41625

初中複習叢書

算　　學

下　册

陳嶽生編

商務印書館發行

4.61

510

7522

e.2

v.-2

MG
G634.61
47

初中複習叢書

算學

下冊

陳嶽生編

北京圖書館藏書

商務印書館發行

3 1773 7447 1

41625

目　次

第三篇　初等平面幾何

第一章　通　論

第二章　求　證

第三章　軌　跡

第四章　作圖

第五章　計算

第四篇　數值三角

第一章　基本知識

第二章　問題解法示例

初中複習叢書

算學

下冊

第三篇 初等平面幾何

第一章 通論

I. 導言:——幾何學是研究圖形的科學,其內容的廣博,變化的繁複,決非本篇所能囊括而盡.本篇所述,無非用提綱挈領的方法,將初中程度的基本幾何知識,融合在一處,並將各種證題作圖等方法,擇要示例,使習過初中幾何的人,知道如何分類記憶定理,如何活用定理,如何取法以解決命題罷了.要知道幾何的證題作圖,實在沒有概括的方法,即使是初等平面幾何學,其內容已是五花八門,琳琅滿目.不過為初學說法,自應略示方針,俾可有所遵循,不致歧路彷徨,進退失據.然而這也不過是方針罷了;要實行而有結果,全在乎多多練習;倘然熟能生巧,自然一切困難,都可迎刃而解,所謂臨機善變,一

觸即發便是神而明之,這是在乎讀者的努力了.讀者務須牢記,研究幾何學,決不能專靠什麼辭典的.

初等平面幾何學所研究的問題,可概括成四大類:(一)求證,(二)求軌跡,(三)作圖,(四)計算.本篇即按此四大類,分章講述.本書是複習性質,所以如此編制,其有前一類的問題,用到後一類者,那一定是讀者都已習過的.

幾何學上用以解決問題的工具,除已成立的定理外,尚有公理,公設,以及定義.各種定義,俱見幾何教科書,本篇不再細述;茲將公理與公設列下,望讀者牢記:

II. 普通公理:——

1. 全量等於其所有部份的和.
2. 等於同量或等量的量相等.
3. 一量可將它的等量來代替.
4. 等量加等量,和相等.
5. 等量減等量,差相等.
6. 等量的同倍量相等.
7. 等量的同分量相等.
8. 全量大於它的分量.

9. $a>b$, $b\geqslant c$, 則 $a>c$.

10. 等量加不等量,或不等量加等量,所得的和不等.原來大的一方面,和還是大.

11. 大量加大量,大於小量加小量.

12. $a>b$, $c=d$, 則 $a-c>b-d$.

13. $a=b$, $c>d$, 則 $a-c<b-d$.

14. 不等量的同倍量,仍舊不等,原來大的還是大.

15. 不等量的同分量,仍舊不等,原來大的還是大.

16. 有同類二量 a, b, 則

於

$$a>b,$$

$$a=b,$$

$$a<b,$$

三關係中,可有一關係成立,而且祇有一關係成立.

III. 幾何公理:——

1. 二點之間可有一直線,而且祇有一直線.

2. 二線相交,祇有一交點.

3. 二線有二點相合,則兩線全合.

4. 二點之間的路徑,直線最短.

5. 過一點的直線,有無窮多.

6. 在一線上的點有無窮多.

7. 一直線上有二定點,則此直線上,必有一點在此二點間,又必有一點在此二點外.

8. 過一點有二定直線,則在此二直線間,必有一直線過此點,在此二直線外,也必有一直線過此點.

9. 兩點在一直線兩旁,則兩點的聯線,必與此直線相交.

10. 幾何圖形,可以不變其形狀大小,隨意變動其位置.

11. 二圖形完全重合,則其形狀大小,完全相同.

12. 二圖形各與第三圖形合同,則此二圖形也自相合同.

13. 過已知直線外已知點,可有一線,祇有一線,平行於已知直線.

14. 同與第三直線平行的二直線,也互相平行.

15. 同平面上平行二直線,若公有一點,則必合成一直線.

16. 二直線平行,則與其一相交的直線,也必與其二相交.

17. 二直線若不平行,必相交;若不相交,必平行.

18. 一點不在直線上,必在直線外;不在直線外,必在直線上.

19. 一點與一圓,此點或在圓外,或在圓上,或在圓內,三種情形,可有一種而祇有一種.

20. 一圓過他圓的內外二點,兩圓必相交.

IV. 公設:——

1. 過兩點可畫一直線.

2. 線份可隨意引長.

3. 可隨意取一點做圓心,用任意半徑畫一圓.

4. 過一點,可畫一線,平行於已知直線.

V. 定理記憶法:——解決幾何命題,首在熟記定理,可以隨意取用.但初學者每覺幾何定理之多,如觀繁星,如覽棋局,頗難盡行記憶.其實幾何定理,也各自有其類別,倘能分類得宜,善加選別,自然可以觸類而得,不勞窮搜苦索了.下列五種分類方法,可以幫助讀者記憶各種定理,不過讀者切勿誤會,以爲幾何定理,可以完全包括在這五類之中.要知其餘不能納入的,爲數也還不少,不過去掉了可以分類的,其餘記憶起來,當然容易了.

(A) 圖形分類：初等平面幾何學上的圖形，大概有下列數種：(一)三角形，(二)平行四邊形，(三)梯形，(四)四邊形，(五)圓，(六)圓內接形，(七)圓外接形，(八)任意多角形，(九)正多角形．舉凡各種定理，可就此九種圖形，分門別類，作爲各圖形的性質．茲舉三角形一例如下，望讀者能舉一反三，就其餘八種，把各定理彙聚起來．

三角形性質定理(關於一個三角形者)：

1. 等腰三角形底角相等．其逆亦眞．
2. 三角形兩邊不等，對角也不等，大邊所對之角大．其逆亦眞．
3. 等邊三角形，亦爲等角三角形．其逆亦眞．
4. 等腰三角形頂角之平分線，爲底邊之中垂線；其逆亦眞．
5. 三角形頂角之平分線，垂直底邊，則爲等腰．
6. 三角形三內角之和，等於二直角．
7. 三角形之外角，等於內對角之和．(外角大於內對角．)
8. 三角形二邊和，大於第三邊；二邊差，小於第三邊．

9. 三角形兩邊中點之聯線,平行於底邊,而且等於底邊之半.

10. 過三角形一邊中點,平行於底邊之線,必平分第三邊.

11. 三角形之三中線交於一點(重心),此點到頂點的距離,等於到對邊中點的二倍.

12. 三角形之三高交於一點(垂心).

13. 三角形之三分角線,交於一點(內心).

14. 三角形之三邊中垂線,交於一點(外心).

15. 正三角形之重心,垂心,內心,外心合一.

16. 有一三角形,可作其內接,外接,及旁接圓.

17. 與三角形底邊平行的一線,必分他兩邊成比例線份.其逆亦眞.

18. 三角形的內角平分線,將對邊內分成兩線份,與其餘兩邊成比例.

19. 三角形的外角平分線,將對邊外分成兩線份,與其餘兩邊成比例.

20. 直角三角形斜邊上的高,是斜邊被高所分兩線份的比例中項.

21. 直角三角形的一腰,是斜邊上被高所分而與

此腰相鄰的線份,與斜邊的比例中項.

22. 直角三角形斜邊平方,等於兩腰平方和.

23. 任何三角形,對銳角一邊的平方,等於其餘二邊平方和,減去其中一邊與他邊在此邊上射影乘積的兩倍.

24. 任何三角形,對鈍角一邊的平方,等於其餘二邊平方和,加上其中一邊與他邊在此邊上射影乘積的兩倍.

25. 三角形二邊平方和,等於半底平方與底上中線平方和的二倍.

26. 三角形之面積,等於底乘高之半.

以上各定理,已將初中幾何學所講的一個三角形基本性質,包括無遺.茲再舉關於兩個三角形者如下:

27. 兩三角形有兩邊夾一角各各相等,兩三角形合同.

28. 兩三角形有兩角夾一邊各各相等,兩三角形合同

29. 兩三角形有三邊各各相等,兩三角形合同.

30. 兩三角形有二角相等,第三角亦相等.

31. 兩直角三角形有一腰與斜邊各各相等,兩三角形合同.

32. 兩三角形有兩角一對邊各各相等,兩三角形合同.

33. 兩三角形有兩邊一對角各各相等,若此角非銳角,則兩三角形必合同.

34. 兩三角形有兩邊相等,第三邊不等,則夾角亦不等;第三邊大之三角形,其夾角亦大.其逆亦眞.

35. 兩三角形三角相等,則三邊成比例.其逆亦眞.

36. 兩三角形各與第三三角形相似,則自行相似.

37. 兩三角形三邊互相平行,或互相垂直,則兩三角形相似.

38. 兩三角形有兩邊成比例,夾角相等,則相似.

以上各定理,都是關於兩三角形相關性質的定理.凡初中幾何學關於三角形的定理,都包括無餘了.

(*B*) **元素分類:** 平面幾何學上的元素,不外點,線,角三種.所以平面幾何定理,大概可分成下面四類:(一)關於線的,(二)關於角的,(三)關於點

與線的,(四)關於線與角的.(圓弧亦爲線,面積亦屬線類,因爲計算面積是根據線的長短的.)將各定理就圖形分類之後,再就元素分類,更易收聯想記憶的效驗.其有未能入於圖形分類的定理,就可以照此法分類.例如:

(線類) 若干平行線與一截線所截,若截得各線分相等,則此數平行線在第二任何截線上所截各線份,也相等.

(角類) 同角或等角的補角相等.

(點線類) 一直線的中垂線,其上各點離此直線兩端等遠.

(線角類) 兩直線相交,所成對頂角相等.

其餘定理尙多,讀者可在教科書中找得,列入各類.(A)中所舉各定理,照元素法分類,當如下:

線類: (4), (5), (8), (9), (10), (16), (17), (18), (19), (20), (21), (22), (23), (24), (25), (26).

角類: (6), (7), (30).

點線類: (11), (12), (13), (14), (15).

線角類: (1), (2), (3), (27), (28), (29), (31), (32), (33), (34), (35), (36), (37), (38).

讀者試將與其餘八種圖形有關的定理,彙聚之後,再按元素分類.(凡軌跡定理,概屬於點線類.)

(C) **關係分類:** 幾何定理的結論,都是線與線,角與角,點與線的關係,所以幾何定理,又可以照關係分類記憶.此項分類法,最最重要,因爲對於解決命題,大有裨益.茲將初等幾何學中所研究的各關係,分列於下:

線類:　(一)相等,(二)平行,(三)垂直,(四)不等,(五)成比例,(六)等分,(七)一線等於他線之兩倍,(八)二線和等於第三線,(九)等面積,(十)面積和差,(十一)相切.

角類:　(一)相等,(二)互爲餘角,(三)互爲補角,(四)倍與分,(五)大小,(六)和與差.

點線類:(一)點在線上,(二)線過一點,(三)三點共線,(四)三線共點,(五)四點共圓,(六)距離相等.

線角類:(一)合同,(二)相似.

以上所舉關係,共二十種,本書限於篇幅,不能

將幾何定理,盡照此法分類,茲就復興教科書中所載角相等的定理,列舉於下,作爲參考,其餘請讀者自己分類,列成表格,以便記憶.(以下頁數節數,根據初版.)

角相等之定理: 75頁,71節,(一),(二);76頁,73節;86頁,80節;88頁,82節;89頁,83節;93頁,86節;101頁,98節;122頁,114節;123頁,115節;128頁,系二;136頁,124節,(二);143頁,129節,逆;152頁,137節;154頁,系一;155頁,系;159頁,系;157頁,習題8,9,10;159頁,系;194頁,169節;195頁,170節.

(*D*) 集團: 幾何學上有些定理,其所含元素相同,但其結論關係不同的,可以集成一團.於是祇須記得一個,其餘便可觸類旁通了.集團的方法,共有下列三種:

1. 本定理與逆定理:幾何學上的逆定理,大多數眞確.凡是眞確的逆定理,與本定理集成一團,就祇要記得一個定理好了.例如

二線被第三線所截,若所成內錯角相等,則此二線平行.

二線被第三線所截,若二線平行,則所成內錯角相等.

記得了前一個,後一個就不會忘記了.

2 大小等之定理:幾何學中關於線,角大,小等的定理,往往可集成一團.例如

$\begin{cases}\text{等弦離心等遠,}\\ \text{不等弦離心不等,大者較近.}\end{cases}$

$\begin{cases}\text{本書所舉}(A)\ 29,\\ \text{本書所舉}(A)\ 34.\end{cases}$

此法與前法並用,則記得一定理,猶如記得三定理.

3. 元素的交換:幾何學上有些定理,係由交換假設與結論的一元素而成,此等定理,往往可集成一團(惟有時須除去不眞確者).例如

過一圓半徑端點,而與半徑垂直之線,是此圓的切線.這定理中實包含:切點,圓心,直角,切線四元素,有三元素,卽可決定必有第四元素,於是可以推知之定理如下:

過切點之半徑,垂直於切線.

過切點而與切線垂直之線,必過圓心.

自圓心向切線引垂線,必過切點.

(*E*) 概括: 幾何學中有些定理,可以概括爲一定理.例如本節(*A*)之(23),(24),以及(22),就可概括成餘弦定律.玆再舉兩例於下,以明概括的效用宏大.

例一. 圓周角定理,交弦角定理,弦切角定理,交割角定理,割切角定理,交切角定理,都可概括成下一定理:(各定理俱見復興幾何152–157頁.)

兩直線的交角,等於兩直線所夾弧度的代數和的一半.凡向角內凸的弧是負,向角外凸的弧是正.或命一線繞角頂依反鐘向旋轉,線在弧上之點,依反鐘向旋轉,則此弧是正;線在弧上之點,依順鐘向旋轉,則此弧是負.

例二. 交弦比例線份定理,交割比例線分定理,交切割比例線分定理,可以概括成下一定理:

相交兩線,與圓交於四點(切線可視爲兩交點

合一),則一線上從交點到兩交圓點之線份的乘積,等於他線上從交點到兩交圓點之線份的乘積.

讀者能用此五法,以記憶定理,自然不覺其苦了.

VI. 切不可犯的錯誤:——初學幾何的人,極易犯幾種通病,切須戒掉.下列各點,務須注意:

1. 要作普通的圖. 初學的人,看見題中有三角形,就畫一個等腰三角形;看見題中有四邊形,就畫一個長方形;這是絕大的錯誤.圖形中的線,往往因爲形式的特殊,而合併起來,或者本不相等的,變成相等,以致誤認關係,種下錯誤的根苗.所以三角形必須畫成不等邊,梯形切不可畫成等腰.

2. 作圖須正確. 初學的人,往往因爲作圖的不準確,誤認圖中的線角關係.所以必須照作圖的方法,作出準確的圖形來,再着手求解決的途徑.例如證明"凡三角形都等腰"的謬理,就是作錯了圖的結果.(參閱著者所譯摺紙幾何學).

3. 不可憑直觀. 作圖雖然正確,有時圖中某線

份與某線份,或某角與某角,看去似乎相等,切不可遽爾斷定.

4. 語語須有根據. 證題的陳述,必須根據已知的條件,成立的定理,公理,公設,以及圖形的定義,切不可隨意杜撰,至要至要.

5. 正定理與逆定理須加區別. 逆定理是不一定眞確的.例如"二平行弦截等弧"是眞的,但是"截等弧的弦必平行"就錯了.所以該用逆定理證明的,必須引用逆定理;假使沒有逆定理可用,那一定是所證不合,切不可拿正定理來充數.

6. 一圖形與二圖形須加注意. 二圖形的相關性質,與一圖形的獨立性質,不可混用.例如前節(A)(2)與(A)(34),切不可併爲一談.初學者很容易犯這種毛病,望留意爲要.

第 二 章

求 證

I. 證法的種類:——證明幾何命題的方法,有下列五種:

(一) 理想疊合法. 此法係從前章所舉幾何公理(10), (11)而來. 通常所用的疊合手續,大概有下列五種:

(a) 使一圖形中的一直線,繞線上某點旋轉一定角度,而與他直線相合.

(b) 摺疊一平面,使摺痕過一定點,且使在摺痕兩旁與此定點等距離的二點相合.

(c) 將一圖形的一部份,圍繞某點而旋轉,使旋轉部份落在不旋轉部份上.

(d) 以一圖形移置別圖形上,使兩圖形的一雙直線相合,同時使此一雙直線上的一雙點疊合.

(二) 綜合法. 此法是證題最通用的方法.其格式如下:

已知: $A=B$,因為$A=C$(由定理),$C=D$(由公理),

$D=E$(由公設,與作圖),$E=F$(由定義),

$\therefore F=X$(由定理,公理,或定義).(合證).

此舉所述,不過是大概的格式;至於引用定理,公理的次序,以及如何作補助線,其次序當然不是呆板的.總而言之,此法是綜合已知事件,證明未知事件.

(三) 解析法. 解析法的形式,大致如下:

已知: A是眞的,求證X是眞的.

證: 假使要X是眞的,必須D是眞的;要D是

眞的,必須C是眞的;要……,必須A是眞的;

現在A是眞的,所以X是眞的(合證).

這一個方法所經過的各步,當然也要根據定理,公理等等,不過次序和綜合法相反,是由未知反推到已知的.此法比綜合法來得繁瑣,但是一題的證明,往往可用此法發見,所以可做綜合法的幫助.一題到手,先用解析法推得證明的線索,再用綜合法順次把證明寫出來,就

不致於無從下手了.

(四) 歸謬法. 歸謬證法的形式,大致如下:

已知: A 是眞的,求證 X 是眞的.

證: 假定 X 是不眞的,那麼就有 D 是眞的,因為 D 是眞的, $\therefore$ A 是不眞的,但現在 A 是眞的, $\therefore$ "假定 X 是不眞的"是錯的, $\therefore$ X 是眞的.

這是由假定的"非",歸到與已知條件相矛盾.還有一種形式,是歸到與已知定理或公理相矛盾,因而證明假定的"非"不成立.總而言之,此法根據下列三原理而成:

(a) 一理或為是,或為非,二者必居其一.例如二線或平行,或相交,二者必居其一.

(b) 兩理矛盾,其中有一眞,他一必謬.

(c) 正確推理的結論為謬,則結論所從出的假設必謬.

(五) 窮舉法. 窮舉法是歸謬法的推廣.在歸謬法裏面,我們所假定的"非"祇有一種;在窮舉法裏面,我們把一切可以假定的"非",卽與所證結論矛盾的一切可能的結論,都證明它們不成立,

因而決定原來的結論必定成立.此法的形式,大致如下:

已知: A 是眞的, 求證: $x=y$.

證: $x=y$, $x>y$, $x<y$, 三者之中,必居其一.若 $x>y$, 則 A 不眞;但 A 是眞的, $\therefore x \not> y$. 若 $x<y$, 則 A 不眞;但 A 是眞的, $\therefore x \not< y$. 於是 $x=y$.

(六)合一法. 合一法是假定所證的某線或某角,不合結論的關係,另作一線或一角,合於結論的關係,再證明此線或此角,與原來的線或角相合.

以上六種證法,第一第二兩種是直接證法,第三種是發見綜合證法的開路先鋒,四,五,六是間接證法:間接證法常用於證明逆定理.六種證法之中,第二種最簡單,最整齊,最通用.間接證法以少用爲是,於無可奈何的時候,方可姑且一用.理想疊合法,大部用於證明兩圖形的合同,以及證明基本定理,通常以不用爲是.至於六種證法的例子,各種幾何教科書中都有,此處不贅.在以下各節中,遇有用到某法時,再

隨時表明.

II. 推理的根據:——推理的根據,當然是定理公理等等,而且各命題的證法,千變萬化,卽使是一個命題,也往往不止一種證法,斷難有一條普遍的規則,可以遵守.不過若按欲證的關係分類,那麽也有若干方針,可以引導我們,如何利用已知定理,如何利用命題的假設,如何添作補助線,以顯圖形中各部分的關係.現在將初中幾何學上所常用的推理方法,分類敍述於下:

1. 證明線分相等,有下列各種推理方法:

(a) 利用全等◬ (卽合同◬), 證其爲兩全等◬之對應邊.

(b) 利用等腰△性質的逆定理,證其爲一等腰△中等角的對邊.

(c) 證其同等於第三線.

(d) 證其爲平行四邊形的對邊.

(e) 證其爲同圓的半徑.

(f) 利用"▱對角線互相平分"的定理.

(g) 利用"過△一邊中點而平行於底邊之線,必平分他邊"的定理.

(*h*) 利用"一點到圓的兩切線相等"的定理.

(*i*) 若兩線分爲同圓或等圓之弦,可證其所張爲等弧,或距圓心等遠.

(*j*) 證其爲一角平分線上一點,到兩邊的距離.

(*k*) 證其爲一線分中垂線上一點,到線分兩端的距離.

(*l*) 利用相似△定理,或三角形中比例線分定理,證其與另一對等線成比例.

(*m*) 利用"數平行線在一截線上截取等線分,必在他截線上截取等線分"定理.

(*n*) 利用"垂直於弦的半徑,平分該弦"的定理.

2. 證明弧相等,有下列各種推理方法:

(*a*) 證其夾相等中心角.

(*b*) 證其對等弦.

(*c*) 證其張相等圓周角.

(*d*) 證其爲平行弦所截的二弧.

(*e*) 利用"垂直於一弦,或過一弦中點之直徑,平分該弦所對之弧"的定理.

3. 證明角相等,有下列各種推理方法:

(*a*) 證其爲全等△的對應角.

(*b*) 證其爲相似三角形的對應角.

(*c*) 證其爲等腰三角形的底角.

(*d*) 證其同等於第三角.

(*e*) 證其爲▱的對角.

(*f*) 利用"對頂角相等"的定理.

(*g*) 證其爲二平行線與一截線所成的內錯角或同位角.

(*h*) 證其爲同角或等角的餘角或補角.

(*i*) 利用"兩△有兩對應角相等,第三對應角必等"的定理.

(*j*) 若所證之角,與圓有關係,則有下述各法:

(一) 可證其爲同圓或等圓中夾等弧之圓心角.

(二) 可證其爲同圓或等圓中夾等弧之圓周角.

(三) 利用"交弦角等於所夾兩弧度數半和"的定理以及(*d*).

(四) 利用"弦切角與圓周角等於所夾弧度數之半"的定理.

(五) 利用"交割角,割切角,交切角等於所夾

兩弧度數半差”的定理.

(六) 利用“圓內接四邊形外角等於內對角”的定理.

4. 證明線分不等,有下述各法:

(a) 證其爲一△中對不等角之邊.

(b) 利用“兩△中有二邊相等,夾角不等,則第三邊亦不等”的定理.

(c) 利用“兩點之間,直線最短”的公理.

(d) 利用“全大於其分”的公理,證明在大線分上,可以截取一線分,等於小者.

(e) 利用“自一點至直線所引各斜線,距離該點至直線所引垂線足愈遠則愈大”的定理.

(f) 若兩線分爲同圓或等圓之弦,則可證其張不等弧,或距心不等.

(g) 利用“$a>b$, $b\geqq c$, 則 $a>c$”的公理.

(h) 利用“圓內圓外之點到圓心的距離,不等於半徑”的定理.

5. 證明弧不等,有下述各法:

(a) 證其夾不等中心角.

(b) 證其對不等弦.

(c) 證其張不等圓周角.

6. 證明角不等,有下述各法:

(a) 證其爲一△中對不等邊之角.

(b) 利用"兩△中有二邊相等,第三邊不等,則夾角亦不等"的定理.

(c) 利用"△之外角,大於內對角"的定理.

(d) 利用"一弧所張之角,其頂點若在圓外或圓內,則不等於該弧所張之圓周角"的定理.

(e) 利用"全大於分"的公理.

(f) 利用"$a>b$, $b\geqq c$, 則 $a>c$"的公理.

(g) 若爲圓心角或圓周角,可證其夾不等弧.

7. 證明面積相等,有下述各法:

(a) 證三角形,平行四邊形,梯形之面積相等,可證其底與高相等,或底與高之乘積相等.

(b) 證長方形之面積相等,可證其兩鄰邊相等.

(c) 證正方形之面積相等,可證其邊相等.

(d) 利用"介於二平行線間,同底或等底之長方形,正方形,平行四邊形,梯形,三角形,面積相等"的定理.

(e) 證其等於第三形之倍與半.

(*f*) 證明 a, b 二線分所包的矩形(即 $a\times b$),等於 c, d 二線分所包的矩形(即 $c\times d$),可利用相似形定理,證明 $a : c=d : b$.

8. 證明兩比相等,有下述各法:

(*a*) 利用"三角形的兩邊,被底邊的平行線截成比例線分"的定理.

(*b*) 利用"兩△三角相等則相似"的定理.

(*c*) 利用"兩△有兩邊成比例,夾角相等,則相似"的定理.

(*d*) 證明其同等於第三比.

(*e*) 利用"諸平行線截二直線,其相當線段成比例"的定理.

(*f*) 利用"諸相交線截二平行線,其相當線段成比例"的定理.

(*g*) 利用"△內平分角線,或外平分角線,將對邊內分或外分,與夾此角之二邊成比例"的定理.

(*h*) 若證 a 爲 b, c 之比例中項,則有下述二定理可用:

(一) 直角△斜邊上的高,是斜邊被高所分

二線段的比例中項.

(二) 直角△的一腰,是斜邊與斜邊被高所分的鄰接線段的比例中項.

(*i*) 利用加比,減比,加減比定律.

(*j*) 若欲證之線與圓有關係,則有下述定理可用:

(一) 圓內相交二弦,互相內分爲比例線段,即一弦上兩線段的積,等於他弦上兩線段的積.

(二) 相交二割線之交點,將割線上之弦外分爲比例線段.

(三) 相交之割線與切線,其切線長的平方,等於交點外分割線上之弦,所成兩線段的積.

(四) 圓周上一點到直徑的垂線,是直徑爲垂線所分兩線段的比例中項.

9. 證明和差關係,有下述各法:

(*a*) 欲證二線分或二角的和,等於第三線分或第三角,可作前二者之和,證其等於後者;或由後者減去前二者之一,證明所餘等於前

二者之又一;或將第三線分或角,分爲兩部分,證其各等於第一第二線分或角.

(b) 欲證二線分或二角之差,等於第三線分或第三角,可歸於前一法.

(c) 欲證面積之和差,等於第三者,可根據各面積的計算公式,就各相關線分,而行代數運算.

(d) 欲證正方形之和差關係,有下列定理可用:

(一) 畢達哥拉定理(即商高定理).

(二) 畢達哥拉定理的推廣.

(三) 相似形面積的比等於對應邊平方比.

(四) △兩腰上平方和,等於半底平方與底上中線平方和的二倍.

(e) 其他和差關係,可利用等量公理,或不等量公理證明之.

10. 證明倍分關係,有下述各法:

(a) 欲證第一線分或角,爲第二線分或角之倍,可證第一線分或角之半,等於第二線分或角;或作第二線分或角之倍,證明其等於第一線分或角.

(b) 利用△兩邊中點之聯線,等於底邊之半.

(c) 利用△重心定理.

(d) 利用"等腰△頂點外角,等於內對角的兩倍"的定理.

(e) 利用第三線分或角爲居間.

(f) 證明一角爲他角之三倍,常由第一角減去第二角,再證餘下來的是第二角的二倍.

(g) 證明倍分和差混合的關係,利用等量公理.

(h) 利用相似形的比例定理.

11. 證明兩角互爲補角,或互爲餘角,有下述各法:

(a) 利用"一直線爲外邊的二鄰角互補"的定理.

(b) 利用"平行線與截線所成內角互爲補角"的定理.

(c) 利用"圓內接四邊形對角互爲補角"的定理.

(d) 欲證二角互爲餘角,可證其和等於已知直角.

(e) 欲證二角互爲餘角,可證其爲直角△的二銳角.

(*f*) 欲證兩角互為補角,可證其和等於已知之平角.

12. 證明兩線平行,有下述各法:

(*a*) 證其與一截線所成的內錯角或同位角相等,或同旁內角互為補角.

(*b*) 利用"分△兩腰成比例線段之線,平行於底邊"的定理.

(*c*) 證其為△之底,與兩腰中點之聯線.

(*d*) 證其同平行於第三線.

(*e*) 證其各垂直於第三線.

(*f*) 利用"兩雙對邊相等,或兩雙對角相等,或一雙對邊相等且平行,或對角線互相平分的四邊形,是▱"的定理.

(*g*) 證其為梯形兩腰中點的聯線.

13. 證明兩線垂直,即證明其所夾的角是直角,其方法有下述數種:

(*a*) 證其等於已知直角.

(*b*) 證其等於鄰補角.

(*c*) 證其為半圓上的圓周角.

(*d*) 利用"等腰△頂角平分線,垂直於底邊"的

定理.

(e) 利用"切線垂直於過切點之半徑"的定理.

(f) 利用"過一弦中點的半徑垂直於弦"的定理.

(g) 證其為△中等於二角和的一角.

(h) 證其為鄰補角平分線所夾之角.

14. 證明相切關係,有下述各法:

(a) 欲證一線與一圓相切,可證明過公共點的半徑垂直該線;或證明過公共點的該線垂線,通過圓心.

(b) 利用"弦切角等於夾同弧的圓周角"的定理.

(c) 欲證兩圓相切,可證明中心線通過公共點;或證明兩圓心的距離,等於半徑和或差.

15. 證明三線共點,有下列各法:

(a) 證其中二線經過第三線上同一點.

(b) 若其中有一線段,可證其兩端與其他兩線的交點共線.

(c) 在三線上各覓得一點,聯成三角形,然後利用△重心,垂心,外心,內心諸定理.

16. 證明三點共線,有下述各法:

(a) 作兩兩的聯線,證明此兩線合一,或證明此兩線與通過其中一點之第三線,所成兩鄰角互補,或所成兩對頂角相等.

(b) 作兩兩的聯線,證其與已知直線交成同向相等之角.

(c) 作兩兩的聯線,證其與已知直線平行.

17. 證明四點共圓,有下述各法:

(a) 聯其中二點,證明此線在其他二點所張之角相等.

(b) 聯四點,成一四邊形,證其對角互爲補角,或證其一外角等於內對角.

(c) 覓得與此四點等距離的一點.

(d) 證諸點共圓,可先證四點共圓,再證其餘各點亦在同圓周上.

18. 證明相似與合同,可利用相似△定理,△比例線段定理,及理相重合法.

以上所述各法,祇能作爲一種指導,決不能視爲包羅萬象的要訣.察題構思,舉一反三,全在學者的精求.

III. 作補助線法:——有時因爲已知的圖形過於簡單,或欲證關係不甚明顯,致使圖形中的原有線角,或失之稀,或失之散,不能用以上所舉各法,直接應用於原圖.在這個時候,須作補助線,藉以輾轉求出已知線角的關係.然而所難者,即在於發見此補助線,因幾何圖形的關係,變化無窮,決不能立一普遍的定律,以馭此無窮的變化;所以作補助線雖極重要,亦無從詳述其法.惟對於初學者,實宜略示方針,以啓其思想之端,故從吳在淵著近世初等幾何學(商務印書館出版),摘錄作補助線的方法如下:

"作補助線之標準有三:(一)使欲證者與已知者發生密切之關係;(二)使已知者聚於一處,吾人可得下手之地;(三)使欲證者聚於一處(欲證者不止一事時),便於吾人之比較取用.無標準之線,不宜妄作,妄作則圖中紛如亂絲,吾人目爲之眩矣.

"作補助線之大要:(一)以欲證或已知之線,平行移動,令其一端至一已知點;(二)從已知點向已知線,或欲證線,引直線,使成一已知之角;(三)

有一角,則試作此角之等分線;(四)有一角及等分線,則從等分線上已知點,至角之二邊引垂線,或由邊上已知點,作等分線之垂線;(五)關於一已知點或線,作圖中一部份之對稱圖;(六)題設△及一邊之中線,則就其重心觀察,或延長中線,使等於其本身;(七)題設線分之和或差者,試截長補短而比較之.

....

"作補助線之標準,除前編中所言者外,恆藉圓之助,使已知角及未知角之間,發生關係.故用圓之定理作補助線者,大概在視察圓周角,切線角,及中心角等.

"由是作補助線之大要:(一)題設直線或直線形及圓,則從中心至直線,或至直線形之邊作垂線;(二)直線或直線形與圓有公共點者,恆就此點作圓之切線,或聯此點及圓心,或從此點作平行於已知線之割線,而聯其與圓之交點及中心;(三)題設點及圓者,恆聯此點及中心,或從此點作圓之切線或割線;(四)題設四邊形者,恆就二對角線之交點,或就二對邊延長線之交點,行(三)

中之考察;(五)題設二圓者,作其中心線,或公切線,過其公共點引弦;相交者,過一交點引弦,或作切線,作交點之半徑,作公共弦而從其上一點作切線;(六)題設圓及弦者,於弦端作切線;設二弦者,交互聯其各端;等.無論何種設題,已知諸點有共圓者,或作補助線後所得交點及已知點有共圓者,急宜畫出此圓爲補助圓.......

"證比例題之法,......(第二)比例線分不能直接覔到,則宜覔出介紹二比相等之第三比,此時大都宜作某線之平行補助線;......".

從以上各語看來,作補助線之目的,不外於補成或新作一三角形,平行四邊形,圓內外接形,等等,以得充分的已知元素,可以直接利用各種推理方法;而所加補助線,無非爲聯線,平行線,垂直線,中垂線,分角線,切線,弦,共點圓等等.惟吳氏有言:"寧招罣一漏萬之誚",故讀者切不可宥於此寥寥數語,而不求精進也.

IV. 模範命題證法舉例:——本書中所舉各例,都是可以利用基本定理(卽見於教科書中的定理)證明的命題,所以會考或入學試題,其爲基本定理

者,若本書也選以為例,那麼就不詳述證法,祇註明其見何書,請讀者自去查閱——實在說起來,基本定理的證法,是應該牢記的.不過有時或加以解析,或說明其用何種推理方式(即直接法,間接法),或指出證中最重要的各步,以便研究,而利記憶.

(A) 線分相等的命題:

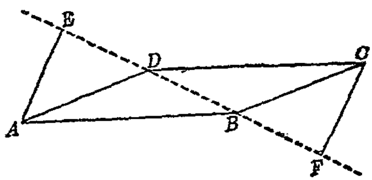
1. 設由平行四邊形 $ABCD$ 之 A, C 二角頂,作垂線 AE, CF 至對角線 BD(如下圖).求證 $AE=CF$.

(河北 22)

[解] 已知: (1) $ABCD$ 是▱.

(2) E, D, B, F, 在一直線上.

(3) $AE \perp ED, CF \perp FB$.



求證: $AE=CF$.

解析: $\angle AED=\angle R=\angle CFB$, 故若能證明 △ AED 與 CFB, 有一角一邊,或二邊相等,則 AE 與 CF 就是合同三角形的

對應邊了.

證明: $ABCD$ 是 ▱ (已知)

$\therefore AD = BC$ (▱對邊相等)

又 $AD \parallel BC$ (▱定義)

$\angle ADB = \angle CBD$ (平行線與截線所成內錯角相等)

E, D, B, F 在一直線上 (已知)

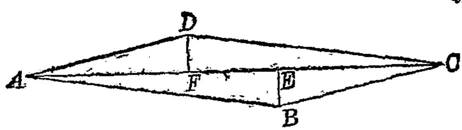
$\therefore \angle ADE = \angle CBF$ (等角的補角相等)

且 $\angle AED = \angle R = \angle CFB$ (已知)

於是 $\triangle AED \equiv \triangle CFB$ (二直角三角形,有一角一邊相等,則兩形全等)

$\therefore AE = CF$ (全等形的對應邊相等)

Q. E. D.



注意: 如由 B, D 作 AC 的垂線 BE, DF, 則當如上圖, 其證明略簡, 讀者可自求之.

此題其實尚有一重要之點, 默認而未加證明, 即: E 與 F 或同在形內, 或同

在形外,若對角線的二角是銳角,E與F卽在形內,若對角線的二角是鈍角,E與F卽在形外.此點在初等幾何學內,也可以證明,茲舉其一款,用歸謬法證明如下,讀者試將其餘自證之.

若E在形內,試證F亦在形內.

證: E在形內,則BEC是直角三角形,

$\therefore\qquad \angle ECB<\angle R,$

但$\angle ECB=\angle EAD$, $\therefore\ \angle DAE<\angle R.$

設F點在形外EA之延長線上,

則　$\angle DAF>\angle R.$ ($\angle DAF$爲$\angle DAE$之補角)

而　$\angle DFA=\angle R.$ ($DF\perp AF$)

則　$\triangle DAF$三角之和將大於二直角,是與定理悖.

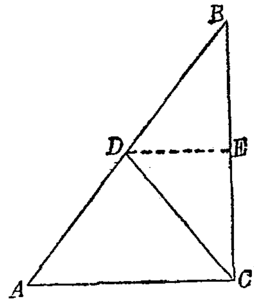
故F點不能在形外,祇能在形內.

2. ABC爲直角三角形,D是斜邊AB的中點,證明AD, BD, CD的長相等.

[解]　已知: (1)　$\triangle ACB$中, $\angle ACB=\angle R.$

(2)　$AD=DB.$

求證:　　$CD=AD=BD.$



解析：欲證CD與AD相等,既不能利用等腰三角形性質的逆定理,又不能利用全等三角形,故須作補助線若過D作AC的平行線,祇須證明其爲BC的中垂線,卽可證明$CD=BD=AD$.

證明：過D作AC之平行線.

(過已知點,可作一直線平行於已知線,且只可作一直線.)

此線必與BC相交,命交點爲E.

(與二平行線之一相交的直線,必與其他也相交.)

於是　　$BE=EC$

(過△一邊中點,平行於底之線,必平分他一邊.)

又因　　$\angle DEB=\angle ACB$

(平行線與一截線所成同位角相等)

而 $\angle ACB=\angle R$ (已知)

$\therefore$ $\angle DEB=\angle R$ (等於同量之量相等)

即 $DE\perp BC$ (垂線定義)

$\therefore$ $BD=CD$ (一線分的中垂線,距線分兩端等遠.)

即 $CD=AD=BD$ (等於同量之量互等)

Q. E. D.

別證: 以 D 爲圓心, AB 爲直徑,作一圓,則因

$$\angle ACB=\angle R,$$

$\therefore$ C 亦在此圓周上.

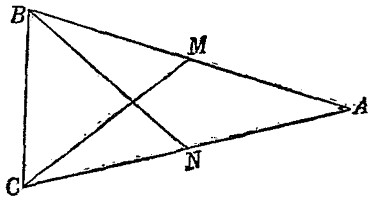
(直角之二邊,過一線分的二端,角頂即在以此線分爲直徑的圓周上.)

$\therefore$ $CD=AD=BD.$ Q. E. D.

(同圓半徑相等.)

3. 等腰三角形兩腰上的中線相等.試證之.

(湘三屆



[解]　已知：(1)　$\triangle ABC$ 中，$AB=AC$.

(2)　$AM=BM$,

$AN=CN$.

求證：　$BN=CM$.

解析：試證 $\triangle AMC$ 與 ANB 爲全等形.

證明：　$AB=AC$ (已知)

$AN=\frac{1}{2}AC$, $AM=\frac{1}{2}AB$ (已知)

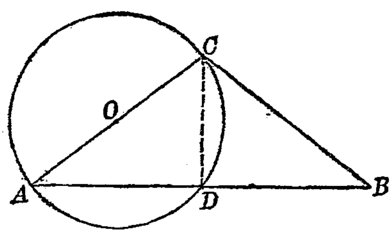
$\therefore$ $AN=AM$ (等量之半相等)

$\angle A=\angle A$ (同一角)

$\therefore$ $\triangle AMC\equiv\triangle ANB$ (s. a. s.=s. a. s.)

而 $BN=CM$ (全等形的對應邊)　Q. E. D.

4. 以等腰三角形之一腰爲直徑，作一圓，必平分其底.求證.　(湘四屆)



[解]　已知：(1)　$\triangle ABC$ 中，$AC=BC$.

(2)　AC 爲 $\odot O$ 的直徑.

(3) $\odot O$ 與 AB 交於 D.

求證: $AD=BD$.

解析: 須作補助線 CD, 而證明 $\triangle ADC$ 與 BDC 全等.

證明: 聯結 CD. (過兩點可作一直線)

則 $\angle ADC=\angle R$ (半圓內的弓形角是直角)

$\therefore \angle BDC=\angle R$ ($\because$ ADB 是一直線)

但 $AC=BC$ (已知), $CD=CD$ (同一)

$\therefore \triangle ADC \equiv \triangle BDC$ ($s.a.s.=s.a.s.$)

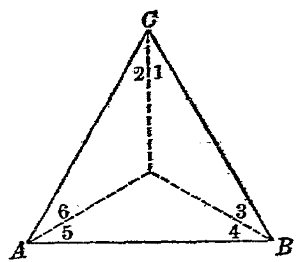
而 $AD=BD$ (全等形的對應部份)

別證: $\angle ADC=\angle R$, 即 $CD\perp AB$,

且 $AC=BC$, $\therefore AD=BD$.

(等腰△底邊上的高,平分底邊)

5. 三角形之內切外接兩圓同心,則爲等邊三角形,求證. (贛23)



[解] 已知: $\triangle ABC$ 中, O 是外心, 又是內心.

求證：$\triangle ABC$ 是等邊三角形.

解析：欲證 $AB=BC=CA$，須作補助線，使其成為全等三角形的對應邊；試聯結 OA, OB，與 OC 而察之.

證明：聯結 OA, OB, OC（過二點可作一直線）

則因 O 為外心（已知）

$\therefore OA=OB=OC$（同圓的半徑相等），

而 $\angle 1=\angle 3$，$\angle 2=\angle 6$（等腰△底角相等）

又因 O 為內心（已知）

$\therefore OC$ 平分 $\angle C$，而 $\angle 1=\angle 2$

（△形的內心，在各角的平分線上）

於是 $\angle 3=\angle 6$（等於等量之量互等）

$\therefore \angle AOC=\angle BOC$（兩△有二角等，第三角亦等）

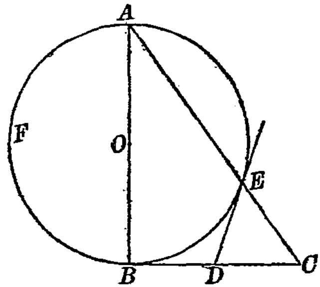
同樣可證 $\angle AOB=\angle BOC=\angle COA$

$\therefore \triangle AOB \equiv \triangle BOC \equiv \triangle COA$ (s.a.s. = s.a.s.)

於是 $AB=BC=CA$（全等形的對應邊）

即 $\triangle ABC$ 是等邊三角形（定義）Q. E. D.

6. 直角三角形 ABC 之 AB 邊，為一圓之直徑，而



此圓與斜邊相交於E點.如過E作此圓之切線,試證此切線必平分BC.

[解] 已知: (1) $\triangle ABC$中, $\angle B=\angle R$.

(2) $\odot O$之直徑爲AB.

(3) AC與$\odot O$交於E點, ED切於$\odot O$, 而與BC交於D點.

求證: $BD=DC$.

解析: 因$BD=DE$, 故若能證明$DE=DC$, 本題卽可解決,而欲證明$DE=DC$, 可試證$\angle DEC=\angle DCE$.

證明: $\angle DEC=\frac{1}{2}\overset{\frown}{AE}^{\circ}$(弦切角等於所夾弧度數之半)

$\angle DCE=\frac{1}{2}(\overset{\frown}{AFB}^{\circ}-\overset{\frown}{BE}^{\circ})$

(割切角等於所夾兩弧度數之半差)

但AB爲直徑(已知) $\therefore \overset{\frown}{AFB}=\overset{\frown}{AEB}$

(半圓周)

$\therefore\quad \angle DCE=\frac{1}{2}(\widehat{AEB}^{\circ}-\widehat{BE}^{\circ})$ (一量可代以等量)

卽　$\angle DCE=\frac{1}{2}\widehat{AE}^{\circ}=\angle DEC$ (等於同量之量互等)

$\therefore\quad DC=DE$ (△中底角相等,則兩腰亦等)

又因　$\angle ABC$　爲直角(已知),

$\therefore$ BD 切於 $\odot O$

(半徑端點之垂線爲切線)

於是　$BD=DE$　(圓外一點至圓之二切線相等)

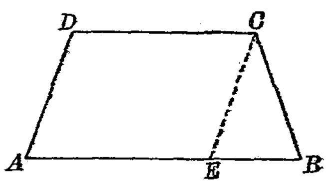
$\therefore$ $BD=DC$ (等於同量之量互等)

Q. E. D.

7. 證明梯形之底角相等,則爲等腰.

[解]　已知: 梯形 $ABCD$ 中, $\angle A=\angle B$

求證: $AD=BC$



解析: 試用平行移動法,將 AD 線的一端,移至 C 點,而考察之. (使欲證者聚於一處.)

證明：過 C 點，作 $CE \parallel AD$，與 AB 交於 E 點

(AD 與 AB 交，故 CE 與 AB 亦相交.)

於是 $CE=AD$ (▱對邊相等)

$\angle CEB=\angle A$

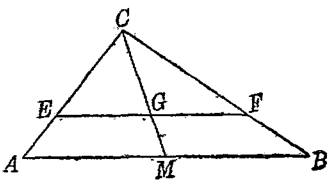
(平行線與截線所成同位角)

但 $\angle A=\angle B$ (已知)

$\therefore \quad \angle CEB=\angle B$ 而 $CE=CB$ (何故?)

$\therefore \quad AD=BC$ Q. E. D.

8. 平行於△底邊的線，必被底邊上中線平分，證之.



[解] 已知：(1) $\triangle ABC$ 中，$AM=BM$.

(2) $EF \parallel AB$，與 CM 交於 G.

求證： $EG=GF$.

解析：試證 $EG : GF=AM : MB$.

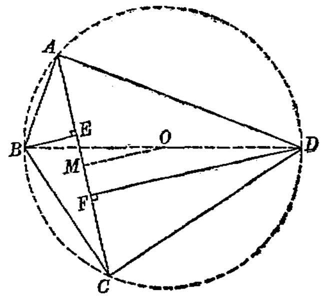
證明：$\left.\begin{array}{l} EG : AM=CG : CM \\ GF : MB=CG : CM \end{array}\right\}$ (兩△三角相等，則相似)

$\therefore EG : AM=GF : MB$ (等於同量)

即 $EG : GF=AM : MB$ (交比定律)

但 $AM=MB$, $\therefore$ $EG=GF$　　Q. E. D.

9. 四邊形 $ABCD$ 中, $\angle A=\angle C=\angle R$, 由 B, D 引 AC 的垂線, 其垂足爲 E, F. 證明 $AE=CF$.



[解]　已知: (1) 四邊形 $ABCD$ 中, $\angle A=\angle R=\angle C$.

(2) $BE\perp AC$, $DF\perp AC$.

求證: $AE=CF$.

解析: 因 $\angle A+\angle C=2\angle s R$,

故 A, B, C, D 共圓,試作補助圓考察之.

證明: 以 BD 爲直徑,作一圓,則 A, C 皆在此圓周上,因 $\angle A=\angle R=\angle C$.

試從圓心 O, 作 $OM\perp AC$, 與 AC 交於 M.

則 $AM=MC$ (垂直於弦之直徑,平分弦)

但 $OM\parallel BE\parallel DF$ (同一線之垂線)

且　$BO=OD$, $\therefore$ $EM=MF$.

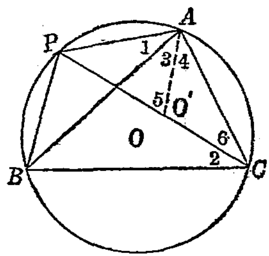
(諸平行線截一線爲等線段,亦必截他線爲等線段.)

$\therefore$　$AE=CF$　Q. E. D.

(等量減等量,差相等)

10. 三角形一角的平分線,與其外接圓交於一點,則此點必與三角形的其他二頂點,以及內切圓的圓心,距離相等.

[解]　已知: $\triangle ABC$ 中 $\angle C$ 的平分線,與外接圓 O 交於 P, O' 是 $\triangle ABC$ 的內切圓心.



求證: $PA=PO'=PB$.

解析: O' 在 PC 上,又在 $\angle BAC$ 的平分線上,試聯 $O'A$, 若能證明 $\angle PAO'=\angle PO'A$, 則本題就可解決.

證明: $\angle BCP=\angle ACP$,

$\therefore$ $\overset{\frown}{PB}=\overset{\frown}{PA}$ (張相等圓周角)

$\therefore$ $PB=PA$ (等弧所對的弦相等)

聯結 AO', 則 $\angle 5=\angle 4+\angle 6$

(△外角＝內對角和)

但 $\angle 4=\angle 3$, $\angle 6=\angle 2$

(內心在分角線上)

且 $\angle 2=\angle 1$ (夾同弧的圓周角相等)

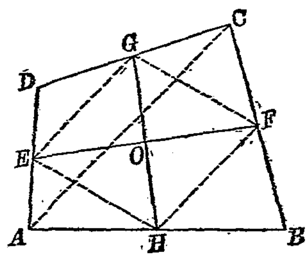
$\therefore$ $\angle 6=\angle 1$, 而 $\angle 5=\angle 3+\angle 1$

(等量替換)

即 $\angle PO'A=\angle PAO'$, $\therefore$ $PA=PO'$,

故　$PA=PO'=PB$　Q. E. D.

11. 證明任意四邊形對邊中點的聯線,互相平分.



[解] 已知: (1) E,F,G,H 是四邊形 $ABCD$ 各邊的中點,

(2) EF 與 GH 交於 O.

求證: $EO=OF, GO=OH$.

解析: 試順次聯 E,G,F,H, 若能證明 $EGFH$ 爲平行四邊形,則本題即可解決.

證明: $EG \parallel AC$, $FH \parallel AC$, $\therefore$ $EG \parallel FH$

$EG=\frac{1}{2}AC$, $FH=\frac{1}{2}AC$, $\therefore$ $EG=FH$

(△兩邊中點聯線,平行於第三邊,且等於其半.)

故 $EGFH$ 爲平行四邊形 (一雙對邊平行且相等)

而 $EO=OF$, $GO=OH$ (▱對角線互相平分)

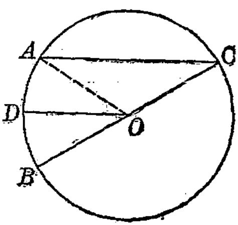
12. 求證平行四邊形之對角線,互相平分.

(湘五屆)

[解] 此係定理,證明見各教科書,解析見復興初中幾何 124 節. 注意兩對內錯角,屬於兩組平行線.

(B) 弧相等的命題:

1. 在弧上一點 C, 作一弦 CA 與一直徑 CB, 求證平行 CA 之半徑 OD, 平分弧 AB. (滬 23)



[解] 已知: (1) CB 爲 O 圓的直徑, CA 爲一弦.

(2 半徑 $OD \parallel AC$.

求證: $\overparen{AD}=\overparen{DB}$.

解析: 試證 $\overparen{AD}$ 與 $\overparen{DB}$ 各張等中心角.

證明: 聯 AO, 則 $\angle AOD=\angle CAO$ ($\because$ $AC \parallel OD$)

但 $\angle CAO=\angle ACO$ ($\because$ $OA=OC$)

$\therefore$ $\angle AOD=\angle ACO=\angle BOD$ (同位角)

$\therefore$ $\overparen{AD}=\overparen{DB}$ (圓心角相等,弧相等)

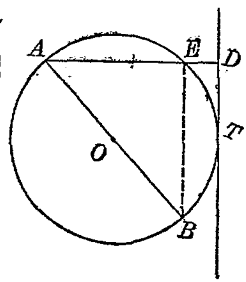
Q. E. D.

2. 一線切O圓於T,從任意直徑AB的一端A,引此切線的垂線,與圓交於第二點E,則$\overparen{TE}=\overparen{TB}$.

[解] 已知: (1) TD切O圓於T.

(2) $AD \perp TD$,與O圓交於E.

(3) AOB為直徑.



求證: $\overparen{TE}=\overparen{TB}$

解析: 若聯 BE, 而證明 $BE \parallel TD$, 則本題即可證明.

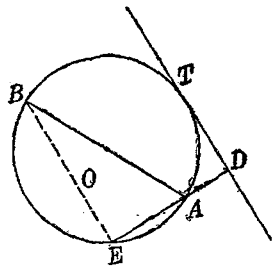
證明: 聯 BE, 則 $\angle AEB=\angle R$

(半圓所張圓周角為直角)

$\therefore$ $BE \parallel TD$ ($\because$ 同垂直於 AD)

$\overset{\frown}{TE}=\overset{\frown}{TB}$ (二平行線間所截弧相等)

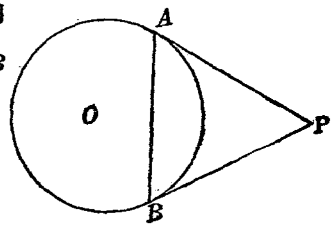
若 AD 之延長線與圓相交,如右圖,其證明與前相同.



(C) **角相等的命題:**

1. 自弦之兩端,引兩切線,此兩切線與弦所成之角相等,試證之. (湘二屆)

[解] 已知: PA 與 PB 切於 O 圓, A, B 爲切點.



求證: $\angle PAB=\angle PBA$.

解析: 試利用等腰△定理.

證明: $PA=PB$

(圓外一點至圓的二切線相等)

$\therefore \angle PAB=\angle PBA$ (等腰△底角相等)

Q. E. D.

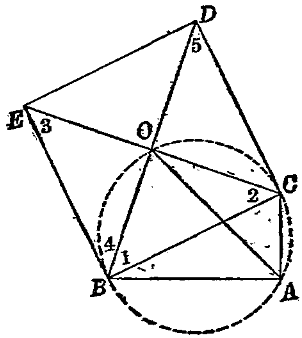
2. 以直角 $\triangle ABC$ 的斜邊 BC 爲一邊,作正方形 $BCDE$, 令對於 BC 不與三角形在同側.若其對

角線交於 O, 證明 $\angle BAO=\angle CAO$.

[解] 已知: (1) $\triangle ABC$ 中,

$\angle A=\angle R$.

(2) $BCDE$ 爲正方形,其對角線交於O點.



求證: $\angle BAO$

$=\angle CAO$.

解析: 因 $\angle BOC=\angle R$, 故 B, A, C, O 共圓, 試作此補助圓考察之.

證明: $\because\ BC=CD$, $\therefore\ \angle 1=\angle 5$.

(等腰△底角)

但 $\angle 5=\angle 4$, (內錯角) $\therefore\ \angle 1=\angle 4$.

又因 $BC=BE$, $\therefore\ \angle 2=\angle 3$.

(等腰△底角)

於是 $\angle BOC=\angle BOE=\angle R$

$\therefore\ \angle BOC+\angle BAC=2\angle R$,

而 B, A, C, O 四點共圓

(四邊形對角互相補,則其頂點共圓)

今試作此圓，則因

$\angle 1=\angle 4=\frac{1}{2}\angle R$, $\therefore$ $\angle 2=\frac{1}{2}\angle R$

($\because$ $\angle 1+\angle 2=\angle R$)

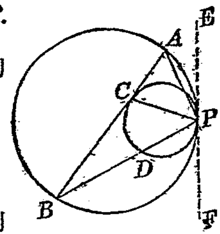
$\therefore$ $\angle 1=\angle 2$, $\widehat{BO}=\widehat{CO}$ (張相等圓周角)

故 $\angle BAO=\angle CAO$ (夾相等之弧)

3. 二圓內切於P，外圓的弦AB，切內圓於C點，證明PC平分$\angle APB$.

[解] 已知：(1) 兩圓內切於 P.

(2) 外圓之弦AB，切內圓於C點.



求證：$\angle APC=\angle BPC$.

解析：試作公切線 EF，利用弦切角定理，則 $\angle APE=\angle ABP$. 故欲證明 $\angle APC=\angle BPC$，祇須證明 $\angle CPE=\angle CBP+\angle CPB$.

證明：作公切線 EF，則

$\angle CPE=\angle ACP$ (同夾內圓$\widehat{CP}$)

$\angle APE=\angle CBP$ (外圓的弦切角)

但 $\angle ACP=\angle CBP+\angle CPB$

(外角=內對角和)

$\therefore\ \angle CPE=\angle CBP+\angle CPB$

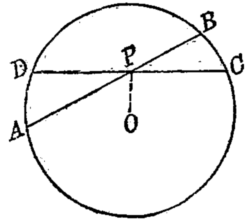
即 $\angle APE+\angle APC=\angle CBP+\angle BPC$

$\therefore\ \angle APC=\angle BPC$　　(等量減等量)

Q. E. D.

(D) 線不等的命題:

1. 一圓內非直徑之二弦,決不能互相等分,證明之.



[解] 已知: AB, CD 是 O 圓的二弦,相交於 P.

求證: AB, CD 決不能互相等分.

解析: P 點可在 CD 之中點上,祇須證其不為 AB 之中點.可用歸謬證法證之.

證明: (1) 若 P 點為 CD 之中點,假定 P 亦為 AB 之中點.則試聯 OP,即有

$OP\perp CD$, $OP\perp AP$.

(圓心至弦中點之線,垂直於弦)

$\therefore\quad CD\parallel AB$　(同一線的垂線)

但題設 CD 與 AB 相交,可知 $CD\nparallel AB$.

$\therefore$ P不爲AB之中點. *Q. E. D.*

(2) 若P點不爲CD之中點,則P雖爲AB之中點,亦不能互相平分.

Q. E. D.

2. 同圓中長弦離心較近,短弦離心較遠.

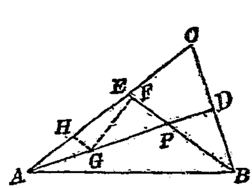
(蘇女中)

[解] 此係定理,證法見復興初中幾何132節.其最重要的一步,是利用"兩$\triangle$有兩邊相等,夾角不等,則第三邊亦不等"一定理,然後再用"一$\triangle$不等邊對不等角"一定理.惟尚有較簡的證明,祇須利用後一定理卽可.讀者試過A點作AE弦等於CD弦,而自證之.

3. 三角形小角的二等分線,大於大角的二等分線.

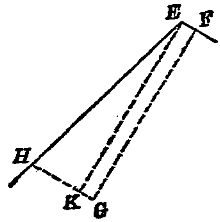
[解] 已知: (1) $\triangle ABC$ 中, $\angle B > \angle A$.

(2) AD, BE 是 $\angle A$ 與 $\angle B$ 的平分線.



(a)

求證: $AD > BE$.



解析：$AP>PB$，證之甚易，因 $\angle PAB$ 與 $\angle PBA$ 各爲 $\angle A$ 與 $\angle B$ 之半，今已知 $\angle CBA>\angle CAB$，$\therefore \angle PBA>\angle PAB$，而 $PA>PB$．但 PD 與 PE，却可有下述三關係中任一關係，卽 $PD>PE$，$PD=PE$，以及 $PD<PE$ 便是．若屬於前二種，則由不等量公理，可證明本題結論；若屬於第三種，則須利用平行移動法．

證明：$\angle PBA>\angle PAB$　　(不等量之半)

$\therefore PA>PB$　(一$\triangle$中，大角所對之邊大)

假定 $PD\geqq PE$，則 $AD>BE$．

(大量加大量，大於小量加小量；不等量加等量，大者仍大．)

假定 $PD<PE$，則可在 PE 上截取 $PF=PD$，而在 PA 上截取 $PG=PB$．聯 FG，並作 GH 平行於 PE，與 AE 交於 H．於是 $\triangle GPF\equiv\triangle BPD$ (s. a. s.=s. a. s.)

$\therefore\ \angle GFP=\angle BDP$ (全等△對應角)

又因 $\angle PAE+\angle PEA=\angle PBD+\angle BDP$

而 $\angle PAE<\angle PBD$

$\therefore\ \angle PEA>\angle BDP$

(等量減不等量,減去小者,所餘反大)

$\therefore\ \angle PEA>\angle GFP$

於是可在 $\angle PEA$ 內,作 EK 線,使 $\angle KEF=\angle GFP$.

則 $EK\parallel FG$ ($\because$ 同位角相等)

$\therefore$ EK 必與 HG 相交,且交點 K 必在 HG 線分之上. $\therefore\ HG>KG$ (全大於分)

但 $KG=EF$ (▱對邊相等), $\therefore\ HG>EF$.

又 $\angle AHG=\angle AEP$, $\therefore\ \angle AHG>\angle GFP$,

$\therefore\ \angle AHG>BDP$.

但 $\angle BDP>\angle CAD$

(△外角大於內對角)

$\therefore\ \angle AHG>\angle HAG$, 而 $AG>HG$.

於是 $AG>EF$. 因 $GD=BF$ (等量之和)

$\therefore\ AG+GD>EF+BF$, 即 $AD>BE$.

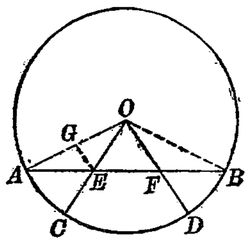
Q. E. D.

(*E*)　弧不等的命題:

1. 將弦三等分的半徑,其所截弧不相等,中間較大,試證明之.

[解]　已知: (1) AB 爲 O 圓之弦.

(2) 半徑OC,OD交AB於E,F,$AE=EF=FB$.



求證: $\widehat{AC}<\widehat{CD}$.

解析: 欲證 $\widehat{AC}<CD$, 可證 $\angle AOC<\angle COD$.

OE 爲 $\triangle AOF$ 的中線,若能證明$OF<OA$,則此題卽等於"不等腰 $\triangle$ 底邊上中線,與兩腰所夾之角不等,與小腰所夾者大".

證明: $OF<OA$

(圓內一點至圓心距離, 小於半徑.)

過 E 作 $EG \parallel OF$, 與 OA 交於 G 點.

則 $AG=GO$, $EG=\frac{1}{2}OF$.

(過 $\triangle$ 一邊中點,平行於底之線,必過他邊中點,且在兩邊間的線分,等於底之

半.)

$\therefore$ $EG<OG$ (不等量之半)

而 $\angle GOE<\angle GEO$

(一△大邊所對之角大)

但 $\angle GEO=\angle EOF$ ($\because$ $EG\parallel OF$)

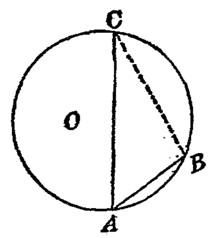
$\therefore$ $\angle AOC<\angle COD$

$\overset{\frown}{AC}<\overset{\frown}{CD}$ Q. E. D.

(此題亦可用歸謬法證明,讀者試自證之.)

2. 同圓中 AC 弦等於 AB 弦的二倍,證明 $\overset{\frown}{AB}<\overset{\frown}{BC}$.

[解] 已知: O 圓中, $AC=2AB$.



求證: $\overset{\frown}{AB}<\overset{\frown}{BC}$.

解析: 試聯 BC 弦, 證明 $AB<BC$.

證明: 聯結 BC, 則 $AC<AB+BC$.

(而點間距離,直線最短).

但 $AC=2AB$, $\therefore$ $2AB<AB+BC$.

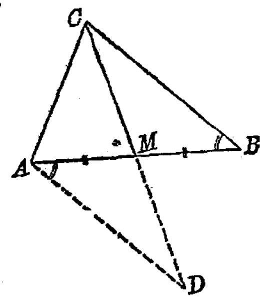
即 $AB<BC$ $\therefore$ $\overset{\frown}{AB}<\overset{\frown}{BC}$ Q. E. D.

(不等弦所張之弧不等,弦大者弧大.)

(F) **角不等的命題:**

1. 不等腰△底邊上中線,與兩腰所夾之角不等,與小腰所夾者大.

(此題之證法,已見弧不等命題例1,但此處再示第二種證法,以供讀者研究.)



[解] 已知: (1) CM為$\triangle ABC$的中線.

(2) $AC<BC$.

求證: $\angle ACM>\angle BCM$.

解析: 試利用平行移動法,將CB移至AD,可證明CMD為一直線.故本題須作補助線AD.

證明: 作$AD\parallel BC$,並與CM延長線交於D,則

$\triangle AMD\equiv\triangle BMC$ (a. s. a = a. s. a.)

$\therefore AD=BC$ 而 $AC<AD$

於是 $\angle ACM>\angle ADC>BCM$ Q. E. D.

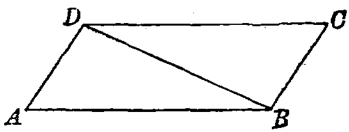
2. 平行四邊形對角線,不平分對角,鄰短邊者較大;證明之.

(初學者每誤以為▱對角線平分對角,故舉此

例.)

[解]　已知: (1)　$ABCD$為▱.

(2)　$AD<CD$.



求證: $\angle ADB>\angle CDB$.

解析: 可利用一△不等邊角定理.

證明: $AD<CD$, 卽 $AD<AB$　　(∵ $AB=CD$)

∴ $\angle ADB>\angle ABD$

(一△大邊所對之角大)

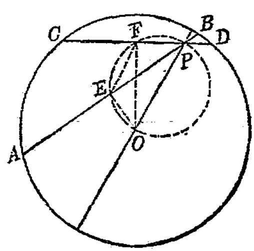
但 $\angle ABD=\angle CDB$ (內錯角)

∴ $\angle ABD>\angle CDB$　　Q. E. D.

3. 過圓內一點的兩不等弦,與過同一點之直徑,交成不等角,短者與直徑交成大角.

[解]　已知: (1)　P 為 O 圓中直徑上之一點;

(2)　AB, CD 為過 P 的二弦.



(3)　$AB>CD$.

求證：$\angle APO<\angle DPO$

解析：若自O作AB,CD之垂線OE,OF,則O,P,E,F共圓.作出此圓,試考察之.

證明：從O作垂線至AB,CD,其垂足爲E與F.則O,P,E,F共圓(因OP在E,F張等角)作出此圓,並聯EF,則

$\angle APO=\angle EFO$　　(夾同弧之圓周角)

$\angle DPO=\angle OEF$(圓內接四邊形外角=內對角)

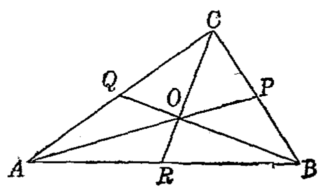
但$OE<OF$(大弦離心較近)

$\therefore\ \angle EFO<\angle OEF$(一△中大邊所對之角大)

卽$\angle APO<\angle DPO$　　Q. E. D.

(G) **面積相等的命題：**

1. 證明三角形三中線,分原形爲六個等積三角形.



[解] 已知：$AP,\ BQ,\ CR$爲$\triangle ABC$之三中線.

求證: 三中線分原形爲六個等積三角形.

解析: 因三中線交於一點,故可利用△重心定理,及△面積公式.

證明: AP, BQ, CR 交於一點,命此點爲 O

則 $OA=2OP, OB=2OQ, OC=2OR.$

(三角形之三中線共點,各中線被此點分成兩線段,近頂點者,爲近中點者的2倍.)

今以三中線爲底,考察此六個三角形,

則 $\triangle AOR=\frac{1}{2}\triangle AOC$ $\triangle BOP=\frac{1}{2}\triangle AOB$

$\triangle COQ=\frac{1}{2}\triangle BOC$

(高相同,底等於一半.)

但以三邊爲底,考察此六三角形,則

$$\left.\begin{array}{l}\triangle AOR=\triangle BOR=\frac{1}{2}\triangle AOB\\ \triangle BOP=\triangle COP=\frac{1}{2}\triangle BOC\\ \triangle COQ=\triangle AOQ=\frac{1}{2}\triangle AOC\end{array}\right\}\text{(等底等高)}$$

$\therefore$ $\triangle AOR=\triangle BOR=\triangle BOP=\triangle COP$

$=\triangle COQ=\triangle AOQ.$

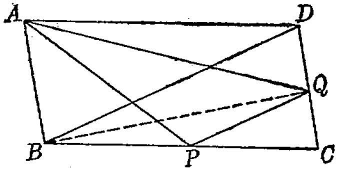
Q. E. D.

2. 平行四邊形 $ABCD$ 中,平行於對角線 BD 之直

線,與 BC, CD 相遇於 PQ. 證明 $\triangle ABP = \triangle ADQ$

[解] 已知: (1) $ABCD$ 為 ▱.

(2) $PQ \parallel BD$, 遇 BC, CD 於 P, Q.



求證: $\triangle ABP = \triangle ADQ$

解析: 試利用二平行線間等積 △ 定理.

證明: 聯 BQ, PD, 則

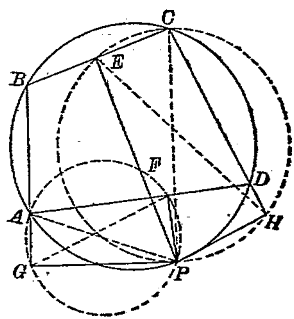
$\triangle ABP = \triangle DBP$ $(\because AD \parallel BP)$

$\triangle ADQ = \triangle BDQ$ $(\because AB \parallel DQ)$

但 $\triangle DBP = \triangle BDQ$ $(\because PQ \parallel BD)$

$\therefore \triangle ABP = \triangle BDQ$. Q. E. D.

3. 從圓周的一點,至此四內接四邊形的兩雙對邊,各作兩雙垂線,則此兩雙垂線所包的兩矩形相等. 證明之.



[解] 已知: (1) $ABCD$ 是圓內接四

邊形.

(2) P是圓上一點.

(3) $PE\perp BC$, $PF\perp AD$,

$PG\perp AB$, $PH\perp CD$.

求證: PE與PF所包▭$=PG$與PH所包矩形.

解析: 因P, E, C, H共圓, P, G, A, F亦共圓,故可作此二圓,試觀察有無相似三角形的比例關係,以證$PE\times PF=PG\times PH$.

證明: $\angle PGA=\angle R=\angle PFA$, $\therefore$ P, G, A, F共圓.

$\angle PEC=\angle R=\angle PHC$, $\therefore$ P, E, C, H共圓.

今試作此二圓,而聯結PA, GF, PC, EH,

則 $\angle PGF=\angle PAF$ (同夾$\overset{\frown}{PF}$)

$\angle PEH=\angle PCH$ (同夾$\overset{\frown}{PH}$)

但 $\angle PAF=\angle PCH$ (同夾$\overset{\frown}{PD}$)

$\angle PGF=\angle PEH$

(等於等量之量互等)

又 $\angle PFG=\angle PAG$ (同夾$\overset{\frown}{PG}$)

$\angle PHE=\angle PCE$ (同夾$\overset{\frown}{PE}$)

但 $\angle PAG=\angle PCE$

(圓內接四邊形外角等於內對角)

$\therefore \angle PFG = \angle PHE$ $\triangle GPF \backsim \triangle EPH$

而 $PG : PE = PF : PH$

(兩△有二角等,則相似)

卽 $PE \times EF = EG \times PH$　　(比例定律)

故 PE 與 PF 所包▭ $=$ PG 與 PH 所包▭.

Q. E. D.

(矩形面積定理)

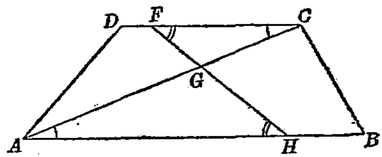
(H) 兩比相等的命題:

1. FH 橫截 $ABCD$ 梯形內 CA 對角線於 G, 試證:

$FG : GH = CG : GA$　　(暨南附中)

[解] 已知: (1) $ABCD$ 爲梯形.

(2) FH 交 AC 於 G.



求證: $FG : GH = CG : GA$

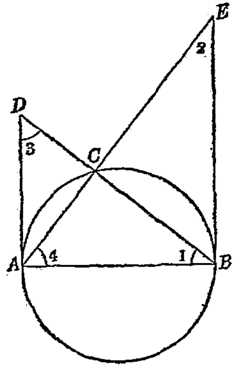
解析: 利用相似△定理.

證明: $\angle GAH = \angle GCF$, $\angle GHA = \angle GFC$.

$\therefore \triangle GAH \backsim \triangle GCF$

$FG : GH = CG : GA$　　Q. E. D.

2. 如圖 AD, BE 切於直徑兩端,倘 BD, AE 與圓相遇於 C, 試證 AB 是 AD, BE 間的比例中項. (敬業)



[解] 已知: 如題所述.

求證: $\overline{AB}^2=\overline{AD}\cdot\overline{BE}$.

解析: 試證△ABD, ABE 相似.

證明: $\angle ACB=\angle R$. ∴ $\angle 1+\angle 4=\angle R$

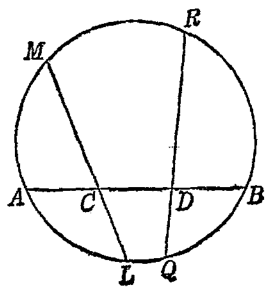
但 $\angle 2+\angle 4=\angle R$　　(∵ BE 爲切線)

∴ $\angle 1=\angle 2$ 同様可證 $\angle 3=\angle 4$

∴ $\triangle ABD\backsim\triangle BEA$, $AD : AB=AB : BE$

即 $\overline{AB}^2=\overline{AD}\cdot\overline{BE}$　　Q. E. D.

3. 過一弦之三等分點,引任意二弦,則此二弦被第一弦所分一側兩線段,與他側兩線段成反比例;證明之.



[解] 已知: (1) C, D 三等分 AB 弦.

(2) LM, QR 爲過

C與D之任意二弦.

求證：$CL:DQ=DR:CM$

解析：利用交弦比例線段定理.

證明：$CL\times CM=AC\times CB=\frac{1}{3}AB\times\frac{2}{3}AB=\frac{4}{9}\overline{AB}^2$

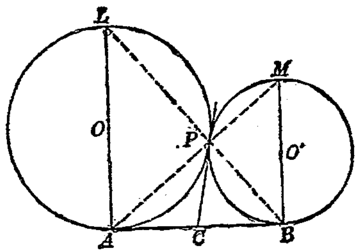
$DQ\times DR=DB\times AD=\frac{1}{3}AB\times\frac{2}{3}AB=\frac{4}{9}\overline{AB}^2$

(交弦線段定理,$AC=CD=DB\frac{1}{3}AB$)

$\therefore\ CL\times CM=DQ\times DR$

即 $CL:DQ=DR:CM$　　Q.E.D.

4. 兩圓的外公切線長,是兩圓直徑的比例中項.



[解]　已知：(1)　O,O'二圓外切於P點.

(2)　AL,BM是直徑.

求證：$\overline{AB}^2=\overline{AL}\cdot\overline{BM}$.

解析：因 $\angle PAB=\angle L$, $\angle PBA=\angle M$, 故若能證明 AM 與 BL 交於 P 點，即可證明$\triangle ABM$與$\triangle LAB$相似.

證明：聯 PA, PM, PB, PL，並作公切線 PC，與 AB 交於 C 點.則 $\angle APL=\angle R=\angle BPM$.

但 $AC=CP=CB$，$\therefore AB$ 為 $\triangle ABP$ 外接圓的直徑，而 $\angle APB=\angle R$.

於是 $\angle APL+\angle APB=2\angle R$

$\angle BPM+\angle APB=2\angle R$

$\therefore APM$ 與 BPL 都成一直線.

又因 $\angle PAB=\angle PLA$　　(同夾 $\overset{\frown}{AP}$)

$\angle PBA=\angle PMB$　　(同夾 $\overset{\frown}{BP}$)

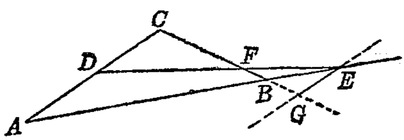
$\therefore \triangle ABM \backsim \triangle LAB$，$BM:AB=AB:AL$

即 $\overline{AB}^2=\overline{AL}\cdot\overline{BM}$　　Q. E. D.

5. 在 $\triangle ABC$ 的邊 AC 上，取任意一點 D，延長 AB 至 E，使 $BE=CD$，若 DE 與 BC 相交於 F 點，則 $DF:FE=AB:AC$. 證明之.

[解] 已知：如題所述.

求證：如題所述.



解析：須覓得另一對比例線分，作為媒介.

證明：過 E 點,作 $EG \parallel AC$, 與 CB 延長線交於 G. 則 $\triangle DFC \backsim \triangle EFG$, ($\because$ 三角相等)

$\therefore DF : FE = CD : EG$.

但 $CD = BE$,

$\therefore DF : FE = BE : EG$.　(等量代替)

又因 $\triangle BAC \backsim \triangle BEG$,　(三角相等)

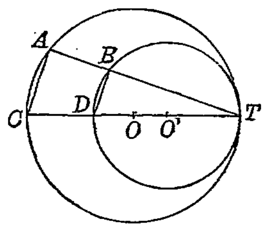
$\therefore BE : EG = AB : AC$,

$\therefore DF : FE = AB : AC$.　Q. E. D.

6. 兩圓內切,則大圓中過切點之弦,被小圓所分兩線段,成定比.試證明之.

[解] 已知：(1) O 圓與 O' 圓相切於 T.

(2) TA 弦交 O' 圓於 B.



求證：$TB : AB =$ 定比.

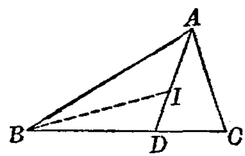
解析：題言定比,則必求定線.但除直徑外,無他定線,故作大圓之直徑,而考察其中有無比例線段.

證明：過 T 作大圓直徑 TC, 則 TC 必過小圓中心.若 TC 交小圓於 D, 則 TD 卽爲小圓之直徑.聯 AC, BD, 則

$\angle CAT = \angle R = \angle DBT$, $\therefore$ $BD \parallel AC$.

於是$TB : AB = TD : DC =$定比.

7. 設$\triangle ABC$的內心爲I, AI與BC的交點爲D, 則$AI : ID = (AB + AC) : BC$, 證之.



〔解〕 已知: 如題所述.

求證: 如題所述.

解析: I在$\angle A$與$\angle B$的平分線上,故可利用$\triangle$分角線比例定理.

證明: 聯BI,則$\angle ABI = \angle DBI$,　(因I爲內心)

$\therefore$ $AI : ID = AB : BD$.

(△頂角平分線,分底邊爲二線分,與兩腰成比例.)

又因 $\angle BAI = \angle CAI$,

$\therefore$ $AB : AC = BD : DC$.　(同上)

$(AB + AC) : AC = (BD + DC) : DC$,

(合比定律)

即 $(AB + AC) : BC = AC : DC$.(交比定律)

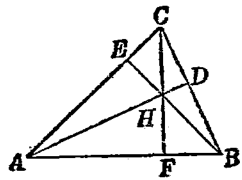
但 $AC : DC = AB : BD$,　(交比定律)

$\therefore$ $AI : ID = (AB + AC) : BC$.　Q. E. D.

8. 三角形垂心所分三高之三雙線段,積相等,試證.

[解] 已知: (1) 三角形 ABC 的三高爲 AD, BE, CF.

(2) 垂心爲 H.



求證: $AH\cdot HD=BH\cdot HE=CH\cdot HF$.

解析: 可利用交弦線段定理.

證明: $\angle AEB=\angle R=\angle ADB$,

$\therefore$ A, E, D, B 共圓.

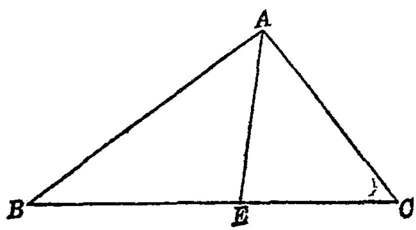
於是 $AH\cdot HD=BH\cdot HE$.　(交弦線段)

同樣可證 $BH\cdot HE=CH\cdot HF$,

$\therefore$ $AH\cdot HD=BH\cdot HE=CH\cdot HF$. Q. E. D.

(*I*) 和差倍分關係的命題:

1. ABC 爲一任意三角形, $\angle A$ 之二等分線與 BC



相會於E.證$\angle AEC=90^\circ+\frac{1}{2}(\angle B-\angle C)$ (滬23)

[解] 已知: $\triangle ABC$中, EA平分$\angle A$, 與BC相會於E點.

求證: $\angle AEC=90^\circ+\frac{1}{2}(\angle B-\angle C)$.

解析: 利用△內角和定理與等量公理.

證明: $\angle AEC=\angle B+\angle BAE$,

(△外角＝內對角和)

$2\angle AEC=2\angle B+2\angle BAE$, (等量之倍)

但 $2\angle BAE=\angle BAC$, (已知)

$\therefore 2\angle AEC=\angle BAC+\angle B+\angle B$,

(等量代替)

於是 $2\angle AEC+\angle C=\angle BAC+\angle B+\angle C+\angle B$, (等量之和)

但 $\angle BAC+\angle B+\angle C=180^\circ$,

(△內角和定理)

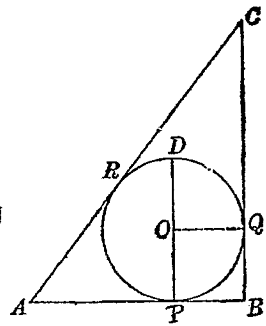
$\therefore 2\angle AEC+\angle C=180^\circ+\angle B$,

即 $2\angle AEC=180^\circ+\angle B-\angle C$.

$\therefore \angle AEC=90^\circ+\frac{1}{2}(\angle B-\angle C)$. $Q.E.D.$

2. 直角三角形內切圓之直徑與斜邊之和,等於

餘二邊之和.　　　(皖)



[解]　已知: (1) $\triangle ABC$ 中,

$\angle B = \angle R$.

(2) O圓內切於 $\triangle ABC$, 其切點爲 P, Q, R.

(3) PD 爲直徑.

求證: $AC + PD = AB + BC$.

解析: 試將 AC, PD, AB, BC 分成相等線分, 而證其和相等.

證明: $AR = AP, CR = CQ$, (一點至圓兩切線等)

$\therefore\ AR + RC = AC = AP + CQ$.

試作半徑 OQ, 則 $OQ \perp BQ$.

(過切點之半徑垂直於切線.)

$\therefore\ OQ \parallel PB$.　　　(同爲 BQ 之垂線.)

又 $OP \perp PB$, $QB \perp PB$, $\therefore\ OP \parallel QB$.

於是 $OPBQ$ 爲正方形.

而 $OP = QB$, $OQ = PB$,

$\therefore\ OP + OQ = PB + QB$.

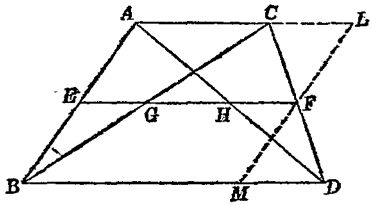
但 $OQ = OD$,　　　(半徑相等)

$\therefore\ PD=PB+QB.$

於是 $AC+PD=AP+CQ+PB+QB,$

卽 $AC+PD=AB+BC.$　　　Q. E. D.

3. 於梯形不平行兩邊中點聯 EF 線，試證：



(1) G,H 爲 BC,AD 兩對角線中點.

(2) $EF=\frac{1}{2}(AC+BD).$

(3) $GH=\frac{1}{2}(BD-AC).$　　　(漢口)

[解] 已知：如題所述.

求證：如題所述.

解析：若能證明 $EF \parallel BD \parallel AC$，卽可利用△兩邊中點聯線的定理與逆定理.

證明：(1) 過 F 點，作 $LM \parallel AB$，與 AC, BD 交於 L 與 M.　　(平行移動法)

則因 $CF=FD, CL \parallel MD,$　　(已知)

$\therefore\ \triangle FMD \equiv \triangle FLC.$ (a. s. a. = a. s. a.)

而 $FL=FM=\frac{1}{2}LM,$

但 $LM=AB,$　　(▱對邊)

$\therefore FL=\frac{1}{2}AB=AE.$

故 $AEFL$ 爲 ▱, 而 $EF \parallel AC \parallel BD$,

(都平行於第三線)

$\therefore G, H$ 爲 BC, AD 之中點. Q.E.D.

(過△一邊中點,平行底邊之線,必過他邊中點.)

(2) $EH=\frac{1}{2}BD, HF=\frac{1}{2}AC.$

(△兩邊中點之聯線,等於底邊之半.)

$\therefore EH+HF=EF=\frac{1}{2}(AC+BD).$

Q.E.D.

(3) $EH=\frac{1}{2}BD, EG=\frac{1}{2}AC,$

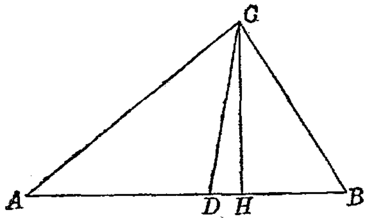
$\therefore EH-EG=GH=\frac{1}{2}(BD-AC).$

Q.E.D.

4. 於三角形之角頂,作其角之平分線,及至對邊之高,則此二線所成之角,等於兩底角差之半,試證之. (贛 22)

[解] 已知: (1) $\triangle ABC$ 中, $CH \perp AB$.

(2) CD 平分 $\angle ACB$.



求證：$\angle DCH=\frac{1}{2}(\angle B-\angle A)$.

解析：利用△內角和定理與等量公理,本題即可得證.

證明：$\angle DCH=\angle R-\angle CDH$. ($\because \angle DHC=\angle R$)

$2\angle_s DCH=2\angle_s R-2\angle_s CDH$.

但 $\angle A+\angle B+\angle ACB=2\angle_s R$, (內角和)

$\angle CDH=\angle A+\angle ACD$, (外角)

$\therefore 2\angle_s DCH=\angle A+\angle B+\angle ACB-2\angle_s A-2\angle_s ACD=\angle B-\angle A+\angle ACB-2\angle_s ACD$.

但 $2\angle_s ACD=\angle ACB$, (已知)

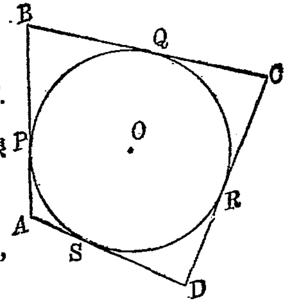
$\therefore 2\angle_s DCH=\angle B-\angle A$,

即 $\angle_s DCH=\frac{1}{2}(\angle B-\angle A)$. Q. E. D.

5. 圓外切四邊形相對二邊之和,等於其他相對二邊之和.證明之. (浙22)

[解] 已知：四邊形 $ABCD$ 外切於 O 圓,其切點爲

$P, Q, R, S.$



求證: $AB+CD=AD+BC.$

解析: 可利用「兩切線相等」的定理.

證明: $AP=AS, BP=BQ,$

$\therefore AB=AS+BQ.$

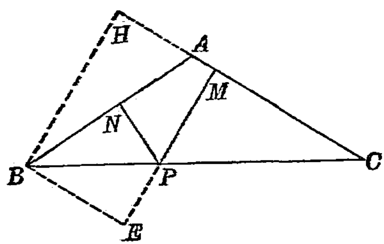
$DR=DS, CR=CQ,$

$\therefore CD=DS+CQ,$

$\therefore AB+CD=AS+DS+BQ+CQ$

$=AD+BC.$　　　　Q. E. D.

6. 在二等邊三角形之底取一點,引二直線垂直於二等邊,則二垂線之和等於其等邊上之高,證明之.　　　(省立上海中學)



[解] 已知: (1) $\triangle ABC$ 中 $AB=AC.$

(2) P 爲 BC 上一點,

$PM \perp AC$, $PN \perp AB$.

(3) BH 爲 AC 上之高.

求證: $PM+PN=BH$.

解析: 若延長 MP 至 E, 使 $PE=PN$, 而能證明 $ME=BH$, 本題即可得證. 欲證 $ME=BH$, 可證 $MEBH$ 爲 ▱, 故本題主要關鍵, 在於證明 $BE \parallel HM$.

證明: 延長 MP 至 E, 使 $PE=PN$, 聯 BE.

$\because$ $\angle NBP=\angle C$, $\angle BNP=\angle R=\angle PMC$,

$\therefore$ $\angle NPB=\angle MPC=\angle EPB$.

於是 $\triangle BNP \cong \triangle BEP$, (s. a. s. = s. a. s.)

而 $\angle PBE=\angle PBN=\angle C$, $\therefore$ $BE \parallel HM$.

但 $HB \parallel ME$, (同爲 AC 的垂線)

$\therefore$ $MEBH$ 爲 ▱, 而 $ME=BH$,

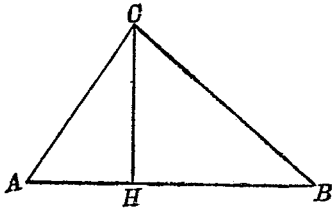
即 $PM+PN=BH$. Q. E. D.

7. 三角形兩邊平方之差, 等於自頂角至第三邊作垂線所分第三邊二線分平方之差. (太倉中學)

[解] 已知: $\triangle ABC$ 中, $CH \perp AB$.

求證: $\overline{BC}^2-\overline{AC}^2=\overline{BH}^2-\overline{AH}^2$

解析: 可用商高定理.



證明: $\overline{BC}^2=\overline{CH}^2+\overline{BH}^2$, $\overline{AC}^2=\overline{CH}^2+\overline{AH}^2$

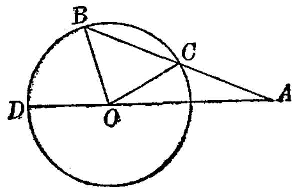
$\therefore$ $\overline{BC}^2-\overline{AC}^2=\overline{BH}^2-\overline{AH}^2$.　Q.E.D

8. 證明:

若 $AC=OC$,

則 $\angle DOB=3\measuredangle A$.

(之江附中)



[解] 已知: 如題所述, 求證: 如題所述.

解析: 因 $\angle DOB=\angle B+\angle A$, 故祇須證明

$\angle B=2\measuredangle A$.

證明: $\angle DOB=\angle B+\angle A$,

但 $\angle B=\angle OCB$, $\angle OCB=\angle A+\angle COA$,

$\therefore$ $\angle DOB=2\measuredangle A+\angle COA$.

但因 $AC=OC$, $\therefore$ $\angle COA=\angle A$,

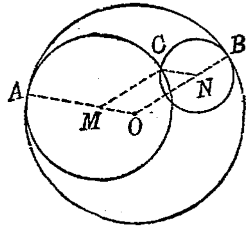
於是 $\angle DOB=3\measuredangle A$.　Q.E.D

9. 相交二小圓 M, N 各與大圓 O 內切於 A, B, 其二

交點中接近$\overset{\frown}{AB}$之一點為C.若ⓈM,N半徑之和,等於⊙O之半徑,則$\overset{\frown}{AC}+\overset{\frown}{CB}=\overset{\frown}{AB}$.(大同附中)

[解] 已知:如題所述.

求證:如題所述.



解析:因三弧不在同圓上,故須利用弧長公式以證之.

證明:聯中心線OM, ON,並延長之,必通過A, B;再聯半徑MC與NC.則因

$MA+NC=OA, MC+NB=OB$, (已知)

$\therefore\ NC=OM, MC=ON$, (各減同量)

$\therefore\ OMCN$為▱.

而 $\angle AMC=\angle CNB=\angle AOB$

若命此三角對於週角之比為k,則

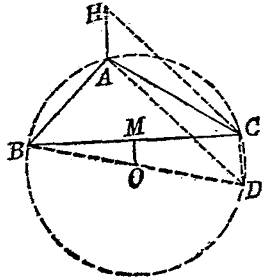
$\overset{\frown}{AC}=k\pi\cdot\overline{MA}, \overset{\frown}{CB}=k\pi\cdot\overline{NB}$,

$\overset{\frown}{AB}=k\pi\cdot\overline{OA}$,

於是 $\overset{\frown}{AC}+\overset{\frown}{CB}=k\pi(\overline{MA}+\overline{NB})=k\pi\cdot\overline{OA}$

即 $\overset{\frown}{AC}+\overset{\frown}{CB}=\overset{\frown}{AB}$. Q. E. D.

10. 三角形的垂心到頂點之距離,等於外心到底邊中點距離的2倍.



［解］ 已知：O為$\triangle ABC$的外心，H為其垂心，M為BC中點.

求證：$HA=2OM$.

解析：若以AH平行移動，使H至C，A至D，則D在$\triangle$外接圓上．故試作$\triangle ABC$的外接圓，而考察DC與OM的關係.

證明：作$\triangle ABC$的外接圓，而作直徑BOD，並聯CD, DA, CH.

$\angle BCD=\angle R$，$\therefore DC \parallel OM$（同為$BC$之$\perp^s$），

$BO=OD, BM=MC$，$\therefore DC=2OM$.

但 $\angle BAD=\angle R$，

$\therefore CH \parallel AD$.　　　（同為$AB$之$\perp^s$）

又 $AH \parallel OM$，　　　（同為BC之$\perp^s$）

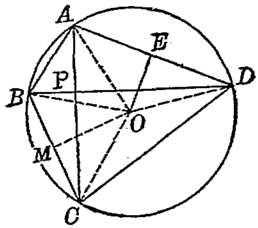
$\therefore AH \parallel CD$.　　　（都與$OM$平行）

於是 $AHCD$為$\square$，而$AH=CD$

$\therefore HA=2OM$.　　　Q. E. D.

11. 圓內接四邊形對角線若互相正交，則自圓心到一邊的距離，等於該邊對邊的一半.

[解] 已知：(1) 四邊形 $ABCD$ 內接於 O 圓.



(2) $OE \perp AD$.

求證：$OE=\frac{1}{2}BC$.

解析：自 O 至 BC 中點 M 聯線，則 $OM \perp BC$. 若可證明 $BM=OE$，則可證明 $\triangle AOE \equiv \triangle OBM$. 故本題在於證明此兩三角形全等.

證明：取 BC 中點 M，聯 OM，並聯 OA. 則

$\angle BMO=\angle R=\angle OEA$，又聯 OC, OD.

$\angle BOM=\frac{1}{2}\angle BOC=\frac{1}{2}\widehat{BC}^\circ$,

$\angle AOE=\frac{1}{2}\angle AOD=\frac{1}{2}\widehat{AD}^\circ$,

但 $\angle BPC=\frac{1}{2}(\widehat{BC}^\circ+\widehat{AD}^\circ)=\angle R$,

(交弦角等於所夾兩弧度數半和)

$\therefore \angle BOM+\angle AOE=\angle R$.

因 $\angle AOE+\angle OAE=\angle R$,

$\therefore \angle BOM=\angle OAE$.

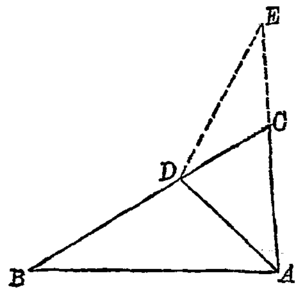
又 $OB=OA$, (半徑)

$\therefore\ \triangle OBM \equiv \triangle AOE$　(s. a. a. = s. a. a.)

於是 $BM=OE$, 但 $BM=\frac{1}{2}BC$,

$\therefore\ OE=\frac{1}{2}BC$.　Q. E. D.

12. $\triangle ABC$ 中, $\angle C=2\angle B$ 時, 設 $\angle A$ 的二等分線, 與 BC 相交於 D 點, 則 $AB-AC=CD$. 證明之.



[解] 已知: 如題所述.

求證: 如題所述.

解析: 延長 AC 至 E, 使 $CE=CD$, 並聯 ED. 若可證明 $AB=AE$, 則因 $\angle BAD=\angle CAD$, 故可證明 $\triangle BAD \equiv \triangle EAD$. 於是本題歸至證明此兩三角形是全等形.

證明: $\because\ CE=CD$, $\therefore\ \angle E=\angle CDE$.

$\therefore\ \angle ACD=2\angle E$, 但 $\angle ACD=2\angle B$,

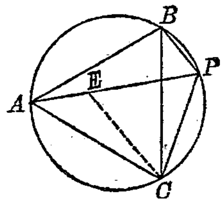
$\therefore\ \angle E=\angle B$.　(等量之半)

又 $\angle BAD=\angle EAD$,　$AD=AD$,

故 $\triangle BAD \equiv \triangle EAD$.　(s. a. a. = s. a. a.)

$\therefore\ AB=AE$, 即 $AB-AC=CD$,　Q. E. D.

13. 正 $\triangle ABC$ 內接於圓, P 爲 $\overset{\frown}{BC}$ 上一點, 證明 $PA=PB+PC$.



［解］ 已知: 如題所述.

求證: 如題所述.

解析: 在 PA 上截取 $PE=PC$. 若可證 $AE=BP$, 本題卽解決. 但 $AC=BC$, $\angle CAE=\angle CBP$, 故若 $AE=BP$, 則 $\triangle CAE\equiv\triangle CBP$

證明: 在 PA 上截取 $PE=PC$, 並聯 EC, 則

$\angle PEC=\angle PCE$.

但 $\angle EPC=\angle ABC$ （夾同弧 $\overset{\frown}{AC}$）

而 $\angle ABC=\frac{2}{3}\angle R$, （$\because$ $AB=BC=CA$）

$\therefore$ $\angle PEC=\angle PCE=\angle EPC=\frac{2}{3}\angle R$.

於是 $\angle AEC=\frac{4}{3}\angle R$.

但 $\angle BPC+\angle BAC=2\angle R$,

而 $\angle BAC=\frac{2}{3}\angle R$,

$\therefore$ $\angle BPC=\frac{4}{3}\angle R=\angle AEC$。

又因 $\angle EAC=\angle PBC$, （夾同弧 $\overset{\frown}{PC}$）

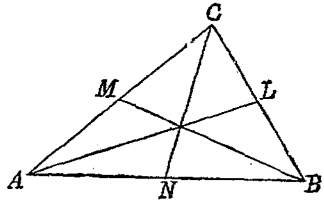
$AC=BC$, （已知）

$\therefore$ $\triangle CAE\equiv\triangle CBP$. $(s.\,a.\,a.=s.\,a.\,a.)$

$AE=PB$, $\therefore$ $PE+AE=PC+PB$,

卽 $PA=PB+PC$　　Q.E.D.

14. 三角形各中線平方和,等於各邊平方和的四分之三,證明之.



[解] 已知: $\triangle ABC$ 之三中線爲 AL, BM, CN.

求證: $\overline{AL}^2+\overline{BM}^2+\overline{CN}^2=\frac{3}{4}(\overline{AB}^2+\overline{BC}^2+\overline{CA}^2)$.

解析: 利用「△兩邊平方和等於底邊中線平分,與底邊半平方之和的2倍」一定理,證明 $4(\overline{AL}^2+\overline{BM}^2+\overline{CN}^2)=3(\overline{AB}^2+\overline{BC}^2+\overline{CA}^2)$

證明: $\overline{AB}^2+\overline{BC}^2=2\overline{BM}^2+2\overline{CM}^2$,

$\overline{BC}^2+\overline{CA}^2=2\overline{CN}^2+2\overline{AN}^2$,

$\overline{CA}^2+\overline{AB}^2=2\overline{AL}^2+2\overline{BL}^2$,

$\therefore$ $2(\overline{AB}^2+\overline{BC}^2+\overline{CA}^2)=2(\overline{AL}^2+\overline{BM}^2$

$+\overline{CN}^2)+2(\overline{AN}^2+\overline{BL}^2+\overline{CM}^2)$,

卽 $4(\overline{AB}^2+\overline{BC}^2+\overline{CA}^2)=4(\overline{AL}^2$

$+\overline{BM}^2+\overline{CN}^2)+4(\overline{AN}^2+\overline{BL}^2+\overline{CM}^2)$,

但 $4(\overline{AN}^2+\overline{BL}^2+\overline{CM}^2)=\overline{AB}^2+\overline{BC}^2+\overline{CA}^2$

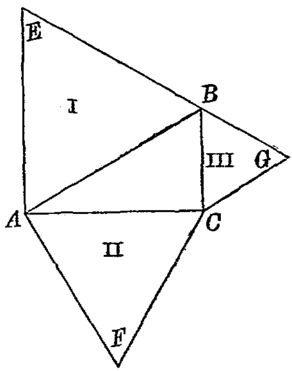
$\therefore\ 3(\overline{AB}^2+\overline{BC}^2+\overline{CA}^2)$

$=4(\overline{AL}^2+\overline{BM}+\overline{CN}^2),$

卽 $\overline{AL}^2+\overline{BM}^2+\overline{CN}^2=\frac{3}{4}(\overline{AB}^2+\overline{BC}^2+\overline{CA}^2)$

Q. E. D.

15. 在直三角形的三邊上,各作一正△,則斜邊上的正△,等於兩股上的正△和.



[解] 已知: (1) $\triangle ABC$ 中, $\angle \hat{C}=\angle R.$

(2) △ABE, ACF, BCG 是正△.

求證: $\triangle \mathrm{I}=\triangle \mathrm{II}+\triangle \mathrm{III}.$

解析: 三個△是相似的,故利用相似形面積比及商高定理可以得證.

證明: $\triangle \mathrm{I} \backsim \triangle \mathrm{II} \backsim \triangle \mathrm{III},$

(因爲各角都等於$\frac{1}{3}\angle R$)

$\therefore\ \triangle \mathrm{II} : \triangle \mathrm{I}=\overline{AC}^2 : \overline{AB}^2,$

$\triangle \mathrm{III} : \triangle \mathrm{I}=\overline{BC}^2 : \overline{AB}^2.$

(相似△面積比,等於對應邊平方比)

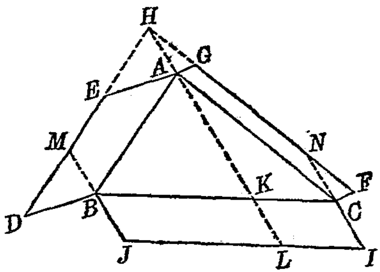
$\therefore\ (\triangle\mathrm{II}+\triangle\mathrm{III}):\triangle\mathrm{I}=(\overline{AC}^2+\overline{BC}^2):\overline{AB}^2,$

但 $\overline{AB}^2+\overline{BC}^2=\overline{AB}^2,$　　　　(商高定理)

$\therefore\ (\triangle\mathrm{II}+\triangle\mathrm{III}):\triangle\mathrm{I}=1,$

即$\triangle\mathrm{I}=\triangle\mathrm{II}+\triangle\mathrm{III}.$　　　　*Q. E. D.*

16　在$\triangle ABC$的二邊AB, BC上，各作▱$ABDE$, $ACFG$；延長DE與FG,相交於H；聯結H, A,再在BC上作□$BCIJ$,使$BJ=HA$, $BJ\parallel HA$,則□$BCIJ$=□$ABDE$+□$ACFG$. 證明之.



[解]　已知：如題所述.

求證：如題所述.

解析：延長HA,交BC, IJ於K, L,則將□$BCIJ$分成兩平行四邊形.若能證此兩平行四邊形各等於△邊上兩▱,本題就解決了

證明：延長JB,與DE交於M,延長IJ,與FG交於N.

則 $\square ABDE=\square ABMH$,

$\square ACFG=\square ACNH$.

(兩平行線間同底平行四邊形等積)

但因 $HA=BJ=KL$,

$\therefore \square ABMH=\square BKLJ, \square ACNH=\square KCIL$.

於是 $\square ABDE+\square ACFG=\square BKLJ$

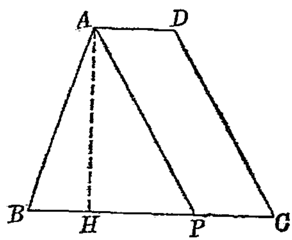
$+\square KCIL$,

即 $\square BCIJ=\square ABDE+\square ACFG$. Q. E. D.

17. 從梯形短底,引一腰的平行線,若將梯形分成等積的$\square$與$\triangle$,則長底為短底的三倍.試證之.

[解] 已知: (1) 梯形 $ABCD$ 中, $AP \parallel DC$.

(2) $\triangle ABP=\square APCD$.



求證: $BC=3\,AD$

解析: 試證 $BP=2PC$, 本題卽可得證.

因為 $PC=AD$.

證明: $\triangle ABP$ 之高 AH, 則 AH 亦為 $\square APCD$ 之高.

於是 $\triangle ABP=\frac{1}{2}BP\cdot AH$

$\square APCD = PC \cdot AH.$

$\because\ \triangle ABP = \square APCD,$

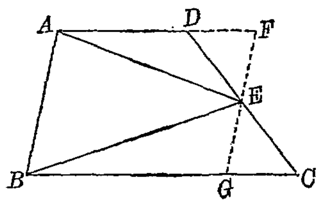
$\therefore\ \frac{1}{2} BP \cdot AH = PC \cdot AH,$ 卽 $\frac{1}{2} BP = PC.$

$\therefore\ BP = 2\,PC = 2AD,$

$\therefore\ BC = 3\,AD.$　　Q. E. D.

18. 梯形 $ABCD$ 中, $AD \parallel BC$, E 爲 CD 之中點, 則 $\triangle AEB$ 等於梯形面積之半. 證明之.

[證] 已知: 如題所述.



求證: 如題所述.

解析: 試過 E, 作 $FG \parallel AB$, 成 $\square ABGF$, 以爲媒介而考察之.

證明: $\triangle AEB = \frac{1}{2} \square ABGF.$

(△面積, 等於同底等高□之半)

但 $\triangle EFD = \triangle EGC,$　　$(a.\,s.\,a. = a.\,s.\,a.)$

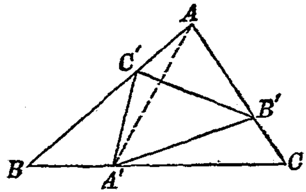
$\therefore$ 梯形 $ABCD = ABGED + \triangle EGC$

$= ABGED + \triangle EFD = \square ABGF,$

$\therefore\ \triangle AEB = \frac{1}{2} \square ABGF.$　　Q. E. D.

19. 於任意三角形 ABC 各邊上, 取 $BA' = \frac{1}{3} BC,$

$CB'=\frac{1}{3}CA$, $AC'=\frac{1}{3}AB$, 則 $\triangle A'B'C'=\frac{1}{3}\triangle ABC$, 證明之.



[證] 已知: 如題所述.

求證: 如題所述.

解析: 證明 $\triangle AB'C'$, $BA'C'$, $CA'B'$ 之和爲 $\frac{2}{3}\triangle ABC$, 即可證明 $\triangle A'B'C'=\frac{1}{3}\triangle ABC$.

證明: 聯結 AA'; 則因 $BA'=\frac{1}{3}BC$,

$\therefore\ \triangle ABA'=\frac{1}{3}\triangle ABC$. (高相同)

又因 $AC'=\frac{1}{3}AB$, 卽 $BC'=\frac{2}{3}AB$,

$\therefore\ \triangle BC'A'=\frac{2}{3}\triangle ABA'=\frac{2}{3}\left(\frac{1}{3}\triangle ABC\right)$

$=\frac{2}{9}\triangle ABC$.

同理可證 $\triangle CA'B'=\frac{2}{9}\triangle ABC=\triangle AB'C'$,

於是 $\triangle AB'C'+\triangle BC'A'+\triangle CA'B'$

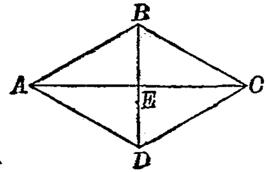
$=\frac{2}{3}\triangle ABC$,

$\therefore\ \triangle A'B'C'=\frac{1}{3}\triangle ABC$. Q. E D.

20. 菱形面積之兩倍,等於兩對角線之乘積.

(滬23)

[解]　已知: $ABCD$ 為菱形.



求證: $2\diamond ABCD$

$=\overline{AC}\cdot\overline{BD}.$

解析: 利用△面積公式.

證明: $\triangle BEC\equiv\triangle DEC,$　　(s. a. s. = s. a. s.)

$\therefore\ \angle BEC=\angle DEC=\angle R.$

即 BE, DE 為 $\triangle ABC, ADC$ 之高.

於是 $\triangle ABC=\frac{1}{2}\overline{AC}\cdot\overline{BE},$

$\triangle ADC=\frac{1}{2}\overline{AC}\cdot\overline{DE},$

(△面積等於高乘底之半)

$\therefore\ \triangle ABC+\triangle ADC=\frac{1}{2}\overline{AC}(\overline{EB}+\overline{DE})$

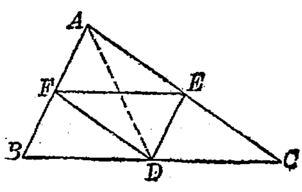
$=\frac{1}{2}\overline{AC}\cdot\overline{BD}.$

但 $\triangle ABC+\triangle ADC=\diamond ABCD,$

$\therefore\ 2\diamond ABCD=\overline{AC}\cdot\overline{BD}.$

21. 試證聯三角形三邊中點所成之三角形,其面積等於原形四分之一.

(北平)



[解] 已知: $\triangle ABC$三邊之中點爲D, E, F.

求證: $\triangle DEF=\frac{1}{4}\triangle ABC$

解析: 可利用$\triangle$面積原理,證明$\triangle BDF$, $\triangle CED$, $\triangle AFE$之和,等於$\frac{3}{4}\triangle ABC$.

證明: $\triangle ABD=\frac{1}{2}\triangle ABC$,

(因$BD=DC$, 而高相同)

$\triangle BDF=\frac{1}{2}\triangle ABD$, (同理)

$\therefore\ \triangle BDF=\frac{1}{4}\triangle ABC$,

同樣可證$\triangle CED=\frac{1}{4}\triangle ABC$,

$\triangle AFE=\frac{1}{4}\triangle ABC$,

$\therefore\ \triangle BDF+\triangle CED+\triangle AFE=\frac{3}{4}\triangle ABC$,

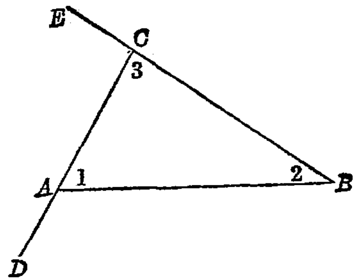
卽 $\triangle DEF=\frac{1}{4}\triangle ABC$. Q. E. D.

22. 三角形三內角之和,等於180°,試證之. (浙22)

此係定理,各教科書中都有其證法,本書不復贅.但此定理所根據的基礎,是「二平行線與一截線所成之內錯角相等」,而此一定理又根據公理「過已知線外一點,祇能作一線平行於已知線」.故$\triangle$內角和定理,與平行公理,有密切關係.

23. 三角形之任兩外角和,大於二直角.

知已: $\triangle ABC$之兩外角爲$\angle BAD$與$\angle ACE$.



求證：　$\angle BAD+\angle ACE>2\measuredangle R.$

解析：可利用△內角和定理.

證明：
$$\left.\begin{array}{l}\angle BAD=\angle 2+\angle 3\\ \angle ACE=\angle 1+\angle 2\end{array}\right\},\text{(△外角=內對角和)}$$

$\therefore\ \angle BAD+\angle ACE=\angle 1+\angle 2+\angle 3+\angle 2.$

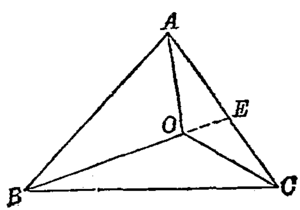
但　$\angle 1+\angle 2+\angle 3=2\measuredangle R,$　(△內角和$=2\measuredangle R$)

$\therefore\ \angle BAD+\angle ACE=2\measuredangle R+\angle 2,$

即　$\angle BAD+\angle ACE>2\measuredangle R$　　Q. E. D.

(全量大於其分量)

24. O點爲$\triangle ABC$內任一點，則$OA+OB+OC$小於周邊，而大於周邊的一半.



[解] 已知：O為$\triangle ABC$內一點.

求證：(1) $OA+OB+OC<AB+BC+CA$.

(2) $OA+OB+OC>\frac{1}{2}(AB+BC+CA)$.

解析：利用「△二邊和大於第三邊」定理，及不等量公理.

證明：(1) 延長BO與AC交於E，則

$AB+AE>BE,\quad OE+EC>OC,$

$\therefore\ AB+AE+EC+OE>OB+OE+OC,$

即 $\qquad OB+OC<AB+AC.$

(兩端各減OE)

同理可證 $OC+OA<AB+BC,$

$OA+OB<BC+CA,$

$\therefore\ 2(OA+OB+OC)<2(AB+BC+CA),$

即 $\quad OA+OB+OC<AB+BC+CA.$

Q. E. D.

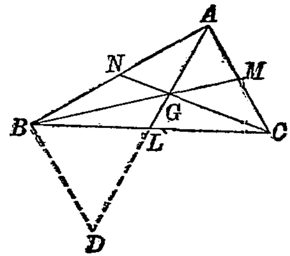
(2) $OA+OB>AB,\quad OB+OC>BC,$

$OC+OA>CA,$

$\therefore\ 2(OA+OB+OC)>AB+BC+CA,$

即 $\quad OA+OB+OC>\frac{1}{2}(AB+BC+CA).$

25. 三角形三中線的和,必小於周界,證明之.



[解]　已知: $\triangle ABC$ 的三中線,爲 AL, BM, CN.

求證: $AL+BM+CN<AB+BC+CA$.

解析: 利用平行移動法,將 AC 移至 BD 而考察之.

證明: 作 $BD \underline{\parallel} AC$, 聯 LD.

則 $\triangle BDL \equiv \triangle CAL$, (s.a.s. = s.a.s.)

$\therefore \angle BLD = \angle ALC$, 故 ALD 爲一直線.

於是 $AD<AB+BD$.

但 $AD=2AL(\because AL=LD), BD=AC$,

$\therefore \quad 2AL<AB+AC$.

同樣可證 $2BM<BC+AB$,

$2CN<AC+BC$,

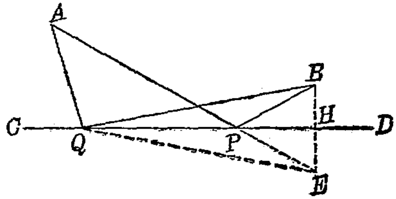
相加得

$$2(AL+BM+CN)<2(AB+BC+CA),$$

即 $AL+BM+CN<AB+BC+CA$.

Q. E. D

26. 定直線 CD 上任一點 P,至定點 A, B 之聯線和 $PA+PB$,當 $\angle CPA=\angle DPB$ 時為最小,證之.



〔解〕 已知: (1) $\angle APC=\angle BPD$.

(2) $\angle AQC>\angle BQD$.

(3) Q, P 在定直線 CD 上.

(4) A, B 為定點.

求證: $AP+PB<AQ+QB$.

解析: 若能證明 $AP+PB$ 等於某定直線,而證 AQ 與 QB 之和大於此直線,本題即可解決.此類證法,大概利用對稱移動法.

證明: 作 $BH\perp CD$,延長至 E,使 $HE=HB$ (E 點即為 B 之軸對稱點),並聯 PE,

則 $\triangle BPH\equiv\triangle EPH$,

$\therefore$ $PE=PB$, $\angle EPH=\angle BPH$.

但 $\angle BPH=\angle APC$, (已知)

$\therefore$ $\angle EPH=\angle APC$,

$\therefore$ AP, PE 為一直線,即 $AP+PB=AE$.

又聯 QE, 則 $\triangle BQH \equiv \triangle EQH$,

$\therefore$ $QE = QB$, $\angle EQH = \angle BQH$.

但 $\angle BQH < \angle AQC$,　(已知)

$\therefore$ $\angle EQH < \angle AQC$.

$\therefore$ AQ, QE 不為一直線.

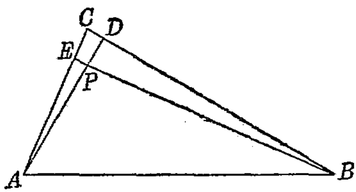
(若為一直線,則 $\angle AQC = \angle EQH = \angle BQH$, 與假設矛盾.)

$\therefore$ $AE < AQ + QE$,

即 $AP + PB < AQ + QB$.　*Q. E. D.*

(J) 角相補相餘的命題:

1. 設從 $\triangle ABC$ 之底端,作二線垂直於他二邊,相交於 P 點,則角 P 與角 C 相補.[<u>愛國女中</u>]



[解] 已知: $\triangle ABC$ 中, $AD \perp BC$, $BE \perp AC$, AB 與 BE 交於 P 點.

求證: $\angle APB + \angle C = 2\angle s R$.

解析: 若能證明 P, E, C, D 共圓,即可證明 $\angle APB + \angle ECD = 2\angle s R$.

證明: $\angle CEP+\angle CDP=2\angle s\,R$　　(各等於 $\angle R$)

$\therefore$ $PECD$爲圓內接四邊形.

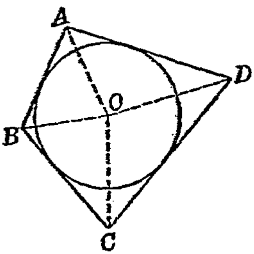
而 $\angle EPD+\angle C=2\angle s\,R$,

但 $\angle EPD=\angle EPB$,

$\therefore$ $\angle APB+\angle C=2\angle s\,R$.　　*Q. E. D.*

(註: 此題利用多角形內角和定理,亦可證明.)

2. 圓的外切四邊形,其兩對邊對於中心的角,互成補角.證明之.



[解] 已知: 四邊形 $ABCD$外切於O圓.

求證: $\angle AOB+\angle COD=2\angle s\,R$,

$\angle AOD+\angle BOC=2\angle s\,R$

解析: 若能證明 $\angle OAB+\angle OBA+\angle OCD+\angle ODC=2\angle s\,R$, 本題即可得證.

證明: OA平分 $\angle A$, OB平分 $\angle B$, OC平分 $\angle C$, OD平分 $\angle D$.

(切線交點與圓心之聯線,平分交切角.)

$\therefore$ $\angle OAB+\angle OBA+\angle OCD+\angle ODC$

$$=\frac{1}{2}(\angle A+\angle B+\angle C+\angle D).$$

但 $\angle A+\angle B+\angle C+\angle D=4\angle s\,R$,

(多角形內角和定理)

$\therefore \angle OAB+\angle OBA+\angle OCD+\angle ODC$

$=2\angle_s R$

$\because$ $\triangle AOB$之內角和$+\triangle COD$之內角和

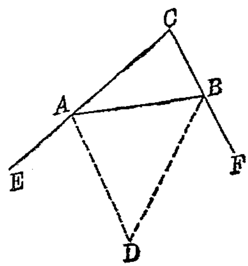
$=4\angle_s R$

$\therefore \angle AOB+\angle COD=2\angle_s R$ (等量減等量)

同樣可證$\angle AOD+\angle BOC=2\angle_s R$

3. △底角之外角,其二等分線所成的銳角,與頂角之半互爲餘角,試證明之.

[解] 已知: AC,BD各爲$\triangle ABC$ A,B處外角平分線,相交於D.



求證: $\angle ADB+\dfrac{1}{2}\angle C=\angle R.$

解析: 可證明$2\angle_s ADB+\angle C=2\angle_s R.$

證明: $\angle ADB+\angle DAB+\angle DBA=2\angle_s R$

(△內角和)

$\therefore 2(\angle ADB+\angle DAB+\angle DBA)=4\angle_s R$

但$2\angle_s DAB=\angle EAB$; $2\angle_s DBA=\angle FBA$

而 $\angle EAB=\angle C+\angle CBA$

$\angle FBA=\angle C+\angle CAB$

$\therefore\ 2\measuredangle ADB+\angle C+(\angle C+\angle CBA$

$+\angle CAB)=4\measuredangle R$

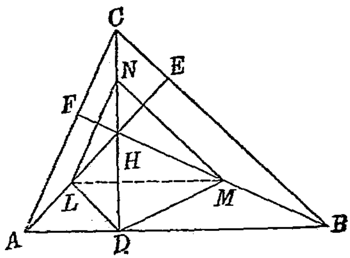
又因 $\angle C+\angle CBA+\angle CAB=2\measuredangle R$

(△內角和)

$\therefore\ 2\measuredangle ADB+\angle C=2\measuredangle R$　　(各減 $2\measuredangle R$)

即 $\angle ADB+\frac{1}{2}\angle C=\angle R$　　Q. E. D.

4. 三角形的垂心爲 H, HA, HB, HC 的中點爲 L, M, N. 試證 $\angle LDM+\angle LNM=2\measuredangle R$.



[解]　已知: 如題所述.

求證: 如題所述.

解析: 若此題可以成立, 則 L, D, M, N 必共圓. 設聯 LM, 倘可證明 $\angle DNL=\angle DML$, 本題即可解決.

證明: $\because$ $LN \parallel AC$ (△兩腰中點聯線)

$\therefore\ \angle DNL=\angle DCA$

但 $\angle DCA=\angle ABF$ (同爲 $\angle BAC$ 的餘角)

$\therefore \angle DNL=\angle DBM$

又因 $LM \parallel AB$ $\therefore$ $\angle DML=\angle MDB$

但 $MD=MB$

(直角△斜邊中點,至三頂點等遠

$\therefore \angle DBM=\angle MDB$ 於是 $\angle DNL=\angle DML$

而 L, D, M, N 共圓

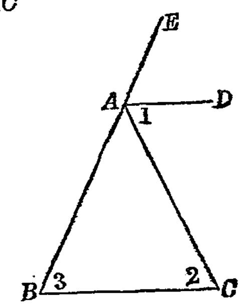
故 $\angle LDM+\angle LNM=2\measuredangle R.$　　　Q. E. D.

(K) 線平分的命題:

1. 引長兩等邊三角形之一腰過頂點,所成外角之平分線,與底邊平行　(浙 22)

[解] 已知: (1) $\triangle ABC$ 中 $AB=AC$

(2) AD 平分 $\angle CAE$



求證: $AD \parallel BC$

解析: 試證 $\angle 1=\angle 2$

證明: $\because$　$AB=AC$

$\therefore$　$\angle 2=\angle 3$

(等腰△底角等)

但 $\angle CAE=\angle 2+\angle 3=2\measuredangle 2$　(外角)

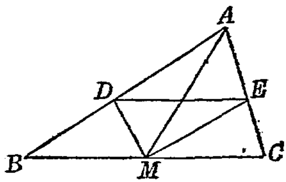
且 $\angle 1=\frac{1}{2}\angle CAE$ $\therefore$ $\angle 1=\angle 2$

$\therefore AD \parallel BC$ *Q. E. D.*

2. 三角形 ABC 底邊 BC 上之中線 AM 與底邊所成兩鄰角之平分線,交兩腰於 D, E, 證明 DE 平行於 BC.

[解] 已知: 如題所述.

求證: 如題所述.



解析: D, E 雖不一定是 AB, AC 的中點,但 $AD/DB = AE/EC$ 則必然成立.故若能證此兩比相等,本題即可解決.

證明: DM 平分 $\angle BMA$, $\therefore AD : DB = AM : MB$

EM 平分 $\angle CMA$, $\therefore AE : EC = AM : MC$

但 $MB = MC$, $\therefore AM : MB = AM : MC$

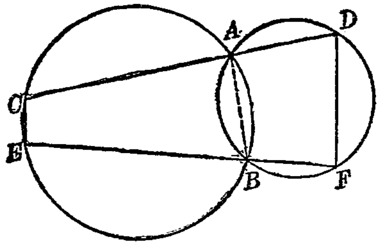
即 $AD : DB = AE : EC$ (等於同比)

$\therefore DE \parallel BC$ (△比例線段逆定理)

Q. E. D.

3. 兩圓相交於 A, B 兩點,順次過 A, B 作兩割線 CAD, EBF, 各與兩圓相交於 C, D 及 E, F 試證 CE 平行於 DF. (務本女中)

[解] 已知: 如題所述.



求證：如題所述.

解析：若可證明$\angle C+\angle D=2\measuredangle R$,則本題卽可解決.

證明：聯公共弦AB,則$\angle C=\angle ABF$

但$\angle ABF+\angle D=2\measuredangle R$

$\therefore\ \angle C+\angle D=2\measuredangle R$

$\therefore\ CE\parallel DF$　(同旁兩角互補,則平行)

Q. E. D.

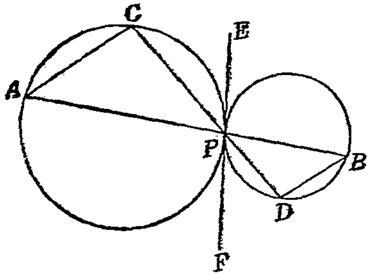
4. 二圓外切於P點,過P點作AB,CD兩直線,與二圓各交於A,C及B,D,四點,求證AC與BD平行

(蘇中)

[解] 已知：如題所述.

求證：如題所述.

解析：試作兩圓公切線,利用弦切角做媒介,



而證 $\angle PAC=\angle PBD$.

證明: 作兩圓公切線 EF 則

$\angle PAC=\angle EPC$ (同夾 $\overset{\frown}{PC}$)

$\angle PBD=\angle FPD$ (同夾 $\overset{\frown}{PD}$)

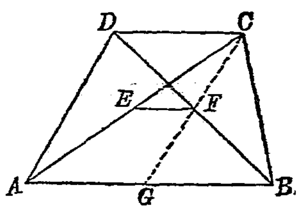
但 $\angle EPC=\angle FPD$ (對頂角相等)

$\therefore\ \angle PAC=\angle PBD$ 而 $AC \parallel BD$ Q. E. D.

5. 梯形對角線中點的聯線, 平行於底邊, 證明之.

[解] 已知: $ABCD$ 爲梯形, $AB \parallel CD$, E, F 爲 AC, BD 之中點.

求證: $EF \parallel AB \parallel CD$



解析: 因對角線相交, 與梯形兩底成兩個$\triangle$s, 故不能直接

用△兩邊中點聯線定理. 若聯 CF, 延長之而遇 AB 於 G, 則如可證明 $CF=FG$, 本題即可解決了.

證明: $DF=FB$(已知); $\angle DFC=\angle BFG$(對頂角)

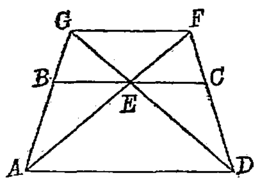
$\angle CDF=\angle GBF$(內錯角)($\because AB \parallel CD$)

$\therefore \triangle CFD \equiv \triangle GFB$ ($a.s.a.=a.s.a$).

於是 $CF=FG$ 且 $CE=EA$ (已知)

故 $EF \parallel AB \parallel CD$　　Q. E. D.

6. 梯形 $ABCD$ 的上底為 BC, 其中點為 E, 引長 AE 及 DE, 遇 CD 與 AB 的延長線於 F 及 G, 證明 FG 平行於 AD.



[解]　已知: 如題所述.

求證: 如題所述.

解析: 因 B, C 不是 AG 與 DF 的中點, 故須利用比例線段.

證明: $\triangle BEG \backsim \triangle ADG$　($\because$ 三對應角相等)

$\therefore DG : EG = AD : BE$

又 $\triangle CEF \backsim \triangle DAF$　(同理)

$\therefore AF : EF = AD : EC$

但 $BE=EC$

$\because$ $DG:EG=AF:EF$ (等於同比)

$\therefore$ $(DG-EG):EG=(AF-EF):EF$

(分比定理)

即 $DE:EG=AE:EF$

$\therefore$ $\triangle EGF \backsim \triangle EDA$ ($\because$ $\angle GEF=\angle DEA$)

(兩△二邊成比例,夾角相等,則相似)

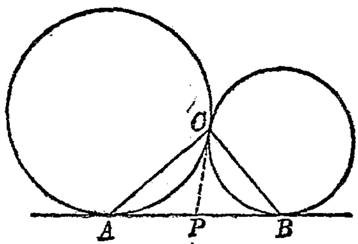
於是 $\angle EGF=\angle EDA$ (相似△對應角)

$\therefore$ $FG \parallel AD \parallel BC$ Q. E. D.

(L) 線垂直的命題:

1. 兩圓外切於 C, 其公切線切兩圓於 A, B, 則 AC 垂直於 BC, 試證之.

(同濟附中)



[解] 已知: 如題所述.

求證: 如題所述.

解析: $\angle ACB$ 是 $\triangle ACB$ 的一角,若可證明 $\angle C=\angle A+\angle B$, 本題即解決.

證明: 作兩圓公切線,交 AB 於 P, 則

$\angle A=\angle ACP$　　　　(同夾$\widehat{AC}$)

$\angle B=\angle BCP$　　　　(同夾$\widehat{BC}$)

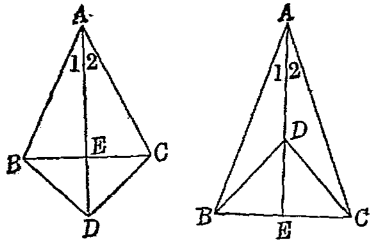
$\therefore\ \angle A+\angle B=\angle ACP+\angle BCP=\angle ACB$

卽 $\angle A+\angle B+\angle ACB=2\angle ACB=2\angle R$

(內角和)

$\therefore \angle ACB=\angle R$ 而 $AC\perp BC$　　Q. E. D.

2. 兩個同底等腰三角形,其頂點聯線或延長線,必垂直於底邊.



[解] 已知: $\triangle ABC$, DBC 皆爲等腰,其公共底爲 BC. 頂點聯線或延長線交 BC 於 E.

求證: $AE\perp BC$.

解析: 因有全等△可以利用,故證鄰補角相等.

證明: $\because\ AB=AC,\ DB=DC,\ AD=AD$.

$\therefore\ \triangle ABD\cong\triangle ACD$ (s. s. s.=s. s. s.)

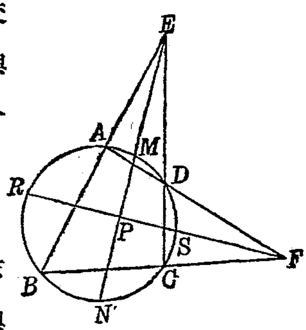
$\angle 1=\angle 2$; $\triangle ABE\cong\triangle ACE$ (s.a.s.=s.a.s.)

$\therefore\ \angle AEB=\angle AEC=\angle R$

即 $AE \perp BC$ (垂線定義) $Q.E.D.$

3. 圓內接四邊形兩對對邊交角之平分線,必相垂直,證明之.

[解] 已知: 四邊形 $ABCD$ 內接於圓, BA, CD 交於 E 點, AD, BC 交於 F. $\angle AED$ 與 $\angle CFD$ 的平分線,交於 P 點.



求證: $EP \perp FP$

解析: $\angle EPF$ 為交弦角,故就 EP 與圓之交點 M, N, 及 FP 與圓之交點 S, R, 考察各弧的關係.

證明: $\because \angle BEN = \angle CEN$ (已知)

$\therefore \frac{1}{2}(\overset{\frown}{BN} - \overset{\frown}{AM}) = \frac{1}{2}(\overset{\frown}{CN} - \overset{\frown}{DM})$

(交割角等於所夾兩弧度數差之半)

即 $\overset{\frown}{BN} - \overset{\frown}{AM} = \overset{\frown}{CN} - \overset{\frown}{DM}$

同樣可證 $\overset{\frown}{BR} - \overset{\frown}{CS} = \overset{\frown}{AR} - \overset{\frown}{DS}$

二式相加 $\overset{\frown}{NR} - \overset{\frown}{AM} - \overset{\frown}{CS} = \overset{\frown}{AR} + \overset{\frown}{CN} - \overset{\frown}{SM}$

移項 $\overset{\frown}{RN} + \overset{\frown}{SM} = \overset{\frown}{MR} + \overset{\frown}{NS}.$

$\therefore\ \angle NPR=\angle MPR=\angle R$

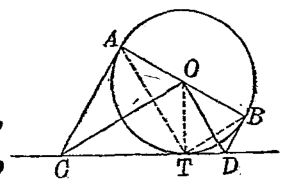
(交弦角等於所夾兩弧度數和之半)

卽 $EP\perp FP$　　　　$Q.E.D.$

4. 自 $\odot O$ 中直徑 AB 兩端,作二切線,與另一切線交於 C 及 D,試證 $COD=\angle R$.

[解] 已知: 如題所述

求證: 如題所述.



解析: 因 $\angle ATB=\angle R$,故若證明 $\angle COD=\angle ATB$,本題也可以解決.

證明: 設 CD 切圓於 T,聯 OT, AT, BT.

O,T,D,B 共圓(因 $\angle OTD=\angle R=\angle OBD$)

$\therefore\ \angle ODC=\angle TBO$;同理 $\angle OCD=\angle TAO$

$\therefore\ \angle COD=\angle ATB=\angle R$　　　　$Q.E.D.$

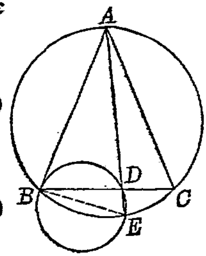
(兩$\triangle$有二角等,則第三角亦等)

(M) 相切的命題:

1. 過等腰$\triangle ABC$頂點 A 的直線,與底邊 BC 交於 D,與外接圓周交於 E,則 AB 切於圓 BDE

[解] 已知: 如題所述.

求證: 如題所述.



解析：聯 BE，考察 $\angle ABD$ 是否等於 $\angle BED$.

證明：$\angle BED=\angle C$（同夾 $\widehat{AB}$）

但 $\angle C=\angle ABD$

（等腰△底角）

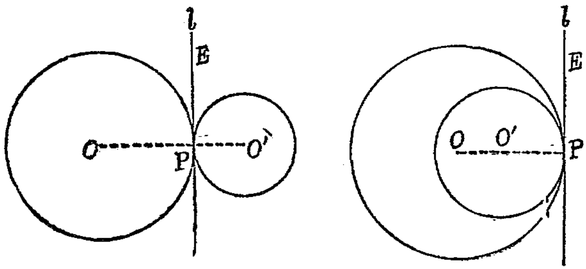
$\therefore\ \angle ABD=\angle BED$.

$\therefore\ AB$ 切於圓 BDE　（弦切角逆定理）

Q.E.D.

2. 兩圓切於同直線上的同點，則此兩圓相切，證明之.

[解]　已知：ⓢO 與 O'，切於直線 l 上的 P 點.



求證：O 圓與 O' 圓相切.

解析：證明 P 在中心線 OO' 上.

證明：(1)　O 與 O' 在 l 異側，如左圖.

聯$OP, O'P$,則

$\angle OPE = \angle R = \angle O'PE$

(過切點半徑垂直於切線)

$\therefore\ \angle OPE + \angle O'PE = 2\angle R$ 而 OPO' 爲直線.

$\therefore\ O$圓與O'圓外切.　　　$Q.E.D.$

(兩圓公共點在中心線上卽相切).

(2) O與O'在l的同側,如右圖.

作半徑$OP, O'P$,則

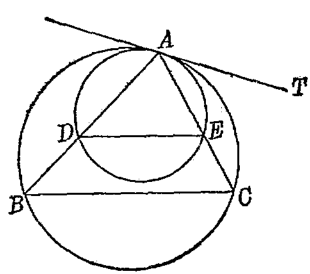
$\angle OPE = \angle R = \angle O'PE$

故OP與$O'P$相重,而P在OO'延線上.

$\therefore\ O, O'$兩圓內切(理同上) $Q.E.D.$

注意:此題亦爲一定理,頗有用處,故舉一例如下,卽用此定理證明.

3. 設與$\triangle ABC$底邊BC平行,作一線交AB, AC於D, E,則$\triangle ABC$,與$\triangle ADE$的兩外接圓,內切於A,證之.



[解] 已知:如題所述.

求證：如題所述.

解析：本題卽可利用前題，作大圓之切線 AT，證其亦爲小圓之切線.

證明：過 A，作 AT 切於 ABC 圓，則

$\angle TAC=\angle ABC$　　(弦切角定理)

但 $\angle ABC=\angle ADE$　　($\because DE \parallel BC$)

$\therefore \angle TAE=\angle ADE$，$AT$ 亦切於 ADE 圓.

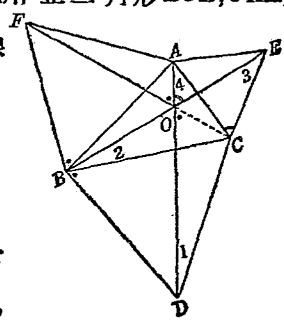
故兩圓內切於 A.　　Q. E. D.

(N) 共點，共線，共圓的命題：

1. 證明三角形之三中線交於一點.　(成都一屆)

此係△重心定理，證法詳見復興初中幾何學，本書不贅.此外尚有其他證法，可參閱吳在淵氏著'近世初等幾何學'.

2. 在任意△ABC 的三邊上，作正三角形 BCD, CAE, ABF，則 AD, BE, CF 三線共點，證明之.



[解]　已知：如題所述.

求證：如題所述.

解析：設 AD, BE 交於 O 點，聯 OC, OF,

而證其成一直線,本題即可解決.

證明: $\because\ \angle ACE=\frac{2}{3}\angle R=\angle BCD$

$\therefore\ \angle ACD=\angle ECB$

$\therefore\ \triangle ACD\equiv\triangle ECB$ (s.a.s. = s.a.s.)

而 $\angle 1=\angle 2$, $\angle 3\doteq 4$, 於是 O, C, B, D 共圓,而 $\angle COD=\angle CBD=\frac{2}{3}\angle R$

O, C, A, E 共圓,而 $\angle EOA=\angle ECA=\frac{2}{3}\angle R$

但 $\angle AFB=\frac{2}{3}\angle R=\angle EOA$, 故

O, A, F, B 共圓,而 $\angle AOF=\angle ABF=\frac{2}{3}\angle R$

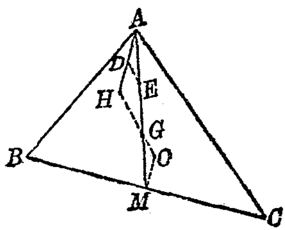
$\therefore\ \angle COD=\angle AOF$　　(各等於$\frac{2}{3}\angle R$)

於是 FOC 成一直線,而 AD, BE, CF 三線共點.　　Q.E.D

3. 試證△的垂心,外心,重心在一直線上.

[解] 已知: $\triangle ABC$ 的重心為 G, 垂心為 H, 外心為 O.

求證: H, G, O 在一直線上.



解析：聯 OG, GH, 證明兩線成一直線.

證明：聯 OM, AH, 則 $AH=2OM$

(△垂心至頂點距離,等於外心至底邊距離的2倍).

過 AH 中點 D, AG 中點 E, 作 DE 線.

則 $AE=\frac{1}{2}AG=GM$ (△重心定理)

$AD=\frac{1}{2}AH=OM$

$\angle DAE=\angle OMG$ ($\because OM \parallel AD$).

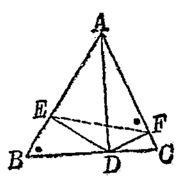
$\therefore \triangle ADE \equiv \triangle OMG$; $\angle OGM=\angle AED$

$\therefore OG \parallel DE$ (外錯角相等)

但 $DE \parallel HG$ (△兩邊中點聯線)

$\therefore OGH$ 成一直線 Q. E. D.

4. 從 $\triangle ABC$ 的頂點 A, 至 BC 引垂線 AD, 從 D 至 AB, AC 各引垂線 DE, DF, 則 E, B, C, F 共圓,證之.



[解] 已知：如題所述.

求證：如題所述.

解析：試證 $\angle AFE=\angle B$, 本題卽可解決.

證明：A, E, D, F共圓

$(\because \angle DEA = \angle R = \angle DFA)$

$\therefore \angle AFE = \angle ADE$.

但 $\angle ADE = \angle B$ (同爲 $\angle EAD$ 的餘角)

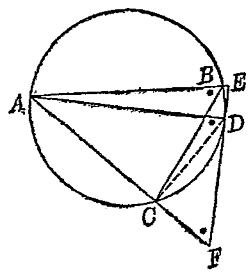
$\therefore \angle AFE = \angle B$ 而 E, B, C, F 共圓

Q. E. D.

(四邊形之外角,等於內對角,則其頂點共圓).

(O) 相似合同的命題：

1. AB, AC 爲由圓周上任一點 A 所作之兩弦，AD 爲圓之直徑,過 D 作切線,交 AB, AC 於 E 及 F. 試證兩 $\triangle ABC$ 及 AFE 爲相似.　(無錫中學)



[解] 已知：如題所述.

求證：如題所述,

解析：若證得 $\angle F = \angle ABC$, 本題即解決.

證明：聯 DC, 則 $\angle ACD = \angle R$.

$\therefore \angle F = \angle ADC$　(同爲 $\angle DAC$ 的餘角)

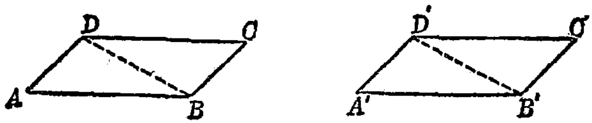
但 $\angle ADC = \angle ABC$　(夾同弧 $\overset{\frown}{AC}$)

$\therefore \angle F = \angle ABC$

$\therefore \triangle ABC \backsim \triangle AEF$ Q. E. D.

2. 兩平行四邊形的兩雙鄰邊及其夾角相等,則兩▱全等,證之.

[解] 已知: 平行四邊形 $ABCD$ 與 $A'B'C'D'$ 中, $\angle A$



$= \angle A'$, $AB = A'B'$, $AD = A'D'$.

求證: $\square ABCD \equiv \square A'B'C'D'$.

解析: 用理想重合法.

證明: 作對角線BD,$B'D'$,則$\triangle ABD \equiv \triangle A'B'D'$. 故以$\square ABCD$重合於$\square A'B'C'D'$上,可使$A$落於$A'$,$B$落於$B'$,$D$落於$D'$. 但因$DC \parallel A'B'$,故$DC$合於$D'C'$(平行公理). 同理$BC$合於$B'C'$. 於是$C$落於$C'$(二線祇有一交點).

$\therefore \square ABCD \equiv \square A'B'C'D'$ Q. E. D.

第三章

軌跡

I. 導言:——幾何學上軌跡問題,有兩種:(一)說明合於某條件的點,其軌跡爲何線,求證;(二)祇說條件,欲探求合於此條件的軌跡,並加證明.前者較諸普通命題的證法,尚無大難,而後者則比較難得多.非對於幾何學有深邃學識的人,往往一題到手,無法措置.不過初中幾何學上所講的軌跡問題,祇是一些基本問題,都很簡單,故本書亦祇講一些基本的淺近知識,以示軌跡問題解法的一斑.

II. 基本軌跡:——初中幾何學上所論的軌跡問題,大概都可以歸於下列的基本軌跡:

1. 距二定點等遠之點,其軌跡爲該二點聯線的中垂線

2. 距相交二定直線等遠之點,其軌跡爲該二線交角之平分線.

3. 距一定直線有定距離之點,其軌跡爲與該直線有定距離之二平行線.

4. 距一定點有定距離之點,其軌跡爲以該點爲心,定距離爲半徑的圓.

5. 在定線分上張定角之點,其軌跡爲以此定線分爲弦,內含此定角的一雙對稱弓形弧.

以上五種重要軌跡,其證明見各教科書,此處不贅,惟望學者熟記.

III. 軌跡的探求:——初中平面幾何學上所論軌跡,大都爲圓或直線.直線有二點可以决定,圓有三點可以决定.故探求軌跡之第一步,在於作出合所設條件的三點,而察其是否在一直線上;若不在一直線上,大概可决定其爲圓.不過有時軌跡或爲相交二直線,或爲平行二直線,則三點不足以判明,故除多作數點,以期發見軌跡的形狀外,尙須賴軌跡的特殊點,以定軌跡的形狀與地位.所謂特殊點,便是軌跡與圖形中定線的交點,即軌跡所經圖形中的定點,亦即合於條件的圖形中某定點.此特殊點大概爲二定線之交點,與定直線有定距離之平行線,交另一定直線之點,自定

點至定直線所引垂線的垂足,定圓心,定點至定圓所作切線之切點,等等.特殊點決定之後,再用下列方法,察其是否可以歸於基本軌跡,或是否可以藉此求得合於條件的軌跡:

(一) 過特殊點,作定直線之平行線,察其與某線交點,或其上任意點,是否合於條件.

(二) 過特殊點,作定直線之垂線,行同前之考察.

(三) 過特殊線,作與定直線成定角之二直線,或定角平分線,行同前之考察.

(四) 聯二特殊點,或聯一特殊點至定點,察其距離是否等於定長.

(五) 聯軌跡上任意點至二特殊點,察此二聯線是否成一定之角.

IV. 軌跡的證明:——證明軌跡,通常所用的方法,係同時證明下列二事:

(一) 合於所設條件的點,盡在所求圖形上.

(二) 在所求圖形上的點,都合於所設條件.

有時爲便利起見,(一)可代以(三).

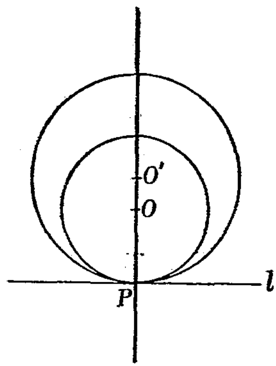
(三) 不在圖形上的點,不合條件.

若所求軌跡,能證明其對於定點或定直線,合於

基本軌跡所道的條件,則(一),(二)中的'在所求圖形上',可換爲'合基本條件'.

V. 問題解法示例:——茲舉淺近問題數則於下.

1. 一圓切一定直線於一定點,求此圓中心之軌跡. (省立上中)



[解] 已知:定直線 l,及其上一點 P.

欲求:切 l 於 P 點之圓心之軌跡.

探求法:假定此圓之半徑,漸漸縮小,終至成爲一點,則此點卽 P.故 P 爲特殊點.試過 P 作 l 之垂線,而於其上任取一點 O,則以 OP 爲半徑之圓,必切於 l.故知此線爲軌跡.

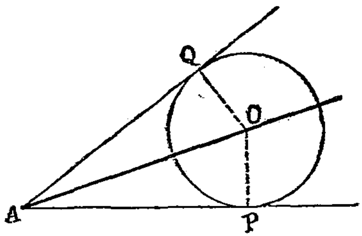
證明:(1) 設 O 爲合於條件的點,則 $OP\perp l$.

(切點半徑垂直於切線)

但過 P 之 l 之垂線,祇有一條,故 O 在此線上.

(2) 設O'為在此線上之點,則以$O'P$為半徑,O'為中心,所作之圓,切l於P點.　(半徑端點之垂線,切於圓).

2　求切於定角二邊諸圓之圓心的軌跡.



[解] 已知: 定角A.

欲求: 切於$\angle A$二邊之圓心之軌跡.

探求法: 假定此圓漸縮漸小,則漸近A點,終至化為一點而合於A. 故A為特殊點.試作$\angle A$的平分線,則其上任意點至兩邊等距,設以此線上之點為圓心,距離邊的長為半徑,作圓,必切於$\angle A$的二邊.所以$\angle A$的平分線是所求軌跡.

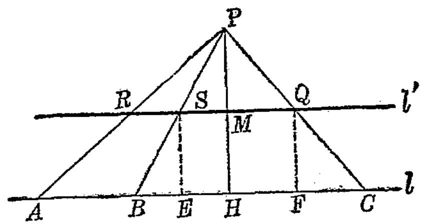
證明: (1) 若O為合於條件之點,P, Q為切點,則$OP=OQ$, $OP\perp AP$, $OQ\perp AQ$, 而AP與AQ為定線,故知O點又合於'至相交二直線等距'的條件.

(2) 若O爲離$\angle A$二邊等距離之點,則以O爲圓心,等距離爲半徑所作之圓,必切於$\angle A$的二邊.

故所求軌跡是$\angle A$的平分線.

3. 求從定點P至定直線l,所引線分中點的軌跡.

[解] 已知: P爲定點, l爲定直線.



欲求: 從P至l所引線分PA, PB,等中點的軌跡.

探求法: 從P試作$PH \perp l$,則PH爲定線分. PH之中點M,是定點,又是軌跡上的一點,所以是特殊點. 過M作$l' \parallel l$,則由P至l所引任意線分,必爲l'平分(△兩邊中點聯線逆定理),可知l'是所求軌跡.

證明: (1) 設S爲PB的中點,作$SE \perp l$,則

$SE=\frac{1}{2}PH=$定長.　(合基本條件)

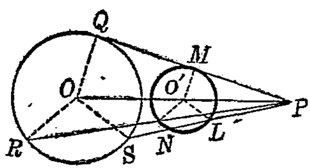
(2) 設 $QF=\frac{1}{2}PH$, $QF\perp l$, 作 PQ, 延長之, 交 l 於 C, 則 $\because$ $QF\parallel PH$,

$\therefore$ $\triangle PMQ\equiv\triangle QFC$　(a. s. a = a. s. a.)

即 $PQ=QC$　(合所設條件)

故所求軌跡,是通過 PH 中點,平行於 l 的直線.

4. 從圓外一定點,至定圓周所引線分的中點,其軌跡如何?



[解] 已知: O 爲定圓, P 爲圓外定點.

欲求: 從 P 至 O 圓各線分中點的軌跡.

探求法: 設自 P 作 O 圓之切線,其切點爲 Q, 設 PQ 中點 M, 爲軌跡之特殊點. 設取 OP 之中點 O', 而聯 MO', 則 $MO'=\frac{1}{2}OQ=$定長,且 O' 爲定點($\because$ P, O 爲定點), 故知所求軌跡是以 OP 中點爲圓心,定圓半徑之半爲半徑的圓.

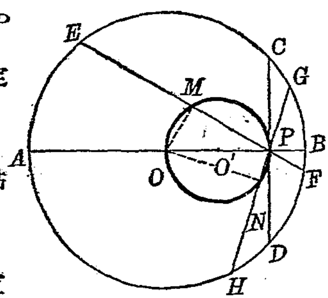
證明: (1) 設 N 爲 PR 之中點, 則 $NO'=\frac{1}{2}OR$, 故 N 在 O' 圓上. (距圓心等於半徑)

(2) 設 L 在 O' 圓上,作 $OS \parallel O'L$, 與 PL 之延長線交於 S, 則 $PL=LS$, 且 $OS=2O'L$. (△兩邊中點聯線逆定理)

故 S 在 O 圓上.

所以軌跡是上述的圓.

5. 過定圓內定點,所作各弦中點之軌跡如何?



[解] 已知: O 爲定圓, P 爲圓內一定點.

欲求: 過諸弦中點的軌跡.

探求法: 此弦爲直徑 AB 時,其中點爲圓心 O, 故圓心爲特殊點.又此弦垂直於 OP 時, P 卽爲其中點, 故 P 亦爲特殊點.再作一弦 EF, 其中點爲 M, 則 $OM \perp EF$, 卽 $\angle OMP=\angle R=$定角. O 爲定點, P 亦爲定點,故 M 之軌跡,是以 OP 爲直徑

的圓.

證明：(1) 設M為EF的中點,聯OM,則$\angle OMP=\angle R$(圓心至弦中點之線⊥半徑).故M在此圓上(一弦所張之角,等於該弦在同側所張弓形角,則角頂在圓周上).

(2) 設N為此圓上一點,作過P與N之弦,而聯ON,則$\angle ONP=\angle R$(半圓內之弓形角為直角).

$\therefore$ N為GH之中點.

故所求軌跡如上述.

已將軌跡說出,而求證明的問題,其證法與普通命題無異,不過同時須證兩方面而已.讀者可取教科書所載各題練習之,本書不復贅.

第四章

作圖

I. 導言:——作圖問題,是幾何學中很重要的一部份,但是比證題與求軌跡,還要難一些.不過讀者切勿因爲它難於領悟,便輕易放過;正因爲它的難,反而要多加一些研討的功夫纔好.初中幾何學上所包括的作圖問題,大概是作合於某條件的直線,作合於某條件的圓,作合於某條件的簡單有規則圖形,以及作等積形,平分一圖形等等,本章所敍述的,只是替讀者們把作圖的基本知識整理一下,並略示解法的例子罷了.還望讀者能夠舉一反三,且參考高等書籍,以求深造.

II. 基本作圖方法:——以下所舉,都是作圖問題解法的基礎,讀者必須熟記.

1. 平分已知線段爲二分.

2. 等分已知線段爲n分.

3. 分已知線段成定比$n:m:l:\cdots\cdots$.

4. 將一直線分成黃金分割.

5. 求三線段的第四比例項.

6. 求二線段的比例中項.

7. 外分或內分已知線段爲二分,成定比$a:b$.

8. 等分已知角爲二分.

9. 等分定弧爲二分.

10. 過定直線上或定直線外一點,作該線之垂線,

11. 過定直線上或線外一點,作直線與定直線交成定角.

12. 過定直線外一點,作一線平行於該定直線.

13. 過三定點作一圓.

14. 過圓上或圓外一點,作該圓之切線.

15. 作內容定角的弓形弧.

16. 作二圓的內外公切線.

17. 已知二角夾一邊,作三角形.

18. 已知二邊夾一角,作三角形.

19. 已知三邊.作三角形.

20. 化多角形爲等積三角形.

21. 已知直徑,作一圓.

22. 已知一邊,作正方形.

23. 作一正方形,等於已知二正方之和.

24. 作一正方形,等於已知二正方之差.以上各法,均見各種教科書,本書一復贅.

III. 作圖題的解法:——經過下列四大步驟,作圖問題的解法方算完全:

1. 解析:——推究所作圖形,與已知圖形或補助線有何關係.

2. 作法:——如何根據所得關係,連續應用基本作圖方法,以決定所作圖形的點子.

3. 證明:——根據已知圖形,所作圖形,而證明所作圖形合於所設條件.

4. 討論:——就已知圖形及所設條件,而研究問題可有幾個解答或沒有解答.

通常簡單的問題,一望而知其作法者,可以不必經解析之步驟;其實作圖題的主旨,在於作法及證明,惟繁複之作圖題,必須經過解析一步,能得其作法,故本書所舉各例,均示(1),(2)兩步,第三步從略,讀者可自行補出.

IV 解析的方法:——基本淺近的解析方法有下列四

種:

1. 假定法:——先鈎一草圖,假定其合於所設條件,然後根據已知的各元素,有時更藉補助線的關係,逐步例推,以期歸於基本作圖方法.作補助線的方法,與證題相同.

2. 交軌法:——作圖題雖有繁簡難易之不同,然而所欲畫者,無非是直線與圓,故所欲決定者,無非是點子.若問題中的這些點子,在合於甲條件的軌跡上,又在合於乙條件的軌跡上,則可作出此二軌跡,而得其交點,問題就解決了.

3. 相似法:——先作一圖,不完全與所設諸條件相合,然後利用平行移動法與相似形定理,將該圖放大或縮小,以合其餘之條件.

4. 代數法:——用已知元素及所設條件,列出所求線分的方程式,解此方程式而得其根,再根據幾何學而決定此根之作法.

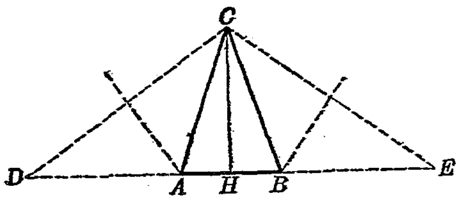
V　模範問題示例:——

1. 求作一等腰三角形,使其周界成 p,其高等於 h.

(贛22)

求作：等腰△.

解析：假定$\triangle ABC$為已作成的圖形，CH為已知之高，AC, BC, AB之和為p. 若延長HB至E，使$BE=BC$；延長HA至D，使



$AD=AC$，則$HE=\frac{1}{2}p=HD$，故H為DE之中點. 又因$BE=BC$, $AD=AC$，故B在CE的中垂線上，而A在CD的中垂線上. 於是得作法如下：

作法：作$DE=p$，求其中點H，作$CH=h$. 聯CE, CD，作CE, CD之中垂線，與DE交於B, A. 則$\triangle ABC$卽為所求之圖形.

證明：從略，讀者自補.

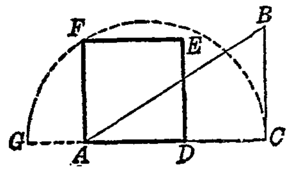
討論：在$\triangle CHB$（或$\triangle CAB$）中，$CB+BH>CH$，故在

(1) $p>2h$時，本題有一解.

(2) $p\leqq 2h$時，本題無解.

2. 一直角三角形之底邊長11公分,弦長13公分,求作與三角形面積相等之正方形,並證明作法. (河北)

[解] 已知: 直角△底邊$=11$公分,弦$=13$公分.



求作: 一正方形,與此△等積.

解析: △之面積$=\frac{1}{2}$底×高$=\frac{1}{2}11\times\sqrt{13^2-11^2}$

若x為正方形之一邊,則$x^2=\dfrac{11\sqrt{13^2-11^2}}{2}$

故x為此直角△底邊及另一邊一半的比例中項.

作法: 作$AC=11$公分,作$BC\perp AC$,以A為心13公分為半徑;作弧交BC於B.延長CA至G使$AG=\frac{1}{2}BC$.以GC為直徑畫半圓作$AF\perp GC$,與半圓交於F.以AF為一邊,作正方形,$ADEF$,卽合所求.

證明: 從略,學者自行補出.

討論: 弦長當然須大於底邊長.

3. 已知M,N兩線段,求作比例中項. (閩)

[解] 此係基本作圖題,見復興初中幾何學175節及其他各教科書.

4. 求作一三角形,與一已知之任意四角形等積.

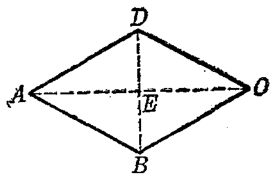
(湘四屆)

[解] 此亦基本作圖題,見復興初中幾何學189節及其他教科書.

5. 已知二對角線,求作一斜方形. (省立蘇農)

[解] 已知: 如題.

求作: 如題.



解析: 此題利用菱形對角線互相垂直,且互相平分的關係,即可得其作法

作法: 從略,讀者自補.

證明: 讀者自補.

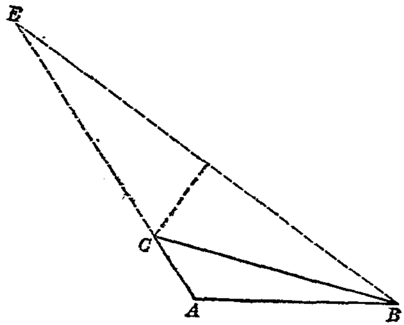
討論: 常可得一解.

6. 已給一邊,一個鄰角,同另外兩邊的和,作一個三角形.

[解] 已知: 如題.

求作: 如題.

解析：設$\triangle ABC$為已作之圖形$\angle A$等於已知



角，AB等於已知底邊．延長AC至E，使$CE=CB$，則$AC+CE=AC+CB=$已知長故本題可歸至已知二邊一夾角，作$\triangle EAB$.

作法：讀者試補出．

證明：同上．

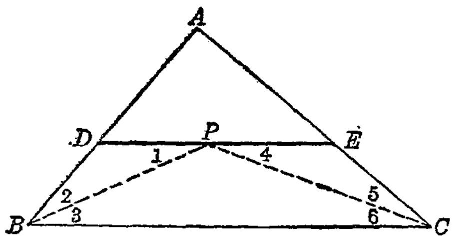
討論：$CA+CB>AB$，有解；若$CA+CB$等於或小於AB，卽無解．

7. 求在$\triangle ABC$內，作一線與底BC平行，截AB，AC於D及E而$DE=DB+EC$.　　(省立無錫中學)

[解]　已知：如題．

求作：如題．

解析：設圖已作成如下.若於 DE 上截取 DP



$=DB$,則 $PE=EC$.試聯 P,B; P,C.

$\because\ DE \parallel BC,\ \therefore\ \angle 1=\angle 3, \angle 4=\angle 6.$

$\because\ DP=DB,\ \therefore\ \angle 1=\angle 2.$

又 $\because\ PE=EC,\ \therefore\ \angle 4=\angle 5.$

於是 $\angle 2=\angle 3, \angle 5=\angle 6$

即 BP 與 CP 爲 $\angle B$ 與 $\angle C$ 之平分線.

作法：作 $\angle B$ 與 $\angle C$ 之平分線,交於 P 點.過 P 作 B 之平行線,即得.

證明：從略,讀者自行補足.

討論：常有一解.

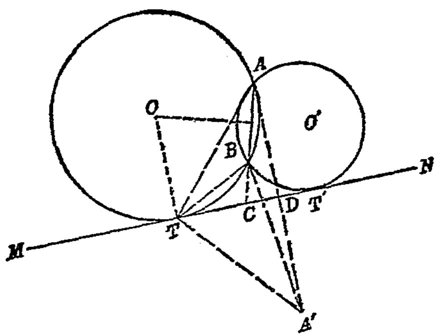
8. 求作一圓,過兩已知點,且與已知直線相切.

(務本女中)

[解] 已知：A,B 二定點與 MN 定直線.

求作：一圓,切於 MN,且過 A,B.

解析：若能決定切點,則圓心即可由交軌法



求得. 今假定圖已作得,其圓心為 O, T 為切點.聯 AB, 其延長線與 MN 交於 C; 並聯 AT, BT. 再以 MN 為軸, 取 A 之對稱點 A', 聯 $A'T$, $A'B$. ∵ A, B 為定點,故 $A'B$ 為定線段, 如可證明 $\angle BTA'$ 為定角,則 T 亦可藉交軌法求得.

今知 $\angle BAT=\angle BTC$　　(弦切角定理)

$\angle CTA=\angle CTA'$

(因 A 與 A' 為對稱點)

$\therefore\ \angle BAT+\angle CTA=\angle BTA'$,

但 $\angle TAC+\angle CTA=\angle ACN=$ 定角

(外角)

$\therefore \angle BTA' =$ 定角 $= \angle ACN$.

於是 T 在內容定角弓形弧上,又在 MN 上,因而可以決定.所求之圓心,在過 T 之 MN 垂線上,又在 AB 中垂線上,也可以決定了.

作法: 作 $AD \perp MN$, 延長至 A', 使 $A'D = AD$. 聯 $A'B$. 以 $A'B$ 爲弦,作內容 $\angle ACN$ 之弓形弧,與 MN 交於 T. 作 TO 垂直於 MN, 作 AB 之中垂線,與 TO 交於 O, O 卽爲所求圓心, OT 爲所求半徑.

取 B 之軸對稱點 B', 聯 $B'A$. 以 $B'A$ 爲弦,作內容 $\angle ACM$ 之弓形弧,又可作得一圓 O', 切 MN 於 T' 點.

證法: 從略,學者自補.

討論: 當 AB 聯線平行於 MN 時,祇有一圓可作.

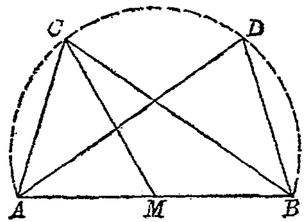
注意: 此係吳在淵氏發見之作法,其佳處在於不必延長 AB 與 MN 相交,亦可作得所求之圓,因過 B 作線平行於 MN, 卽可得兩定角之大小也.舊法利用交切

割線段比例定理求$\overline{CT}^2=\overline{CT'}^2=\overline{CA}\cdot\overline{BC}$以得$T$與$T'$，似較簡單，但過$AB$幾與$MN$平行時，即無從下手矣，

9. 已知底邊，頂角，及底邊上中線長，求作三角形

[解] 已知：如題所述.

求證：如題所述.



解析：此△之底邊既已固定，則所待決定者，不過頂點的地位而已.此點之軌跡，既在以AB爲弦，內容頂角之弓形弧上，又在以底邊中點爲心，已知中線長爲半徑的圓周上，故可用交軌法求得此點.

作法：作AB=已知底邊長.以AB爲弦，作內容已知頂角之弓形弧ACB.以AB中點M爲心，已知中線長爲半徑，作一弧，與$\widehat{ACB}$交於C.於則$\triangle ACB$即爲所求之圖形.

證明：從略，讀者自行補出.

討論：$MC \leqq \frac{1}{2}AB$ 無解.

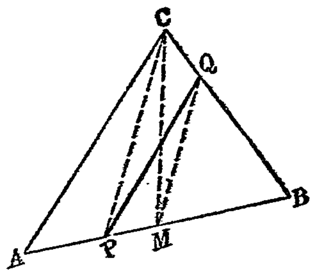
$MC=$弓形弧中點至 AB 之距離一解.

$l>MC>\frac{1}{2}AB$，二解.

$MC>l$，無解.

10. 過△底邊上一點，作一線，平分此△為二.

[解] 已知：$\triangle ABC$ 底邊 AB 上 P 點.



求作：過 P 點作一線，平分此 $\triangle ABC$.

解析：假定 PQ 為已作之線.作中線 CM，聯 M,Q；並聯 C,P. 則因 $\triangle PBQ=\frac{1}{2}\triangle ABC=\triangle MBC$，故 $\triangle PMQ=\triangle CMQ$，$\therefore PC \parallel MQ$，而點可定.

作法：聯 C,P；過 AB 中點 M，作 $MQ \parallel CP$，與 BC 交於 Q. 則 PQ 卽所求之線.

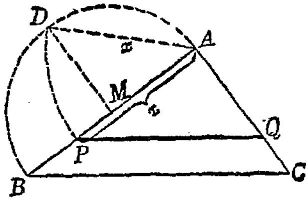
證明：從略，讀者自行補出.

討論：恆可得一解.

11. 已知 $\triangle ABC$，試作一線平行於底邊 BC，平分

此△爲二.

［解］ 已知：如題所述.



求作：如題所述.

解析：設 PQ 爲已作之線,命 $AP=x$, $AB=a$.

$\triangle APQ=\frac{1}{2}\triangle ABC$,

$\therefore \triangle APQ:\triangle ABC=1:2$

但 $\triangle APQ:\triangle ABC=x^2:a^2$,

$\therefore x^2:a^2=1:2$

於是得方程式 $x^2=\frac{a^2}{2}=\frac{a}{2}\times a$

故知 x 爲 a 與 $\frac{a}{2}$ 之比例中項.

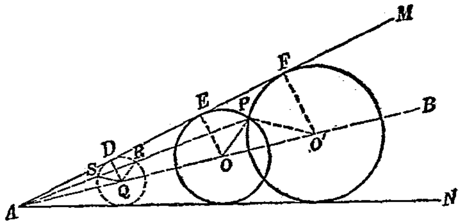
作法：以 AB 爲直徑,作半圓 ADB. 作 AB 之中垂線 MD, 與 $\overset{\frown}{ADB}$ 交於 D. 在 AB 上截取 $AP=AD$, 過 P 作 $PQ \parallel BC$, PQ 卽爲所求.

證明：從略,讀者自行補出.

討論：恆可得一解.

12. 作一圓,切於已知角的二邊,並過角內一點.

[解] 已知: $\angle A$, 其中一點 P.



求作: 切於 $\angle A$ 之二邊,並過 P 點之圓.

解析: 設 O 圓為所作之圓,其一切點為 E. 聯 AO, 則 AO 必為 $\angle A$ 之平分線. 試任於 AO 擇一點 Q, 作 Q 圓,切 $\angle A$ 之二邊,其一切點為 D. 聯 QD, OE. 則因 QD 平行於 OE, 故

$\triangle AQD \backsim \triangle AOE$, $QD : OE = AQ : AO$

若聯 AP, 與 Q 圓交於 R, S, 並作半徑 OP, QR, 則因 $QR=QD$, $OE=OP$,

$\therefore QR : OP = AQ : AO$. 於是 QR 若平行於 OP, 即可合此條件.故得下之作法.

作法: 作 $\angle A$ 之平分線 AB. 在 AB 上任取一點 Q, 作 $QD \perp AM$. 以 Q 為心, QD 為半徑,作一圓. 聯 AP, 與 Q 圓交於 R, S.

作 QR, QS 二半徑.過 P,作 $PO \parallel QR$,與 AB 交於 O;作 $PO' \parallel QS$,與 AB 交於 O'.作 $OE \perp AM$, $O'F \perp AM$.以 O, O' 為圓心, OE, OF 為半徑,作二圓,卽合所求.

證明: $\because QR \parallel OP$, $\therefore QR : OP = AQ : AO$.

但 $AQ : AO = QD : OE$ (因 $QD \parallel OE$)

$\therefore QR : OP = QD : OE$ (等於同比)

卽 $QR : QD = OP : OE$ (交比定律)

但 $QR = QD$, $\therefore OP = OE$.

卽 O 圓必過 P 點,同理可證 O' 圓亦過 P 點.因 O, O' 均在 $\angle A$ 之平分線上,而 $OE \perp AM$,故切於 AM 與 AN.

討論: 恆可作得二圓.

13. 已給一邊,一個鄰角,同另外兩邊的差,作一個三角形. (省立南京中學)

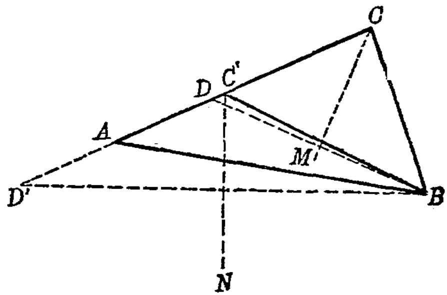
茲分別求其作法如下:

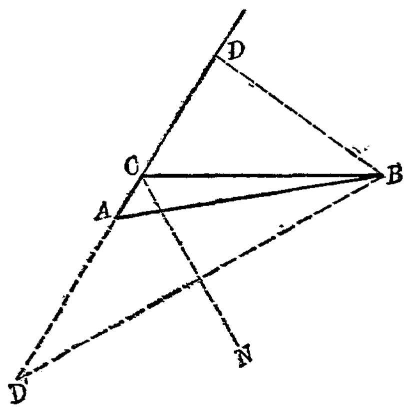
[解] 此題有兩種解法,因所給之角,可銳可鈍也.

a. 已知: 底邊 AB,鄰角 $\angle A < \angle R$,二邊差為 d.

求作: 合此條件之△.

解析: 因 $\angle B$ 或大於 $\angle A$,或小於 $\angle A$,故有





兩個三角形可作.假定圖一之 $\triangle ABC$ 與 $\triangle ABC'$ 爲已作得之二△; 其中 $\angle ABC>\angle BAC$, $\angle ABC'<BAC'$.

(1) 就 $\triangle ABC$ 而論, $AC>BC$, 故可在 CA 上截取 $CD=CB$, 則 $AD=AC-BC=d$, 於是 $\triangle ADB$ 已知二邊夾

一角,且 C 在 DB 之中垂線上,即可歸於基本作圖題.

(2) 就 $\triangle ABC'$ 而論, $AC'<BC'$, 故可延長 $C'A$ 至 D', 使 $C'D'=C'B$, 則 $AD'=BC'-AC'=d$, 而 $\angle BAD'=$ 已知角之補角, 故 $\triangle AC'B$ 亦知其二邊一夾角, C' 則在 $D'B$ 之中垂線上.

於是得作法如下:

作法: (1) 作 $AB=$ 已知底邊長; 作 $\angle BAD=$ 已知角,使 $AD=$ 二邊差;聯 BD, 作其中垂線 MC, 與 AD 延長線交於 C. $\triangle ABC$ 卽合所求.

(2) 作 $AB=$ 已知底邊長; 作 $\angle BAD'=$ 已知角之補角; 聯 BD', 作其中垂線 NC', 與 $D'A$ 之延長線交於 C'. $\triangle ABC'$ 亦合所求.

證明:- 讀者自補.

討論: $d>AB$ 時,無解, $d=AB$, 亦無解.

$d<AB$, 而 $\angle ADB$ 爲鈍角時,二解.

$d<AB$, 而 $\angle ADB$ 爲直角時,一解.

$d<AB$, 而 $\angle ADB$ 爲銳角時, 一解 (見圖二).

b. 已知: 底邊 AB, 鄰角 $\angle A=\angle R$, 二邊差爲 d.

求作: 三角形.

解析: 此題祇可以有一解, 其作法同 (*a*), (2).

作法, 證明, 討論, 皆從略, 讀者自補之.

c. 已知: 底邊 AB, 鄰角 $\angle A>\angle R$, 二邊差爲 d.

求作: 三角形.

解析: 此題亦祇可以有一解, 其作法同 (*a*), (2).

作法, 證明, 討論, 皆從略, 讀者自補之.

第五章

計算

I. 導言:——幾何計算題,大概可分爲三大類:(一)角的計算;(二)線的計算;(三)面積計算.此等問題的解法,不出於下列各步:(一)先就問題作圖;(二)看出圖形中已知元素與未知元素的關係,列成方程式;(三)圖形中的元素不充分,可作補助線;(四)解方程式,而解釋所得之根.間有先將答數說明,欲證其適合問題者,此亦不過代入與覆核之手續而已.

II. 問題解法示例:——幾何計算題,更較散漫,故祇能略舉數例,以示一斑.其實祇須定理爛熟,不愁問題無解法也.

1. 兩弦相交於圓內,第一弦之兩段爲$x-1$與$x+3$;第二弦之兩段爲$x-2$,與$x+5$.求兩弦之長.

(河北 22)

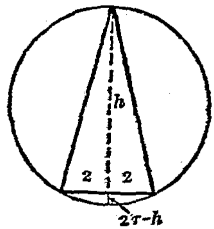
[解] 根據交弦線段定理,可得方程式如下(圖可省):

$$(x-1)(x+3)=(x-2)(x+5)$$

解方程式,得$x=7$ (答).

2. 以4公分之線段爲底邊,作一內接等腰三角形於已知圓內.若圓之半徑爲6公分,求三角形之高. (河北22)

[解] 依題意可得右圖.因等腰△之高,爲底邊之中垂線,故通過圓心.若延長高,與圓相交,則延長之一段$=2r-h$.故得方程式如下:



$$h(2r-h)=h(12-h)=4$$

解方程式,得$h=6+\sqrt{2}$(尙有一根不合).

3. 設甲三角形之三邊,各爲3尺,4尺,5尺.乙三角形與甲三角形相似,其最長邊爲6尺.求其他兩邊之長. (湘二屆)

[解] 設其他兩邊,爲a尺與b尺,則由相似形定義,

得 $\frac{a}{4}=\frac{6}{5}$, $\therefore\ a=4\frac{4}{5}$

$\frac{b}{3}=\frac{6}{5}$, $\therefore\ b=3\frac{3}{5}$

4. 設$ABCD$爲圓之內接四邊形, $\hat{A}=80^\circ$, $\hat{B}=90^\circ$. 求

$\hat{C}$ 及 $\hat{D}$.　(湘二屆)

[解]　因圓內接四邊形對角互補(圖可省),故得

$$\angle C=180^\circ-80^\circ=100^\circ,\ \angle D=180^\circ-90^\circ=90^\circ.$$

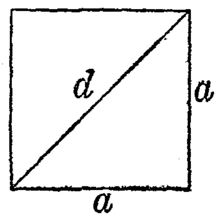
5. 自圓外一點至圓引二割線,此二割線所夾之弧,一爲28°,一爲54°,問二割線之交角若干度?

(湘三屆)

[解]　此題亦不必作圖,由交割角定理,直接得

$$\angle P=\frac{1}{2}(54^\circ-28^\circ)=13^\circ.$$

6. 設正方形之一邊爲 a,則其對角線爲 $a\sqrt{2}$.試證明之.　(湘三屆)



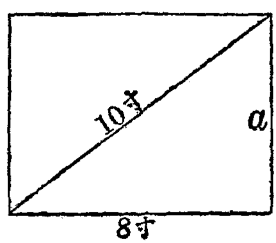
[解]　作正方形如圖,命其邊長爲 a,對角線爲 d,則由商高定理,

$$a^2+a^2=d^2,\ 即\ d^2=2a^2$$

$$\therefore\quad d=a\sqrt{2}\ (負根不用)$$

7. 已知矩形一邊爲8寸,對角線爲10寸,求其面積.

(湘四屆)



[解]　作圖如右.設命矩形之又一邊爲 a,

則 $a=\sqrt{100-64}=6$

故 矩形面積$=6\times8=48$方寸.

8. 某三角形與梯形等積,而三角形之高爲25尺,其底爲12尺,梯形之高爲三角形之高之半,其一底爲10尺,試求其他一底. (贛22)

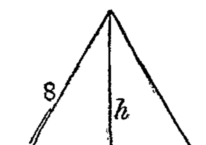
[解] 三角形之面積$=\frac{1}{2}\times12\times25=150$方尺,命$x=$梯形其他一底尺數,則得方程式

$$150=\frac{1}{2}\times25\times\frac{1}{2}(10+x)$$

解方程式,得$x=14$尺.

9. 等邊三角形一邊爲8寸,求其面積.

[解] 作圖如右.試作高h,則將底邊平分爲二.由商高定理,



$$h^2=64-16=48$$

$$\therefore\ h=4\sqrt{3}$$

$$\triangle\text{之面積}=16\sqrt{3}$$

(注意: 若每邊之長$=a$,則$h=\frac{a\sqrt{3}}{2}$,而

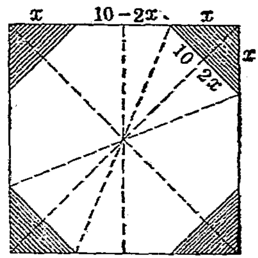
$$\triangle\text{之面積}=\frac{1}{2}\times a\times\frac{a\sqrt{3}}{2}=\frac{a^2}{4}\sqrt{3}.)$$

10. 有正方形每邊之長爲一尺,今欲切其四隅,作

爲正八邊形,則此正八邊形每邊之長如何?

(鎮江中學)

[解] 作圖如右(此圖之作法,讀者試解析之).命 $x=$ 每角截去寸數,則依題意,根據商高定理,得方程式



$$(10-2x)^2=2x^2$$

解之,得 $x=10-5\sqrt{2}$　　$(10+5\sqrt{2}$ 不合)

$\therefore\quad 10-2x=10(\sqrt{2}-1)=10\times(1.41-1)$

$$=4.1.$$

(答) 每邊長四寸一分.

第四篇　數值三角

第一章　基本知識

I. 銳角三角函數定義:——直角三角形一銳角是 A, 其對邊$=a$, 鄰邊等於 b, 斜邊等於 c, 又一銳角$=B$, 則

$$\sin A=\frac{a}{c},\quad \cos A=\frac{b}{c},\quad \tan A=\frac{a}{b},$$

$$\cot A=\frac{b}{a},\quad \sec A=\frac{c}{b},\quad \csc A=\frac{c}{a};$$

$$\sin B=\frac{b}{c},\quad \cos B=\frac{a}{c},\quad \tan B=\frac{b}{a},$$

$$\cot B=\frac{a}{b},\quad \sec B=\frac{c}{a},\quad \csc B=\frac{c}{b}.$$

II. 餘角函數關係:——一角的正函數,等於其餘角的餘函數,用式子表示,如下所列:

(1) $$\sin A=\cos(90^\circ-A)$$

(2) $$\cos A=\sin(90^\circ-A)$$

(3) $$\tan A=\cot(90^\circ-A)$$

(4) $$\cot A=\tan(90^\circ-A)$$

(5) $$\sec A=\csc(90^\circ-A)$$

(6) $$\csc A=\sec(90^\circ-A)$$

III. 銳角三角函數的變化:——銳角 A 從 0° 增加,到 90° 爲止,它的三角函數變化,各各不同:

$\sin A$ 從 0 增到 1,　　　$\cos A$ 從 1 減到 0,

$\tan A$ 從 0 增到 ∞,　　　$\cot A$ 從 ∞ 減到 0,

$\sec A$ 從 1 增到 ∞,　　　$\csc A$ 從 ∞ 減到 1.

IV. 同角三角函數的關係:——同角的各三角函數之間,有種種關係,最重要的如下:

(1) $$\sin A\times\csc A=1,$$

(2) $$\cos A\times\sec A=1,$$

(3) $$\tan A\times\cot A=1.$$

(4) $$\tan A=\frac{\sin A}{\cos A},\quad \cot A=\frac{\cos A}{\sin A}.$$

(5) $$\sin^2 A+\cos^2 A=1.$$

$$(\sin A=\sqrt{1-\cos^2 A},\quad \cos A=\sqrt{1-\sin^2 A}).$$

(6) $$1+\tan^2 A=\sec^2 A.$$

(7) $$1+\cot^2 A=\csc^2 A.$$

V. 特殊角的三角函數:——30°, 45°, 60° 的三角函數,其數值不必查表,即可算得,因爲可用分數與根式表

示,現在列表於下:

	sin	cos	tan	cot	sec	csc
30°	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}\sqrt{3}$	$\frac{1}{3}\sqrt{3}$	$\sqrt{3}$	$\frac{2}{3}\sqrt{3}$	2
45°	$\frac{1}{2}\sqrt{2}$	$\frac{1}{2}\sqrt{2}$	1	1	$\sqrt{2}$	$\sqrt{2}$
60°	$\frac{1}{2}\sqrt{3}$	$\frac{1}{2}$	$\sqrt{3}$	$\frac{1}{3}\sqrt{3}$	2	$\frac{2}{3}\sqrt{3}$

VI. 解直角三角形法:——可分下列四種:

1. 知斜邊c及一銳角A,可用下面的公式求B, a, b:

$$B=90^\circ-A, \quad a=c\sin A, \quad b=c\cos A.$$

2. 知斜邊c及一股a,可用下面公式求A, B, b:

$$\sin A=\frac{a}{c}, \quad B=90^\circ-A, \quad b=a\cot A,$$

或 $b=c\cos A$.

3. 知一股a及對角A,求B, b, c;可用公式:

$$B=90^\circ-A, \quad b=a\cot A, \quad c=a/\sin A.$$

知一股a及鄰角B,亦屬於此種,因從

$A=90^\circ-B$,即可知A.

4. 知兩股a, b,求A, B, c;可用公式:

$$\tan A=\frac{a}{b}, \quad B=90^\circ-A, \quad c=\frac{a}{\sin A},$$

或 $c=\sqrt{a^2+b^2}$

第 二 章

問題解法示例

I. 求三角函數問題:——解此類問題,祇須應用同角三角函數的關係:

1. 設 $\sin X=\frac{2}{3}$, 求 $\cos X$, $\sec X$, $\tan X$, $\cot X$, $\csc X$ 諸函數之值. (滬 23)

[解] $\cos X=\sqrt{1-\sin^2 X}=\sqrt{1-\frac{4}{9}}=\sqrt{\frac{5}{9}}=\underset{\sim\sim}{\frac{1}{3}\sqrt{5}}.$

$$\sec X=1/\cos X=1\Big/\frac{\sqrt{5}}{3}=\frac{3}{\sqrt{5}}=\underset{\sim\sim}{\frac{3}{5}\sqrt{5}}.$$

$$\tan X=\frac{\sin X}{\cos X}=\frac{\frac{2}{3}}{\frac{\sqrt{5}}{3}}=\frac{2}{3}\times\frac{3}{\sqrt{5}}=\frac{2}{\sqrt{5}}=\underset{\sim\sim}{\frac{2}{5}\sqrt{5}}.$$

$$\cot X=\frac{1}{\tan X}=1\Big/\frac{2}{\sqrt{5}}=\underset{\sim\sim}{\frac{1}{2}\sqrt{5}}.$$

$$\csc X=\frac{1}{\sin X}=1\Big/\frac{2}{3}=\underset{\sim}{\frac{3}{2}}.$$

2. 已知 $\cos X=\frac{b}{a}$, 求 X 角其餘之各函數. (湘三屆)

[解] $\sin X=\sqrt{1-\cos^2 X}=\sqrt{1-\dfrac{b^2}{a^2}}=\sqrt{\dfrac{a^2-b^2}{a^2}}$

$$=\frac{1}{a}\sqrt{a^2-b^2}.$$

$$\tan X=\frac{\sin X}{\cos X}=\frac{\sqrt{a^2-b^2}}{a}\bigg/\frac{b}{a}$$

$$=\frac{\sqrt{a^2-b^2}}{a}\times\frac{a}{b}=\frac{1}{b}\sqrt{a^2-b^2}.$$

$$\cot X=\frac{1}{\tan X}=\frac{1}{\dfrac{\sqrt{a^2-b^2}}{b}}=\frac{b}{\sqrt{a^2-b^2}}.$$

$$\sec X=\frac{1}{\cos X}=\frac{1}{\dfrac{b}{a}}=\frac{a}{b}.$$

$$\csc X=\frac{1}{\sin X}=\frac{1}{\dfrac{\sqrt{a^2-b^2}}{a}}=\frac{a}{\sqrt{a^2-b^2}}.$$

3. 已知 $2\sin A=1$, 求 $\tan A$. (湘五屆)

[解] $\sin A=\dfrac{1}{2}$,

$$\tan A=\frac{\sin A}{\cos A}=\frac{\sin A}{\sqrt{1-\sin^2 A}}=\frac{\dfrac{1}{2}}{\sqrt{1-\dfrac{1}{4}}}$$

$$=\frac{\dfrac{1}{2}}{\sqrt{\dfrac{3}{4}}}=\frac{1}{2}\times\frac{2}{\sqrt{3}}=\frac{1}{\sqrt{3}}=\frac{1}{3}\sqrt{3}.$$

4. 已知 $\tan X=\frac{8}{15}$, 求 $\sin X$, $\cos X$, $\sec X$, $\csc X$. (但 X 表銳角)　(成都一屆)

[解] $\sin^2 X=\tan^2 X\cos^2 X=\frac{\tan^2 X}{\sec^2 X}=\frac{\tan^2 X}{1+\tan^2 X}$

$$\therefore \sin X=\sqrt{\frac{\left(\frac{8}{15}\right)^2}{1+\left(\frac{8}{15}\right)^2}}=\sqrt{\frac{\frac{8^2}{15^2}}{\frac{15^2+8^2}{15^2}}}$$

$$=\sqrt{\frac{8^2}{15^2+8^2}}=\sqrt{\frac{8^2}{289}}=\underline{\frac{8}{17}}.$$

$$\cos X=\sqrt{1-\sin^2 X}=\sqrt{1-\left(\frac{8}{17}\right)^2}=\sqrt{\frac{17^2-8^2}{17^2}}$$

$$=\sqrt{\frac{225}{17^2}}=\underline{\frac{15}{17}}.$$

$$\sec X=\frac{1}{\cos X}=\underline{\frac{17}{15}}.$$

$$\csc X=\frac{1}{\sin X}=\underline{\frac{17}{8}}.$$

5. 求 $\tan^2 60°+\cot^2 45°$ 之值.　(浙 21 覆)

[解] $\tan^2 60°+\cot^2 45°=(\sqrt{3})^2+(1)^2=3+1=\underline{4}.$

6. 用 $\tan A$ 表示其他各函數.

[解] $\sin A=\tan A\cos A=\frac{\tan A}{\sec A}=\frac{\tan A}{\sqrt{1+\tan^2 A}}.$

$$\cos A=\frac{1}{\sec A}=\frac{1}{\sqrt{1+\tan^2 A}}.$$

$$\cot A = \frac{1}{\tan A}.$$

$$\sec A = \sqrt{1+\tan^2 A}.$$

$$\csc A = \frac{1}{\sin A} = \frac{\sqrt{1+\tan^2 A}}{\tan A}.$$

7. 用 $\sec A$ 表其他各函數.

[解] $$\sin A = \tan A \cos A = \frac{\tan A}{\sec A} = \frac{\sqrt{\sec^2 A - 1}}{\sec A}.$$

$$\cos A = \frac{1}{\sec A}.$$

$$\tan A = \sqrt{\sec^2 A - 1}.$$

$$\cot A = \frac{1}{\sqrt{\sec^2 A - 1}}.$$

$$\csc A = \frac{1}{\sin A} = \frac{\sec A}{\sqrt{\sec^2 A - 1}}.$$

8 $\sin 15^\circ = \dfrac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$, 求 $\cos 15^\circ$, $\tan 15^\circ$ 之值.

[解] $$\cos^2 15^\circ = 1 - \left(\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}\right)^2 = 1 - \frac{6-2\sqrt{12}+2}{16}$$

$$= \frac{16-8+2\sqrt{12}}{16} = \frac{8+2\sqrt{12}}{16}$$

$$\therefore \cos 15^\circ = \frac{\sqrt{8+2\sqrt{12}}}{4} = \underline{\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}}.$$

$$\tan 15^\circ=\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}\Big/\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$$

$$=\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{\sqrt{6}+\sqrt{2}}=\frac{(\sqrt{6}-\sqrt{2})^2}{6-2}$$

$$=\frac{6-2\sqrt{12}+2}{4}=\frac{8-4\sqrt{3}}{4}=\underline{2-\sqrt{3}}.$$

9. 化簡 $(\csc A-\sin A)(\sec A-\cos A)(\tan A+\cot A)$.

[解] 原式 $=\left(\frac{1}{\sin A}-\sin A\right)\left(\frac{1}{\cos A}-\cos A\right)$

$$\times\left(\frac{\sin A}{\cos A}+\frac{\cos A}{\sin A}\right)$$

$$=\frac{1-\sin^2 A}{\sin A}\times\frac{1-\cos^2 A}{\cos A}\times\frac{\sin^2 A+\cos^2 A}{\cos A\sin A}$$

$$=\frac{\cos^2 A}{\sin A}\times\frac{\sin^2 A}{\cos A}\times\frac{1}{\cos A\sin A}=\underset{\sim}{1}.$$

10. 已知 $\sin X+\cos X=\frac{5}{4}$, 求 $\sin^3 X+\cos^3 X$ 之值.

[解] $(\sin X+\cos X)^2=\frac{25}{16}$,

$$\sin^2 X+2\cos X\sin X+\cos^2 X=\frac{25}{16},$$

$$1+2\cos X\sin X=\frac{25}{16},$$

$$\therefore\ \cos X\sin X=\left(\frac{25}{16}-1\right)\times\frac{1}{2}=\frac{9}{32}$$

$$\sin^3 X+\cos^3 X=(\sin X+\cos X)$$
$$\times(\sin^2 X-\sin X\cos X+\cos^2 X)$$
$$=\frac{5}{4}\times\left(1-\frac{9}{32}\right)=\frac{115}{128}.$$

II. 證明簡易恆等式問題:——證簡單三角函數恆等式,也利用基本關係;證法共有六種:

a. 由左端順化到右端.

b. 由右端逆化到左端.

c. 將兩端化成同一式子.

d. 證明兩邊之差是零.

e. 從已知恆等式推出.

f. 認原式眞確,將其變形,使兩端化成同式.

今舉模範例題於下:

1. 試證 $\tan\theta+\cot\theta=\sec\theta\csc\theta.$ (成都一屆)

[解] $$\tan\theta+\cot\theta=\frac{\sin\theta}{\cos\theta}+\frac{\cos\theta}{\sin\theta}$$
$$=\frac{\sin^2\theta+\cos^2\theta}{\cos\theta\sin\theta}$$
$$=\frac{1}{\cos\theta\sin\theta}$$
$$=\frac{1}{\cos\theta}\times\frac{1}{\sin\theta}$$
$$=\sec\theta\cdot\csc\theta.$$

2. 求證　$\sin^2 A \tan A + \cos^2 A \cot A + 2\sin A \cos A$

$$= \tan A + \cot A.$$

(贛 22)

[解]　左端 $= \dfrac{\sin^3 A}{\cos A} + \dfrac{\cos^3 A}{\sin A} + \dfrac{2\sin^2 A\cos^2 A}{\cos A \sin A}$

$$= \frac{\sin^4 A + 2\sin^2 A\cos^2 A + \cos^4 A}{\cos A \sin A}$$

$$= \frac{(\sin^2 A + \cos^2 A)^2}{\cos A \sin A} = \frac{1}{\cos A \sin A}.$$

右端 $= \dfrac{\sin A}{\cos A} + \dfrac{\cos A}{\sin A} = \dfrac{\sin^2 A + \cos^2 A}{\cos A \sin A}$

$$= \frac{1}{\cos A \sin A}.$$

∴ 原式左右端相等.

3. 試證　$(1 - \cos^2 A)\cot^2 A = \cos^2 A.$　(浙 22)

[解]　原式左端 $= \sin^2 A \cot^2 A = \sin^2 A \times \dfrac{\cos^2 A}{\sin^2 A} = \cos^2 A.$

4. 證明下二式:

(a)　$\tan^2 A - \sin^2 A = \tan^2 A \sin^2 A.$

(b)　$\sec^2 A + \csc^2 A = \sec^2 A \csc^2 A.$　(贛 23)

[解]　(a)　$\tan^2 A - \sin^2 A = \tan^2 A - \tan^2 \cos^2 A$

$$= \tan^2 A(1 - \cos^2 A) = \tan^2 A \sin^2 A.$$

(b)　$\sec^2 A \csc^2 A = (1 + \tan^2 A)(1 + \cot^2 A)$

$$=1+\tan^2 A+\cot^2 A+\tan^2 A\cot^2 A$$

$$=1+\tan^2 A+1+\cot^2 A=\sec^2 A+\csc^2 A.$$

5. 證明：$\sec A-\cos A=\sin A\tan A.$

［解］ $\sec A-\cos A=\dfrac{1}{\cos A}-\cos A=\dfrac{1-\cos^2 A}{\cos A}$

$$=\frac{\sin^2 A}{\cos A}=\sin A\tan A.$$

6. 證明：$\cot^2 X-\cos^2 X=\cot^2 X\cos^2 X.$

［解］ $\cot^2 X-\cos^2 X=\cot^2 X-\cot^2 X\sin^2 X$

$$=\cot^2 X(1-\sin^2 X)=\cot^2 X\cos^2 X.$$

7. 證明：$\csc A-\sin A=\cos A\cot A.$

［解］ $\csc A-\sin A=\dfrac{1}{\sin A}-\sin A=\dfrac{1-\sin^2 A}{\sin A}$

$$=\frac{\cos^2 A}{\sin A}=\cos A\cot A.$$

8. 證明：$(1+\tan A)^2+(1+\cot A)^2=(\sec A+\csc A)^2.$

［解］ 右端$=\sec^2 A+2\sec A\csc A+\csc^2 A.$

左端$=1+2\tan A+\tan^2 A+1+2\cot A+\cot^2 A$

$$=\sec^2 A+2(\tan A+\cot A)+\csc^2 A$$

但 $\tan A+\cot A=\dfrac{\sin A}{\cos A}+\dfrac{\cos A}{\sin A}$

$$=\frac{\sin^2 A+\cos^2 A}{\cos A\sin A}=\frac{1}{\cos A\sin A}=\sec A\csc A$$

$\therefore$ 左端 $=\sec^2 A+2\sec A\csc A+\csc^2 A$

故原式兩端相等.

9. 證明: $\dfrac{\cos A}{1-\tan A}+\dfrac{\sin A}{1-\cot A}=\sin A+\cos A.$

[解] $\dfrac{\cos A}{1-\tan A}-\cos A+\dfrac{\sin A}{1-\cot A}-\sin A$

$$=\frac{\cos A-\cos A+\cos A\tan A}{1-\tan A}$$

$$+\frac{\sin A-\sin A+\sin A\cot A}{1-\cot A}$$

$$=\frac{\sin A}{1-\tan A}+\frac{\cos A}{1-\cot A}$$

$$=\frac{\sin A-\cos A+\cos A-\sin A}{(1-\tan A)(1-\cot A)}=0,$$

故原式兩端相等.

10. 證明: $\dfrac{\sin X}{1+\cos X}=\dfrac{1-\cos X}{\sin X}.$

[解] 已知: $\sin^2 X+\cos^2 X=1$

$\therefore\ \sin^2 X=1-\cos^2 X$

$\sin^2 X=(1-\cos X)(1+\cos X)$

兩邊各用 $\sin X(1+\cos X)$ 除, 即得

$$\frac{\sin X}{1+\cos X}=\frac{1-\cos X}{\sin X}.$$

11. 證明: $\sin^2 A\cos^2 B(1+\cot^2 A)(1+\tan^2 B)=1.$

[解] 認原恆等式,眞實不誤,而以 $\sin^2 A\cos^2 B$ 除其兩端,得

$$(1+\cot^2 A)(1+\tan^2 B)=\frac{1}{\sin^2 A\cos^2 B},$$

即 $$(1+\cot^2 A)(1+\tan^2 B)=\csc^2 A\sec^2 B,$$

但 $$1+\cot^2 A=\csc^2 A,$$

而 $$1+\tan^2 B=\sec^2 B,$$

$$\therefore\ \csc^2 A\sec^2 B=\csc^2 A\sec^2 B,$$

故知原恆等式,的確不誤.

12. 證明: $\dfrac{\sin X}{1+\cos X}+\dfrac{1+\cos X}{\sin X}=2\csc X.$

[解] 認原式爲眞確,而得

$$\frac{1+\cos X}{\sin X}-\csc X=\csc X-\frac{\sin X}{1+\cos X},$$

$$\frac{1+\cos X}{\sin X}-\frac{1}{\sin X}=\frac{1}{\sin X}-\frac{\sin X}{1+\cos X},$$

$$\frac{\cos X}{\sin X}=\frac{1+\cos X-\sin^2 X}{\sin X+\sin X\cos X},$$

$$\frac{\cos X}{\sin X}=\frac{\cos X+\cos^2 X}{\sin X+\sin X\cos X},$$

$$\frac{\cos X}{\sin X}=\frac{\cos X(1+\cos X)}{\sin X(1+\cos X)},$$

$$\frac{\cos X}{\sin X}=\frac{\cos X}{\sin X}.$$

故知原恆等式爲眞確.

13. 證明: $\dfrac{1-\cos A}{1+\cos A}=(\csc A-\cot A)^2.$

[解] 原式右端 $=\csc^2 A-2\csc A\cot A+\cot^2 A$

$$=\frac{1}{\sin^2 A}-\frac{2\cos A}{\sin^2 A}+\frac{\cos^2 A}{\sin^2 A}$$

$$=\frac{1-2\cos A+\cos^2 A}{\sin^2 A}=\frac{(1-\cos A)^2}{\sin^2 A}$$

$$=\frac{(1-\cos A)(1-\cos A)}{1-\cos^2 A}$$

$$=\frac{(1-\cos A)(1-\cos A)}{(1-\cos A)(1+\cos A)}=\frac{1-\cos A}{1+\cos A},$$

故知原式是眞實不錯.

14 證明: $\sin^2 X+\tan^2 X=\sec^2 X-\cos^2 X.$

[解] 因 $\sin^2 X+\cos^2 X=1$

又因 $1+\tan^2 X=\sec^2 X$

故兩式相加,得

$$\sin^2 X+\cos^2 X+1+\tan^2 X=1+\sec^2 X,$$

兩端各減 $(\cos^2 X+1)$, 卽得

$$\sin^2 X+\tan^2 X=\sec^2 X-\cos^2 X,$$

故原恆等式可以證明無誤.

15. 證明：$\dfrac{1+\cos A}{1-\cos A}-\dfrac{1-\cos A}{1+\cos A}=4\cot A\csc A.$

[解] 原式左端$=\dfrac{(1+\cos A)^2-(1-\cos A)^2}{1-\cos^2 A}=\dfrac{4\cos A}{1-\cos^2 A}$

$$=\frac{4\cos A}{\sin^2 A}=4\cot A\csc A.$$

III. **解方程式的問題**：——解簡易三角方程式,祇須利用餘角函數關係,及同角函數關係,將式中不同的各三角函數,化成一種相同的三角函數,就可用代數方法,解方程式求根了.今舉模範例題於下：

(A) 利用餘角函數關係可解的方程式：

1. 設 $\tan(45^\circ+A)=\cot A$; 求 $A=?$

[解] 因 $\cot A=\tan(90^\circ-A)$, 故原方程式可以寫成

$$\tan(45^\circ+A)=\tan(90^\circ-A),$$

兩角的同函數相等,兩角也相等,

$$\therefore\ 45^\circ+A=90^\circ-A$$

$$\therefore\ 2A=90^\circ-45^\circ=45^\circ$$

$$A=22^\circ\frac{1}{2}.$$

2. 設 $\sin A=\cos 4A$, 試求 A 是幾度.

[解] $$\cos 4A=\sin(90^\circ-4A)$$

$$\therefore \sin A=\sin(90^\circ-4A)$$

即
$$A=90^\circ-4A$$

$$5A=90^\circ, \qquad \therefore A=18^\circ$$

3. 設 $\cos A=\sin\left(45^\circ-\frac{1}{2}A\right)$; 試求 A 之度數.

[解]
$$\cos A=\sin(90^\circ-A),$$

故從原方程式, 可得

$$\sin(90^\circ-A)=\sin\left(45^\circ-\frac{1}{2}A\right)$$

$$90^\circ-A=45^\circ-\frac{1}{2}A$$

$$\frac{1}{2}A=45^\circ,$$

$$A=90^\circ$$

(*B*) 利用同角函數關係可解的方程式:

1. 已知 $\tan\theta+\cot\theta=2$, 求 θ. (湘二屆)

[解] 因 $\cot\theta=\frac{1}{\tan\theta}$, 故原方程式可寫成

$$\tan\theta+\frac{1}{\tan\theta}=2,$$

兩端用 $\tan\theta$ 乘, $\tan^2\theta+1=2\tan\theta$,

即
$$\tan^2\theta-2\tan\theta+1=0,$$

$$(\tan\theta-1)^2=0, \quad \therefore \tan\theta=1,$$

從特殊角函數表, 知 $\theta=45^\circ$.

2. $\sin^2 x=\frac{3}{2}\cos x$, 求 x.

[解] $\sin^2 x=1-\cos^2 x$, 故從原方程式,得

$$1-\cos^2 x=\frac{3}{2}\cos x,$$

$$\cos^2 x+\frac{3}{2}\cos x-1=0,$$

$$2\cos^2 x+3\cos x-2=0,$$

$$(2\cos x-1)(\cos x+2)=0,$$

$$\therefore\ \cos x=\frac{1}{2}, \text{ 或 } -2,$$

但 $\cos x$ 決不能等於 -2, $\therefore\ \cos x=\frac{1}{2}$,

故知 $x=60^\circ$.

3. $\sin x+\sqrt{3}\cos x=2$, 求 x.

[解] 因 $\cos x=\sqrt{1-\sin^2 x}$, 故原方程式可改成

$$\sin x+\sqrt{3}\sqrt{1-\sin^2 x}=2,$$

即 $\sqrt{3-3\sin^2 x}=2-\sin x$,

兩邊乘方, $3-3\sin^2 x=4-4\sin x+\sin^2 x$,

移項整理, $4\sin^2 x-4\sin x+1=0$,

即 $(2\sin x-1)^2=0$,

$$\therefore\ \sin x=\frac{1}{2},\ x=30^\circ.$$

4. $3\tan\theta+\cot\theta=5\csc\theta$, 求 θ.

[解]　$\tan\theta=\dfrac{\sin\theta}{\cos\theta}$, $\cot\theta=\dfrac{\cos\theta}{\sin\theta}$, $\csc\theta=\dfrac{1}{\sin\theta}$,

代入原方程式,

$$\frac{3\sin\theta}{\cos\theta}+\frac{\cos\theta}{\sin\theta}=\frac{5}{\sin\theta},$$

$$\frac{3\sin\theta}{\cos\theta}+\frac{\cos\theta}{\sin\theta}-\frac{5}{\sin\theta}=0,$$

$$\frac{3\sin^2\theta+\cos^2\theta-5\cos\theta}{\sin\theta\cos\theta}=0,$$

$$\therefore\ 3\sin^2\theta+\cos^2\theta-5\cos\theta=0,$$

$$3(1-\cos^2\theta)+\cos^2\theta-5\cos\theta=0,$$

即　$$2\cos^2\theta+5\cos\theta-3=0,$$

$$(2\cos\theta-1)(\cos\theta+3)=0,$$

$\therefore\ \cos\theta=\dfrac{1}{2}$, 或 -3 (不合理),

$$\therefore\ \theta=60^\circ.$$

5. $\sqrt{2}\cos\theta=\cot\theta$, 求 θ.

$\cot\theta=\dfrac{\cos\theta}{\sin\theta}$, 代入原方程式,

$\sqrt{2}\cos\theta=\dfrac{\cos\theta}{\sin\theta}$, $\sqrt{2}\cos\theta-\dfrac{\cos\theta}{\sin\theta}=0$,

$\cos\theta\left(\sqrt{2}-\dfrac{1}{\sin\theta}\right)=0$, $\therefore\ \cos\theta=0$, $\theta=90^\circ$;

或　$\sin\theta=\dfrac{1}{2}\sqrt{2}$, $\therefore\ \theta=45^\circ$.

6. $\sin^2 x - 2\cos x + \frac{1}{4} = 0$, 求 x.

[解] $\sin^2 x = 1 - \cos^2 x$, 代入原方程式,

$$1 - \cos^2 x - 2\cos x + \frac{1}{4} = 0,$$

$$\cos^2 x + 2\cos x - \frac{5}{4} = 0,$$

$$\left(\cos x + \frac{5}{2}\right)\left(\cos x - \frac{1}{2}\right) = 0,$$

$$\therefore \cos x = \frac{1}{2}, \text{ 或 } -\frac{5}{2}(\text{不合理})$$

$$\therefore x = 60^\circ$$

7. $\sin x + 2\cos^2 x = 2$, 求 x.

[解] $\cos^2 x = 1 - \sin^2 x$, 代入原方程式,

$$\sin x + 2(1 - \sin^2 x) = 2,$$

$$2\sin^2 x - \sin x = 0$$

$$\sin x(2\sin x - 1) = 0,$$

$$\therefore \sin x = 0, \text{ 或 } \frac{1}{2},$$

故知 $x = 0^\circ$, 或 30°.

8. $\tan x = 2\sin x$, 求 x.

$\tan x = \frac{\sin x}{\cos x}$, 代入原方程式,

$$\frac{\sin x}{\cos x} - 2\sin x = 0,$$

$$\frac{\sin x - 2\sin x\cos x}{\cos x} = 0,$$

$$\sin x - 2\sin x\cos x = 0,$$

$$\sin x(1-2\cos x) = 0,$$

$$\sin x = 0,\quad x = 0°;$$

$$\cos x = \frac{1}{2},\quad x = 60°.$$

9. $\sec^2\theta = 2\tan^2\theta$, 求 θ.

[解] 以 $1+\tan^2\theta=\sec^2\theta$ 代入原方程式,

$$1+\tan^2\theta = 2\tan^2\theta,$$

$$\tan^2\theta - 1 = 0,$$

$$(\tan\theta-1)(\tan\theta+1) = 0,$$

$$\therefore\ \tan\theta = 1,\ 或\ -1.$$

此處 -1 並非不合理之根,但照初中程度說,所講的都是銳角三角函數,銳角三角函數是沒有負數的,所以負根暫時不取.於是 $\tan\theta=1$, 而 $\theta=45°$.

10. $\sin\theta+\cos\theta=1$, 求 θ.

[解] 兩邊自乘,

$$\sin^2\theta + 2\sin\theta\cos\theta + \cos^2\theta = 1$$

$$\therefore\ 2\sin\theta\cos\theta = 0,$$

$$\sin\theta = 0,\ \cos\theta = 0,$$

$$\therefore\ \theta = 0°,\ 或\ 90°.$$

11. $4\sin^2 x-2(\sqrt{3}+1)\sin x+\sqrt{3}=0$, 求 x.

[解] $(2\sin x-1)(2\sin x-\sqrt{3})=0$,

$$\therefore\ 2\sin x-1=0, \sin x=\frac{1}{2};$$

或 $$2\sin x-\sqrt{3}=0, \sin x=\frac{1}{2}\sqrt{3};$$

故 $$x=30°, \text{ 或 } 60°.$$

12. $\cot\theta+\tan\theta=2\sec\theta$, 求 θ.

[解] $$\frac{\cos\theta}{\sin\theta}+\frac{\sin\theta}{\cos\theta}=\frac{2}{\cos\theta},$$

$$\frac{\cos^2\theta+\sin^2\theta}{\sin\theta\cos\theta}-\frac{2}{\cos\theta}=0,$$

$$\frac{1}{\sin\theta\cos\theta}-\frac{2}{\cos\theta}=0$$

$$\frac{1}{\cos\theta}\left(\frac{1}{\sin\theta}-2\right)=0,$$

$\frac{1}{\cos\theta}$ 決不能等於零,

$$\therefore\ \frac{1}{\sin\theta}-2=0, \sin\theta=\frac{1}{2}, \theta=30°.$$

13. $\csc^2 x+\cot^2 x=3$, 求 x.

[解] $\csc^2 x=1+\cot^2 x$, 代入原方程式, 得

$$1+2\cot^2 x=3,$$

$$\cot^2 x=1, \cot x=\pm 1,$$

-1 暫時不用, $\cot x=1$, $\therefore\ x=45°$.

14. $3\sec^4\theta+8=10\sec^2\theta$, 求 θ.

[解] $$3\sec^4\theta-10\sec^2\theta+8=0,$$

$$(3\sec^2\theta-4)(\sec^2\theta-2)=0,$$

$$\therefore\quad \sec\theta=\pm\frac{2}{3}\sqrt{3},\text{或}\pm\sqrt{2},$$

負根不用, $\therefore\ \sec\theta=\frac{2}{3}\sqrt{3},\ \theta=30^\circ,$

或 $\qquad \sec\theta=\sqrt{2},\ \theta=45^\circ.$

15. $2\cos\theta+2\sqrt{2}=3\sec\theta$, 求 θ.

[解] $$\frac{2}{\sec\theta}+2\sqrt{2}-3\sec\theta=0,$$

$$3\sec^2\theta-2\sqrt{2}\sec\theta-2=0$$

$$(3\sec\theta+\sqrt{2})(\sec\theta-\sqrt{2})=0$$

$$\therefore\ \sec\theta=\sqrt{2},\text{或}-\frac{1}{3}\sqrt{2}\ (\text{不用})$$

$$\therefore\ \theta=45^\circ.$$

16. $6\tan\theta-5\sqrt{3}\sec\theta+12\cot\theta=0$, 求 θ.

[解] $$\frac{6\sin\theta}{\cos\theta}-\frac{5\sqrt{3}}{\cos\theta}+\frac{12\cos\theta}{\sin\theta}=0$$

$$\frac{6\sin^2\theta-5\sqrt{3}\sin\theta+12\cos^2\theta}{\cos\theta\sin\theta}=0,$$

$$\therefore\ 6\sin^2\theta-5\sqrt{3}\sin\theta+12(1-\sin^2\theta)=0$$

$$6\sin^2\theta+5\sqrt{3}\sin\theta-12=0$$

$$(3\sin\theta+4\sqrt{3})(2\sin\theta-\sqrt{3})=0$$

$$\therefore\ \sin\theta=-\frac{4}{3}\sqrt{3},\text{或}\frac{1}{2}\sqrt{3};$$

但 $\sin\theta$ 決不能等於 $-\frac{4}{3}\sqrt{3}$,

故　　$\sin\theta=\frac{1}{2}\sqrt{3},\ \theta=60^\circ$.

17. $\begin{cases}\tan x\tan y=1,\\ \tan^2 x+\tan^2 y=\frac{10}{3},\end{cases}$ 求 x 與 y.

[解]　　$2\tan x\tan y=2$;

$\therefore\ \tan^2 x+2\tan x\tan y+\tan^2 y=\frac{16}{3}$,

$\therefore\ \tan x+\tan y=\pm\frac{4}{3}\sqrt{3}$.

但此處負根不能用,因若取負根,則因

$\tan x\tan y=1$,

故兩函數必須同爲負數,出於銳角三角函數範圍以外.

又　$\tan^2 x-2\tan x\tan y+\tan y^2=\frac{4}{3}$

$\therefore\quad \tan x-\tan y=\pm\frac{2}{3}\sqrt{3}$.

此式負根可用,因 $\tan y>\tan x$, 就可得負數.

從 $\tan x+\tan y=\frac{4}{3}\sqrt{3},\ \tan x-\tan y=\frac{2}{3}\sqrt{3}$,

得　　$\tan x=\sqrt{3},\ \tan y=\frac{1}{3}\sqrt{3}$,

$\therefore\ x=60^\circ,\ y=30^\circ$.

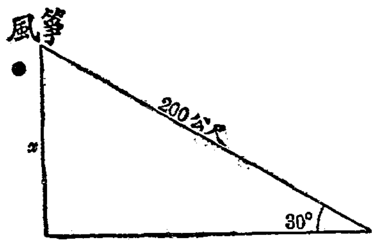
從 $\tan x+\tan y=\frac{4}{3}\sqrt{3},\ \tan x-\tan y=-\frac{2}{3}\sqrt{3}$,

得　$\tan x=\frac{1}{3}\sqrt{3}, \tan y=\sqrt{3},$

$$\therefore\ x=30^\circ, y=60^\circ.$$

IV. 解三角形的問題:——解直角三角形,祇須照三角函數定義,列式求值;在未列式以前,宜就題意,畫一草圖.現將模範問題解法,示例於下:

1. 風箏之線長200公尺,其仰角爲30°,假設風箏之線爲直線,求風箏之高.(滬23)



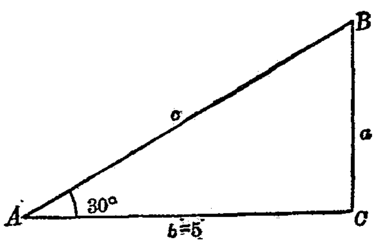
[解] 先依題意,作直角三角形如上圖,

$$\sin 30^\circ=\frac{x}{200},$$

$$\therefore\ x=200\sin 30^\circ=200\times\frac{1}{2}=100.$$

答:風箏高100公尺.

2. $C=90^\circ, A=30^\circ, b=5$;求 B 及 a, c.(閩)



[解] $B=90^\circ-30^\circ=60^\circ$

$$a=5\tan 30^\circ$$

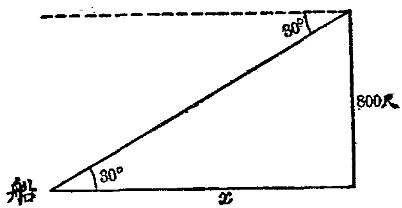
$$=5\times\frac{1}{3}\sqrt{3}=\frac{5}{3}\sqrt{3}.$$

$$c=\frac{5}{\cos 30^\circ}=5\Big/\frac{1}{2}\sqrt{3}=5\times\frac{2}{\sqrt{3}}=\frac{10}{3}\sqrt{3}$$

答: $B=60^\circ, a=\frac{5}{3}\sqrt{3},\ c=\frac{10}{3}\sqrt{3}.$

3. 一石壁高出水面 800 尺,下視遠處一船的俯角,是 30°. 求此船離石壁的距離.

[解] 依題意得右圖.

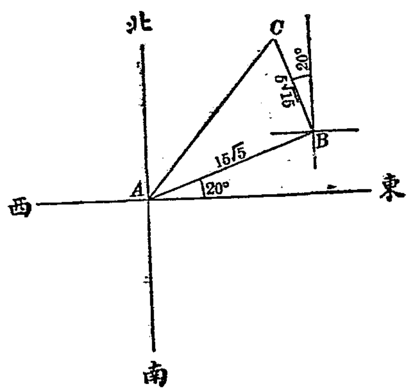


$$\frac{800}{x}=\tan 30^\circ,$$

$$\therefore x=\frac{800}{\tan 30^\circ}$$

$$=800\Big/\frac{1}{\sqrt{3}}=800\sqrt{3}\text{ 尺}.$$

4. 一船從 A 港出發,向北偏東 70°(即 $N\,70^\circ\,E$) 駛行 $15\sqrt{5}$ 浬之後,又向北偏西 20°(即 $N\,20^\circ\,W$) 駛行 $5\sqrt{15}$ 浬.問此



時船在 A 港的什麼方位? 離 A 幾浬?

[解] 依題意,得上圖, $\triangle ABC$ 是直角三角形.

於是 $\tan B\hat{A}C=\frac{5\sqrt{15}}{15\sqrt{5}}=\frac{1}{3}\sqrt{3}$,

$$\therefore\ B\hat{A}C=30^\circ,\ 90^\circ-(30^\circ+20^\circ)=40^\circ,$$

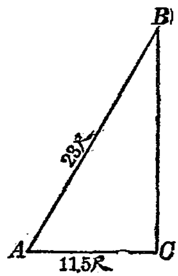
$\therefore$ 船在 A 港的北偏東 40°.

又 $\overline{AC}^2=(15\sqrt{5})^2+(5\sqrt{15})^2=1125+375=1500$,

$$\therefore\ AC=10\sqrt{15}$$

即　船離 A 港 $10\sqrt{15}$ 浬.

5. 在正午時,以23尺之竿斜植於地,影長 11.5 尺.問竿與地面成角幾度?



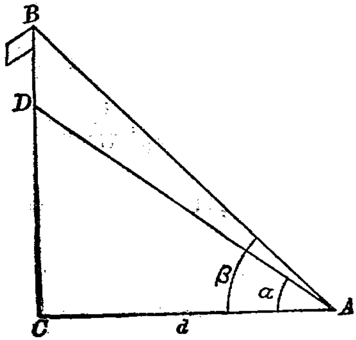
[解] 依題意,得直角三角形如右圖.

$\therefore\ \cos A=\frac{11.5}{23}=\frac{1}{2}$, $A=60^\circ$.

答: 竿與地面適成 60° 之角.

6. 塔頂上有旗竿一根.在離塔 d 尺處,測得塔頂仰角是 α, 旗竿頂仰角是 β, 求旗竿長若干.

[解] 依題意得下圖.



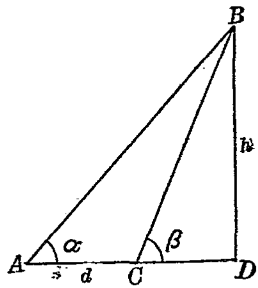
$CD = d\tan\alpha,$

$CB = d\tan\beta,\ CB - CD = DB,$

$\therefore\ DB = d\tan\beta - d\tan\alpha = d(\tan\beta - \tan\alpha).$

7. 在 A 點測某山頂,得仰角 α, 再前進 d 尺,在同平面上 C 點再測山頂,得仰角 β. 證明山高

$$h = \frac{d}{\cot\alpha - \cot\beta}.$$



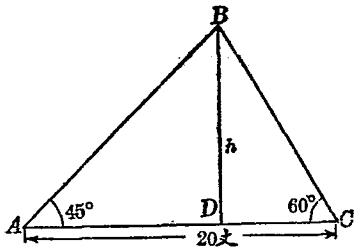
[解] 依題意得右圖.於是

$$AD = h\cot\alpha,\ CD = h\cot\beta,$$

$$AD - CD = h(\cot\alpha - \cot\beta) = d,$$

$$\therefore\ h = \frac{d}{\cot\alpha - \cot\beta}.$$

8. 在直線堤上,相離20丈的A, C兩點,測對岸B點,得$\angle BAC=45^\circ$,$\angle BCA=60^\circ$.求B到此堤岸的距離.



[解] 依題意,得上圖.B到AC的距離,就是AC的垂線BD,命$BD=h$.於是

$AD=h\cot 45^\circ$, $DC=h\cot 60^\circ$,

$AD+DC=20$ 丈 $=h(\cot 45^\circ+\cot 60^\circ)$

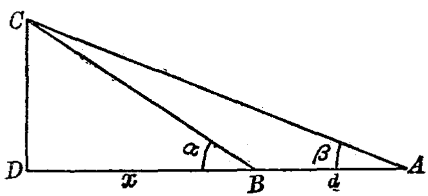
$$\therefore\quad h=\frac{20}{\cot 45^\circ+\cot 60^\circ}=\frac{20}{1+\frac{\sqrt{3}}{3}}$$

$$=\frac{60}{3+\sqrt{3}}=\frac{60(3-\sqrt{3})}{9-3}=\frac{60(3-\sqrt{3})}{6}$$

$$=10(3-\sqrt{3})=10(3-1.732)$$

$$=10\times 1.268=\underline{12.68\text{ 丈}}.$$

9. 欲測江闊BD,在岸上B點,測得對岸建築物屋頂C仰角α,再



退後 d 尺,在 A 處測得 C 的仰角 β; 若 A, B, D 在同平面內.求江寬幾尺.

[解] 依題意得上圖.命江寬 $BD=x$, 則得

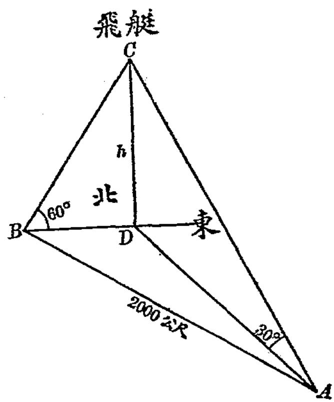
$$CD=x\tan\alpha,\ CD=(d+x)\tan\beta,$$

$$\therefore\quad x\tan\alpha=d\tan\beta+x\tan\beta,$$

$$x(\tan\alpha-\tan\beta)=d\tan\beta,$$

$$\therefore\quad x=\frac{d\tan\beta}{\tan\alpha-\tan\beta}.$$

10. 同在水平面上 A, B 二點,距離2000公尺,在 A 點望見空中飛艇,在正北方位,測得仰角30°;同時 B 處望見飛艇在正東方位,測得仰角 60°; 求飛艇離地之高.計算到公尺爲止,尺以下四捨五入.



[解] 依題意,作得上圖, h 爲飛艇之高. $\triangle BDC$, ADC, ADB 者,是直角三角形.於是

$$BD=h\cot 60^\circ,\quad AD=h\cot 30^\circ,$$

$$\overline{BD}^2=h^2\cot^2 60^\circ,\ \overline{AD}^2=h^2\cot^2 30^\circ,$$

但 $\overline{BD}^2+\overline{AD}^2=\overline{AB}^2=2000^2,$

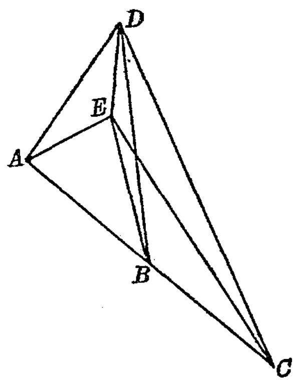
$\therefore\quad h^2\cot^2 60^\circ+h^2\cot^2 30^\circ=2000^2,$

$$\therefore\quad h=\frac{2000}{\sqrt{\cot^2 60^\circ+\cot^2 30^\circ}}=\frac{2000}{\sqrt{\frac{1}{3}+3}}$$

$$=\frac{2000}{\sqrt{\frac{10}{3}}}=\frac{2000}{\frac{1}{3}\sqrt{30}}=\frac{6000}{\sqrt{30}}$$

$$=\frac{6000}{30}\sqrt{30}=200\sqrt{30}=1095\text{ 公尺.}$$

11. A, B, C 三人,在平地一直線上,B 與 A 的距離,等於 B 與 C 的距離,都是10丈.三人同時觀測空中氣球 D,得仰角 60°, 45°, 30°. 求氣球離地的高.



[解] 依題意,得右圖,圖中

$DE=h=$ 氣球之高.

$\angle DAE=60^\circ$, $\angle DBE=45^\circ$, $\angle DCE=30^\circ$.

於是 $AE=h\cot 60^\circ$, $BE=h\cot 45^\circ$, $CE=h\cot 30^\circ$.

依幾何定理,

$$\overline{AE}^2+\overline{CE}^2=2(\overline{AB}^2+\overline{BE}^2)$$

(△兩邊的平方和,等於第三邊上中線平方,與第三邊一半的平方和之倍.)

$\therefore\quad h^2\cot^2 60^\circ+h^2\cot^2 30^\circ=2(10^2+h^2\cot^2 45^\circ)$

即 $\dfrac{1}{3}h^2+3h^2=200+2h^2$

$$4h^2=600,\ h^2=150$$

$$\therefore\quad h=5\sqrt{6}=12.25\text{ 丈}.$$

中華民國二十四年五月初版

周

(58702B)

初中復習叢書 算學 二冊

下冊定價大洋肆角

外埠酌加運費匯費

版權所有 翻印必究

編著者 陳嶽生

發行人 王雲五 上海河南路

印刷所 商務印書館 上海河南路

發行所 商務印書館 上海及各埠

二八〇一上 通

3
75/22