影幾何中頗為重要。

完全四邊形　一完全四邊形之兩頂，其連線不為此完全四邊形之一邊者，謂之**對頂**。如六圖，一完全四邊形有三雙對頂，即 P_1, P_2, Q_1, Q_2, R_1, R_2。此三雙對頂所決定之三線 P_1P_2, Q_1Q_2, R_1R_2 即 p, q, r 謂之**對頂線**。此三條對頂線所成之三角形 PQR 謂之**對頂線三角形**。



六　圖

照第三編，5款，題5，此完全四邊形之方程式 $\alpha=0$, $\beta=0$, $\gamma=0$, $\delta=0$ 可擇定其形式，使能合於下之(1)式

(1) $$\alpha+\beta+\gamma+\delta\equiv o。$$

從此恆等式,可得各對頂線之兩方程式如下:

(2)
$$\begin{array}{lll} p & \alpha+\beta=o, \text{ 或 } & \gamma+\delta=o, \\ q & \alpha+\gamma=o, \text{ 或 } & \delta+\beta=o. \\ r & \alpha+\delta=o, \text{ 或 } & \beta+\gamma=o。 \end{array}$$

例如,因 $\alpha+\beta\equiv-(\gamma+\delta)$,則兩方程式 $\alpha+\beta=o$ 及 $\gamma+\delta=o$ 表相同之線,而此線顯為對頂線 p。其餘 q,r 之方程式可照此類推。

今就此完全四邊形之兩邊(交於 P_1 者)及對頂線 p (經過 P_1 者)考之。關於兩邊 $\alpha=o,\beta=o$ 之「對頂線 $\alpha+\beta=o$ 之調和共軛線」為 $\alpha-\beta=o$。此為何線?上圖暗示其為 P_1P 此即 P_1 與「兩對頂線 q,r 之交點」之連線。若此為眞確,須能證明 $\alpha-\beta=o$ 為「q 之兩方程式之一」及「r 之兩方程式之一之一次連合」今因

$$\alpha-\beta\equiv(\alpha+\gamma)-(\beta+\gamma),$$

則此能證明,已屬顯然。由是得下之完全四邊形之調和性質。

定理 1 a 一完全四邊形之兩邊被「其交點上之對頂線」及「其交點與他兩對頂線交點之連線」調和分離。[「其交點」即此兩邊之交點]。

讀者可作線 P_1P。

既 P_1 上兩雙線 [P_1Q_1, P_1Q_2 及 P_1P, P_1R] 成調和束線則對頂線 r 截此兩雙線之截點 R_1,R_2 及 P,Q 必成調和列點。故得下定理*

*此處雖但就六圖 P_1 上兩雙線言,實則其他各頂 P_2, Q_1, Q_2, R_1,R_2 上皆有同類之情形。例如 Q_1, Q_2 及 P,R 亦成調和列點, P_1,P_2 及 Q,R 亦成調和列點,此皆包括於定理 2 a 中。自定理 1 a 至定理 3 b 讀者宜作種種之圖研究之。六七兩圖不過略示其例而已。又此各定理證中所言亦但示其例而已,例如定理 1 b 中所謂兩頂不僅如證中所言邊 p_2 上兩頂(七圖)凡他邊上之兩頂無不合此定理 1 b。

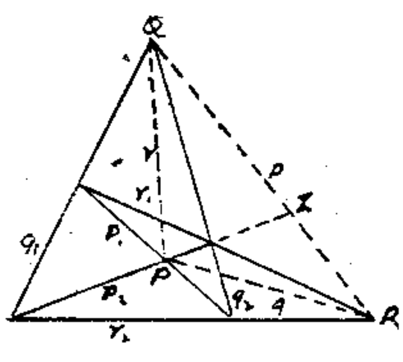
定理 $2a$　完全四邊形之兩對頂被「其對頂線及他兩對頂線之兩交點」調和分離〔「其對頂線」卽過此兩對頂之對頂線〕。

因 R_1, R_2 及 P, Q 爲調和列點,則以此兩雙點與點 R 相連之兩雙線必爲調和束線。此兩雙線中之兩線 RQ 及 RP 爲對頂線 p 及 q, 其他兩線爲 R 及兩頂 R_1, R_2 之連線,而此兩頂在第三對頂線上,〔以上云云,可參觀上之六圖〕。故得下定理

定理 $3a$　完全四邊形之兩對頂線被其交點與「第三對頂線上兩頂」之兩連線調和分離。

完全四角形　以下所舉之定理與以上所舉諸定理對立。

定理 $1b$　完全四角形之兩頂被「其連邊上之對邊點」及其連邊與「他兩對邊點之連線」之交點調和分離〔「其連邊」卽過此兩頂之邊〕。



七　圖

證明此定理,不必用對立之法,再照定理 1 之證明重寫一遍只須證明(以此爲例)邊 p_2(七圖)上之兩頂被對邊點 P 及「p_2 與 p 之交點 X」調和分離。此從「在四線 q_1, q_2, r_1, r_2 所成之完全四邊形中,兩邊 q_1, q_2 被 p, r 調和分離」之事實,立可推知。

定理 $2b$　此爲定理 $2a$ 之對立。其說明與證明讀者自可爲之。

定理 $3b$　完全四角形之兩對邊點被「其連線與第三對邊點上兩邊之兩交點」調和分離〔「其連線」卽

此兩對邊點之連線)。

例　題

1. 說明定理$2b$,並證明之。

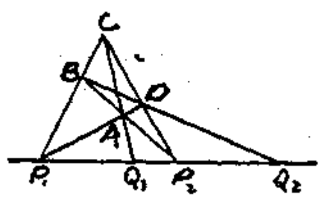
2. 證明定理$3b$。

3. 以解析法證明定理$1b$,以定理$1a$之證明之對立證之。

4. 設A,B,C為完全四邊形之共線三頂,並設M為(關於A,B)C之調和共軛點。證明M及「C之對頂」之連線經過兩對頂線之交點(此兩對頂線為依次經過A,B兩點者)。說明其對立定理。

7　有三定原素,求作其第四調和原素　調和分離之射影審定法　三共線點P_1,P_2及Q_1為已知,其第四調和點Q_2(Q_2為能與Q_1將P_1,P_2調和分離之點)之作法可以如下。

如八圖,在經過Q_1之線上,擇取兩點A,C,由A及C至P_1及P_2作四連線此四連線之兩新交點以B及D表之。則線BD與「三已知點所在線」之交點即所求之Q_2。其理如下P_1 P



八圖

為完全四角形$ABCD$之兩對邊點,Q_1,Q為「P_1,P_2所定之線」與「第三對邊點上此完全四角形之兩邊」之兩交點。故從6款,定理3b,Q_1,Q_2必將P_1,P調和分離。

從此法可知若P_1P_2及Q_1,Q為調和列點,則必有一完全四角形$ABCD$,其六邊中兩邊過P_1,兩邊過P_2,又兩邊一過Q_1一過Q。從前款定理$3b$可知其逆為眞,即如有兩雙點,其對於一完全四角形有此種關係時必為調和列點是也。[此兩雙點須為共線]。故得下定理

定理$1a$　一線上之兩雙點,在(及惟在)「有一完全四角形,其兩雙邊各過其一雙點中之各點,其又一

雙邊中之各邊各過其又一雙點中之各點」時，爲（及方爲）調和列點。

從此定理，可得一决定四點是否爲調和列點之方法，此决定法純爲射影性質，倘調和分離之進論，覺不由距離之度量性質開始爲適宜，則儘可以此定理之內容爲調和分離之定義。

例　　題

1.　有共點三線，求作其第四調和線。

2.　說明定理1a之對立，並證明之。

.3　兩雙點，在（及惟在）有「一完全四邊形，其一雙對頂適爲此兩雙點中之一雙點，其此兩對頂之對頂線與他兩對頂線之交點適爲此兩雙點中之他一雙點」時，爲（及方爲）調和列點，試證之。說明此定理之對立。

8　一度量定理之射影的推廣　讀者當已知三角形之三中線爲共點之定理。今可將其推廣，得一範圍更廣之定理而即以「三中線共點之定理」爲其特例。

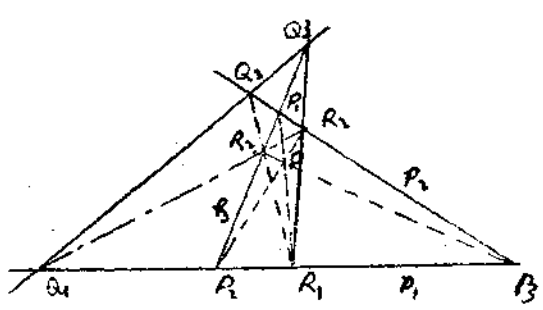
三角形一邊L之中點可作爲關於L上兩頂之「L上無窮遠點之調和共軛點」。因此，三中線爲共點之定理可以如下從三角形各邊上之無窮遠點起，在各邊上各作其關於兩頂之調和共軛點（即各邊之中點），則此~~三調和共~~軛點（即三邊之中點）與相對三頂之連線（即三中線）爲共點。

此三角形三邊上之三無窮遠點（每邊上一點）爲共線。若此三無窮遠點改爲不相同之任意三共線點（每點在此三角形之每邊上），則此定理仍爲眞確。

定理1　若在三角形各邊上各取一點所得之不

相同三點爲共線,則此三點之三調和共軛點(關於此三角形各邊上兩頂者)與其相對三頂之三連線爲共點。

設 $P_1P_2P_3$ 爲三角形; Q_1,Q_2,Q_3 爲其各邊上之點,而此三點爲共線, R_1,R_2,R_3 爲其關於各邊上兩頂之三調和共軛點如九圖〔R_1 爲關於兩頂 P_2,P_3 之 Q_1 之調和共軛點,R_2 爲關於 P_1,P_3 之 Q_2 之調和共軛點,R_3 爲關於 P_1,P_2 之 Q_3 之調和共軛點〕。



九 圖

此圖精密作之,可得其暗示;即三角形 $R_1R_2R_3$ 之各邊似與原三角形 $P_1P_2P_3$ 之相應各邊交於 Q_1,Q_2,Q_3,若確能如此,則此兩三角形間有 Desargues 氏三角形定理之關係,而其相應頂之連線 P_1R_1, P_2R_2, P_3R_3 爲共點,此定理已經證明。〔圖中暗示之結果,是否眞確,尙須證明。故下文再證之〕。

從圖可證其確能如此,例如欲證 Q_1,R_3,R_2 爲共線,只須以 Q_1 爲射心將線 p_3 射於線 p_2 上。p_3 上之三點 P_1, P_2 及 Q_3 射在 p_2 上爲三點 P_1,P_3 及 Q_2。因 R_3 爲 P_1,P_2 及 Q_3 之第四調和點,其射影應爲 P_1,P_3 及 Q_2 之第四調和點即 R_2。因此 Q_1,R_3 與 R_2 必爲共線。

此宜注意者,中線共點定理雖爲度量定理,但其推廣定理(即上之定理1)實爲一射影定理。

定理1之逆 若「在三角形各邊上各取一點所得之不相同三點」與其相對三頂之三連線爲共點,則「關於此三角形每兩頂之此三點之三個調和共軛

點」爲共線。

從此定理之假設,既 P_1R_1, P_2R_2, P_3R_3 有一公共點 P, 則若能證明 Q_1,Q_2,Q_3 爲兩三角形 $P_1P_2P_3$ 及 $R_1R_2R_3$ 之三雙相應邊之三交點,自知此 Q_1,Q_2,Q_3 必爲共線(九圖)。此易證明如下。例如欲證明 R_2R_3 及 P_2P_3 交於 Q_1, 只須就完全四角形 $P_1R_2PR_3$ 考察之。此完全角形之一雙邊經過 P_2, 又一雙邊經過 P_3, 第五邊經過 R_1。從 7 款,可知其第六邊 R_2R_3 必經過「關於 P_2, P_3 之 R_1 之調和共軛點 Q_1」。故 R_2R_3 與 P_2P_3 交於 Q_1。

例　題

1. **定理 1 之對立**　若過三角形之各頂各作一線所得之不相同三線爲共點,則此三線之三調和共軛線(關於此三角形之每頂之兩邊者)與其對邊之三交點爲共線。試證明之。「凡過三角形 ABC 之頂 A 之線 AD 與 A 之對邊 BC 相交時,簡稱 AD 與其對邊相交」。

2. 在上題中以三角形三內角之平分線爲經過各頂之不同三線時,應有何種度量定理?

3. 定理 1 之對立在性質上與定理 1 之逆同,試證之。

4. 試作定理 1 之解析證明。以 a (a_1,a_2,a_3), b, c 爲 P_1,P_2,P_3 之坐標,則 Q_1,Q_2,Q_3 之坐標爲 $Bb-Cc$, $Cc-Aa$, $Aa-Bb$, 此 A,B,C 爲常數(第三編, 7 款,題 4)。故 R_1,R_2,R_3 之坐標爲 $Bb+Cc$, $Cc+Aa$, $Aa+Bb$。(何故?)

再從視察上求出一點 P, 使其坐標既可爲 a 及 $Bb+Cc$ 之一次連合,又可爲 b 及 $Cc+Aa$ 之一次連合,又可爲 c 及 $Aa+Bb$ 之一次連合,或寫出三線 P_1R_1, P_2R_2, P_3R_3 之方程式而證明其爲一次相倚。

5. 試作「定理 1 之對立」之解析證明。

6. 設一三角形之三頂為 a, b, c，在此三角形各邊上各取一點所得不相同三點為 R_1, R_2, R_3。試證此三點 R_1, R_2, R_3 與其對頂相連之三線，在(及惟在)此三點之坐標可寫成 $Bb+Cc$, $Cc+Aa$, $Aa+Bb$ 時，為(及方為)共點。(參觀題4)。〔R_1 之對頂即 R_1 所在邊之對頂，R_2 之對頂即 R_2 所在邊之對頂，餘類推。〕

7. 說明前定理之對立。

8. 若過三角形之各頂各作一線所得之不相同三線為共點，則此三線中兩線之調和共軛線(關於此三角形之邊者)與此三線中之又一線交於一點。試證明之。從此定理可得何種度量定理為其特例？〔設三角形為 $P_1P_2P_3$，過其頂 P_1 之線為 P_1R_1，則關於此三角形之邊之 P_1R_1 之調和共軛線即關於 P_1P_2, P_1P_3 之 P_1R_1 之調和共軛線，餘類推。〕

9. 若過三角形之各頂各作一線所得之三線為共點，則「此三線之三調和共軛線(關於此三角形之邊者)所成之第二三角形」與「原有之三角形」間有 Desargues 氏三角形定理之關係。

10. 設完全四邊形之對頂線三角形為已知，求作此完全四邊形。

若 Q_1, Q_2, Q_3 為不相同之三共線點，且此中各點在三角形之各邊上，R_1, R_2, R_3 為其調和共軛點(關於此三角形各邊上之兩頂者)，則 Q_1R_1, Q_2R_2 及 Q_3R_3 為一完全四邊形之三雙「對頂」，而此完全四邊形之對頂線三角形即原有之三角形。試證之。

11. 完全四角形之對邊點三角形為已知時，作此完全四角形之法如何？試說明之，並證明其作法。

12. 若在「完全四邊形之對頂線三角形」之各邊上各取一點所得之不相同三點為共線，則此三點之三調和共軛點(關於此完

全四邊形之頂者)亦為共線,試證之。

解析證明法之指示。先設定對頂線三角形之各頂之坐標,再以此等坐標表此完全四邊形諸頂之坐標。參觀題10。

13. 從題12求出一關於「完全四邊形各對頂線之中點」之定理。[此各對頂線指其兩對頂間之一段,故有中點之可言。]

第　五　編

線　坐　標

1　點幾何及線幾何　在以上所研究之幾何中,常以點爲基本原素。故先定點之坐標,以曲線作爲點之軌跡而研究之。

但如以上各編所言,至少在對立原則之有效範圍內,線之重要正與點同,故必能有以線爲基本原素之幾何與以點爲基本原素之幾何互相對立,同有意義。以線爲基本原素之幾何以後謂之**線素幾何**,略稱**線幾何**(line geometry);以點爲基本原素之幾何卽尋常幾何,當其與線幾何相對並提時可謂之**點素幾何**,略稱**點幾何**(point geomtry)。

在線幾何中,必須以線定點,在點幾何中旣線爲點列,在線幾何中可以點爲線束。就線幾何之目的而論,無論何種曲線應以切線定之而不以點定之,其詳見後。〔以線定點,即「以線爲原素而下點之定義」之意,定(defined)字之此種用法與一定之定不同。讀者應注意此節中之三定字皆作此解。〕

線幾何之第一問題爲規定平面中線之坐標。

2　齊次線坐標(Homogeneous Line Coordinates)。　茲再述一已知定理凡x_1,x_2,x_3之一次齊次方程式

(1)　　$$a_1x_1+a_2x_2+a_3x_3=0 \quad (a_1,a_2,a_3 \text{不全爲} 0)$$

皆代表一線,其逆亦眞,

兩方程式

(2) $$2x_1-3x_2+4x_3=0,\qquad 2rx_1-3rx_2+4rx_3=0,\qquad r\neq 0$$

表相同之一線,此線之坐標須能使此線與他線有別[即線不相同,其坐標亦必須有別]。其方程式中一組係數適能爲此之用[即可以此組係數爲此線之坐標,因線不同則其方程式之係數亦不同也]。可爲線之坐標者,尙有比此組係數能更簡者否?

定義 以一線之方程式中之係數爲此線之齊次坐標。

例如$(2,-3,4)$,$(4,-6,8)$及$(2r,-3r,4r)$爲線(2)之一組齊次坐標。(a_1,a_2,a)及(ra_1, ra_2, ra_3)皆爲任意線(1)之齊次坐標。

因此,凡一線必有無窮多之齊次坐標,而其中每兩坐標必成比例,乃顯而易見之事。其逆,凡任意三數之有一定次序而不全爲0者皆爲惟一直線之齊次坐標〔惟一即「獨一無二」之意;例如$(1,2,3)$三數,必有一線能以之爲坐標,亦只有一線能以之爲坐標〕。例如$(2,0,3)$爲線$2x_1+3x_3=0$之坐標。

任意一線可以(u_1,u_2,u_3)代表之,而謂之線u。

定理 1 設一點爲x (x_1,x_2,x_3),則在(及惟在)x_1,x_2,x_3能適於

(3) $$u_1x_1+u_2x_2+u_3x_3=0$$

時,此點x在(及方在)線u (u_1,u_2,u_3)之上,〔即點x在線u上之必充條件爲(3)〕。

因線u之方程式爲

$$u_1X_1+u_2X_2+u_3X_3=0,$$

此(X_1,X_2,X_3)爲流動坐標(running coordinates);又因點x是否在此線上可從(3)是否成立而定;故此定理爲眞。

定義 設有一定點及一u_1,u_2,u_3元之方程式,若此方程式能(及只能)爲此定點上一切線之坐標所適合,則此方程式謂之此定點之線坐標方程式。〔「線坐標方程式」即「以線坐標爲元之方程式」。「u_1,u_2,u_3元方程式」即「以u_1,u_2,u_3爲元之方程式」,例如$2u_1+3u_2+4u_3=0$。(u_1,u_2,u_3)爲線坐標,則「u_1,u_2,u_3元之方程式」即「線坐標方程式」。此定義謂「一點之線坐標方程式」爲「線坐標方程式」之能(及只能)爲「經過此點之一切線之坐標」所適合者〕。

就幾何方面言之,此定義謂在線幾何中,一點可作爲一線束。

從定理1,在(及惟在)

$$2u_1+u_2+3u_3=0$$

時,線u能(及方能)經過點(2,1,3),故此方程式爲點(2,1,3)之線坐標方程式。

定理 2 一點a $(a_1 a_2 a_3)$之線坐標方程式爲

$$a_1u_1+a_2u_2+a_3u_3=0。$$

其逆,凡$u_1 u_2,u_3$元之一次齊次方程式(其係數不全爲0者)皆代表一點。

此定理之證明讀者可自爲之。

點及線間之解析對立 點幾何及線幾何之根本情形,今已可得而言矣。在點幾何中,點有坐標而線有方程式〔且線之方程式以點之坐標爲元〕,在線幾何中,則線有坐標而點有方程式,且點之方程式亦以線之坐標爲元。

此兩幾何之關係爲一重要條件(3)〔即點x在線u上之必充條件〕所連絡。因(3)就諸x及諸u爲對稱,此兩幾何間之關係爲交

互 (reciprocal)。不但線之坐標爲其點坐標方程式之係數,而點之坐標亦爲其線坐標方程式之係數。例如

	坐標	方程式
點	$a\ (a_1,a_2,a_3)$	$a_1u_1+a_2u_2+a_3u_3=0,$
線	$a\ (a_1,a_2,a_3)$	$a_1x_1+a_2x_2+a_3x_3=0$。

此點線間之交互關係爲「點線間幾何上交互關係」之解析複產物。換句話說,吾人早經熟知之幾何的對立,今已植其相應之解析的對立之基礎矣*。

例　題

1.　何爲 y 軸之坐標?何爲無窮遠線之坐標?經過原點及斜率爲 2 之直線,其坐標爲何?

2.　設三線之坐標依次爲

$$(a)\ \ (1,1,-1),\quad (b)\ \ (1\ -1\ 0),\quad (c)\ \ (\ ,1,\ ),$$

求代表此各線之一切坐標。

3.　以下各方程式所表者爲何物,

$$2u_1-3u_2+u_3=0,\quad u_2-u_3=0\quad u_2=0。$$

4.　何爲原點之線坐標方程式?在斜率爲 $\frac{1}{2}$ 之方向之無窮遠點,其線坐標方程如何?

3　一種記號　廣義平面中之解析幾何,以點及線之齊次坐標將其進論時,其所論者爲有次序之三數組 $(a_1,a_2,a_3),(x_1,x_2,x_3)$, (u_1,u_2,u_3)。此種三數組之連合,已證明其重要者,爲

---

*原註　以線爲基本原素,實始於Pluecker氏,一種觀念能歸功於一人且能爲之保證有如氏之於此者實非常見之事。1829年氏介紹線坐標(正與此處所定者相同),並進論點線間之解析對立。

$$a_1x_1+a_2x_2+a_3x_3,\quad u_1x_1+u_2x_2+u_3x_3。$$

在進論之前,此類算式宜採用適宜之記號以便討論如下

若a (a_1,a_2,a_3), b (b_1,b_2,b_3) 爲兩任意有序之三數組,則算式

$$a_1b_1+a_2b_2+a_3b_3$$

以記號$(a|b)$表之,卽

$$(a|b)\equiv a_1b_1+a_2b_2+a_3b_3。$$

如是則直線a:(a_1,a_2,a_3)之方程式爲$(a|x)=o$,而點x在線u上之條件爲$(u|x)=o$。

例題 作成記號$(a|b)$之運算律(laws of operation)如下

$$(a|b)=(b|a),\quad (\overline{a+b}|c)=(a|c)+(b|c),$$

$$(ka|b)=k(b|a),\quad (\overline{ka+lb}|c)=k(a|c)+l(b|c)。$$

此k,l皆爲一尋常之數。

4 點線間之解析對立

點線間之解析對立,以下列各行明之,較爲明顯。

點		線	
坐標	方程式	坐標	方程式
(a_1,a_2,a_3)	$(a\|u)=o$	(a_1,a_2,a_3)	$(a\|x)=o$
(b_1,b_2,b_3)	$(b\|u)=o$	(b_1,b_2,b_3)	$(b\|x)=o$
(c_1,c_2,c_3)	$(c\|u)=o$	(c_1,c_2,c_3)	$(c\|x)=o$

吾人已經注意及當判定若干線之是否爲一次相倚時,就其方程式判定可,就其方程式之係數判定亦可,二者相同,無所分別;以前所謂線之方程式之係數今已爲線之坐標。判定若干點之是否一次相倚,其情形亦復如是,卽就其坐標判定或就其方程式判定,二者亦同。

定理 1 a　兩點,在(及惟在)其坐標或方程式爲一次相倚時,爲(及方爲)相同。

定理 1 b　兩線,在(及惟在)其坐標或方程式爲一次相倚時,爲(及方爲)相同。

定理 2 a　三點,在(及惟在)其坐標或方程式爲一次相倚時,爲(及方爲)共線。

定理 2 b　三線,在(及惟在)其坐標或方程式爲一次相倚時,爲共點。

再就不同兩線之交點及不同兩點之連線考之得

定理 3 a　兩點 a,b 之連線之方程式爲

$$|xab|=o,$$

此線之坐標爲

$$|a_2a_3|,\quad |a_3b_1|,\quad |a_1b_2|。$$

定理 3 b　兩線 a,b 之交點之方程式爲

$$|uab|=o,$$

此點之坐標爲

$$|a_2b_3|,\quad |a_3b_1|,\quad |a_1b_2|。$$

定理 $3a$ 之前部,前已言之。至其第二部卽可由是推知,蓋一線之方程式係數卽此線之坐標,而 $|xab|=o$ 中 x_1,x_2,x_3 之係數適爲此三行列式 $|a_2b_3|$, $|a_3b_1|$, $|a_1b_2|$ 也。

此値得再與第二證明。照一點之方程式之定義,可知兩點 $a\ b$ 之方程式

$$a_1u_1+a_2u_2+a_3u_3=o,\quad b_1u_1+b_2u_2+b_3u_3=o$$

之 $0,0,0$ 外之聯立解爲此兩點連線之坐標。故 $|a_2b_3|$, $|a_3b_1|$, $|a_1b_2|$ 爲此線之坐標。

定理 4 a「不同兩點

定理 4 b「不同兩線

a,b 所定之點列」中之任意一點為 $ka+lb$，或「兩點 $(a\mid u)=o$，$(b\mid u)=o$ 所定之點列」中任意一點之方程式為 $$k(a\mid u)+l(b\mid u)=o。$$	a,b 所定之線束」中之任意一線為 $ka+lb$，或「兩線 $(a\mid x)=o$，$(b\mid x)=o$ 所定之線束」中任意一線之方程式為 $$k(a\mid x)+l(b\mid x)=o。$$

定理 $4a$ 之第一部及定理 $4b$ 之第二部前已言及，其餘兩部可直接由是推知。例如點 $ka+lb$ 之方程式為 $(\overline{ka+lb}\mid u)=o$，而此可化為 $k(a\mid u)+l(b\mid u)=o$。

在未知線坐標之前，吾人所用者，於點只有坐標，於線只有方程式。今則於點線二者皆有坐標及方程式可備吾人之用矣。至用坐標或方程式，大抵儘可隨意。倘欲專用坐標，亦未嘗不可，此種情形，可以下例明之。

例　設有一點 $(1,2,-1)$ 及兩線 $(2,1,3)$，$(1,-1,0)$，求此點及此兩線交點之連線之坐標。

所設兩線之交點上之任意線之坐標為 $(2k+l,k-l,3k)$（此從定理 $4b$ 可知）。此線經過點 $(1,2,-1)$，則

$$2k+l+2(k-l)-3k=o,$$

即 $k-l=o$。因此，若 $k=l=1$，則此線經過 $(1,2,-1)$。故所求之線為 $(3,0,3)$ 即 $(1,0,1)$。[所設兩線即本例所設之線 $(2,1,3)$，$(1,-1,0)$]。

例題

1.　求兩點

$$3u_1+4u_2-11u_3=0,\quad 5u_1-3u_2+u_3=0。$$

之連線之坐標。

科學學院科學通訊投稿簡章

一、投稿不拘文言白話凡中英德法文均所歡迎
二、談言教材叢錄書評消息均以科學爲範圍
三、投寄之稿如係翻譯請附寄原本否則須將原文題目著者姓名出版日期及地點詳細開示
四、投寄之稿務望繕寫清楚並加新式標點凡外國文稿件並請打印之如有插圖附表必須製版者請用墨色
五、來稿請註明姓名住址以便通訊并加蓋印章俾於發給稿費時核對之
六、投寄之稿無論登載與否概不退還但預有聲明並備足回寄郵資者不在此限
七、投寄之稿經本刊揭載後每篇酌致酬金若本刊尚未揭載已先在他處發表者恕不致酬
八、投寄之稿經本刊揭載後版權即爲本校出版委員會所有但有另行約定者不在此限
九、投寄之稿本院委員會有酌量增删之權如投稿人不願有何增删則應於投稿時聲明
十、投寄之稿應逕寄上海徐家滙交通大學科學學院科學通訊編輯委員會

中華民國二十五年三月出版
科學通訊 第八期
編輯者 交通大學科學學院
發行者 交通大學出版處 上海徐家滙
印刷者 上海中國科學公司
代售處 上海 世界出版社 作者書社 蘇新書社 上海雜誌公司 黎明書局
南京 正中書局
天津 志恆書店 大公報社代辦部
漢口 光華書局
安慶 世界書局
武昌 學生書店 新光書店
廣州 廣州圖書消費合作社
雲南 雲南文化書店

本刊價目
每册大洋二角 全年八册（三、四、五、六月各一册 十、十一、十二、一月各一册）
預訂壹元四角 國外另加郵費