虞明禮編著

復興高級中學教科書

代數學

上册

商務印書館發行

編輯大意

本書依據教育部最近頒布課程標準編輯,供高級中學代數科教本之用.

本書分四大段.第一章爲一段,略論全部代數的基本.第二章至第十一章爲一段,詳論各種代數式的重要運算.第十二章至第二十二章爲一段,詳論方程式及不等式的解法和理論.第二十三章以後爲一段,略論方程式以外的實際問題,如序列,組合,或然率,級數等問題.各章各節之間力謀前後銜接,一矯往昔教科書各章獨立之弊.

本書注重學生自動研習.例如,複習初中代數部份時,往往只列標題,使學生將固有智識自行回味,並加整理.又如,習題及備註中,往往有補充正課之不足者,亦只略予提示,使學者自行探討,以培養自學的習慣.

本書除於理論方面嚴密注意外,關於應用技

能亦極注意.例如,初中教材之切實複習,各章習題之豐富充實,開方,根式,對數之反覆說明,在在均以訓練演算純熟為目標.

本書論述一次方程式較遲.因一次方程式在初中代數中雖宜儘量提早,以示代數之功用;但在高中代數則不然.高中代數,關於方程式方面,應注重同根原理及根之變化等等.理論較嚴,講授不宜過早也.

本書對於各種方程式集中論述,以應學習心理的需求.蓋當一次方程式學完之後,學者切望易瞭一次以上之方程式.本書由一次而二次,三次,四次以至 n 次,連續討論,而不間以他種教材.原原本本,一貫相承,比之分期敘述,零零碎碎,實有事半功倍之效.

本書將行列式緊接聯立一次方程式之後.因學生在求解多元聯立一次方程式,正苦手續繁難時,忽然利用行列式,予以極簡便的解法,使前此消元困難完全免除.此在學習,心理上實有無上的愉快.學者於此,自然折服算學家心思之巧,

油然起向上之心.

本書將序列,組合等等移置方程式通論之後.因求解序列,組合等問題,較之求解方程式通論中問題,有難無易故也.

本書不濫用函數名稱.蓋函數雖為高等算學中重要觀念之一;但其意義,乃在研究函數與其所含變數二者相應變化之關係,和代數式之各種基本運算,實為兩事.故本書非至確有需要時,決不濫用函數名稱,以免頭緒繁多,學者咸受辨別不清之苦.

本書圖解扼要.圖解本屬解析幾何範圍以內,其在代數之應用,不過說明方程式之性質及解法.故本書關於圖解亦只以此部為限.

本書極富彈性.如學生程度較有根底,則於附有星標*諸節,可擇要複習或全部略去;如學生程度較低,則較難習題可以不做,艱深理論可取簡易者代之.(例如,論高級行列式可取四級為代表;論 n 元一次方程組,可取特例 $n=4$ 言之,不必詳論其通例.)斟酌損益,是在教師之活用耳.

本書原稿在江蘇省立松江女中高二甲乙組,由編者及沈式寰先生試用一年,成績均甚圓滿.修正時承沈先生根據試教經驗,對於教材之取合編排,多方予以良好指正;又承胡春池先生審閱第一章,鈕庭來君校閱全部,使此書減少許多錯誤.編者曷勝感激!謹書於此,以誌不忘!

編者學識淺陋,錯誤自知不免.海內專家倘肯進而教之,俾此書漸臻完善,則幸甚矣.

民國二十三年七月編者.

目　　錄

代 數 學

上 册

第 一 章

總 論

§1. **代數之目的.** 初等算學大別爲二類.一類論形,一類論數.論形者爲幾何;論數者則爲算術及代數.算術之目的,在於研究數量的運算;代數之目的乃繼續算術,對於數量之運算作進一步的探求.代數的方法比算術巧,代數的範圍比算術廣.英人牛頓曰"代數者,廣義之算術也."其言洵有至理.

§2. **代數之方法.** 代數中如何能將算術的範圍推廣?端賴下列兩種方法.

第一法 用文字表數,使(*a*)運算的形式簡明,(*b*)答數的範圍加廣,(*c*)解題的工具銳利.今依次舉例明之.

〔例一〕 設有問題:"大小二數之和為140,自小數3倍減去大數2倍,所得之差為30.求此二數."

算術解法. 因小數+大數是140,

所以2倍小數+2倍大數是280.

又因3倍小數-2倍大數是30.

所以2倍小數+2倍大數+3倍小數-2倍大數是280+30.

所以5倍小數是310.

所以小數是$310\div5=62$.大數是$140-62=78$.

代數解法: 設$x=$小數,$y=$大數,則

$$\begin{cases} x+y=140 \cdots\cdots\cdots\cdots(1) \\ 3x-2y=30 \cdots\cdots\cdots\cdots(2) \end{cases}$$

2(1)得 $$2x+2y=280 \cdots\cdots\cdots\cdots(1')$$

(1')+(2)得 $$5x=310$$

$$\therefore\ x=62=\text{小數}$$

代入(1)得 $$y=140-62=78=\text{大數}.$$

學者試觀代數解法比之算術解法何等簡明!

〔例二〕 仍就前例來說.在算術,依四則解法能解例一之問題,得其答數為

$$(A)\quad\begin{cases}\text{小數}=62\\ \text{大數}=78\end{cases}$$

在代數,應用文字代表已知數,則可解範圍更廣之問題:"大小兩數之和爲a;自小數m倍減去大數n倍,所得之差爲b.求此二數."依代數解法,得其答數爲

$$(B)\quad\begin{cases}\text{小數}=\dfrac{na+b}{m+n}\\ \text{大數}=\dfrac{ma-b}{m+n}\end{cases}$$

學者注意(B)式所表答數比(A)式範圍加廣矣!蓋在此類問題中,任設m, n, a, b爲何值,所求大小二數皆可由(B)式求得之.故(B)式代表一類問題之答數;至於(A)式,則僅表單獨一個問題之答數.二者適用的範圍自有廣狹之不同也.

〔例三〕 設有問題:"某數7倍與其平方之和爲198,求該數."此問題,在算術無法解決;在代數則由方程式$x^2+7x=198$可立得其答數爲11或-18.代數之解法,不亦神妙乎哉!

第二法 創造新數以濟運算之窮.算術上的

運算往往有相當限制;逾此限制,算法便不通行,例如,在算術減法中,減數如大於被減數,則此減法便不通;代數上創造負數,減法乃無不可行.又如在算術開方中,被開方數如不爲完全整方,則此不盡根數之眞值便無法求得,其性質因亦不能明瞭;代數上引用無理數,此類根式的性質及算法乃能全部了然.不特如此,即在代數開方中,倘所論之數只限於正負數,則當被開方數爲負數時,此開方算法亦不能通行.故又創立虛數以濟其窮.自有虛數,開方算法乃毫無限制矣.

§3. 代數之數系. 如上(第二法)所述,代數上爲濟算法之窮計,常創立新數以求其通,故代數上所論之數比算術上所論者範圍加廣;而且除1外,各類新數皆由適應算法的需要而來,玆列表明之於下:—

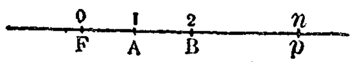
算法	新數			
加法	正整數			
減法[被減數小於減數時]	負數	有理數		
除法[不能整除時]	分數		實數	
開方[開方不盡時]		無理數		代數數 {正數 負數}
開方[被開方數爲負數時]			虛數	

正數
負數

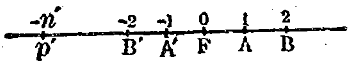
集合上表所列各數乃完成代數的數系.

§4. **代數數之圖形表示.** 代數系中任何一數,皆可用平面上之一點表之.略陳其說如下:—

(1) 正實數. 在一直線上取定點 F 表零,定長 FA 爲單位1,則無論 n 爲有理數抑爲無理數,由幾何作圖法恆可得 $FP=nFA=n$. 故任何數 n 可以適當之 P 點表之.



(2) 負實數. 在上述直線上 F 之左側取 P' 使 $FP'=-nFA=-n$, 則此 P' 點便可代表 $-n$



(3) 虛數. 詳見第十八章.

§5. **代數之基礎.** 代數上一切運算之基礎全在幾條假設,此類假設是否眞確,理論上無法證明.不過按之實際,無往不符,所以算學家乃將此類假設認爲公理或公律.代數上所有公律可分爲兩類:

第一類. 關於數之運算者名曰運算公律.列舉於下:—

(commutative law)

(1) 在加法有對易律: $a+b=b+a$

結合律: $(a+b)+c=a+(b+c)$

$=(a+c)+b.$

(2) 在乘法有對易律: $ab=ba$

(associative law)

結合律: $(ab)c=a(bc)=(ac)b.$

配分律 $a(b+c)=ab+ac.$

(Distributive law)

上述三律(對易,結合,配分)乃代數上虛實各數運算之基本公律.此類公律的來源,最初是由正整數算法的啓示.其後乃假定此三律爲天經地義,凡由舊算所生之一切新數,其算法須經適當的規定(新數旣然是新的,其算法照理可以隨便規定;但爲符合上述三律起見,此規定便不能隨便),務使此三律仍能完全符合.

例如,在初中代數,吾人已知下列幾種算法:

I. $a+(-b)=a-b$ II. $a-(-b)=a+b.$

III. $a(-b)=-ab$ IV. $(-a)(-b)=ab.$

何以知上列算法果爲正確乎?無他,以其能合前述三律之故也.試就算法III, IV考之.

(a) 先驗乘法對易律能否符合?

依IV, $(-a)(-b)=ab,$ $(-b)(-a)=ba.$

但a,b俱為正數,其乘算服從對易律:$ab=ba$.

$$\therefore\quad (-a)(-b)=(-b)(-a).$$

(*b*) 次驗乘法結合律能否符合?

依IV, $(-a)(-b)=ab$

所以$[(-a)(-b)](-c)=ab(-c)=-abc$ 〔依III.〕

又依IV, $(-b)(-c)=bc$

所以$(-a)[(-b)(-c)]=(-a)bc=-abc$ 〔依III.〕

同樣$[(-a)(-c)](-b)=-abc$

$$\therefore\ [(-a)(-b)](-c)=(-a)[(-b)(-c)]=[(-a)(-c)](-b)$$

(*c*) 再驗乘法配分律能否符合?

因 $(-a)[(-b)+(-c)]=(-a)[-(b+c)]=a(b+c)$

$$=ab+ac$$

又 $(-a)(-b)+(-a)(-c)=ab+ac$

$$\therefore\quad (-a)[(-b)+(-c)]=(-a)(-b)+(-a)(-c).$$

同樣,依上述I, II, III, IV幾條算法,加法中對易結合兩律亦均能適合.學者試自驗之.

第二類. 關於等式之推演者名曰等式推演公律.推演公律共有四條:

若 $a=b,\ c=d,$ 則 $a+c=b+d.$

$$\text{若 } a=b,\ c=d,\qquad \text{則 } a-c=b-d.$$

$$\text{若 } a=b,\ c=d,\qquad \text{則 } ac=bd.$$

$$\text{若 } a=b,\ c=d\neq 0,\ \text{則 } a\div c=b\div d.$$

其中a, b, c, d任爲何數.

以上四律,又名等量公理.等量公理,在代數上致用極廣.無論解方程式或證恆等式,凡由一個等式推出另一等式,莫不以此諸律爲根據,讀者愼勿以其平凡淺易而忽之也.

習題一

1. 依初中代數方法解下列諸方程(其中a, b俱爲正整數),並察其根各爲數系中的何種數.

$$ax-b=0 \qquad \left(\frac{b}{a}\neq\text{整數.}\right)$$

$$ax+b=0$$

$$x^2-b=0 \qquad \pm\sqrt{b}$$

$$x^2+b=0 \qquad \pm\sqrt{-b}$$

$$x^2+x+1=0 \qquad \frac{-1\pm\sqrt{1^2-4}}{2}$$

然則各種新數的產生,是否又可視爲解方程式的結果?　是

2. 幾何的基礎,是否也在幾條不可證明的假設?這些假設便是公理和公法.試本所知儘量說出代數幾何的異同.

3. 完成§5(第一類)最後一句.

第二章

整式四則

§6* 定義. 下列諸名詞,學者在初中代數中皆已學過,能各舉數例詳釋其意義否?

(1) 代數式.

(2) 代數式之值.

(3) 項.

(4) 因數.

(5) 係數.

(6) 同類項,不同類項.

(7) 整式,分式.

(8) 有理式,無理式.

(9) 有理整式.

(10) 單項式,二項式,多項式.

(11) 指數,冪.

(12) 項之次數.(項之含有一個文字者,含有多個文字者,各如何決定?)

(13) 式之次數.

(14) 昇羃,降羃,順列.

(15) 齊次式(等次式).

習題二

1. 指數與係數有何區別?試舉例以明之.

2. 因數與係數之區別何在?舉例說明之.

3. 項與式之區別何在?舉例說明之.

4. 下列諸式中各有幾項?

(a) $a+b-c\times d\div e$.

(b) $a\div b\times c\div d\times e\div f\div g\times h$.

(c) $1+2-3+4+5x-6y$.

(d) x^3-x^2+x+1.

5. 設 $a=1,\ b=2,\ c=3,\ d=4,\ e=5,\ f=6,\ g=7,\ h=8,\ y=9,\ x=10$, 求上題各式之值.

6. 第4題中,何者爲單項式?二項式?三項式?多項式?

7. 整式與多項式有何區別?舉例明之.

8. 下列諸式中,何者爲 x 之整式?何者爲 y 之整式?何者爲 x,y 之整式?何者非 x 之整式?何者非 y 之整式?

(a) x^2+y^2+3xy.　　(b) $x^2+x\div y$

(c) $y^3+y^2+y\div x$.　　(d) $\frac{x}{2}+\frac{y}{3}+\frac{xy}{9}$.　整式

(e) $\frac{abc}{x+y}+x-y.$　　(f) $\frac{2}{x}-\frac{3}{y}+xy.$

9. 下列諸式,依 x 之昇冪排列,其形如何?依降冪排列又如何?

(a) $x^3+3x+8-x^4+5x^6$.

(b) $x^4+5xy^3+4x^2y^2+y^4$.

10. a^3 與 b^3 為同類項否? $3a^2b$, $3ab^2$ 為同類項否?

a^3 與 a^2 為同類項否? $-3x^my^n$, $100x^my^n$ 為同類項否?

§7* 正負數算法. 正負數四則,亦為初中代數所已詳述者,茲為複習計,再將此類問題,分條列舉於下:—

(1) 加法.

(a) 正數 + 正數,如何計算?

(b) 負數 + 負數,如何計算?

(c) 正數 + 負數,如何計算?

可見(甲)同號兩數相加,其代數和之符號如何?絕對值如何?

(乙)異號兩數相加其代數和之符號如何?絕對值如何?

(2) 減法.

(a) 任何數 − 正數,如 $x-(+a)=?\,[=x+(-a)]$

(b) 任何數－負數,如 $x-(-a)=$?〔$=x+(+a)$〕可見欲做減法,如何可變爲加法去做?

(3) 乘法.

(a) 正數×正數: $(+a)(+b)=$?

(b) 正數×負數: $(+a)(-b)=$?

(c) 負數×負數: $(-a\ (-b)=$?

可見(甲)同號兩數相乘,其積之絕對值如何?符號如何?

(乙)異號兩數相乘,其積之絕對值如何?符號如何?

(4) 除法. 除法爲乘法之還原,由乘法可答下之問題:—

(a) $\frac{\text{正數}}{\text{正數}}$ 如 $\frac{+ab}{+a}=$?

(b) $\frac{\text{正數}}{\text{負數}}$ 如 $\frac{+ab}{-a}=$?

(c) $\frac{\text{負數}}{\text{正數}}$ 如 $\frac{-ab}{+a}=$?

(d) $\frac{\text{負數}}{\text{負數}}$ 如 $\frac{-ab}{-a}=$?

然則(甲)同號兩數相除,其商之絕對值如何?符號如何?

(乙)異號兩數相除,其商之絕對值如何?符號如何?

演習題三

1　設 $a=5$, $b=-2$, $x=-4$, $y=-1$, 試求下列各式之值.

(a) $x+b+x+y$.　　(b) $a+b+x-y$.

(c) $a-b-x-y$.　　(d) $a-b+x-y$.

(e) $2a-3b+4x-5y$.　　(f) $10a-9b-8x-7y$.

(g) $a^2+b^2+x^2+y^2$.　　(h) $a^3+b^3+x^3+y^3$.

(i) $a^3-b^3-x^3\div y^3$.　　(j) $a^2b^3-x^3y^2+x^3\div y^3$.

(k) $a^3x^3+b^3y^3$.　　(l) $a^3x^3+3a^2bx^2y+3ab^2xy^2+b^3y^3$.

2. 化簡下列各式:—

(a) $(-1)^2(-2)^3(-1)^5=?$

(b) $(-1)^3\div(-2)^3\times(-2)^4\div(-1)^5=?$

(c) $(-1)^2(-1)^{11}(-1)^0\div(-1)^{30}=?$ $1(-1)\cdot(-1)\div(-1)=1$

(d) $(-2)^8\div(-1)^4=?$.

(e) $(-6)^5\div(-3)^5=?$　　(f) $(-6)^5\div(-2)^4=?$

§8* 整式四則複習之三. 仿上節仍將此中應有之問題分條列舉於下:—

(1) 加法.

(a) 同類單項式相加,如何求和?

〔例〕 求 ax, bx, $-cx$ 三者之和.

(b) 不同類單項式相加,如何求和?

〔例〕 求 x^2, $2x$, $3y$ 之和.

(c) 單項式與多項式相加,如何求和?

〔例〕 求 $8x^3$, $-5x^2$, x^3+x^2-6x+7 三者之和.

(d) 多項式與多項式相加,如何求和?演算形式有幾種?排列法何者最簡?何者不易致誤?

〔例〕 求 $3x^2+5x+6y$, $7x^2-8x+2y$, $5x^3-8y$ 三式之和.

(2) 減法. 如何利用加法以演算減法?

(3) 乘法.

(a) 單項式相乘. 如何定其積之(1)符號,(2)係數,(3)文字及指數. ($x^m \cdot x^n=?$)

〔例〕 $$-3a^2\times5ab^3=?$$

$$(-3a)(-6b)(-7abc)=?$$

(b) 單項式與多項式相乘. 如

$$A(B+C-D)=?$$

用語言表之,其規則如何?

〔例〕 $$-8xy(1+7xy-9x^2y^2+6x^3-7y^4)=?$$

(c) 多項式相乘. 如

$$(A+B)(C+D-E)=?$$

用語言表之,其規則如何?

〔例一〕 $(3x^2+5x+1)(3-8x)$

$$=9x^2+15x+3-24x^3-40x^2-8x$$

$$=?$$

但在實際運算上有時是否先如下排列,再行乘算?

$$\begin{array}{r} 3x^2+5x+1 \\ -8x\ +3 \\ \hline \end{array}$$

此種排法,好處何在?

〔例二〕 求 $8x+7x^3-8x^2+1$ 與 $3x-9+2x^2$ 之積.

(4) 除法.

(a) 單項式相除. 如何求其商之(1)符號,(2)係數,(3)文字及指數?($x^m \div x^n=?$)

〔例〕
$$25a^3b^2c\div(-5abc)=?$$

$$-25a^3b^2c\div(-6abc)=?$$

$$-2x\div x^2=?$$

(b) 以單項式除多項式. 如

$$(A+B-C)\div D=A\div D+B\div D-C\div D,$$ 然否?

用語言表之,其規則如何?

〔例〕 $(24x^5-18x^4+12x^2-6x)\div(-6x)=?$

(c) 多項式相除. 如

$$(A+B-C)\div(D+E)=(A+B-C)\div D+(A+B-C)\div E,$$ 然否?

然則多項相除之規則究應如何?先就下列試演之.

〔例〕 $(x^4+4x^2+9)\div(2x+3+x^2)=?$

然則多項式相除之規則如何?

習題四

1. 由加減法推出撤去括號之規則:—

(a) 括號前有"+"號者去括號後括號內各項原有之符號應否改變?

(b) 括號前有"−"號者又如何?

2. 由前題所述撤去括號之規則,推出插入括號之規則.

3. 欲將 $13+(8-9+5\times6-40)$ 化簡爲一數,不去括號可乎?但欲將 $3x+5y-6z-(7x-8y+9z)+(x+85y-10z)$ 化爲一簡短之式,不去括號可乎?然則去括號之手續,實際上有此需要否?

4. 一式之中如所含括號不止一層者,去括號時應遵守如何之秩序?

5. 化簡下列各式(去括號而整理其結果):—

(a) $x-(-x-2y+z)+(-x+y)$.

(b) $2x-\overline{x-y}+(-x+y)$.

(c) $m+n-[(n+m)-(m-n)]$.

(d) $3x-[3y+\{3z-(z-x)+y\}-2x]$. $=3x-[3y+\{3z-z+x+y\}-2x]$

$=3x-[3y+3z+z-x-y-2x]$

$=3x-3y-3z-z+x+y+2x$

$=6x-2y+$ [illegible]

(e) $m-3-[-\{-(-a+\overline{a+b})\}]$.

6. 下列各式內,試將首三項置入前有"+"號之括號內,其他各項置入前有"−"號之括號內.

(a) $a+2b-3c+d-e+f+g-h+k+l$.

(b) $x^3+5x^2-6x+7+8y-9z$.

(c) $-9xy+6x^2y-7xy^2-m+n-l$.

7. 求下列各組式之代數和:

(a) $x+y+z,\ x+y-z,\ x-y+z,\ -x+y+z$.

(b) $x^3-x^2+8x+9,\ 8+7x-x^2-7x^3,\ -5x^4+3x^2-7$.

(c) $x^3+3x^2y-3xy^2+y^3,\ xy^2-x^3+y^3+x^2y,\ 8x^3-7x^2y$.

8. 於下列各題中,各求出一式,使其加入右式能得左式:

(a) x^3+y^3,　　　$x^2+3x^2y^2+3xy+y^2$.

(b) $x^3+3x^2y+3xy^2+y^3$,　　　$7x^3-8x^2y+8xy^2-9y^3$.

(c) a^3+5a^2-6a+7,　　　$8a^3-7a^2+9a-19$.

9. 自 $x^3+x^2+5x-6,\ -2x^3-3x^2-5x+8$ 之和,減去 $8x^3-5x^2+6x-9,\ -x^2+5x+8,\ x^3+3x-5$ 之和.

10. 自 $a^3+b^3+c^3-3abc$ 減去 $a^2+b^2+c^2,\ a^3+3b^3+4c^3,\ -2a^2+8b^2-7c^2,\ a^2-9b^2+6c^2+3abc$ 之和.

11. 演下列乘法:

(a) $(x^2+4x+4)(x^2-4x+4)$.

(b) $(6x+9+x^2)(9+x^2-6x)$.

(c) $(x^3+y^3+x^2y+xy^2)(x-y)$.

(d) $(x^4+y^4-x^3y-xy^3+x^2y^2)(x+y)$.

(e) $(a+b+c)(a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca)$.

(f) $(x+2y-3)(x^2+4y^2+9-2xy-3x-6y)$.

12. 演下列乘法,並熟記其結果:—

(a) $(x+y)^2$.　　(b) $(x-y)^2$

(c) $(x+y)^3$.　　(d) $(x-y)^3$.

(e) $(x+y)(x-y)$.　　(f) $(x+y)(x^2-xy+y^2)$.

(g) $(x-y)(x^2+xy+y^2)$.　　(h) $(x+m)(x+n)$.

(i) $(ax+b)(cx+d)$.　　(j) $(x+y+z)^2$.

13. 演下列除法:—

(a) $(x^3+y^3)\div(x+y)$.

(b) $(x^3-y^3)\div(x-y)$.

(c) $(x^4+y^4)\div(x+y)$.

(d) $(x^4-y^4)\div(x-y)$.

(e) $(x^5+y^5)\div(x+y)$.

(f) $(x^4+9x^2+16)\div(x^2+3x+4)$.

(g) $(x^3+y^3-9xy+27)\div(x+y+3)$.

(h) $(x^3+y^3+z^3-3xyz)\div(x+y+z)$.

§9. 分離係數法. 前節所述之代數乘除法雖適用於任何問題,然而有時非至簡之法也.試看下例:—

〔例一〕 求$(x^2+x+3)(x^2-x+3)$之積.

〔解法〕 先依常法演之,應爲

$$\begin{array}{r}
x^2+\ x+3\qquad\qquad\\
x^2-\ x+3\qquad\qquad\\
\hline
x^4+\ x^3+3x^2\qquad\qquad\\
-\ x^3-\ x^2-3x\qquad\\
3x^2+3x+9\\
\hline
x^4+0x^3+5x^2+0x+9
\end{array}$$

若在乘算手續中,各項只取係數(暫時略去文字及指數),俟乘出結果(積)後再行補入文字及指數,則其演算之式當較簡.

$$\begin{array}{r}
1+1+3\qquad\quad\\
1-1+3\qquad\quad\\
\hline
1+1+3\qquad\quad\\
-1-1-3\qquad\\
3+3+9\\
\hline
1+0+5+0+9
\end{array}$$

乘式被乘式皆爲二次,故積爲四次,由是得所求結果爲x^4+5x^2+9.

此類只取係數以行演算之法,名曰分離係數法.

〔注意一〕 (1) 用分離係數以演乘法時,乘式被乘式應否同依昇冪(或降冪)排列?

(2) 用此簡法時乘式被乘式中倘有缺項,應否以0作爲該項之係數?

〔例二〕 求$(3a^3+2a^2b+5b^3)(2a^2-3b^2)$之積.

〔解法〕

$$
\begin{array}{rrrrrr}
3 & +2 & +0 & +5 & & \\
2 & +0 & -3 & & & \\
\hline
6 & +4 & +0 & +10 & & \\
 & & -9 & -6 & +0 & -15 \\
\hline
6 & +4 & -9 & +4 & +0 & -15
\end{array}
$$

所求之積爲$6a^5+4a^4b-9a^3b^2+4a^2b^3-15b^5$.

〔注意二〕 (1) 積之各項皆爲五次,其中,a之指數依次減小,b之指數依次增大.

(2) 當乘式(或被乘式)含有兩個文字,但非齊次式時,可否如上法行之?

〔例三〕 試以 $xy+2x^2+3y^2$ 除 $5x^3y+6x^4+7xy^3+18x^2y^2+8y^4$.

〔解法〕 將除式被除式各依x之降冪排列,再行除算如下:

$$
\begin{array}{rrrrr|l}
6 & +5 & +18 & +7 & +8 & 2+1+3\,(\text{除式各項之係數}) \\
\cline{6-6}
6 & +3 & +9 & & & 3+1+4\,(\text{商式各項之係數}) \\
\cline{1-5}
 & 2 & +9 & +7 & & \\
 & 2 & +1 & +3 & & \\
\cline{1-5}
 & & 8 & +4 & +8 & \\
 & & 8 & +4 & +12 & \\
\cline{1-5}
 & & & & -4 &
\end{array}
$$

故所求之商爲$3x^2+xy+4y^2$,餘式爲$-4y^4$.

習題五

用分離係數法演算:

1. $(x^3-2x^2+4x-8)(x+2)$.

2. $(x^4+3x^3+9x^2+27x+81)(x-3)(x+3)$.

3. $(a^3+b^3+3a^2b+3ab^2)(a^2+b^2+2ab)$.

4. $(x^5+2x^3+3x+5)(x^2-2x+1)$.

5. $(x^4-2x^2+5)(x^4+2x^2+5)$.

〔注意〕 本題內,乘式被乘式各項均爲偶次,所缺奇次項之係數,應各以0補足之否?不補可否?

6. $(m^4-19m^2n^2+9n^4)(m^2-5mn+3n^2)(m^2+5mn+3n^2)$.

7. $(x^3+125)\div(x+5)$.

8. $(a^5-243b^5)(a+3b)$.

9. $(10p^4q+8p^5-2p^2q^3-19p^3q^2+21pq^4-18q^5)\div(2p^2+pq-3q^2)$.

10. 乘式被乘式(或除式被除式)中,(a)同含某一文字,分離係數恆能適用否?(b)同含兩個文字,且均爲齊次式分離係數法恆能適用否?(c)同含兩個文字,但非均爲齊次式〔例如$(3x+y+2)^2=?$〕則如何?(d)同含三個文字〔例如$(x+2y-z)$ 不能
$(2x-y+z)=?$〕又如何?

§10 待定係數法. 用分離係數法以演除法,已較用通常除法爲簡,但有時更有可得而簡者,試看下例.

〔例一〕 試以 $x-3$ 除 $3x^4-5x^3-19x^2+26x-15$.

〔解法〕 因除式爲 x 的一次式,被除式爲 x 的四次式,故所求商式是 x 的三次式,餘式不含 x. 假定商式爲 ax^3+bx^2+cx+d, 餘式爲 R. 然後設法去求 a, b, c, d 及 R 之值:

依"除式 × 商式 + 餘式 = 被除式"之理,應得

$$(x-3)(ax^3+bx^2+cx+d)+R=3x^4-5x^3-19x^2+26x-15,$$

即 $$\begin{array}{r|r|r|r} ax^4+\ \ b & x^3+\ \ c & x^2+\ \ d & x+\ \ R \\ -3a & -3b & -3c & -3d \end{array}$$

$$=3x^4-5x^3-19x^2+26x-15.$$

故 $\begin{cases} a=3 \\ b-3a=-5 \\ c-3b=-19 \\ d-3c=26 \\ R-3d=-15 \end{cases}$ 即 $\begin{cases} a=3 \\ b=-5+3a=-5+3\cdot3=4 \\ c=-19+3b=-19+3\cdot4=-7 \\ d=26+3c=26+3(-7)=5 \\ R=-15+3d=-15+3\cdot5=0 \end{cases}$

∴ 所求商式爲 $3x^3+4x^2-7x+5$, 餘式爲 0.

上面商式中的假定係數 a, b, c, d 及餘式 R 皆稱待定係數,利用待定係數以解問題的方法,名曰未定係數法.

〔例二〕 試以 x^2-x+1 除 x^4+x^3+3x-1.

〔解法〕 假定所求商式為 x^2+ax+b; 餘式為 $cx+d$, 則

$$x^4+x^2+3x-1=(x^2-x+1)(x^2+ax+b)+cx+d$$

$$=x^4\begin{array}{r|r|r|r} +a & x^3+1 & x^2+a & x+b \\ -1 & -a & -b & +d \\ & +b & +c & \end{array}$$

$$\text{故}\begin{cases} a-1=0 \\ 1-a+b=1 \\ a-b+c=3 \\ b+d=-1 \end{cases}\qquad \text{即}\begin{cases} a=1 \\ b=1 \\ c=3 \\ d=-2 \end{cases}$$

∴ 所求商式為 x^2+x+1, 餘式為 $3x-2$.

〔註〕 待定係數法應用甚廣,不僅在演算除法而已.學者在本書中以後當可隨時見之.

§11. 綜合除法.

凡以 $x-r$ 除 $a_0x^n+a_1x^{n-1}+a_2x^{n-2}+\cdots\cdots+a_{n-1}x+a_n$, 均可用更簡之法演之.

仿前節,設所求商式為

$$b_1x^{n-1}+b_2x^{n-2}+\cdots\cdots+b_{n-1}x+b_n;$$

餘式為 R. 則依"被除式 = 除式 × 商式 + 餘式"之

理,得 $a_0x^n+a_1x^{n-1}+a_2x^{n-2}+\cdots\cdots+a_{n-1}x+a_n$

$$=(x-r)(b_1x^{n-1}+b_2x^{n-2}+\cdots\cdots+b_{n-1}x+b_n)+R.$$

$$\text{故}\left\{\begin{array}{l} a_0=b_1 \\ a_1=b_2-rb_1 \\ a_2=b_3-rb_2 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{n-1}=b_n-rb_{n-1} \\ a_n=R-rb_n \end{array}\right. \qquad \text{卽}\left\{\begin{array}{ll} a_0 & =b_1 \\ a_1+rb_1 & =b_2 \\ a_2+rb_2 & =b_3 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots & \cdots\cdots \\ \cdots\cdots\cdots\cdots & \cdots\cdots \\ a_{n-1}+rb_{n-1} & =b_n \\ a_n+rb_n & =R \end{array}\right.$$

把上式橫列爲下形,便得一種簡明適用的算式:

$$\begin{array}{lccccccc|l} & a_0 & a_1 & a_2 & a_3\cdots\cdots\cdots & a_{n-1} & a_n & & \underline{r} \\ +) & & b_1r & b_2r & b_3r\cdots\cdots & rb_{n-1} & rb_n & & \\ \hline & b_1(=a_0) & b_2 & b_3 & b_4\cdots\cdots\cdots & b_n & R & & \end{array}$$

其中 $b_1, b_2,\cdots\cdots, b_n$ 順次爲商式各項的係數,R 爲餘數,這種簡短的除法,名曰綜合除法.

〔例一〕　試以 $x-3$ 除 $3x^4-5x^3-19x^2+26x-15$.

〔解法〕

$$\begin{array}{rrrrrr|l} & 3 & -5 & -19 & 26 & -15 & \underline{3} \\ +) & & +9 & +12 & -21 & +15 & \\ \hline & 3 & 4 & -7 & 5 & 0 & \end{array}$$

故所求商式爲 $3x^3+4x^2-7x+5$,餘式爲 0.

〔例二〕　試以 $x+5$ 除 x^5-3125.

〔解法〕

$$\begin{array}{rrrrrr|r}
1+0+ & 0 & + \quad 0 & + \quad 0 & -3125 & & -5 \\
-5+ & 25 & -125 & +625 & -3125 & & \\
\hline
1 \quad 5+ & 25 & -125 & +625 & \underline{\underline{-6250}} & &
\end{array}$$

故所求之商為 $x^4-5x^3+25x^2-125x+625$, 餘數為 -6250.

〔注意〕 除式如不為 $x-r$ 而為 $mx-r$, 應將 $mx-r$ 視為 $m\left(x-\dfrac{r}{m}\right)$, 再以 $x-\dfrac{r}{m}$ 為除式仿上法除之.但如此演得之商式是否即為所求之商式?演得之餘數是否即為所求之餘數?

〔註〕 除式如為三項以上,則綜合除法演算之形式又須略加改變,以其在實際應用不廣,故略之.

習題六

試用綜合除法及待定係數法演下列諸題.

1. $(x^3+4x^2-3x+2)\div(x+2)$.
2. $(3x^6-15x^5+5x^4+25x^3+4x+25)\div(x-5)$.
3. $(x^5-243)\div(x+3)$.
4. $(x^6+4x^4-3x^2+10)\div(x^2+5)$.

〔注意〕 本題除式與被除式各項均為偶次,所缺奇次項可否不以0補足之?

5. $(x^6-125)\div(x^2-5)$.

6. $(81x^4-16)\div(3x-2)$. $=(81x^4-16)\div 3(x-\frac{2}{3})$

7. $(81x^4-16)\div(3x+2)$. $=(81x^4-16)\div(x-\frac{2}{3})\div 3$

8. $(243x^5+32)\div(3x-2)$.

第三章

因子分解 = 乘法之倒置

§ 12* 引論. 下列諸端,學者在初中時均已學過,能舉例申述其意義否?

(1) 因子分解之定義.

(2) 因子分解之限制. 要因式不能再分

(3) 因子分解之用途. 解方程式檢查乘是否對

(4) 因子分解與乘除法之比較.

(5) 因子分解何以比除法爲難?

(6) 因子分解有無通法可以適用於任何問題? 只靠經驗可分某些種

§ 13* 因子分解之初步範式. 因子分解問題既無通法可以適用於任何問題.故必需分類研究.研究之方,卽熟記乘法中幾種重要公式作爲各類範式;再將欲分解之式化爲某一範式之形,

便可依該範式之分解方法求得其因子.玆先就初中代數所已學習者分類作簡要之複習於下:

第一類. 各項有$\boxed{\text{共同因子}}$者,其模範式爲

$$ax+ay+az$$

〔分法〕 $ax+ay+az=a(x+y+z)$

〔例一〕 $3x^2+6xy-21x=3x(x+2y-7).$

〔例二〕 $m(x+y)(x+z)-m(x+y)(a-b)$

$$=m(x+y)(x+z-a+b).$$

第二類. 利用$\boxed{\text{分組法}}$可以分解因子者,其模範式爲 $ax+ay+bx+by$

〔分法〕 此式之各項雖無共同因子,不能利用前類之法;但若分爲兩組,亦可求得其因子

$$\begin{aligned}&ax+ay+bx+by\\&\quad=(ax+ay)+(bx+by)\\&\quad=a(x+y)+b(x+y)\\&\quad=(a+b)(x+y).\end{aligned}$$

〔例〕 $ap+bp+cp+aq+bq+cq$

$$\begin{aligned}&=(ap+aq)+(bp+bq)+(cp+cq)\\&=a(p+q)+b(p+q)+c(p+q)\\&=(p+q)(a+b+c).\end{aligned}$$

第三類. 二項式之爲二個平方之差者,其模範式爲x^2-y^2.

〔分法〕 $x^2-y^2=(x+y)(x-y)$.

$a^4+b^4=(a^2)^2-(b^2)^2$
$=(a^2+b^2)(a^2-b^2)$
$=(a^2+b^2)(a+b)(a-$

〔例一〕 $a^4-b^4=(a^2+b^2)(a^2-b^2)$

$$=(a^2+b^2)(a+b)(a-b).$$

〔例二〕 $(a+b)^2-\frac{c^2}{4}=\left(a+b+\frac{c}{2}\right)\left(a+b-\frac{c}{2}\right)$.

第四類. 三項式之爲完全平方者,其模範式爲$x^2\pm 2xy+y^2$.

〔分法〕 $x^2\pm 2xy+y^2=(x\pm y)^2$.

〔例一〕 $4m^2-12mn+9n^2=(2m-3n)^2$.

〔例二〕 $4a^2+4ab+b^2-\frac{c^2}{9}=(2a+b)^2-\left(\frac{c}{3}\right)^2$.

$$=\left(2a+b+\frac{c}{3}\right)\left(2a+b-\frac{c}{3}\right).$$

第五類. 二項式之爲兩個立方之和或差者,其模範式爲$x^3\pm y^3$.

〔分法〕 $x^3\pm y^3=(x\pm y)(x^2\mp xy+y^2)$.

〔例一〕 $m^3+8n^3=(m+2n)(m^2-2mn+4n^2)$.

〔例二〕 $\frac{a^3}{8}-\frac{b^3}{27}=\left(\frac{a}{2}-\frac{b}{3}\right)\left(\frac{a^4}{4}+\frac{ab}{6}+\frac{b^2}{9}\right)$.

1)係數不同
2)次 〃 〃 〃
3)文字 〃 〃

1;2;3;
1,2;2,3;
1,2,3;13.

第六類. 四項式之爲完全立方者.其模範式爲 $x^3\pm3x^2y+3xy^2\pm y^3$.

〔分法〕 $x^3\pm3x^2y+3xy^2\pm y^3=(x\pm y)^3$.

〔例一〕 $p^3+6p^2q+12pq^2+8q^3=(p+2q)^3$.

〔例二〕 $8m^6-36m^4n+54m^2n^2-27n^3=(2m^2-3n)^3$.

$-3(2m^2)^2(3n)+3(2m^2)(3n)^2$

習題七

試求下列各式之因子:

1. $a^3x^3+b^2x^2+c^4x^1+d^5x^5$.
2. $7a^2x^2-14a^2xy-49abxz+56axw$.
3. $(x+y)(x+z)+(x+y)(x-t)$.
4. $a^2b^2(x+y)^2-mn(x+y)^2(x-y)-(x+y)^2$.
5. $2c(r-2s)-5d(2s-r)$.
6. $x^2+3yz+2ax^2+6ayz$.
7. $4a^3-3ab-8a^2b+6b^2$.
8. $-x^2y+3xy-5y+x^2z-3xz+5z$.
9. $361x^4-625y^4$.
10. $\frac{x^4}{81}-\frac{y^4}{625}$.
11. $27x^4-75$.
12. $32c^4-162d^4$.
13. $\frac{m^2}{3}-\frac{3n^2}{4}$.
14. $ab(x+y)^2-ab(p+q)^2$.
15. m^2+4n^2-4mn.
16. $4p^3-20p^2q^4+25pq^8$.
17. $\frac{m^2}{4}-\frac{mn}{3}+\frac{n^2}{9}$.
18. $27a^4-36a^2b^3+12b^6$.
19. $a^2+b^2-c^2-d^2+2ab+2cd$.
20. $m^2+n^2-2mn+am-an$.
21. $a^2+b^2+c^2+2ab+2ac+2bc$. $=(a^2+b^2+2ab)-(c^2-2cd+d^2)$

〔注意〕 本題之結果甚爲重要,爲節省手續計,通常恆將

$=(a+b)^2-(c-d)^2$

$=[(a+b)+(c-d)][(a+b)-(c-d)]$

$=(a+b+c-d)(a+b-c+d)$

$= (x^3+6x^2y+12xy^2+8y^3)+(x^2+4xy+4y^2)+(2x+4y)$
$= [x^3+3x^2(2y)+3x(2y)^2+(2y)^3]+[x^2+\cancel{2x(2y)}+(2y)^2]+2(x+2y)$

此結果用爲公式以解同類之問題,試本此意以求下列兩式的因子.

22. $x^2+y^2+9+6x+6y+2xy$.

23. $4p^2+9q^2+r^2+12pq-4pr-6qr$.

24. m^6-n^6　　25. $8m^6+27n^6$.

26. $\frac{a^3}{8}-\frac{b^3}{27}$.　　27. $\frac{3x^3}{64}+\frac{y^3}{9}$.

28. $x^3+y^3+x^2-y^2$.　　29. $x^3-y^3+x^2-y^2-x+y$. $=5a^3+3(5a)^2(2b^2)+3(5a)(2b^2)^2+(2b^2)^3$

30. $27a^3-27a^2b+9ab^2-b^3$.　　31. $125a^3+150a^2b^2+60ab^4+8b^6$.

32. $(x^3-3x^2y+3xy^2-y^3)-(x^2+y^2)-(x+y)$.

33. $x^3+8y^3+6x^2y+12xy^2+x^2+4y^2+4xy+2x+4y$.

第七類. 三項式之爲x^2+px+q之形者.

〔分法〕 先將q分爲兩個因子,m,n;再察其代數和$m+n$是否爲p.如果爲p,則

$$x^2+px+q=(x+m)(x+n).$$

〔例〕 $x^2-5x-24=(x-8)(x+3)$.

〔註〕 -24 可分爲 $\pm1,\mp24$; $\pm2,\mp12$; $\pm3,\mp8$; $\pm4,\mp6$ 八組因子,其中只有 $+3,-8$ 一種,其兩個因子之代數和爲 -5.

第八類. 三項式之爲ax^2+bx+c之形者.

〔分法A〕 十字相乘法.先將a分爲兩個因子p,q; c分爲兩個因子m,n,使$pn+qm=b$,則

$\overline{pqx^2 + npx + mqx + mn}$

$pqx^2 + (mp + nq)x + mn$

$p \cdot q = a$

$mp + nq = b$

$mn = c$

$$ax + bx + c \equiv (px+m)(qx+n).$$

〔例一〕 分解 $6x^2+23x+20$ 之因子.

〔解法〕 6之因子有 1, 6; 2, 3 兩種, 20之因子有 1, 20; 2, 10, 4, 5 三種.其中惟有 $2\times4+3\times5=23$. 故得

$$6x^2+23\times20=(2x+5)(3x+4).$$

〔例二〕 $6x^2+9x-20=6x^2+9x-20$. (沒有因子.)

〔註〕

$$\begin{array}{c} 1\pm\ 1 \\ \times \\ 6\mp20 \\ \hline \neq 9 \end{array} \qquad \begin{array}{c} 1\pm\ 2 \\ \times \\ 6\mp10 \\ \hline \neq 9 \end{array} \qquad \begin{array}{c} 1\ \pm4 \\ \times \\ 6\ \mp5 \\ \hline \neq 9 \end{array} \qquad \begin{array}{c} 2\pm\ 1 \\ \times \\ 3\mp20 \\ \hline \neq 9 \end{array}$$

$$\begin{array}{c} 2\pm\ 2 \\ \times \\ 3\mp10 \\ \hline \neq 9 \end{array} \qquad \begin{array}{c} 2\ \pm4 \\ \times \\ 3\ \mp5 = 12 \\ \hline \neq 9 \end{array} \qquad \begin{array}{c} 1\pm20 \\ \times \\ 6\mp\ 1 \\ \hline \neq 9 \end{array} \qquad \begin{array}{c} 1\pm10 \\ \times \\ 6\mp\ 2 \\ \hline \neq 9 \end{array} \qquad \begin{array}{c} 1\ \pm5 \\ \times \\ 6\ \mp4 \\ \hline \neq 9 \end{array}$$

$$\begin{array}{c} 2\ \pm20 \\ \\ 3\ \mp\ 1 \\ \hline \neq 9 \end{array} \qquad \begin{array}{c} 2\ \pm10 \\ \\ 3\ \mp\ 2 \\ \hline \neq 9 \end{array} \qquad \begin{array}{c} 2\ \pm5 \\ \\ 3\ \mp4 \\ \hline \neq 9 \end{array}$$

〔分法 B〕 分裂中項法. 先求二數 h, k, 使

$$\begin{cases} h+k=b. \\ hk=ac. \end{cases}$$

則原式之第二項可裂為兩項, 全式共有四項, 然後仿第二類分組解法以求其因子.

〔例〕 $6x^2+7x-20$　　$\because\begin{cases}6\cdot 20=120=15\cdot 8\\ 7=15-8\end{cases}$

$=6x^2+15x-8x-20$

$=3x(2x+5)-4(2x+5)$

$=(2x+5)(3x-4).$

〔分法 C〕 乘除首係法. 先以原式之首項係數

$=\frac{1}{a}(a^2x^2+abx-ac$

乘除全式,則原式 $=\frac{1}{a}[(ax)^2+b(ax)+ac]$,乃將 ax 視之為一數(如 y)仿第七類之法解之.

〔例二〕 $6x^2+7x-20=\frac{1}{6}[(6x)^2+7(6x)-120]$

$=\frac{1}{6}[6x+15][6x-8]$

$=(2x+5)(3x-4).$

第九類. 能用配方法者. 能用此法之式,其形不一.總而言之,凡式之可由適當方法(通常於原式加減以適當之同數)配成

(a) 兩平方之差,

(b) 兩立方之差,

或 (c) 兩立方之和,

者,皆屬此類,其因子,在配方手續完成之後,不難仿前數類之法以求之.

〔例一〕　$x^4+x^2y^2+y^4=x^4+2x^2y^2+y^4-x^2y^2$

$$=(x^2+y^2)^2-(xy)^3$$

$$=(x^2+xy+y^2)(x^2-xy+y^2).$$

〔例二〕　$ax^2+bx+c=a\left(x^2+\frac{b}{a}x+\frac{c}{a}\right)$

$a\left(x^2+\frac{b}{a}x+\left(\frac{b}{2a}\right)^2-\left(\frac{b}{2a}\right)^2+\frac{c}{a}\right)=$

$=a\left(x^2+\frac{b^2}{4a}-\left(\frac{b^2}{4a}-\frac{c}{a}\right)\right)$

$$=a\left[x^2+\frac{b}{a}x+\frac{b^2}{4a^2}-\frac{b^2-4ac}{4a^2}\right]$$

$$=a\left[\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2-\left(\frac{\sqrt{b^2-4ac}}{2a}\right)^2\right]$$

$$=a\left[x+\frac{b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a}\right]\left[x+\frac{b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a}\right].$$

〔例三〕　$a^3+9a^2b+27ab^2+26b^3$ $=a^3+3a^2(3b)+3a(3\ldots$

$$=a^3+9a^2b+27ab^2+27b^3-b^3=(a+3b)^3-b^3$$

$$=[(a+3b)-b][(a+3b)^2+b(a+3b)+b^2]$$

$$=(a+2b)(a^2+7ab+13b^2).$$

習題八

試求下列各式之因子：

1. $x^2-4x-5.$ $(x-5)(x+1)$　　2. $x^2+4x-5.$ $(x+5)(x-1)$
3. $x^2-23x+132.$　　4. $x^2+x-132.$
5. $x^2-12x-133.$ $(x-19)(x+7)$　　6. $x^2+12x-133.$ $=(x+19)(x$
7. $x^2-9x-682.$　　8. $x^2+9x-682.$

9. $x^2-10x-144.$　　　10. $x^2+10x-144.$ $(x+18)(x-8)$

試用四個方法求下列各題之因子(11—16).

11. $6x^2+13x+6.$　　　12. $6x^2+5x-6.$

13. $6x^2+37x+6.$　　　14. $6x^2-37x+6.$

15. $24x^2+2x-15.$　　　16. $24x^2-2x-15.$

用適宜方法求下列各式之因子.

17. $12x^2-x-6.$　　　18. $12x^2+x-6.$

19. $21x^2+42x-8.$ $=(7x-2)(3x+4)$　　　20. $221x^2-120x-221.$ $(17x+13)(13x-17)$

21. $221x^2-458x+221.$　　　22. $90x^2+19x-90.$ $(9x+10)(10x-9)$

23. $x^2-xy-6y^2-x+3y.$　　　24. $5x^2-26xy+5y^2-3x+15y.$ $(5x-y-3)$

用配方法求下列各式之因子:

25. $x^4+x^2y^2+y^4.$

〔解法〕 原式 $=x^4+2x^2y^2+y^4-x^2y^2=(x^2+y^2)^2-y^2=(\quad)(\quad).$

26. $x^4+2x^2y^2+9y^4$　　　27. $x^4-11x^2y^2+y^4.$

28. $x^4+4.$　　　29. $x^4+\frac{1}{4}.$

30. $2x^5+128x$　　　31. $3a^6-42a^4b^2+3a^2b^4.$

32. $x^3+3x^2+3x+28$　　　33. $26x^3+27x^2+9x+1.$

34. $a^3+b^3+3a^2+3b^2+3a+3b+2.$　　　35. $x^3+6x^2+12x-19.$

§14. 餘數定理. 前節所述之因子分解法,只在被分解之式可化爲某一範式之形時可以適用,其法雖簡,而爲用不廣.例如欲求 x^3-6x+5 之因子,則非前節諸法所能奏效矣.今若利用因子定理,則一望便知 $x-1$ 爲此式之一因子,其便利

爲何如也！但因子定理係從餘數定理得來，故先述餘數定理．

設以 $px-r$ 除 x 之多項式 $a_0x\ +a_1x^n+a_2x^{n-2}+\cdots\cdots+a_{n-1}x+a_n$，則得商式爲 x 之另一多項式（以 $b_1x^{n-1}+b_2x^{n-2}+\cdots\cdots+b_{n-1}x+b_n$ 表之）；此外又得一餘數不含 x，以 R 表之．據"被除式＝除式×商式＋餘數"之理，應得下之關係．

$$a_0x^n+a_1x^{n-1}+a_2x^{n-2}+\cdots\cdots+a_{n-1}x+a_n$$
$$=(px-r)(b_1x^n+b_2x^{n-2}+\cdots\cdots+b_n)+R.$$

此相等關係在 x 任爲何值時，無不成立．故當 $x=\dfrac{r}{p}$ 時，上之等式變爲

$$a_0r^n+a_1r^{n-1}+a_2r^{n-2}+\cdots\cdots+a_{n-1}r+a_n=0+R=R$$

由是乃得一定理：

定理． 凡以 $px-r$ 除 x 之多項式，其應得之餘數 R 等於在被除式中以 $\dfrac{r}{p}$ 代換 x 所得之值．

〔例一〕 求以 $x+2$ 除 x^5+x^3-6x+8 所得之餘數．

〔解〕 ∵ 除式爲　$x+2=x-(-2)$，

被除式爲　　$x^5+x^3-6x+8.$

∴ 餘數$=(-2)^5+(-2)^3-6(-2)+8=-20.$

〔例二〕 求以$3x-2$除$81x^4+16$所得之餘數.

〔解〕 餘數$R=81\left(\frac{2}{3}\right)^4+16=16+16=32.$

§15. **因子定理一.** 在特例,當$x=\frac{r}{p}$時,x之多項式P之值若為零,則依餘數定理,卽為"以$px-r$除P,所得之餘數應為零".換言之,"$px-r$能整除P".亦卽謂"$px-r$為P式之一因子也".故得

定理. 當$x=\frac{r}{p}$時,x之多項式P之值若為零,則$px-r$為P之因子;反之,當$x=\frac{r}{p}$時,P式之值若不為零,則$px-r$非P之因子.(以此時$px-r$不能整除P式也.)

〔例一〕 分解x^3-6x+5之因子.

〔分法〕 當$x=1$時原式之值為$1^3-6+5=0$,故$x-1$為式之因子,乃用綜合除法求得他一因子為x^2+x-5.

$$\therefore\quad x^3-6x+5=(x-1)(x^2+x-5)$$

〔例二〕 分解$4x^4+16x^3+17x^2-x-6$之因子.

〔分法〕 (1) 設$x=-1$,則原式之值為

$$4-16+17+1-6=0.$$

故$x+1$為原式因子之一,用綜合除法求他一因

子,乃得

$$4x^4+16x^3+17x^2-x-6=(x+1)(4x^3+12x^2+5x-6).$$

(2) 再仿(1)之步驟.求 $4x^2+12x+5x-6$ 之因子.於是,原式 $=(x+1)(x+2)(4x^2+4x-3)$

$$=(x+1)(x+2)(2x+3)(2x-1).$$

§16. 因子定理二. 如有一式 $3x^3+2x+6$,今設 $x=\pm1, \pm2, \pm3$, 等,原式之值俱不爲零,然則原式究有因子乎,抑無因子乎?判斷該式之有無一次式因子,此類代換手續究應演至何時爲止?此不能不求解決之問題也.解決之道,依下

定理. 若 $px-r$ 爲多項式 $a_0x^n+a_1x^{n-1}+\cdots\cdots\cdots+a_{n-1}x+a_n$ 之因子,則 p 必能整除 a_0, 且 r 必能整除 a_n.

〔證〕 $px-r$ 旣爲 $a_0x^n+a_1x^{n-1}+\cdots\cdots+a_n$ 之因子,則依因子之定理,應有

$$\frac{a_0r^n}{p^n}+\frac{a_1r^{n-1}}{p^{n-1}}+\frac{a_2r^{n-2}}{p^{n-2}}+\cdots\cdots+\frac{a_{n-1}r}{p}+a_n=0$$

即 $a_0r^n+a_1r^{n-1}p+a_2r^{n-2}p^2+\cdots+a_{n-1}rp^{n-1}+a_np^n=0$

即 $a_0r^{n-1}+a_1r^{n-2}p+a_2r^{n-3}p^2+\cdots+a_{n-1}p^{n-1}=-\dfrac{a_np^n}{r}.$

故 r 能整除 a_np^n. 然原設不能整除 p, 自然亦不

$x^5+y^5=(x+y)(x^4-x^3y+x^2y^2-xy^3+y^4)$

$x^4+y^4=$

能整除p^n.

$\therefore$　p必能整除a_n.

同樣,由(A)亦能證得"p必能整除a_0".

〔例一〕 分解$3x^3+2x+6$之因子.

〔解法〕 3之因子爲 $\pm1, \pm3$; 6之因子爲 $\pm1, \pm2, \pm3, \pm6$, 故應以 $\pm1, \pm2, \pm3, \pm6, \pm\frac{1}{3}, \pm\frac{2}{3}$ 等數代替原式之x察原式之値是否爲零,但因原式各項俱爲正號,故不必以正數代入.

於是僅以 $-1, -2, -3, -6, -\frac{1}{3}, -\frac{2}{3}$ 代入可矣.

今以 $-1, -2, -3, -6, -\frac{1}{3}, -\frac{2}{3}$ 代入原式之x,而原式之値俱不爲0,故$3x^2+2x+6$無一次式因子.

又因原式爲三次,如可分解因子,必有一次式因子.今旣無一次式因子,故原式亦必無其他因子也.

〔例二〕 分解$3x^4-2x^3+3x^2+4x-4$之因子.

〔解法〕 仿例一,本題只應以 $\pm1, \pm2, \pm4, \pm\frac{1}{3}, \pm\frac{2}{3}, \pm\frac{4}{3}$ 代x考察原式之値是否爲零,而不必以他數試之.

試得$x=-1$時原式之值爲零,故

$$原式=(x+1)(3x^3-5x^2+8x-4).$$

再依上法求得$3x^3-5x^2+8x-4=(3x-2)(x^2-x+2)$

$$\therefore\ 原式=(x+1)(3x-2)(x^2-x+2).$$

習題九

1. 分解下列各式之因子:—

(a) x^3-4x^2+x+6. (b) $6x^3-31x^2+3x+10$.

(c) $2m^4-2m^3+3m^2-2m-1$. (d) $3x^3+x^2+4x-4$.

(e) $x^4-2x^3+x^2-x-2$. (f) $x^3-ax^2+2ax-8a^3$.

2. 用因子定理分解下列各式之因子:—

(a) x^2-y^2. (b) x^3-y^3.

(c) x^3+y^3. (d) $x^2+2xy+y^2$.

(e) $x^2-2xy+y^2$. (f) $x^3+3x^2y+3xy^2+y^3$.

(g) $x^2+(b+c)x+bc$. (h) $mnx^2+(np+mq)x+pq$.

(i) $ax+by+ay+bx$. (j) $ax+ay+by+bx+cx+cy$.

3. 下列諸式中,如有因子,試用因子定理分解之:—

(a) $x^{2m+1}+y^{2m+1}$. (b) $x^{2m+1}-y^{2m+1}$.

(c) $x^{2n}-y^{2n}$. (d) $x^{2n}+y^{2n}$.

〔註〕本題之結果頗爲有用學者,試熟記之.

4. 下列諸式中有因子者試分解之.

(a) $x^6-2x^4y-11x^2y^2+12y^3$.

〔提示: 設$x^2=y$原式之值爲零否?〕

对称式之和差積商仍为对称式（2）

(b) $2x^9+5x^6y^2-x^3y^4-6y^6$.

(c) $x^6+x^4y+4y^3$.

5. $x^4+x^2y^2+y^4$ 有因子否? x^4+4 有因子否? 設用因子定理能將上式分解否? 何故? 然則因子定理應用雖廣,究亦有時而窮歟?

6. 設 $a=-(b+c)$ 則 $a^3+b^3+c^3-3abc$ 之值爲零否? 然則 $a+b+c$ 是否爲 $a^3+b^3+c^3-3abc$ 之一因子? 試用除法再求他一因子,用此結果爲公式以求下列各式之因子.

(a) $x^3+8y^3+z^3-6xyz$.

(b) $x^3+8y^3+27z^3-18xyz$.

(c) $m^3-n^3+64p^3+12mnp$.

§17. 對稱式. 在一個代數式中,將所含幾個文字兩兩對調,若其形式不變,則此式稱爲該幾個文字的完全對稱式. 例如 $2x+2y$, $ax^2+bxy+ay^2$, lx^3+ly^3 之類,皆爲 x, y 的完全對稱式; 而 $3x+2y$, x^2-y^2 則非 x, y 的完全對稱式. 又如 $ax+ay+az$, $xy+yz+zx$, $lx^3+ly^3+lz^3$ 之類皆爲 x, y, z 的完全對稱式.

在一個代數式中,將所含幾個文字依次輪換,若其形式不變,則此式稱爲輪換對稱式. 例如在 $a^2b+b^2c+c^2a$ 中,將 a 換爲 b, b 換爲 c, c 換爲 a, 所成

{轮对对称式 $a+b+c$ $a^3+b^3+c^3-3abc$
完全对称式 同形式之项之系数相同 (1)

新式$b^2c+c^2a+a^2b$仍與原式同形.姑原式爲a,b,c的輪換對稱式.又如$(a-b)^3+(b-c)^3+(c-a)^3$, $x(y-z)^3+y(z-x)^3+z(x-y)^3$亦皆爲所含文字的輪換對稱式.

凡完全對稱式或輪換對稱式,通常皆可用因子定理及未定係數法以求其因子,舉例如下:—

〔例一〕 試求$a^3(b-c)+b^3(c-a)+c^3(a-b)$之因子.

〔解法〕 設$a=b$則原式之值變爲$b^3(b-c)+b^3(c-b)+0=0$,故由因子定理,知$a-b$爲原式之一因子.

又因原式爲a,b,c的輪換對稱式,故$b-c,c-a$亦皆爲原式之因子.

因原式爲四次齊次式,而$a-b,b-c,c-a$各爲一次齊次式.故所餘另一因子必爲一次齊次式.

又因原式爲a,b,c的輪換對稱式,故所餘因子又爲a,b,c的輪換對稱式.

故所餘另一因子應爲$l(x+y+z)$,其中l爲待定係數,所以原式$=l(a-b)(b-c)(c-a)(a+b+c)$.

又因原式中a^3b的係數爲1, $l(a-b)(b-c)(c-a)$

且完全对称式皆为轮换对称式,而轮换对称式则不少为完全对称式

对称式之性质、
轮换对称式之和,差,積,商,仍为轮换对称式
在轮换对称式所有之诸项内同形式之项之係数相等

$(a+b+c)$ 中 a^3b 的係數爲 $-l$,故得 $-l=1$ 卽 $l=-1$.

$\therefore$ 原式 $\equiv -(a-b)(b-c)(c-a)(a+b+c)$.

〔例二〕 試求 $(a-b)^5+(b-c)^5+(c-a)^5$ 的因子.

〔解法〕 設 $a=b$, 則原式之値爲零,故 $a-b$ 爲原式之一因子.

因原式爲 a, b, c 的輪換對稱式,故 $b-c$, $c-a$ 亦皆爲原式之因子.

故原式

$$=(a-b)(b-c)(c-a)[l(a^2+b^2+c^2)+m(ab+bc+ca)].$$

其中 l, m 爲未定係數.

在原式中 a^4b 的係數爲 -5; 在所求因子之積中 a^4b 的係數爲 $-l$. 故 $-5=-l$, 卽 $l=5$.

故原式

$$=(a-b)(b-c)(c-a)[5(a^2+b^2+c^2)+m(ab+bc+ca)].$$

又因這個相等關係在 a, b, c 任爲何値時皆能成立,故設 $a=0, b=1, c=-1$ 代入上式以求 m. 得 $m=-5$.

$$\therefore \text{原式} =5(a-b)(b-c)(c-a)$$

$$(a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca).$$

〔註〕欲定 m 之值,亦可仿求定 l 的方法,比較原式中 a^3b^2 的係數與所求因子之積中 a^3b^2 的係數;惟其手續稍繁耳.

習題十

分解下列各式之因子:

1. $ab(a-b)+bc(b-c)+ca(c-a)$.
2. $a^3+b^3+c^3-3abc$.
3. $a^4(b-c)+b^4(c-a)+c^4(a-b)$.
4. $a^2b^2(a^2-b^2)+b^2c^2(b^2-c^2)+c^2a^2(c^2-a^2)$.
5. $ab(a^3-b^3)+bc(b^3-c^3)+ca(c^3-a^3)$.
6. $a^2(b^2-c^2)^3+b^2(c^2-a^2)^3+c^2(a^2-b^2)^3$.
7. $(a+b+c)(ab+bc+ca)-abc$.
8. $(a+b+c)^3-(a^3+b^3+c^3)$.
9. $(a+b+c)^5-(a^5+b^5+c^5)$.
10. $(ab+bc+ca)^2-(a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2)$.

§18. 因子分解之通則. 以上諸節已將因子分解之重要方法分類詳述,學者苟能於每類方法確切瞭解,應用自如,則不特於分類問題,求解極易,卽於雜題之下當亦不見其難也.爲複習計,茲再述其通則如下:

第一步. 先察各項中如有共同單項因子,取

出單項因子,同時便得一多項因子.

第二步. 次察此所得多項因子屬於下列何類,即依該類之法分解之.

(1) x^2-y^2.　　(2) $^3\pm y^3$.

(3) $^2\pm 2xy+y^2$.　　(4) $x^3\pm 3x^2y+3xy^2\pm y^3$.

(5) x^2+px+q.　　(6) ax^2+bx+c.

(7) $x^2+y^2+z^2+2xy+2yz+2xz$.

(8) $x^3+y^3+z^3-3xyz$.

(9) 能用配方法者.

(10) 對稱式.

第三步. 如不屬上列九種之一,試用分組分解法.

第四步. 直接分組有困難時,即試用因子定理.

第五步. 分得之因子,如仍有因子可分,再仿第二步,第三步,第四步繼續分解,直至分得之因子皆爲質因子而止.

習題十一(雜題)

分解下列各式之因子:—

1. $32n^3+48n^2-28n^4$.　　2. $a^3+a+b+a^2b$.

3. $a^5+a-a^3-1.$ 4. $x^4-9x^2-x+3.$

5. $3a^5+192ab^4.$ 6. $a^4-a^2+a+1.$

7. $1+x^6-x-x^7.$ 8. $192+3c^5.$ $3(4+c^5)$ $3(c^5+2^5)$

9. $x^3-6x^2y+12xy^2-7y^3$ 10. $x^3+3x+4.$ $(x+1)(x^2-$

11. $x^3+xy^2+2y^3.$ 12. $x^7\pm y^7.$

$(x+1)(x+2)$ 13. $2x^4+7x^3+10x^2+11x+6.$ 14. $2x^4+x-34.$

$(2x^2+x+3)$ 15. $81x^4-9x^2-12.$ $(3x-2)(3x+2)(3x^2+1)$ 16. $12x^3-11x-24.$

17. $4a^2-a^4+81+10a^2x-36a-25x^2.$

18. $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{9}+\frac{z^2}{25}-\frac{xy}{3}-\frac{xz}{5}+\frac{yz}{15}.$

19. $a^3+b^3+3a^2+12b^2+3a+48b+65.$

20. $a^3+a^2+6a^2b+ab+12ab^2-2b^2+8b^3.$

21. $x^3+8y^3+27z^3-18xyz.$

22. $x^3-64y^3-8-24xy.$

23. $x^3(y-z)+y^3(z-x)+z^3(x-y).$

24. $(x+y+z)^3-(x^3+y^3+z^3).$

25. $(x+y)^5-x^5-y^5.$

26. $(a+b)(b+c)(c+a)+abc.$

∵ $f(x)$之各項係數之代數和不為0
∴ $f(x)$沒有一個因子是$x-1$
設$\alpha x-\beta$為$f(x)$之一因式(α為2之因子，β為6之因子)
則 $\alpha=\pm1, \pm2$；$\beta=\pm1, \pm2, \pm3, \pm6$
∵ $\alpha x-\beta$為一因式 ∴ $(x-\frac{\beta}{\alpha})$亦為一因式
$\beta/\alpha=-1, -2, -3, -6, -\frac{1}{2}, -\frac{3}{2}$

第四章

公因式 公倍式

§19* **引論.** 下列諸端,學者在初中代數均已學過,能舉例詳釋其意義否?

(1) 何謂公因式?

(2) 何謂公倍式?

(3) 何謂最高公因式H.C.F.?

(4) 何謂最低公倍式L.C.M.?

(5) 公因式有最低者否?

(6) 公倍式有最高者否?

(7) 在算術上最大公約,最小公倍各有何用?對於分式之計算有何關係?

§20* **H.C.F.求法之一.** 當一式(或諸式)易於分解因子時,諸式之最高公因式H.C.F.如何求法,學者已於初中學過,能用自己語言重述其規

則否?參看下例:

〔例〕 求 $6x^2-3xy-3y^2$, $4x^4-5x^2y^2+y^4$ 之 H. C. F.

〔解〕 (1) $6x^2-3xy-3y^2=3(2x^2-xy-y^2)$

$$=3(2x+y)(x-y)$$

(2) $4ax^4-5ax^2y^2+ay^4=a(4x^2-y^2)(x^2-y^2)$

$$=a(2x+y)(2x-y)(x+y)(x-y)$$

$\therefore$ H. C. F. $=(2x+y)(x-y)$.

§21* L. C. M. 求法之一. 當諸式容易分解因子時,諸式之最低公倍式 L. C. M. 如何求法,學者亦於初中學過,參考下例,試用自己語言重述其規則.

〔例一〕 求 x^2-y^2, $2x^2-xy-y^2$, $x^3-3x^2y+3xy^2-y^3$ 之 L. C. M.

〔解〕

$$x^2-y^2=(x-y)(x+y)$$

$$2x^2-xy-y^2=(x-y)(2x+y)$$

$$x^3-3x^2y+3xy-y^3=(x-y)^3$$

$\therefore$ L. C. M. $=(x-y)^3(x+y)(2x+y)$.

〔例二〕 求 $a^2+ab-6b^2$, $2a^2-5ab+2b^2$, $3a^2+10ab+3b^2$ 之 L. C. M.

〔解〕 (1) $a^2+ab-6b^2=(a+3b)(a-2b)$.

(2) $2a^2-5ab+2b^2=(2a-b)(a-2b)$.

(3) $3a^2+10ab+3b^2=(3a+b)(a+3b)$.

$\therefore$ L. C. M. $=(a+3b)(a-2b)(2a-b)(3a+b)$.

習題十二

1. 有三個以上之代數式,其中若有一式容易分解因子,而其他諸式不易分解因子時,欲求諸式之 H. C. F. 有無通法?欲求諸式之 L. C. M. 有無通法?困難何在?

例如求 x^2-1, x^4+x+3, x^4+x^2+8 之 H. C. F. 及 L. C. M. 何者較難?其故何在?

2. 試求以下各組整式之 H. C. F. 及 L. C. M.

(a) $x+y$, x^3+y^3, x^4-y^4.

(b) $a^2-4ab+4b^2$, a^3-8b^3, a^4-16b^4.

(c) $8a^3-1$, $8a^2+4a+2$, $16a^4+4a^2+1$.

(d) x^3-x, x^4-7x^2+6, $x^4-3x^3+5x^2+3x-6$.

(e) $1-a$, $a-1$, a^2-1, $1-a^4$, a^8-1.

(f) $a^2+b^2-c^2+2ab$, $a^2-b^2-c^2-2bc$, $c^2-a^2-b^2+2ab$.

(g) x^5+x^4+4x+4, x^3+2x^2+2x, x^3+3x^2+4x+2.

(h) $6x^2+13x+6$, $42x^2-85x+42$, $14x^2+9x-18$.

(i) x^3+2x-3, x^3+4x^2-5, $2x^3+5x-7$.

若一 A,B之公因式即MA+NB與A之公因式
若二 { MA+NA與A之公因式即A,B之公因式
非A,B之公式即非MA+NB與A之公因式

(j) $x^5+y^5,\ x^3+y^3,\ x^4+x^2y+xy^2-y^4.$

(k) $x^3-5x^2+6x-2,\ 3x^3+2x-5,\ 3x^3-7x+4.$

§22. H.C.F.求法之二. 前於§21所述H.C.F之求法,其手續雖簡,但只能適用於因子容易分解之時,非通法也.其較有普遍性者則有下法:

〔方法〕 當A,B兩式之H.C.F.不易直接求得時,可求$MA+NB$與A兩式(或$MA+NB$與B)之H.C.F.所得結果卽為A,B二式之H.C.F.(M與B無公因子,N與A無公因子.)

〔證〕 第一層: 若A,B有公因式k,則$A=ak$, $B=bk$,依等量公理,應得

$$MA+NB=Mak+Nbk=k(Ma+Nb).$$

卽"凡為A,B之公因式者,仍為$A,MA+NB$(或$B,MA+NB$)之公因式."

第二層: 若A,B二式無公因式,則$A=ak,B=bk$, (a與b,h無公因子,k與b,h亦無公因子)依等量公理,應得

$$MA+NB=Mak+Nbh\neq k(\qquad)\neq h(\qquad)$$

卽"凡非A,B之公因式者,仍非$A,MA+NB$(或$B,$

設A為B則C為D 　　　是四定理
∴C為D則A為B
∴A不為B則C不為D
設C不為D則A不為B

=ka B=kb. MA+NB=Mka+Nkb A,B之任何公因式K

為A,B,之任一公因式 ∴A=ka B=kb MA+NB

=Mka+Nkb=K(Ma+Nb) 即K為MA+NB之一因式

∴A,B之公因式即為MA+NB之公因式

MA+NB=MKa+NKb

$MA+NB$)之公因式."

綜上兩層觀之,可見$A, MA+NB$之H.C.F.即為A, B之H.C.F.(因由第一層,前者之H.C.F.不低於後者之H.C.F.;由第二層,前者之H.C.F.亦不高於後者之H.C.F.也.)

〔例一〕 求$3x^4+4x-10$, $2x^4-5x^3+2$之H.C.F. 沒有公因式

〔解法〕 本題$A=3x^4+4x-10$, $B=2x^4-5x^3+2$. 取$M=2$, $N=-3$,則A, B二式之最高次項可以消去,而得一較低之三次式,易於求解其因子矣.今

$$2(3x^4+4x-10)-3(2x^4-5x^3+2)=15x^3+8x-26.$$

用因子定理,求得此式不可再分為因子.又以此式除A式,不能整除,故此式與A無公因式,故A, B亦無公因式.

〔例二〕 求$x^4+x^3+2x^2+x+1$, $x^4-2x^3-x^2-2x+1$, $2x^4+2x^3+3x^2+x+1$之H.C.F.

〔解法〕 本題,$A=x^4+x^3+2x^2+x+1$. $B=x^4-2x^3-x^2-2x+1$, $C=2x^4+2x^3+3x^2+x+1$.

先求A, C之H.C.F.如下:

$2A-C=x^2+x+1$,此式不可再分為因子.

K不能除盡b 因為能除盡b 即能除盡B,而A,B之公因式 但此假設矛盾 故K不能除盡b

但此式能整除A式,故此式卽爲A, C之H. C. F.

又此式亦能整除B式,故亦爲B式之因子.

$\therefore\ x^2+x+1$卽爲A, B, C之H. C. F.

§23. H. C. F. 求法之三. 上節所述求H. C. F.之法,適用範圍雖較§20所述者爲廣,然諸式各在五次以上時,往往應付亦窮,故仍非通法.通法如何?卽下面所述的輾轉相除法是也.

〔方法〕 設A, B各爲x之多項式,並設A, B無公共單因子.欲求A, B之H. C. F.可如下行之:

(1) 先以次數較低之A式除B式得餘式R_1.

(2) 次以R_1除A,得餘式R_2.

(3) 再以R_2除R_1,得餘式R_3.

(4) 再以R_3除R_2,得餘式R_4.

(5) 如此繼續進行,直至最後餘數R_n不含x爲止.

(a) 若R_n爲零,則R_{n-1}爲A, B之H. C. F.

(b) 反之,若R_n不爲零,則A, B無公因式.

〔證〕 先將上法列成算式(爲簡便計,假定R_4不含x)如下:

A 則 B
B ∴ A
不 A 則 不 B
B ∴ 不 A

$$
\begin{array}{l}
A)\ B\ \underline{|Q_1} \\
\quad AQ_1 \\
\hline
\quad R_1)\ A\ \underline{|Q_2} \\
\qquad R_1Q_2 \\
\hline
\qquad R_2)\ R_1\ \underline{|Q_3} \\
\qquad\quad R_2Q_3 \\
\hline
\qquad\quad R_3)\ R_2\ \underline{|Q_4} \\
\qquad\qquad Q_4R_3 \\
\hline
\qquad\qquad R_4
\end{array}
$$

因 $R_1=B-Q_1A$, 故 R_1, A 之 H. C. F. 卽爲 A, B 之 H. C. F. (§ 22)

因 $R_2=A-Q_2R_1$, 故 R_2, R_1 之 H. C. F. 卽爲 R_1, A 之 H. C. F. (§ 22)

因 $R_3=R_1-Q_3R_2$, 故 R_3, R_2 之 H. C. F. 卽爲 R_2, R_1 之 H. C. F. (§ 22)

∴ R_3, R_2 之 H. C. F. 卽爲 A. B 之 H. C. F.

(a) 若 $R_4=0$, 則 R_3, R_2 之 H. C. F. 顯然爲 R_3. 故 A, B 之 H. C. F. 爲 R_3.

(b) 反之, 若 $R_4\neq 0$, 則 R_3, R_2 顯然無公因子, 故 A, B 亦無公因子.

〔例一〕 求 x^3+2x-3, x^3-1 之 H. C. F.

〔解〕 依上法輾轉相除如下式:

```
1+0+0-2)1+0+0-1|1
        1+1+0-2
        ─────────
        -1+0+1)1+1+0-2|-1-1
               1+0-1
               ───────
               1+1-2
               1+0-1
               ───────
                 1-1)-1+0+1|-1-1
                     -1+1
                     ─────
                      -1+1
                      -1+1
                      ─────
                         0
```

$\therefore$ H. C. F. $=x-1$.

〔例二〕 求 $2x^4+4x^2-6x$, $6ax^3-6a$ 之 H. C. F.

〔解〕 先將各式分出單項因子如下:

$$2x^4+4x^2-6x=2x(x^3+2x-3)$$

$$6ax^3-6a=6a(x^3-1).$$

再仿上例,用輾轉相除法求得 x^3-1, x^2+2x-3 之 H. C. F. 爲 $x-1$.

故所求之 H. C. F. $=2(x-1)=2x-2$.

〔例三〕 求 $A=x^3-2x^2-2x-3$, $B=2x^3+x^2+x-1$ 之 H. C. F.

〔解〕 仿上法演之如下:

```
1-2-2-3)2+1+1-1|2
        2-4-4-6
        ─────────
          5+5+5)1-2-2-3|
```

在此一步除算中,若直接以 $5x^2+5x+5$ 除 A

式,其商式必得分數,為避免分數計,乃以5先除 $5x^2+5x+5$,如此並不影響 A,B 之 H.C.F.因5原非 A,B 之公因子也.由是乃績得下式:

$$\begin{array}{r|r|r|l}
5 & 5+5+5 & 1-2-2-3 & 1-3 \\
\cline{4-4}
 & 1+1+1 & 1+1+1 & \\
\cline{3-3}
 & & -3-3-3 & \\
 & & -3-3-3 & \\
\cline{3-3}
 & & 0 &
\end{array}$$

故所求之 H.C.F.$=x^2+x+1$.

〔例四〕 求 $A=4x^3+2x^2+x-7$, $B=4x^4+3x^3+2x^2+4x-13$ 之 H.C.F.

〔解〕
$$\begin{array}{r}
4+2+1-7)\,4+3+2+4-13\,\underline{|\,1\quad} \\
4+2+1-7\qquad \\
\hline
1+1+11-13
\end{array}$$

在此一步除算中,若直接以 A 式除 $x^3+x^2+11x-13$ 其商亦將為分數為避免分數計,乃以4先乘 $x^3+x^2+11x-13$.如此並不影響 A,B 之 H.C.F.因4非 A 式之因子,故以4乘 $x^3+x^2+11x-13$,不致改變 A 與 $x^3+x^2+11x-13$ 之 H.C.F.即不致改變 A,B 之 H.C.F.也,由是乃得全部算式如下:

求三个代数式之H.C.F时可先求A.B之H.C.F（设为M）然後求M与C之H.C.F 此最後所求得之H.C.F即为A.B C之H.C.F

证 因A B之H.C.F为M 故除M外無一式能同时整除A.及B 故C之因式雖不少若全包括M内并以其不能同时整除A.B当不视为A B之公因式 又M…之…因上式…不少…整除C, 能C者始能同时整除A,B. 故M与C之公因式能同时整除A B,C 此外無一式能同时整除A.B. C 故M. C之H. C. F即为A, B C之H. C. F

```
4+2+1-7)4+3+2+4-13|1+1
        4+2+1-7
        |1+1+11-13
        |4
        4+4+44-52
        4+2+ 1- 7
     2+43-45)4+2+1-7|2-42
             4+86-90
              -84+91-7
              -84-1806+1890
            1897 |1897-1897
                    1-1)2+43-45|2+45
                        2-2
                          45-45
                          45-45
                              0
```

故 A, B 之 H. C. F. $= x-1$.

〔例五〕 求 $A=3x^3-x^2-12x+4$, $B=x^3-2x^2-5x+6$, $C=7x^3+19x^2+8x-4$ 之 H. C. F.

〔提示〕 先用輾轉相除求 A, B 兩式之 H. C. F. 得 M 式.

再用上法求 M, C 之 H. C. F., 所得結果即為 A, B, C 三式之 H. C. F.

習題十三

1. 說明例五之理.

試求下列各題之 H. C. F.

2. $a^4+a^3+2a^2+a+1$, $a^5+2a^3+a^2+a+1$.

3. $x^5+x^3y^2-2x^2y^3$, $x^5y+3x^4y^2-x^3y^3-2x^2y^4$.

$L.C.M = \frac{A \cdot B}{H.C.F}$

4. $x^4+2x^2y^2+xy^3+2y^4$, $x^4-x^3y+x^2y^2+2y^4$.

5. $m^5+3m^3+m^2+2m+2$, $4m^5+9m^3+5m^2+2m+10$.

6. $x^3+3x^2-8x-24$, x^3+3x^2-3x-9.

7. $2x^3+4x^2-7x-14$, $6x^3-10x^2-21x+35$.

8. $4a^5+14a^4+20a^3+70a^2$, $8a^7+28a^6-8a^5-12a^4+56a^3$.

9. $1+p+p^3-p^5$, $1-p^4-p^5+p^7$.

10. $x^3+ax^2-3x-3a$, x^3-x^2-3x+3, x^3+x^2-3x-3.

§24. L.C.M 求法之二. 當 A, B 二式不易分解因子時,欲求 A, B 之 L.C.M.,須用下之定理.

定理. A, B 之 H.C.F. 與 A, B 之 L.C.M. 二者相乘之積等於 A, B 之積.

〔證〕 設 A, B 之 H.C.F. 爲 k, A, B 之 L.C.M. 爲 m, 則應有下列三式: $A=ak$, $B=bk$, $m=abk$.

依等量公理,得

$$AB=ak\cdot bk=(abk)k=mk.$$

卽"A, B 之積等於其 H.C.F. 與 L.C.M. 之積"也.

推論. A, B 之 L.C.M. $=\dfrac{A}{A, B\text{ 之 H.C.F.}}\times B$.

故欲求 A, B 之 L.C.M. 可先求 A, B 之 H.C.F.(用前二節之法),再以此 H.C.F. 除 A, B 卽得.

〔例一〕 求 x^5+2x-3, x^3-1 之 L.C.M.

〔解〕 用輾轉相除法求得此二式之H. C. F. 爲 $x-1$，故其最低公倍式爲

$$\text{L. C. M.}=\frac{x^3+2x-3}{x-1}(x^3-1)=(x^2+x+3)(x^3-1)$$

$$=x^5+x^4+3x^3-x^2-x-3.$$

〔例二〕 有 $A, B, C,$ 三式　$A=x^4+2x^2+x+2,$

$$B=x^4+2x^3+5x^2+4x+3,\ C=x^4+3x^2+2x+3,$$

求 A, B, C 的 L. C. M.

〔解〕 仿上例，先求得 A, B 的 L. C. M. 爲

$$D=\frac{x^4+2x^2+x+2}{x^2+x+1}(x^4+2x^3+5x^2+4x+3)$$

$$=(x^2-x+2)(x^4+2x^3+5x^2+4x+3).$$

次求得 C, D 的 L. C. M. 爲

$$\frac{(x^2-x+2)(x^4+2x^3+5x^2+4x+3)}{x^2+x+1}(x^4+3x^2+2x+3)$$

$$=(x^2-x+2)(x^2+x+3)(x^4+3x^2+2x+3)$$

亦卽爲 A, B, C 的 L. C. M.

習題十四

1. 設 $A=ahls$ (a, b, c; h, l; h, m; l, m; 無公因子).

$B=bhms$

$C=clms$

则　(1)　A, B, C 之 H. C. F. =?

(2)　A, B, C 之 L. C. M. =?

(3)　A, B, C 之 H. C. F $\times A, B, C$ 之 L. C. M. $= A, B, C$ 否? 不相等

H.C.F.=H　L.C.M.=abcH

然則欲求 A, B, C 之 L. C. M. 可否先求 A, B, C 之 H. C. F? 可以,

2. 欲求 A, B, C 三式之 L. C. M. 可先求 A, B 之 L. C. M. 得 D 式,再求 C, D 兩式之 L. C. M., 所得結果即爲 A, B, C 三式之 L. C. M., 試證其理.

3. 試求習題十三 2—10 各題之 L.C.M.

第五章

分式 H.C.F.及L.C.M.之應用

§25* 引論. 下列諸端,學者皆已學過,能舉例詳釋其意義否?

(1) 何謂分式?分子,分母?

(2) 分式記法.

(3) 分式與除法之關係.

(4) 分式之需要.

(5) 分式問題之分類.(通分,約分,四則.)

§26* 分式符號之變化. 依正負數除法定則,如下之關係:

$$\frac{A}{B}=\frac{-A}{-B}=-\frac{A}{-B}=-\frac{-A}{B}$$

據此關係,在通分,加減等運算中,往往可將演算手續,變至甚簡,學者於以下幾節內,當見此理

之效用,今玆所應注意者,分式中分子分母須如何變號方不致影響分式之值耳.

〔例一〕 $\dfrac{x-y}{a-b}=\dfrac{-x-y}{-a-b}=-\dfrac{-x-y}{a-b}=-\dfrac{x-y}{-a-b}$. 對否? 对

〔例二〕 $\dfrac{x-y}{a-b}=\dfrac{-x+y}{-a+b}=-\dfrac{-x+y}{a-b}=-\dfrac{x-y}{-a+b}$. 對否? 不对

§27* 分式變形之原理. 關於分式之種種演算,大都基於下之原理:—

$$\frac{mA}{mB}=\frac{A}{B}\cdots\cdots(1)\qquad\qquad \frac{A}{B}=\frac{mA}{mB}\cdots\cdots(2)$$

卽謂"分式中分子分母儘可乘以(或除以)非零之同數,決不影響分式之結果."證之如下:—

設 $\dfrac{A}{B}=x.$

依除法應得 $A=Bx.$

依等量公理 $mA=mBx.$

又依除法得 $\dfrac{mA}{mB}=x.$

又依等量公理得 $\dfrac{mA}{mB}=\dfrac{A}{B}.$ (1)

亦卽 $\dfrac{A}{B}=\dfrac{mA}{mB}.$ (2)

〔例一〕 $$\frac{x^2-y^2}{x^2+2xy+y^2}=\frac{(x-y)\cancel{(x+y)}}{(x+y)\cancel{(x+y)}}=\frac{x-y}{x+y}.$$

〔例二〕 $$\frac{1}{x^2-xy+y^2}=\frac{x+y}{(x+y)(x^2-xy+y^2)}=\frac{x+y}{x^3+y^3}.$$

〔例三〕 $$\frac{(x-y)(x+y)}{(x-y)(2x+y)+z}=\frac{x+y}{2x+y+z}.$$ 對否? 不对 不能相消,

§28* 約分. 依前節公式(I),可見分子分母如有相同因子,便可相消,而不變分式之結果,由此乃得約分之規則如下:—

先求分子分母之H.C.F.變原分式$\frac{A}{B}$為$\frac{A'\times \mathrm{H.C.F.}}{B'\times \mathrm{H.C.F.}}$次,消H.C.F.得$\frac{A'}{B'}$.即為所求之最簡分式(分子分母次數最低).如此,由$\frac{A}{B}$化為$\frac{A'}{B'}$之手續名曰約分.

〔例一〕 $$\frac{a^3-b^3}{2a^4+2a^3b-a^2b^2-3ab^3-3b^4}$$

$$=\frac{(a-b)\cancel{(a^2+ab+b^2)}}{(2a^2-3b^2)\cancel{(a^2+ab+b^2)}}=\frac{a-b}{2a^2-3b^2}.$$

〔例二〕 $$\frac{x^4-16}{x^4-x^3-2x^2-4x-24}=\frac{(x^2+4)(x^2-4)}{(x^2+4)(x^2-x-6)}$$

$$=\frac{(x^4-16)\div(x^3+2x^2+4x+8)}{(x^4-x^3-2x^2-4x-24)\div(x^3+2x^2+4x+8)}=\frac{x^2-4}{x^2-x-6}.$$

$$=\frac{x-2}{x-3}$$

約分手續已完全否? 不完全

〔例三〕 $\dfrac{(x-y)(x+y)+2(a-b)}{(x+y)(x^2+y^2)+m(a-b)}=\dfrac{x-y+2}{x^2+y^2+m}$.

對否? 不对

§29* 通分. 在分式加減法中,有時須將幾個分母不同之分數,化爲分母相同之分數而不變各個分式之值.此類手續名曰通分,通分之原理基於§19公式(2),依此原理乃得通分之手續如下:

先求諸分母之L. C. M. 次於各分式中,各以適當之數同乘分子分母,使各分式之新分母皆爲諸分母之L. C. M.

第一步先求分母的L.C.M

第二步依次以各分式之分母除L.C.M.

第三步依次以各分式之分子乘第二步所得之結果即為通分後各分式之新分子.

〔例〕 試將 $\dfrac{1}{x^2-y^2}, \dfrac{3x-y}{y^2-x^2}, \dfrac{1}{2x^2-xy-y^2}$ 通分.

〔解〕 諸分母之L. C. M. $=(x-y)(x+y)(2x+y)$.

$$\frac{1}{x^2-y^2}=\frac{1}{(x+y)(x-y)}=\frac{2x+y}{(x+y)(x-y)(2x+y)}$$

$$\frac{3x-y}{y^2-x^2}=\frac{3x-y}{(y+x)(y-x)}=\frac{y-3x}{(x+y)(x-y)}$$

$$=\frac{(y-3x)(2x+y)}{(x+y)(x-y)(2x+y)}.$$

$$\frac{1}{2x^2-xy-y^2}=\frac{1}{(2x+y)(x-y)}=\frac{x+y}{(x+y)(2x+y)(x-y)}.$$

第四步以L.C.M.分除以上所得之結果即化為同分母之分式

〔注意〕第二分式中分子分母之符號何故須先加改變?

習題十五

1. 補足下列諸等式:—

(a) $\dfrac{m}{(a-b)^3}=\dfrac{?}{(b-a)^3}=\dfrac{?}{-(b-a)^3}=-\dfrac{?}{(b-a)^3}=-\dfrac{?}{-(b-a)^3}.$

(b) $\dfrac{m}{(a-b)^4}=\dfrac{?}{(b-a)^4}=\dfrac{?}{-(b-a)^4}=-\dfrac{?}{(b-a)^4}=-\dfrac{?}{-(b-a)^4}.$

(c) $-\dfrac{a-b}{x-y}=-\dfrac{?}{y-x}=\dfrac{?}{x-y}=\dfrac{?}{y-x}=\dfrac{-a+b}{?}.$

(d) $-\dfrac{a-b}{(x-y)^2}=-\dfrac{?}{(y-x)^2}=\dfrac{?}{(x-y)^2}=\dfrac{?}{(y-x)^2}=\dfrac{-a+b}{?^2}.$

2. 試將以下諸分式約至最簡:—

(a) $\dfrac{x^3+y^3}{x^4+x^2y^2+y^4}$　(b) $\dfrac{x^5+3x^3+x^2+3}{x^5+x^4+x^3+x^2+x+1}.$

(c) $\dfrac{3x^3+x^2+4x-4}{9x^3-9x^2+5x-2}$　(d) $\dfrac{a^5-a^4+2a^3+1}{a^5-a^4+3a^3-a+a+1}.$

3. 試將下列各組分式通分使有最低之公分母.

(a) $\dfrac{1}{x^2-4y^2},\ \dfrac{b}{4y^2-x^2},\ \dfrac{3x-y}{2x^2-5xy+2y^2}.$

(b) $\dfrac{2y-x}{2a^2-5ab+b^2},\ \dfrac{x+y}{b^2-4ab+a^2},\ \dfrac{3x-2y}{-a^2+4ab-b^2}.$

(c) $\dfrac{p^4+p^2q^2+q^4}{p^3+q^3},\ \dfrac{p^4+p^2q^2+q^4}{p^3-q^3},\ \dfrac{2p^3+p^2q+pq^2-q^3}{p^3-p^2q-pq^2-2q^3}.$

(d) $\dfrac{1}{a^2-(b-c)^2},\ \dfrac{1}{b^2-(a-c)^2},\ \dfrac{1}{c^2-(b-a)^2}.$

§30. 分式加減法. (a) 同分母者：由除法分配定則，得
$$\frac{A+B-C}{D}=\frac{A}{D}+\frac{B}{D}-\frac{C}{D}$$

今逆其次序，應得 $\frac{A}{D}+\frac{B}{D}-\frac{C}{D}=\frac{A+B-C}{D}$

即謂"同分母之諸分式相加減，即將諸分式之分子依其原有之符號相加減，以其結果作為所求分式之分子，而以原有分母作所求分式之分母."

(b) 異分母者：用通分法先將諸公式化為同分母之分式，再依上法加減之.

〔例一〕
$$\frac{x^2}{x^3+y^3}-\frac{xy}{x^3+y^3}+\frac{y^2}{x^3+y^3}=\frac{x^2-xy+y^2}{x^3+y^3}$$
$$=\frac{1}{x+y}.$$

〔例二〕
$$\frac{x-y}{x^3+x^2y+xy^2+y^3}+\frac{x+y}{x^3-x^2y+xy^2-y^3}$$
$$=\frac{x-y}{(x+y)(x^2+y^2)}+\frac{x+y}{(x-y)(x^2+y^2)}$$
$$=\frac{(x-y)^2+(x+y)^2}{(x+y)(x-y)(x^2+y^2)}=\frac{2(x^2+y^2)}{(x^2-y^2)(x^2+y^2)}$$
$$=\frac{2}{x^2-y^2}.$$

〔例三〕 $\dfrac{1}{(a-b)(b-c)}+\dfrac{1}{(b-c)(a-c)}+\dfrac{1}{(c-a)(b-a)}$

$$=\frac{1}{(a-b)(b-c)}-\frac{1}{(b-c)(c-a)}-\frac{1}{(c-a)(a-b)}$$

$$=\frac{(c-a)-(a-b)-(b-c)}{(a-b)(b-c)(c-a)}=\frac{2(c-a)}{(a-b)(b-c)(c-a)}$$

c − a + b − b + c

$$=\frac{2}{(a-b)(b-c)}.$$

〔注意〕 在本例解法中,第二分式,第三分式變號之作用何在?

§31* **分式乘法.** 兩分式 $\frac{A}{B}, \frac{C}{D}$ 相乘即將 A, C 相乘作爲積之分子;B, D 相乘作爲積之分母. 即

$$\frac{A}{B}\times\frac{C}{D}=\frac{AC}{BD}.$$

〔證〕 設 $\frac{A}{B}=x,\qquad \frac{C}{D}=y.$

依除法之理,得 $A=Bx,\qquad C=Dy.$

依等量公理,得 $AC=Bx\cdot Dy=BD\cdot xy.$

又依除法之理,得 $xy=\frac{AC}{BD}$. 是即所欲證.

〔例一〕 $\dfrac{x^3+y^3}{x^4+x^2y^2+y^4}\cdot\dfrac{x^3-y^3}{x^2-2xy-3y^2}$

$(x^2+xy+y^2)(x^2-xy+y^2)$

$$=\frac{\cancel{(x+y)}\cancel{(x^2-xy+y^2)}(x-y)\cancel{(x^2+xy+y^2)}}{\cancel{(x^2+xy+y^2)}\cancel{(x^2-xy+y^2)}(x-3y)\cancel{(x+y)}}$$

$$=\frac{x-y}{x-3y}.$$

$$=\frac{y^2}{y^2}+\frac{xy}{y^2}+\frac{x^2}{y^2}=\frac{y^2+xy+x^2}{y^2}$$

〔例二〕 $\left(1+\dfrac{x}{y}+\dfrac{x^2}{y^2}\right)\left(\dfrac{1}{x-y}-\dfrac{x-y}{x^2+xy+y^2}\right)$

$$=\frac{\cancel{x^2+xy+y^2}}{y^2}\cdot\frac{x^2+xy+y^2-(x-y)^2}{(x-y)\cancel{(x^2+xy+y^2)}}$$

$$=\frac{3xy}{y^2(x-y)}=\frac{3x}{y(x-y)}.$$

§ 32* **分式除法.** (a) 第一法. 兩分式相除,就原理說,亦可"以除式之分子除被除式之分子,作爲商之分子,以除式之分母除被除式之分母,作爲商之分母"證之如下:

〔證〕 設 $\qquad \dfrac{A}{B}=x, \qquad \dfrac{C}{D}=y.$

依分式定義 $\qquad A=Bx, \qquad C=Dy.$

依等量公理 $\qquad \dfrac{A}{C}=\dfrac{Bx}{Dy}=\dfrac{B}{D}\cdot\dfrac{x}{y}.$

依除法定義 $\qquad \dfrac{A}{C}\div\dfrac{B}{D}=\dfrac{x}{y}.$

即 $\qquad \dfrac{A}{C}\div\dfrac{B}{D}=\dfrac{A}{B}\Big/\dfrac{C}{D}.$

〔例〕 $$\frac{x^2-9y^2}{x^2-25y^2}\div\frac{x+3y}{x+5y}=\frac{\cancel{(x+3y)}(x-3y)}{\cancel{(x+5y)}(x-5y)}\div\frac{\cancel{x+3y}}{\cancel{x+5y}}$$

$$=\frac{x-3y}{x-5y}.$$

(b) 第二法. 但爲手續便利計,有時可"將除式之分子分母顚倒之,以與被除式相乘."其理何在? 學者試自證之.

〔例〕 $$\frac{a^2-(b-c)^2}{c^2-(a-b)^2}\div\frac{b^2-(c-a)^2}{(b+c)^2-a^2}=\frac{(a+b-c)(a-b+c)}{(c+a-b)(c-a+b)}$$

$$\times\frac{(b+c+a)\cancel{(b+c-a)}}{\cancel{(b+c-a)}(b-c+a)}=\frac{b+c+a}{b+c-a}.$$

習題十六

1. 試將下列各式化爲整式與分式之和:—

(a) $\frac{x^3+3x^2+5x+6}{x+2}$. ($b$) $\frac{x^5+y^5}{x-y}$.

(c) $\frac{x^4+16y^4}{x+2y}$. (d) $\frac{16y^4+x^4}{2y+x}$.

2. 化簡下列諸式:—

(a) $\frac{1}{x+2}+\frac{1}{x+3}+\frac{1}{x-2}+\frac{1}{x-3}$.

(b) $\frac{1}{(a-b)(a-c)}+\frac{1}{(b-a)(b-c)}+\frac{1}{(c-a)(c-b)}$.

(c) $\frac{x^3+x^2y}{x^4+xy^3+x^3y+y^4}-\frac{x^2y-xy^2}{x^4-x^3y+xy^3-y^4}\div\frac{y^2}{x^3+y^3}$.

-3 $\quad -6$ $\quad -3$

$-\frac{-6}{+3}$ $\quad -\frac{-3}{-3}$ $\quad -\frac{+6}{-9}$ $\quad -\frac{-3}{3}$

(d) $\dfrac{x+2}{2x^3+5x^2-x+4}-\dfrac{x-1}{2x^3+7x^2+2x-8}$.

(e) $\dfrac{1}{x^4+4}+\dfrac{1}{x^4+4x^3+4x^2-4}+\dfrac{1}{x^4-4x^2+8x-4}$.

(f) $\dfrac{4x^2-9y^2}{25x^2-16y^2}\cdot\dfrac{5x^2+xy-4y^2}{2x^2+5xy+3y^2}\cdot\dfrac{5x^2-xy-4y^2}{2x^2-5xy+3y^2}$.

(g) $\dfrac{x^4-x^2+3x^2-2x-1}{x^3-4x^2-3}\cdot\dfrac{x^4+3x^2+9}{x^4+2x^3+3x^2+7x+2}\cdot\dfrac{x+2}{ax^2+3ax+a}$.

(h) $\dfrac{1}{x^2-(a+b)x+ab}\div\dfrac{1}{x^2-(b+c)x+bc}\cdot\dfrac{x^2-b^2}{x^2-c^2}$.

(i) $\dfrac{m^8-n^8}{x^{12}-b^{12}}\div\dfrac{m^4+n^4}{x^6+y^6}\div\dfrac{m^2+n^2}{x^3+y^3}\div\dfrac{m+n}{x+y}$.

(j) $\left(1+\dfrac{x^3}{y^3}\right)\div\left(1+\dfrac{x}{y}+\dfrac{x^2}{y^2}\right)\div\left(1-\dfrac{x}{y}+\dfrac{x^2}{y^2}\right)\times\left(1-\dfrac{x^3}{y^3}\right)$.

(k) $(x^4+4x^2+16)\div\left(x^2+2x+4+\dfrac{16}{x-2}\right)\div\left(x^2-2x+4-\dfrac{16}{x+2}\right)$.

8. 利用對稱式求和:—

(a) $\dfrac{y+z}{(x-y)(x-z)}+\dfrac{z+x}{(y-z)(y-x)}+\dfrac{x+y}{(z-x)(z-y)}$.

(b) $\dfrac{a+b-c}{(a-b)(a-c)}+\dfrac{b+c-a}{(b-c)(b-a)}+\dfrac{c+a-b}{(c-a)(c-b)}$.

(c) $\dfrac{b+c}{(a-b)(a-c)}+\dfrac{c+a}{(b-c)(b-a)}+\dfrac{a+b}{(c-a)(c-b)}$.

(d) $\dfrac{x^2-yz}{(x+y)(x+z)}+\dfrac{y^2-xz}{(y+x)(y+z)}+\dfrac{z^2-xy}{(z+x)(z+y)}$.

(e) $\dfrac{x^3}{(x-y)(x-z)}+\dfrac{y^3}{(y-z)(y-x)}+\dfrac{z^3}{(z-x)(z-y)}$.

§33* 疊分式之化簡. 分式中,分母分子不盡爲整式者名曰疊分式.疊分式者,實即分式除法

所得之商也.故疊分式化簡之法,可依分式除法演之,惟為手續簡便計,最好應用下法:—

在疊分式之分子分母中,求出所有各項之最小公分母(卽各項分母之L.C.M.).以此公分母遍乘疊分式之分子分母各項,而化簡其結果.

〔例〕
$$\frac{\dfrac{x+y}{x-y}-\dfrac{x-y}{x+y}}{\dfrac{x^2+y^2}{x^2-y^2}-\dfrac{x^2-y^2}{x^2+y^2}}=?$$

〔解一〕 原式

$$=\frac{(x+y)^2-(x-y)^2}{x^2-y^2}\div\frac{(x^2+y^2)^2-(x^2-y^2)^2}{(x^2-y^2)(x^2+y^2)}$$

$$=\frac{4xy}{x^2-y^2}\cdot\frac{(x^2-y^2)(x^2+y^2)}{4x^2y^2}=\frac{x^2+y^2}{xy}.$$

〔解二〕 原式

$$=\frac{(x-y)(x+y)(x^2+y^2)\left[\dfrac{x+y}{x-y}-\dfrac{x-y}{x+y}\right]}{(x-y)(x+y)(x^2+y^2)\left[\dfrac{x^2+y^2}{x^2-y^2}-\dfrac{x^2-y^2}{x^2+y^2}\right]}$$

$$=\frac{(x+y)^2(x^2+y^2)-(x-y)^2(x^2+y^2)}{(x^2+y^2)^2-(x^2-y^2)^2}=\frac{4xy(x^2+y^2)}{4x^2y^2}$$

$$=\frac{x^2+y^2}{xy}.$$

§34. 連分式之化簡. 凡分式之爲 $a+\cfrac{b}{c+\cfrac{d}{l+\cdots}}$

之形者,名曰連分式. 連分式之特性甚多,此處不能詳舉.(欲知其詳,參考 Hall and Knight: Higher Algebra 第二十五,二十七兩章). 僅述此類分式之宜如何化簡.

欲將連分式化簡爲尋常最簡分式,其法亦多,但最好自最下一層分式起,依次化簡,旣省手續亦少錯誤.

〔例〕 $$\frac{1}{1-\cfrac{a^2-1}{a+\cfrac{1}{a-1}}}=\frac{1}{1-\cfrac{a^2-1}{\cfrac{a^2-a+1}{a-1}}}=\frac{1}{1-\cfrac{a^3-a}{a^2-a+1}}$$

$$=\frac{1}{\cfrac{a^2+1-a^3}{a^2-a+1}}=\frac{a^2-a+1}{-a^3+a^2+1}$$

$\dfrac{1}{\dfrac{a^2-a+1-a^3+a+a^2-1}{a^2-a+1}}$

習題十七

a^2-a+1

化簡下列各式:—

1. $\dfrac{a-2}{a-2-\cfrac{a}{a-\cfrac{a-1}{a-2}}}$

2. $\dfrac{1}{x-\cfrac{1}{x+\cfrac{1}{x}}}-\dfrac{1}{x+\cfrac{1}{x-\cfrac{1}{x}}}$

3. $\dfrac{x}{x+\dfrac{1}{x+\dfrac{1}{x+\dfrac{1}{x}}}}$ 4. $x+\dfrac{1}{x-\dfrac{1}{x+\dfrac{1}{x-\dfrac{1}{x+\dfrac{1}{x}}}}}$

5. $1-\dfrac{1}{2+\dfrac{1}{3-\dfrac{1}{4+\dfrac{1}{5}}}}$ 6. $1+\dfrac{1}{1+\dfrac{1}{2+\dfrac{1}{3+\dfrac{1}{4+\dfrac{1}{5}}}}}$

7 $\dfrac{\dfrac{m-n}{m+n}-\dfrac{m+n}{m-n}}{1-\dfrac{m^2+n^2}{(m+n)^3}}$. 8. $\dfrac{\dfrac{8xy}{x^2-y^2}}{\dfrac{x^3-y^3}{x+y}-\dfrac{x^3+y^3}{x-y}}$.

9. $\dfrac{\dfrac{b^3}{a^2-b^2}}{\dfrac{a^2-ab+b^2}{a-b}-\dfrac{a^2+ab+b^2}{a+b}}$. 10. $\dfrac{1+\dfrac{1}{y}}{\dfrac{1}{y}}\div\dfrac{\dfrac{1}{y}}{y-1+\dfrac{1}{y}}\times\dfrac{\dfrac{1}{y}}{y^2+\dfrac{1}{y}}$.

11 $\dfrac{x+\dfrac{x-y}{1+xy}}{1-\dfrac{(x-y)y}{1+xy}}-\dfrac{x-\dfrac{x-y}{1-xy}}{1-\dfrac{x(x-y)}{1-xy}}$.

12. $\dfrac{\dfrac{m}{n}+\dfrac{n}{m}-1}{\dfrac{m^2}{n^2}+\dfrac{m}{n}+1}\times\dfrac{1+\dfrac{n}{m}}{m-n}\div\dfrac{1+\dfrac{n^3}{m^3}}{\dfrac{m^2}{n}-\dfrac{n^2}{m}}$.

13. $\left(\dfrac{a+x}{a^2-ax+x^2}-\dfrac{a-x}{a^2+ax+x^2}\right)\div\left(\dfrac{a^2+x^2}{a^3-x^3}-\dfrac{a^2-x^2}{a^3+x^3}\right)$.

14. $\left(\dfrac{\dfrac{1}{a}-\dfrac{a+x}{a^2+x^2}}{\dfrac{1}{x}-\dfrac{x+a}{x^2+a^2}}+\dfrac{\dfrac{1}{a}-\dfrac{a-x}{a^2+x^2}}{\dfrac{1}{x}-\dfrac{x-a}{x^2+a^2}}\right)\div\left(\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{a}\right)$.

第六章 起

比及比例 變數法

I. 比及比例.

§35.* 引論. 下列諸端,學者在初中代數,均已學過,能詳釋其意義否?

(1) 何謂比?複比?二乘比?三乘比?

(2) 比與分數之異同.

(3) 比與除法之關係.

(4) 比之記法,比之兩項.

(5) 比例.

(6) 比例之內項外項.

(7) 兩數之比例第三項,兩數之比例中項.

(8) 三數之比例第四項.

§36 比之重要定理. 若 $\frac{a_1}{b_1}=\frac{a_2}{b_2}=\frac{a_3}{b_3}=\cdots\cdots=\frac{a_n}{b_n}$, 則

$$\frac{a_1+a_2+a_3+\cdots\cdots+a_n}{b_1+b_2+b_3+\cdots\cdots+b_n}=\frac{a_1}{b_1}=\frac{a_2}{b_2}=\cdots\cdots=\frac{a_n}{b_n}.$$

〔證〕 設以k表相等諸比之值，即

$$\frac{a_1}{b_1}=\frac{a_2}{b_2}=\frac{a_3}{b_3}=\cdots\cdots=\frac{a_n}{b_n}=k.$$

則依等量公理，得$\begin{cases}a_1=b_1k\\a_2=b_2k\\a_3=b_3k\\\cdots\cdots\cdots\\a_n=b_nk\end{cases}$

故 $$\frac{a_1+a_2+a_3+\cdots\cdots+a_n}{b_1+b_2+b_3+\cdots\cdots+b_n}=\frac{b_1k+b_2k+b_3k+\cdots\cdots+b_nk}{b_1+b_2+b_3+\cdots\cdots+b_n}$$

$$=\frac{(b_1+b_2+b_3+\cdots\cdots+b_n)k}{b_1+b_2+b_3+\cdots\cdots+b_n}$$

$$=k$$

$$=\frac{a_1}{b_1}=\frac{a_2}{b_2}=\cdots\cdots=\frac{a_n}{b_n}.$$

推論. 若$\frac{a_1}{b_1}=\frac{a_2}{b_2}=\frac{a_3}{b_3}=\cdots\cdots=\frac{a_n}{b_n}$，則

$$\sqrt[m]{\frac{p_1a_1^m+p_2a_2^m+p_3a_3^m+\cdots\cdots+p_na_n^m}{p_1b_1^m+p_2b_2^m+p_3b_3^m+\cdots\cdots+p_nb_n^m}}=\frac{a_1}{b_1}=\frac{a_2}{b_2}$$

$$=\cdots\cdots=\frac{a_n}{b_n}.$$

〔提示〕本推論可仿上法證之,亦可應用本節定理直接推得之.

〔注意〕本節定理及推論,二者固甚重要;但本節定理的證法,則尤爲重要.善用此證法,則於等比的一般問題未有不能解者.茲舉兩例於下:—

〔例一〕若 $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}=\frac{e}{f}=\frac{g}{h}$,求證

$$\frac{pa^2+qc^2}{pb^2+qd^2}=\frac{lc^2+me^2+ng^2}{ld^2+mf^2+nh^2}.$$

〔證法一〕因 $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$,故 $\frac{a^2}{b^2}=\frac{c^2}{d^2}$.

依上推論,得 $\frac{pa^2+qc^2}{pb^2+qd^2}=\frac{c^2}{d^2}$.

又因 $\frac{c}{d}=\frac{e}{f}=\frac{g}{h}$,故 $\frac{c^2}{d^2}=\frac{e^2}{f^2}=\frac{g^2}{h^2}$.

依上推論,得 $\frac{lc^2+me^2+ng^2}{ld^2+mf^2+nh^2}=\frac{c^2}{d^2}$.

$$\therefore \frac{pa^2+qc^2}{pb^2+qd^2}=\frac{lc^2+me^2+ng^2}{ld^2+mf^2+nh^2}.$$

〔證法二〕設 $k=\frac{a}{b}=\frac{c}{d}=\frac{e}{f}=\frac{g}{h}$,則

$$a=bk,\ c=dk,\ e=fk,\ g=hk.$$

於是 $$\frac{pa^2+qc^2}{pb^2+qd^2}=\frac{pb^2k^2+qd^2k^2}{pb^2+qd^2}=k^2,$$

且 $$\frac{lc^2+me^2+ng^2}{ld^2+mf^2+nh^2}=\frac{ld^2k^2+mf^2k^2+nh^2k^2}{ld^2+mf^2+nh^2}=k^2.$$

$$\therefore\quad \frac{pa^2+qc^2}{pb^2+qd^2}=\frac{lc^2+me^2+ng^2}{ld^2+mf^2+nh^2}.$$

〔例二〕 若 $\frac{x}{a}=\frac{y}{b}=\frac{z}{c}$, 求證

$$\frac{x^3+a^3}{x^2+a^2}+\frac{y^3+b^3}{y^2+b^2}+\frac{z^3+c^3}{z^2+c^2}=\frac{(x+y+z)^3+(a+b+c)^3}{(x+y+z)^2+(a+b+c)^2}$$

〔證〕 設 $\frac{x}{a}=\frac{y}{b}=\frac{z}{c}=k$, 則

$$x=ak,\ y=bk,\ z=ck.$$

於是 $$\frac{x^3+a^3}{x^2+a^2}=\frac{a^3k^3+a^3}{a^2k^2+a^2}=\frac{(k^3+1)a}{k^2+1}.$$

由此 $$\frac{x^3+a^3}{x^2+a^2}+\frac{y^3+b^3}{y^2+b^2}+\frac{z^3+c^3}{z^2+c^2}=\frac{(k^3+1)a}{k^2+1}+\frac{(k^3+1)b}{k^2+1}$$

$$+\frac{(k^3+1)c}{k^2+1}=\frac{(k^3+1)(a+b+e)}{k^2+1}$$

同樣, $$\frac{(x+y+z)^3+(a+b+c)^3}{(x+y+z)^2+(a+b+c)^2}$$

$$=\frac{(ak+bk+ck)^3+(a+b+c)^3}{(ak+bk+ck)^2+(a+b+c)^2}$$

$$=\frac{(k^3+1)(a+b+c)^3}{(k^2+1)(a+b+c)^2}$$

$$=\frac{(k^3+1)(a+b+c)}{k^2+1}$$

$$\therefore\quad \frac{x^3+a^3}{x^2+a^2}+\frac{y^3+b^3}{y^2+b^2}+\frac{z^3+c^3}{z^2+c^2}$$

$$=\frac{(x+y+z)^3+(a+b+c)^3}{(x+y+z)^2+(a+b+c)^2}.$$

〔注意〕 若應用本節定理以證例二,比上法難易何如?

習題十八

1. 求 $x+y:x-y$ 的二乘比,三乘比,

2. 求 $a+b:a-b$ 及 $\frac{1}{a^2+ab+b^2}:\frac{1}{a^2-ab+b^2}$ 的複比.

3. 求 $a+b:a-b$ 的二乘比與 $a-b:a+b$ 的三乘比二者的複比.

4. 比的兩項應否爲同類量?比値應爲名數,抑爲不名數?比値是否必爲有理數?正方形對角線與其一邊之比爲有理數否?正方形面積與其一邊能相比否?何故?

5. 若 $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}=\frac{e}{f}$, 用二法求證

$$\frac{2a^5b^2+5a^2e^3-7e^5f^4}{2b^7+5b^2f^3-7f^9}=\frac{c^5}{d^5},$$

6. 若 $\frac{a}{b}=\frac{b}{c}=\frac{c}{d}$,用二法證 $\sqrt{\frac{a^6+b^2c^2+a^3c^2}{b^4c+d^4+b^2cd^2}}=\frac{a}{d}$

7. 若 $\frac{x+y}{pa+qb}=\frac{y+z}{pb+qc}=\frac{z+x}{pc+qa}$, 用二法求證

$$\frac{2(x+y+z)}{a+b+c}=\frac{(b+c)x+(c+a)y+(a+b)z}{bc+ca+ab}.$$

8. 若 $\frac{x}{b+c-a}=\frac{y}{c+a-b}=\frac{z}{a+b-c}$, 用二法求證

$$\frac{x+y+z}{a+b+c}=\frac{x(y+z)+y(z+x)+z(x+y)}{2(ax+by+cz)}$$

9. 若 $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}=\frac{e}{f}=\frac{g}{h}$, 求證 $\sqrt[5]{\frac{pa^5+qc^5}{pb^5+qf^5}}=\sqrt[3]{\frac{lc^3-me^3-ng^3}{ld^3-mf^3-nh^3}}$.

10. 若 $\frac{x}{a}=\frac{y}{b}=\frac{z}{c}$, 求證

$$\frac{x^4+a^4}{x^3+a^3}+\frac{y^4+b^4}{y^3+b^3}+\frac{z^4+c^4}{z^3+c^3}=\frac{(x+y+z)^4+(a+b+c)^4}{(x+y+z)^3+(a+b+c)^3}.$$

§37. 比例之重要定理. 若 $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$, 則

(1) $$ad=bc$$

(2) $$\frac{b}{a}=\frac{d}{c}.$$

(3) $$\frac{a}{c}=\frac{b}{d} \text{ 又 } \frac{d}{b}=\frac{c}{a}.$$

(4) $$\frac{a\pm b}{b}=\frac{c\pm d}{d}.$$

(5) $$\frac{a+b}{a-b}=\frac{c+d}{c-d}.$$

上列諸定理,學者在初中代數均已學過.試各用二法證明之.

〔提示〕(1)仿前節證法.(2)他法.

§38. 比例問題解法舉例. 欲解關於比例的問題,大抵可用三法,玆舉例明之.

〔例〕若$\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$,求證$\frac{la^2+mc^2}{pab+qcd}=\frac{lab+mcd}{pb^2+qd^2}$.

〔證法一〕 $\because\ a:b=c:d$

$\therefore\ a^2:ab=c^2:cd$ | 又 $ab:b^2=cd:d^2$

$\therefore\ \frac{la^2+mc^2}{lab+mcd}=\frac{a^2}{ab}=\frac{a}{b}$ | 又 $\frac{pab+qcd}{pb^2+qd^2}=\frac{ab}{b^2}=\frac{a}{b}$

$$\therefore\quad \frac{la^2+mc^2}{lab+mcd}=\frac{pab+qcd}{pb^2+qd^2}.$$

$$\therefore\quad \frac{la^2+mc^2}{pab+qcd}=\frac{lab+mcd}{pb^2+qd^2}.$$

〔證法二〕 設$k=\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$,則$a=bk$, $c=dk$.

於是 $$\frac{la^2+mc^2}{pab+qcd}=\frac{lb^2k^2+md^2k^2}{pb^2k+qd^2k}=\frac{lb^2+md^2}{pb^2+qd^2}\cdot k$$

且 $$\frac{lab+mcd}{pb^2+qd^2}=\frac{lb^2k+md^2k}{pb^2+qd^2}=\frac{lb^2+md^2}{pb^2+qd^2}\cdot k$$

$$\therefore \qquad \frac{la^2+mc^2}{pab+qcd}=\frac{lab+mcd}{pb^2+qd^2}.$$

〔證法三〕 I. 分析. 假定 $\dfrac{la^2+mc^2}{pab+qcd}=\dfrac{lab+mcd}{pb^2+qd^2}$ (1)

則 $(la^2+mc^2)(pb^2+qd^2)=(pab+qcd)(lab+mcd)$. (2)

即 $lpa^2b^2+mqc^2d^2+lqa^2d^2+mpc^2b^2$

$=pla^2b^2+mqc^2d^2+(lq+mp)abcd$. (3)

即 $lqa^2d^2+mpb^2c^2=lqabcd+mpabcd$. (4)

即 $lqad(ad-bc)=mpbc(ad-bc)$. (5)

即 $ad-bc=0$. (6)

即 $a:b=c:d$. (7)

II. 逆之. 依等量公理, 由 (7) 可得 (6), 由 (6) 可得 (5), (4), (3), (2), (1). 故當 (7) 成立時 (1) 亦必成立.

試證 a, b, c, d 成比例.

習題十九

1. 求 a, b 的比例中項, 求 a, b 的比例第三項,

2. 求 $\dfrac{a}{b}+\dfrac{b}{a}$ 與 $\dfrac{a}{b}$ 的比例中項, 及其比例第三項.

3. 若 $a:b=c:d$, 求證

(1) $a^2c+ac^2:b^2d+bd^2=(a+c)^3:(b+d)^3$

(2) $a+c:b+d=\sqrt[3]{a^3-c^3}:\sqrt[3]{b^3-d^3}$

(3) $\sqrt{a^2+c^2}:\sqrt{b^2+d^2}=\sqrt[4]{a^2c^2+\frac{c^5}{a}}:\sqrt[4]{b^2d^2+\frac{d^5}{b}}$.

4. 若 $a:b=b:c=c:d$, 試證

(1) $2a+5d:2a^3+5b^3=3a-7d:3a^3-7b^3$.

(2) $(ab+bc+cd)^2=(a^2+b^2+c^2)(b^2+c^2+d^2)$

5. 若 $a:b=b:c=c:d=d:e$, 求證

$$(ab+bc+cd+de)^2=(a^2+b^2+c^2+d^2)(b^2+c^2+d^2+e^2)$$

6. 若 a, b, c, d 成比例, 試證

$$a+d-b-c=(a-b)(a-c):a$$

7. 若 $a:b=c:d$ 且 $m:n=p:q$, 求證

$$amx+bny:amx-bny=cpx+dqy:cpx-dqy.$$

8. 若 $\frac{2ma+6mb+3nc+9nd}{2ma-6mb+3nc-9nd}=\frac{2ma+6mb-3nc-9nd}{2ma-6mb-3nc+9nd}$

II. 變數法

§39. **常數,變數.** 在一個問題中,所含各數(或量)之值有一定不變者,亦有變換不定者,前者名曰常數(或常量),後者名曰變數(或變量).

例如,在 $3x^2+5x+8$ 中,x 可爲任何值,故爲變數;全式 $3x^2+5x+8$ 之值亦可爲任何值,故亦爲變數.至於 3, 2, 5, 8 等則爲固定之值而無可變易,故皆爲常數.

又如,火車每時行60市里,x 時內行 $60x$ 市里.在

$60x$ 中，60 爲常數；x 則爲變數，$60x$ 亦爲變數.

又如，在 $y=3x+2$ 中，x, y 俱爲變數；2, 3 則皆爲常數.

又如，在 $3x+2=0$ 中，3,2 固爲常數；x 亦爲常數，因 x 之值只能爲 $-\frac{2}{3}$，無可變易故也.

§ 40. 正變. 兩個變數 x, y 之間如恆有 $\frac{y}{x}=k$ $=$ 常數之關係，則謂 y 隨 x 而正變. 正變之關係常以“$y \propto x$”表之.

例如，圓周(1)隨半徑 r 而正變，因爲 $\frac{c}{r}=2\pi=$ 常數.

又如，圓面積 A 不隨半徑 r 而正變，因 $\frac{A}{r}=\pi r$ $\neq$ 常數故也.

又如，圓面積 A 隨半徑平方 r^2 而正變，因 $\frac{A}{r^2}=\pi$ $=$ 常數.

又如，在 $y=2x-3$ 中，y 不隨 x 而正變，因 $\frac{y}{x}\neq$ 常數.

倒 (逆反)

§ 41. 例變. 若 y 隨 $\frac{1}{x}$ 而正變，則謂 y 隨 x 而倒變，倒變的關係常以“$y \propto \frac{1}{x}$”表之.

爲便於解決倒變問題計，常用下之

定理. 若 $y \propto \frac{1}{x}$, 則 $xy=k$; 反之, 若 $xy=k$, 則 $y \propto \frac{1}{x}$.

此理顯然, 學者試自證之.

§42. **正變, 例變與比例之關係.** 正變倒變各爲比例之一種, 試分兩層觀之. 若二变量之二对应值之比为一常数则此二变量称为正变

(A) 關於正變者. 設 x 由 x_0 變爲 x_1 時, y 由 y_0 變爲 y_1, 則因 $\frac{y}{x}=k$, 故得

$$\frac{y_0}{x_0}=k,\ \frac{y_1}{x_1}=k$$

$$\therefore\ \frac{y_0}{x_0}=\frac{y_1}{x_1}\text{ 是卽正比例也.}$$

(B) 關於倒變者. 設 x 由 x_0 變爲 x_1 時, y 由 y_0 變爲 y_1, 則 $xy=k$, 故得

$$x_0y_0=k,\ x_1y_1=k.$$

$$\therefore\ x_0y_0=x_1y_1$$

$$\therefore\ \frac{x_0}{x_1}=\frac{y_1}{y_0},\text{ 是卽反比例也.}$$

§43. **聯變.** 當 z 隨 x, y 之積而正變, 則謂 z 隨 x, y 而聯變. 其簡式爲"$z \propto xy$".

例如, 長方形面積 A 隨長 l 闊 b 而聯變, 簡記爲"$A \propto lb$".

又如，物體進行時所行距離 s 隨所具速度 v 與所經時間 t 而聯變．簡記爲"$s \propto vt$"．

爲便於解決聯變問題計，亦常用下之

定理． 若當 x 不變時，z 隨 y 而正變；且當 y 不變時，z 隨 x 而正變，則當 x, y 俱變時，z 必隨 x, y 而聯變．

〔證〕 先設 x 之值爲常數 x_0．當 y 由 y_0 變爲 y_1 時，z 由 z_0 變爲 z'．則 $\frac{z_0}{z'}=\frac{y_0}{y_1}$．

次設 y 爲常數 y_1，當 x 由 x_0 變爲 x_1 時，z 由 z' 變爲 z_1，則 $\frac{z'}{z_1}=\frac{x_0}{x_1}$．

故
$$\frac{z_0}{z'}\cdot\frac{z'}{z_1}=\frac{y_0}{y_1}\cdot\frac{x_0}{x_1}.$$

$$\therefore\quad \frac{z_0}{z_1}=\frac{x_0y_0}{x_1y_1}.$$

$$\therefore\quad \frac{z_0}{x_0y_0}=\frac{z_1}{x_1y_1}=\text{常數}.$$

$$\therefore\quad z\propto xy.$$

§44. 變數法問題解法舉例． 關於變數法的問題．大抵可用二法求解．玆以下列二例明之．

〔例一〕 當 s 不變時，$y \propto t^2$；當 t 不變時，$y \propto \frac{1}{s^3}$.
設 $s_0=1$, $t_0=1$ 時，$y_1=10$，問 $s_2=10$, $t_2=5$ 時，$y_2=$？

〔解法一〕 依題意及聯變定理得 $y=\frac{kt^2}{s^3}$.　　(A)

以 s_0, t_0, y_0 諸值代入 (A)，得 $10=\frac{k\cdot 1^2}{1^3}=k$.

故
$$y=\frac{10t^2}{s^3} \qquad (B)$$

再以 s_2, t_2 之值代入 (B)，得 $y_2=\frac{10\cdot 5^2}{10^3}=\frac{1}{4}$.

〔解法二〕 依題意及聯變定理得 $y \propto \frac{t^2}{s^3}$.

依正變與比例之關係，得

$$\frac{y_2}{y_1}=\frac{{t_2}^2}{{s_2}^3}\div\frac{{t_1}^2}{{s_1}^3}.$$

以 s_1, t_1, s_2, t_2, y_1 等值代入上式，卽得

$$\frac{y_2}{10}=\frac{5^2}{10^3}\div\frac{1^2}{1^3}.$$

$$\therefore\quad y_2=\frac{1}{4}$$

〔例二〕 若 $x \propto y$，求證 $x^2+y^2 \propto x^2-y^2$.

〔證法一〕 因 $x \propto y$，故 $x=ky$.

故
$$x^2+y^2=k^2y^2+y^2=(k^2+1)y^2.$$

且
$$x^2-y^2=k^2y^2-y^2=(k^2-1)y^2.$$

$$\therefore \quad \frac{x^2+y^2}{x^2-y^2}=\frac{(k^2+1)y^2}{(k^2-1)y^2}=\frac{k^2+1}{k^2-1}=k'.$$

$$\therefore \quad x^2+y^2 \propto x^2-y^2.$$

〔證法二〕 因$x\propto y$,故$\frac{x}{y}=\frac{k}{1}$.

故 $$\frac{x^2}{y^2}=\frac{k^2}{1^2}.$$

故 $$\frac{x^2+y^2}{x^2-y^2}=\frac{k^2+1}{k^2-1}=k'.$$

$$\therefore \quad x^2+y^2 \propto x^2-y^2.$$

〔證法三〕 設x由x_1變爲x_2時,y由y_1變爲y_2.依正變與比例之關係,得$\frac{x_1}{y_1}=\frac{x_2}{y_2}$.

故 $$\frac{x_1^2}{y_1^2}=\frac{x_2^2}{y_2^2}.$$

故 $$\frac{x_1^2+y_1^2}{x_1^2-y_1^2}=\frac{x_2^2+y_2^2}{x_1^2-y_1^2}=\text{常數}$$

$$\therefore \quad x^2+y^2 \propto x^2-y^2.$$

習題二十

1. 已知$y\propto\frac{1}{x^2}$,且$x_1=y_1=2$,問$x_2=5$, $y_2=$?

2. 已知$x+y\propto x-y$且$x_1=2$時,$y_1=5$,問$y_2=10$時$x_2=$?

3. 在 x 不變時，F 隨 y^2 而正變；y 不變時，F 隨 $\frac{x-1}{x+1}$ 而倒變. 設 $x_1=y_1=2$ 時，$F_1=9$，問 $x_2=3$，$y_2=4$ 時，$F_2=?$

4. T 隨 $\sqrt{l}$，$\sqrt{\frac{1}{g}}$ 而聯變. 在 $l=g=980$ 時，$T=3$；問 $l=490$，$g=980$ 時，$T=?$

5. 若 $x\propto y$，求證

(1) $x^2+xy+y^2\propto x^2-xy+y^2$

(2) $x^3+x^2y-xy^2-y^3\propto x^3-x^2y+xy^2-y^3$.

6. 若 $x\propto y$，$y\propto z$，求證

(1) $x\propto z$

(2) $lx^2+mxz+nz^2\propto l'x^2+m'xz+n'z^2$

7. 若 $x+y\propto x-y$，$y+z\propto y-z$，求證

$$lx^3+mx^2z+nxz^2+pz^3\propto l'x^3+m'x^2z+n'xz^2+p'z^3.$$

8. 若 $x+y\propto\frac{1}{x-y}$，求證 $x^2-y^2+1\propto x^2-y^2-1$.

9. 球之體積 V 隨其半徑立方而正變，球之面積 S 隨其半徑平方而正變. 當 $V=36\pi$ 時，$S=36\pi$；問 (a) 當 $V=288\pi$ 時，$S=?$ (b) 當 $S=100\pi$ 時，$V=?$

10. 電線的阻力依線之長度而正變，依線之直徑平方而倒變. 電線的重量依線之直徑平方及長度而聯變. 其電線 l 之長度為100呎. 其直徑為.02吋. 今欲另得一線使某重量為 l 的 $\frac{2}{5}$，而其電阻力為 l 的2倍. 求該線之長度及其直徑.

5

第 七 章

二項式定理 數學歸法納

§41. 引論. 欲求二項式 $a+b$ 的低次羃,例如 $(a+b)^2=?$ 或 $(a+b)^3=?$ 之類,由直接乘算(或已乘得的公式)均可立得其結果.此吾人所已知者.但若求 $(a+b)^{100}=?$ 或 $(a+b)^n=?$ 則非另有公式不可.這公式是

$$(a+b)^n=a^n+na^{n-1}b+\frac{n(n-1)}{1\cdot 2}a^{n-1}b^2+\cdots\cdots$$

$$+\frac{n(n-1)\cdots\cdots(n-r+1)}{1\cdot 2\cdot 3\cdots\cdots r}a^{n-r}b^r+\cdots\cdots+b^n.$$

其證法很多,現在只講一種利用數學歸納法的證明.爲求易於了解起見,先自數學歸納法說起.

§42. 數學歸納法. 數學歸納法應用甚廣,不僅能證上述公式而已.今以二例明之.

〔例一〕 證 $1\cdot 2+2\cdot 3+3\cdot 4+\cdots\cdots\cdots\cdots+n(n+1)$

$$=\frac{n}{3}(n+1)(n+2). \qquad (A)$$

〔證〕 第一步. 假定在$n=k$時(A)式成立,求證在$n=k+1$時(A)式亦能成立.其算式如下:—

假定. $1\cdot2+2\cdot3+3\cdot4+\cdots\cdots+k(k+1)=\frac{k(k+1)(k+2)}{3}$,

則 $1\cdot2+2\cdot3+3\cdot4+\cdots\cdots+k(k+1)+(k+2)$

$$=\frac{k(k+1)(k+2)}{3}+(k+1)(k+2)$$

$$=(k+1)\frac{k^2+2k+3k+6}{3}$$

$$=\frac{(k+1)(k+2)(k+3)}{3}$$

$$=\frac{(k+1)[(k+1)+1][(k+1)+2]}{3}$$

第二步. 設$n=1$(或$n=2,3,4$之類)代入(A)式察其兩邊是否相等.

設$n=1$則(A)式變爲$1\cdot2=\frac{1}{3}(1+1)(1+2)=2$. 左右相等.故在$n=1$時$(A)$式確能成立.

由上兩步,立得如下之推演:—

$n=1$時(A)式旣能成立,則依第一步,$n=1+1=2$時(A)式也能成立.

$n=2$時(A)式旣能成立,則依第一步,$n=2+1$

$=3$時(A)式也能成立.

如此繼續推演,n為任何正整數時(A)式無不成立.

$$\therefore\quad 1\cdot 2+2\cdot 3+3\cdot 4+\cdots\cdots+n(n+1)=\frac{n}{3}(n+1)(n+2).$$

〔例二〕 設n為正整數求證$9^{n+1}-8n-9=64\times$整數 (B)

〔證〕 第一步. 假定$9^{k+1}-8k-9=64m$ (m為整數),則$9^{k+2}-8(k+1)-9=\underset{\sim\sim\sim\sim\sim\sim\sim\sim\sim\sim\sim\sim\sim\sim\sim\sim\sim\sim\sim\sim\sim\sim}{9\cdot 9^{k+1}-9\cdot 8k-9\cdot 9+64k+64}$

$$=9(9^{k+1}-8k-9)+64(k+1).$$
$$=9\cdot 64m+64(k+1)$$
$$=64[9m+k+1]=64m'.$$

可見當$n=k$時(B)式如能成立,則當$n=k+1$時(B)式也能成立.

第二步. 設$n=1$時,則(B)式變為$9^{1+1}-8\cdot 1-9=64\times$整數,即$64=64\times$整數,左右確能適合.

由上兩步,故知當n為任何正整數時(A)式無不成立.

§43. 歸納法中何以要證兩步? 如前節兩例所述凡用數學歸納法以證一個等式,應有下列兩步:—

I. 先證該等式在 $n=k$ 時如能成立,則在 $n=k+1$ 時該等式也能成立.

II. 次設 $n=1$ (或 $2, 3, 4 \cdots\cdots$ 等諸數之一) 代入該等式兩邊驗其是否相合.

此 I. II. 兩步是否皆爲必需? 觀下兩例自明.

〔例一〕 譬如說"$1\cdot2+2\cdot3+3\cdot4+\cdots\cdots+n(n+1)=\frac{n}{3}(n+1)(n+2)+100$",此等式當然不對,〔由前節例一可知〕.但若用數學歸納法的第一步去試驗則並無不合.可見某等式雖合第一步未必便能成立.所以還要試驗第二步.

〔例二〕 中國古算學家說"若 n 不是質數,則 $2^{n-1}-1$ 不能被 n 整除".這話自然不對,因爲設 $n=341$ 則 $2^{341-1}-1$ 能被 341 整除.但若用 $n=4$,〔或 $6, 8, 9, 10, 12, 14, 15, \cdots\cdots, 340$ 等數〕代入驗算,則也確能符合.可見某定理雖合第二步,未必便能普遍成立,所以也要推究第一步.

習題二十一 (略作)

用數學歸納法證下列各等式:

1. $1^3+2^3+3^3+\cdots\cdots+n^3=\frac{n^2}{4}(n+1)^2$

2. $\frac{1}{1\cdot2}+\frac{1}{2\cdot3}+\frac{1}{3\cdot4}+\cdots\cdots+\frac{1}{n(n+1)}=\frac{n}{n+1}$

3. 首n個奇數各自平方之和 $=\frac{n}{3}(2n+1)(2n-1)$.

4. $2^1+2^2+2^3+\cdots\cdots+2^n=2(2^n-1)$.

5. $x^n-y^n=M(x-y)$. (其中M爲含x, y的整式.)

6. $9^{n+1}-1=4m$. (其中m爲整數.)

7. $3^{2n}-1=8m$, (其中m爲整數.)

8. $3n^2+15n+6=6m$. (其中m爲整數.)

9. $3^{2n}-8n-1=64m$ (其中m爲整數.)

10. 論數學歸納法與他種科學上所用歸納法的異同.

§44. 二項式定理. 既明數學歸納法,便可證明二項式的n次冪的展開公式:—

$$(a+b)^n=a^n+na^{n-1}b+\frac{n(n-1)}{1\cdot2}a^{n-2}b^2+\cdots\cdots$$

$$+\frac{n(n-1)\cdots\cdots(n-r+1)}{1\cdot2\cdot3\cdots\cdots r}a^{n-r}b^r+\cdots\cdots+b^n. \quad (A)$$

這公式(A)名曰二項式定理.其證法如下:

〔證〕 第一步. 假定在$n=k$時(A)式成立,卽

$$(a+b)^k=a^k+ka^{k-1}b+\cdots\cdots$$

$$+\frac{k(k-1)\cdots\cdots(k-r+1)}{1\cdot2\cdot3\cdots\cdots r}a^{k-r}b^r+\cdots\cdots+b^k.$$

則 $(a+b)^{k+1}=(a+b)(a+b)^k$

$$=(a+b)\left[a^k+ka^{k-1}b+\cdots\cdots+\frac{k(k-1)\cdots\cdots(k-r+2)}{1\cdot2\cdot3\cdots\cdots(r-1)}\times\right.$$

$$\left.a^{k-r+1}b^{r-1}+\frac{k(k-1)\cdots\cdots(k-r+1)}{1\cdot2\cdot3\cdots\cdots r}a^{k-r}b^r+\cdots\cdots+b^k\right]$$

$$=a^{k+1}+ka^kb+\cdots\cdots+\frac{k(k-1)\cdots\cdots(k-r+2)}{1\cdot2\cdot3\cdots\cdots(r-1)}a^{k-r}b^{r-1}$$

$$+\frac{k(k-1)\cdots\cdots(k-r+1)}{1\cdot2\cdot3\cdots\cdots r}a^{k-r+1}b^r+\cdots\cdots+ab^k+a^kb$$

$$+\cdots+\frac{k(k-1)\cdots\cdots(k-r+2)}{1\cdot2\cdot3\cdots\cdots(r-1)}a^{k-r+1}b^r+\cdots+b^{k+1}$$

$$=a^{k+1}+(k+1)a^kb+\cdots\cdots$$

$$+\left[\frac{k(k+1)\cdots(k-r+1)}{1\cdot2\cdots\cdots r}+\frac{k(k-1)\cdots(k-r+2)}{1\cdot2\cdot3\cdots\cdots(r-1)}\right]$$

$$ak^{k-r+1}b^r+\cdots\cdots+b^{k+1}=a^{k+1}+(k+1)a^kb+\cdots\cdots$$

$$+\frac{(k+1)k\cdots(k+2-r)}{1\cdot2\cdot3\cdots\cdots r}a^{k-r+1}b^r+\cdots\cdots+b^{k+1}.$$

故“(A) 式在 $n=k$ 時如能成立，則在 $n=k+1$ 時也能成立.”

第二步. 設$n=2$代入(A)式,則應有

$$(a+b)^2=a^2+2a^{2-1}b+\frac{2(2-1)}{1\cdot 2}a^{2-2}b^2=a^2+2ab+b^2.$$

左右確能適合,換言之:"在$n=2$時(A)式確能成立."

由上兩步,便可推得n為任何正整數時(A)式總能成立.

〔註〕 這個公式(A)不但在$n=$正整數時是真確,即在n為任何其他實數時,公式(A)無往不真.學者欲知其詳,可參考 Hall and Knight: Higher Algebra.

習題二十二

1. 證公式(A)中a^pb^q的係數與a^qb^p的係數相等.(利用對稱式)

2. 求下列各式的展式:

   (a) $(3x+y)^{10}$, (b) $(3x-y)^{10}$

   (c) $(x+y)^{10}(x-y)^{10}$ (d) $(m+2)^5(m^2-2m+4)^5$

3. (a) 求$(m+n)^8$中第幾項的係數最大?

   (b) 求$(m+n)^7$中第幾項的係數最大?

4. 在$(x-2)^{100}$中,求(a)首四項,(b)最後四項,(b)第九十項

(*d*) 第 r 項. (*e*) x^r 的係數.

5. 在 $\left(x^2-\frac{1}{x}\right)^{100}$ 中, 求 (*a*) 首四項, (*b*) 最後四項, (*c*) 第九十項, (*d*) x^{188} 的係數. (*e*) 第 r 項, (*f*) x^r 的係數.

6. 證公式 (*A*) 中各項係數之和為 2^n.

[提示: 設 $a=b=1$. 代入 (*A*) 化簡之.]

7. 證公式 *A* 中第 1, 3, 5, 7,……諸項係數之和等於第 2, 4, 6, 8,……諸項係數之和.　r項[illegible]

二項係數之特性

第 $r+1$ 項為二項定理之普通項

$(a^2+b)^{10}$

求在公式中含 a^{12} 之項之係數

設 $r+1$ 項為含 a^{12} 之項 則該項為

$$\frac{10\cdots(10-r+1)}{1\cdot2\cdot3}(a^2)^{10-r}b^r$$

在此項內 a 之指數為 $2(10-r)$

$\therefore (10-r)=12$

$10-r=6$

$r=4$

第 八 章

開方 二項定理之逆用

§45. **引論.** 何謂開方?方根?被開方式?根指數?已有一式 A, 欲求 $A^n=?$ 此算法名曰乘法.學者已知之矣.反之,已知一式 B, 欲求 $B=?^n$, 此手續卽爲開方.開方所得之結果(卽上式中之"?"),名曰方根.以簡式記之,其形如下:

根指数

$$\sqrt[n]{B}=? \quad (\text{實卽 } B=?^n)$$

其中, B 爲被開方式, n 爲根指數, "?" 名曰 B 之 n 次根.

例如, $32=2^5$, 故 $\sqrt[5]{32}=2$, 卽 2 爲 32 之五次根:

又如, $x^3+3x^2+3x+1=(x+1)^3$. 故

$$\sqrt[3]{x^3+3x^2+3x+1}=x+1.$$

卽 $x+1$ 爲 x^3+3x^2+3x+1 之三次根.

〔註〕 (a) 三次根又名立方根.二次根又名平

方根.

(b) 論平方根時,根指數 2 恆略而不書,但在二次以上之方根,其根指數則不可省略.例如 $\sqrt[2]{64}=8$ 恆省寫成 $\sqrt{64}=8$. 又如 $\sqrt{(x+y)^2}=x+y$. $\sqrt[3]{A^6}=A^2$.

§46. 用因子分解法開方. 當被開方式容易分解因子時,無論欲開幾次方,其方根恆可由開方定義立得之.舉例於下:—

大＝同
等＝適當
小＝不能

〔例一〕 求 $64a^6$ 之平方根及其立方根.

〔解〕 $\because\ 64a^6=(8a^3)^2 \qquad \therefore\ \sqrt{64a^6}=8a^3.$ $\sqrt[3]{2^6a^6}$

$\because\ 64a^6=(4a^2)^3 \qquad \therefore\ \sqrt[3]{64a^6}=4a^2.$

〔例二〕 求 $4x^4-20x^2y^3+25y^6$ 之平方根.

〔解〕 因 $4x^4-20x^2y^3+25y^6=(2x^2-5y^3)^2$.

故 $\quad \sqrt{4x^4-20x^2y^3+25y^6}=2x^2-5y^3.$

$2x^2 \quad 5y^3$
$2x \quad 5y^3$

〔例三〕 求 $8x^3-36x^2y+54xy^2-27y^3$ 之立方根.

〔解〕 用因子分解法得 $8x^3-36x^2y+54xy^2-27y^3$

$$=(2x-3y)^3.$$

故 $\quad \sqrt[3]{8x^3-36x^2y+54xy^2-27y^3}=2x-3y.$

§47. 開平方之通法. 但當被開方式不易分

$\sqrt{(x+y)^5(y+z)^4(z+x)^3}=$

$(x+y)^3(y+z)^3(z+x)^3\sqrt{(x+y)^5(y+z)}$

$(x+y)(y+z)(z+x)\sqrt[3]{(x+y)^2(y+z)}$

信商數入進商數 ——→ 開平方

解因子時,則欲求其方根非另有通法不可.本節先述求平方根之通法.

求平方根之法,非基於若何奇異之新理;仍不過將二項式定理,略加變化逆轉應用而已.蓋由二項定理得

$$(a+b)^2=a^2+2ab+b^2.$$

即 $$\sqrt{a^2+2ab+b^2}=a+b.$$

細察上式,乃得被開方式與其平方根二者之關係如下:

(1) 平方根之首項 a 即為被開方式首項 a^2 之平方根.

(2) 平方根之第二根 b 即為被開方式第二項 $2ab$ 除以 $2a$(此 $2a$ 亦名試除式)所得之商.

(3) 二項式 $a+b$ 之平方不為 a^2+b^2 而為 $a^2+2ab+b^2$, 亦即 $a^2+(2ab+b)b$, 故某式之平方根如為 $a+b$, 則自該式減去 a^2 後再減去 $(2a+b)b$. 其結果應為零.

將此關係另以整齊方便之算式表之如下:—

$$\begin{array}{r|l} & a^2+2ab+b^2 \;\big|\; a+b\ (\text{所求平方根}) \\ & a^2 \\ \hline 2a+b & 2ab+b^2 \\ & 2ab+b^2 \\ \hline & 0 \end{array}$$

據此算式,乃得平方根之普遍求法.

〔例一〕 求 $4x^2-12xy+9y^2$ 之平方根.

〔解法〕

$$\begin{array}{r|l} & 4x^2-12xy+9y^2 \;\big|\; 2x-3y \\ & 4x^2 \\ \hline 4x-3y & -12xy+9y^2 \\ & -12xy+9y^2 \\ \hline & 0 \end{array}$$

〔說明〕 (1) 將被開方式首項 $4x^2$ 開平方得 $2x$ 是爲所求平方根之首項.

乃自被開方式減去方根首項之平方,得第一餘式 $-12xy+9y^2$.

(2) 以試除式 $2(2x)$ 除第一餘式之第一項 $-12xy$ (亦卽被開方式第二項). 得 $-3y$, 是爲所求平方根之第二項.

乃自第一餘式減去 $[2(2x)-3y]$, $(-3y)$, 得第二餘式爲零.

故 $2x-3y$ 果爲 $4x^2-12xy+9y^2$ 之平方根.

〔例二〕 求 $12x^3+5x^2+4x^4-6x+1$ 之平方根.

〔解法〕

$$
\begin{array}{r|l}
 & 4x^4+12x^3+5x^2-6x+1 \;\big|\; \underline{2x^2+3x-1} \\
 & 4x^4 \\ \hline
2(2x^2)+3x & 12x^3+5x^2-6x+1 \\
 & 12x^3+9x^2 \\ \hline
2(2x^2+3x)-1 & -4x^2-6x+1 \\
 & -4x^2-6x+1 \\ \hline
 & 0
\end{array}
$$

〔說明〕 (1) 先將被開方式依 x 之降冪排列之.

(2) 乃仿例一求得平方根之首二項爲 $2x^2+3x$.

(3) 將 $2x^2+3x$ 視爲一項(視爲平方根之首項),再仿例一以求平方根之第三項,得 -1.

〔例三〕 $\sqrt{9x^2-12xy+24x+4y^2-16y+16}=?$

〔解法〕

$$
\begin{array}{r|l}
 & 9x^2-12xy+24x+4y^2-16y+16 \;\big|\; \underline{3x-2y+4} \\
 & 9x^2 \\ \hline
2(3x)-2y & -12xy+24x+4y^2-16y+16 \\
 & -12xy\qquad\quad +4y^2 \\ \hline
2(3x-2y)+4 & 24x\qquad\quad -16y+16 \\
 & 24x\qquad\quad -16y+16 \\ \hline
 & 0
\end{array}
$$

$\therefore\quad \sqrt{9x^2-12xy+24x+4y^2-16y+16}=3x-2y+4.$

$x^6-24x^5+25x^4-20x^3+10x^2-4x+1$

習題二十三

試求下列各式之平方根:—

1. $196x^2-364xy+169y^2$　$(14x-13y)^2$

2. $289x^4-782x^2y^3+529y^6$

3. $a^2+b^2+c^2+2ab-2ac-2bc$.　$(a^2+2ab+b^2)+c^2-2bc-2ca$ $=(a+b)^2-2(a+b)c+c^2$ $=(a+b-c)^2$

4. $9x^2-24xy-30xz+16y^2+40yz+25z^2$.

5. $x^6+4x^4-12x^3+4x^2-24x+36$.

6. $16x^6-24x^5+25x^4-20x^3+10x^2-4x+1$.

試求下列各式平方根之首三項.

7. $x^4+6x^3+11x^2+6x+9$

8. $a^2+6a+16$.

9. $16+6a+a^2$ (勿依降冪排列將所得結果與上題比較).

10. $x^4+4x^3+12x^2+12x+4$ 爲完全平方否? 試求其平方根至第四項.

下列諸式各爲完全平方, 試求 m, n 之值.

11. $nx^2-15x+m$.　$=n\left(x^2-\frac{15}{n}x+\frac{m}{n}\right)$

12. $x^4+4x^3-2x^2+mx+9$.

13. $9y^4-30y^3+37y^2+my+n$.

§48. 開立方之通法 當被開方式不易分解因子時, 求欲該式之立方根, 亦可將二項定理逆轉應用. 蓋由二項定理得

$$(a+b)^3=a^3+3a^2b+3ab^2+b^3.$$

三倍的初商自乘
〃〃〃〃〃乘次商
次商的自乘
相加以後乘以次商

即 $$\sqrt[3]{a^3+3a^2b+3ab^2+b^3}=a+b.$$

細察上式,乃得被開方式與其立方根二者之關係如下:—

(1) 立方根之首項 a 即爲被開方式首項 a^3 之立方根.

(2) 立方根之第二項 b 即爲以 $3a^2$ (此 $3a^2$ 亦名試除式).除被開方式第二項 $3a^2b$ 所得之商.

(3) 二項式 $a+b$ 之立方不爲 a^3+b^3, 而爲 $a^3+3a^2b+3ab^2+b^3$ 亦即 $a^3+(3a^2+3ab+b^2)b$, 故某式之立方根如爲 $a+b$, 則自該式減去 a^3 後再減去 $(3a^2+3ab+b^2)b$. 其餘式應爲零.

將此關係另以整齊方便之算式表之如下:—

$$\begin{array}{l|l}
 & a^3+3a^2b+3ab^2+b^3 \;\underline{\big|\, a+b(\text{所求之立方根}).} \\
 & a^3 \\
\hline
3a^2 & 3a^2b+3ab^2+b^3 \\
\quad +3ab & \\
\qquad +b^2 & \\
\hline
3a^2+3ab+b^2 & 3a^2b+3ab^2+b^3 \\
\hline
\end{array}$$

據此算式,乃得立方根之普遍求法.

〔例一〕 求 $8x^3+12x^2y+6xy^2+y^3$ 之立方根.

$2x)^3$ 〔解法〕

$$
\begin{array}{l|l}
 & 8x^3+12x^2y+6xy^2+y^3\ \underline{|2x+y} \\
 & 8x^3 \\
\hline
3(2x)^2 = 12x^2 & 12x^2y+6xy^2+y^3 \\
\quad +3(2x)y\ 6xy & \\
\quad\quad +y^2 & \\
\hline
12x^2+6xy+y^2 & 12x^2y+6xy^2+y^3 \\
\hline
 & \qquad\qquad 0
\end{array}
$$

〔說明〕 (1) 將被開方式首項 $8x^3$ 開立方得 $2x$, 是爲所求立方根之首項.

乃自被開方式減去方根首項之立方, 得第一餘式 $12x^2y+6x^2y+y^3$.

(2) 以試除式 $3(2x)^2$ 除第一餘式之第一項 $12x^2y$ (亦卽被開方式第二項) 得 y, 是爲所求方根之第二項.

乃自第一餘式減去 $[3(2x)^2+3(2x)y+y^2]y$, 得第二餘式爲零.

故 $2x+y$ 果爲 $8x^3+12x^2y+6xy^2+y^3$ 之立方根.

〔例二〕 $\sqrt[3]{3x^4-28x^3-9x^2+6x^5+x^6-27+54x}=?$

〔算式〕

$$
\begin{array}{r|l}
 & x^6+6x^5+3x^4-28x^3-9x^2+54\quad -27 \;\underline{|\, x^2+2x-3} \\
 & x^6 \\
\hline
3(x^2)^2= 3x^4 & 6x^5+3x^4-28x^3-9x^2+54x-27 \\
+3x^2(2x) & \\
+(2x)^2 & \\
\hline
3x^4+6x^3+4x^2 & 6x^5+12x^4+8x^3 \\
\hline
3(x^2+2x)^2=3x^4+12x^3+12x^2 & -9x^4-36x^3-9x^2+54x-27 \\
+3(x^2+2x)(-3)=\quad -9x^2-18x & \\
+(-3)^2=\qquad +9 & \\
\hline
3x^4+12x^2+3x^2-18x+9 & -9x^4-36x^3-9x^2+54x-27 \\
\hline
 & \qquad\qquad\qquad\qquad 0
\end{array}
$$

〔說明〕 (1) 將被開方式依 x 之降冪排列之.

(2) 乃仿例一求得立方根之首二項為 x^2+2x.

(3) 將 x^2+2x 視為一項(視為立方根之首項),再仿例一以求立方根之第三項得 -3.

習題二十四

試求下列各式之立方根:

1. $27a^3-108a^2b+144ab^2-64b^3$
2. $125m^6-225m^4+135m^2-27$
3. $8x^6+48x^5+60x^4-80x^3-90x^2+108x-27$
4. $x^6-9x^5y^2+15x^4y^4+45x^3y^6-60x^2y^8-144xy^{10}-64y^{12}$
5. $a^3+3a^2b+3a^2c+3ab^2+6abc+3ac^2+b^3+3b^2c+3bc^2+c^3$.
6. $x^3+6x^2y-6x^2+12xy^2-24xy+12x+8y^3-24y^2+24y-8$.

下列各式如不為完全立方,試求其立方根至首三項:

7. $x^3+6x^2+12x+11$

8. $8x^3+12x^2+6x+1$

9. $27x^3+27x^2+10x+4$

下列二式各爲完全立方.試求 m, n, l 之值.

10. $8x^3-36x^2+mx+n$

11. $a^6-6a^5b+15a^4b^2-20a^3b^3+ma^2b^4+nab^5-lb^6$

§49. 開四方之通法 第一法: 欲將一式 A 開四次方,可先開平方,再將所得平方根開平方,此最後所得平方根卽爲所求之四次方根.

第二法. 欲將一式開四次方,亦可仿開平方,開立方之法將二項定理逆轉應用以求其根.蓋由二項定理,得

$$(a+b)^4=a^4+4a^3b+6a^2b^2+4ab^3+b^4.$$

卽
$$\sqrt[4]{a^4+4a^3b+6a^2b^2+4ab^3+b^4}=a+b.$$

細察上式乃得被開式與其四次方根二者之關係如下:—

(1) 四次方根之首項 a 卽爲被開方式 a^4 之四次方根.

(2) 四次方根之第二項 b 卽爲以 $4a^3$ (此 $4a^3$ 亦爲試除式),除 $4a^3b$ 所得之商.

$2^{\frac{1}{2}}=\sqrt[2]{2}$
$2^{\frac{1}{3}}=\sqrt[3]{2}$
$2^{\frac{1}{n}}=\sqrt[n]{2}$

$2^{\frac{3}{2}}=\sqrt[2]{2^3}$
$2^{\frac{5}{4}}=\sqrt[4]{2^5}$
$2^{\frac{q}{p}}=\sqrt[p]{2^q}$

$\sqrt{64a^4}=64^{\frac{1}{2}}a^{4\cdot\frac{1}{2}}$
$=2^{6\cdot\frac{1}{2}}\cdot a^{4\cdot\frac{1}{2}}$
$=2^3a^2$

2的2次 = $\sqrt[2]{\ }$
3的指次方次 = $\sqrt[3]{\ }$

(3) $a+b$ 之四方不爲 a^4+b^4 而爲 $a^4+4a^3b+6a^2b^2+4ab^3+b^4$，亦即 $a^4+(4a^3+6a^2b+4ab^2+b^3)b$. 故某式之四次方根如爲 $a+b$，則自該式減去 a^4 後，再減去 $(4a^3+6a^2b+4ab^2+b^3)b$，其餘式應爲零.

將此關係表以簡明整齊之算式如下:—

$$
\begin{array}{r|l}
 & a^4+4a^3b+6a^2b^2+4ab^3+b^4 \;\big|\; \underline{a+b\ (\text{所求之四次方根})} \\
 & a^4 \\
\hline
4a^3 & 4a^3b+6a^2b^2+4ab^3+b^4 \\
+6a^2b & \\
+4ab^2 & \\
+b^3 & \\
\hline
4a^3+6a^2b+4ab^2+b^3 & 4a^3b+6a^2b^2+4ab^3+b^4 \\
\hline
 & 0
\end{array}
$$

據此算式，乃得開四次方之通法，如下例:—

〔例〕 求 $\sqrt[4]{81x^4-216x^3+216x^2-96x+16}=?$

〔解法〕

$$
\begin{array}{r|l}
 & 81x^4-216x^3+216x^2-96x+16 \;\big|\; \underline{3x-2} \\
 & 81x^4 \\
\hline
4(3x)^3=108x^3 & -216x^3+216x^2-96x+16 \\
6(3x)^2(-2)=-108x^2 & \\
4(3x)(-2)^2=\quad 48x & \\
(-2)^3=\quad -8 & \\
\hline
108x^3-108x^2+48x-8 & -216x^3+216x^2-96x+16 \\
\hline
 & 0
\end{array}
$$

四倍的初商的立方
六〃〃〃〃〃平〃乘次商
四〃〃〃〃〃乘次商的平方
次商的立方

習題二十五

試求下列各式之四次方根:—

1. $16m^4-32m^3+24m^2-8m+1$

2. $81y^8+216y^6+216y^4+96y^2+16.$

3. $x^8+4x^7+14x^6+28x^5+49x^4+56x^3+56x^2+32x+16.$

4. $a^8-8a^7b+26a^6b^2-48a^5b^3+59a^4b^4-48a^3b^5+26a^2b^6-8ab^7+b^8.$

5. 由二項定理得公式,

$$(a+b)^5=a^5+5a^4b+10a^3b^2+10a^2b^3+5ab^4+b^5$$

試本此公式推出開五次方之法則.

6. 求 $32x^5-80x^4+80x^3-40x^2+10x-1$ 之五次方根.

7. 求 $\dfrac{x^4}{y^4}+\dfrac{4x^4}{y^3}+\dfrac{10x^2}{y^2}+\dfrac{12x}{y}+9$ 之平方根.

8. 求 $\dfrac{a^{12}}{b^6}+\dfrac{6a^{10}}{b^5}+\dfrac{21a^8}{b^4}+\dfrac{44a^6}{b^3}+\dfrac{63a^4}{b^2}+\dfrac{54a^2}{b}+27$ 之立方根.

9. 求 $\sqrt{7}$ 至小數第三位.

10. 求 $\sqrt[3]{7}$ 至小數第二位.

11. 求 $\sqrt[3]{.38756}$ 至小數第三位.

12 求 $\sqrt[3]{.38756421}$ 至小數第三位.

13. 本二項定理推出開 7 次方之規則.

第九章

根式

§50 引論. (1) 何謂根式? 凡式之前冠以根號.如 $\sqrt[m]{A}$ 之形者,統名曰根式.例如 $\sqrt{5}$, $\sqrt{4}$, $\sqrt[3]{10}$, $\sqrt[3]{x+y}$, $\sqrt{x^2+2xy+y^2}$ 之類皆為根式.

(2) 何謂根式之主值? 將一式開方,有時可兼得正負兩個實數.其正者叫做根式之主值(僅得一個實數時,該實數即為根式的主值).主值恆以 $\sqrt[m]{A}$ 表之.例如,$\sqrt{16}=4$; $\sqrt[3]{8}=2$; $\sqrt[3]{-8}=-2$. $\sqrt[4]{16}=2$.

通常論根式時,非經特別說明者,皆指主值而言,如欲兼指正負兩值時,應以 $\pm\sqrt[m]{A}$ 表之;如欲單言負值時,則應以 $-\sqrt[m]{A}$ 表之.例如 $\pm\sqrt{16}=\pm4$, $\pm\sqrt[4]{81}=\pm3$, $-\sqrt{25}=-5$.

(3) 何謂不盡根式? 將根式依其根指數所

示之次數開方,此開方手續或爲有窮,或爲無窮,(參看下節)有窮者名曰有盡根式,無窮者名曰不盡根式.例如$\sqrt{25}$, $\sqrt[3]{64}$, $\sqrt{(x+y)^2}$皆爲有盡根式.$\sqrt{24}$, $\sqrt[3]{4}$, $\sqrt{x^2+y^2}$, $\sqrt[3]{x^3+1}$皆爲不盡根式.

§51. 根式何以會不盡? 細察下例,其理自明.

〔例一〕 試將$\sqrt{3}$依開平方之手續演之,得1.73……其小數之位數可多至無限,且此無限小數始終不循環.換言之,開方手續可演至無窮,其理由何在?證之如下:

〔證〕 假若$\sqrt{3}$=有限小數或循環小數,則依小數化爲分數之理,$\sqrt{3}$應可化爲分數如$\frac{a}{b}$(既約分數).但若

$$\sqrt{3}=\frac{a}{b}.$$

則依等量公理,應得 $(\sqrt{3})^2=\frac{a^2}{b^2}$.

即 $$3=\frac{a^2}{b^2}.$$

此結果不通,因b既不能除盡a,自然亦不能除盡a^2,b既不能除盡a^2,自然b^2亦不能除盡a^2故也.

故$\sqrt{3}\neq\frac{a}{b}$即$\sqrt{3}$不爲有限小數或循環小數.

同樣,可證$\sqrt{2}$, $\sqrt{5}$, $\sqrt[3]{2}$.等等皆非有限小數或循環小數.

〔例二〕 試將$\sqrt{4x^2+4x+3}$依開平方法演之,得平方根之首二項$2x+1$之後,開方手續不能適盡.若依法繼續演之,續得$\frac{1}{2x}+\cdots\cdots$其手續亦無止境,理由何在?亦可如下證之.

〔證〕 假定$\sqrt{4x^2+4x+3}=2x+1+\frac{1}{2x}+\cdots\cdots$(項數有限).

則依分式加法,應得$\sqrt{4x^2+4x+3}=\frac{A}{B}$.

其中A, B爲x之多項式且無公共因子.

於是
$$4x^2+4x+3=\frac{A^2}{B^2}.$$

此亦不通,因B旣不能整除A, B^2自然不能整除A^2故也.

故$\sqrt{4x^2+4x+3}\neq\frac{A}{B}$,即亦不能爲有限項分數之和.故$\sqrt{4x^2+4x+3}$之項數應爲無限.

§52. **不盡根式之眞值與近似值.** 不盡根式如$\sqrt[3]{2}$, $\sqrt{2}$, $\sqrt{5}$.之類的眞值,不能以小數表之,已

如上述,但依開方法,吾人恆可用小數以表此類不盡根式之近似值,使其準確任至小數若干位,例如準確至小數三位時,$\sqrt{2}$ 之值爲 1.414, 準確至小數四位時,$\sqrt{2}$ 之值爲 1.4142 是也.所當注意者.此 1.414 與 1.4142 皆爲 $\sqrt{2}$ 之近似值而非 $\sqrt{2}$ 之眞值.$\sqrt{2}$ 之眞值卽爲 $\sqrt{2}$. 其特性爲 $(\sqrt{2})^2=2$. 推之 $(\sqrt[m]{A})^m=A$.

同樣,不盡根式如 $\sqrt{x^2+2x+5}$, $\sqrt[3]{x^3+y^3}$ 之類,雖不能以有限項分數之和表示其眞值,但依開方法亦可求方根之近似值任至首若干項.例如 $\sqrt{x^2+2x+5}$ 之首三項爲 $2x+1+\frac{2}{x}$, 首四項爲 $2x+1+\frac{2}{x}-\frac{2}{x^2}$, 所當注意者此 $2x+1+\frac{2}{x}$ 與 $2x+1+\frac{2}{x}-\frac{2}{x^2}$ 皆非 $\sqrt{x^2+2x+5}$ 之眞值不過各爲其近似值耳.$\sqrt{x^2+2x+5}$ 之眞值卽爲 $\sqrt{x^2+2x+5}$ 其特性爲 $\sqrt{x^2+2x+5})^2=x^2+2x+5$.

§53. 根式變形之原理. 根式之一切變形不外下列幾種原理.

(1) $$\sqrt[m]{a}\cdot\sqrt[m]{b}=\sqrt[m]{ab}.$$

(2) $$\frac{\sqrt[m]{a}}{\sqrt[m]{b}}=\sqrt[m]{\frac{a}{b}}$$

(3) $$\sqrt[mp]{a^{np}}=\sqrt[m]{a^n}$$

(4) $$\sqrt[m]{\sqrt[n]{a}}=\sqrt[mn]{a}$$

(5) $$(\sqrt[m]{a})^n=\sqrt[m]{a^n}.$$

證之如下:

〔證 1〕 $$(\sqrt[m]{a}\cdot\sqrt[m]{b})^m=(\sqrt[m]{a})^m(\sqrt[m]{b})^m$$

$$=ab$$

$$=(\sqrt[m]{ab})^m$$

$$\therefore\ \sqrt[m]{a}\cdot\sqrt[m]{b}=\sqrt[m]{ab}$$

〔證 2〕 $$\left(\frac{\sqrt[m]{a}}{\sqrt[m]{b}}\right)^m=\frac{(\sqrt[m]{a})^m}{(\sqrt[m]{b})^m}$$

$$=\frac{a}{b}$$

$$=\left(\sqrt[m]{\frac{a}{b}}\right)^m$$

$$\therefore\ \frac{\sqrt[m]{a}}{\sqrt[m]{b}}=\sqrt[m]{\frac{a}{b}}$$

〔證 3, 4, 5.〕 學者試自證之.

§54. 不盡根式之化簡. 據前節所述諸原理, 往往可將不盡根式化為較簡之形. 舉例如下:

〔例一〕 (1) $\sqrt[3]{72}=\sqrt[3]{8}\cdot\sqrt[3]{9}=2\sqrt[3]{9}$

(2) $\sqrt[3]{a^5b^4}=\sqrt[3]{a^3b^3\cdot a^2b}=ab\sqrt[3]{a^2b}$

(3) $\sqrt{(x+y)^3}=(x+y)\sqrt{x+y}.$

〔例二〕 (4) $\sqrt[6]{8}=\sqrt[6]{2^3}=\sqrt{2}$

(5) $\sqrt[6]{a^3b^6c^9}=\sqrt[6]{a^3c^3}\cdot\sqrt[6]{b^6c^6}=bc\sqrt[6]{a^3c^3}$

$=bc\sqrt{ac}$

(6) $\sqrt[4]{x^2+2xy+y^2}=\sqrt[4]{(x+y)^2}=\sqrt{x+y}.$

〔例三〕 (7) $\sqrt{\frac{1}{2}}=\sqrt{\frac{2}{4}}=\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{4}}=\frac{\sqrt{2}}{2}$

(8) $\sqrt[3]{\frac{2}{3}}=\sqrt[3]{\frac{18}{27}}=\frac{\sqrt[3]{18}}{\sqrt[3]{27}}=\frac{\sqrt[3]{18}}{3}$

(9) $\sqrt{\frac{a}{c}}=\sqrt{\frac{ac}{c^2}}=\frac{\sqrt{ac}}{c}.$

由上諸例觀之, 可見任何根式如 $\sqrt[m]{A}$ 之類, 可依適當手續變化其形式, 使合下列標準:—

(1) 被開方式為整式. (參看例三)

(2) 被開方式諸因子之指數不與根指數再有公因子(參看例二)

$$\frac{x^m}{y}\sqrt{\frac{x^{m+1}}{y^{m-1}}}=\frac{x}{y}\frac{\sqrt[m]{x^{m+1}}}{\sqrt[m]{y^{2m-1}}}=\frac{x}{y}\cdot\frac{\sqrt[m]{x^m\cdot x}}{\sqrt[m]{y^{2m-1}}}=\frac{x}{y}\cdot\frac{x\sqrt[m]{x}}{\sqrt[m]{y^{m-1}}}$$

$$=\frac{x}{y}\frac{x\sqrt[m]{x}\cdot\sqrt[m]{y}}{\sqrt[m]{y^{m-1+1}}\,y}=\frac{x}{y}\cdot\frac{x\sqrt[m]{xy}}{y}=\frac{x^2}{y^2}\cdot\sqrt[m]{xy}$$

(3) 被開方式各因子之指數無有大於根指數者(參看例一)

符合上述三項標準之根式是爲最簡根式.

習題二十六

將試下列諸根式化爲最簡之形:—

1. $\sqrt{200}$ $=10\sqrt{2}$
2. $\sqrt{243}$
3. $\sqrt[3]{108}$
4. $\sqrt[3]{375}$
5. $\sqrt[3]{432}$
6. $\sqrt[3]{a^6b^3xy^3}$
7. $\sqrt[3]{x^3+3x^2y+3xy^2+y^3}$
8. $\sqrt[3]{x^4-x^3}$
9. $\sqrt[3]{\frac{1}{5}}$
10. $\sqrt[3]{\frac{125}{8}}$
11. $\sqrt[4]{49}$
12. $\sqrt[4]{225}$
13. $\sqrt[4]{3600}$
14. $\sqrt[3]{216a^6b^9c^3}$
15. $\sqrt[3]{(x+y)^3(x-y)^3}$
16. $\sqrt[3]{-162}$
17. $\sqrt{\frac{5}{27}}$
18. $\sqrt[5]{\frac{8x^2}{(x+y)^8}}$
19. $\frac{x}{y}\sqrt[m]{\frac{x^{m+1}}{y^{m-1}}}$
20. $\sqrt[15]{x^3y^{15}z^5}$

利用根式變形原理,化下列諸根式使其僅含一個根號.

21. $\sqrt[3]{\sqrt{2^3}}$
22. $\sqrt[3]{\sqrt[4]{27x^3y^6z^9}}$ $=\sqrt[3\times4]{3^3x^3y^6z^9}=\sqrt[3\times4]{(3xy^2z^3)^3}$
23. $a\sqrt{b\sqrt{c\sqrt{d}}}$
24. $\sqrt{3\sqrt[3]{4}}$
25. $\sqrt[3]{3\sqrt{4}}$
26. $\sqrt{x\sqrt{x\sqrt{x\sqrt{x}}}}$

$$\sqrt[5]{\frac{8x^2}{(x+y)^8}}=\frac{\sqrt[5]{8x^2}}{\sqrt[5]{(x+y)^8}}=\frac{\sqrt[5]{2^3x^2}}{\sqrt[5]{(x+y)^5\cdot(x+y)^3}}=\frac{\sqrt[5]{2^3\cdot x^2(x+y)^2}}{(x+y)\sqrt[5]{(x+y)^3\cdot(x+y)^2}}$$

$$=\frac{\sqrt[5]{2^3x^2(x+y)^2}}{(x+y)^2}$$

$\sqrt{x\sqrt{x\sqrt[4]{x^3}}} = \sqrt{\sqrt[4]{x^8 x^7}} = \sqrt[8]{x^{15}} = \sqrt[16]{x^{15}}$

根號是4，故x入根號內当自乘四次

用最簡之法求下列各式之值

27. $\sqrt[4]{81^5}$　　28. $\sqrt[5]{32^3}$

29. $\sqrt[6]{1331^2}$　　30. $\sqrt[4]{625^3}$

§55. 同類根式. 兩個根式化簡之後,至多只有係數不同者,名曰同類根式,非同類根式名曰不同類根式.

則根次同，根號內之數(代數式)亦同

例如 $3\sqrt{2}, -8\sqrt{2}$ 爲同類根式. $\sqrt[3]{5}, 8\sqrt[3]{5}; a\sqrt{x}, b\sqrt{x}; m\sqrt[p]{r}, n\sqrt[p]{r}$ 等亦皆爲同類根式.

至於 $\sqrt{2}, \sqrt{3}$ 則非同類根式. $\sqrt[3]{2}, \sqrt{2}; \sqrt[m]{a}, \sqrt[n]{a}; \sqrt[m]{a}, \sqrt[m]{b}$. 等亦皆非同類根式.

〔注意〕 有時兩個根式,驟視之似非同類根式,但若化簡之後,則又爲同類根式,學者不可不察也.

例如 $\sqrt{8}$ 與 $\sqrt{18}$ 似非同類根式,但若化簡各式,如

$$\sqrt{8}=2\sqrt{2}$$

$$\sqrt{18}=3\sqrt{2}$$

$3xy^2z^3=$

則見 $\sqrt{8}, \sqrt{18}$ 實爲同類根式矣.

又如 $\sqrt{ac},\ \sqrt{\frac{a}{c^2}},\ \sqrt{\frac{c}{a}}$ 似非同類根式,其實不然!

§56. **不盡根式之加減.** 本問題分同類根式與不同類根式兩層論之.

(*A*) 同類根式之加減,即將各根式之係數依其原有之符號加減之,以其結果作爲公共根式之係數.即

$$a\sqrt{x}+b\sqrt{x}-c\sqrt{x}=(a+b-c)\sqrt{x}.$$

〔例一〕 $5\sqrt{x}-6\sqrt{x}+9\sqrt{x}=8\sqrt{x}.$

〔例二〕 $\sqrt{50}+\sqrt{32}+\sqrt{\frac{1}{2}}=5\sqrt{2}+4\sqrt{2}+\frac{1}{2}\sqrt{2}$

$$=\left(5+4+\frac{1}{2}\right)\sqrt{2}=\frac{19}{2}\sqrt{2}$$

〔例三〕 $\sqrt{ac}+\sqrt{\frac{a}{c^2}}+\sqrt{\frac{c}{a}}=\sqrt{ac}+\frac{\sqrt{ac}}{c}+\frac{\sqrt{ac}}{a}$

$$=\left(1+\frac{1}{c}+\frac{1}{a}\right)\sqrt{ac}$$

(*B*) 不同類根式之加減.即以加減符號聯結所欲加減之根式而已.其有不可合併者,不可妄爲合併也.

〔例一〕 $\sqrt{3}+\sqrt{2}=\sqrt{3}+\sqrt{2}$

〔例二〕 $\sqrt[3]{3}+\sqrt{3}=\sqrt[3]{3}+\sqrt{3}$

〔例三〕 $3\sqrt{2}+2\sqrt{3}+5\sqrt{3}-8\sqrt{2}=7\sqrt{3}-5\sqrt{2}$

〔例四〕 $a\sqrt{x}+b\sqrt{y}-c\sqrt{x}+d\sqrt{y}=(a-c)\sqrt{x}+(b+d)\sqrt{y}$

〔例五〕 $\sqrt{3}+\sqrt{2}=\sqrt{5}$ 對否？何故？ 不对

〔例六〕 $8\sqrt{2}+4\sqrt{5}=12\sqrt{7}$ 乎？ $12\sqrt{2}$ 乎？ $12\sqrt{5}$ 乎？

不能

習題二十七

化簡下列各式：—

1. $5\sqrt{2}+6\sqrt{2}-8\sqrt{2}+9\sqrt{2}$?
2. $7\sqrt[3]{3}+8\sqrt[3]{7}-9\sqrt[3]{3}+10\sqrt[3]{3}$
3. $5\sqrt{2}+6\sqrt{3}-8\sqrt{2}-9\sqrt{3}$
4. $4\sqrt{2}+4\sqrt{3}-4\sqrt{5}$
5. $a\sqrt{x}+b\sqrt{x}-c\sqrt{x}+d\sqrt{y}$
6. $a\sqrt{x}-a\sqrt{y}+a\sqrt{z}$
7. $\sqrt{98}+\sqrt{50}+\sqrt{72}+\sqrt{128}$
8. $\sqrt{75}-\sqrt{108}+\sqrt{48}-\sqrt{27}$
9. $\sqrt{\frac{1}{3}}+\sqrt{3}+\sqrt{243}-\sqrt{300}$

10. $\sqrt[3]{40}+\sqrt[3]{625}+\sqrt[3]{135}-\sqrt[3]{\frac{1}{25}}$

11. $\sqrt{\frac{1}{2}}+\sqrt{\frac{1}{8}}+\sqrt{\frac{1}{32}}+\sqrt{\frac{1}{128}}$

12. $\sqrt[3]{\frac{a}{9}}+\sqrt[3]{\frac{3a}{125}}-\sqrt{\frac{a}{243}}+\sqrt[3]{\frac{a}{576}}$

13. $\sqrt[4]{81a^7}-2\sqrt[4]{16a^7}+5\sqrt[4]{625a^7}$

14. $\sqrt{a^3+a^2b}+\sqrt{ab^2+b^3}+\sqrt{(a-b)(a^2-b^2)}$

15. $\sqrt[3]{m^4+m^3n}+\sqrt[3]{mn^3+n^4}-\sqrt[3]{(m^2-n^2)(m-n)^2}$

16. $\sqrt{ab}+\sqrt{\frac{1}{ab}}+\sqrt{\frac{b}{a}+\frac{a}{b}+2}+\sqrt{\frac{a}{b}+\frac{b}{a}-2}$

17. $\sqrt[3]{a^7b^2}+\sqrt[3]{a^5b^5}+\sqrt[3]{\frac{a^2}{b}+\frac{b^2}{a}+3a+3b}+\sqrt[3]{\frac{a^2}{b}-\frac{b^2}{a}-3a+3b}$

18. $\sqrt[6]{27}+\sqrt{300}-\sqrt{363}+\sqrt[8]{81}$

19. $\sqrt[4]{144}+\sqrt{768}-\sqrt[6]{1728}+\sqrt{\frac{625}{27}}$

20. $(a-c)\sqrt[3]{ac}+\sqrt[3]{\frac{c}{a^2}}-\sqrt[3]{\frac{a}{c^2}}+\sqrt[3]{\frac{(a-c)^3}{a^2c^2}}$

§57. 不盡根式之乘法. 本問題亦可分爲同次根式與不同次根式兩層論之.

根次同法.

(A) 根式爲同次者,諸同次根式相乘,即依§53根式變形原理1,將諸被開方數相乘,而於其積冠以公有之根號與根指數,再行化簡可矣.以式表之如下:

$$\sqrt[m]{A}\cdot\sqrt[m]{B}\cdot\sqrt[m]{C}=\sqrt[m]{ABC}.$$

$\sqrt[2]{3}$, $\sqrt[3]{4}$

$\sqrt[2\times3]{3\cdot3^2}$　$\sqrt[3\times2]{4\cdot4}$

〔例一〕 $\sqrt{3}\cdot\sqrt{6}\cdot\sqrt{8}=\sqrt{3\cdot6\cdot8}=12$

〔例二〕 $\sqrt[3]{ab}\cdot\sqrt[3]{bc}\cdot\sqrt[3]{ca^2}=\sqrt[3]{a^3b^2c^2}=a\sqrt[3]{b^2c^2}$

〔例三〕 $\sqrt{2}(\sqrt{3}+\sqrt{5}-\sqrt{7})=\sqrt{2}\sqrt{3}+\sqrt{2}\sqrt{5}$

$$-\sqrt{2}\sqrt{7}=\sqrt{6}+\sqrt{10}-\sqrt{14}$$

〔例四〕 $(\sqrt{2}+\sqrt{3})(\sqrt{6}-\sqrt{7}+\sqrt{8})=\sqrt{12}$

$$-\sqrt{14}+\sqrt{16}+\sqrt{18}-\sqrt{21}+\sqrt{24}=2\sqrt{3}$$

$$-\sqrt{14}+\overset{4}{\cancel{2}}+3\sqrt{2}-\sqrt{21}+2\sqrt{6}$$

(*B*) 根式非同次者. 先依§53變形原理2, 將諸根式化爲同次根式, 再仿(*A*)乘之.

〔例五〕 $\sqrt[3]{5^2}\cdot\sqrt{5}=\sqrt[6]{5^4}\cdot\sqrt[6]{5^3}=\sqrt[6]{5^7}=5\sqrt[6]{5}$.

〔例六〕 $\sqrt[4]{ab^3}\cdot\sqrt[6]{bc}\cdot\sqrt[3]{ab^2c}\cdot\sqrt{bcd}$

$$=\sqrt[12]{a^3b^9}\cdot\sqrt[12]{b^2c^2}\cdot\sqrt[12]{a^4b^8c^4}\cdot\sqrt[12]{b^6c^6d^6}$$

$$=\sqrt[12]{a^3b^9\cdot b^2c^2\cdot a^4b^8c^4\cdot b^6c^6d^6}$$

$$=b^2c\sqrt[12]{a^7bd^6}$$

〔例七〕 $(\sqrt{2}+\sqrt[3]{3})(\sqrt[3]{2}-\sqrt{3})=\sqrt{2}\cdot\sqrt[3]{2}$

$$+\sqrt[3]{3}\cdot\sqrt[3]{2}-\sqrt{2}\cdot\sqrt{3}-\sqrt[3]{3}\cdot\sqrt{3}$$

$$=\sqrt[6]{2^5}+\sqrt[3]{6}-\sqrt{6}-\sqrt[6]{3^5}$$

$$=\sqrt[6]{32}+\sqrt[3]{6}-\sqrt{6}-\sqrt[6]{243}.$$

習題二十八

試求以下各式所示之積:—

1. $\sqrt{5}\sqrt{7}\sqrt{6}$　　2. $\sqrt{15}\sqrt{12}\sqrt{20}$

3. $\sqrt[3]{ab}\sqrt[3]{bc}\sqrt[3]{cd}$　　4. $\sqrt[5]{a^4b^3c^2}\sqrt[5]{ab^2c^3}\sqrt[5]{x^2y^3}$

5. $\sqrt[3]{3}\sqrt{2}$　　6. $\sqrt{3}\sqrt[3]{2}\sqrt[3]{5}\sqrt{6}$

7. $\sqrt[3]{4}\sqrt{2}\sqrt[3]{\dfrac{4}{5}}$　　8. $\sqrt{2}\sqrt[3]{2}\sqrt[4]{2}\sqrt[6]{2}$

9. $\sqrt{30}(\sqrt{2}+\sqrt{3}-\sqrt{5})$

10. $\sqrt{70}(\sqrt{2}+\sqrt{7}+\sqrt{5}-\sqrt{28}-\sqrt{10}-\sqrt{14})$

11. $\sqrt{ab}\left(\sqrt{ab}+\sqrt{\dfrac{a}{b}}+\sqrt{\dfrac{b}{a}}+\sqrt{\dfrac{a}{b}+\dfrac{b}{a}+2}\right)$

12. $(\sqrt{2}+\sqrt[3]{2}+\sqrt[4]{2})\sqrt{32}$

13. $(\sqrt{a}+\sqrt[3]{a}+\sqrt[5]{a})\sqrt[6]{a^5b^5c^5}$

14. $(\sqrt{3\sqrt{3}}+\sqrt[3]{3\sqrt{3}}+\sqrt{3\sqrt[3]{3}})\sqrt{3}$

15. $(\sqrt{2}+\sqrt{3})(\sqrt{5}+\sqrt{6})$

16. $(\sqrt{2}+\sqrt{3}+\sqrt{5})(\sqrt{60}+\sqrt{24})$

17. $(\sqrt{3}+\sqrt[3]{2})(\sqrt{3}-\sqrt[3]{2})$

18. $(\sqrt{3}+\sqrt[3]{2})(\sqrt[3]{3}+\sqrt{2})$

19. $(\sqrt{a}+\sqrt[3]{b}+\sqrt[5]{c})(\sqrt{a}+\sqrt[3]{b}+\sqrt[5]{c})$

20. $(\sqrt[4]{a}+\sqrt[4]{b})(\sqrt[4]{a^3}-\sqrt[4]{a^2b}+\sqrt[4]{ab^2}-\sqrt[4]{b^3})$

21. 試求下列各式之結果並熟記之.

(a) $\sqrt[n]{B^{n-p}}\cdot\sqrt[n]{B^p}=?$

(b) $(\sqrt{A}+\sqrt{B})(\sqrt{A}-\sqrt{B})=?$

(c) $(\sqrt[3]{A}+\sqrt[3]{B})(\sqrt[3]{A^2}-\sqrt[3]{AB}+\sqrt[3]{B^2})=?$

(d) $(\sqrt[3]{A}-\sqrt[3]{B})(\sqrt[3]{A^2}+\sqrt[3]{AB}+\sqrt[3]{B^2})=?$

22. 由根式乘法證下列各式是否左右相等?

(a) $(\sqrt[n]{A}-\sqrt[n]{B})(\sqrt[n]{A^{n-1}}+\sqrt[n]{A^{n-2}B}+\sqrt[n]{A^{n-3}B^2}+\cdots\cdots$

$$+\sqrt[n]{B^{n-1}})=A-B.$$

(b) $(\sqrt[n]{A}+\sqrt[n]{B})[\sqrt[n]{A^{n-1}}-\sqrt[n]{A^{n-2}B}+\sqrt[n]{A^{n-3}B^2}-\cdots\cdots$

$$-(-1)^n\sqrt[n]{B^{n-1}}]=A-(-1)^nB$$

§58　幾個重要乘積.　由前節題21——22或由根式乘法,可得下列諸公式,此種公式,在根式除法極爲有用.學者宜細究之.

Rational factor

(1) $\sqrt[n]{A^{n-p}}\cdot\sqrt[n]{A^p}=A.$

(2) $(\sqrt{A}+\sqrt{B})(\sqrt{A}-\sqrt{B})=A-B.$

(3) $(\sqrt[3]{A}+\sqrt[3]{B})(\sqrt[3]{A^2}-\sqrt[3]{AB}+\sqrt[3]{B^2})=A+B.$

(4) $(\sqrt[3]{A}-\sqrt[3]{B})(\sqrt[3]{A^2}+\sqrt[3]{AB}+\sqrt[3]{B^2})=A-B.$

(5) $(\sqrt[n]{A}-\sqrt[n]{B})(\sqrt[n]{A^{n-1}}+\sqrt[n]{A^{n-2}B}+\sqrt[n]{A^{n-3}B^2}+\cdots\cdot$

$$\cdots\cdot+\sqrt[n]{B^{n-1}}=A-B.$$

(6) $(\sqrt[n]{A}+\sqrt[n]{B})[\sqrt[n]{A^{n-1}}-\sqrt[n]{A^{n-2}B}+\sqrt[n]{A^{n-3}B^2}-\cdots\cdot$

$$\cdots\cdot-(-1)^n\sqrt[n]{B^{n-1}}]=A-(-1)^nB.$$

〔註〕消根因子.　由上列諸公式觀之.可見在

適當情形下，甲乙二式雖各含根式，其積卻可不含根式．當甲乙二式具有此種性質時，甲式名曰乙式之消根因子，乙式亦為甲式之消根因子．

"有理化因式"

例如 $\sqrt{A}+\sqrt{B}$ 為 $\sqrt{A}-\sqrt{B}$ 之消根因子，~~$\sqrt{A}$~~

"有理化因式"

$\sqrt{A}-\sqrt{B}$ 亦為 $\sqrt{A}+\sqrt{B}$ 之消根因子．

又如 $\sqrt{A}+\sqrt[3]{B}$ 與 $\sqrt[3]{A^2}-\sqrt[3]{AB}+\sqrt[3]{B^2}$ 互為消根因子．

上列諸公式之要義，卽在明示吾人以如何求出已知根式之消根因子．

〔例一〕 求 $\sqrt[3]{2}-\sqrt[3]{3}$ 之消根因子．

〔解法〕 因 $(\sqrt[3]{2}-\sqrt[3]{3})(\sqrt[3]{4}+\sqrt[3]{6}+\sqrt[3]{9})=2-3=-1$．

$A - B$ $\sqrt{A^2} + \sqrt{AB} + \sqrt{B^2}$

故 $\sqrt[3]{2}-\sqrt[3]{3}$ 之消根因子為 $\sqrt[3]{4}+\sqrt[3]{6}+\sqrt[3]{9}$．

〔例二〕 求 $\sqrt{2}+\sqrt{3}+\sqrt{5}$ 之消根因子．

〔解法〕 $(\sqrt{2}+\sqrt{3}+\sqrt{5})(\sqrt{2}+\sqrt{3}-\sqrt{5})$

$$=(\sqrt{2}+\sqrt{3})^2-5=2\sqrt{6}.$$

$$2\sqrt{6}\cdot\sqrt{6}=2\cdot 6=12.$$

故 $\sqrt{2}+\sqrt{3}+\sqrt{5}$ 之消根因子為 $(\sqrt{2}+\sqrt{3}-\sqrt{5})\sqrt{6}$．

習題二十九

求下列各式之消根因子:—

1. $\sqrt[3]{180}$	2. $\sqrt{135}$
3. $\sqrt[5]{ab^2c^3}$	4. $\sqrt{2}+\sqrt{5}$
5. $\sqrt[3]{2}+\sqrt[3]{5}$	6. $\sqrt{2}-\sqrt{5}$
7. $\sqrt[3]{2}-\sqrt[3]{5}$	8. $\sqrt[3]{4}-\sqrt[3]{10}+\sqrt[3]{25}$
9. $\sqrt{2}-\sqrt{3}+\sqrt{7}$	10. $\sqrt[5]{2}-\sqrt[5]{3}$
11. $\sqrt[4]{2}-\sqrt[4]{3}$	12. $1+\sqrt[4]{2}$
13. $\sqrt[3]{2}+\sqrt{3}$	14. $\sqrt[3]{3}-\sqrt{2}$
15. $\sqrt{2}+\sqrt{5}+\sqrt{6}$	16. $\sqrt[3]{25}+\sqrt[3]{15}+\sqrt[3]{9}$

分之生化因式之 用以之

§59. 不盡根式之除法. 演算根式除法,卽以 不盡根數 根式之消根因子同乘被除式與除式,而化簡其 在分母上 結果.

〔例一〕 $$\frac{1}{\sqrt[3]{4}}=\frac{\sqrt[3]{2}}{\sqrt[3]{4}\cdot\sqrt[3]{2}}=\frac{\sqrt[3]{2}}{2}$$

〔例二〕 $$\frac{1}{\sqrt{5}+\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{5}-\sqrt{2}}{(\sqrt{5}+\sqrt{2})(\sqrt{5}-\sqrt{2})}$$

$$=\frac{\sqrt{5}-\sqrt{2}}{3}.$$

〔例三〕 $$\frac{\sqrt{60}}{\sqrt{2}+\sqrt{5}-\sqrt{6}}=\frac{\sqrt{60}(\sqrt{2}+\sqrt{5}+\sqrt{6})}{(\sqrt{2}+\sqrt{5})^2-6}$$

$$=\frac{(2\sqrt{30}+10\sqrt{3}+6\sqrt{10})(2\sqrt{10}-1)}{(2\sqrt{10}-1)(2\sqrt{10}+1)}$$

$$=\frac{400\sqrt{3}+20\sqrt{30}+120-2\sqrt{30}-10\sqrt{3}-6\sqrt{10}}{39}$$

$$=\frac{30\sqrt{3}+18\sqrt{30}-6\sqrt{10}+120}{39}$$

$$=\frac{390\sqrt{3}-6\sqrt{10}+120}{39}.$$

$$=\frac{10\sqrt{3}+6\sqrt{30}-2\sqrt{10}+40}{13}$$

〔註〕 演根式除法何以須將除式中之根式消去？例如欲求 $\frac{1}{\sqrt{5}+\sqrt{2}}$ 之近似值至小數三位，由原式計算應爲 $\frac{1}{\sqrt{5}+\sqrt{2}}=\frac{1}{2.236+1.414}=\frac{1}{3.650}=?$

但若先消分母中的根式，則

$$\frac{1}{\sqrt{5}+\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{5}-\sqrt{2}}{3}=\frac{2.236-1.414}{3}$$

$$=\frac{.822}{3}=?$$

$\frac{1}{3.650}$ 與 $\frac{.822}{3}$ 之結果雖均爲 .274，但由後式求商，較之由前式求商，二者孰便？然則演根式除算時，必將除式中之根式消去者，豈無故歟？

習題三十

化簡下列各式：—

26 $\frac{\sqrt{2}+\sqrt{4}}{(\sqrt{4}-\sqrt{25})(\sqrt{2}+\sqrt{5})}=\frac{\sqrt{2}+\sqrt{4}}{(4\sqrt{2}-4\sqrt{5})(4\sqrt{2}+4\sqrt{5})}=\frac{\sqrt{2}+\sqrt{5}}{\sqrt{2}-\sqrt{5}}=\frac{(\sqrt{2}+\sqrt{4})}{(\sqrt{2}-\sqrt{5})}$

$\frac{\sqrt{4}+\sqrt{8}+\sqrt{10}+\sqrt{20}}{2-5}=\frac{4+2\sqrt{2}+\sqrt{10}+2\sqrt{5}}{-3}$

$= \frac{(6+2\sqrt{2}-2\sqrt{3}-2\sqrt{6})\sqrt{2}}{2\sqrt{2}\cdot\sqrt{2}}$

$= \frac{6\sqrt{2}+4-2\sqrt{6}-4\sqrt{3}}{4}$

$= \frac{2+3\sqrt{2}-2\sqrt{3}-\sqrt{6}}{2}$

1. $\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}}$

2. $\frac{\sqrt{35}}{\sqrt{5}}$

3. $\frac{\sqrt[3]{2}}{\sqrt[3]{9}}$

4. $\frac{1}{\sqrt[4]{8}}$

5. $\frac{1}{\sqrt{27}}$

6. $\frac{1}{\sqrt[3]{2}}$

7 $\frac{\sqrt[3]{45}}{\sqrt[3]{80}}$

8. $\frac{\sqrt{2}}{\sqrt[3]{2}}$

9. $\frac{1}{\sqrt{5}+\sqrt{6}}$

10. $\frac{\sqrt{5}-\sqrt{3}}{\sqrt{5}+\sqrt{3}}$

11. $\frac{9}{3+\sqrt{5}}$

12. $\frac{3+\sqrt{5}}{\sqrt{3}+5}$

13. $\frac{1}{\sqrt{5}+\sqrt{5}+\sqrt{8}}$

14. $\frac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{5}+\sqrt{6}}$

15. $\frac{1+\sqrt{2}-\sqrt{3}}{1+\sqrt{2}+\sqrt{3}}$

16. $\frac{\sqrt{10}}{1+\sqrt{2}+\sqrt{5}}$

17. $\frac{1}{\sqrt[4]{3}+1}$

18. $\frac{1}{\sqrt[4]{5}-\sqrt[4]{3}}$

19. $\frac{1}{\sqrt[5]{3}-\sqrt[5]{2}}$

20. $\frac{1}{\sqrt[6]{5}+\sqrt[6]{3}}$

21. $\frac{1}{\sqrt{2}+\sqrt[3]{3}}$

22. $\frac{1}{\sqrt[4]{25}+\sqrt[3]{2}}$

23. $\frac{4}{2\sqrt[3]{2}-3\sqrt[3]{3}}$

24. $\frac{100}{\sqrt[3]{4}+\sqrt[3]{10}+\sqrt[3]{25}}$

25. $\frac{(\sqrt[4]{2}-\sqrt[4]{3})(\sqrt{2}+\sqrt{2})}{\sqrt[4]{8}-\sqrt[4]{12}+\sqrt[4]{18}-\sqrt[4]{27}}$

26. $\frac{\sqrt{2}+\sqrt{5}}{(\sqrt[8]{2}-\sqrt[8]{5})(\sqrt[8]{2}+\sqrt[8]{5})(\sqrt[4]{2}+\sqrt[4]{5})}$

$= 2\sqrt[4]{36} - 2\sqrt[4]{16} = 2\sqrt[4]{2^2 3^2} - 2\cdot 2 = 2\sqrt{2\cdot 3} - 4 = 2\sqrt{6}-4$

§60　兩個重要定理．下列兩個定理，在根式問題中，頗爲重要，學者應加注意．

定理一　任何二次根式，決不能化爲根式與非根式之和，即　$\sqrt{a} \neq b+\sqrt{c}$．

〔證〕假定　$\sqrt{a}=b+\sqrt{c}$

則依等量公理，得　$(\sqrt{a})^2=(b+\sqrt{c})^2$

即　$a=b^2+c+2b\sqrt{c}$

於是　$\dfrac{a-b^2-c}{2b}=\sqrt{c}$

此結果不通．〔參看§51(3)例一，例二之證明〕．

故　$\sqrt{a} \neq b+\sqrt{c}$

〔註1〕本定理在消極方面，可以糾正一種嚴重錯誤．例如在演算$\sqrt{55}$時，因依開方手續應得算式$\begin{array}{l|l} 55 & 7 \\ \underline{49} & \\ 6 & \end{array}$，遂謂$\sqrt{55}=7+\sqrt{6}$．此大誤矣！學者苟能明瞭上述定理，則此種錯誤，自可免去，因按之上理，$\sqrt{55}$不但不能化爲$7+\sqrt{6}$，且亦不能化爲$7+\sqrt{\text{任何數}}$也．

〔註2〕同樣，關於二次以上之根式亦有與上

述定理類似之定理：$\sqrt[m]{a} \neq b+\sqrt[m]{c}$.

以其爲用不廣，故略之.

定理二　若 $a+\sqrt{x}=b+\sqrt{y}$，則 $a=b$，$x=y$.

〔證〕　因 $a+\sqrt{x}=b+\sqrt{y}$.

故　$$\sqrt{x}=b-a+\sqrt{y}.$$

在此等式中如 $a-b$ 不爲零，則與定理一矛盾矣.

故 $a-b$.

必等於零. 故　$$a=b.$$

由是又得　$$x=y.$$

§61. 兩項二次根式之平方根. 依據前節定理二，可得根式之開方法. 根式開方之法，在原理上原不限於兩項二次根式，亦不限於開平方，特在實際上，究以兩項二次根式之開平方爲最簡而有用. 本節所述故以此類問題爲限.

〔例〕 求　$$\sqrt{9+2\sqrt{18}}=?$$

〔解法〕 假定 $\sqrt{9+2\sqrt{18}}=\sqrt{x}+\sqrt{y}$

則　$$9+2\sqrt{18}=x+y+2\sqrt{xy}$$

故　$$\begin{cases} x+y=9 \\ xy=18 \end{cases}$$

乃將18分爲各組因子得1, 18; 2, 9; 3, 6三種,其中3, 6之和爲9. 故和$x=3$, $y=6$.

$$\therefore\ \sqrt{9+2\sqrt{18}}=\sqrt{3}+\sqrt{6}$$

習題三十一

試求下列各式之平方根:—

1. $18+2\sqrt{56}$
2. $11-\sqrt{96}$
3. $15+4\sqrt{14}$
4. $26-4\sqrt{42}$
5. $34+2\sqrt{1377}$
6. $\sqrt{80}+2\sqrt{15}$
7. $18(\frac{7}{3}+\sqrt{5})$
8. $ax-2a\sqrt{ax-a^2}$
9. $2x+2\sqrt{x^2-y^2}$
10. $x+\sqrt{x^2-4y^2}$
11. $3a-\sqrt{5a^2+4ab-b^2}$
12. $1+m^2+\sqrt{1+m^2+m^4}$
13. $16\sqrt{2}+4\sqrt{30}$
14. $\sqrt{500}+\sqrt{480}$
15. $\sqrt{17+12\sqrt{2}}$
16. $\sqrt{248-32\sqrt{60}}$

$= 4\sqrt{5}+2\sqrt{15}$

$= 4\sqrt{5}(1+\ldots$

原式 $= 3a-2\sqrt{\frac{5a^2+4ab-b^2}{4}}$

$(x+y)-2\sqrt{xy}$

$x-y=3a \cdots (1)$

$xy=\frac{5a^2+4ab-b^2}{4} \cdots (2)$

$(3a-y)y=\frac{5a^2+4a\ldots}{4}$

$12ay-4y^2=5a^2+4a\ldots$

$4y^2-12ay+5a^2+4a\ldots$

第十章

指數論

§62. 正整指數三大定律. 當 m, n 爲正整數時,依指數定義,可得下列三種定律:

(1) $$a^m \cdot a^n = a^{m+n}$$

(2) $$(a^m)^n = a^{mn}$$

(3) $$(ab)^n = a^n b^n$$

〔證 1〕 $a^m = a \cdot a \cdot a \cdots\cdots$ 到 m 個 a

$a^n = a \cdot a \cdot a \cdots\cdots$ 到 n 個 a

$\therefore\ a^m a^n = a \cdot a \cdot a \cdots\cdots$ 到 $(m+n)$ 個 a

$= a^{m+n}$

〔證 2〕 $(a^m)^n = a^m \cdot a^m \cdot a^m \cdots\cdots$ 到 n 個 a^m.

$= a^{m+m+m+\cdots\cdots+}$ 到 n 個 m.

$= a^{mn}$.

〔證 3〕 $(ab)^n = ab \cdot ab \cdot ab \cdots\cdots$ 到 n 個 ab.

$= [a \cdot a \cdot a \cdots\cdots$ 到 n 個 $a]$

$\times [b \cdot b \cdot b \cdots\cdots$ 到 n 個 $b]$

$= a^n b^n$

§63. 指數意義之推廣. 前節所述諸律中,指數 m, n 均限於正整數;不能爲負數,亦不能爲分數.此種限制,使指數定律應用之範圍不廣.算學家嫌其不便,乃將指數之意義推廣,使上述諸律,不特在指數爲正數時可以適用,即在指數爲分數或負指數時,亦無不通行,此指數意義推廣之目的也.如何推廣?說來甚長,本節所述,其大綱焉.以下數節(§§ 63——69),再分論之.

依指數最初意義,a^n 者,將 a 自乘 n 次也.今若 n 爲負數,例如 -5,則 a^{-5} 者豈非將 a 自乘 -5 次乎?又若 n 爲分數,例如 $\frac{2}{3}$,則 $a^{\frac{2}{3}}$ 者豈非將 a 自乘 $\frac{2}{3}$ 次乎?二者之無意義,不待辨而自明.故在 n 爲分數或負數時,a^n 者,決非將 a 自乘 n 次之謂,必須另予以新意義矣.

在正整指數定義中,原不包含負指數或分指

數.負指數分指數之與正整指數乃截然不同之兩物.對於此種新物(負指數,分指數),就論理方面言,本可任下其定義,但爲適合前節諸律起見,所下定義,又非與前節諸律一致不行.

乃任取上節諸律之一,假定新指數亦能適合該律,以察新指數有何必要的意義.即依此意以定此新指數之意義,本此定義,再證上節諸律是否一一適合.如其合也,則在指數諸律中,指數不必限於正整數,而指數推廣之目的達矣.

§64. **分指數的意義.** $a^{\frac{p}{q}}=?$可用指數第一律以求其意義如下:—

〔特例〕 求 $a^{\frac{2}{3}}=?$

依指數第一律得 $a^{\frac{2}{3}}.a^{\frac{2}{3}}.a^{\frac{2}{3}}=a^{\frac{2}{3}+\frac{2}{3}+\frac{2}{3}}=a^2$

即 $$(a^{\frac{2}{3}})^3=a^2$$

可見 $$a^{\frac{2}{3}}=\sqrt[3]{a^2}$$

〔通例〕 求 $a^{\frac{p}{q}}=?$

依指數第一律,得

$a^{\frac{p}{q}}.\ a^{\frac{p}{q}}.\ a^{\frac{p}{q}}.\ \cdots\cdots$到 q 個 $a^{\frac{p}{q}}=a^{\frac{p}{q}+\frac{p}{q}+\frac{p}{q}+\cdots\cdots+到\,q\,個\frac{p}{q}}$

即 $$(a^{\frac{p}{q}})^q = a^p$$

可見 $$a^{\frac{p}{q}} = \sqrt[q]{a^p}$$

〔例一〕 $$27^{\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{27} = 3$$

〔例二〕 $$125^{\frac{4}{3}} = \sqrt[3]{125^4} = (\sqrt[3]{125})^4 = 5^4$$
$$= 625.$$

§65. 零指數的意義. $a^0 = ?$ 亦可用指數第一律以求其意義如下:—

依指數第一律得 $$a^0 \cdot a^n = a^{0+n} = a^n.$$

故 $$a^0 = \frac{a^n}{a^n} = 1$$ 因到 a^n [illegible]

可見 $$\boxed{a^0 = 1.}$$

例如 $2^0 = 1,\ 3^0 = 1,\ 5^0 = 1,\ 100^0 = 1,\ 1000^0 = 1,$

$(x^2 + y^2)^0 = 1.$

§66. 負指數的意義. $a^{-n} = ?$ 亦可用指數第一律以求其意義如下:—

依指數第一律得 $$a^n a^{-n} = a^{n-n} = a^0$$

故 $$a^{-n} = \frac{a^0}{a^n}$$

可見 $$\boxed{a^{-n} = \frac{1}{a^n}}$$

〔例一〕 $$3^{-4}=\frac{1}{3^4}=\frac{1}{81}.$$

〔例二〕 $$64^{-\frac{2}{3}}=\frac{1}{64^{\frac{2}{3}}}=\frac{1}{\sqrt[3]{64^2}}=\frac{1}{16}$$

習題三十二 不作

化簡下列各式:—

1. $4^{\frac{3}{2}}$
2. $100^{\frac{5}{2}}$
3. 2^{-6}
4. $25^{-\frac{1}{2}}$
5. $64^{-\frac{2}{3}}$
6. $81^{-\frac{3}{4}}$
7. $(729)^{\frac{4}{3}}$
8. $(256)^{-\frac{3}{4}}$
9. 1350^{1}
10. $(-27)^{-\frac{4}{3}}$
11. $1125^{-\frac{1}{3}}$
12. $(3a^9+8a^8)^0$
13. $(x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}$
14. $a^{-\frac{1}{2}}b^{-\frac{1}{3}}c^{-\frac{1}{4}}$
15. $\sqrt{ac}\left(\frac{a}{c}+\frac{c}{a}+2\right)^{\frac{1}{2}}$
16. $(x^2-2yx+y^2)^{\frac{3}{2}}$
17. $(x^6y^2z^4)^{\frac{1}{2}}$
18. $(729a^6b^9c^3)^{\frac{2}{3}}$
19. $\frac{a^{-m}}{b^{-n}}$
20. $\frac{64^{-\frac{1}{3}}}{72^{-\frac{2}{3}}}$
21. $\frac{a^{-1}b^{-2}c^{-3}}{xy}$
22. $\frac{xy}{a^{-1}b^{-2}c^{-3}}$
23. $\frac{x^{-2}y^{-3}}{a^{-2}b^{-3}}$
24. $\frac{x^{-2}+y^{-3}}{a^{-2}+b^{-3}}$

§67. 零指數,分指數,負指數的定義. 由上三節觀之,可得下列三個定義.

(一) 分指數的定義: $a^{\frac{p}{q}}=\sqrt[q]{a^{q}}$

以語言表之: $a^{\frac{p}{q}}$即爲a^{p}的q次根.

(二) 零指數的定義: $a^{0}=1.$

以語言表之: 任何數的0次冪皆爲1.

(三) 負指數的定義: $a^{-n}=\frac{1}{a^{n}}.$

以語言表之: a^{-n}即爲a^{n}的倒數.　　適合與也應律.

依此三種定義,在指數爲負數,分數或零時,指數三律是否皆能適合,尙不可知!欲得其詳,仍須一一證明.下節先證第一律,其他兩律學者可自證之.

§68. 當m, n爲任何有理數時,證$a^{m}\cdot a^{n}=a^{m+n}$

本定律可分五層證之

(一) 求證 $a^{\frac{p}{q}}\cdot a^{\frac{r}{s}}=a^{\frac{p}{q}+\frac{r}{s}}$ (p, q, r, s爲正整數.)

$$a^{\frac{p}{q}}\cdot a^{\frac{r}{s}}=\sqrt[q]{a^{p}}\cdot\sqrt[s]{a^{r}}\qquad\text{(分指數定義.)}$$

$$=\sqrt[qs]{a^{ps}}\cdot\sqrt[qs]{a^{qr}}\qquad\text{(§53公式3.)}$$

$$=\sqrt[qs]{a^{ps+qr}}$$ (§53 公式1.)

$$=a^{\frac{ps+qr}{qs}}$$ (分指數定義.)

$$=a^{\frac{p}{q}+\frac{r}{s}}.$$

(二)　當 $\frac{p}{q}>\frac{r}{s}$ 時，求證 $a^{\frac{p}{q}}a^{-\frac{r}{s}}=a^{\frac{p}{q}-\frac{r}{s}}$

$$a^{\frac{p}{q}}.a^{-\frac{r}{s}}=\sqrt[q]{a^p}\div\sqrt[s]{a^r}$$ (分指數負指數定義.)

$$=\sqrt[qs]{a^{ps}}\div\sqrt[qs]{a^{qr}}$$ (§53 公式3.)

$$=\sqrt[qs]{a^{ps}\div a^{qr}}$$ (§53 公式2.)

$$=\sqrt[qs]{a^{ps-qr}}$$ 〔§62 公式1，§67(三).〕

$$=a^{\frac{ps-qr}{qs}}$$ (分指數定義.)

$$=a^{\frac{p}{q}-\frac{r}{s}}$$

(三)　當 $\frac{p}{q}<\frac{r}{s}$ 時，求證 $a^{\frac{p}{q}}.a^{-\frac{r}{s}}=a^{\frac{p}{q}-\frac{r}{s}}$

$$a^{\frac{p}{q}}.a^{-\frac{r}{s}}=\frac{1}{a^{-\frac{p}{q}}}\cdot\frac{1}{a^{\frac{r}{s}}}$$ (負指數定義.)

$$=\frac{1}{a^{-\frac{p}{q}+\frac{r}{s}}}$$ 〔本節(二).〕

$$=\frac{1}{a^{-\left(\frac{p}{q}-\frac{r}{s}\right)}}$$ (插入括號.)

$$=a^{\frac{p}{q}-\frac{r}{s}}$$ (負指數定義.)

兩數相乘二、兩指數相

(四) 求證 $a^{-\frac{p}{q}}.a^{-\frac{r}{s}}=a^{-\frac{p}{q}-\frac{r}{s}}.$

$$a^{-\frac{p}{q}}.a^{-\frac{r}{s}}=\frac{1}{a^{\frac{p}{q}}}\cdot\frac{1}{a^{\frac{r}{s}}} \qquad \text{(負指數定義.)}$$

$$=\frac{1}{a^{\frac{q}{p}+\frac{r}{s}}} \qquad \text{〔本節(一).〕}$$

$$=a^{-\left(\frac{p}{q}+\frac{r}{s}\right)} \qquad \text{(負指數定義.)}$$

$$=a^{-\frac{p}{p}-\frac{r}{s}}$$

(五) 求證 $a^m\cdot a^0=a^{m+0}.$

$$a^m\cdot a^0=a^m\cdot 1 \qquad \text{(零指數定義.)}$$

$$=a^m$$

習題三十三

1. 證 $a^m\div a^n=a^{m-n}$. (m, n 爲任何有理數.)

〔提示〕 試由指數第一律推得之,

2. 證指數定律: $(ab)^m=a^mb^m$. (m 爲任何有理數),

〔注意〕 本定律應分三層證之.

3. 證指數定律: $(a^m)^n=a^{mn}$. (m, n 爲任何有理數.)

〔注意〕 本定律應分下列三層證之:

1. m 爲任何數, n 爲正整數,
2. m 爲任何數, n 爲負分數,
3. m 爲任何數, n 爲負有理數.

5
−9

§69. **關於指數之結論.** 由前節及習題三十三觀之,可見依§67所下負指數,零指數,分指數之定義,§62所述指數,三大定律均能成立.換言之,此類指數定律可以適用於任何有理指數,而不限於正整指數矣.〔註:指數不但爲有理數,並且可爲無理數,虛數等等,其詳非本書範圍所可及.〕於是乃有下列諸算法.

〔例一〕　$a^{\frac{1}{3}}b^{\frac{1}{2}}c^{\frac{1}{4}}a^{\frac{2}{3}}b^{\frac{1}{2}}c^{\frac{1}{4}}=a^{\frac{1}{3}+\frac{2}{3}}b^{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}}c^{\frac{1}{4}+\frac{1}{4}}=abc^{\frac{1}{2}}$

〔例二〕　$(5x^3+x^2y-xy^2+10y^3)\div x^{\frac{1}{2}}$

$$=5x^{\frac{5}{2}}+x^{\frac{3}{2}}y-x^{\frac{1}{2}}y^2+10x^{-\frac{1}{2}}y^3$$

〔例三〕　$(x-y)\div(\sqrt{x}+\sqrt{y})=(x-y)\div(x^{\frac{1}{2}}+y^{\frac{1}{2}})$

$$=x^{\frac{1}{2}}-y^{\frac{1}{2}}$$

〔例四〕　$(x+y)\div(x^{\frac{1}{3}}+y^{\frac{1}{3}})=\left[(x^{\frac{1}{3}})^3+(y^{\frac{1}{3}})^3\right]$

$$\div(x^{\frac{1}{3}}+y^{\frac{1}{3}})=x^{\frac{2}{3}}-x^{\frac{1}{3}}y^{\frac{1}{3}}+y^{\frac{2}{3}}$$

〔例五〕　$(32x^{-6}+12x^{-4}+10x^{-2}-12)\div(2x^{-2}-1)$

$$=16x^{-4}+14x^{-2}+12$$

〔算式〕

$$
\begin{array}{r|l}
2x^{-2}-1)\,32x^{-6}+12x^{-4}+10x^{-2}-12 & 16x^{-4}+14x^{-2}+12 \\
32x^{-6}-16x^{-4}\phantom{+10x^{-2}-12} & \\
\hline
28x^{-4}+10x^{-2}-12 & \\
28x^{-4}-14x^{-2} & \\
\hline
24x^{-2}-12 & \\
24x^{-2}-12 & \\
\hline
0 &
\end{array}
$$

〔例六〕 $x\sqrt{x\sqrt{x\sqrt{x}}}=x[x(x\cdot x^{\frac{1}{2}})^{\frac{1}{2}}]^{\frac{1}{2}}$

$$=x\cdot x^{\frac{1}{2}}(x\cdot x^{\frac{1}{2}})^{\frac{1}{4}}$$

$$=x\cdot x^{\frac{1}{2}}x^{\frac{1}{4}}x^{\frac{1}{8}}$$

$$=x^{1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}}=x\sqrt[8]{x^7}$$

〔例七〕 證 $\sqrt[m]{a^n}=(\sqrt[m]{a})^n$.

〔證法〕 $\sqrt[m]{a^n}=a^{\frac{n}{m}}=(a^{\frac{1}{m}})^n=(\sqrt[m]{a})^n$

〔注意〕 由上二例觀之,可見根式問題往往可變爲指數問題以求其解,且經此一變之後,運算手續亦可簡便不少.

〔例八〕 試變$\dfrac{a^{-m}b^n}{x^{-p}y^q}$使分子不含$a,b$,分母不含$x,y$.

〔解法〕

$$\frac{a^{-m}b^n}{x^{-p}y^q}=\frac{\frac{1}{a^m}b^n}{\frac{1}{x^p}y^q}=\frac{x^p.b^n}{y^q.a^m}$$

$$=\frac{x^py^{-q}}{\frac{a^m}{b^n}}=\frac{x^py^{-q}}{a^mb^{-n}}$$

〔注意〕 由本例觀之,可見分子中任何因子可移至分母;分母中任何因子亦可移至分子,只須改變該因子原有指數之符號而已.

〔例九〕 試求 $x+1+4x^{\frac{3}{4}}+4x^{\frac{1}{4}}+6x^{\frac{1}{2}}$ 之平方根

〔解法〕

$$
\begin{array}{r|l}
 & x+4x^{\frac{3}{4}}+6x^{\frac{2}{4}}+4x^{\frac{1}{4}}+1\;\big|\;\underline{x^{\frac{1}{2}}+2x^{\frac{1}{4}}+1} \\
 & x \\
\hline
2x^{\frac{1}{2}} & 4x^{\frac{3}{4}}+6x^{\frac{2}{4}}+4x^{\frac{1}{4}}+1 \\
+2x^{\frac{1}{4}} & \\
\hline
2x^{\frac{1}{2}}+2x^{\frac{1}{4}} & 4x^{\frac{3}{4}}+4x^{\frac{2}{4}} \\
\hline
2x^{\frac{1}{2}}+4x^{\frac{1}{4}} & 2x^{\frac{2}{4}}+4x^{\frac{1}{4}}+1 \\
+1 & \\
\hline
2x^{\frac{1}{2}}+4x^{\frac{1}{4}}+1 & 2x^{\frac{2}{4}}+4x^{\frac{1}{4}}+1 \\
\hline
 & 0
\end{array}
$$

故所求之平方根爲 $x^{\frac{1}{2}}+2x^{\frac{1}{4}}+1$.

習題三十四

化簡下列諸式,並使其結果不含負指數.

1. $\dfrac{2x^{-3}}{\sqrt[5]{32^{-4}}}$ 2. $\dfrac{x^{-1}+y}{z}$

3. $\left(\dfrac{81x^{-8}y^{5}}{25a^{4}b^{-10}}\right)^{-\frac{3}{2}}$ 4. $\dfrac{x^{-3}y^{-2}z^{-1}}{a^{-1}b^{-2}c^{-3}}$

5. $\left(\dfrac{x^{3}y^{2}z}{ab^{2}c^{3}}\right)^{-2}$ 6. $\left(\dfrac{x^{3}y^{2}z}{ab^{2}c^{3}}\right)^{-\frac{3}{2}}$

(9)

$$=\left(\frac{3^3a^{-3}b^{-6}c^{-9}}{4^3x^{-3}y^{-1}z^{-6}}\right)^{-\frac{1}{3}}=\frac{3^{3(-\frac{1}{3})}a^{(-3)(-\frac{1}{3})}b^{(-6)(-\frac{1}{3})}c^{(-9)(-\frac{1}{3})}}{4^{3(-\frac{1}{3})}x^{(-3)(-\frac{1}{3})}y^{(-1)(-\frac{1}{3})}z^{(-6)(-\frac{1}{3})}}$$

$$=\frac{3^{-1}ab^2c^3}{4^{-1}xy^{\frac{1}{3}}z^2}=\frac{4ab^2c^3}{3xy^{\frac{1}{3}}z^2}$$

7. $\left(\dfrac{x^{-3}y^{-2}z^{-1}}{a^{-1}b^{-2}c^{-3}}\right)^{-\frac{1}{3}}$ 8. $\left(\dfrac{(-3)^{\frac{1}{3}}\cdot\sqrt[6]{x^{-5}}}{(\frac{1}{2})^{-\frac{1}{3}}\cdot\sqrt[9]{y^{-4}}}\right)^{-\frac{9}{4}}$

9. $\left(\dfrac{27a^{-3}b^{-6}c^{-9}}{64x^{-3}y^{-1}z^{-6}}\right)^{-\frac{1}{3}}$ 10. $\left\{\dfrac{\sqrt{a}}{\sqrt[3]{b^7}}\cdot\left(\dfrac{a}{b}\right)^{-\frac{1}{2}}\dfrac{\sqrt[6]{a}}{b^{-\frac{1}{2}}}\right\}^2$

11. $4m^{\frac{n}{3}},3m^{-\frac{n}{3}}\div 6m^{-\frac{2n}{3}}$ 12. $\sqrt{2}\cdot\sqrt[3]{2}\cdot\sqrt[4]{2}\cdot\sqrt[6]{2}$

13. $\sqrt[4]{125}\cdot\sqrt[6]{5}\cdot\sqrt[3]{25}\cdot\sqrt[18]{5}$ 14. $\sqrt[4]{x}\div(\sqrt[6]{x^5}\cdot\sqrt[9]{x^4})$

15. $\sqrt{2}\cdot\sqrt[3]{4}\div\sqrt[6]{32}$ 16. $\sqrt[a+b]{x^a}\cdot\sqrt[a-b]{x^b}\div\sqrt[a^2-b^2]{x^{2ab}}$

17. $\sqrt[m]{x^{-2}y^{-3}z^{-1}}\div\sqrt[2m]{x^{m-4}y^{m-6}z^{m-2}}$

18. $\sqrt[7]{\left(\dfrac{1}{1\div\sqrt{a^7}}\right)^2}$ 19. $\dfrac{3^{n+1}}{5^{n+1}}\div\dfrac{9^{n-1}}{3^{n^2-1}}$

20. $\left\{\dfrac{a^{m+n}}{\sqrt[n]{a^{m^2-mn}}}\cdot a^{-m}\right\}^{-\frac{1}{m}}$ 21. $\sqrt[a]{\dfrac{\sqrt[b]{x}}{\sqrt[c]{x}}}\cdot\sqrt[b]{\dfrac{\sqrt[c]{x}}{\sqrt[a]{x}}}\cdot\sqrt[c]{\dfrac{\sqrt[a]{x}}{\sqrt[b]{x}}}$.

22. $\dfrac{x\sqrt{x\sqrt{x\sqrt{x\sqrt{x}}}}}{\sqrt[3]{x\sqrt[3]{x\sqrt[3]{x}}}}$ 23. $\left(\dfrac{a^{-6}b^{-3}}{x^{-3}y^{-9}}\right)^{-\frac{1}{3}}\left(\dfrac{x^{-2}y^{-4}}{a^{-2}b^{-6}}\right)^{-\frac{1}{2}}$

題習三十五

試下列各乘除法:—

1. $(2x^2-3x^{-1}+2x-3)\cdot 6x^{\frac{1}{2}}y^{-2}$

2. $(3x^{\frac{1}{3}}+2x^{\frac{1}{2}}-4x^{\frac{1}{4}})\cdot 12x^{12}$

3. $(a+a^{-1})^2$

4. $(a+a^{-1})(a^2-1+a^{-2})$

5. $(a^{\frac{1}{3}}-b^{\frac{1}{3}})(a^{\frac{2}{3}}+a^{\frac{1}{3}}b^{\frac{1}{3}}+b^{\frac{2}{3}})$

$7a+2a^{\frac{3}{2}}-3a^{\frac{1}{2}})\div(2a^{\frac{1}{2}}+3)=2a^{\frac{3}{2}}-9a-3a^{\frac{1}{2}}+18=a-5a^{\frac{1}{2}}+6$

6. $(a^{\frac{1}{2}}-a^{\frac{1}{4}}b^{\frac{1}{4}}+b^{\frac{1}{2}})(a^{\frac{1}{2}}+a^{\frac{1}{4}}b^{\frac{1}{4}}+b^{\frac{1}{2}})$

7. $(x^{-1}y^{-1}+z^{-1})^2$

8. $(a^m+a^{-m})^2$

9. $(a^{-m}+b^{-m})^2$

10. $(x^{\frac{1}{4}}+y^{\frac{1}{4}})(x^{\frac{1}{2}}+y^{\frac{1}{2}})(x^{\frac{1}{4}}-y^{\frac{1}{4}})$

11. $\left(\sqrt{\frac{a}{b}}+\sqrt{\frac{b}{c}}\right)\left(\sqrt{\frac{b}{a}}+\sqrt{\frac{c}{b}}\right)$

12. $(x+3x^{-1}-4)\div(x^{\frac{1}{2}}-x^{-\frac{1}{2}})$

13. $(4a^2+30a^{-1}-9-25a^{-2})\div(2+3a^{-1}-5a^{-2})$

14. $(x^n-2+x^{-n}-x^{-2n})(x^n+x^{-n}+1)$

15. $(\sqrt[3]{a^2}+2\sqrt[3]{ab}-\sqrt[3]{b^2})(\sqrt[3]{a^2}-3\sqrt[3]{ab}+2\sqrt[3]{b^2})$

16. $(\sqrt[3]{a^4}-4\sqrt[3]{b^2}-6a\sqrt[3]{b}+9\sqrt[3]{a^2b^2})\div(2\sqrt[3]{b^2}-3\sqrt[3]{ab}+\sqrt[3]{a^2})$

17. $(18-7a+2a^{\frac{3}{2}}-3a^{\frac{1}{2}})\div(2a^{\frac{1}{2}}+3)$ $=a-5a^{\frac{1}{2}}+6$

試求下列三式之平方根.(題 18—20.)

18. $x^2-2x\sqrt{a}+3a-\frac{2a\sqrt{a}}{x}+\frac{a^2}{x^2}$

19. $25a^2+9a^{-2}+40a+24a^{-1}+46$

20. $2x^m+2x^{-m}+x^{2m}+x^{-2m}+3.$

21. 化簡$\left(\frac{4a}{9\sqrt[3]{x^2}}+\frac{2\sqrt{a}}{\sqrt[3]{x}}+\frac{19}{12}-\frac{3\sqrt[3]{x}}{2\sqrt{a}}+\frac{\sqrt[3]{x^2}}{4a}\right)^{\frac{1}{2}}$

22. 化簡$\left[x+3x^{\frac{2}{3}}+6\sqrt[3]{x}+7+\frac{6}{\sqrt[3]{x}}+\frac{3}{\sqrt[3]{x^2}}+x^{-1}\right]^{\frac{1}{2}}$

1) 定義
2) 重要的定律
3) 查數
4) 應用

$a^b = c$ 冪 指

$\log_a c = b$ 以a為底c的對數

$a = \sqrt[b]{c}$

第十一章

對　數

§70. 對數之需要.〔問題一〕 有345^{50}欲求其積之首四位,能以極簡手續行之否?

〔問題二〕 有$.123 \times 45.6 \div 78.9 \div 98.7 \times 4.65 \div 3.21 \times 213.4 \div 65.78$,欲其值使其首四位數完全準確,有最簡之法否?

〔問題三〕 $\sqrt[50]{345} = ?$欲求其值至小數三位,其法如何?

在此三例中,一二兩題依尋常乘除法雖亦可得其解,然手續至繁,非歷時甚久不爲功.至於最後一例,則依尋常開方法,根本無入手之方,遑論手續之繁簡乎哉?

然則欲解上列諸題.非另有新法不行!新法維何?即利用對數是也.利用對數,如何便能解決此

類問題? 說來甚長. 以下數節 (§§ 71——79), 當詳論之.

§ 71　**對數之意義.** 在等式 $a^x=M$ 中, 已知 a, x, 求指數

M 三者之二, 可求其他:—　底

$M=a^x$

(1)　已知 a, x 求 $a^x=?$ 是為乘方, 其中"?"名曰 a 之 x 次冪.　數

$a=\sqrt[x]{M}$

(2)　已知 x, M 求 $M=?^x$ 是為開方, 其中"?"名曰 M 之 x 次根.

以 a 為底求 M 的对数 x

(3)　已知 a, M 求 $M=a^?$ 是為求對數, 其中"?"名曰 M(底 a)之對數.

在開方, 算學家嫌算式 $M=?^x$ 不便於用, 別創算式 $\sqrt[x]{M}=?$ 以代之. 故算式 $M=?^x$ 與算式 $\sqrt[x]{M}=?$ 實表同一之關係.

同樣, 在對數, 算學家亦感算式 $M=a^?$ 之不便於用, 乃別創 $\log_a M=?$ 以代之. 故算式 $\log_a M=?$ 與算式 $M=a^?$ 亦表同一之關係: 不過在對數, 前式較後式為便耳.

〔例一〕 求　　$\log_2 32=?$

〔解法〕　$\because\quad 32=2\times2\times2\times2\times2=2^5$

$81 = 27^{?}$
$3^4 = (3^3)^{?}$

$$\therefore \quad \log_2 32 = 5$$

〔例二〕 求 $\log_{27} 81 = ?$

〔解法〕 $\because \quad 81 = 3^4 = 3^{3\times\frac{4}{3}} = 27^{\frac{4}{3}}$

$$\therefore \quad \log_{27} 81 = \frac{4}{3}.$$

〔例三〕 求 $\log_5 \frac{1}{125} = ?$

〔解法〕 $\because \quad \frac{1}{125} = \frac{1}{5^3} = 5^{-3}$

$$\therefore \quad \log_5 \frac{1}{125} = -3.$$

習題三十六

1. 求 $\log_{10}100 = ?$　　$\log_{10}1000 = ?$
　　$\log_{10}10000 = ?$ 4　　$\log_{10}100000 = ?$
2. 求 $\log_3 9 = ?$　　$\log_3 27 = ?$
　　$\log_3 81 = ?$　　$\log_3 243 = ?$
3. 求 $\log_5 25 = ?$ 2　　$\log_5 125 = ?$
　　$\log_5 625 = ?$　　$\log_5 3128 = ?$
4. 求 $\log_6 36 = ?$　　$\log_6 216 = ?$
　　$\log_6 1296 = ?$　　$\log_6 7776 = ?$
5. 求 $\log_{10}10 = ?$ 1　　$\log_3 3 = ?$
　　$\log_5 5 =$　　$\log_6 6 = ?$

对底与真数相同，
对数为1

6.　求 $\log_{10}1=?$ 0　　$\log_3 1=?$　　$\log_5 1=?$

7.　求 $\log_a a=?$　　$\log_a 1=?$

［注意］本題結果，頗爲重要，學者須熟記之.

8.　$\log_4 2=?$　　$\log_4 27=?$

　　$\log_4 32=?$　　$\log_4 128=?$

9.　$\log_9 3=?$　　$\log_9 27=?$

　　$\log_9 243=?$　　$\log_9 2187=?$

10.　$\log_8 2=?$ $\frac{1}{3}$　　$\log_8 16=?$　　$\log_8 128=?$

11.　$\log_{27} 3=?$　　$\log_{27} 81=?$　　$\log_{27} 2187=?$

12.　$\log_8 \frac{1}{8}=?$　　$\log_8 \frac{1}{16}=?$　　$\log_8 \frac{1}{128}=?$

13.　$\log_{27} \frac{1}{3}=?$　　$\log_{27} \frac{1}{81}=?$　　$\log_{27} \frac{1}{2187}=?$

14.　$\log_{10} 10=?$　　$\log_{10} 1=?$

　　$\log_{10} \cdot 1=?$　　$\log_{10} \cdot 01=?$ $\log_{10}\frac{1}{100}=-2$

　　$\log_{10} \cdot 001=?$ $\log_{10}\frac{1}{1000}=-3$　　$\log_{10} \cdot 0001=?$

　　$\log_{10} \cdot 00001=?$　　$\log_{10} \cdot 000001=?$

§72. 對數三大定律. 依上節對數定義可得三大定律.此三大定律,乃對數中一切變化之基本,有之,則對數之功用乃彰;無之,則對數之效率不存,學者於此三律,不可不深致意焉.三律爲何?述之如下:—

$$\text{I.}\qquad \log_a(MN)=\log_a M+\log_a N.$$

II. $\log_a\left(\dfrac{M}{N}\right)=\log_a M-\log_a N,$ 二数的商的对数＝二数对数的差

III. $\log_a(M^N)=N\log_a M.$

〔證 I〕 設 $\log_a M=x,\quad \log_a N=y.$

則 $M=a^x,\qquad N=a^y.$

故 $\boxed{MN=a^x\cdot a^y=a^{x+y}.}$

卽 $\log_a(MN)=x+y.$

$$\therefore\quad \log_a(MN)=\log_a M+\log_a N.$$

〔證 II〕 仍設 $\log_a M=x,\quad \log_a N=y.$

則 $M=a^x,\qquad N=a^y.$

故 $\dfrac{M}{N}=\dfrac{a^x}{a^y}=a^{x-y}.$

$$\therefore\quad \log_a\left(\frac{M}{N}\right)=x-y=\log_a M-\log_a N.$$

〔證 III〕 設 $\log_a M=x.$

則 $M=a^x.$

故 $M^N=(a^x)^N=a^{Nx}$

$$\therefore\quad \log_a(M^N)=Nx\ =N\log_a M.$$

〔例一〕 已知 $\log_{10}8975=3.95303.$

$\log_{10}5798=3.76328.$

求 $\log_{10}(8975\times5798)=?$

〔解法〕 $$\log_{10}(8975\times5798)=\log_{10}8975+\log_{10}5798.$$
$$=3.95303+3.96328=7.71631.$$

〔例二〕 已知 $\log_{10}8975=3.95303.$

$\log_{10}5798=3.76328.$

求 $$\log_{10}\frac{8978}{5798}=?$$

〔解法〕 $$\log_{10}\frac{8975}{5798}=\log_{10}8975-\log_{10}5798$$
$$=3.95303-3.96328=1.18975.$$

〔例三〕 已知 $\log_{10}3=.47712$

求 (1) $\log_{10}3^{100}=?$ (2) $\log_{10}\sqrt[100]{3}=?$

〔解法〕 (1) $$\log_{10}3^{100}=100\log_{10}3=100\times.47712$$
$$=47.712.$$

(2) $$\log_{10}\sqrt[100]{3}=\log_{10}\left(3^{\frac{1}{100}}\right)=\frac{1}{100}\log_{10}3=\frac{.47712}{100}$$
$$=.0047712.$$

〔注意〕 由上三例觀之;可見應用本節三律,則

(*a*) 欲求積之對數,不必先求積,然後再求其對數.

(b) 欲求商之對數,不必先求商,然後再求其對數.

(c) 欲求冪之對數,不必先求冪,然後再求其對數.

(d) 欲求方根之對數,不必先求方根,然後再求其對數.

因此,在計算時可省去手續不少,對數之所以有用卽在於此.

習題三十七

1. 證 $\log_a(MNP)=\log_a M+\log_a N+\log_a P$

$\log_a(MNPQ)=\log_a M+\log_a N+\log_a P+\log_a Q.$

$\log_a(MNPQR)=\log_a M+\log_a N+\log_a P+\log_a Q+\log_a R.$

2. 證 $\log_a\frac{M}{PQ}=\log_a M-\log_a P-\log_a Q$

$\log_a\frac{M}{PQR}=\log_a M-\log_a P-\log_a Q-\log_a R$

$\log_a\frac{MN}{PQR}=\log_a M+\log_a N-\log_a P-\log_a Q-\log_a R.$

3. 已知 $\log_{10}3=.47712$. $\log_{10}4=.60206$, 求

(1) $\log_{10}12=?$　(2) $\log_{10}36=?$　(3) $\log_{10}54=?$

(4) $\log_{10}\frac{27}{32}=?$　(5) $\log_{10}2\ 25=?$　(6) $\log_{10}\sqrt[3]{1.125}=?$

8000 等分、次方存-80

(7) $\log_{10}\sqrt[50]{8}=?$　(8) $\log_{10}\sqrt[100]{\frac{2}{3}}=?$　(9, $\log_{10}(2^{30}\times 3^{40})=?$

4. 已知 $\log_{10}4=.60206$,　$\log_{10}5=.69897$, 求

(1) $\log_{10}2=?$　(2) $\log_{\ 0}\sqrt[3]{2}=?$　(3) $\log_{10}40=?$

(4) $\log_{10}800=?$　(5) $\log_{10}\sqrt[5]{.016}=?$　(6) $\log_{10}62500=?$

5. 已知 $\log_{10}2=.30103$.　$\log_{10}3=.47712$.

$\log_{10}7=.84510$.　$\log_{10}5=.69897$.

求 (1) $\log_{10}\frac{3375}{6272}=?$　(2) $\log_{10}(2025\div 3136)^{\frac{1}{2}}$

6. 已知 $\log_{10}5.43=.73480$,　$\log_{10}345=2.53782$, 求

(1) $\log_{10}(1\div 5.43)^2=?$　2) $\log_{10}(1\div 5.43^2\times 345^3)^{\frac{1}{5}}=?$

(3) $\log_{10}\frac{1}{\sqrt[3]{5.43}}=?$　(4) $\log_{10}\frac{10000}{5.43^2\times\sqrt[3]{345}}=?$

7. 已知 $\log_{10}345=2.53782$. 求 $\log_{10}3450=?$ $\log_{10}34500=?$

$\log_{10}345000=?$　$\log_{10}3450000=?$　$\log_{10}34.5=?$

$\log_{10}3.45=?$　$\log_{10}.345=?$　$\log_{10}.0345=?$

$\log_{10}.00345=?$　$\log_{10}.000345=?$

§73. 常用對數. 如上所述,對數之底 a 本可任為何數不必限於某一特值,但為實用便利計,通常恆以10為底.凡以10為底之對數名曰常用對數.此後所述,多屬此類.

常用對數之底10恆略而不寫.非常用對數,其底必須註明.例如 $\log_{10}100$, $\log_{10}150$, $\log_{10}N$ 等應省

寫爲 $\log 100$, $\log 150$, $\log N$; 而 $\log_8 64$, $\log_3 100$, $\log_3 27$, 則不能省爲 $\log 64$, $\log 100$, $\log 27$. 是故 $\log M = ?$ 者, 即 $M = 10^?$ 之謂也.

§ 74. **定位部與定値部.** 在常用對數中,凡數之爲10的整次冪者,其對數恆爲整數.例如:

$$\log 100 = 2 \qquad [\because 10^2 = 100]$$

$$\log 10 = 1 \qquad [\because 10^1 = 10]$$

$$\log 1 = 0 \qquad [\because 10^0 = 1]$$

$$\log .1 = -1 \qquad [\because 10^{-1} = .1]$$

$$\log .01 = -2 \qquad [\because 10^{-2} = .01]$$

之類是.凡數之非10的整次冪者,其對數則非整數,而爲整數與小數之和.例如就 $\log 98 = ?$ 論之.

$$\because \quad 10 < 98 < 100$$

$$\therefore \quad \log 10 < \log 98 < \log 100$$

$$\therefore \quad 1 < \log 98 < 2$$

$$\therefore \quad \log 98 = 1\cdots\cdots$$

同樣可知 $\log 982 = 2\cdots\cdots$

$$\log 7.8 = 0\cdots\cdots$$

$$\log 7128 = 3\cdots\cdots$$

在常用對數中,整數部分名曰定位部(如上列四例之1,2,0,3是).小數部份名曰定值部(如上列四例中小數點以後之數碼是).定值定位兩部各有其特性,詳見下節.

§ 75. 定位定值兩部之特性. 試取特例通例比較言之.

設a為僅含一位整數之任何數,

$\boxed{2}.\boxed{41386}$
定位　定值

$$1<a<10$$

$$\log 1<\log a<\log 10$$

$$0<\log a<1$$

$$(a)\begin{cases} \therefore \quad \log a=0\cdots\cdots \\ \text{假定} \quad \log a=0.bcde \\ (\text{其中 } a, b, c, d \text{ 表各位數字}). \\ \text{則} \quad \log 10a=\log 10+\log a \\ \qquad\qquad =1.bcde \\ \text{同樣} \quad \log 100a=2.bcde \\ \qquad \log 1000a=3.bcde \\ \qquad \log 10000a=4.bcde \\ \qquad \log 100000a=5.bcde \end{cases}$$

$$(b)\left\{\begin{aligned}
\log\frac{a}{10}&=\log a-\log 10\\
&=.bcde-1\\
&=\bar{1}.bcde\\
\log\frac{a}{100}&=\bar{2}.bcde\\
\log\frac{a}{1000}&=\bar{3}.bcde
\end{aligned}\right.$$

例如 $8.24.$

$$1<8.24<10$$

$$\log 1<\log 8.24<\log 10$$

$$0<\log 8.24<1$$

$$(a)\left\{\begin{aligned}
&\therefore & \log 8.24&=0.\cdots\cdots\\
&\text{假定} & \log 8.24&=0.91593\\
&\text{則} & \log 8.24&=\log 10+\log 8.24\\
& & &=1.91593\\
&\text{同樣} & \log 8.24&=2.91593\\
& & \log 8.240&=3.91593\\
& & \log 8.2400&=4.91593\\
& & \log 8.24000&=5.91593
\end{aligned}\right.$$

$$
(b)\begin{cases}
\log .824 = \log 8.24 - \log 10 \\
\quad = 0.91593 - 1 \\
\quad = \bar{1}.91593 \\
\log .0824 = \bar{2}.91593 \\
\log .00824 = \bar{3}.91593
\end{cases}
$$

由此可得二種特性如下:—

(一) 關於定位部者.(1)凡數有 n 位整數者,其對數之定位部爲 $n-1$.〔參看(a)〕(2)凡純粹小數,在小數點與第一位非零數字之間有 n 個 0 者,其對數之定位部爲 $-(n+1)$,以 $\overline{n+1}$ 記之〔參看(b)〕.

(二) 關於定値部者,(3)兩數之間只有小數點之位置不同者,其對數之定値部相同〔參看(a),(b)〕(4)定値部恆爲正數.

〔註〕 依原理言 $\log .824 = 0.91593 - 1 = -.08407$;但在實際上,爲使上述特性(3),(4)普遍成立,便於運算計,乃將 $\log .824$ 改寫爲 $\log .824 = \bar{1}.91593$.(其中 $\bar{1}$ 爲負値,.91593 仍爲正値).同樣,$\log .0824$,$\log .00824$ 等等各寫爲 $\bar{2}.91593$,$\bar{3}.91593$ 等等者,亦爲便於運算耳.

習題三十八

1. 已知 $\log 3256$ 之定值部爲 51263, 試求 $\log 3256$, $\log 32560$ $\log 32560000$, $\log 325.6$ $\log 32.56$, $\log .3256$ $\log .003256$.

2. 試求下列各對數之定位部:—

(a) $\log 3256$, $\log 6523$. $\log 7895$, $\log 8769$.

(b) $\log 37.89$. $\log 78.72$, $\log 22.22$, $\log 33.46$.

(c) $\log .0038$, $\log .0098$, $\log .00756$, $\log .007896$.

3. 已知 $\log 11=1.04139$, $\log 13=1.11394$, 試求

$\log 143=?$　$\log 14.3=?$　$\log 1.43=?$　$\log 1.43=?$

$\log (.0143)^2=?$　$\log (.00143)^5=?$　$\log \sqrt[3]{1430}=?$　$\log \sqrt[3]{14.3}=?$

$\log \sqrt{.143}=?$　$\log \sqrt[5]{.0143}=?$　$\log \sqrt[7]{.00143}=?$

4. 已知 $\log x=3.48921$. $\log y=.89726$. $\log z=1.48726$,

$\log s=.00312$　$\log u=72.987$, $\log v=\bar{2}.71200$,

$\log w=321.041$

求定 x, y, z, s, u, v, w 各數中小數點之位置.

5. 已知 $\log 458=2.66087$, 求下列各式中之 x, y, z, u:—

$\log x=5.66087$. $\log y=12.66087$. $\log z=\bar{3}.66087$, $\log u=.66087$

6. 已知 $\log 3.47712$, 試定 3^{100}, $\sqrt[100]{3}$, $3^{10}\div\sqrt[10]{3}$ 諸數中小數點之位置.

§76. 常用對數表. 如前所述,一數之對數含有定位定值兩部.定位部如何求法?易由上節直接得之.定值部如何求法?若亦欲直接自求,則其

手續異常繁難，不便實用．好在昔賢爲應適此種需要計，不辭勞苦，曾將四位以內之各數，一一求得定値部．依其次第列之成表，吾人今日，但能坐享其成，按表檢查可矣．

對數中之定値部，除極少特例外，通常多爲不盡小數，爲求便於實用計，勢不得不用四捨五入法截去其較後之一部．通常計算上，只取定値部之初五位，便已足用．本書所用之葢氏對數表卽爲五位對數之一種．

應用五位對數表所得結果，其可靠數字止於五位，且在第五位上之數字，有時亦不盡準確，故五位以後之數字依四捨五入法略之可也．

§77. **由眞數求對數．** 何謂底？何謂對數？其意義前已言之．今爲便於說明計，再添一個新的名詞，卽眞數是也．眞數之定義如下：

當甲爲乙之對數時，則乙數名曰甲數之眞數．

例如在 $\log 2=.30103$ 中，.30103 爲 2 之對數；2 則爲 .30103 之眞數，又如 2 爲 100 之對數；100 則爲 2 之眞數．

1 若真數含n位整數，則該數之對數之定值部應為 n−1
例 123456789
上數因含6位整數，所以該之對數之定值部應
6−1=5
2 若真數為小數其後第n位上含數，則該數

之对于之定位部应为一n 并通写作 $\bar{n}$，

例：0.0000123

上数因至小数点数位第5位有数所以该之对于数之定位部应为一5或写为 $\bar{5}$

已知眞數，欲求其對數，手續如下：—

〔例一〕 有眞數 3456，求 $\log 3456 = ?$

〔解法〕 先依 § 75 求出定位部：因 3456 有四位整數，故其定位部爲 3.

次由對數表查出定値部：在蓋氏對數表第 7 頁中，自 N 縱行內查出 345，由此向右橫看；再自頂上橫行內查出 6，由此向下直看，橫直相交之處有數 53857，是卽 3456 之定値部.

$$\therefore \quad \log 3456 = 3.53857.$$

〔例二〕 求 $\log .8519 = ?$

〔解法〕 先依 § 75 求定位部：得 $\bar{1}$.

次由對數表查出定値部：依 § 58（二）.8519 之定値部與 8519 之定値部相同，故仿上例．在蓋氏對數表第 18 頁，查得 8519 之定値部爲 .92090，亦卽爲 .8519 之定値部.

$$\therefore \quad \log .8519 = \bar{1}.92090.$$

〔例三〕 求 $\log .0007234 = ?$

〔解法〕 檢表得 7234 之定値部爲 .85938

$$\therefore \quad \log .0007234 = \bar{4}.85938$$

注：对数表中所有对数皆为定值部

而定值永为正 例 $3.2174 = 3 + .2174$

$\bar{3}.2174 = -3 + .2174 = 7.2174 - 10$

log 3456 = ?
1) 先求定值部：以3456查四位整數，定值部應為
2) 再求定值部：定值應為 .53857

~~3) 所求之對數應為 3.53857~~

〔例四〕 $\log 85.678=?$

〔解法〕 45678之定值部不載於表內，故不能直接求出，但若用補插法，亦可求得45678之定值部如下：

檢表知 $\log 45.680=1.93237$

$\log 45.670=1.93232$

二者眞數相差 $.010$ $.00005$(對數相差)，

令 $\log 85.678=1.93232+x$

與 $\log 85.670=1.93232$

二者眞數相差 $.008$ x(對數相差)

由比例式 $.010:.008=.00005:x$，求得

$x=.00004$

$\therefore\ \log 85.678=1.93232+.00004$

$=1.93236.$

〔例五〕 求 $\log 321.67=?$

〔解法〕

$$.07\left(\begin{array}{l}\log 321.67=2.50732+x\\ \left.\begin{array}{l}\log 321.70=2.50745\\ \log 321.60=2.50732\end{array}\right)\end{array}\right)x$$

$.10$ $.00013$

log 3.456 = ?
1) 定值部應為 0
2) 小值 .53857
3) 對數 = 0.53857

小數值全部不能由表查出，須查得

1)先把原數"二端"數之對數查出相減　　$\log 34570 = 4.53$

得數值增加量為10時　　$34560 = 4.53$

"表差"為0.00013　　$10 = 0.00$

由比例式　　$$\frac{.07}{10}=\frac{x}{.00013}$$

得　　$$x=.00013\times\frac{7}{10}=.00005$$

$$\log 321.67=2.50732+.00005=2.50737$$

〔註〕 比例差之原理．當諸數相差甚微時，諸數之差與其對數之差殆成比例．此爲例四例五所用補插法之基本原理，學者注意此比例原理只在諸數相差甚微時成立，不可亂用．例如

$$\frac{\log 8-\log 2}{\log 4-\log 2}\neq\frac{8-2}{4-2}.$$

習題三十九

試求各數之對數．

1.	3564	2.	87.64	3.	7.865	4.	.9089
5.	.00098	6.	202000	7.	$\frac{9835}{5389}$	8.	$.123\times 3.45$
9.	$1.23\div 34.5$	10.	11123	11.	33333	12.	24243
13.	87562.	14	72961	15.	.000315	16.	1389600
17.	.006311	18.	$435^2\div 346^3$	19.	132^{10}	20.	$\sqrt[15]{321}$
21.	$\sqrt[3]{.00567}$						

§78 由對數求眞數． 已知對數，欲求其眞數，方法如下：—

2)由原數減去較原數為小之端數得 34567−34560＝7為"超除"

3)由1)得知真數增加10，定值則增加0.00013

問真數增加7時定值部應增加若干 故得比例

$1027 = 0.00013 : x \quad \therefore x = \frac{\quad}{10} = 0.000051$

(加此x值於該原數各之鄰數之对數之定值部上即得原數之定值部為 0.59857 + 0.000051 = 0.59862, 加在对數的末字上)

先由對數表,按巳知定値部求出眞數各位之數字,再由巳知定位部,依 §75 決定眞數中小數點之位置.

〔例一〕 巳知 $\log x = 2.79323$. 求 x.

〔解法〕 在蓋氏對數表第13頁,查出定値部(不是查眞數).79323.由此向左橫看,在 N 縱行內得621,是爲眞數之首三位,再由此向上直看,在頂上橫行內得數字2,是爲眞數之末位,故所求眞數各位數字爲6212.又因巳知定位部爲2,故所求眞數有3位整數.

$$\therefore\ x = 621.2$$

〔例二〕 巳知 $\log x = \bar{3}.80862$. 求 x.

〔解法〕 仿上例檢表,得眞數 x 之各位數字爲6436.又因定位部爲3,故知 $x = .006436$.

〔例三〕 巳知 $\log x = 1.38676$. 求 x.

〔解法〕 在對數表之定値部中,查不出.38676.但與.38676相近者有.38668和.38686二數,定値部.38676旣在此二定値部之間,故眞數 x 必在眞數2436(.38668之眞數)之間,卽 x 之首四位數字應

(1)由对數查真數:
1)由表中查得該对數之定值部所對應之各位之數字.
2)定位部定出小數點之位置
即得該对數之真數.

例: $\log x = 2.79325$

求 $x = ?$

與反對數之定值部相當之各數字爲 621

∴ $x = 621.2$

爲 2436; 其第五位如何?則不得而知. 欲知第五位,須依比例差之原理,用補插法求之如下:—

兩對數之差與增加量
〃真〃〃〃成正比例
〃相鄰兩對數之差
曰表差

$$\begin{aligned}
1.38676 &= \log(24.36+d)\\
1.38686 &= \log 24.37\\
1.38668 &= \log 24.36
\end{aligned}$$

差	.00018	.01 差
差	.00008	d 差

由比例式 $\dfrac{d}{.01}=\dfrac{.00008}{.00018}$ 得 $d=.01\times\dfrac{8}{18}=.004$

$$\therefore\quad 1.38676=\log(24.36+.004)=\log 24.364$$

即 $\qquad x=24.364.$

〔注意〕 上面補插法算式更可簡寫如下形:

	定值部	眞 數	
差 8	38676	24360 + d	差 d.
	38686	24370	
差 18	38668	24360	差 10

由比例 $d:10=8:18$ 得 $d=10\times\dfrac{8}{18}=4.$

故眞數 x 之各位數字爲 24364. 又因定位部爲 1, 故

由表中不能直接查出其真數時:

1) 將原對數之二相鄰之對數(表中可直接查出其真數者)相減, 得表差 ...

2) 由原對數減去較小之相鄰對數, 得尾差 ...

量
(1)列成一比例式：
(2)差量：对数之根量增加量
二真数之应加量之又“速”倍

“解比例式求出速割

$$x=24.364.$$

〔例四〕 已知 $\log M=1.3704$. 求 M.

〔解 I〕 檢表知13704之眞數爲1371, 故 $M=13.71$. 對否? 何故?

〔解 II〕 檢表並用補插法得 3704 之眞數爲 23464, 故 $M=.23464$, 對否? 何故?

〔解 III〕 檢表並用補插法得 3704 之眞數爲 23464, 故 $M=23.464$, 對否? 何故?

〔例五〕 已知 $\log N=32.82$. 求 N.

〔解 I〕 在蓋氏對數表第 7 頁, N 縱行下查出 328, 由此向右看; 在頂上橫行查出 2, 由此向下看. 相交之處得一數 51614. 故 $N=1.51614$, 對否? 何故?

〔解 II〕 檢表並用補插法求得 32.82 之眞數爲 21291, 故 $N=1.21291$, 對否? 何故? 如謂 $N=21291\times10^{28}$, 對否? 何故?

〔解 III〕 檢表知82000之眞數爲6607, 故 $N=6607\times10^{29}$, 對否? 何故?

〔例六〕 已知 $\log M=.00087000$. 求 x.

末字後
以加此題解性質原故应以之对数之真数去顶启

由真數查對數是知道表差及題數之尾數所加量
所得之增加量［illegible］與原對數之定值［illegible］
尾字相［illegible］相加

〔解 I〕 檢表應用補插法知 87000 之眞數爲 74132, 故 $M=7.4132$, 對否? 何故?

〔解 II〕 檢表知 00087 之眞數爲 1002, 故 $M=\bar{4}.1002$, 對否? 何故?

〔解 III〕 檢表知 .00087 之眞數爲 1002. 故 $M=1.002$. 對否? 何故?

〔註〕 以上三例之種種解法, 何者對, 何者不對? 務須愼思明辨徹底明瞭, 然後自己演算時方可免重大錯誤也.

習題四十

已知 x 之對數如下, 試求 x:—

	1455		24990		3494 5000
1.	3.16286	2.	4.39777	3.	9.54332
	.1448		0.04366		.000000006459
4.	1.16077	5.	2.64008	6.	8.81017
	1064000000000000.		1084000		
7.	15.02694	8.	8.03503	9.	$\overline{12}$.00346
	.30690000000000				
10.	13.48700	11.	32.715	12.	11.79400
13.	.00130	14.	4.36530	15.	.00356
	.0000000006155				
16.	9.78923	17.	10.00312	18.	21.51290
19.	1.56789	20.	.97865	21.	.00385

§ 79. 對數在計算上之應用. 前於 § 70 曾言

由對數查真數是知道表差及增加量求題所多的
尾之題數加至真數後面

對數之功用在於減少計算上之繁難.茲舉例以覓其說.

〔例一〕　求　$3^{100}=?$

〔解法〕　$\log 3^{100}=100\log 3=100\times.47712=47.712.$

$\therefore\quad 3^{100}=51523\times10^{43}$

〔例二〕　求　$\sqrt[100]{3}=?$

〔解法〕　$\log\sqrt[100]{3}=\frac{1}{100}\log 3=\frac{1}{100}\times.47712=.00477$

$\therefore\quad \sqrt[100]{3}=1.011.$

〔例三〕　求　$\sqrt[7]{.003586}=?$

〔解法〕　$\log\sqrt[7]{.003586}=\frac{1}{7}\log .003586$

$$=\frac{1}{7}\times\bar{3}.55461 \qquad (A)$$

$$=\frac{1}{7}\times(\bar{7}+4.55461) \qquad (B)$$

$$=\bar{1}.65066$$

$\therefore\quad \sqrt[7]{.003586}=.44736$

〔注意〕　本例(A)式何以須化爲(B)式?

〔例四〕　求　$\frac{\sqrt[5]{.003586}\times\sqrt[3]{.0356}}{.03245^2\times.5678^3}=?$

$=\log\left(\sqrt[5]{.003586}\times\sqrt[3]{.0356}\right)-\log\left(.03245^2\times.5678^3\right)$

$=\log\sqrt[5]{.003586}+\log\sqrt[3]{.0356}-\log .03245^2-\log .5678^3$

〔解法〕 設x=所求之值.

$$\frac{1}{5}\log .00386=\frac{1}{5}(\bar{3}.58659)=\bar{1}.51732$$

$$\frac{1}{3}\log .0356=\frac{1}{3}(\bar{2}.55145)=\bar{1}.51715$$

$$-2\log .03245=-2(\bar{2}.50121)=2.99758$$

$$-3\log .5678=-3(\bar{1}.75420)=0.73740$$

$$\log x= \quad 2.76945$$

∴ $x=588.1$ 卽所求之值.

〔例五〕 $\sqrt{324}=?$

〔解法〕 $\sqrt{324}=\frac{1}{2}\log 324=\frac{1}{2}\times 2.51055=1.25528$

$=18.00$, 對否?何故?

〔例六〕 $328\times 567\times\sqrt[5]{-576}=?$

〔解法〕 原式$=-328\times 567\times\sqrt[5]{576}=-N.$

$$\log 328= \quad =.51587$$

$$\log 567= \quad =.75358$$

$$\frac{1}{5}\log 576=\frac{1}{5}\times 2.76042=.55284$$

$$\log N= \quad 1.82229$$

∴ $N=66.419$

∴ 原式$=-66.419$

〔註〕若設原式之值$=M$，則

$$\log M=\log 328+\log 576+\frac{1}{3}\log(-576).$$

其中$\log(-576)=$？在常用對數中，負數有對數否？然則由上式能否求出$\log M=$？能否求出$M=$？然則在上之解法中何以先將原式化為$-N$，其故不瞭然乎？

習題四十一

用對數計算：—

1. 345^{10}
2. 1.1456^{10}
3. $.03^{20}$
4. $\sqrt[3]{8756}$
5. $\sqrt[5]{32487}$
6. $\sqrt[11]{.003856}$
7. $\sqrt[7]{.000832}$
8. $\sqrt[3]{3.489}$
9. $\sqrt[100]{.009876}$
10. $\dfrac{32456}{.23456}$
11. $\dfrac{2^{20}\times 3^{30}}{4^{11}\times 11^{4}}$
12. $\dfrac{\sqrt[3]{3}}{\sqrt[5]{5}}$
13. $576^{3}\div\sqrt[3]{675}$
14. $\sqrt[5]{\sqrt[7]{32}}$
15. $\sqrt[5]{\sqrt[3]{\sqrt{84}}}$
16. $\sqrt{3\sqrt{3\sqrt{3\sqrt{3}}}}$
17. $2^{30}\div 3^{20}$
18. $9^{9^{9}}$
19. $1234\times 5678\div 8765\div 4321$
20. $3205^{2}\times 5023^{3}\div 3502^{3}\div 2053^{4}$

21. $345.67^3 \times .00352^2 \div 1350000^2 \div 51200^4$

22. 圓之半徑爲3968,試求其面積.

23. 直角三角形之斜邊爲138.45,一股爲78.42,試求他股之長.

$89725=2R^2$ 24. 圓之內接正方形之面積爲89725平方市尺,試求圓面積及圓周.

25. 長方體之長闊高爲3875尺,$\sqrt{872}$尺,$\sqrt{.1892}$尺,試求其體積.

§80. **複利息問題.** 複利息之計算在期數甚多時亦以引用對數爲便.本節當舉例以明之.

複利息計算公式,算術中已嘗論之,茲爲複習計,再將該公式之求法述之於下:—

設有本金p元,年利率$\frac{r}{100}$存放n年,一年一結,則在第n年之末,本利和共$\boxed{爲A=p\left(1+\frac{r}{100}\right)^n元}$

〔證〕 第一年之末本利和$=p+p\cdot\frac{r}{100}$

$$=p\left(1+\frac{r}{100}\right)$$

第二年之末本利和$=p\left(1+\frac{r}{100}\right)$

$$+p\left(1+\frac{r}{100}\right)\cdot\frac{r}{100}=p\left(1+\frac{r}{100}\right)^2$$

$$第三年之末本利和=p\left(1+\frac{r}{100}\right)^2$$

$$+p\left(1+\frac{r}{100}\right)^2\cdot\frac{r}{100}=p\left(1+\frac{r}{100}\right)^3$$

....

推之,第n年之末本利和 $=p\left(1+\frac{r}{100}\right)^{n-1}$

$$+p\left(1+\frac{r}{100}\right)^{n-1}\cdot\frac{r}{100}=p\left(1+\frac{r}{100}\right)^n$$

$$A=p\left(1+\frac{r}{100}\right)^n$$

〔例一〕 本利3875元,年利率一分二釐,存放10年,一年一結.求本利和應爲若干元.

〔解法〕 $A=3875\left(1+\frac{12}{100}\right)^{10}=3875\times1.12^{10}$

$$\log A=\log3875+10\log1.12$$

$$=3.58827+10\times.04922$$

$$=4.08047$$

$A=12036$ 元

〔例二〕 本金3875元.年利率一分二釐,半年一結,存放10年四個月,求本利和.

〔解法〕 年利率爲一分二釐,半年利率應爲六

釐,又半年爲一期10年4月應合$20\frac{2}{3}$期,故所求本利和爲

$$A=3875\left(1+\frac{6}{100}\right)^{20\frac{2}{3}}=3875\times1.06^{20\frac{2}{3}}$$

$$\log A=\log3875+20\frac{2}{3}\log1.06$$

$$=3.58827+20\frac{2}{3}\times.02531$$

4.11155

$$=4.21127$$

$$\therefore\quad A=16266\text{ 元.}$$

習題四十二

1 本金一元,依年利率一分一釐存放,依複利一年一結.問10年,20年,30年,40年,50年,60年,70年,80年,90年,100年,各得本利和若干元?

2. 本金100元,存放100年,依複利一年一結,問(a)年利率一分時,(b)年利率一分一釐時,(c)年利率一分二釐時,各得本利和若干元?

3. 本金100元,年利率一分存放100年,依複利計算.問(a)一年一結.(b)半年一結,(c)每三個月一結,各得本利和若干元?

$A=100\left(1+\frac{5}{100}\right)^{200}$　$A=1$

$A=100\left(1+\frac{2.5}{100}\right)^{400}$

4. 本金100元,年利率一分二釐,存放200年,依複利一年一結;求本利和.假定中國人口爲四萬萬,將此本利和平均

分配,每人可得若干元?

5. 本金100元,年利率$\frac{12.5}{100}$,存放100年.問(a)依單利計,(b)依複利每年一結,各應得利息若干元?二者相差若干元?

6. 存款一項,依複利每年一結,15年後本利和爲本金五倍,問年利率應爲若干?

7. 本金1元,依複利存放20年,年利率一分二釐,一年一結.若改爲半年一結,問半年利率應改爲若干?本利和方無改變?

8. 有款一項,依複利存放100年,一年一結,年利各一分.問半年一結,半年利率應改爲若干,所得利息方能相等?

9. 存款一項,年利率一分二釐,依複利計,問若干年後所得利息五倍於本金?

10. 俗說"臭蟲一個每夜生小臭蟲七個,次夜大小臭蟲又各生七個,以後照此類推."今若有臭蟲三個,聽其自然繁殖,問兩星期後共有若干個?

中華民國二十三年八月初版
中華民國二十四年七月八版

(57023A)

高級中學用

復興教科書 代數學 三冊

上冊定價大洋柒角
外埠酌加運費匯費

編著者 虞明禮

主編發行人 王雲五 上海河南路

印刷所 商務印書館 上海河南路

發行所 商務印書館 上海及各埠

(本書校對者胡達聰)

周

C二四四九

五九

商