現代初中教科書

幾何習題解答

陳嶽生編

商務印書館發行

現代初中教科書

幾何習題解答

陳嶽生編

商務印書館發行

目　　錄

第三編　幾何學的理論

第四編　直界形

第五編　直線同圓

第六編　比例相似形

第七編 多角形的面積

第八編 正多角形同圓

現代初中教科書

幾何習題解答

第一編　圖形的基本概念及實驗作法

目解題一、（在教科書第 5 面到第 6 面）

（1）一枝沒有削過的圓鉛筆，有幾個平面？幾條線？是直線麼？

〔答〕　有兩個平面，在筆的兩端。有兩條線，也在筆的兩端，就是兩個平面的邊界。這兩線都不是直線。

（2）課堂內的黑板有幾個面？幾條線？幾個交點？

〔答〕　要看所用的是何種黑板而定。

（a）若是砌在牆內的，那麼就祇有一個面，四條線，四個交點。

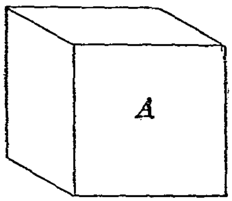
（b）若是掛的，沒有放粉筆的槽，那麼應有六個面，十二條線，八個交點。

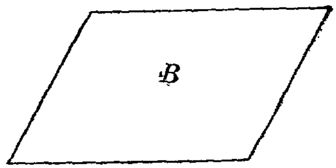
（c）若是掛的，有放粉筆的槽，那麼應有十個面，24 條線，16 個交點。

（3）黑板的面都是平面麼？線都是直線麼？

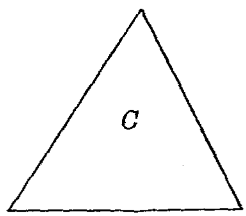
〔答〕 應當都是平面，都是直線；不過用舊的黑板，也許有曲面曲線。

（4）下面幾個圖形，那個表示立體？那個表示平面？





〔答〕 A 表示立體，B 與 C 都表示平面。



（5）一條絲線，一根頭髮，綳直了好算線份麼？

〔答〕 實際上不好算線份，明明是兩個立體，不過細微一些罷了。頭髮絲綳緊了，不計較它的粗細，勉強可以說它代表幾何學上的線份。

（6）拿鉛筆沿直尺畫一條線份。這線份同幾何上理想的線份，有什麼分別。

〔答〕 所畫的線份，無論如何細小，總有一些兒闊度；幾何上理想的線份，却是祇有長度。兩者的分別，卽在於此。

（7）你要試驗桌子的面是不是平面，用什麼法子？

〔答〕 凡在平面上的線，都是直線；換句話說，平面的邊界，都是直線。根據此理，就得決定平面的兩個方法如下：

（一）取已知的直尺一條，把它的邊在桌面上任何地位靠緊，看尺與桌面之間是否有空隙，假使有的話，那麼桌面必非

平面。假使沒有，再將直尺抵緊桌面，在桌上依某一定方向移動，如遇移到某一地位，尺與桌面之間發生空隙，那麼又可決定桌面的不平。如果直尺在全桌面上移畢，尺與桌面始終緊貼，那麼還不能斷定桌面一定是平面。必須把尺另放在別一地位，再依別一個方向移動；假使這一次移畢全桌面，尺與桌面始終緊貼，那麼方纔可以決定該桌面一定是平面。

(二)把眼睛放在桌面的一角，沿桌面望出去，如果不見有何高低，再在別一角沿桌面望出去。第二次又不見有何高低，就可決定桌面是平的。木匠常常利用這個方法。此法所根據的原理，是「光依直線進行」。

實驗題一、（在教科書第7面及第10面）

(1)在紙上隨意作四點 A, B, C, D。過其中每兩點畫一條直線。畫好後數一數，共畫成幾條直線?

〔答〕 由實地作圖，共可畫六條直線。

附註： 此題可以不必畫圖，而用代數中的組合公式，求得卽可畫的直線總數。

每兩點聯一直線，同於在四點中選擇兩點，合爲一組。選擇方法的總數，就是可畫直線的總數。依組合公式

$$ {}_4C_2=\frac{\underline{|4}}{\underline{|2}\ \underline{|4-2}}=\frac{4\times3\times2\times1}{2\times1\times2\times1}=6 $$

教師可再出五點或六點，七點的題目，命學生照樣畫線，而將線的總數預示。學生中一定有畫不完全的，因此可使學生知道理論與實驗必須相輔而行，而在算學上理論尤爲重要而可貴。

(2)畫一個線份 AB，令等於5公分。再畫一個線份 CD，

令等於 3 公分。再畫一個線份 MN, 令等於 AB, CD 之和。再畫一個線份 PQ, 令等於 AB, CD 之差。畫好後試量 MN 和 PQ 的長度。

〔答〕 MN 應長 8 公分，PQ 應長 2 公分。圖略。

附註： 此題必須命學生依 18, 19 面的作圖法來做，然後再量所作的 MN 與 PQ。學生中一定有直接畫 $MN=8$ 公分，$PQ=2$ 公分的人。他以為如此做法，直捷了當，何必兜那麼一個圈子。但是此題的本意，原是在於練習作圖方法，以求作圖的正確，所以非兜圈子不可。

目解題二、（在教科書第 12 面到第 13 面）

(1)畫一條長 9寸又一條長 7寸的線段，求他們的和同差。

〔答〕 依作圖法畫得和同差兩線段，一長 16 寸，一長 2 寸。圖略。

(2)無限直線有沒有端點？線段有幾個端點？圓有麼？

〔答〕 無限直線有兩個端點，都在無限遠的地方。線段有兩個端點，都在有限的區域之內。圓是一個端點都沒有的。

附註： 根據近世幾何學的理論，可以證明無限直線的兩個端點，在無限遠的地方相合。因此無限直線是一個無限大的圓。這樣一來，無限直線就沒有端點了。關於無限直線為圓的證明，請參閱郭鳳藻，武崇經譯近世幾何學。

(3)兩個圓會相交麼？一定會相交麼？相交於幾點？

〔答〕 兩個圓會相交的，但是並不一定相交。倘若相交，交於兩點。

(4)在地圖上離開某處一里路的地方，你用什麼法子去標他出來？

〔答〕　以某處爲圓心,照地圖上的縮尺,取代表一里的長短爲半徑,畫一個圓。這圓所經過的地方,離開某處都是一里。

(5)解釋『地震波及到一百里外』這句話在幾何學上的意義。

〔答〕　這句話在幾何學上的意義,便是「以地震中心爲圓心,一百里長爲半徑,畫一個圓,在此圓內各地,都受地震的影響」。

附註:　地球雖是球體,其表面並非平面,但是在面上畫一個半徑一百里的圓,這一小部分差不多好說是平面。如果距離很大,那麼這圓的半徑當然要小一些。

(6)給你一隻釘,一條繩,一塊石灰,你能在地上畫個圓麼?用什麼法子?

〔答〕　當然能夠的。把釘插在選定的中心,繩的一端縛在釘上,一端縛住石灰。手執石灰,將繩拉緊,繞釘一週,石灰在地上就留下圓的痕跡。

實驗題二、（在教科書第 13 面到第 14 面）

(1)隨便先作一點 O。以 O 爲圓心, 3 公分爲半徑畫一個圓。經過 O 畫一個直線與圓周一定交於兩點,一點名他叫 A, 一點名他叫 B。試量 AB 的長度。

〔答〕　AB 應當量得等於 6 公分。圖略。

附註:　AB 就是直徑;此題在使學生知道「直徑等於半徑兩倍」這一個關係。

(2)畫一個線份 AB 令其長等於 5 公分。以 A 爲圓心, 2 公分爲半徑畫一個圓。再以 B 爲圓心, $2\frac{1}{2}$ 公分爲半徑畫一個圓。此兩圓相交麼?

〔答〕　此兩圓應當不相交。圖略。

附註：　AB 是兩圓的圓心距離。此題目的，在於使學生知道兩圓的圓心距離，大於兩圓半徑和，那麼兩圓不相交。教者可以向學生說明，此理到後來可以證明。

（3）畫一個線份 AB 令其長等於 5 公分。以 A 為圓心，3 公分為半徑畫一個圓。再以 B 為圓心，$3\frac{1}{2}$ 公分為半徑畫一個圓。此兩圓相交麼？

〔答〕　此兩圓應當相交。圖略。

附註：　此題目的，在於使學生由實驗知道，兩圓的圓心距離，小於兩圓的半徑和，那麼兩圓相交。這是也可以證明的。

（4）畫一個線份 AB，令其長等於 5 公分。以 A 為圓心，2 公分為半徑，畫一個圓。再以 B 為圓心，3 公分為半徑，畫一個圓。此兩圓相交麼？

〔答〕　此兩圓不相交，但是互相接觸於一點。

附註：　此題目的，在於使學生由實驗知道，兩圓的圓心距離，等於兩圓的半徑和，則兩圓相切。這是也可以證明的。

實驗題三、（在教科書第 21 面到第 23 面）

（1）任意畫一個線份 AB，過 A 再畫一個線份 AC，要令$\angle BAC=50°$。

〔答〕　利用量角器，照第一種方法就可畫得$\angle BAC=50°$。圖略。

附註：　此題命全班學生做好之後，再教他們把所畫的角，互相調換，用量角器再量一下，以驗他們作圖的準確度。

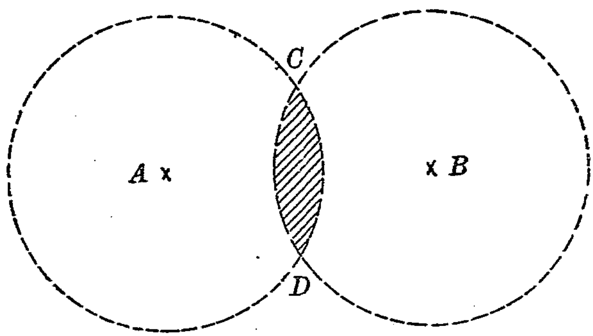
（2）任意畫兩個角 $\angle AOB$，$\angle CPD$。再畫一個角$\angle MQN$ 要令等於 $\angle AOB$，$\angle CPD$ 之和。再畫一個角 $\angle KRL$ 要令

等於 $\angle AOB$, $\angle CPD$ 之差。畫好後用量角器量他們的度數。

〔答〕 依照教科書 20, 21 兩面的作圖方法，就可畫得所要的角。圖略。

附註： 所畫的任意兩角，是不用量角器畫成的，但是學生往往先用量角器畫兩隻整度數的角，然後再畫兩角的和差。這樣一來，就失去此題的本意了。此題目的，在於使學生練習角的幾何作圖法，作好之後，題中說用量角器去量一下，這並不是主要之點。所以教者務須留意。

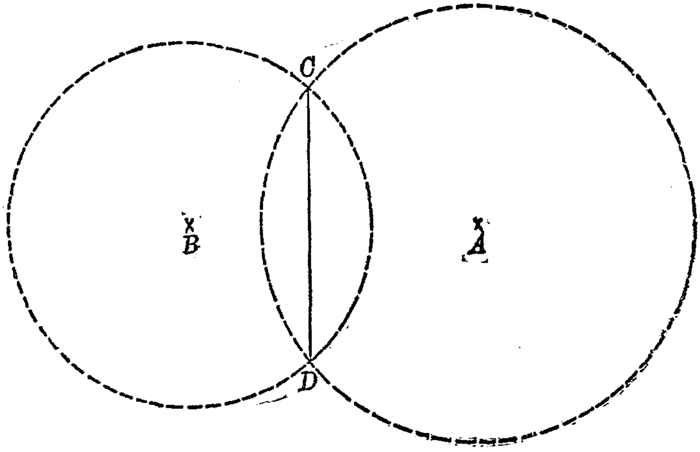
(3)兩隻牛，繫在相距 66 呎的兩株樹上，都是用 39 呎長的繮繩繫住的。所以他們只能各在那半徑 39 呎的圓內吃草。試畫一圖，表示這兩牛都能吃得着草的公共區域。(用一公釐代表一呎畫圖)。



〔答〕 如上圖，A 與 B 代表兩樹，相隔 66 呎(本圖一公釐代表 2 呎)。以 A, B 爲圓心，39 呎(本圖爲 19.5 公釐)爲半徑，畫兩圓交於 C, D。橄欖形 CD，就是兩牛都吃得着草的區域。

(4)海口對岸，各有炮台，相隔 16 哩遠。甲台的炮可以射到 12 哩遠，乙台的祇能射到 10 哩。畫圖表示兩炮都打

得到的地方。量這個圖形，求出敵艦駛過火線時，所經最短的距離。（用 3 公釐代表 1 哩作圖）。



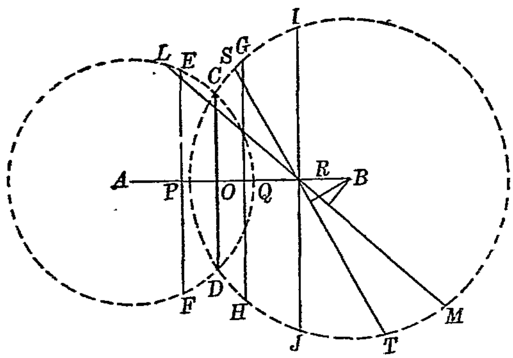
〔答〕 如上圖，A 與 B 代表甲乙兩炮台，相距 16 哩；以 A 為圓心，12 哩為半徑，畫一圓，這便是甲台大炮所能打到的範圍；以 B 為圓心，10 哩為半徑，畫一圓，這便是乙台大炮所能打得到的地方。兩圓相交於 CD，這 CD 便是兩炮的火線最短距離。量 CD，約為 45 公釐，所以敵艦駛過火線時，所經最短距離約為 15 哩。

附註： CD 是最短火線，從圖中固然可以一望而知，但是教者應向學生說起，將來可以證明 CD 是最短火線，證法如下：

(一)先下火線的定義，為與 AB 相交，而為二圓或一圓所截的線份。

(二) $CD\perp AB$，其與 AB 的交點為 O；此外 AB 的垂

線，以二◯為界者，如 EF, GH, IJ, 都比 CD 大。因為在 O 點左側垂直於 AB 的火線，是小圓的弦，而與圓心的距離短於 OA, 所以大於 CD; 在 O 點右側垂直於 AB 的火線，是大圓的弦，與圓心的距離短於 OB, 所以大於 CD。



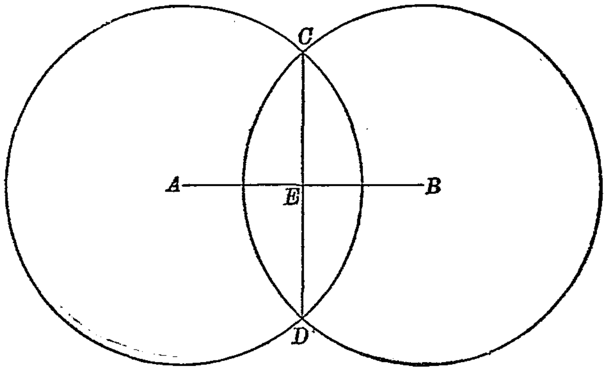
(三)經過AB上同一點的火線，垂直於 AB 的最短。例如 IJ, ST, LM, 都過 R 點，但 IJ 離 B 最遠，所以最短 (LM =大圓弦＋小圓內一段，當然更長)。

(四)從(二)與(三)，根據不等量公理，卽可證明 CD 是最短的火線。

(5)畫一 4 公分長的線份 AB。以 A, B 兩點各做圓心，3 公分長做半徑，畫兩個圓交於兩點 C, D。聯線份 CD, 與 AB 交於 E。畫好後，試量 AE, BE 的長度。

〔答〕作圖如下，量得 AE 應長 2 公分，BE 亦長 2 公分，卽 $AE=EB$。

附註： 此題目的，在於先引起學生平分線段的觀念，以為第 35 節作圖十一的預備，所以第 6 題接着教學生再來一次普遍的實驗。



(6)隨便畫一個線份 AB。以 A, B 兩點各做圓心，和 AB 差不多的長做半徑，畫兩個圓交於兩點 C, D。聯線份 CD, 與 AB 交於 E。畫好後試量 AE, BE 的長度。比較他們的大小。再量 $\angle AEC$, $\angle BEC$, $\angle AED$, $\angle BED$ 各角的度數。

〔答〕 依法畫圖，AE 的長度與 BE 的長度應相等。四角都等於 $90°$。

附註： 這題就是平分線段法，且使學生由實驗知道 CD 是 AB 的中垂線，可命學生作不同的線份，多實驗幾次。不過教者須告訴學生，此理將來可以證明。還要一點要注意，所畫的線份 AB, 命學生切勿預定他的長度，否則就要失去實驗的本意，而且要失去此作圖法的本意了。

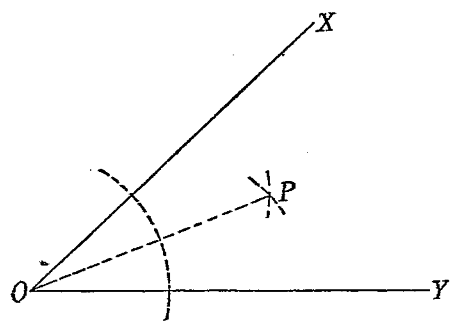
(7)畫一個 $60°$ 的角 $\angle AOB$。令 OA, OB 各等於 2 公分。以 A, B 兩點各做圓心，2 公分做半徑畫兩個弧，令交於一點 P。聯線份 OP。畫好後試量 $\angle AOP$, $\angle BOP$ 的度數。

〔答〕 畫好後量得兩角的度數，各為 $30°$。圖略。

附註：　此題與(8)題,目的在於使學生發生平分角的觀念,並爲第 36 節作圖十二的預備。

(8)隨便畫一個 $\angle XOY$。以 O 做圓心,任意長做半徑,畫一個圓交 OX 於 A, OY 於 B。以 A, B 兩點各做圓心,和 AB 差不多長做半徑畫兩個弧,令交於一點 P。聯線份 OP。畫好後試量 $\angle XOP$, $\angle YOP$ 的度數,比較他們的大小。

〔答〕　畫好後,量得兩角相等。圖如右。



附註：　XOY 角不可預定度數,否則就要失去此題的本意,因而失去作法的本意了。這是一般的二等分角法,教者須命學生多試幾次,而且也要告訴他們,將來可以證明此法的正確不誤。量得的 $\angle XOP$ 與 $\angle YOP$ 的度數,不一定是整數。

實驗題四、（在教科書第 26 面到第 27 面）

(1)隨意畫兩個直線 AB, CD, 令相交於 O。畫好後,量 $\angle AOC$, $\angle BOC$, $\angle AOD$, $\angle BOD$ 各角的度數,比較 $\angle AOC$ 和 $\angle BOD$ 的大小, $\angle AOD$ 和 $\angle BOC$ 的大小。

〔答〕　$\angle AOC=\angle BOD$, $\angle AOD=\angle BOC$。

附註：　此題引起對頂角相等的觀念,爲下文第 87 節的預備。

(2)隨意畫一個角 $\angle AOB$。再畫一個角 $\angle CPD$, 令

$\angle CPD$ 和 $\angle AOB$ 互爲補角。再畫一個角 $\angle EQF$, 令 $\angle EQF$ 和 $\angle AOB$ 互爲餘角。畫好後，量 $\angle AOB$, $\angle CPD$, $\angle EQF$ 各角的度數。

〔答〕 作一平角 $\angle CPS$, 減去 $\angle AOB$, 就得 $\angle AOB$ 的補角 $\angle CPD$。

作一直角 EQR（用量角器或作圖十三的方法），減去 $\angle AOB$, 就得 $\angle AOB$ 的餘角 $\angle EQF$。

量得的結果，$\angle AOB+\angle CPD=180°$，$\angle AOB+\angle CPD=90°$。

附註： 此題切不可先量後畫，因爲先量後畫，又要失去其本意了。此題的本意有三：

(一)兩角互爲補角，則此角等於平角減去他角。

(二)兩角互爲餘角，則此角等於直角減去他角。

(三)一直線爲外邊的二鄰角，其和爲二直角。

以上三項，第三項尤爲重要，所以下面第4題再來一次實驗。此題又爲第(5)題的預備。

(3)畫 $\angle AOB$ 令等於 70°。從 O 點再向角外畫線份 OC, 令 $\angle BOC$ 等於 110°。畫好後試看 AOC 是直線還是折線。

〔答〕 AOC 是直線。

附註： 此題目的，使學生明白兩鄰角互爲補角，則其外邊成一直線。所以在畫 OC 時候，切不可把 AO 延長。一定要在 BO 線份上畫 $\angle BOC=110°$，再用直尺試驗 AOC 是不是直線。

(4)隨意畫一個直線 AB。從 AB 上任意一點 O, 隨意畫一線份 OC。畫好後量 $\angle AOC$, $\angle COB$ 的度數。 $\angle AOC$

$+\angle COB$ 是幾度？ $\angle AOC$, $\angle COB$ 互相關係怎樣？

〔答〕 先畫後量，得 $\angle AOC+\angle COB=180°$，所以 $\angle AOC$ 與 $\angle COB$ 互爲補角。

(5)畫兩個相等的角 $\angle AOB$, $\angle A'O'B'$。再畫 $\angle AOB$ 的補角 $\angle CPD$, 餘角 $\angle EQF$。再畫 $\angle A'O'B'$ 的補角 $\angle C'P'D'$, 餘角 $\angle E'Q'F'$。畫好後，量各角的度數。比較 $\angle CPD$ 和 $\angle C'P'D'$ 的大小，又比較 $\angle EQF$ 和 $\angle E'Q'F'$ 的大小。

〔答〕 $\angle CPD=\angle C'P'D'$; $\angle EQF=\angle E'Q'F'$。

附註： 此題目的，使學生從實驗知道下面的二種關係：

(一)同角或等角的補角相等。

(二)同角或等角的餘角相等。

(6)隨意畫 $\angle AOB$, $\angle CPD$ 兩個角。比較他們的大小。再畫 $\angle AOB$ 的等分線 OM, $\angle CPD$ 的等分線 PN。畫好後量 $\angle AOM$, $\angle MOB$, $\angle CPN$, $\angle NPD$ 各角的度數。比較他們的大小。

〔答〕 (一) $\angle AOM=\angle MOB$; $\angle CPN=\angle NPD$。

(二)假使 $\angle AOB>\angle CPD$。

$$\text{則}\quad \left.\begin{matrix}\angle AOM\\ \angle MOB\end{matrix}\right\}>\left\{\begin{matrix}\angle CPN\\ \angle NPD\end{matrix}\right.。$$

附註： 此題目的，在使學生由實驗引起下面的概念：即 $a>b$，則 $\frac{a}{2}>\frac{b}{2}$。

(7)畫兩個相等的角 $\angle AOB$, $\angle CPD$。再畫他們的等分線 OM, PN。畫好後比較各角的大小。

〔答〕 各角相等。

附註： 此題目的，使學生由實驗知道下面的公理：等量

的一半相等。

(8)畫一個隨便大小的 $\angle AOB$, 令 $OA=3$ 公分, $OB=2$ 公分。延長 AO 至 C, 令 $OC=OA$。延長 BO 至 D, 令 $OD=OB$, 聯 AB, CD。畫好後量 AB, CD 之長。再量 $\angle OAB$, $\angle OBA$, $\angle OCD$, $\angle ODC$ 的度數。比較他們的大小。

〔答〕 $AB=CD$; $\angle OAB=OCD$; $\angle OBA=\angle ODC$。

附註： 此題目的,使學生由實驗先培植對應線角相等的觀念,為後來講述全等三角形的預備。教師可向學生說明,各對線角的相等,後面可以證明。

目解題三、(在教科書第 27 面到第 28 面)

(1)直角是平角的幾分之幾?是週角的幾分之幾?

〔答〕 直角是平角的二分之一;是週角的四分之一。

(2)一直角有幾度?直角的補角是什麼角?

〔答〕 一直角有 90 度。直角的補角也是直角。

附註： 一直角有 90 度,這是很正確的答案。但是有 90 度的是一直角,却非直角的定義,因為這兩句話變成互相循環了。幾何學上的定義,其實無論何種定義,都不可以循環的。直角的定義,說它是週角的四分之一,或平角的二分之一,都勉強可以;真正的定義,是二直線所成相等鄰角之一。初學者對於此點往往不明瞭,教者宜加糾正,去其誤解。

(3) 72° 的角是鈍角還是銳角?銳角的補角是什麼角?

〔答〕 72° 的角是銳角。

銳角的補角是鈍角。

(4) 135° 的角是不是鈍角?鈍角的補角是什麼角?

〔答〕 135° 的角是鈍角。

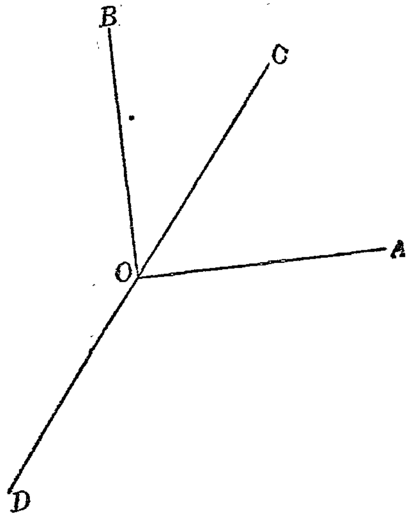
鈍角的補角是銳角。

(5) 175°的角是不是優角? 197° 的角是鈍角還是優角?

〔答〕 175° 的角不是優角。197° 的角是優角。

(6) $22^\circ 17' 5''$ 應當怎樣讀法?

〔答〕 22 度 17 分 5 秒。



(7) $\angle AOB$ 是直角，OC 是他的平分線。OD 同 OC 成一直線，那麽 $\angle AOD$ 有幾度? $\angle BOD$ 同 $\angle AOD$ 有什麽關係?

〔解〕 $\because$ OC 平分 $\angle AOB$，而 $\angle AOB=90^\circ$，$\therefore$ $\angle AOC=45^\circ$。但 OD 與 OC 成一直線，$\therefore \angle AOD+\angle AOC=180^\circ$，卽 $\angle AOD=135^\circ$。〔答〕

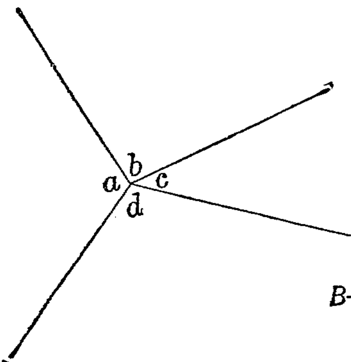
又 $\angle BOD=135^\circ$，$\therefore$ $\angle AOD=\angle BOD$。〔答〕

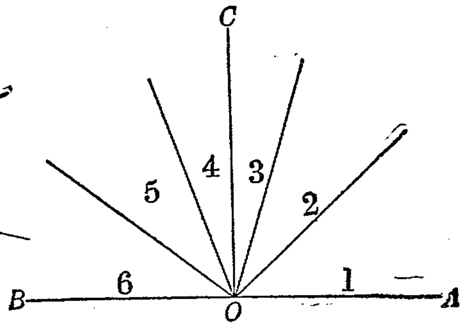
(8) $\angle a$ 同 $\angle c$ 是互爲補角，那麽 $\angle b$ 同 $\angle d$ 有什麽關係?

〔答〕 $\angle b$ 同 $\angle d$ 也是互爲補角，$\because a+b+c+d=360^\circ$。

(9) 假使 $\angle AOB$ 是平角，$\angle 1=\angle 2=\angle 3=\angle 4=\angle 5=\angle 6$，各等於幾度? 又問 $\angle AOC$ 是什麽角?

〔答〕 各等於 30°，$\angle AOC$ 是直角。





(10)時鐘在兩點,三點,四點鐘時,兩針各成什麽角?

〔答〕　(一)在兩點鐘時,兩針成銳角。

(二)在三點鐘時,兩針成直角。

(三)在四點鐘時,兩針成鈍角。

(11)時鐘長針每走十分鐘,轉過幾度的角?

〔解〕　時鐘在一點鐘內,轉過一個週角，即 360°。一點鐘 =60 分 ∴ 每分鐘長針轉過 6°。每走十分鐘,長針轉過 60°。〔答〕

(12)時鐘兩針在幾點鐘成平角,幾點鐘成直角,幾點鐘成銳角,幾點鐘成鈍角?

〔答〕　(一)兩針在六點鐘成平角。

(二)兩針在三點鐘,九點鐘成直角。

(三)兩針在一點鐘,二點鐘,十點鐘，十一點鐘成銳角。

(四)兩針在四點鐘,五點鐘,七點鐘，八點鐘成鈍角。

實驗題五、（在教科書的第 35 面到第 37 面）

（1）隨便畫一個 $\triangle ABC$。再畫他的三個中線。（先用作圖十一的方法，求得各邊的中點。）

〔答〕 求得 BC 的中點是 L, CA 的中點是 M, AB 的中點是 N 之後，聯 AL, BM, CN 就是。圖略。

附註：「隨便畫一個 $\triangle ABC$」這句話，初學往往不明白，他們總是畫一個直角△，或等腰△，所以教者必須力使學生注意，要畫一個不等邊三角形，並且向他們說明；畫了等腰△或直角△，其中的中線，等分角線，高，是要併合或不見的。三中線相交於一點的定理，固然此時無法可證，但是學生既畫三個中線，則如作圖準確，必然交於一點無疑。此一事實，既已呈露，自以向學生說破爲妥，而且可以教他們利用此性質，以驗作圖的是否準確。中線這個名詞，往往有已學幾何二三年的學生（當然是不用功的學生），不知其意義。本題的意思，就是使學生由實地作圖，認識中線的定義。此外還有一點，即三中線分別稱謂如下：AL 是 BC 上的中線，BM 是 CA 上的中線，CN 是 AB 上的中線，都以邊爲主。此點亦須命學生記得。

（2）隨便畫一個 $\triangle ABC$。再畫他的三個等分角線。（用作圖十二的方法。）

〔答〕 作得三個等分角線 AR, BS, CP, 相交於一點。圖略。

附註：所畫△，必須不等邊。三個等分角線，相交於一點的事實，也須向學生說明，並向他們說，到後來是可用理論方法證明的。這一個事實，可以利用它來查驗作圖的是否準確。因爲作三個等分角線，最不容易準確，十個人到有九個人

的圖，三條線不能交於一點。由此可使學生注意，實驗的最重要的要素，是準確。命學生多畫幾個圖，畫到準確為止。

(3)作一個 $\triangle ABC$，令 $BC=3$ 公分，AC，AB 各等於 4 公分。這是一個什麼三角形？畫好後試量各角的度數。比較他們的大小。

〔答〕 這是一個等腰三角形。$\angle ABC=\angle ACB$。

附註： 此題的本意，在使學生由實驗記牢等腰 $\triangle$ 的定義，並得到下面的暗示：

等腰$\triangle$的底角相等。

所以在學生們未曾把圖畫好以前，不要先說穿。

(4)作一個 $\triangle ABC$，令 $BC=5$ 公分，AC，AB 各等於 2 公分。結果怎樣？

〔答〕 畫不成三角形。

附註： 此題目的，在使學生得到下面的暗示：

$\triangle$的兩邊和，大於第三邊。

(5)隨便作一個 $\angle AOB$，令 $OA=OB$。聯線份 AB，成 $\triangle OAB$。這是一個什麼三角形？作 $\angle AOB$ 的等分線交 AB 於 C。OC 是 $\triangle OAB$ 的什麼？畫好後量 AC，BC 的長。比較他們的大小。

〔答〕 這是一個等腰三角形。(圖略)

OC 是 $\triangle OAB$ 頂角的等分角線，又是底邊上的高。

$AC=BC$。

附註： 此題目的，在使學生由實驗得到下面的暗示：

等腰$\triangle$頂角的等分線，是底邊的中垂線。

(6)隨便作一個 $\angle AOB$。令 $OA=OB$。聯線份 AB。作 AB 的中點 M。聯線份 OM。OM 是 $\triangle OAB$ 的什麼。畫好後量

$\angle AOM$, $\angle BOM$ 的度數。比較他們的大小。再量 $\angle AMO$, $\angle BMO$ 的度數。$\angle AMO$, $\angle BMO$ 是什麼角。OM 對於 AB 有什麼關係?

〔答〕 OM 是 $\triangle OAB$ 底邊上的中線。

$\angle AOM=\angle BOM$。$\angle AMO=90°$, $\angle BMO=90°$,

∴ 兩角都是直角。OM 是 AB 的中垂線。

附註: 此題目的,在於使學生由實驗得到下面的暗示:等腰△底邊上的中線,平分頂角,而且垂直於底邊。

實驗題六、（在教科書第 40 面到 41 面）

(1)隨便畫一個銳角三角形。再作他的三個高。

〔答〕 從三頂點各向對邊引垂線,用作圖十五的方法。三個高都在△之內,而且交於一點。圖略。

附註: 初學對於△的三個高, 往往弄不清楚,有的將高與中線混而爲一,有的隨便畫一條充數。銳角三角形的高,因爲都在△之內,他們還容易懂些。鈍角三角形的高,因爲有兩條都在△之外, 須把夾鈍角的兩邊延長了再畫, 所以他們更弄不清楚。本題與下題,目的就在於使學生從實地作圖,確切明瞭高的定義。教者應命學生特別注意本題與下題。

(2)隨便畫一個鈍角三角形。再作他的三個高。

〔答〕 從鈍角頂點先向對邊作一垂線,此線在△之內。從鈍角頂點向外延長夾鈍角的二邊,然後由其他二銳角頂點,作延長線上的垂線,即得三個高。

(3)畫一個 $\triangle ABC$, 令 $AB=2\frac{1}{2}$ 公分, $AC=3$ 公分, $BC=3\frac{1}{2}$ 公分。過 A 作 BC 的平行線 l_1。過 B 作 AC 的平行線 l_2。過 C 作 AB 的平行線 l_3。l_1, l_2 交於 C'。l_2, l_3

交於 A'。l_1, l_3 交於 B'。畫好後量 $A'B'$, $A'C'$, $B'C'$ 之長。

〔答〕 照題意用作圖十六的方法,將圖畫好後(圖略),量得 $A'B'=5$, $A'C'=6$, $B'C'=7$。

附註: 此題目的,在使學生由實驗得到下面的暗示:

平行四邊形的對邊相等。

(4)畫一個 $\triangle ABC$, 令 $AB=5$ 公分, $AC=6$ 公分, $BC=7$ 公分。再取 AB 的中點 C', AC 的中點 B', BC 的中點 A'。聯 $A'B'$, $A'C'$, $B'C'$。畫好後量 $A'B'$, $A'C'$, $B'C'$ 之長。試驗 $A'B'$ 與 AB 是不是平行, $A'C'$ 與 AC 是不是平行, $B'C'$ 與 BC 是不是平行。

〔答〕 依照題目,將圖畫好後,量得

$A'B'=2.5$ 公分, $A'C'=3$ 公分, $B'C'=3.5$ 公分。

照第 47 節的方法, 驗得

$A'B' \parallel AB$, $A'C' \parallel AC$, $B'C' \parallel BC$。

附註: 此題目的,在使學生由實驗得到下面的暗示:

△兩邊中點的聯線,與底邊平行,而且等於底邊的一半。

實驗題七、(在教科書第 44 面)

(1)作 $\triangle ABC$, 令 $AB=8$ 公分, $AC=9$ 公分, $BC=10$ 公分。在 AB 上取一點 M, 令 $MB=2$ 公分。過 M 作 BC 的平行線交 AC 於 N。畫好後量 AN, NB, 及 MN 的長。求 $AM:MB$, $AN:NC$, $AM:AB$, $AN:AC$, $MN:BC$, $AM:AN$, $AB:AC$ 各比之值。有相等的比麼?試把相等的比寫成比例式。

〔答〕 照題意畫圖(圖略), 量得

$AM:MB=3$; $AN:NC=3$; $AM:AB=\frac{3}{4}$;

$AN:AC=\frac{3}{4}$; $MN:BC=\frac{3}{4}$; $AM:AN=\frac{8}{9}$;

$AB:AC=\frac{8}{9}$。

其相等各比，列式如下：

1. $AM:MB=AN:NC$。

2. $AM:AB=AN:AC=MN:BC$。

3. $AM:AN=AB:AC$。

附註：本題目的，在使學生由實驗引起比例線段的概念，並得到下面的暗示，以為學習作圖十七的預備：

三角形底邊的平行線，截其他二邊所得的線份，彼此對應成比例，而小△與大△的三邊，也是對應成比例。

（2）隨意作一個 $\triangle ABC$。隨意在 AB 上取一點 M。過 M 作 BC 的平行線交 AC 於 N。畫好後照第1題同樣求各比之值，同樣把相等的比寫成比例式。

〔答〕與前題同。圖與量得之值均從略。

附註：這題目的與前題同，不過是一般的定理，用實驗來證明罷了。

（3）隨意作一個 $\triangle ABC$。隨意在 AB 上取兩點 K, M。過 K 作 BC 的平行線交 AC 於 L。過 M 作 BC 的平行線交 AC 於 N。畫好後量圖中所有各線份之長。（圖中共有15個線份）寫出各組比例式。

〔答〕照題畫圖，量得各組比例如下：（圖略）

1. $AK:AL=AM:AN=AB:AC=KM:LN$
$=KB:LC=MB:NC$。

2. $AK:AM=AL:AN=KL:MN$。

3. $AK:AB=AL:AC=KL:BC$。

4. $AK:KM=AL:LN$。

5. $AK:KB=AL:LC$。

6. $AK:MB=AL:NC$。

7. $AM:AB=AN:AC=MN:BC$。

8. $AM:KM=AN:LN$。

9. $AM:KB=AN:LC$。

10. $AM:MB=AN:NC$。

11. $AB:KM=AC:LN$。

12. $AB:KB=AC:LC$。

13. $AB:MB=AC:NC$。

14. $KM:KB=LN:LC$。

15. $KM:MB=LN:NC$。

16. $KB:MB=LC:NC$。

附註： 以上共三十六組比例式，此三十一數，可從組合公式推得如下：

$$
\begin{aligned}
&{}_6C_2\times 2+3\times 2\\
=&\frac{\underline{|6}\times 2}{\underline{|2}\;\underline{|6-2}}+6=6\times 5+6=36。
\end{aligned}
$$

(4)隨意作一個 $\triangle ABC$。作 $\angle A$ 的等分線交 BC 於 D。畫好後量 AB, AC, BD, DC 之長。看他們是不是成比例。

〔答〕 成比例如下：(圖略)

$BD:DC=AB:AC$。

附註： 此題暗示學生以下列定理：

△頂角的平分線，內分底邊成兩線份，與其他二邊對應成比例。

實驗題八、 (在教科書第 46 面到第 47 面)

(1)畫一個直角 $\angle BAC$ (引用作圖十三)。且令 $AB=3$ 公分, $AC=4$ 公分。聯 BC。再從 A 作 BC 的垂線 AD 交 BC 於 D。畫好後量 BC, AD, BD, CD 之長。有沒有成連比例的三線份?

〔答〕　畫好後(圖略),量得

$BC=5$ 公分, $AD=2.4$ 公分, $BD=1.8$ 公分, $CD=3.2$ 公分。

有成連比例的三組線份如下:

1. $BD:AD=AD:CD$。
2. $BD:AB=AB:BC$。
3. $CD:AC=AC:BC$。

附註:　此題目的,使學生由實驗先察知直角△中的比例線段,爲他日習比例中項作法,及畢氏定理別證的預備。

(2)隨便畫一個直角三角形 ABC。從直角頂 A 作斜邊 BC 的垂線, 交 BC 於 D。畫好後量 BC, AD, BD, CD 之長。試看 AD 是不是 BD, CD 的比例中項? AB 是不是 BD, BC 的比例中項? 有沒有 CD, BC 的比例中項?

〔答〕　畫好後(圖略),量得各線份的長(從略),知道:

1. AD 是 BD, CD 的比例中項。
2. AB 是 BD, BC 的比例中項。
3. CD, BC 的比例中項是 AC。

附註:　此題是前題的一般定理,由學生用實驗來證明。

(3)隨意畫一個圓。再隨意畫一個弦 AB。取 AB 的中點 M。過 M 點隨便再畫一個弦 CD。畫好後量 AM, CM, DM 之長。看出他們的關係。

〔答〕　畫圖量各線份(圖與量得之數值從略)後;知

$CM\times DM=\overline{AM}^2=AM\times BM$。

(4)隨意畫一個圓。再隨意畫兩個弦 AB, CD 令交於 M。畫好後量 AM, BM, CM, DM 之長。看出他們的關係。

〔答〕 他們的關係如下:(圖略)

$AM\times BM=CM\times DM$,

或 $AM:CM=DM:BM$。

附註: 本題與上題，暗示學生圓內交弦比例線段的關係,以為他日習此定理的預備。

實驗題九、 (在教科書第 48 面)

(1)隨意畫一個圓。隨意畫他的半徑 OA。過 A 作直線 XAY 令 $\angle OAY=60°$。試看 XY 是不是圓的切線。再過 A 作直線 MAN 令 $\angle OAN=120°$。試看 MN 是不是圓的切線。

〔答〕 都不是切線(圖略)。

附註: 此題使學生確認切線與切點半徑的關係。

(2)隨意畫一個圓。從圓周上任意一點 A 作切線 AP 令 $AP=3$ 公分。過 P 隨意作一個割線交圓於 B, C 兩點。畫好後量 PB, PC 之長。PA, PB, PC 三線份是不是成連比例?

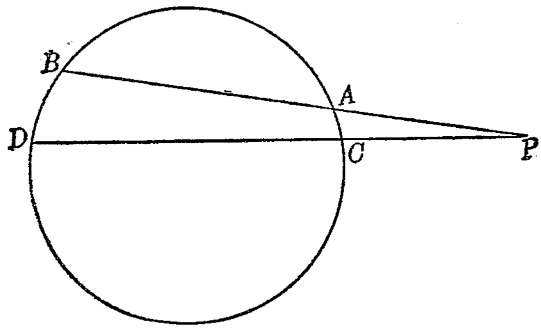
〔答〕 成連比例 $PB:PA=PA:PC$ (圖略)。

附註: 此題使學生由實驗引起切割比例線份的概念,為他日習此定理的預備。

(3)隨意畫一個圓。從圓外任意一點 P, 隨意作兩個割線,一個交圓於 A, B, 又一個交圓於 C, D。畫好後量 PA, PB, PC, PD 之長。四個線份有什麼關係?

〔答〕 如題意,作得下圖。量 PA, PB, PC, PD 後(量

得之值從略)，可見四線份有關係如下：



$$PA \times PB = PC \times PD, \text{ 或 } PA : PC = PD : PB。$$

附註：　此題暗示學生交割比例線份的定理。

目解題四、（在教科書第 48 面到第 49 面）

(1)經過圓外一點，有幾個切線？有幾個割線？能不能畫一個直線，既非切線又非割線？

〔答〕　有兩個切線。有無數割線。能畫一個直線，既非切線又非割線。

(2)經過圓周上一點，有幾個切線？有幾個割線？能不能畫一個直線，既非切線又非割線？

〔答〕　有一條切線。有無數條割線。不能畫一條直線，既非切線，又非割線。

(3)經過圓內一點，有幾個切線？幾個割線？

〔答〕　沒有切線。無數割線。

目解題五、（在教科書第 50 面到第 51 面）

(1)凡正方形都是長方形麼？調轉來說，凡長方形都是正

方形麽?

〔答〕　凡正方形都是長方形(長闊相等的長方形)。但是調轉來說,長方形却不是正方形。

附註:　幾何學上,其實一切科學上,人事上的言語,有些可以調轉來說,有些不能調轉來說。本題就屬於後面的一種。教者可另舉數例,先使學生得一些觀念,以爲將來習逆定理的預備。

(2)凡正方形同長方形都是平行四邊形麽?調過來說,對不對?

〔答〕　凡正方形同長方形都是平行四邊形。調過來說就不對了。

實驗題十、(在教科書第 51 面到第 52 面)

(1)畫一個 $\angle BAD$ 令 $AB=3$ 公分, $AD=2$ 公分。過 B 作 AD 的平行線,過 D 作 AB 的平行線,兩線交於 C。畫好後量 BC, DC 的長。

〔答〕　畫好後(圖略),量得 $BC=2$ 公分, $DC=3$ 公分。

附註:　本題暗示平行四邊形對邊相等。

(2)隨意畫一個角 $\angle BAD$, AB, AD 隨意長。過 B 作 AD 的平行線 BC。且令 $BC=AD$。聯 CD。試看 CD 和 AB 是不是平行。

〔答〕　畫好後(圖略),CD 和 AB 應當平行。

附註:　本題由實驗暗示下面的定理:

四邊形的一雙對邊平行且相等,則此

四邊形如平行四邊形。

(3)隨意畫一個四邊形 $ABCD$。於各邊上順次取中點 E, F, G, H。聯 EF, FG, GH, HE。畫好後量 EF, FG, GH, HE 各線份之長。再看 $EFGH$ 是不是平行四邊形。

〔答〕 畫好後(圖略),量得 $EF=GH, FG=HE;$ 而且察得 $EFGH$ 是平行四邊形。

附註: 本題由實驗暗示下面的定理:

四邊形若有兩雙對邊相等,則爲平行四邊形。

(4)聯前題中的 EG, FH, 名他們的交點爲 O。量 OE, OF, OG, OH 的長。

〔答〕 $OE=OG, OF=OH$。

附註: 本題由實驗暗示下列定理:

平行四邊形的對角線互相平分。

(5)畫一個平行四邊形 $ABCD$, 令 $\angle A$ 是銳角。量 $\angle A, \angle B, \angle C, \angle D$ 的度數。從 D 作 AB 的垂線 DE 交 AB 於 E。從 C 作 AB 的垂線 CF 交 AB 的延線於 F。比較 DE, CF 的大小。比較 AE, BF 的大小, $\triangle ADE, \triangle BCF$ 是不是全等形?

〔答〕 依題畫圖(圖從略),量得

$$\angle A=\angle C, \quad \angle B=\angle D;$$

$$\angle A+\angle B=\angle B+\angle C=\angle C+\angle D=\angle D+\angle A=180°。$$

$AE=BF$, $\triangle ADE$ 與 $\triangle BCF$ 是全等形。

附註: 本題由實驗暗示下列各定理:

(1) $\square$ 對角相等,鄰角互爲補角。

(2)兩個直角 $\triangle$ 有一銳角一斜邊(或一邊等),即全等。

第二編　面積體積的量法

目解題六、（在教科書第 54 面）

（1）一個矩形的兩鄰邊等於 4 公分及 $2\frac{1}{2}$ 公分，他的面積有多大？

〔答〕 10 平方公分。

（2）一個正方形的每邊都是 5 公分，他的面積有多大？

（答） 25 平方公分。

（3）一個矩形的兩鄰邊是 2 公分及 8 公釐，他的面積是幾平方公分？是幾平方公釐？

〔答〕 1.6 平方公分 ＝160 平方公釐。

（4）一平方公分等於幾平方公釐？

〔答〕 100 平方公釐。

實驗題十一、（在教科書第 57 面）

（1）隨意畫一個平行四邊形，量出他的面積。

〔提示〕 先量一邊的長，再量該邊上的高，依 §62 求面積。

（2）隨意畫一個三角形，量出他的面積。

〔提示〕 先量底邊的長，再量底邊上的高，依 §63 求面積。

（3）隨意畫一個梯形，量出他的面積。

〔提示〕 先量上底與下底，再量兩底間的高，於是 $\frac{1}{2}\times$高$\times$（上底＋下底）＝梯形面積。

（4）隨意畫一個五角形，量出他的面積。

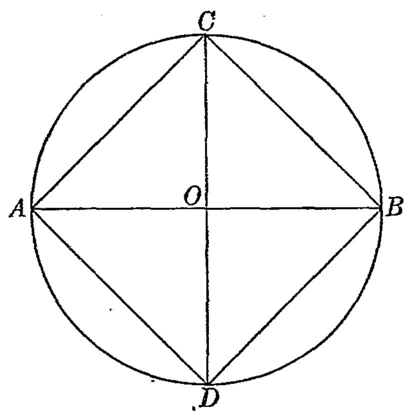
〔提示〕 照 §64 的方法。

(5)畫一個 $\triangle ABC$, 令 $AB=2.6$ 公分，$AC=2.8$ 公分，$BC=3$ 公分。求他的面積。

〔答〕 3.36 平方公分。

實驗題十二、（在教科書第 59 面到第 60 面）

(1)畫一個圓令半徑的長爲 2 公分。求出他的面積。再經過圓心 O, 畫兩個垂直直徑 AOB, COD。聯 AC, CB, BD, DA。$ACBD$ 是正方形。求他的面積。



〔解〕 命 A 代表圓面積平方公分數，則

$A=\pi r^2=3.1416\times 2^2$

$=3.1416\times 4=12.5664$。

$\therefore$ 此圓面積約爲12.57 平方公分。〔答〕

又因 CD 垂直於 AG,

$\therefore$ CO 是 $\triangle ABC$ 的高，DO 是 $\triangle ABD$ 的高。$AB=4, CO=DO=2$,

$\therefore$正方形$ACBD=\triangle ABC+\triangle ABD$

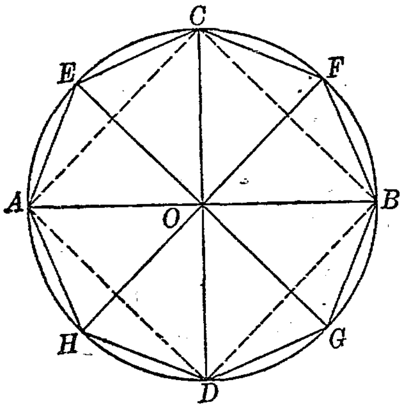
$=\frac{1}{2}\times 4\times 2+\frac{1}{2}\times 4\times 2=8$。

〔答〕 正方形 $ACBD$ 的面積是 8 平方公分。

(2)在上圓內再畫四個半徑 OE, OF, OG, OH, 等分 $\angle AOC$, $\angle COB$, $\angle BOD$, $\angle DOA$。聯 AE, EC, CF, FB, BG, GD, DH, HA。$AECFBGDH$ 是正八角形。求他的面積。

〔答〕 量得約 11.3 平方公分。

附註： 此八角形可以推算如下：$\overline{BC}^2=\overline{OB}^2+\overline{OC}^2$



$=4+4$。

$\therefore\ BC=\sqrt{8}$

$=2\sqrt{2}$。

四邊形 $OBFC$

$=\frac{1}{2}BC\times OF$

$=\frac{1}{2}\times 2\sqrt{2}\times 2$

$=2\sqrt{2}$。

同理，四邊形 $OAEC$, $OAHD$, $OBGD$, 各等於 $2\sqrt{2}$。

$\therefore\ AECFBGDH=8\sqrt{2}=8\times 1.414$

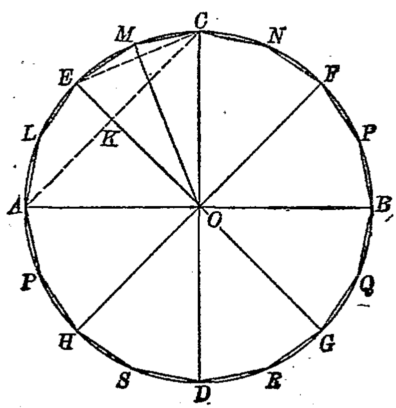
$=11.312$ 平方公分。

(3)再照上例在上圓內畫八個半徑等分各角，畫成一正十六角形。求他的面積。

〔答〕 量得約 12.2 平分公分。

附註： 此十六角形可以推算其面積如下：

設作得圓內接正十六角形如右圖，則其面積等於四邊形 $OCME\times 8$。



$AC=2\sqrt{2}$, $\therefore CK=\sqrt{2}$。

$OK=CK=\sqrt{2}$。

$EK=2-\sqrt{2}$。

$\overline{OK}^2=2$, $\overline{EK}^2$

$=(2-\sqrt{2})^2$

$=4-4\sqrt{2}+2$

$=6-4\sqrt{2}$。

$$\overline{CK}^2+\overline{EK}^2=2+6-4\sqrt{2}=8-4\sqrt{2}$$

$$\therefore\ CE=\sqrt{\overline{CK}^2+\overline{EK}^2}=\sqrt{8-4\sqrt{2}}=2\sqrt{2-\sqrt{2}}。$$

四邊形 $OCME=\frac{1}{2}OM\times CE$

$$=\frac{1}{2}\times 2\times 2\sqrt{2-\sqrt{2}}=2\sqrt{2-\sqrt{2}}。$$

$\therefore$ 十六邊形面積$=16\sqrt{2-\sqrt{2}}=12.16.$

(4)比較以上諸題所得各面積的大小。

〔答〕 圓面積最大,12.57 平方公分,

正十六邊形面積爲 12.16 平方公分,

正八邊形面積爲 11.31 平方公分,

正四邊形面積爲 8.00 平方公分。

由此可見邊數加倍,正多邊形面積即與圓面積接近一些;邊數愈多,愈近於圓面積。

附註: 此題本意,在使學生略得「圓面積是內接正多邊形面積的極限」一觀念,以爲後來討論 π 算法的預備。下列問題,教者不妨先向學生解釋:

從 $A=\pi r^2$, 得 $\pi=\frac{A}{r^2}$; 若命 $r=1$, 則 $\pi=A$。所以將內接正方形邊數加倍到極大時,可以算得 π 的前幾位。在本題 $r=2$, $\therefore\ \pi=\frac{A}{4}$。

目解題七、(在教科書第 62 面到第 63 面)

(1)一枝沒有削過的鉛筆是什麼體?

〔答〕 是直圓柱體。

(2)一個五角柱體有幾個面?幾個線?

〔答〕 有七個面，15 條線。

(3)一個五角錐體有幾個面?幾個線?

〔答〕 有六個面,十條線。

(4)一個直角三角形,固定了他的一個直角邊,把他在空間旋轉。他在空間經過,所占的部分是一個什麼體?

〔答〕 是正圓錐體。

(5)一個圓柱體有幾個面?是平面麽?是曲面麽?

〔答〕 有三個面:兩個是平面,一個是曲面。

(6)假定把一個圓柱形的側面割開。展平起來,可成一個什麽形?

〔答〕 可成一個平行四邊形,或長方形。

(7)假定把一個圓錐形的側面割開,展平起來,可成一個什麽形?

〔答〕 可成一個扇形。

(8)一個球體的表面,可以割開了展平麽?

〔答〕 不可以。

計算題一、(在教科書第 69 面)

(1)每邊長 3 公分的立方體,表面積共有多少平方公分?

〔解〕 此立方體共有六面,每面 9 平方公分。

∴ 表面積共有 $9\times6=54$ 平方公分。〔答〕

(2)一圓柱體高 11 公分，底半徑 5 公分，求此圓柱體的側面積,全面積,和體積。

〔解〕 側面積$=11\times2\times3.1416\times5=345.576$ 平方公分。〔答〕

全面積$=345.576+3.1416\times25\times2$

$=345.576+157.08=502.656$ 平方公分。〔答〕

體積$=25\times11\times3.1416=863.94$ 立方公分。〔答〕

（3）一球的半徑長 5 公分，求他的表面積和體積。

〔解〕　球表面積$=4\pi r^2=4\times3.1416\times25$

$=314.16$ 平方公分。〔答〕

球體積$=\frac{4}{3}\pi r^3=\frac{4}{3}\times3.1416\times5^3=\frac{5}{3}\times314.16$

$=523.6$ 立方公分。〔答〕

（4）地球的半徑大約是 4000 哩，則地面（陸地及洋面都包括在內）大約有多少平方哩?

〔解〕　$4\times3.1416\times4000^2=4^3\times3.1416\times10^6$

$=201.0624\times10^6$

$=2.01\times10^8$ 平方哩。〔答〕

（5）兩個球體的半徑是 3 公分及 6 公分，求此兩球表面積之比和體積之比。

〔解〕　表面積比$=4\pi(9):4\pi(30)=1:4$。〔答〕

體積比$=\frac{4}{3}\pi(27):\frac{4}{3}\pi(216)=1:8$。〔答〕

（6）鋼每立方呎約重 490 磅。求半徑 2 吋的鋼球約重多少磅? (1 呎=12 吋)

〔解〕　1 立方呎=1728 立方吋，　∴　此鋼每立方吋重 490/1728 磅。

鋼球體積$=\frac{4}{3}\times3.1416\times8=33.51$ 立方吋。

$$\frac{490}{1728}\times33.51=9.59.$$

〔答〕　此鋼球約重 9.59 磅。

第三編　幾何學的理論

目解題八、（在教科書第 75 面）

（1）沿直尺畫直線，根據了什麼公理沒有？根據了什麼公法沒有？

〔答〕　根據公理（2），並根據公法（1）與（2）。

（2）用刻有分寸的尺去量線份的長短，可以說照什麼公理？

〔答〕　可以說明公理（2）的推論二。

（3）假使有三條尺，一條曉得是直的，你能根據什麼公理，用什麼法子，去驗定其他兩條不是直尺？

〔答〕　可以根據公理（2）與（3），來驗定其他兩條是不是直尺，方法如下：

將其他兩條尺邊，與已知的直尺邊靠緊，並且將全尺滑移，如果兩尺邊始終貼緊，沒有一點隙縫，那麼第二第三兩條尺也是直的，否則便是曲的。

（4）兩條可以決定一個點麼？何以呢？

〔答〕　兩條線相交，當然可以決定一個點，因為兩線祇有一交點。但是平行線却不相交，所以兩條線不一定可以決定一個點。

附註：　假使把無窮遠點包括進去，則二線常可決定一點。不過在初學方面，本題如此回答，已是正確了。

（5）兩點可以決定一線？何以呢？

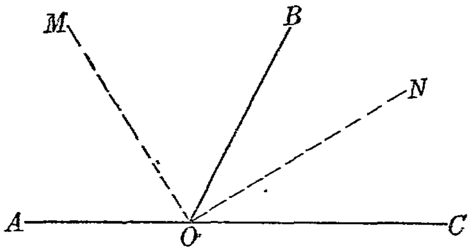
〔答〕　兩點常可決定一線，因為兩點之間祇有一直線，而

且從一點常可作一線到他點。

理解題一、（在教科書第 83 面）

(1)在 $st\angle AOC$ 裏面畫 OB 線份，又畫 $\angle BOC$ 同 $\angle BOA$ 的平分線 ON 同 OM。那 $\angle MON$ 是一隻什麼角？

〔解〕 依題得右圖。



$\angle MON = \angle R$。

〔答〕

〔證明〕 $\angle AOC$ 是平角。

$\therefore \quad \angle AOC = 2\measuredangle R$。

$\angle BOM = \frac{1}{2}\angle AOB$, $\angle BON = \frac{1}{2}\angle BOC$ （已知）

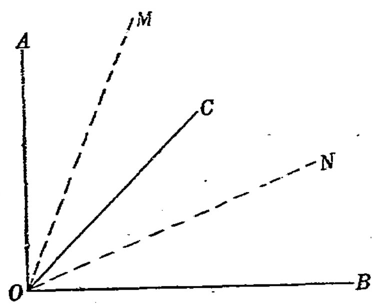
$\therefore \quad \angle MON = \frac{1}{2}\angle AOB + \frac{1}{2}\angle BOC$ （兩鄰角的和）

$= \frac{1}{2}(\angle AOB + \angle BOC) = \frac{1}{2}\angle AOC$ （同上）

$= \frac{1}{2} \times 2\measuredangle R = \angle R$。（普通公理 14）

(2)在 AOB 直角裏面畫 OC 線份；平分 $\measuredangle AOC$ 同 COB 畫 OM 同 ON，這樣做成的 $\angle MON$ 是多少度？

〔解〕 如題，作得左圖。



$\angle MON = \angle MOC + \angle NOC$

（鄰角和）

但 $\left.\begin{array}{l}\angle MOC = \frac{1}{2}\angle AOC \\ \angle NOC = \frac{1}{2}\angle BOC\end{array}\right\}$

（已知）

$\therefore \quad \angle MOC + \angle NOC$

$=\frac{1}{2}\angle AOC+\frac{1}{2}\angle BOC$ （等量公理）

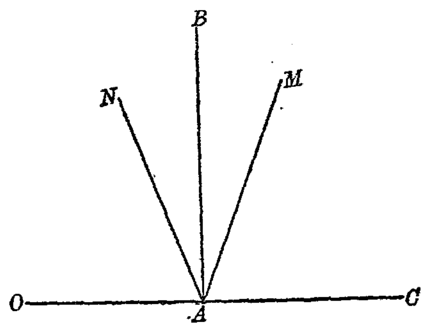
$=\frac{1}{2}(\angle AOC+\angle BOC)$

$=\frac{1}{2}\angle AOB$ （鄰角和）

$\therefore\ \angle MON=\frac{1}{2}\angle R=45°$ （普通公理 14）

〔答〕 $\angle MON$ 是四十五度。

（3）從 OC 線份上一點 A 畫垂線 AB，又在 AB 兩側引 AM, AN, 使 $\angle BAM=\angle BAN$。那剩下來的 $\angle MAC$ 同 $\angle NAO$ 有什麼關係？



〔答〕 $\angle MAC=\angle NAO$。

〔證明〕 $BA\perp OC$ （已知）

$\therefore\angle BAO=\angle BAC=\angle R$ （垂線定義）

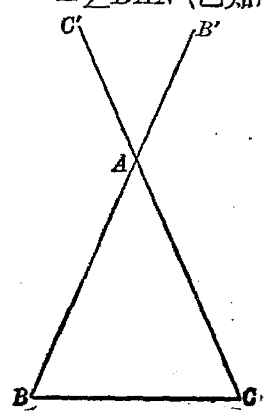
今 $\angle BAM=\angle BAN$ （已知）

$\therefore\ \angle MAC=\angle NAO$ （等角的餘角相等）

（4）從等腰 $\triangle ABC$ 的頂點 A，延長兩腰 AB 同 AC 到 B' 同 C'，使 $AB'=AC'$. 那 BB' 同 CC' 有什麼關係？

〔答〕 $BB'=CC'$。

〔證明〕 如右圖，$\triangle ABC$ 是等腰 $\triangle$，A 是頂點。



$AB=AC$　(等腰)

$AB'=AC'$　(已知)

$\therefore$　$AB+AB'=AC+AC'$　(等量加等量,和相等)

但　$BB'=AB+AB'$, $CC'=AC+AC'$　(全量等於各部分的和)

$\therefore$　$BB'=CC'$　(普通公理 14)

第四編　直界形

目解題九、（在教科書第 87 面到第 88 面）

（1）如圖 1，已知 $OA=OA'$, $OB=OB'$，那麼$\triangle AOB\equiv\triangle A'OB'$。詳細說出理由來。

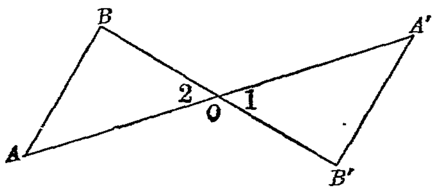


圖 1.

〔解〕 設二直線 AA' 與 BB' 交於 O 點，$OA=OA'$,

$OB=OB'$。

求證：$\triangle AOB\equiv\triangle A'OB'$。

證：在 $\triangle\!\!\!\triangle AOB$ 與 $A'OB'$ 裏，有

$$\left.\begin{aligned}OA=OA'\\OB=OB'\end{aligned}\right\}\text{（已知）}$$

$$\angle 1=\angle 2\quad\text{（對頂角相等）}$$

$\therefore\quad \triangle AOB\equiv\triangle A'OB'$。

（一 $\triangle$ 的兩邊與夾角，同別 $\triangle$ 的兩邊與夾角對應相等，這兩 $\triangle\!\!\!\triangle$ 全等。）

附註：此定理可縮記為 $s.\ a.\ s.\equiv s.\ a.\ s.$，以後引用此定理，即以此寫法代表。

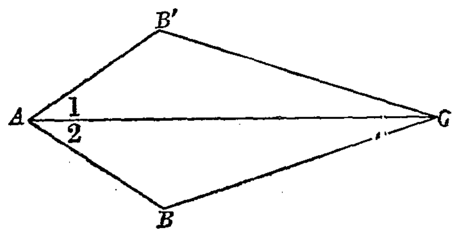


圖 2.

（2）如圖 2，$\angle 1=\angle 2$, $AB=AB'$，那

麼 $\triangle ABC \equiv \triangle AB'C$。詳細說出理由來。

〔解〕 已知：如題所述。求證：$\triangle ABC \equiv \triangle AB'C$。

證： 在 $\triangle\!\!\!\!\triangle ABC$ 與 $AB'C$ 裏面，有

$$\left.\begin{array}{l}\angle 1=\angle 2\\ AB=AB'\end{array}\right\}(\text{已知})$$

$$AC=AC\quad(\text{合一})$$

$\therefore\quad \triangle ABC \equiv \triangle AB'C\ (s.\ a.\ s. \equiv s\ \ a.\ s.)$

(3)正方形是各邊相等,各角都是直角的四邊形。如圖 3, $ABCD$ 是個正方形，E 是 AD 的中點。證明 $\triangle AEB \equiv \triangle DEC$。

〔提示〕 用 §88 的推論。

〔解〕 已知：如題。 求證：如題。

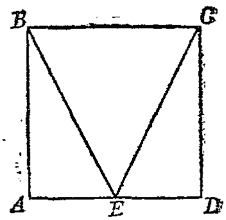


圖 3.

證： 在 $\triangle AEB$ 與 $\triangle DEC$ 中,有

$$AB=DC$$

(正方形的各邊相等)

$\angle A=\angle R,\ \ \angle D=\angle R$

(正方形各角都是直角)

$$AE=ED\ (E\ \text{點平分}\ AD)$$

$\therefore\quad \triangle AEB \equiv \triangle DEC$ (§88 推論)

(4)如圖 4, $ABCD$ 是一個正方形,試證明 $\triangle ADB \equiv \triangle ADC$。

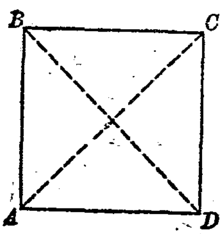


圖 4.

〔解〕 已知：如題。 求證：如題。

證： 在 $\triangle ADB$ 與 $\triangle ADC$ 中,

$$\angle A=\angle R\quad \angle D=\angle R$$

(正方形各角都是 $\angle R$)

$$AB=DC$$

(正方形各邊相等)

$AD = AD$ (合一)

$\therefore$ $\triangle ADB \equiv \triangle ADC$ (§88 推論)

附註: 初學對於疊置的全等三角形,往往不易辨認,教者可將此兩 $\triangle$ 分開畫出,以示學生。

目解題十、(在教科書第 89 面到第 90 面)

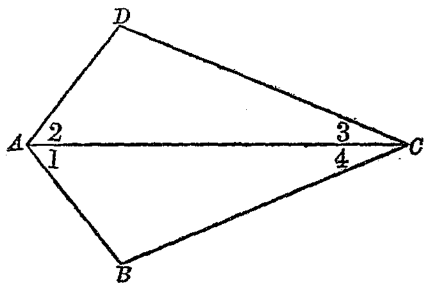


圖 1.

(1)設 $\angle 1 = \angle 2$, $\angle 3 = \angle 4$(圖 1),

證明: $\triangle ABC \equiv \triangle ADC$。

〔解〕 已知: 如題所述。

求證: 如題所述。

證: 在 $\triangle ABC$ 與 ADC 中,有

$\angle 1 = \angle 2$, $\angle 3 = \angle 4$ (已知)

$AC = AC$ (合一)

$\therefore$ $\triangle ABC \equiv \triangle ADC$ $(a.\ s.\ a. = a.\ s.\ a.)$

附註: §90 的定理,常縮寫爲 $a.s.a. \equiv a.s.a.$,可命學生用此記號,以求該定理。

(2) 設 $\angle 1 = \angle 3$, $\angle 2 = \angle 4$ (圖 2), 證明 $\triangle ABC \equiv \triangle ADC$。

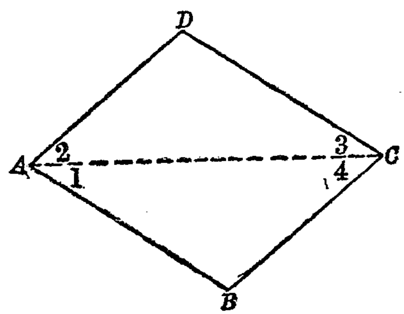


圖 2.

〔解〕　已知：如題。　求證：如題。

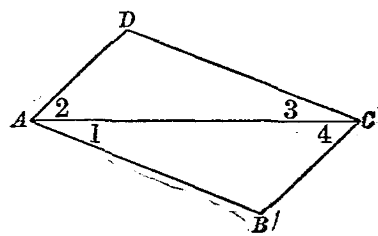
證：　在 $\triangle s\ ABC$ 與 $\triangle ADC$ 中，有

$$\angle 1=\angle 3,\ \angle 2=\angle 4\quad(\text{已知})$$

$$AC=AC\quad(\text{合一})$$

$\therefore$　$\triangle ABC\equiv\triangle ADC$ ((a. s. a. ≡ a. s. a.)

附註：　此題原圖欠佳，似應畫成右式，則與題 1 不致相混，因 $\angle 1$ 與 $\angle 2$，$\angle 3$ 與 $\angle 4$，顯然不相等也。此題可爲證明「平行四邊形對邊相等」一定理的預備。



（3）設 $\angle 3=\angle 4$，$BC=DC$（圖 3），證明 $\triangle ABC\equiv\triangle ADC$。

〔解〕　已知：如題所述。

求證：如題所述。

證：在 $\triangle s\ ABC$ 與 ADC 中，有

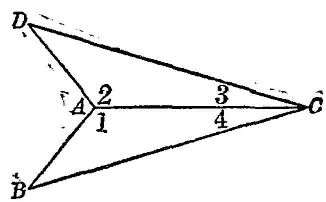


圖 3.

$$\left.\begin{array}{l}\angle 3=\angle 4\\ BC=DC\end{array}\right\}(\text{已知})$$

$$AC=AC\quad(\text{合一})$$

$\therefore$　$\triangle ABC\equiv\triangle ADC$ (s. a. s. ≡ s. a. s.)

（4）設 $\angle 1=\angle 2$，$\angle 3=\angle 4$（圖 3），證明 $\triangle ABC\equiv\triangle ADC$。

〔解〕　已知：如題。　求證：如題。

證：　在 $\triangle s\ ABC$ 與 $\triangle ADC$ 中，有

$\angle 1=\angle 2,\ \angle 3=\angle 4$　(已知)

$AC=AC$　(合一)

$\therefore$　$\triangle ABC\equiv\triangle ADC$ $(a.\ s.\ a.\equiv a.\ s.\ a.)$

(5) 設 $AB=BC,\ \angle 3=\angle 4$(圖 4), 證明 $\triangle ADB\equiv\triangle CDB$。

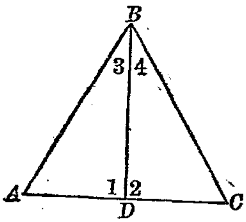


圖 4.

〔解〕 已知: 如題所述。

求證: 如題所述。

證: 在 $\triangle\triangle ADB$ 與 CDB 中,有

$$\left.\begin{array}{l}AB=BC\\ \angle 3=\angle 4\end{array}\right\}\text{(已知)}$$

$BD=BD$　(合一)

$\therefore$　$\triangle ADB\equiv\triangle CDB$ $(s.\ a.\ s.\equiv s.\ a.\ s.)$

附註: 此題暗示定理四證法的重要步驟,應命學生特別注意,以爲預備。

目解題十一、(在教科書第 93 面到第 94 面)

(1) 若 $AB=AD,\ BC=DC$ (圖 1)。證明

(a) $\angle 1=\angle 2$, (b) $\angle 3=\angle 4$,

(c) $\angle ABC=\angle ADC$。

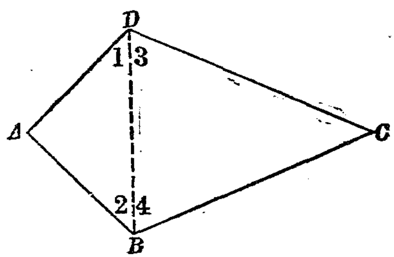


圖 1.

〔解〕 已知:如題所述。

求證: 如題所述。

證: 聯 BD, 則 $\triangle ABD$ 與 $\triangle CBD$ 都是等腰三角形,

$$\therefore\quad \left.\begin{array}{l}(a)\ \angle 1=\angle 2\\ (b)\ \angle 3=\angle 4\end{array}\right\}\text{(等腰 △ 裏面, 對等邊的角相等)}$$

$\therefore$　$\angle 1+\angle 3=\angle 2+\angle 4$（等量公理）

卽　(c) $\angle ABC=\angle ADC$（普通公理 14）

附註：　此題暗示定理五證法中的重要步驟，須命學生注意，以爲預備。

（2）若 $AB=BC$（圖 2），證明 $\angle 1=\angle 2$。

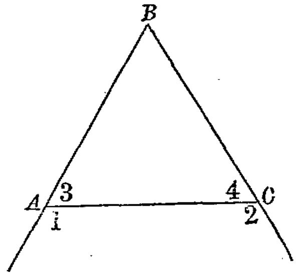


圖 2.

〔解〕　已知：　如題所述。

求證：　如題所述。

證：　$\because$ $AB=BC$（已知）

$\therefore$ $\angle 3=\angle 4$（等腰△底角相等）

但 $\angle 3+\angle 1=2\measuredangle R$,

$\angle 4+\angle 2=2\measuredangle R$ §83(2)

$\therefore$　$\angle 1=\angle 2$（等角的補角相等）

（3）$\triangle ABC$ 裏各邊相等，D, E, F 是各邊的中點（圖 3），證明 $\triangle ADF\equiv\triangle BDE$.

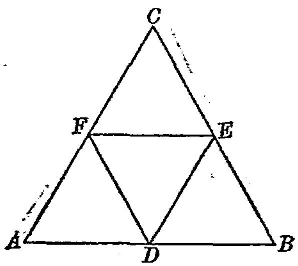


圖 3.

〔解〕　已知：如題。

求證：如題。

證：　$AC=BC$　（已知）

$AF=\frac{1}{2}A$,　$BE=\frac{1}{2}BC$

(F, E 平分 AC, BC)

$\therefore$　$AF=BE$（等量之半相等）

$\angle A=\angle B$（等邊△各角相等）

$AD=DB$（D 點平分 AB）

$\therefore$　$\triangle ADF\equiv\triangle BDE$ (s. a. s. $\equiv$ s. a. s.)

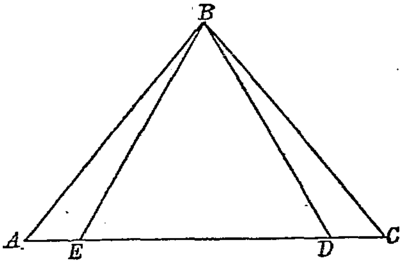


圖 4.

（4）在圖4的 $\triangle ABC$ 裏面，$AB=BC$，並且所截的$AE=DC$，證明 $\triangle AEB\equiv\triangle CDB$。

〔解〕 已知：如題所述。

求證： 如題所述。

證： $AB=BC$ （已知）

$\angle A=\angle C$ （等腰 △ 底角等）

$AE=DC$ （已知）

$\therefore$ $\triangle AEB=\triangle CDB$ (s. a. s. ≡ s. a. s.)

（5）在 $\triangle ABC$ 裏面，$AC=BC$，$AD=BD$（圖5）。證明 $\angle ADC=\angle BDC$。

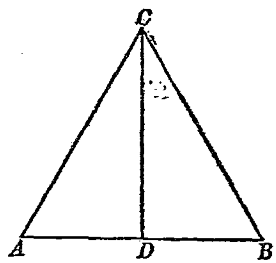


圖 5.

〔解〕 已知： 如題所述。

求證： 如題所述。

證： 在 $\triangle ADC$ 與 $\triangle BDC$ 裏面，有

$AC=BC$，$AD=BD$ （已知）

$\angle A=\angle B$ （等腰 $\triangle ABC$ 的底角）

$\therefore$ $\triangle ADC\equiv\triangle BDC$ (s. a. s. ≡ s. a. s.)

$\therefore$ $\angle ADC=\angle BDC$ （全等形的對應角）

附註： 此題暗示下列的定理：

等腰 △ 底邊上的中線，垂直於底邊。

（6）$ABCD$ 圖形裏的四角都是直角，且 $AD=BC$，$DC=AB$，（圖 6）。證明 $\triangle ABC\equiv\triangle ACD$。

〔解〕 已知： 如題所述。

求證： 如題所述。

證： 在 $\triangle ABC$ 與 $\triangle ACD$ 裏面，有

$AD=BC$, $DC=AB$ (已知)

$\angle D=\angle R$, $\angle B=R$ (已知)

$\therefore$ $\triangle ABC\equiv\triangle ADC$ (§88 推論)

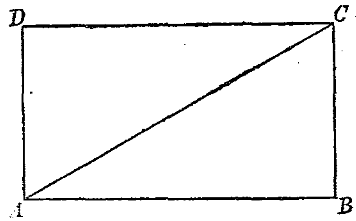


圖 6.

目解題十二、(在教科書第 97 面)

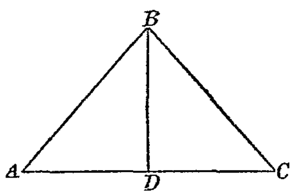


圖 1.

(1)在圖 1 裏面，$\triangle ABC$ 是等腰三角形，且 $AD=DC$, 證明 $\triangle ABD\equiv\triangle CBD$。

〔解〕 已知：$\triangle ABC$ 中有 $AB=BC$, $AD=DC$。

求證： $\triangle ABD\equiv\triangle CBD$。

證： $AB=BC$, $AD=DC$ (已知)

$BD=BD$ (合一)

$\therefore$ $\triangle ABD\equiv\triangle CBD$

(s. s. s. ≡ s. s. s.)

附註： §93 定理五，常縮記爲 s. s. s. ≡ s. s. s.，可命學生仿用。又本題的證法，可與目解題十二 (5) 題的證法對比，以示一題的證法不止一種：

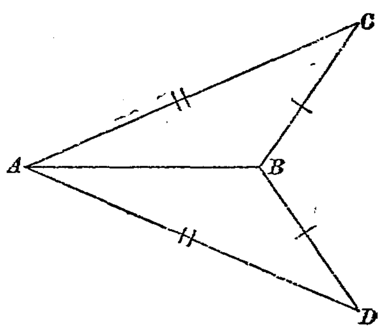


圖 2.

(2) 在圖 2 裏面，照

§92 用標記表明相等的線段，證明 $\triangle ABC\equiv\triangle ABD$。

〔解〕 已知：$AC=AD$, $BC=BD$。

求證：　$\triangle ABC\equiv\triangle ABD$。

證：在 $\triangle$s ABC 與 ABD 裏面，有

$AC=AD$, $BC=BD$ （已知）

$AB=AB$ （合一）

$\therefore$ $\triangle ABC\equiv\triangle ABD$ (s. s. s. $\equiv$ s. s. s.)

(3)在圖 3 裏面，相等的各線段上也有標記，試證明 $\triangle ABC\equiv\triangle ADC$。

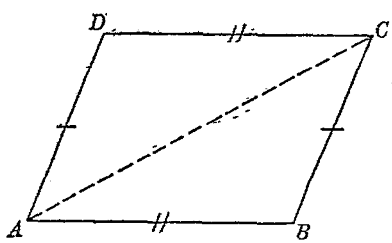


圖 3.

〔解〕 已知：右圖中 $AB=DC$, $BC=AD$。

求證：$\triangle ABC\equiv\triangle ADC$

證：　$AB=DC$,

$BC=AD$ （已知）

$AC=AC$ （合一）

$\therefore$ $\triangle ABC\equiv\triangle ADC$ (s. s. s. $\equiv$ s. s. s.)

附註：此題暗示下列定理證法的第一步：

四邊形的兩雙對邊相等，則爲▱。

(4)在圖 4 裏面，O 是圓心，證明 $\triangle AOB\equiv\triangle COD$。

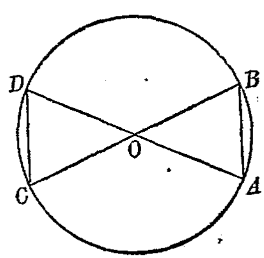


圖 4.

〔解〕 已知：右圖中 O 是圓心，AD, BC 爲直徑。

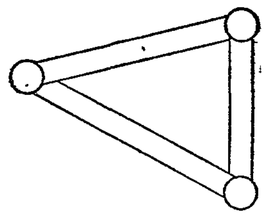
求證：$\triangle AOB\equiv\triangle COD$。

證：在 $\triangle$s AOB 與 COD 中，有

$$OA=OD,\ OB=OC\quad(\text{圓的半徑相等})$$
$$\angle AOB=\angle COD\quad(\text{對頂角相等})$$
$$\therefore\quad \triangle AOB\equiv\triangle COD\quad(s.\ a.\ s.\equiv s.\ a.\ s.)$$

目解題十三、（在教科書第 99 面到第 100 面）

（1）釘連三條桿的尖端如右圖，問這個形是固定的麽？什麽緣故？



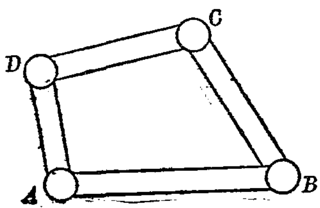
記得從固定的三邊，就有固定的三角形。

〔答〕 這三條桿的長短是不變的，所以這個三角形的三條邊，無論三角形變成什麽形狀(假定它可以變的話)，始終長短如一。但是兩三角形有三邊對應相等，兩形就全等，所以這三角形變出來的形狀，仍與原形全等；換句話說，等於沒有變。所以此形是固定的。

附註： 建築上利用三角形固定性質的地方很多，教者可以多舉幾個例，使學生知道。

（2）如下圖，把四條桿的尖端釘連，問這個形可以活動麽？你曾見四條邊的鐵架子，有會變形的麽？

〔答〕 這個形可以活動，因為 AC 或 BD 的距離，沒有固定。兩個四邊形四邊對應相等，是不能證明它們全等的。

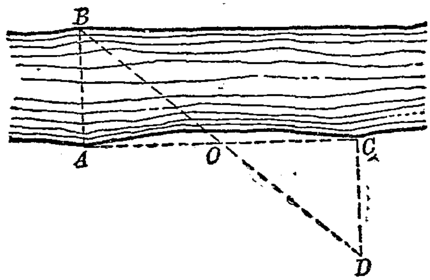


（3）假使在前題所說的形上面，釘一條横桿穿過 AC，這形會變成固定的麽？

〔答〕 當然變成固定的了，

因為 ABC 與 ADC 兩個三角形的三邊，已變為固定之故。

(4)要找出經過一條可從 A 到 B 的距離，可以依了同 AB 成直角的 AO 線上進行，一直到 C，使 $AO=OC$。再沿同 OC 成直角的線，走到同 O, B 成直線的 D 為止。指出 $CD=AB$。



〔提示〕 $\angle A=\angle C$, 什麼緣故？ $AO=OC$, $\angle BOA=\angle DOC$, 什麼緣故？ $\triangle BOA\equiv\triangle DOC$, 什麼緣故？再證 $CD=AB$, 什麼緣故？

〔解〕 已知：前圖中有 $\angle A=\angle R$, $\angle C=\angle R$,

AOC 為直線，$AO=OC$,

BOD 為直線。

求證： $CD=AB$。

證： 在 $\triangle COD$ 與 AOB 中，有

$\angle C=\angle A$ (各等於 $\angle R$)

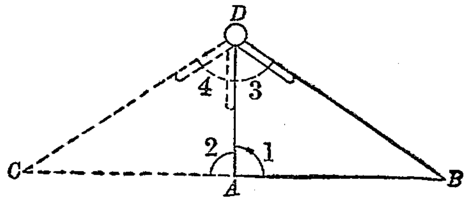
$\angle COD=\angle AOB$ (對頂角相等)

$OC=AO$ (已知)

$\therefore$ $\triangle COD\equiv\triangle AOB$ ($a.\ s.\ a.\equiv a.\ s.\ a.$)

$\therefore$ $CD=AB$ (全等形的對應邊)

(5)想測從 A 點到望得見走不到的 B 點的距離，可以用忒理斯 (Thales) 所發明的儀器：——先把兩桿連在 D 處，一桿照錘線 DA 同地面成直角，使別桿指着 B 點。再旋轉兩桿不變 D 角，使原來指着 B 的一桿在 DA 的位置，原來



垂直的一桿就指着走得到的一點 C, 便可量下 AC 的距離。證明 $AC=AB$。

〔提示〕 (1) $\angle 1=\angle R=\angle 2$; (2) $\angle 3=\angle 4$; (3) $DA=DA$。

〔解〕 從提示，即可證明

$\triangle CAD\equiv\triangle BAD$ $(a.\ s.\ a.\equiv a.\ s.\ a.)$

$\therefore$ $AC=AB$ (全等形的對應部分)

理解題二、(在教科書第101面到第103面)

(1)圖1裏, $AE=ED=DC=CB$, $\angle E=\angle C$。證明 $\angle 1=\angle 2$。

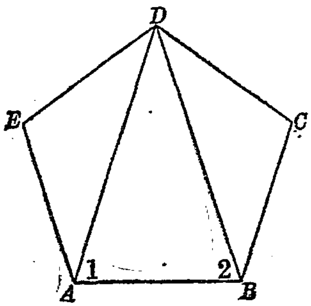


圖 1.

〔解〕 已知：如題所述。

求證： 如題所述。

證： 在 $\triangle AED$ 與 $\triangle BCD$ 中，有

$AE=BC$, $ED=CD$(已知)

$\angle E=\angle C$ (已知)

$\therefore$ $\triangle AED=\triangle BCD$ $(s.\ a.\ s.\equiv s.\ a.\ s.)$

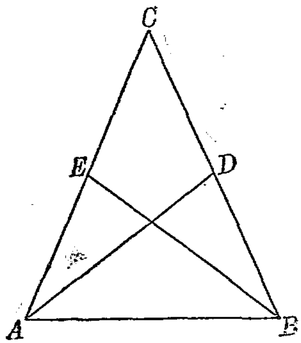
而 $AD=BD$ (全等形的對應部分)

$\therefore$ $\triangle ADB$ 爲等腰，而 $\angle 1=\angle 2$。

(等腰 $\triangle$ 中對等邊的角相等)

(2) 設 E, D 是等腰三角形 ABC 裏等邊 AC 同 BC

上的兩中點，那麼聯結 AD, BE 也會相等麼？如果是的，怎樣去證明他？



〔答〕 相等的，證法如下：

〔解〕 已知：$\triangle ABC$ 中 $AC=BC$, AD, BE 爲中線。

求證：　$AD=BE$。

證：　在 ◬ADB 與 BEA 中，有

$\angle DBA=\angle EAB$（等腰$\triangle ABC$的底角）

$AB=AB$　（合一）

$BD=AE$　（等量之半相等）

（$\because BD=\frac{1}{2}BC$, $AE=\frac{1}{2}AC$, 而 $BC=AC$ 之故）

$\therefore$ $\triangle ADB\equiv\triangle BEA$ ($s.\ a.\ s.\equiv s.\ a.\ s.$)

而　　$AD=BE$　（全等形的對應邊）

第二證法：在 ◬ADC 與 BEC 中，有

$AC=BC$　（已知）

$\angle C=\angle C$　（合一）

$DC=EC$　（等量之半）

$\therefore$ $\triangle ADC\equiv\triangle BEC$ ($s.\ a.\ s.\equiv s.\ a.\ s.$)

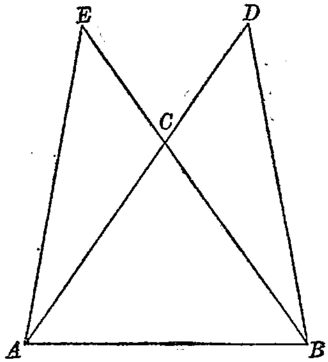
而　　$AD=BE$　（全等形的對應邊）

（3）$\triangle ABC$ 裏面，兩等邊是 CA 同 CB；從 C 延長 CA 到 D, 又 CB 到 E。若 $AD=BE$, 證明 $DB=AE$。

〔解〕 已知：$\triangle CAB$ 中，$CA=CB$,

CD 是 CA 的延長線，

CE 是 CB 的延長線，



$AD=BE$。

求證：$DB=AE$。

證：在 $\triangle BCD$ 與 $\triangle ACE$ 中，有

$CB=CA$（已知）

$\angle BCD=\angle ACE$（對頂角相等）

又因 $AD=BE$（已知）

$\therefore$ $CD=CE$（等量減等量）

於是 $\triangle BCD\equiv\triangle ACE$

(s. a. s. ≡ s. a. s.)

而 $DB=AE$（全等形的對應邊）

別法：$AD=BE$, $AB=AB$,

$\angle DAB=\angle EBA$,

$\therefore$ $\triangle DAB\equiv\triangle EBA$, $DB=AE$。

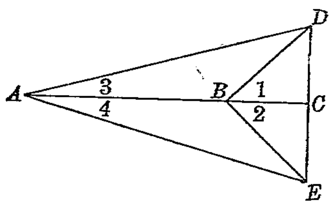


圖 2.

（4）在圖 2 裏面知道 $AD=AE$, $BD=BE$。證明 $DC=EC$。

〔提示〕(1) 先證 $\triangle ABD\equiv\triangle ABE$; (2) 證 $\angle 1=\angle 2$; (3) 證 $\triangle CBD\equiv\triangle BEC$。

〔解〕已知：如題。求證：如題。

證：在 $\triangle ABD$ 與 $\triangle ABE$ 中，有

$AD=AE$, $BD=BE$（已知）

$AB=AB$（合一）

$\therefore$ $\triangle ABD\equiv\triangle ABE$ (s. s. s. ≡ s. s. s.)

而　$\angle ABD=ABE$ (全等形的對應角)

$\therefore$　$\angle 1=\angle 2$ (等角的補角相等)

於是在 $\triangle CBD$ 與 BEC 中，就有

$BD=BE$ (已知)

$\angle 1=\angle 2$ (已證)

$BC=BC$ (合一)

$\therefore$　$\triangle CBD\equiv\triangle BEC$ $(s.\ a.\ s.\equiv s.\ a.\ s.)$

而　$DC=EC$ (對應邊)

附註：書中提示，並不簡單，其實祗須照下法證明：

$AD=AE,\ BD=BE,\ AB=AB,$

$\therefore$　$\triangle ABD\equiv\triangle ABE,\ \angle 3=\angle 4$。

於是 AC 是等腰 $\triangle ADE$ 頂角的平分線，

$\therefore$　$DC=EC$

(等腰 $\triangle$ 頂角平分線，是底邊中垂線)

(5)在前題的圖裏邊，倘若已經知道了 $\angle 3=\angle 4$，和 $\angle ABD=\angle ABE$，證明 $DC=EC$。

〔解〕 已知：如題。 求證：如題。

證：在 $\triangle ABD$ 與 ABE 裏面，有

$\angle 3=\angle 4,\ \angle ABD=\angle ABE$ (已知)

$AB=AB$ (合一)

$\therefore$　$\triangle ABD\equiv\triangle ABE$ $(a.\ s.\ a.\equiv a.\ s.\ a.)$

而　$AD=AE$ (全等形的對應邊)

$\therefore$　$DC=EC$ (§91 推論二)

(6)求 A 到 B 的距離，先量 AO 同 BO。再取 $OD=AO$，$OC=BO$，倘 BOC，AOD 同是直線，那麼 $AB=CD$。什麼緣故？所以量 CD 便得 AB (圖 3)。

〔解〕　因為 BOC, AOD 同是直線，

$\therefore$　$\angle AOB = \angle COD$（對頂角相等）

又因　$AO = OD$,　$BO = OC$

（所取）

$\therefore$　$\triangle AOB \equiv \triangle COD$

$(s.\ a.\ s. \equiv s.\ a.\ s.)$

而知　$AB = CD$　（對應邊）

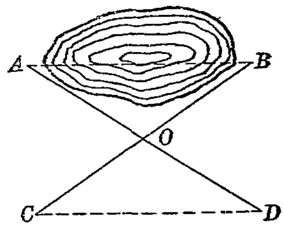
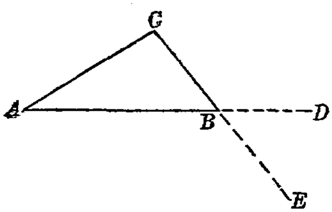


圖　3.

目解題十四、（在教科書第 104 面）

（1）在三角形的一個頂點上，可以做幾個外角？那些角的關係怎麼樣？



〔答〕　在每一個頂點上，可以做兩個外角，這兩個外角相等，因為是對頂角。

（2）如圖 $\angle EBD$ 是 $\triangle ABC$ 的外角麼？$\angle EBD$ 同 $\angle ABC$ 有什麼關係？

〔答〕　$\angle EBD$ 不是 $\triangle ABC$ 的外角，它同 $\angle ABC$ 是對頂角，所以有相等的關係。

（3）三角形的一隻外角同他的內鄰角的和是什麼？

〔答〕　是兩直角。

目解題十五、（在教科書第 107 面）

（1）在圖 1 裏面，$\angle 1$ 同 $\angle 4$，$\angle 3$ 同 $\angle 6$，$\angle 1$ 同 $\angle 5$，$\angle 3$ 同 $\angle 4$，$\angle 2$ 同 $\angle 6$，$\angle 2$ 同 $\angle 5$，那一個角較

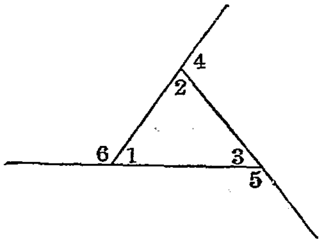


圖 1.

大?說出理由來。

〔答〕　$\angle 4>\angle 1$(§ 97), $\angle 6>\angle 3$(§ 97), $\angle 5>\angle 1$(§ 97), $\angle 4>\angle 3$(§ 97), $\angle 6>\angle 2$(§ 97), $\angle 5>\angle 2$(§ 97)。

(2)倘三角形內一角是直角,表明其餘兩角必是銳角。

〔提示〕 (*a*) $\angle 1>\angle R$, (*b*) $\angle 2<\angle R$ (圖 2)。

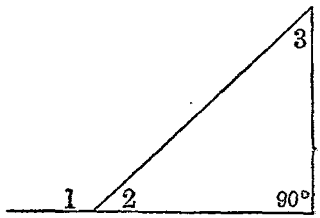


圖 2.

〔解〕 已知: 右圖中直角三角形。

求證: $\angle 2<\angle R$, $\angle 3<\angle R$。

證: 　$\angle 1>\angle R$ (△外角大於內對角)。

$\angle 1+\angle 2=2\measuredangle R$ (外邊一直線鄰角和)

$\therefore$　$(\angle 1+\angle 2)-\angle 1<2\measuredangle R-\angle R$(普通公理 13)

即　　$\angle 2<\angle R$

同理可證　$\angle 3<\angle R$

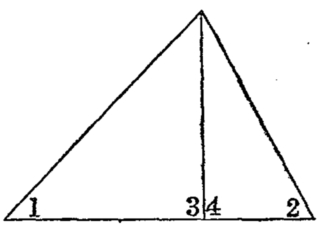


圖 3.

(3) 比較圖 3 裏面 $\angle 3$ 同 $\angle 2$, 並 $\angle 1$ 同 $\angle 4$。

〔答〕 $\angle 3>\angle 2$, $\angle 4>\angle 1$。(△ 的外角,大於內對角)

(4) 設 D 是三角形裏的任一點, 同三頂點連結, 證明在 D 點各角的和, 比三角形各角的和大。

〔提示〕 用 §97 的推論二。

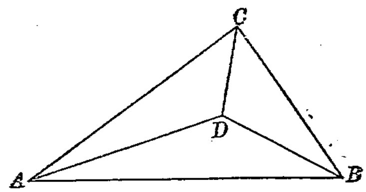


圖 4.

〔解〕 已知：D 是 $\triangle ABC$ 中任一點，DA, DB, DC 為各聯線。

求證： $\angle ADB+\angle BDC+\angle CDA>\angle ACB+\angle BAC+\angle CBA$。

證： $\left.\begin{array}{l}\angle ADB>\angle ACB\\ \angle BDC>\angle BAC\\ \angle CDA>\angle CBA\end{array}\right\}$ (§ 97 推論二)

$\therefore$ $\angle ADB+\angle BDC+\angle CDA>\angle ACB+\angle BAC+\angle CBA$ (普通公理 11)

目解題十六、 (在教科書第 112 面到第 113 面)

(1)定理十的倒定理，應當怎樣說；以前有沒有過那樣的定理?

〔答〕 應該說：三角形的兩邊相等，所對的角也相等。以前已有過這樣的定理，便是 § 91 定理四。

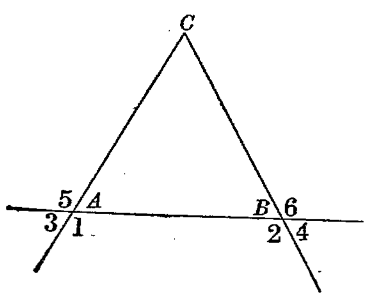


圖 1.

(2)設圖 1 裏，$\angle 1=\angle 2$，證 $\triangle ABC$ 是等腰三角形。

又若 $\angle 3=\angle 4$，或 $\angle 5=\angle 6$，怎樣證他是等腰三角形?

〔解〕 (a) 已知：圖 1 中 $\angle 1=\angle 2$。

求證： $\triangle ABC$ 是等腰三角形。

證： $\angle 1+\angle CAB=st.\angle$，$\angle 2+\angle CBA=st.\angle$
(一直線爲外邊的鄰角和)

但 $\angle 1=\angle 2$ (已知)

$\therefore$ $\angle CAB=\angle CBA$ (等角的補角)

$\therefore$ $CA=CB$，卽 $\triangle ABC$ 是等腰的
(§ 102 定理十)

(b) 已知：前圖中 $\angle 3=\angle 4$。

求證： $AC=BC$。

證： $\angle 3=\angle CAB$，$\angle 4=\angle CBA$ (對頂角相等)

但 $\angle 3=\angle 4$ (已知)

$\therefore$ $\angle CAB=\angle CBA$ (等於等量之量)

$\therefore$ $AC=BC$ (§ 102 定理十)

(c) 已知：前圖中 $\angle 5=\angle 6$。

求證： $AC=BC$。

證： 證法同 (a)。

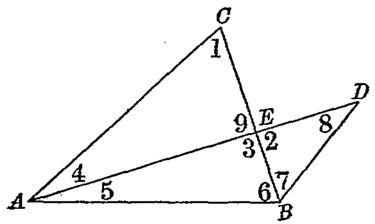


圖 2.

(3)看圖 2，比較 $\angle 3$ 同 $\angle 1$，$\angle 3$ 同 $\angle 4$，$\angle 9$ 同 $\angle 5$，$\angle 9$ 同 $\angle 6$，$\angle 2$ 同 $\angle 5$，$\angle 3$ 同 $\angle 8$。

〔答〕 $\angle 3>\angle 1$，$\angle 3>\angle 4$，$\angle 9>\angle 5$，$\angle 9>\angle 6$，$\angle 2>\angle 5$，$\angle 3>\angle 8$。

(4)同圖裏 $AB>BD$，比較 $\angle 5$ 同 $\angle 8$。

〔答〕 $\angle 8>\angle 5$ (§ 98 定理八)

(5)若 $\angle 9>\angle 4$，比較 AC 同 CE。

〔答〕 $AC>CE$ (§ 100 定理九)

(6)若 $\angle 6>\angle 1$,比較 AB 同 AC。

〔答〕 $AC>AB$ (§ 100 定理九)

理解題三、(在教科書第 113 面到第 114 面)

(1)在所給三角形底邊的中點，畫相等兩線份到其餘的兩邊,如這兩線和底邊所夾的兩隻角也相等,那麼這所給的三角形便是等腰三角形。

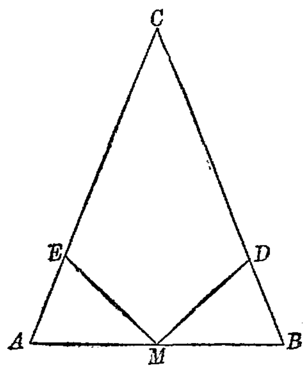
〔解〕 已知： $\triangle ABC$ 中 AB 的中點是 M, $ME=MD$, $\angle AME=\angle BMD$。

求證： $AC=BC$。

證： 在 $\triangle AME$ 與 $\triangle BMD$ 中，有

$AM=MB$ (M 點平分 AB)

$ME=MD$, $\angle AME=\angle BMD$ (已知)



$\therefore$ $\triangle AME\equiv\triangle BMD$

($s.\ a.\ s.\equiv s.\ a.\ s.$)

而知 $\angle A=\angle B$ (全等形對應角)

$\therefore$ $AC=BC$ (§ 102 定理十)

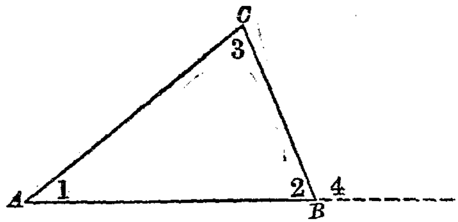
(2)凡三角形的兩隻角的和,必定比兩直角小。

〔提示〕 用定理七。

〔解〕 已知：$\triangle ABC$。

求證： $\angle 1+\angle 2<2\measuredangle R$, $\angle 2+\angle 3<2\measuredangle R$, $\angle 3+\angle 1<2\measuredangle R$。

證： 延長 AB, 得外角 4。(一直線可以任意延長)



於是　$\angle 1<\angle 4$

(△外角大於內對角)

∴ $\angle 1+\angle 2<\angle 4+\angle 2$

(若 $a>b$, $c=d$, 則 $a+c>b+d$),

但　$\angle 4+\angle 2=2\angle_s R$

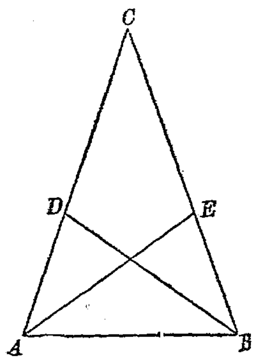
(一直線爲外邊的鄰角和)

∴　$\angle 1+\angle 2<2\angle_s R$ (普通公理 14)

同理可證　$\angle 2+\angle 3<2\angle_s R$

$\angle 3+\angle 1<2\angle_s R$

(3)等腰三角形裏兩底角的平分線到對邊的兩線段相等。



〔解〕　已知:$\triangle ABC$ 中 $AC=BC$, $\angle CAB$ 的平分線交 BC 於 E, $\angle CBA$ 的平分線交 AC 於 D。

求證:　$AE=BD$。

證:　在 $\triangle ABE$ 與 $\triangle ABD$ 裏,

有　$AB=AB$(合一)

$\angle ABE=\angle BAD$

(等腰 $\triangle ABC$ 的底角)

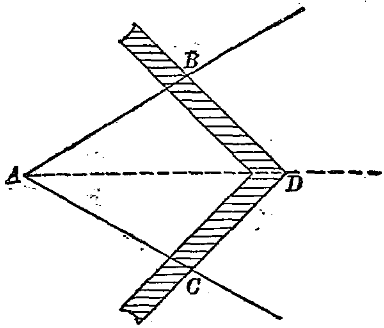
又因　$\left.\begin{array}{l}\angle BAE=\frac{1}{2}\angle BAD\\ \angle ABD=\frac{1}{2}\angle ABE\end{array}\right\}$ (AE, BD 是平分角線)

∴　$\angle BAE=\angle ABD$ (等量的一半)

於是　$\triangle ABE\equiv\triangle ABD$ ($a.\ s.\ a.\equiv a.\ s.\ a.$)

而　　$AE=BD$（全等形對應邊）

（4）一個木匠想平分 A 角，用下面的法子：截取 $AB=CA$。放上一個鋼的方尺，令 $BD=CD$，如右圖。畫 AD。這種平分的法子對麼？試證一證。



〔解〕　已知：$AB=AC$，

$BD=CD$。

求證：　$\angle BAD=\angle CAD$。

證：　在 $\triangle\triangle ABD$ 與 ACD 中，有

$AB=CA$，$BD=CD$　（已知）

$AD=AD$　（合一）

$\therefore\ \triangle ABD=\triangle ACD$ (s. s. s. ≡ s. s. s.)

因而 $\angle BAD=\angle CAD$（全等形對應角）

從上面的證明看來，此木匠所用的法子是對的。

目解題十七、（在教科書第 116 面到第 117 面）

（1）定理十一與定理十二有什麼關係？

〔答〕　定理十二是定理十一的倒（或逆）定理，也可以說定理十一是定理十二的倒（或逆）定理。

（2）定理十二用的什麼證法？

〔答〕　用的窮舉證法。

附註：　幾何學中的定理，凡有下列形式者，即

$a=b$，則 $c=d$；$a>b$，則 $c>d$；$a<b$；則 $c<d$；

其倒定理常眞確，因爲常可用窮舉證法來得證明也。

（3）$\triangle ABC$ 同 $A'B'C'$ 裏，$AB=A'B'$，$BC=B'C'$。若要 $AC>A'C'$，$\angle B$ 同 $\angle B'$ 應該有什麼關係？

〔答〕　根據定理十二，可知$\angle B$同$\angle B'$應該有$\angle B>\angle B'$的關係。

（4）在前題的兩 $\triangle$ 裏，若要 $\angle B>\angle B'$，AC 同$A'C'$該有什麼關係？

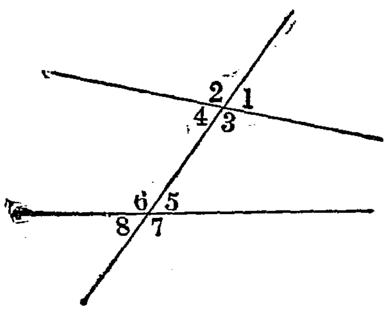
〔答〕　根據定理十一，可知 AC 與 $A'C'$ 應有 $AC>A'C'$ 的關係。

（5）在同樣 $\triangle$ 裏，若要 $AC=A'C'$，$\angle B$ 同 $\angle B'$ 該有什麼關係？要 $\angle B=\angle B'$，AC 同 $A'C'$ 該有什麼關係？

〔答〕　若要 $AC=A'C'$，該有 $\angle B=\angle B'$ 的關係。

若要 $\angle B=\angle B'$，該有 $AC=A'C'$ 的關係。

附註：　此題的兩答案，便是 s. a. s.$\equiv$s. a. s. 以及 s. s. s.$\equiv$s. s. s. 兩定理。由此數題，可使學生知道幾何學中大小等的定理，成功六個一組，都直確合理，記得其中一個，卽可連帶想到其餘五個。這也是記憶定理的一法。



目解題十八、（在教科書第 120 面）

（1）在左邊的圖裏（圖在教科書 120 面，此處爲便利參考起見，仍附載於左），那幾對角是相等的？還有那幾對角是補角？

〔答〕　$\angle 1=\angle 4$，

$\angle 2=\angle 3$, $\angle 7=\angle 6$, $\angle 8=\angle 5$。

$\angle 1$ 與 $\angle 2$, $\angle 2$ 與 $\angle 4$, $\angle 4$ 與 $\angle 3$, $\angle 3$ 與 $\angle 1$,都是補角。

$\angle 5$ 與 $\angle 6$, $\angle 6$ 與 $\angle 8$, $\angle 7$ 與 $\angle 5$, $\angle 8$ 與 $\angle 7$,都是補角。

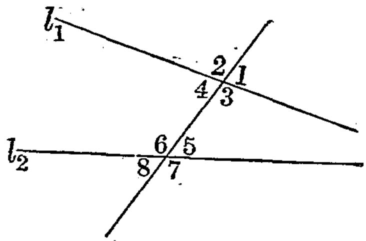
(2)有兩線相遇,畫截線如圖,試比較 $\angle 1$ 同 $\angle 5$, $\angle 7$ 同 $\angle 3$, $\angle 6$ 同 $\angle 3$。

〔答〕 $\angle 1>\angle 5$,

$\angle 7>\angle 3$,

$\angle 6>\angle 3$。

(根據 §97 定理七)



(3)同圖裏, $\angle 3+\angle 5$ 大於或小於 $2\measuredangle R$?

〔答〕 小於 $2\measuredangle R$。(根據 §97 與不等量公理)

(4)同圖裏, $\angle 4+\angle 6$ 比 $2\measuredangle R$ 大還是小?

〔答〕 比 $2\measuredangle R$ 大。(根據前題結果與不等量公理)

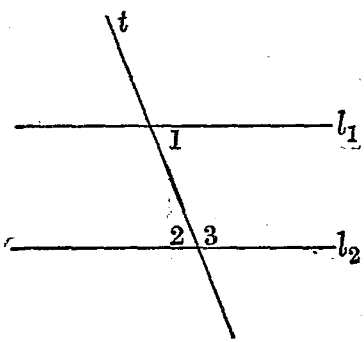
附註: 本題與上一題,是定理十四的引子,其所指示的關係如下:

相交兩線與其截線所成的同邊內角,與交點在截線同側的其和小於 $2\measuredangle R$, 在異側的其和大於 $2\measuredangle R$。

這一個關係,是可用 §97 定理七證明的。還有它的逆關係「兩線與其截線所成的同邊內角和,若小於二直角,則兩線延長,必在此二角的同側相交」,却非用 §106 的平行公理證明不可。其實這一個關係,倒是歐几利得本人所立的第五公設(Postulate),後來的算學家,因爲覺得這條公設非證明不

能成立，就另創別的公理，代替這公設，而將這公設加以證明。現在教科書中所講的平行公理（§106）；是蘇格蘭人 John Playfair 所採用的，大家叫它做 Playfair 公理，其實希臘人 Proclus 早已用過這公理了。Playfair 公理與歐氏第五公設，互爲因果而不能同時證明，所以後來又有人要想證明 Playfair 公理；但是一切努力，均告失敗。因爲每作一次嘗試，必須另設一新公理，此所設的新公理，還是不能夠自明。因此在十九世紀以後，興起了三派非歐几利得幾何學，各有各的立足之點。其中以 Reimann 所創的橢圓幾何學，最占優勢，且可與相對論一致。不過初學幾何的人，當然從歐几利得幾何學入手，因爲它與有限空間最最接近。

用歐氏第五公設證明定理十六，其法如下：



設 $l_1 \parallel l_2$，t 爲其截線，

求證：　$\angle 1 = \angle 2$。

證：　假定 $\angle 1$ 不等於 $\angle 2$，則兩角中必有一角較大。假定 $\angle 2 > \angle 1$，則 $\angle 2 + \angle 3 > \angle 1 + \angle 3$（不等量公理）

但　$\angle 2 + \angle 3 = 2\measuredangle R$（直線外邊鄰角和）

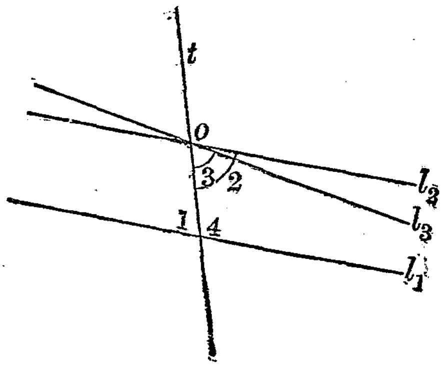
$\therefore$　$\angle 1 + \angle 3 < 2\measuredangle R$（不等量公量）

於是 l_1 與 l_2 交於右側（第五公設）

但已知　$l_1 \parallel l_2$

$\therefore$　假定 $\angle 2 > \angle 1$ 與已知條件矛盾

$\therefore$　$\angle 1 = \angle 2$



由此可證平行公理如下：

設 $l_2 \parallel l_1$, l_3 與 l_2 交於 O, 則 $l_3 \nparallel l_1$。因若作截線 t 過 O (在 l_1 上取任意點，與 O 相聯)，則 $\angle 1=\angle 2$。

但 $\angle 3<\angle 2$(全量大於其分)，

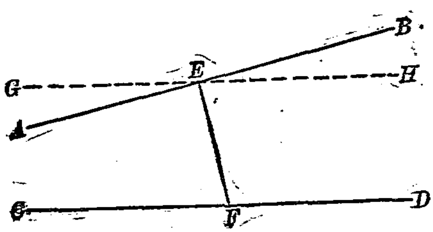
$\therefore$ $\angle 3<\angle 1$。

$\therefore$ $\angle 3+\angle 4<\angle 1+\angle 4$, 卽 $\angle 3+\angle 4<2\angle R$。

$\therefore$ l_3 與 l_1, 相交於右側。

(若 $\angle 3>\angle 2$, 則相交於左側。若 $\angle 3=\angle 2$, 則 l_3 與 l_2 合爲一線，並非已知條件)。

用 Playfair 平行公理證明第五公設如下：



設 AB, CD 與截線 EF 所成 $\angle AEF$ 與 $\angle EFC$ 二角，其和小於二直角。

求證： AB, CD 交於 A, C 一面。

證： 過 E 點作 GH, 與 EF 成角 GEF, 等於內錯角 EFD。

於是 $GH \parallel CD$。(§108, 定理十四)

可見 AB 必與 CD 相交；因若不相交，AB 亦將平行於 CD, 於是將有交於 E 點的二線，平行於同一線 CD, 這是不可

能的。(平行公理)。

AB, CD 旣必相交，則必與 EF 成一三角形。在三角形中，二角和小於二直角。現在已知 $\angle AEF$ 與 $\angle EFC$ 的和小於 $2\measuredangle R$, 所以這兩個角是所成三角形的二角，而 $\angle BEF$ 與 $\angle EFD$ 決不能成爲三角形的兩角，因爲它們的和大於 $2\measuredangle R$。

所以 AB, CD 交於 A, C 一面。

目解題十九、(在教科書第 126 面)

(1)直角三角形裏的一銳角是 $40°$。問別一銳角是幾度?

〔答〕 $50°$。

(2)三角形裏有二隻角都是 $60°$。其餘一隻角有多少度?

〔答〕 $60°$。

下列的題目裏面，ABC 是三角形，找出 $\angle C$ 的度數。

(3) $\angle A=40°$, $\angle B=80°$。

〔答〕 $\angle C=60°$。

(4) $\angle A=70°$, $\angle B=70°$。

〔答〕 $\angle C=40°$。

(5) $\angle A=50°$, $\angle B=50°$。

〔答〕 $\angle C=80°$。

(6) $\angle A=45°$, $\angle B=45°$。

〔答〕 $\angle C=90°$。

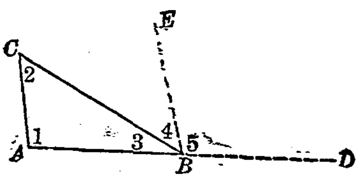


圖 1.

理解題四、(在教科書第 126 面)

(1)照左邊圖 1，證定理十七。

〔提示〕 $BE \parallel AC$, 於

是 $\angle 4=\angle 2$，$\angle 5=\angle 1$。

〔解〕 已知：$\triangle ABC$ 的三角是 $\angle 1,\angle 2$ 與 $\angle 3$。

求證： $\angle 1+\angle 2+\angle 3=2\measuredangle R$。

證： 延長 AB 到 D，(一線可以隨意延長)

過 B，作 $BE \parallel AC$ (幾何公法)

於是 $\angle 4=\angle 2$ ($\parallel s$ 與截線所成內錯角)

$\angle 5=\angle 1$ ($\parallel s$ 與截線所成同位角)

$\therefore$ $\angle 1+\angle 2+\angle 3=\angle 5+\angle 4+\angle 3$ (等量加等量)

但 $\angle 5+\angle 4+\angle 3=2\measuredangle R$ (外邊直線鄰角和)

$\therefore$ $\angle 1+\angle 2+\angle 3=2\measuredangle R$ (等於同量的量)

(2)用圖 2，再證定理十七。

〔提示〕 證$\angle 1=\angle 2$，

$\angle 3=\angle 4$，$\angle 5=\angle 6$。

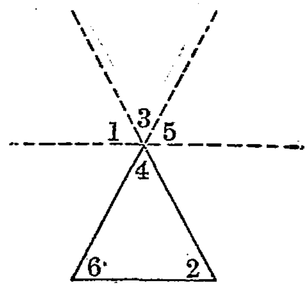


圖 2.

〔解〕 已知： $\angle 2$，$\angle 4$，$\angle 6$ 是 $\triangle$ 的三角。

求證： $\angle 2+\angle 4+\angle 6=2\measuredangle R$。

證： 過頂點作底邊的平行線，並從頂點延長其餘二邊，如圖所示。

於是 $\angle 1=\angle 2$，$\angle 5=\angle 6$

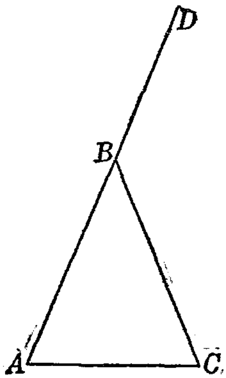
($\parallel s$ 與截線所成同位角相等)

又 $\angle 3=\angle 4$ (對頂角相等)

$\therefore$ $\angle 2+\angle 4+\angle 6=\angle 1+\angle 3+\angle 5=2\measuredangle R$

(3)若等腰 $\triangle ABC$ 裏面，$AB=BC$，試證 $\angle A$ 等於 $\angle B$ 上一隻外角的一半。

〔解〕 已知：$\triangle ABC$ 中，$AB=BC$；$\angle CBD$ 是 $\angle B$



上的外角。

求證：　$\angle A=\frac{1}{2}\angle CBD$。

證：　$\angle CBD=\angle A+\angle B$

（△ 的外角等於內對角的和）

但　　$\angle A=\angle B$(等腰△底角等)

$\therefore\ \angle CBD=\angle A+\angle A=2\angle A$

(普通公理 14)

卽　　$\angle A=\frac{1}{2}\angle CBD$(等量除等量)

目解題二十、（在教科書第 128 面）

（1）兩對鐵道互相穿過，如圖 1，裏面那幾個角相等，那幾對角是補角。

〔答〕 因爲各對鐵道是平行線，所以$\angle 1=\angle 9=\angle 15=\angle 13=\angle 11=\angle 5=\angle 3=\angle 7$。

又　$\angle 2=\angle 8=\angle 16=\angle 10=\angle 14=\angle 12=\angle 4=\angle 6$。

各對補角如下：

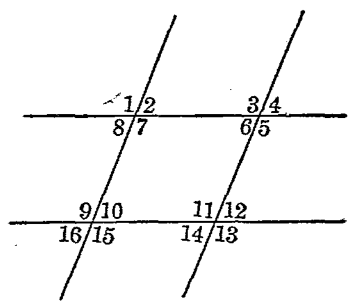


圖 1.

$\angle 1$ 與 $\angle 2$，$\angle 1$ 與 $\angle 4$，$\angle 1$ 與 $\angle 6$，$\angle 1$ 與 $\angle 8$，$\angle 1$ 與 $\angle 10$，$\angle 1$ 與 $\angle 12$，$\angle 1$ 與 $\angle 14$，$\angle 1$ 與 $\angle 16$，$\angle 2$ 與 $\angle 3$，$\angle 2$ 與 $\angle 5$，$\angle 2$ 與 $\angle 7$，$\angle 2$ 與 $\angle 9$，$\angle 2$ 與 $\angle 11$，$\angle 2$ 與 $\angle 13$，$\angle 2$ 與 $\angle 15$，$\angle 3$ 與 $\angle 4$，$\angle 3$ 與 $\angle 6$，$\angle 3$ 與 $\angle 8$，$\angle 3$ 與 $\angle 10$，$\angle 3$ 與 $\angle 12$，$\angle 3$ 與 $\angle 14$，$\angle 3$ 與 $\angle 16$，$\angle 4$ 與 $\angle 5$，$\angle 4$ 與 $\angle 7$，

$\angle 4$ 與 $\angle 9$, $\angle 4$ 與 $\angle 11$, $\angle 4$ 與 $\angle 13$, $\angle 4$ 與 $\angle 15$, $\angle 5$ 與 $\angle 6$, $\angle 5$ 與 $\angle 8$, $\angle 5$ 與 $\angle 10$, $\angle 5$ 與 $\angle 12$, $\angle 5$ 與 $\angle 14$, $\angle 5$ 與 $\angle 16$, $\angle 6$ 與 $\angle 7$, $\angle 6$ 與 $\angle 9$, $\angle 6$ 與$\angle 11$, $\angle 6$ 與 $\angle 13$, $\angle 6$ 與 $\angle 15$, $\angle 7$ 與 $\angle 8$, $\angle 7$ 與 $\angle 10$, $\angle 7$ 與 $\angle 12$, $\angle 7$ 與 $\angle 14$, $\angle 7$ 與 $\angle 16$, $\angle 8$ 與 $\angle 9$, $\angle 8$ 與 $\angle 11$, $\angle 8$ 與 $\angle 13$, $\angle 8$ 與 $\angle 15$, $\angle 9$ 與 $\angle 10$, $\angle 9$ 與 $\angle 12$, $\angle 9$ 與 $\angle 14$, $\angle 9$ 與 $\angle 16$, $\angle 10$ 與 $\angle 11$, $\angle 10$ 與 $\angle 13$, $\angle 10$ 與 $\angle 15$, $\angle 11$ 與 $\angle 12$, $\angle 11$ 與 $\angle 14$, $\angle 11$ 與 $\angle 16$, $\angle 12$ 與 $\angle 13$, $\angle 12$ 與 $\angle 15$, $\angle 13$ 與 $\angle 14$, $\angle 13$ 與 $\angle 16$, $\angle 14$ 與 $\angle 15$, $\angle 15$ 與 $\angle 16$。

(2)在同圖裏，若 $\angle 1=\angle 120^\circ$，找出 $\angle 3$, $\angle 9$, $\angle 11$, $\angle 5$ 各是多少度?

〔答　120°。

(3)把一張紙依 AB 摺攏(圖 2)，比齊 AD 同 AC，要使 $\angle BAC=\angle BAD$。證明 $\angle BAD$ 是一個直角。

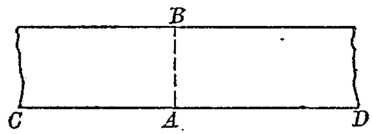


圖. 2.

〔證〕 $\angle BAD+\angle BAD=\angle BAC+\angle BAD$

$$2\angle s\,BAD=2\angle s\,R$$

$$\therefore\quad \angle BAD=\angle R$$

(4)要在紙上摺兩條平行的痕跡(圖 3)，應該怎樣摺法?

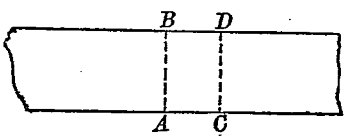


圖 3.

〔答〕 先照題 3 的方法，摺一條 AB 痕，再依同法摺 CD 痕。AB 與 CD 就是兩條平行的痕跡，因為它們是同一線(紙邊)的垂線。

(5)怎樣可以用一根直尺和一塊三角板來畫平行線?(圖4)

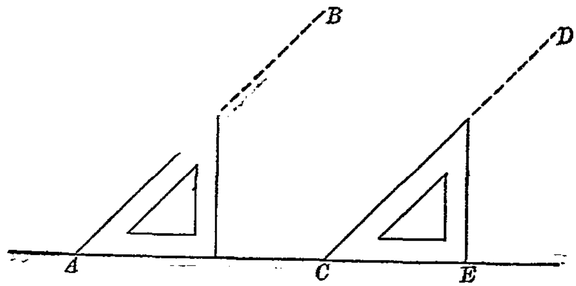


圖 4.

〔答〕 將直尺緊接於紙上,使它固定不動,然後把三角板的一邊靠緊尺邊,而將三角板移動,則沿三角板的其他二邊中任一邊(在圖4是斜邊)所畫的線,都是平行線,例如圖4的$AB \parallel CD$。此法所根據的定理如下:

二線與其截線所成的同位角若相等,則二線平行。

(6)T字尺怎樣可以用來畫平行線?(圖5)

〔答〕 將T字尺的頭,緊靠圖畫板的一邊而移動尺身時,沿尺所畫的線就是平行線,如圖5所示的便是。這些線是同一線的垂線,所以互相平行。

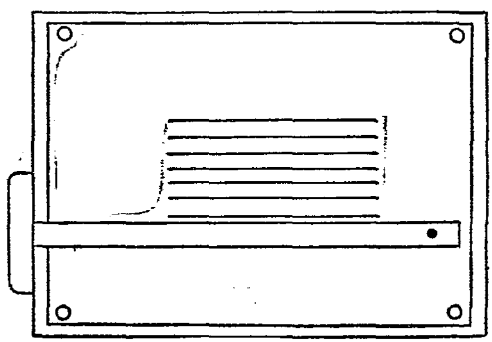


圖 5.

理解題五、(在教科書第129面)

(1)在下面圖1裏面，$\angle BAC=\angle 1+\angle 2$。證明 $l_1 \parallel l_2$。

〔解〕　已知：如題所述。

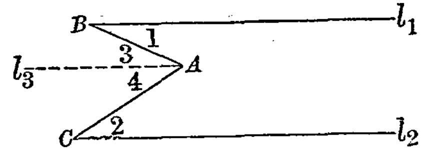


圖 1.

求證：　如題所述。

證：　過 A 點作 $l_3 \parallel l_1$（過線外一點，可作而祇可作一線，與原線平行。）

於是　　$\angle 3=\angle 1$（$\parallel s$ 與截線 AB 所成內錯角等）

但　$\angle 3+\angle 4=\angle BAC$（全量等於分量之和）

而　　$\angle BAC=\angle 1+\angle 2$（已知）

$\therefore$　$\angle 3+\angle 4=\angle 1+\angle 2$（等於同量的量相等）

而　　　$\angle 4=\angle 2$（等量減等量）

於是　　　$l_3 \parallel l_2$

（兩線與截線所成內錯角若相等，則兩線平行）

$\therefore$　　　$l_1 \parallel l_2$（與同一線平行）

附註：　補助線 l_3，初學者每誤爲題中已知的線，應令注意。又作 l_3 時，亦可先令 $\angle 3=\angle 1$，然後證明 $l_3 \parallel l_1$，再證 $\angle 4=\angle 2$，　$l_3 \parallel l_2$。

(2)若平行線被一截線所截，他的同位角的平分線，也必平行。

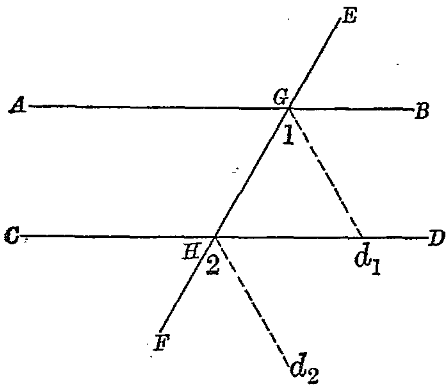
〔解〕　已知：$AB \parallel CD$，截線 EF 交 AB 於 G，交 CD 於 H，d_1 與 d_2 是一對同位角的平分線。

求證：　$d_1 \parallel d_2$。

證：　$\because$ $AB \parallel CD$，$\therefore$ $\angle BGH=\angle DHF$（§113）

但　$\angle 1=\frac{1}{2}\angle BGH$，$\angle 2=\frac{1}{2}\angle DHF$（已知）

$\therefore$　$\angle 1=\angle 2$（等量之半）

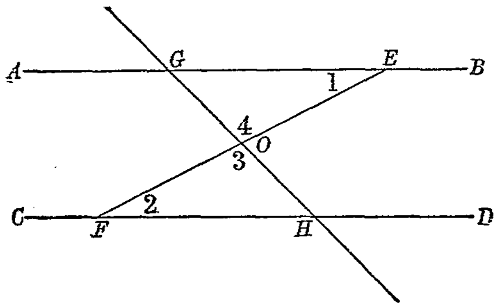


而　　$d_1 \parallel d_2$

(§110，定理十五)

(3)在兩平行線間的一截線，被他一截線所截，如成相等的兩線份，那麼他一截線也被分做相等的兩線份。

〔解〕已知：$AB \parallel CD$；截線 EF 交 AB，CD 於 E，F；截線 GH 交 AB，CD 於 G，H；GH 交 EF 於 O，$OE=OF$。



求證：$OG=OH$。

證：$\angle 1=\angle 2$ ($\parallel s$與截線所成內錯角等)

$\angle 3=\angle 4$ (對頂角相等)

$OE=OF$ (已知)

$\therefore\ \triangle OGE \equiv \triangle OHF$ ($a.\ s.\ a. \equiv a.\ s.\ a.$)

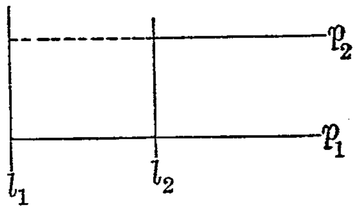
而　　$OG=OH$ (對應邊)

(4)垂直於平行線的兩直線，也相平行。

〔解〕已知：$p_1 \perp l_1$，$p_2 \perp l_2$，$l_1 \parallel l_2$。

求證：$p_1 \parallel p_2$。

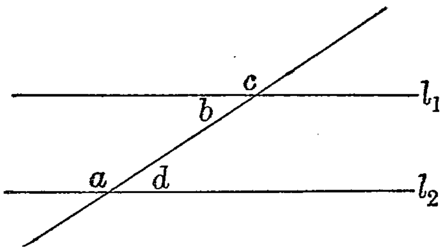
證：$\because\ l_1 \parallel l_2$，$p_2 \perp l_2$ (已知)



$\therefore$ $p_2 \perp l_1$（§ 111 推論一）

因此 $p_1 \parallel p_2$（同一線的垂線）。

附註：　此題初學者每誤以爲 p_1 與 p_2 都垂直於 l_1，或 l_2，應令注意。又，證明 p_1 與 p_2 同垂直於 l_2，亦可。



（5）如 $l_1 \parallel l_2$，$\angle a = 5 \times \angle b$，那麼 $\angle c$ 同 $\angle d$ 各是幾度？（圖 2）

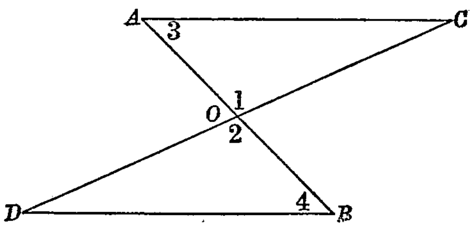
〔解〕$\angle a + \angle b = 180°$

$6\angle b = 180°$

$\angle b = 60°$

$$\therefore \quad \left.\begin{array}{l}\angle c = 180° - 60° = 120° \\ \angle d = \angle b = 60°\end{array}\right\}〔答〕$$

（6）AB，CD 兩線份相交在 O 點。若 $AO = OB$，$CO = OD$，試證 $AC \parallel BD$。



〔解〕　已知：如題所述。

求證：　如題所述。

證：　$AO = OB$

$CO = OD$

$\angle 1 = \angle 2$（對頂角相等）

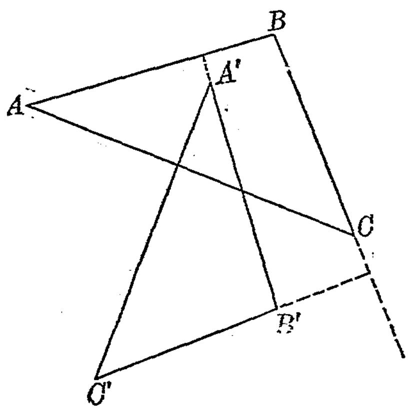
$\therefore$　$\triangle AOC \equiv \triangle BOD$（$s.\ a.\ s. \equiv s.\ a.\ s.$）

而　$\angle 3=\angle 4$ (全等形對應角)

$\therefore$　$AC \parallel BD$ (§108)

理解題六、(在教科書第 132 面到第 133 面)

(1)已知 $\triangle ABC$ 同 $A'B'C'$ 裏，$AB \perp A'B'$，$BC \perp B'C'$，$CA \perp C'A'$，求他們各角的關係。



〔解〕 如題得左圖。依據 §115 定理二十及普通公理 8，知各角的關係可有下列各組中的一組，而祇有一組：

(a) $\angle A+\angle A'=2\angle\text{s}R$,
$\angle B+\angle B'=2\angle\text{s}R$,
$\angle C+\angle C'=2\angle\text{s}R$。

(b) $\angle A+\angle A'=2\angle\text{s}R$,
$\angle B+\angle B'=2\angle\text{s}R$,
$\angle C=\angle C'$。

(c) $\angle A+\angle A'=2\angle\text{s}R$, $\angle B=\angle B'$, $\angle C=\angle C'$。

(d) $\angle A=\angle A'$, $\angle B=\angle B'$, $\angle C=\angle C'$。

假定 (a) 成立，則

$\angle A+\angle B+\angle C+\angle A'+\angle B'+C'=6\angle\text{s}R$。…………(1)

但　$\angle A+\angle B+\angle C=2\angle\text{s}R$, (定理十七)

$\angle A'+\angle B'+\angle C'=2\angle\text{s}R$

卽　$\angle A+\angle B+\angle C+\angle A'+\angle B'+\angle C'=4\angle\text{s}R$(2)

$\therefore$　(1) 與 (2) 矛盾，而 (a) 不能成立。

假定 (b) 成立，則

$\angle A+\angle B+\angle C+\angle A'+\angle B'+\angle C'$

$$=4\measuredangle R+(\angle C+\angle C')\cdots(3)$$

(3) 與 (4) 也相矛盾， ∴ (b)也不能成立。

假定(c)成立，則

$$\angle A+\angle B+\angle C+\angle A'+\angle B'+\angle C'=2\measuredangle R+2\measuredangle B+2\measuredangle C,$$

即　$$4\measuredangle R=2(\angle R+\angle B+\angle C)$$

∴　$\angle B+\angle C+\angle R=2\measuredangle R$ （等量之半）

而　$\angle B+\angle C=\angle R$　（等量減等量）

∴　$\angle A=\angle R=\angle A'$

於是 (c) 成爲 (d) 的特例。

∴ (d) 的關係成立，卽各角對應相等。〔答〕

(2)三角形一隻角的外角是 120°， 他的內對角的差是 15°。求這三角形的各角。

〔解〕 命 x 與 y 代表這兩隻內角的度數，z 代表第三角，則

$$x+y+z=180°\cdots\cdots(1)$$
$$x+y\quad=120°\cdots\cdots(2)$$
$$x-y\quad=15°\cdots\cdots(3)$$

解聯立方程式，得 $x=67°.5$， $y=52°.5$，

$$z=60°。$$

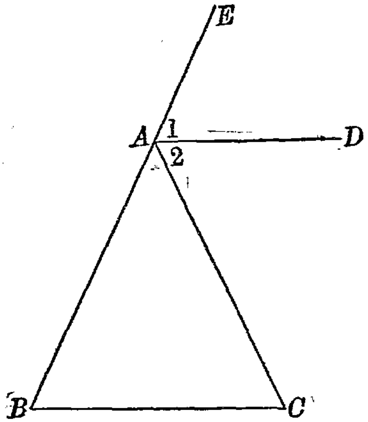
〔答〕 三角是 52°.5， 60°， 67°.5。

(3)一個等腰三角形的頂角是 60°。試問那底邊上的外角幾度？

〔答〕 120°。

(4)試證等腰三角形靠頂點的外角的平分線，必同他的底平行。

〔解〕 已知： $\triangle ABC$ 中 $AB=AC$; AD 平分頂點外角 $\angle EAC$。



求證：　$AD \parallel BC$。

證：　$\angle 1+\angle 2=\angle B+\angle C$

(△外角＝內對角和)

但　$\angle 1=\angle 2$ (已知)

$\angle B=\angle C$

(等腰△底角等)

∴　$2\angle_s 2=2\angle_s C$

(等量代等量)

即　$\angle 2=\angle C$

(等量除等量)

∴　$AD \parallel BC$ (§108)

(5)一個水手划船，從 A 處向 AD 方向出發，原來知道 $\angle DAC=40°$，後來划到 64 里的地方，他找出 $\angle DBC$ 變為 80°了。他於是斷定 BC 的距離，必定也是 64 里，這話對不對？(看圖 1)

〔提示〕　證明 $\triangle ABC$ 是等腰三角形。

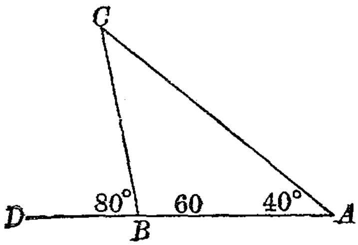


圖 1.

〔答〕　這話對的，證明如下：

$80°=40°+\angle C$　(△外角＝內對角和)

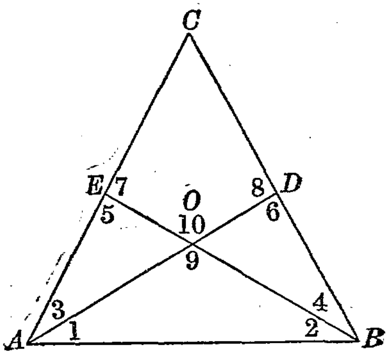
∴　$\angle C=40°=\angle A$ (等量公理)

於是 $BC=AB=64$ 里

(△中有兩角等，對這兩角的邊也等)

(6)設等腰三角形 ABC 的底角平分線 AD 同 BE 相交於 O，能夠成功那幾對等角？幾對全等三角形？幾對相等的線

份？



〔答〕 各對等角如下：

$\angle 1=\angle 2$，$\angle 3=\angle 4$，

$\angle 5=\angle 6$，$\angle 7=\angle 8$，

$\angle 9=\angle 10$。

各對全等△如下：

$\triangle AOE\equiv\triangle BOD$，

$\triangle AEB\equiv\triangle BDC$，

$\triangle ACD\equiv\triangle BCE$。

各對相等線份如下：

$AO=BO$，$OD=OE$，$AD=BE$，$AE=BD$，$CE=CD$。

（證明從略）

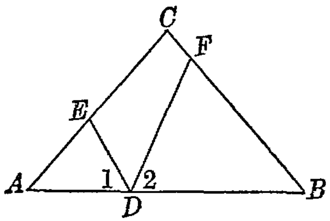


圖 2.

（7）設等腰三角形 ABC 內，D 爲底上的一點，而且 $\angle 1=\angle 2$，試問有沒有一個 D 點的地位，能令 $DE=DF$ 的麼？（圖 2。）

〔解〕 假定 D 在某一地位，能令 $DE=DF$，則因 $\angle 1=\angle 2$（已知），$\angle A=\angle B$（等腰△底角等），$\angle AED=\angle BFD$（兩△有兩角相等，第三角也等），∴ $\triangle AED\equiv\triangle BFD$。於是 $AD=DB$。可見合這個條件的 D 點，是 AB 的中點。

現在再證明設 D 是 AB 的中點，$DE=DF$。在△ ADE 與 $\triangle BDF$ 中，有

$$AD=DB,\ \angle 1=\angle 2,\ \angle A=\angle B$$

$$\triangle ADE\equiv\triangle BDF$$

而 $DE=DF$

$\therefore$ D 是 AB 的中點，爲使 $DE=DF$ 的充要條件。

附註： 充要條件卽充分與必要的條件。在算學上由第一事實以決定第二事實，必須證明第一事實旣屬充分而又爲必要。其定義如下：

設有事實 A，卽可證明有事實 B，A 就是 B 的充分條件。倒過來設有事實 B，卽可證明有事實 A，A 就是 B 的必要條件。換句話說，由 A 到 B 的關係可以倒過來，A 就是 B 的充要條件。例如

四邊形的對邊兩兩相等，該四邊形是 ▱，這是可以證明的。

▱ 的對邊兩兩相等，這也是可以證明的。

所以對邊兩兩相等，便是「四邊形爲▱」的充要條件。

(8)一個等腰三角形的頂角是直角，其餘兩銳角的平分線相交所成對底邊的角是多少度？

〔答〕 $135°$。

目解題二十一、(在教科書第 140 面)

(1)說出平行四邊形的定義。

〔答〕兩雙對邊都平行的四邊形，叫做平行四邊形。

(2)從平行四邊形定理，試舉出他的幾個性質。

〔答〕 (1)對角線分全形爲兩個全等$\triangle$。

(2)兩對角線互相平分。

(3)兩雙對邊相等。

(4)兩雙對角相等。

(3)全等平行四邊形定理，是用什麼證法。前面幾個定理

曾用同樣法子證過麼?

〔答〕　理想重合法,以前證全等 △ 定理時曾用過的。

附註：　理想重合法除不得不用於證明基本全等形定理外,宜力圖避免。嘗見初學者極喜用此方法,實屬不當之至,教者須加注意。

全等平行四邊形定理,往往有人用下法證明:

$\because$　$\angle A=\angle A'$,

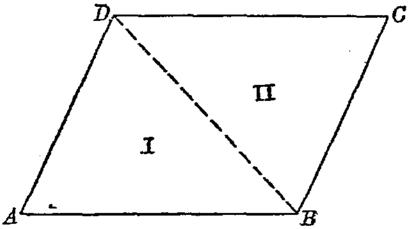
$AB=A'B'$,

$AD=A'D'$。

$\therefore$　$\triangle\mathrm{I}\equiv\triangle\mathrm{I}'$

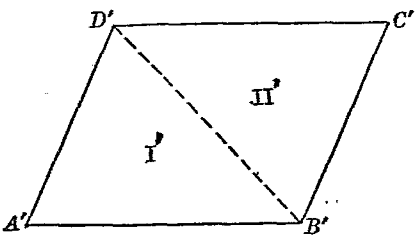
同樣可證 $\triangle\mathrm{II}\equiv\triangle\mathrm{II}'$

($\because$ ▱ 對角線平分全形)



$\therefore$ $\triangle\mathrm{I}+\triangle\mathrm{II}\equiv\triangle\mathrm{I}'+\triangle\mathrm{II}'$ ……………(A)

即　▱$ABCD\equiv$▱$A'B'C'D'$。



須知如此證法,大謬特謬。因爲 (A) 祇可表示面積相等的關係,不能表示全等的關係也。將 $\triangle\mathrm{II}'$ 翻一個身拼上去,仍可得 (A) 的關係,但是兩四邊形却顯然不全等了。初學者對於這一層每每誤會,教者必須開導他們纔是。

目解題二十二、(在教科書第 144 面到第 145 面)

(1)聯結 $\triangle ABC$ 內各邊的中點; D, E, F, 設 $AB=22$

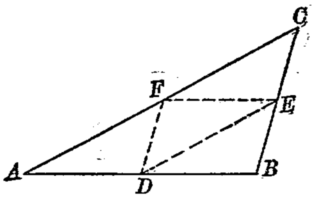


圖 1.

公分，$BC=14$ 公分，$AC=28$ 公分。找出 DE, DF, 同 EF（圖1）。

〔答〕 從 §121 定理二十六推論五，知道

$DE=14$ 公分，$DF=7$ 公分，$EF=11$ 公分。

（2）如圖 2 過 $\triangle ABC$ 各頂點，畫和對邊平行的各線。

(a) $ABDC$ 是什麼形？

(b) 比較 AB 同 CD; BD 同 AC。

(c) 同樣比較 AB 同 CF; BC 同 AF; AC 同 BE; CB 同 AE。

〔答〕 (a) $ABDC$ 是平行四邊形。

(b) $AB=CD$,

$BD=AC$。

(c) $AB=CF$,

$BC=AF$,

$AC=BE$,

$CB=AE$。

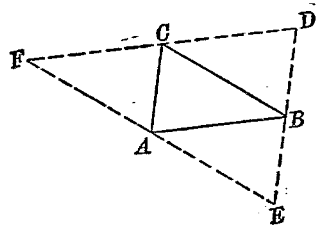


圖 2.

（3）上面圖 2 裏邊，

(a) BC 等於 EF 的一半麼？如果這樣，什麼緣故？

(b) 同樣比較 AC 同 ED, AB 同 FD。

〔答〕 (a) $BC=\frac{1}{2}EF$, 因為 BC 是 $\triangle DEF$ 兩邊中點的聯線。

(b) $AC=\frac{1}{2}ED$, $AB=\frac{1}{2}FD$。

（4）又在上邊圖 2 裏面，若 $AB=3$ 吋，$BC=3$ 吋半，$AC=2$ 吋半，找出 DF, FE, 同 ED。

〔答〕　$DF=6$ 吋，$FE=7$ 吋，$ED=5$ 吋。

（5）用平常的尺，我們怎樣去測定幾條平行線是不是等距離?是不是一定要使這尺同這些線成直角,才可以測得出來麼?

〔答〕　將尺放在任意地位,使尺邊穿過各線,即使尺邊成爲這些平行線的截線,然後看它們在尺邊上截取的分寸,是否相等,就可知道它們是不是等距離。因爲從定理二十六,假使這尺在任何地位被各平行線截取相等的分寸，那麼尺在垂直各線時,也被它們截取相等的分寸,所以不必使尺同各平行線成直角。

（6）倘梯形的一底是五吋,又一底是二吋,中線的長是多少?

〔答〕　中線長$=\frac{1}{2}(5+2)=3.5$ 吋。

（7）倘梯形的一底是六吋，中線是五吋，其他一底是多少?

〔解〕　命 $x=$其他一底長度吋數，

則 $5=\frac{1}{2}(6+x)$。

解方程式 $x=4$。

〔答〕　其他一底長 4 吋。

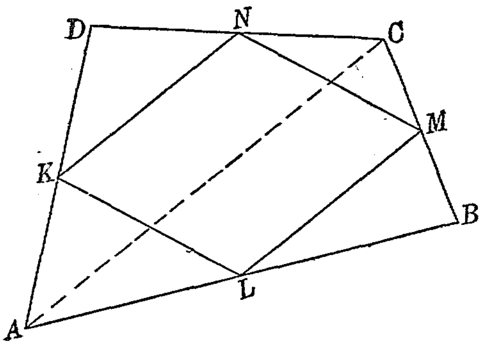
理解題七、（在教科書第 145 面到第 146 面）

（1）聯結四邊形相鄰各邊的中點，證明所成的必是一個平行四邊形。

〔解〕　已知：L, M, N, K, 是四邊形 $ABCD$ 四邊的中點。

求證：　$KLMN$ 是 $\square$。

證：　作四邊形 $ABCD$ 的對角線 AC。



則在 $\triangle ADC$ 中，因 K, N 是 AD, DC 的中點，

$\therefore\quad KN \parallel AC,$

$KN=\frac{1}{2}AC$。

（△兩邊中點聯線，平行第三邊而等於其半）

又在 $\triangle ABC$ 中，因 L, M 是 AB, BC 的中點，

$\therefore\quad LM \parallel AC,\ LM=\frac{1}{2}AC$。(同上)

於是 $LM \parallel KN$ (同平行於一線)

$LM=KN$ (等於同量)

而 $KLMN$ 是 ▱ (§118 定理二十三)

(2)三等分等邊三角形的每邊，照圖1畫線，試證 $\angle A=\angle F=\angle B$。

〔提示〕 $\angle A=60°$，

$AD=AE$。

$\therefore\quad \angle EDA=\angle FDG=60°$，

同様 $\angle DGF=60°$。

$\therefore\quad F=60°$。

〔解〕 已知：如題。

求證：如題。

證：$AD=\frac{1}{3}AB$

$AE=\frac{1}{3}AC$

但 $AB=AC$

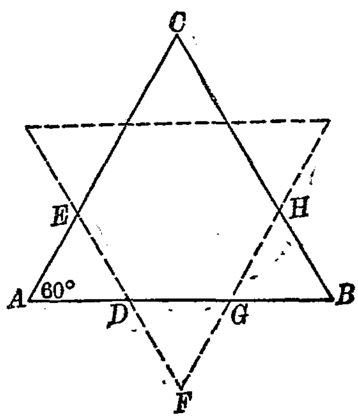


圖 1.

$\therefore\quad AD=AE$

於是　$\angle ADE=\angle AED$ (等腰 $\triangle$ 底角等)

但　$\angle A=\angle B=\angle C=60°$ ($\because$三邊相等)

$\therefore\quad \angle ADE+\angle AED=120°$

卽　$2\angle ADE=120°$, $\angle ADE=60°$。

因此　$\angle FDG=\angle ADE=60°$。

同樣可證 $\angle DGF=\angle BGH=60°$。

於是　$\angle F=60°=\angle A=\angle B$。

(3)幾根棒用釘連住，可以自由活動，如右圖 2，假若 $AB=AC$，證明不管 BC 傾斜到甚麼地步，那垂直距離 AD 同 CE 總相等。

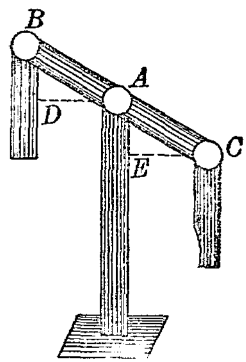


圖 2.

〔解〕　兩面的短棒，常與地面垂直，所以是常相平行的。因此

已知：　$AE \parallel BD$, $AB=AC$,

$AD \parallel BD$, $CE \perp AE$。

求證：　$AD=CE$。

證：　在直角 $\triangle$s ADB 與 CEA 中，有　$\angle ABD=\angle CAE$ ($\parallel s$ 與截線所成內錯角)

$\therefore\quad \angle BAD=\angle ACE$

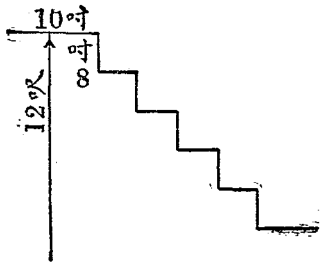
又　$AB=AC$

$\therefore\quad \triangle ADB\equiv\triangle CEA$ ($a.\ s.\ a.\equiv a.\ s.\ a.$)

而　$AD=CE$ (對應邊)

(4)有樓梯從下到上，高十二呎。每步八吋高，十吋寬。試問要多少長的地氈，才可以把這梯舖滿，舖到樓還多十吋？

〔解〕　$12\times12=144$, $144\div8=18$, $18-1=17$,



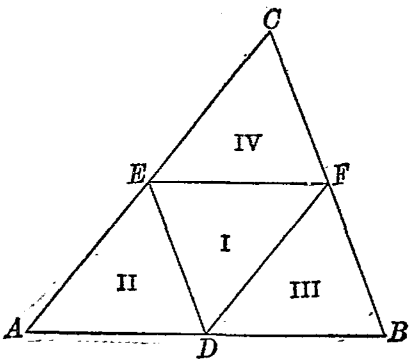
$17\times8+10+12=158$,

$158\div12=13\frac{2}{12}$。

〔答〕 要用地氈 13 呎 2 吋。

（5）ABC 是任意 △，D 是底邊 AB 的中點，$DE \parallel BC$，交 AC 於 E；$DF \parallel AC$，交 BC 於 F；畫 EF，並證四個三角形都相等。

〔解〕 已知：如題所述。（看右圖）



求證：　$\triangle I=\triangle II$

$=\triangle III$

$=\triangle IV$。

證：　$\triangle I=\triangle IV$

（▱ 對角線平分全形）

$AE=EC,\ BF=FC$

（過 △ 一邊中點平行於他邊的線，必平分第三邊）

∴　$EF \parallel AB$（△兩邊中點聯線 ∥ 第三邊）

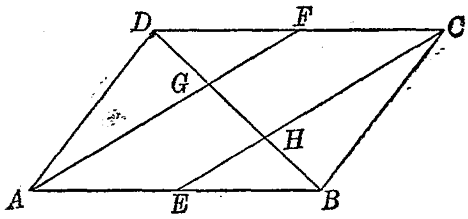
於是　$\triangle I=\triangle II,\ \triangle I=\triangle IV$。

（▱ 對角線平分全形）

∴　$\triangle I=\triangle II=\triangle III=\triangle IV$（等於同量）

（6）▱$ABCD$ 裏面，E, F 是 AB, CD 的中點，證明 AF, CE 三等分 DB。

〔解〕 已知：如題所述。（看下圖）



求證：$DG=GH$
$=HB$。

證：　$AE=\frac{1}{2}AB$，
$CF=\frac{1}{2}CD$
(已知)

但　$AB=CD$
(▱對邊相等)

∴　$AE=CF$ (等量之半)

又　$AE \parallel CF$ (▱定義)

∴　$AECF$ 是 ▱ (一雙對邊 ∥ 而且相等)

而　$AF \parallel EC$ (▱定義)

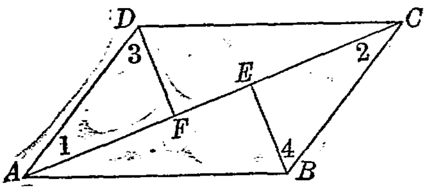
於是就 $\triangle DHC$ 而論，$DG=GH$。

(過 △ 一邊中點，∥ 他邊的線，必平分第三邊)

就 $\triangle ABG$ 而論，$GH=HB$ (同上)

∴　$DG=GH=HB$ (等於同量)

(7)從 ▱ 的頂點，畫對角線的垂線，求證這垂線都相等。



〔解〕　已知：

▱$ABCD$ 中，AC 爲對角線；$BE \perp AC$，與 AC 交於 E；$DF \perp AC$，與 AC 交於 F。

求證：　$BE=DF$。

證：　在直角 ⊿ADF 與 BEC 中，

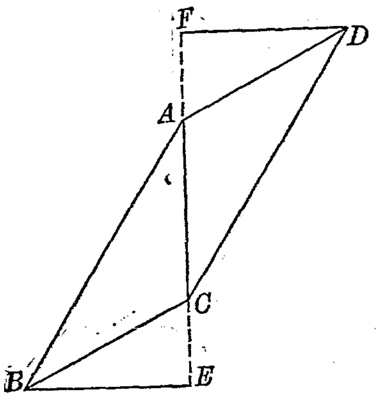
$\angle 1=\angle 2$ (∥s 與截線所成內錯角)

∴　$\angle 3=\angle 4$ (直角 ⊿ 有一銳角等，第二銳角亦等)

但　$AD=BC$（▱對邊等）

∴　$\triangle ADF\cong\triangle BEC$，而 $BE=DF$。

附註：　此題尙有一重要之點，卽 E 與 F 必同在形內，式同在形外（見左圖）。此點可以證明如下：

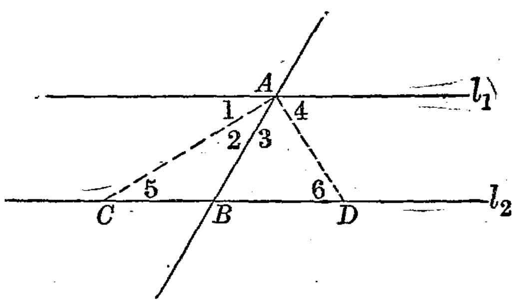


設 E 在形外，則 $\angle B$ $\angle A$ 爲 $\triangle BCE$ 的外角，∴ $\angle BCA>\angle R$。但 $\angle DAC=\angle BCA$，∴ $\angle DAC>\angle R$。於是 F 點不得不在形外，因若在形內，則 $\angle DFC$ 將 $>\angle R$，與假設不合了。E 在形內，F 亦在形內的證法，與此相似。

（8）下圖裏面，l_1 l_2 兩平行線被 AB 所截，AC 和 AD 平分 A 處的兩內角。證明 $\triangle CBA$，DBA 都是等腰三角形。

〔解〕已知：如題所述。

求證：如題所述。



證：$\angle 2=\angle 1$（已知）

$\angle 1=\angle 5$（內錯角）

∴　$\angle 2=\angle 5$　（等於同量）

而　$BC=BA$　（△的兩角等，其所對兩邊亦等）

同樣可證　$BA=BD$。

目解題二十三、（在教科書第 150 面到第 151 面）

（1）直徑一呎長的車輪在他的軌道上進行，這輪軸的中心點的軌跡是什麼？

〔答〕 是一條直線，在軌道上方，平行於軌道，其與軌道的距離，等於輪的半徑。

（2）和本書這頁的下邊同右邊等遠的點的軌跡是什麼？

〔答〕 是本頁右下角的平分線。

（3）一架鐘上面長針端點的軌跡是什麼？

〔答〕 是一個圓，圓心在針軸，半徑等於長針的長。

（4）離開一定點二吋長的點的軌跡是什麼？

〔答〕 是一個圓，以定點爲心，二吋長爲半徑。

（5）離開一定直線 2 公分遠的點的軌跡是什麼？

〔答〕 是兩條直線，在定直線兩側，平行於定直線，各與定直線相距 2 公分。

（6）和兩個平行直線等距離的點的軌跡是什麼？

〔答〕 是一條直線，平行於原二線，介於二線中間。

目解題二十四、（在教科書第 154 面）

（1）四角形各角的和等於多少直角？

〔答〕 $2(4-2)=4\measuredangle R$。

（2）五角形各角的和等於多少直角？等角五角形的一隻角是多少度？

〔答〕 五角形內角和$=2(5-2)=6\measuredangle R$。

等角五角形每角$=\frac{6}{5}\measuredangle R=108°$。

(3)等角五角形的每一外角是多少度?

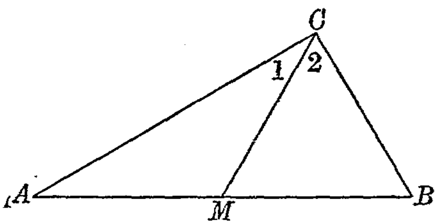
〔答〕 $\frac{4}{5}\angle R=72°$。

(4)等角十角形的外角是多少度?

〔答〕 $\frac{4}{10}\angle R=36°$。

理解題八、(在教科書第 166 面到第 170 面)

(1)在一個三角形的底邊上的中線,若等於底邊的一半,那麼這個三角形是直角三角形。



〔解〕 已知: $\triangle ABC$ 中 M 是 AB 的中點, $CM=\frac{1}{2}AB$。

求證: $\angle ACB=\angle R$。

證: $AM=\frac{1}{2}AB$,

$CM=\frac{1}{2}AB$

$\therefore \quad CM=AM$,

$\angle 1=\angle A$ (等腰 △ 底角)

同樣可證 $\angle 2=\angle B$

$\therefore \quad \angle 1+\angle 2=\angle ACB=\angle A+\angle B$

但 $\angle ACB+\angle A+\angle B=2\angle s R$

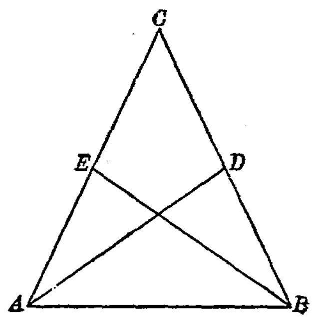
(△內角和)

$\therefore \quad 2\angle s ACB=2\angle s R$

(等量代等量)

即 $\angle ACB=\angle R$

(2)等腰三角形兩腰上的中線相等。



〔解〕 已知: $\triangle ABC$ 中, $AC=BC$; AD, BE 爲中線。

求證：　$AD=BE$。

證：　$AC=BC$　(已知)

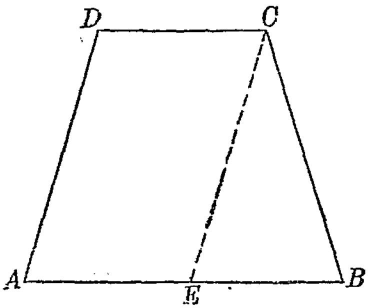
$CD=\frac{1}{2}BC$, $CE=\frac{1}{2}AC$

∴　$CD=CE$　$\angle C=\angle C$

∴　$\triangle ACD\equiv\triangle BCE$

因此　$AD=BE$　(全等形對應邊)

(3)梯形底邊兩端的角若相等，那麼這個梯形的不平行的兩邊也相等。



〔解〕　已知：$ABCD$ 是梯形，$AB \parallel CD$, $\angle A=\angle B$。

求證：　$AD=BC$。

證：　過 C 點作$CE \parallel AD$，而交 AB 於 E。

於是　$CE=AD$　(▱ 對邊等)

$\angle A=\angle CEB$　(同位角)

但　$\angle A=\angle B$　(已知)

∴　$\angle CEB=\angle B$　(等於同量)

因此　$CE=CB$　(△ 兩角等,其對邊亦等)

∴　$AD=BC$　(等於同量)

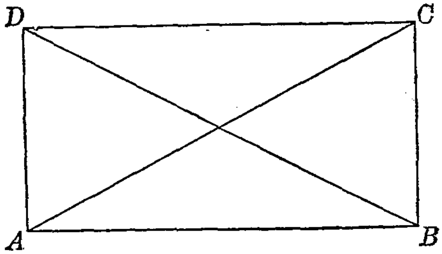
附註：　此法名爲平行移動法,用處甚多。

(4)平行四邊形的對角線若相等，那麼這個平行四邊形是一個長方形。

〔解〕　已知：$ABCD$ 爲 ▱，其中對角線 $AC=BD$。

求證：　$ABCD$ 爲矩形。

證：　$AD=BC$　(▱ 對邊相等)



$AD=AC$

(已知)

$AB=AB$

(合一)

$\therefore \triangle ABD\equiv\triangle ABC$

$(s.s.s.\equiv s.s.s.)$

$\angle DAB=\angle ABC$

(對應角)

但　$\angle DAB+\angle ABC=2\angle s R$ (同側內角)

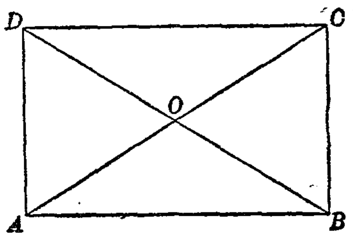
$\therefore$　$2\angle s DAB=2\angle s R$, 卽 $\angle DAB=\angle R=\angle ABC$

因　$\angle DAB=\angle BCD$ ($\square$ 對角等)

$\therefore$　$\angle DAB=\angle ABC=\angle BCD=\angle CDA=\angle R$

卽　$ABCD$ 爲長方形。

附註：　本題尙有一證法，卽利用第1題證明各角 $=\angle R$ 便是。如右圖，$OA=\frac{1}{2}AC$, $OB=\frac{1}{2}BD$, 但 $AC=BD$, $\therefore OA=OB=OD=OC$。因此由第一題，　可證　$\angle A=\angle B=\angle C=\angle D=\angle R$。



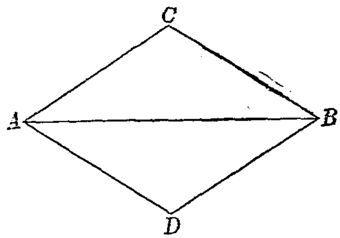
(5)若經過等腰三角形底邊的兩端畫兩線，各同一腰平行，那麼又可成功另外一個等腰三角形。

〔解〕　已知：$\triangle ABC$ 中有

$AC=BC$;

$AD\parallel BC$,

$BD\parallel AC$, 交 AD 於 D。



求證：　$\triangle ADB$ 爲等腰三角形。

證：　$ADBC$ 爲 ▱（▱定義）

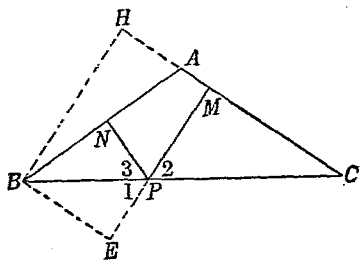
$\therefore$　$AD=BC$, $BD=AC$（▱對邊等）

但　$AC=BC$（已知）

$\therefore$　$AD=BD$（等於同量）

卽　$\triangle ADB$ 爲等腰三角形。

（6）等腰三角形底邊上隨便那一點到兩腰的垂線的和，等於底邊一端到對邊的高。



〔解〕　已知：　$\triangle ABC$ 中 $AB=AC$; P 爲 BC 上任何點，$PM \perp AC$, $PN \perp AB$; BH 是 AC 上的高。

求證：　$PM+PN=BH$。

證：　延長 MP 到 E, 使 $PE=PN$, 聯 BE。

因　$\angle ABC=\angle C$（等腰 △ 底角等）

$\angle BNP=\angle R=\angle PMC$（已知）

$\therefore$　$\angle 3=\angle 2$（兩 ⊿ 有兩角等，第三角亦等）

但　$\angle 2=\angle 1$（對頂角）

$\therefore$　$\angle 3=\angle 1$（等於同量）

又因　$PE=PN$（所作）$PB=PB$（合一）

$\therefore$　$\triangle BNP\equiv\triangle BPE$（s. a. s. $\equiv$ s. a. s.）

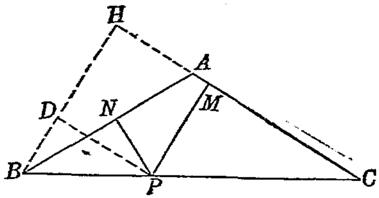
而　$\angle E=\angle BNP=\angle R$（對應角）

於是　$EM \parallel BH$，$EB \parallel MH$　（同一線的 ⊥s）

∴　$BEMH$ 爲 ▱ 而 $EM=BH$

但　$EM=PM+PE=PM+PN$

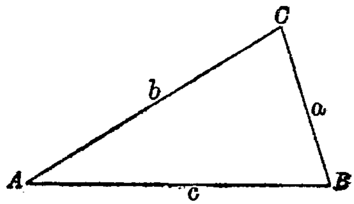
∴　$PM+PN=BH$（等量代等量）



附註：延長 MP 到 E，使 $ME=BH$，然後證明 $PE=PN$，也可以的。又若在 BH 上截取 $HD=PM$；然後證明 $BD=PN$；或截取 $BD=PN$，然後證明 $DH=PM$，也可以的。凡證明 a 線（或角）$+b$ 線（或角）$=c$ 線（或角），常作一線（或角）等於 $a+b$，而證明其等於 c；或作一線（或角）等於 $c-a$（或 $c-b$），而證明其等於 b（或 c）；這是幾何學上證題的方法，宜使初學注意。

（7）證明三角形的隨便那一邊，比其餘兩邊的差大。

〔解〕已知：a, b, c 是 $\triangle ABC$ 的三邊長。



求證：$a>b\sim c$, $b>c\sim a$, $c>a\sim b$。

證：$a+b>c$, $a+c>b$（兩點之間直線最短）

∴　$a>c-b$ 或 $a>b-c$

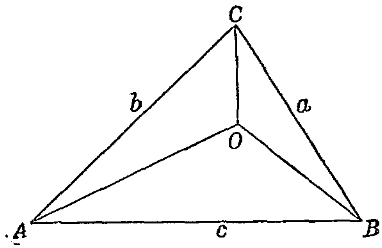
即　$a>b\sim c$

同樣可證　$b>c\sim a$, $c>a\sim b$。

附註："$\sim$"是相差的記號，指示由前量減後量或後量減

前量。

(8)三角形裏隨便那一點到三頂點的距離的和，比三邊和的一半大。



〔解〕 已知： O 是 $\triangle ABC$ 中隨便一點。

求證： $OA+OB+OC>\frac{1}{2}(a+b+c)$。

證： $OB+OC>a$,

$OC+OA>b$,

$OA+OB>c$

$\therefore\quad OB+OC+OC+OA+OA+OB>a+b+c$

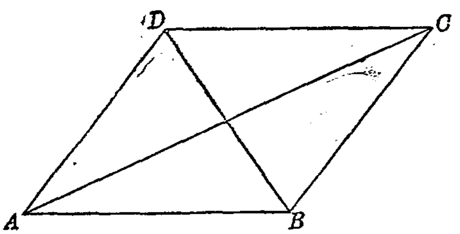
(若 $a>b$, $c>d$, 則 $a+c>b+d$)

即 $2(OA+OB+OC)>a+b+c$

$\therefore\quad OA+OB+OC>\frac{1}{2}(a+b+c)$

(以同一正數除不等量，大者的商仍大)

(9)若平行四邊形的兩對角線不等，那麼這個平行四邊形不是長方形。



〔解〕 已知： $\square ABCD$ 中，對角線 AC 大於 BD。

求證： $\angle ABC>\angle R$。

證： 在 $\triangle ABC$ 與 $\triangle ABD$ 中，有

$AD=BC$ ($\square$ 對邊等)

$AB=AB$ (合一)

但　　$AC>BD$（已知）

$\therefore$　$\angle ABC>\angle BAD$

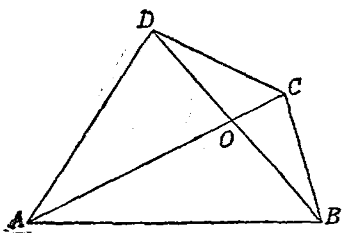
（兩 $\triangle$ 有兩邊對應等，若第三邊不等，則等邊的夾角亦不等，對大邊的較大。）

$\therefore$　$2\angle ABC>\angle ABC+\angle BAD$

但　$\angle ABC+\angle BAD>2\angle R$

$\therefore$　$2\angle ABC>2\angle R$，卽 $\angle ABC>\angle R$

(10)四邊形各邊的和，比兩對角線的和大，比這和的兩倍小。



〔解〕 已知：四邊形 $ABCD$, AC, BD 是它的對角線。

求證：(a) $AB+BC+CD+DA>AC+BD$

(b) $AB+BC+CD+DA<2(AC+BD)$

證：(a) $\left.\begin{array}{l}AB+BC>AC\\BC+CD>BD\\CD+DA>AC\\DA+AB>BD\end{array}\right\}$(兩點中間直線最短)

$\therefore$　$2(AB+BC+CD+DA)>2(AC+BD)$

卽　$AB+BC+CD+DA>AC+BD$

(b)　設兩對角線的交點是 O，則

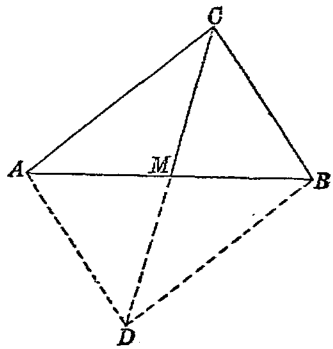
$\left.\begin{array}{l}AB<OA+OB\\BC<OB+OC\\CD<OC+OD\\DA<OD+OA\end{array}\right\}$(兩點間直線最短)

$\therefore\quad AB+BC+CD+DA<2(OA+OB+OC+OD)$

即　$AB+BC+CD+DA<2(AC+BD)$

(11)三角形兩邊的和,比第三邊上中線的兩倍大。

〔解〕　已知: CM 是 $\triangle ABC$ 的中線。



求證:　$AC+BC>2CM$。

證:　延長 CM 至 D, 使 $CM=MD$, 聯 AD 與 BD。

因　$AM=MB$ (已知)

$\therefore$　$ADBC$ 爲 $\square$。

(四邊形的兩對角線互相平分,則此四邊形是平行四邊形)

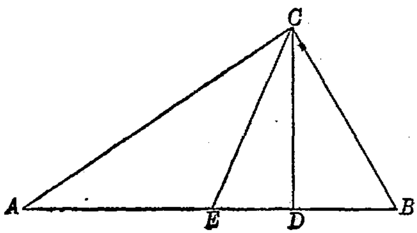
$\therefore$　$BD=AC$ ($\square$ 對邊等)

但　$BD+BC>CD$

而　$CD=2CM$ ($\because$ $CM=MD$)

$\therefore$　$AC+BC>2CM$ (等量代等量)。

(12)　在 $\triangle ABC$ 裏, 若 $AC>BC$, $CD\perp AB$, CE 是 AB 上的中線。證明: (1) $\angle ACD>\angle BCD$; (2) $\angle AEC>\angle BEC$。



〔提示〕　$\angle B>\angle A$; $\angle CED<\angle R$。

〔解〕　已知: $\triangle ABC$ 中 $AC>BC$; $CD\perp AB$; CE 是 AB 上的中線。

求證:　(1) $\angle ACD>\angle BCD$; (2) $\angle AEC>\angle BEC$。

證： (1) $\angle ACD+\angle A=\angle R=\angle BCD+\angle B$

(直角 △ 兩銳角和 $=\angle R$)

但 $\angle A<\angle B$

(一 △ 中兩邊不等，對大邊之角較大)

$\therefore$ $\angle ACD>\angle BCD$

(若 $a>b$, $c=d$, 則 $c-a<d-b$)

(2) 在 $\triangle$ ACE 與 BCE 中，有

$AE=EB$ (已知) $EC=EC$ (合一)

但 $AC>BC$ (已知)

$\therefore$ $\angle AEC>\angle BEC$

(兩 $\triangle$ 有兩邊對應等，第三邊不等，則對大邊的夾角，較大於對小邊的夾角。)

附註： 由教科書中提示，固然亦可證明第二部分，但有一先決關係，非證明不可，即 D 點必在 E 與 B 之間是也。此一關係卽從本題(2)證明頗易，若欲另從他方面證明則較難，恐非初中學生所能思索得到。至於假定 E 在 D 與 A 之間，固未嘗與眞理相背，但就幾何學的謹嚴而論，則似有所不許也。玆述 D 在 E 與 B 間的證法如下，以供參考。

從 (1)，已證明 $\angle ACD>\angle BCD$

所以在 $\angle ACD$ 內，可作 $\angle FCD=\angle BCD$，而 FC 與 AD 交於 F 點，卽 F 在 A 與 D 之間。

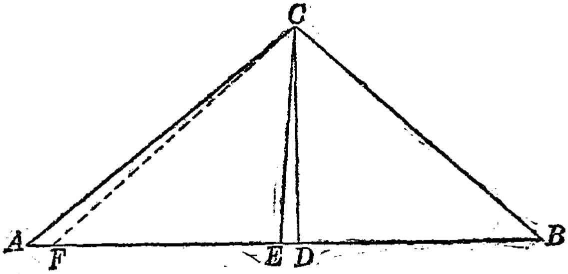
於是 $\triangle FCD\equiv\triangle BCD$ ($a.\ s.\ a.\equiv a.\ s.\ a.$)

$\therefore$ $DB=DF$

但 $DB+DF<AB$ (全大於其分)

卽 $2DB<AB$

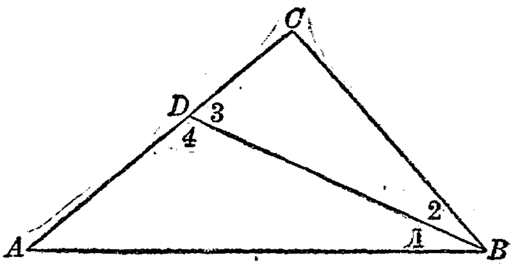
$\therefore$ $DB<\frac{1}{2}AB$



即　$DB<EB$

∴　D 在 E 與 B 之間。

(13) 畫 $\triangle ABC$ 裏一角的平分線 BD。證明 $BC>DC$, $BA>AD$。



〔解〕 已知：BD 是 $\triangle ABC$ 中 $\angle B$ 的平分線。

求證：　$BC>DC$, $BA>AD$。

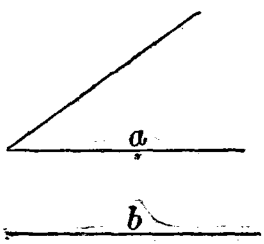
證：$\angle 3>\angle 1$ ($\triangle$外角>內對角)

但　$\angle 1=\angle 2$ (已知)

∴　$\angle 3>\angle 2$ (等量代替)

因此　$BC>DC$ ($\triangle$ 中不等邊的對角)

同樣可證　$\angle 4>\angle 1$，因而 $BA>AD$。

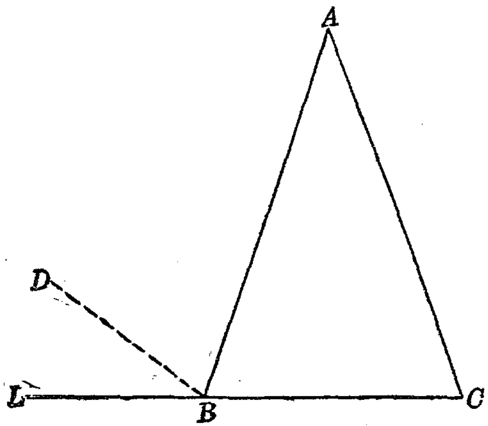


(14)給了頂角同底邊，作一個等腰三角形。

〔提示〕 先求底角。

〔解〕 已給：頂角 a，底邊 b。

求作： 等腰三角形。



作法： 作任意線 CL 比 a 略長。截取 $CB=b$，在 B 點作 $\angle LBD=a$。平分 $\angle CBD$，作 BA 線。

在 C 作角 $\angle BCA=\angle CBA$，CA 交 BA 於 A。

於是 $\triangle ABC$ 就是所求的三角形。

證： $\angle BCA=\angle CBA$（所作）

$\therefore$　$AB=AC$（$\triangle$ 中對等角的邊）

$\angle CBA=\frac{1}{2}\angle CBD$（所作）

$\therefore$　$\angle CBA+\angle BCA=\angle CBD$

但　$\angle CBA+\angle BCA+\angle A=2\measuredangle R$

　　$\angle CBD+\angle LBD=2\measuredangle R$

$\therefore$　$\angle A=\angle LBD=a$

又　$BC=b$（所作）

$\therefore$　$\triangle ABC$ 爲所求的三角形。

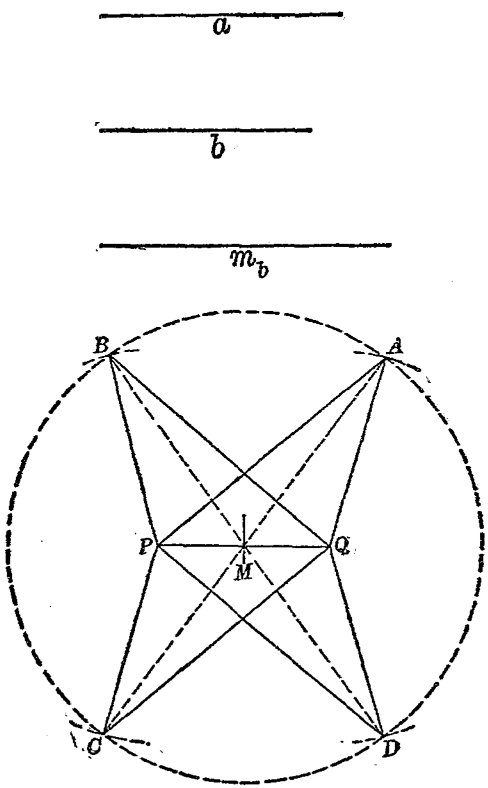
討論： 無論底邊 a 有多少長，頂角 a 有多少大(平角當然不行)，常可得二解。

(15)給了兩邊同其中一邊上的中線，作這三角形。

〔解〕　已給：a, b 二邊，及 b 邊上的中線 m_b。

求作：　一三角形。

作法：作 $PQ=b$。以 PQ 中點 M 爲心，m_b 爲半徑，畫圓。以 P, Q 爲心，a 爲半徑，作四弧，與前圓交於 A, B, C, D 四點。聯 PA, QA; PB, QB; PC, QC; PD, QD。卽得所求 △ PQA, PQB, PQC, PQD: 共四個。



證明：　從略。

討論：

$a \leqq b \sim \frac{1}{2}m_b$ 時，沒有解。

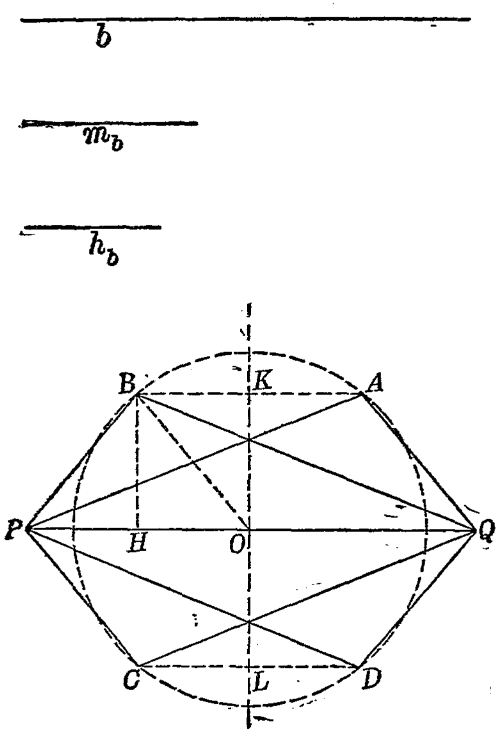
$a > b \sim \frac{1}{2}m_b$ 時，有四解或二解。

(16) 給了底邊，和在這底邊上的高同中線，作這三角形。

〔解〕　已給：底邊 b, b 上中線 m_b, b 上高 h_b。

求作：　三角形。

作法：　作 $PQ=b$。求 PQ 的中點 O，而作其中垂線，且在此線上截取 $OK=OL=h_b$。



以 O 爲心，m_b 爲半徑，畫圓。

過 K, L, 作 PQ 的平行線，與圓交於 A, B, C, D 四點。

聯 $PA, QA; PB, QB; PC, QC; PD, QD$。即得所求三角形 $\triangle PQA$, $\triangle PQB$, $\triangle PQC$, $\triangle PQD$。

證：$\because BK \parallel HO$;

$\therefore BH = h_b$。

$PQ = b$。

$PO = OQ$,

$BO = m_b$。

$\therefore \triangle PQB$ 是所求的三角形。

同樣可證其餘三個也合所設條件。

討論：　$h_b > m_b$ 時，沒有解。

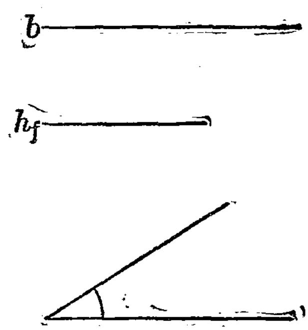
$h_b = m_b$ 時，二解。

$h_b < m_b$ 時，四解。

(17)給了一邊同在這邊上的高，又給了這邊的鄰角，作這三角形。

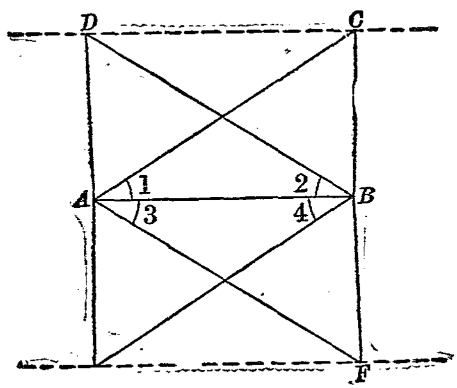
〔解〕　已給：底邊 b, b 上的高 h_b, b 的鄰角 θ。

求作：　三角形。



解析：　這三角形的頂點，必在與 b 相距 h_b 的二平行線上，所以在底邊端點作角等於 θ，此角的第二邊與兩平行線的交點，就是三角形頂點。

作法：　作底邊 $AB=b$。作 $DC \parallel AB$, $EF \parallel AB$, 各與 AB 相距 h_b。



作角 $\angle 1$, $\angle 2$, $\angle 3$, $\angle 4$, 各等於 θ, 得 C, D, E, F 四點。

聯 CB, DA, FB, EA, 得 $\triangle ABC$, $\triangle ABD$, $\triangle ABE$, $\triangle ABF$ 四三角形，卽爲所求 $\triangle$。

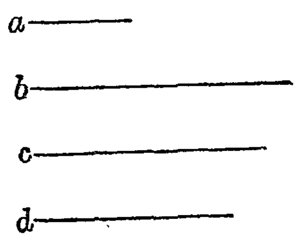
證：　從略。

討論：　b 與 h_b 不論如何長短，θ 角無論如何大小（當然小於 $180°$），常可作得四三角形如上圖；但有時或祇可作得兩個等腰三角形。

$$\left(\text{此時 } \theta=\tan^{-1}\frac{h_b}{\frac{b}{2}}\right)$$

(18)給了四邊，作一個梯形。

〔解〕　已給：上底 a，下底 b，兩腰 c 與 d。



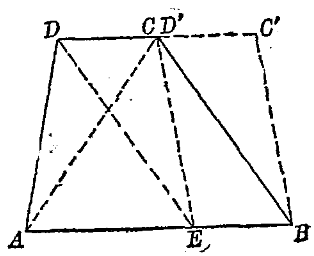
求作：　梯形。

解析：　假定 $ABCD$ 爲已作梯形，其中 $AB=b$, $CD=a$, $BC=c$, $DA=d$。

設過 D 作 $DE \parallel BC$，而與 AB 交於 E，

則　$DE=BC=c$，

$$AE=b-EB=b-CD$$
$$=b-a。$$



$\therefore$　$\triangle AED$ 的三邊已定，可以作得其圖。於是得作法如下：

作法：　作 $AB=b$（下底）。

截 $BE=a$，得 E 點。

作 $\triangle AED$，使 $AD=d$，

$ED=c$。

完成 $\square EDCB$，得梯形 $ABCD$。

又作 $\triangle AED'$，使 $AD'=c$，$ED'=d$。

完成 $\square ED'C'B$，得梯形 $ABC'D'$。

此二梯形都是所求的梯形。

證：　從略。

討論：　$c+d=a\sim b$ 時，沒有解。

$c+d>a\sim b$，c 不等於 d 時，有二解。

$c+d>a\sim b$，$c=d$ 時，有一解，是等腰梯形。

$c\neq d$，$a=b$ 時，沒有解。

$c=d$，$a=b$ 時，無數解，成爲平行四邊形。

若規定 c, d 分別爲左右腰，最多祇有一解。

若不規定 a, b 爲上下底，則最多可有四解。

若不規定上下底與左右腰，卽 a, b, c, d 四邊，可以隨意選擇，則最多可有二十四解。

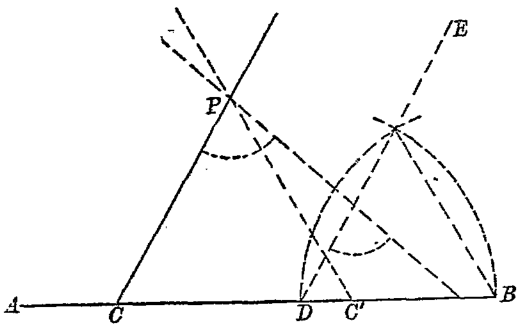
(19)在所給線外的一點，作一線同所給線成功的60°的角。

〔解〕 已知：AB 線及線外一點 P。

求作：　一線過 P 點，與 AB 成 60° 的角。

作法：在 AB 上任意點 D 作 $\angle BDE=60°$。過 P 作 $PC \parallel ED$，與 AB 交於 C。

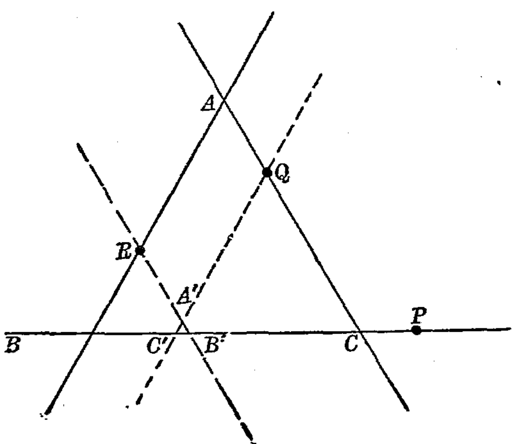
則　$\angle PCB=60°$。



證：　從略。

討論：常可得二解，如圖 PC 與 PC'。

(20)給了不在一直線上的三點，作一個等邊三角形，要使每一點在每條邊上或他的延長線上。



〔解〕 已給：

P, Q, R 三點。

求作： 等邊三角形，使 P, Q, R 分別在三邊或其延長線上。

作法： 過 P 引任意線 BC。過 R 作一線與 BC 交於 B, B', 成角 $60°$。(前題)

過 Q 作一線與 BC 相交於 C, C', 成角 $60°$。(前題)

RB, QC 交於 A。

RB', QC' 交於 A'。

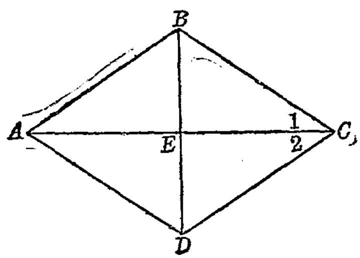
$\triangle ABC$ 與 $\triangle A'B'C'$ 爲所求三角形。

證： 從略。

討論： 有無數三角形可作。

附註： 此題條件不完全，故有無數三角形可作，而且三點即在同一直線上，也可以作許多三角形。

(21)斜方形的對角線互爲垂線。



〔解〕 已知： $ABCD$ 爲斜方形，AC 與 BD 爲其對角線，相交於 E。

求證： $AC \perp BD$。

證： $BA=BC$ (斜方形各邊相等)

$\therefore$ B 點在 AC 的中垂線上(與一線兩端等遠之點，在此線的中垂線上)。

同樣 D 點亦在 AC 的中垂線上。

但經過 B 與 D 的直線有一無二，而 AC 的中垂線也是有一無二。

$\therefore$ BD 即係 AC 的中垂線。

即　$AC \perp BD$

第二證法：　$AB=AD$, $BC=DC$, $AC=AC$

$\therefore$　$\triangle ABC \equiv \triangle ADC$　$(s.\ s.\ s. = s.\ s.\ s.)$

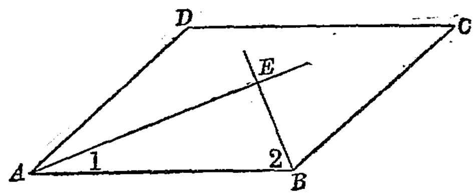
而　$\angle 1=\angle 2$（全等形對應角）

但　$\triangle BCD$ 爲等腰三角形。

$\therefore$　$CE \perp BD$（等腰 $\triangle$ 頂角平分線 $\perp$ 底邊）

即　$AC \perp BD$（合一）

(22)平行四邊形兩鄰角的平分線互爲垂線。



〔解〕　已知：$ABCD$ 爲 $\square$，AE，BE 平分 $\angle DAB$ 與 $\angle ABC$，相交於 E。

求證：　$AE \perp BE$。

證：　$\angle 1=\frac{1}{2}\angle DAB$，$\angle 2=\frac{1}{2}\angle ABC$（已知）

$\therefore$　$\angle 1+\angle 2=\frac{1}{2}(\angle DAB+\angle ABC)$

但　$\angle DAB+\angle ABC=2\measuredangle R$

（$\parallel s$ 與截線所成同側內角和等於 $2\measuredangle R$）

$\therefore$　$\angle 1+\angle 2=\angle R$

但　$\angle 1+\angle 2+\angle AEB=2\measuredangle R$

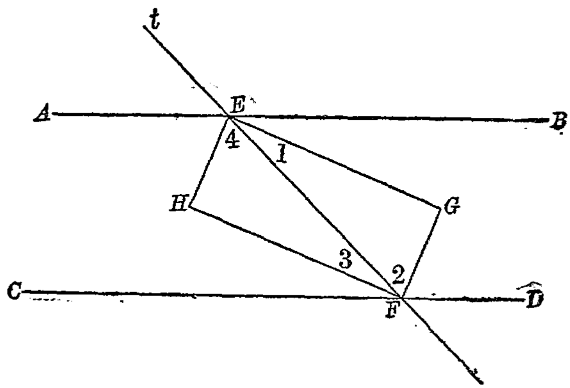
（$\triangle$內角和$=2\measuredangle R$）

$\therefore$　$\angle AEB=\angle R$（等量減等量）

即　$AE \perp BE$（垂直定義）

(23)兩平行線同一截線所成兩對內錯角的平分線，成功一個長方形。

〔解〕 已知：$AB \parallel CD$; 截線 t 與 AB, CD 交於 E, F; 兩對內錯角平分線交於 G, H。



求證： $EGFH$ 是長方形。

證： $\angle 1=\frac{1}{2}\angle BEF$, $\angle 3=\frac{1}{2}\angle CFE$ (已知)

但 $\angle BEF=\angle CFE$ (是內錯角)

$\therefore$ $\angle 1=\angle 3$ (等量的一半)

而 $EG \parallel FH$ (內錯角等，則平行)

同理可證

$\angle 2=\angle 4$ 而 $GF \parallel HE$

$\therefore$ $EG=FH$ 而 $GF=HE$ (□ 對邊等)

又 $\angle 2+\angle 3=\frac{1}{2}(\angle EFD+\angle EFC)$

卽 $\angle GFH=\angle R$ (平角的一半)

$\therefore$ $\angle G=\angle GFH=\angle H=\angle HEG=\angle R$

($\because$ □ 的對角相等而鄰角互為補角)

於是 $EGFH$ 為長方形 (長方形定義)

(24)一個木匠要把一塊木板分成幾條一樣闊的板，他用

下面的法子：假定要分成五條。他用曲尺照圖 1 的兩位置放下,使尺上的刻度,在木板邊線中間的都是 5 的同倍數(在這圖裏是 15)，再照圖上,於數字的各處做下記號,連起線來。依線一鋸斷,就得所求的五條了。證明這法子不錯。

〔解〕 木板兩邊是平行線,尺邊是截線,各對對應數字間的線份相等，所以本題可改成另一題如下：

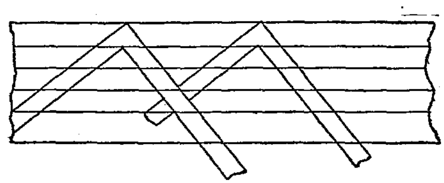
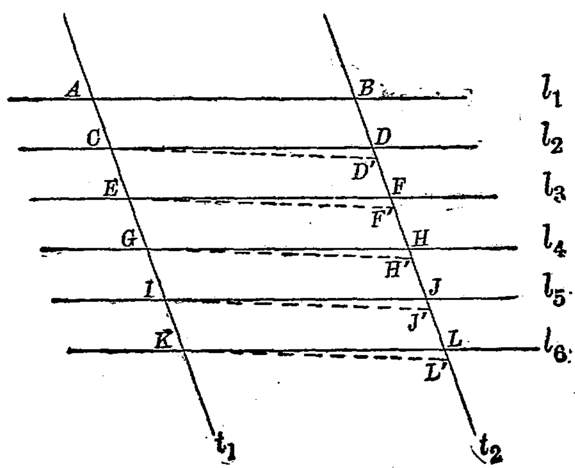


圖 1.

已知： t_1 與 t_2 二截線交 l_1，l_2，l_3，l_4，l_5，l_6 諸線於 $A, B; C, D; E, F; G, H; I, J; K, L$ 諸點；

$AC=CE=EG=GI=IK=JL=HJ=FH=DF=BD;$

$AB \parallel KL$。



求證：　$AB \parallel CD \parallel EF \parallel GH \parallel IJ \parallel KL$,

而且各線距離相等。

證：　假定各線不平行，而作

$CD' \parallel EF' \parallel GH' \parallel IJ' \parallel KL' \parallel AB$, 而與 t_2 交於 D', F', H', J', L'。

則因　$KL \parallel AB$（已知）

$\therefore$　L' 與 L 相合

而　$BL'=BL=AK$

但　$AC=CE=EG=GI=IK=\frac{1}{5}AK$（已知）

$\therefore$　$BD'=D'F'=F'H'=H'J'=J'L=\frac{1}{5}BL$

（諸 $\parallel s$ 在一截線上截相等線份，則在任何截線上也截相等線份。）

但　$BD=DF=FH=HJ=JL=\frac{1}{5}BL$

$\therefore$　D', F', H', J' 與 D, F, H, J 相合

即　CD' 合於 CD, EF' 合於 EF,

　　GH' 合於 GH, IJ' 合於 IJ。

$\therefore$　$AB \parallel CD \parallel EF \parallel GH \parallel IJ \parallel KL$

而　各線距離相等

（$\because$ 諸 $\parallel s$ 在其垂直截線上也截互相等線份）

由此可證該木匠所用的方法不錯。

附註：　曲尺第二位置，不必使介於木板邊線中間的刻度爲 15；等於 20, 25 都可以，祇要使各分線經過尺邊五等分各刻度，例如 4, 8, 12, 16, 或 5, 10, 15, 20, 就可以了。

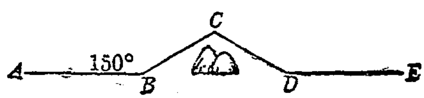
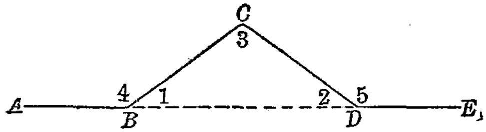


圖 2.

(25)在圖 2 裏邊，在 B 點的角是 150°，怎樣畫出 BC 同 CD，使 AB 同

DE 在一直線上?

〔解〕 引 CD, 使 $\angle BCD=120°$, 並使 $CD=CB$, 再引 DE, 使 $\angle CDE=150°$。於是 AB 與 DE 卽在一直線上。



證明: 假定聯 BD 如上圖。

則因 $\angle 3=120°$ $\therefore$ $\angle 1+\angle 2=60°$

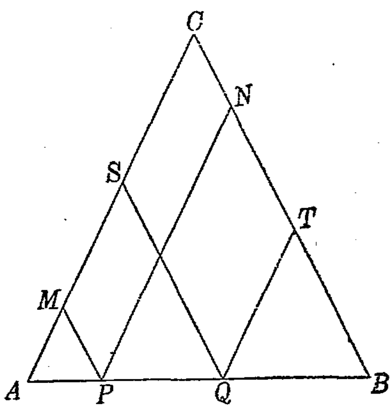
但 $BC=CD$ $\therefore$ $\angle 1=\angle 2=30°$

於是 $\angle 4+\angle 1=180°$, $\angle 5+\angle 1=150°$。

$\therefore$ AB 與 BD 成一直線, BD 與 DE 成一直線。

卽 AB 與 DE 在一直線上。

(26)在等腰三角形底邊上的隨便兩點，各作同兩腰平行的線,成功兩個平行四邊形,證明他們的週界相等。



〔解〕 已知: $\triangle ABC$ 中 $AC=BC$; P, Q 爲 AB 上的二點; $PN \parallel AC$, 交 BC 於 N; $PM \parallel BC$, 交 AC 於 M; $QS \parallel BC$, 交 AC 於 S; $QT \parallel AC$, 交 BC 於 T.

求證: $PN+NC+CM+MP=QT+TC+CS+SQ$

證: $PN=CM$,

$NC=MP$ (▱ 對邊相等)

$\angle APM = \angle B$ (同位角)

但 $\angle B = \angle A$ (等腰△底角)

$\therefore$ $\angle APM = \angle A$ (等於同量)

而 $MP = AM$ (△中對等角的邊)

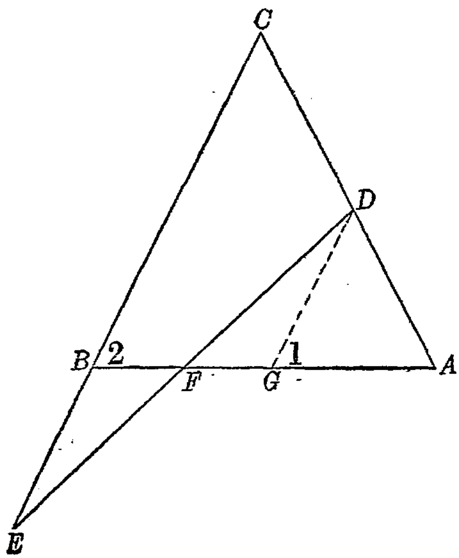
於是 $PN + NC + CM + MP = 2(CM + AM) = 2AC$

同理可證 $QT = CS$, $TC = SQ = SA$

$\therefore$ $QT + TC + CS + SQ = 2AC$

因此 $PN + NC + CM + MP = QT + TC + CS + SQ$

(27)設 ABC 是等腰三角形,於 AC 腰上截取 AD, 延長 CB 腰到 E, 使 $EB = AD$, DE 交底邊於 F, 證明 $DF = FE$。



〔解〕 已知: $\triangle ABC$ 中有 $AC = BC$; D 爲 AC 上一點, E 爲 CB 延長線上一點, $BE = AD$; DE 交 AB 於 F。

求證: $DF = FE$。

證: 過 D 作 $DG \parallel CBE$, 而與 BA 交於 G。

於是 $\angle 1 = \angle 2$ (同位角)

但 $\angle 2 = \angle A$ (等腰△底角)

$\therefore$ $\angle 1 = \angle A$ 而 $DG = DA$ (△中對等角的邊相等)

但　$DA=BE$（已知）

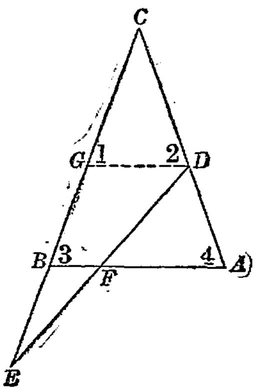
$\therefore$　$DG=BE$（等於同量）

於是　$BEGD$ 爲平行四邊形。

因此　$DF=FE$（▱ 對角線互相平分）

第二證法：過 D 作 $DG \parallel AB$，而與 BC 交於 G。

則　$\angle 1=\angle 3$ 而 $\angle 2=\angle 4$



（同位角）

但　$\angle 3=\angle 4$　$\therefore$　$\angle 1=\angle 2$

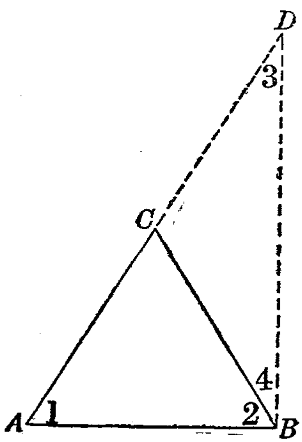
於是　$CG=CD$

而　$GB=DA=BE$

$\therefore$　$DF=FE$

（過 △ 一邊中點 ‖ 第二邊的線，平分第三邊）

(28) 若 ABC 是一個等腰三角形，AC 腰延長到 D，使 $DC=AC$，證明 $DB \perp AB$。



〔解〕已知：$\triangle ABC$ 中有 $AC=BC$；C 是 AC 的延長線，$CD=AC$。

求證：$DB \perp AB$。

證：$CD=CB$（等於同量 AC）

$\therefore$　$\angle 3=\angle 4$（等腰 △ 底角）

但　$\angle 1=\angle 2$（等腰 △ 底角）

$\therefore$　$\angle 1+\angle 3=\angle 2+\angle 4$

$=\angle ABD$

因　$\angle 1+\angle 3+\angle ABD$

$=2\measuredangle R$(△內角和)

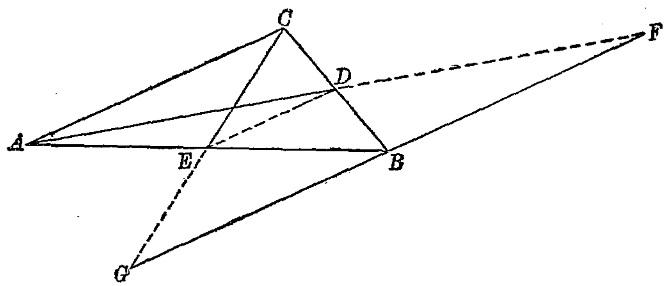
$\therefore\quad 2\measuredangle ABD=2\measuredangle R$

即　$\angle ABD=\angle R$

即　$DB\perp AB$ (垂直定義)

(29) 在 $\triangle ABC$ 裏 E, D 是 AB 同 BC 的中點。畫 AD, 延長到 F, 使 $DF=AD$; 畫 CE, 延長到 G,使$EG=CE$。證 F, B, G 在一直線上。

〔解〕 已知: $\triangle ABC$ 的中線 AD 與 CE, 各延長到 F 與



G, $DF=AD$, $EG=CE$。

求證: F, B, G 在一直線上。

證: $\because\quad CD=DB,\ AD=DF$ (已知)

$\therefore\quad BF\parallel AC$

(對角線互相平分的四邊形是平行四邊形)

同理可證　$BG\parallel AC$

$\therefore\quad BF$ 與 BG 成一直線 (平行公理)

即　F, B, G 在一直線上

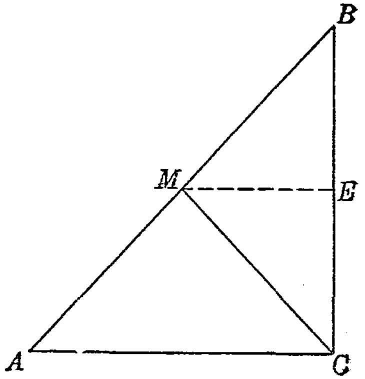
第二法: 聯 DE, 則

$BF\parallel DE,\ BG\parallel DE$

（△兩邊中點聯線平行於第三邊）

$\therefore$　BF 與 BG 為一直線

(30)直角三角形斜邊上的中點，同這三角形的三頂點等距。



〔解〕　已知：　$\triangle ABC$ 中 $\angle ACB$ 為 $\angle R$, M 為 AB 的中點。

求證：　$MA=MB=MC$。

證：　取 BC 的中點 E, 聯 ME, 則

$ME \parallel AC$（△兩邊中點聯線 $\parallel$ 第三邊）

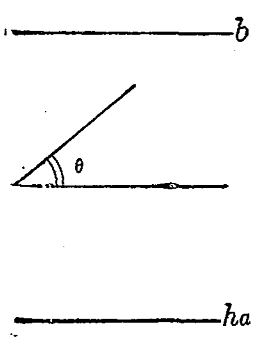
$\therefore$　$ME \parallel BC$ ($\because AC \perp BC$)

於是　$\triangle MCE \equiv \triangle MBE$

而　$MC=MB=MA$。

(31)給了一邊，一鄰角同高，求作這個三角形。

〔解〕　已給：一邊 b, 鄰角 θ, θ 角對邊上的高 ha。



求作：　三角形。

作法：　作 AB 線份$=b$。

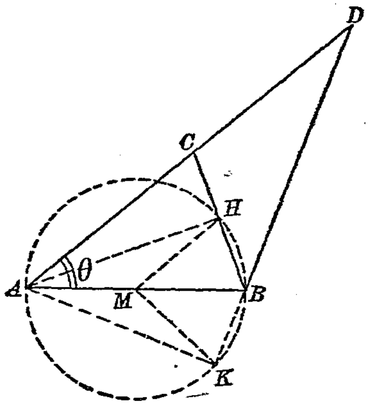
在 A 端作角 $BAC=\theta$。

以 AB 為直徑畫圓。

以 A 為圓心，ha 為半徑，作二弧，交 M 圓於 H, K。

聯 BH 延長交 AC 於 C。　得 $\triangle ABC$。

聯 KB 延長交 AC 於 D。　得



$\triangle ABD$。

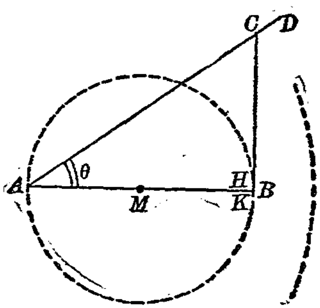
$\triangle ABC$ 與 $\triangle ABD$ 就是所求的三角形。

證明：　由 28 題可以證明 $AH \perp BC$, $AK \perp BD$。此處從略。

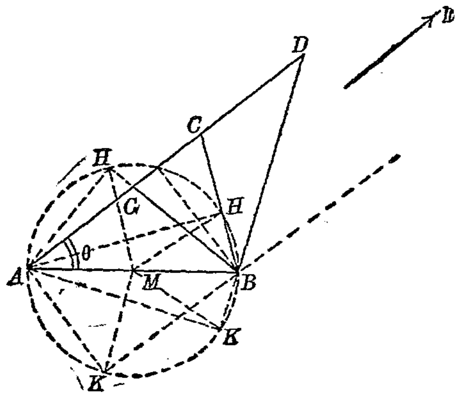
討論：　*I*.　$\theta < \angle R$ 時。

（1）$h_a > b$, 無解，因而圓不能相交，畫下左圖自明。

（2）$h_a = b$, 祇有一解；



I.　(1), (2)



II.　(3)

∵ H, K 相合；C, D 亦相合。所得者是直角三角形，看上左圖。

（3）$b \sin\theta < h_a < b$, 有二解，看上右圖自明。

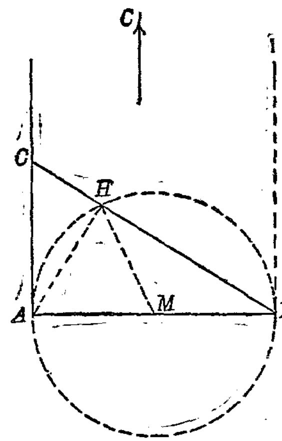
（4）$O < h_a \leqq b \sin\theta$, 祇有一解，看上右圖自明。

II.　$\theta = \angle R$ 時。

（1）$h_a > b$, 無解。

（2）$h_a=b$，無解。

（3）$O<h_a<b$，祇有一解，爲直角 △，看右圖。



III.　$\theta>\angle R$ 時。

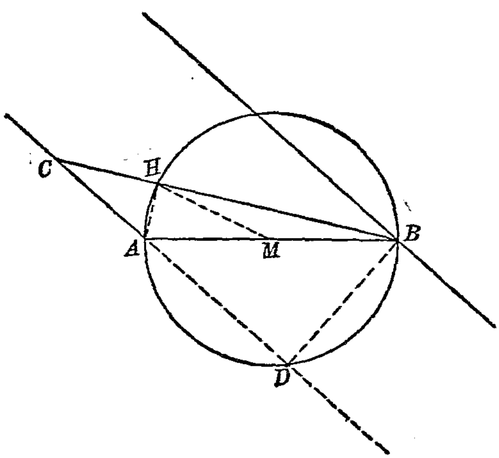
（1）$h_a>b$，無解。

（2）$h_a=b$，無解。

（3）$b\sin\theta\leqq h_a<b$，無解。

（4）$O<h_a<b\sin\theta$，一解。

附註：$b\sin\theta$ 初學者當然不能明白，但可代以 B 到 AC 的距離，或 B 點到對邊的高。



又，題中僅言一鄰角同高，未曾指明何邊上之高，但此高決非 θ 角夾邊上的高，因若爲已知邊上的高，則變成 17 題；若爲又一邊上的高，則此高早隨 b 與 θ 而定，因其爲 $b\sin\theta$ 也。所以此高必是 θ 角對邊上的高。

(32) 如圖 3，$ABCD$ 是一個正方形，如圖畫直線，使 $\angle1=\angle2=\angle3\angle=4$。證 $xyzw$ 是正方形。照這個樣子，畫一個大一些同方格多一些的。（圖 4）

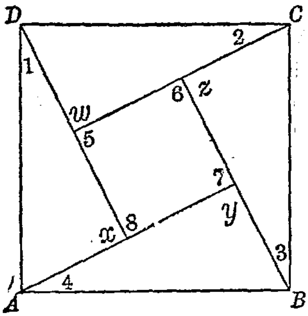


圖 3.

〔解〕 $\angle 1+\angle wDC=\angle R$

$\angle 1=\angle 2$

$\therefore \quad \angle 2+\angle wDC=\angle R$

因此 $\angle DwC=\angle R=\angle 5$

同理可證 $\angle 5=\angle 6=\angle 7$

$=\angle 8=\angle R$

又在四個直角形中，因

$AB=BC=CD=DA,$

$\angle 1=\angle 2=\angle 3=\angle 4$

$\therefore \quad \triangle DAx\equiv\triangle ABy\equiv\triangle BCz\equiv\triangle CDw$

而 $\left.\begin{array}{l}Dx=Ay=Bz=Cw\\ Dw=Ax=By=Cz\end{array}\right\}$(對應邊)

$\therefore \quad wx=xy=yz=zw$(等量減等量)

卽 $xyzw$ 是正方形。

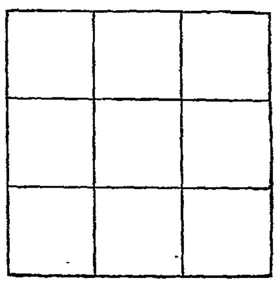


圖 4.

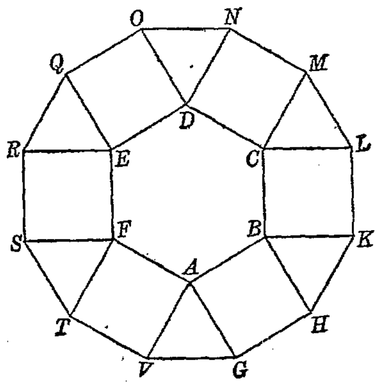


圖 5.

(33)如圖 5，$ABCDEF$ 是正六邊形。$ABHG$, $BCLK$ 等都是正方形。

(*a*) 三角形 BHK, CLM 等等都是什麼三角形?

(*b*) $HKLMN$……是不是正十二邊形 (dodecagon)?

〔答〕 (*a*) $\angle ABC = \frac{1}{6} \times 2(6-2)\angle R = 120°$

$\angle ABH = \angle R = \angle CBK = 90°$

$\therefore$ $\angle HBK = 360° - 300° = 60°$

但 $BH = AB = BC = BK$

$\therefore$ $\angle BHK = \angle BKH = 60°$

而 $\triangle BHK$ 是正三角形。

同理可證 $\triangle CLM$, DNO 等都是正 $\triangle$。

(*b*) $HKLMN$……是正十二角形,

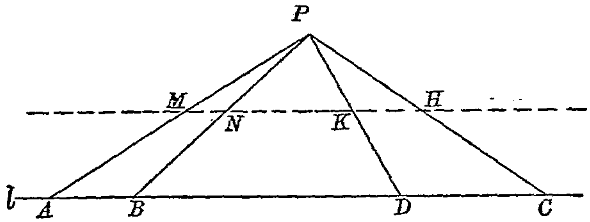
因各邊相等,

各角等於 $90° + 60° = 150°$。

(34)若令半徑長 1 公分的一個圓，在另一半徑長 2 公分的圓外轉動,找出他的圓心的軌跡。

〔答〕 是一個圓,其半徑為 3 公分，圓心在第二圓的中心。

(35)給了一直線 l 同不在 l 上的 P 點。試找出由 P 到 l 各線份中點的軌跡。



〔解〕 已知: l 線及線外一點 P。

求: 由 P 到 l 各線份中點的軌跡。

解析：　由 P 到 l 作 PA, PB 二線份，其中點為 M, N。

聯 M, N, 則 $MN \parallel l$。

此 MN 卽所求之軌跡。

證明：　(1)設 H 是 MN 線上一點。

聯 PH 延長交 l 於 C。

則 $PH=HC$。

(過 △ 一邊中點而平行於他邊的線，必平分第三邊)

∴　H 適合所設條件。

(2)設 K 是 PD 線份的中點。

聯 NK, 則 $NK \parallel l$

(△ 兩邊中點聯線 ∥ 第三邊)

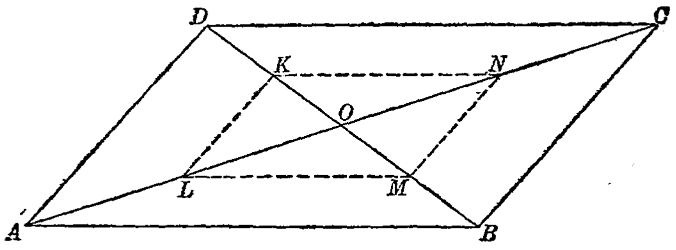
但　$MN \parallel l$ (已證)

∴　NK 與 MN 成一直線 (平行公理)

卽　K 在 MN 線上

∴　MN 是所求軌跡。

(36)聯結平行四邊形的中心同所有各邊上的點。試問這些聯結線的中點的軌跡是什麼?



〔解〕 設 $ABCD$ 為平行四邊形，而 O 為其中心，卽對角線 AC 與 BD 的交點。

由 O 到 AB 各線份，OA 與 OB 亦在其內。

這些線份的中點軌跡，從前題已知，是 OA, OB 中點聯線 LM, 而 $LM \parallel AB$。

同樣，由 O 到 BC 各線份中點的軌跡，是 OB, OC 中點聯線 MN, 而 $MN \parallel BC$。

由 O 到 CD 各線份中點軌跡，是 OC, OD 中點聯線 NK, 而 $NK \parallel CD$。

由 O 到 DA 各線份中點軌跡，是 OD, OA 中點聯線 KL, 而 $KL \parallel DA$。

$\therefore$ 所求軌跡是 $\square$ $KLMN$, 其四頂點在 OD, OA, OB, OC 的中點。

第五編　直線同圓

目解題二十五、（在教科書第 180 面到第 181 面）

下面陳述定義的時候，最要注意的是在把你的意思十分確切的說出來。陳述精確，是算學，文字的第一個要素。

（1）述圓的定義。

〔答〕　一密閉曲線在平面上，線上一切諸點，離曲線所圍平面內一定點等遠，則此曲線所圍平面形叫做圓。此曲線有時也叫做圓。

（2）述圓周圓心的定義。

〔答〕　圓的界線叫做圓周，有時這界線的長度也叫圓周。

圓內一定點，離圓周等遠的，叫做圓心。

（3）　述弦，半徑，直徑，割線同切線的定義。

〔答〕　兩端在圓周上的線份叫做弦。

從圓心到圓周上任一點的線份叫半徑。

穿過圓心的弦叫直徑。

一部份在圓內，一部份在圓外，與圓周相交於二點的直線，叫做該圓的割線。（延長弦的兩端，就成功割線。）

全部份在圓外，而與圓周公有一點的直線，叫做該圓的切線。

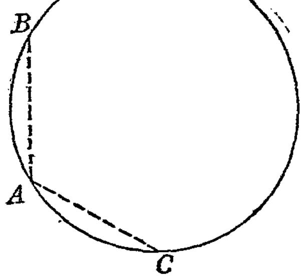
（4）述半圓，圓心角，同圓周角的定義。

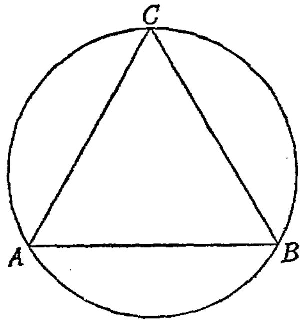
〔答〕　圓周上隨意兩點，若分圓周為相等兩弧，則此相等兩弧，都叫做半圓；圓內一弦，將圓分成相等兩部份，則此兩部份也叫半圓。

兩條半徑所夾的角，叫做圓心角。

過圓周上同一點的二弦所夾的角，叫做立於該二弦所夾弧上的圓周角。

（5）把 A 做圓心，相等的半徑畫弧截圓於 B, C 兩點。比較 $\overset{\frown}{AB}$ 同 $\overset{\frown}{AC}$。



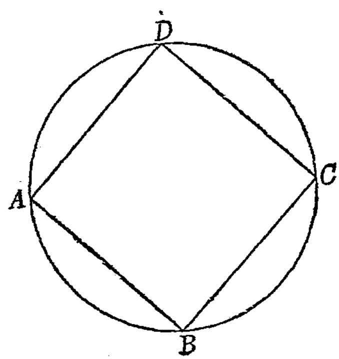


〔答〕 $\overset{\frown}{AB}=\overset{\frown}{AC}$，因為各與等弦相對。

（6）上邊右圖裏面，AB, BC, CA 各弦，都把他量一下，再比較他們所對的弧。

〔答〕 量得 $AB=BC=CA$，所以從 § 150 定理三知道 $\overset{\frown}{AB}=\overset{\frown}{BC}=\overset{\frown}{CA}$。

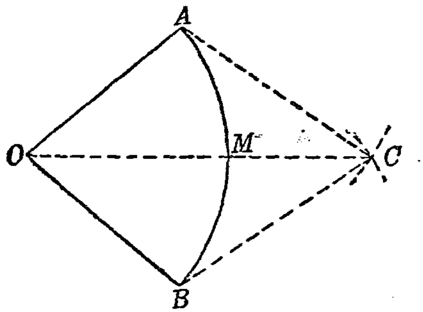
（7）在右圖裏面，先比較 AB, BC, CD, DA 四條弦，再比較他們所對的弧。



〔答〕 $AB=BC=CD=DA$。

$\therefore$ $\overset{\frown}{AB}=\overset{\frown}{BC}=\overset{\frown}{CD}=\overset{\frown}{DA}$。

（8）平分一條弧，應當怎樣



分法? [用 § 147(1)]

〔解〕 已給: $\overset{\frown}{AB}$, 圓心 O。

求作: $\overset{\frown}{AB}$ 的中點。

作法: 以 A, B 爲圓心，適當等半徑畫兩弧交於 C。聯 OC, 交 $\overset{\frown}{AB}$ 於 M, 則 $\overset{\frown}{AM}=\overset{\frown}{MB}$。

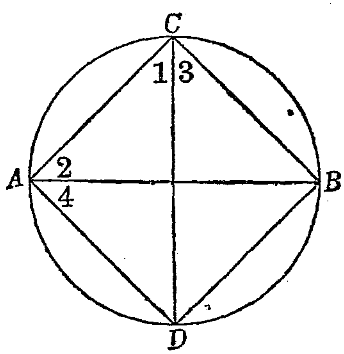
證明: 聯 OA, OB, AC, BC, 則

$$\triangle OAC \equiv \triangle OBC \quad (s.\ s.\ s. = s.\ s.\ s.)$$

而 $\angle AOM=\angle BOM$

$\therefore$ $\overset{\frown}{AM}=\overset{\frown}{MB}$ (等圓心角所含弧相等)

(9) 右圖裏面, AB, CD 兩直徑互做垂線，試證明他們分圓周做四等分。



〔解〕 命圓心爲 O, 則得證法如下:

$\because$ AB 爲直徑，$\therefore$ O 在 AB 上。

$\because$ CD 爲直徑，$\therefore$ O 在 CD 上。

即 O 既在 AB 上，又在 CD 上，$\therefore$ AB 與 CD 的交點就是圓心 O。

但 $\angle AOC=\angle BOC=\angle AOD=\angle BOD=\angle R$

$\therefore$ $\overset{\frown}{AC}=\overset{\frown}{CB}=\overset{\frown}{BD}=\overset{\frown}{DA}$

即 AB 與 CD 分圓周爲四等份。

(10)用前題的圖，證明 AC, CB, BD 同 DA 四弦都相等，且 $\angle 1=\angle 2=\angle 3=\angle 4$。

〔解〕　已知：如前題所述。

求證：　如本題所述。

證：　從前題，證得

$$\overset{\frown}{AC}=\overset{\frown}{CB}=\overset{\frown}{BD}=\overset{\frown}{DA}$$

$\therefore$　$AC=CB=BD=DA$（同圓中等弧所對的弦相等）

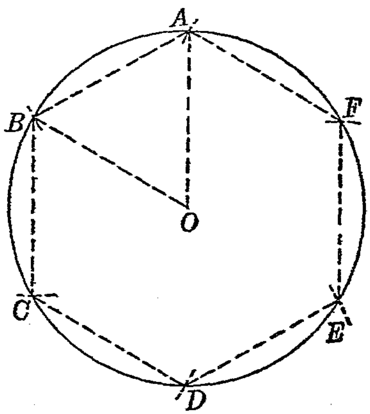
又　$\angle 1=\angle 2$（等腰△底角）

$\angle 1=\angle 3$　　$\angle 2=\angle 4$

(等腰△底邊中垂線平分頂角)

$\therefore$　$\angle 1=\angle 2=\angle 3=\angle 4$

(11)表明怎樣分一圓做六等弧。



〔解〕　設有 O 圓，欲將圓周分做六等份。

在圓周上任取一點 A，以 A 為圓心，O 圓半徑 OA 為半徑，畫弧交 O 圓於 B。以 B 為心，同半徑畫弧交 O 圓於 C。如是順次畫弧，得 A, B, C, D, E, F 六點。則

$$\overset{\frown}{AB}=\overset{\frown}{BC}=\overset{\frown}{CD}=\overset{\frown}{DE}=\overset{\frown}{EF}=\overset{\frown}{FA}=\tfrac{1}{6}\text{圓周}$$

證明：　聯 OA, AB, BO, 則

$$OA=AB=BO$$

$\therefore$　$\angle BOA=\frac{1}{3}st.L=60°$

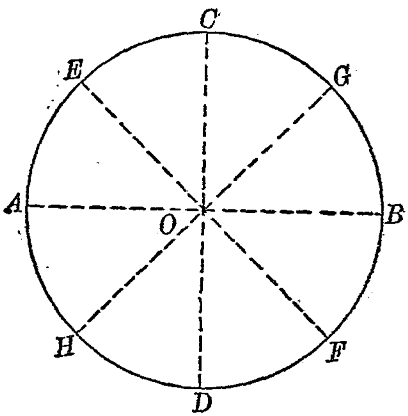
同樣可證　$\angle BOC=60°$, $\angle COD=60°$, ……………。

$\therefore\quad \angle AOB=\angle BOC=\angle COD=\cdots\cdots\cdots\cdots=\angle FOA$

而　　$\overset{\frown}{AB}=\overset{\frown}{BC}=\overset{\frown}{CD}=\overset{\frown}{DE}=\overset{\frown}{EF}=\overset{\frown}{FA}$

(同圓中等圓心角所含弧相等)

(12)表明怎樣分一圓做八等弧。



〔解〕　已知：O 圓。

求作：　圓周八等分各點。

作法：先作任意直徑 AB。再作直徑 $CD\perp AB$。平分 AC 弧得 E 點。作直徑 EF。

平分 $\overset{\frown}{BC}$ 得 G 點。

作直徑 GH。

A, E, C, G, B, F, D, H 即所求各點。

證：　從第 (9) 題，知

$\overset{\frown}{AC}=\overset{\frown}{CB}=\overset{\frown}{BD}=\overset{\frown}{DA}=$四分圓

$\overset{\frown}{EGF}=\overset{\frown}{EHF}=$半圓

而　　$\overset{\frown}{EC}=\frac{1}{2}\overset{\frown}{AC}=$八分圓

$\therefore$　　$\overset{\frown}{BF}=\frac{1}{2}$圓周$-\frac{1}{8}$圓周$-\frac{1}{4}$圓周$=$八分圓

因此 $\overset{\frown}{AE}=\overset{\frown}{DF}=$八分圓

同樣可證　$\overset{\frown}{AH}=\overset{\frown}{HD}=\overset{\frown}{CG}=\overset{\frown}{GB}=$八分圓

$\therefore$　　$\overset{\frown}{AE}=\overset{\frown}{EC}=\overset{\frown}{CG}=\overset{\frown}{GB}=\overset{\frown}{BF}=\overset{\frown}{FD}=\overset{\frown}{DH}=\overset{\frown}{HA}$

(13)在下面的圖裏邊，AB 是直徑，$AD=AC$。比較 $\overset{\frown}{DB}$ 同 $\overset{\frown}{BC}$。

〔解〕　$\because$　$AD=AC$　　$\therefore$　$\overset{\frown}{AD}=\overset{\frown}{AC}$

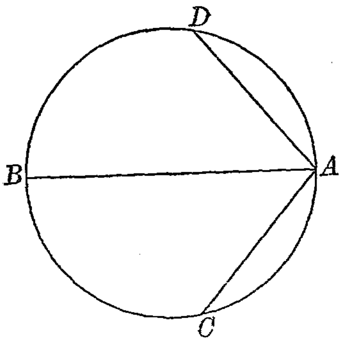
（同圓中等弦所對弧相等）

但　$\overset{\frown}{ADB}=\overset{\frown}{ACB}$

（直徑平分一圓）

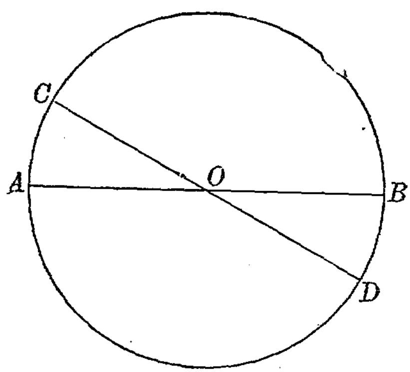
$\therefore$　$\overset{\frown}{DB}=\overset{\frown}{BC}$

（等量減等量）



理解題九、（在教科書第183 面到第 184 面）

（1）試證兩直徑分一圓成兩對等弧。



〔解〕　已知：AB 與 CD 是 O 圓的兩直徑。

求證：　$\overset{\frown}{AC}=\overset{\frown}{BD}$

　　　　$\overset{\frown}{AD}=\overset{\frown}{BC}$

證：　$\overset{\frown}{ACB}=$半圓

　　　$\overset{\frown}{CBD}=$半圓

（直徑平分圓）

$\therefore$　$\overset{\frown}{ACB}=\overset{\frown}{CBD}$

（等量之半）

即　$\overset{\frown}{AC}+\overset{\frown}{CB}$

$=\overset{\frown}{CB}+\overset{\frown}{BD}$

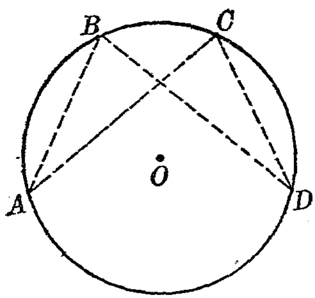
$\therefore$　$\overset{\frown}{AC}=\overset{\frown}{BD}$（等量減等量）

同理可證　$\overset{\frown}{AD}=\overset{\frown}{BC}$

（2）畫一個三頂點都在圓周上的等腰三角形同他底邊上的中垂線。試證這兩腰同中垂線的夾角所含的兩弧相等。

本題意義不明：因若目的在利用等弦對等弧的定理，以證明兩弧相等，則等腰 △ 根本用不着，一弦的中垂線，即可

證明其平分該弦所對兩弧。若照兩腰同夾角所含的弧一語而論,則須先證明底邊中垂線過頂點而平分頂角,但是此兩角所含的弧,就是底邊中垂線所分的弧,這一個圈子,兜得毫無意義也。著者無從詢問原編人的意見,祇得略綴數語於此,敝意以爲本題最好删去耳。



(3)聯結圓內兩等弦不相接近的兩端的線份必相等。

〔解〕　已知:　O 圓內二弦 $AB=CD$。

求證:　$AC=BD$。

證:　$\because AB=CD$

$\therefore \overset{\frown}{AB}=\overset{\frown}{CD}$

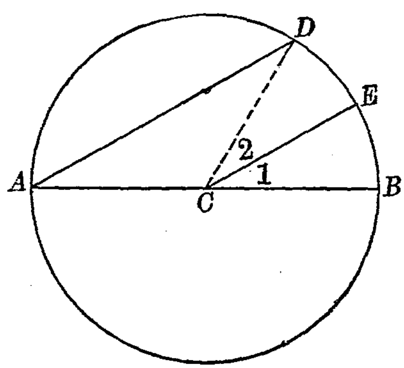
(同圓中等弦對等弧)

於是　$\overset{\frown}{AB}+\overset{\frown}{BC}=\overset{\frown}{CD}+\overset{\frown}{BC}$

卽　$\overset{\frown}{AC}=\overset{\frown}{BD}$

$\therefore$　$AC=BD$ (同圓中等弧對等弦)

(4)從直徑 AB 的 A 點,引隨便的一弦 AD; 又從圓心畫和 AD 同側並且平行的半徑 CE。試證 $\overset{\frown}{DE}=\overset{\frown}{EB}$。



〔解〕　已知: AB 是 C 圓的直徑。

CE 半徑與 AD 弦在 AB 同側。

$AD \parallel CE$。

求證:　$\overset{\frown}{DE}=\overset{\frown}{EB}$。

證:　作半徑 CD

$\angle BCD=\angle A+\angle D$（△外角＝內對角和）

但　$\angle A=\angle D$（等腰△底角）

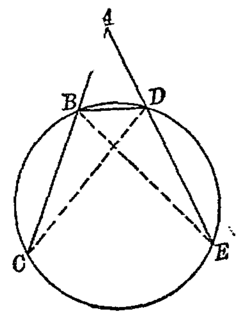
∴　$\angle BCD=2\angle A$

但　$\angle 1=\angle A$（∵ $AD \parallel CE$）

∴　$\angle 2=\angle A=\angle 1$

因此　$\overparen{DE}=\overparen{EB}$（同圓中等圓心角含等弧）

（5）倘右圖裏面，$\overparen{BC}=\overparen{DE}$；證 △$ABD$ 是等腰三角形。



（提示）證 (1)△CBD≡△EDB,

(2)$\angle CBD=\angle EDB$,

(3)$\angle ABD=\angle ADB$。

〔解〕 已知：如題所述。

求證：如題所述。

證：聯 CD, BE, 則在

△s CBD 與 EDB 中，有

$BD=BD$（合一）

$BC=DE$（∵ $\overparen{BC}=\overparen{DE}$）

$CD=BE$（∵ $\overparen{CBD}=\overparen{BDE}$）

∴　△CBD≡△EDB ⎫
而　$\angle CBD=\angle EDB$ ⎭ (s. s. s. = s. s. s.)

∴　$\angle ABD=\angle ADB$（等角的補角）

於是　$AB=AD$（△中對等角的邊）

即　△ABD 是等腰三角形。

目解題二十六、（在教科書第 187 面到第 188 面）

（1）定理五的推論一，是用的什麼證法？

〔答〕 用的是歸謬證法。

(2)若從一圓的直徑兩端引這圓的兩切線(圖 1)，證明這兩切線相平行。

〔解〕 已知：AB 是 O 圓的直徑，t_1 切 O 圓於 A，t_2 切 O 圓於 B。

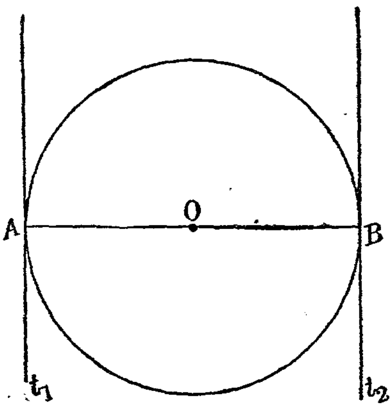


圖 1.

求證： $t_1 \parallel t$。

證： $t_1 \perp AB$，$t_2 \perp AB$ (過切點的半徑垂直於切線)

$\therefore$ $t_1 \parallel t_2$ (兩線垂直於同一線，則相平行。)

(3)證明如直徑平分平行兩弦的一弦，也必平分其他一弦(圖 2)。

〔解〕 已知：O 圓中二弦 $CD \parallel EF$；AB 直徑交 CD 於 M，交 EF 於 N，$CM=MD$。

求證： $EN=NF$

證： $\because$ $CM=MD$，

$\therefore$ $AB \perp CD$。

(平分一弦的直徑垂直該弦)

但 $CD \parallel EF$ $\therefore AB \perp EF$

(垂直於二平行線之一，必垂直於他一)

因此 $EN=NF$ (垂直於弦的直徑平分該弦)

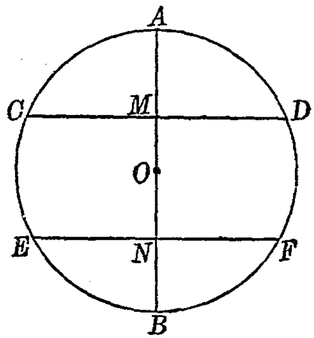


圖 2.

(4)同直徑尖端的切線平行的各弦，都被直徑平分。(圖3)

〔解〕　已知：CD 是 O 圓的直徑；

t_1 切 O 圓於 D；

弦 $AB \parallel t_1$，交 CD 於 E。

求證：　$AE=EB$

證：　$CD \perp t_1$　(切點半徑⊥切線)

但　$AB \parallel t_1$　(已知)

$\therefore$　$CD \perp AB$　(⊥於$\parallel s$ 中一線，必⊥於別線)

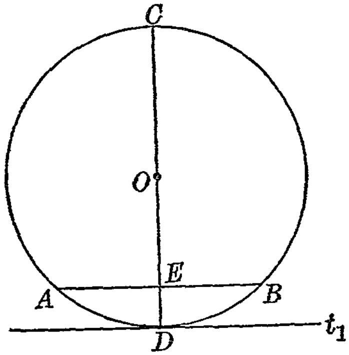
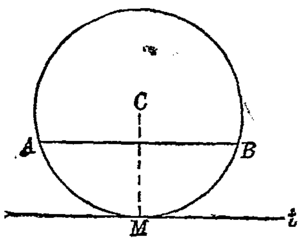


圖 3.

因此　$AE=EB$　(⊥於弦的直徑平分該弦)

(5)證明凡切線切於弧的中點，必同這弧所對的弦相平行。



〔解〕　已知：AB 是 C 圓的弦；M 是 $\overparen{AB}$ 的中點；t 切 C 圓於 M。

求證　$t \parallel AB$。

證：　作半徑 CM，則 $CM \perp t$　(切點半徑⊥切線)

但　$\overparen{AM}=\overparen{MB}$　(M 是 $\overparen{AB}$ 中點)

$\therefore$　$CM \perp AB$

(過一弧中點的半徑⊥於此弧所對的弦)

因此　$t \parallel AB$　(同一線的垂線平行)

(6)在圖 4 裏面，$AB=BC=CD=DE=EA$。證明那些對角線都相等。

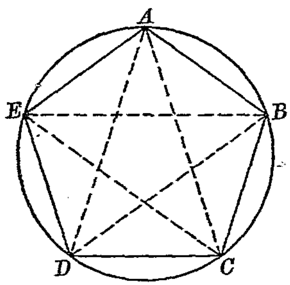


圖 4.

〔解〕 已知：$ABCDE$ 是圓內接正五角形。

求證： $AC=AD=BD=BE=CE$

證： $\overset{\frown}{AB}=\overset{\frown}{BC}=\overset{\frown}{CD}=\overset{\frown}{DE}=\overset{\frown}{EA}$

$\therefore$ $\overset{\frown}{AB}+\overset{\frown}{BC}=\overset{\frown}{AE}+\overset{\frown}{ED}$

$=\overset{\frown}{BC}+\overset{\frown}{CD}=\overset{\frown}{BA}+\overset{\frown}{AE}=\overset{\frown}{CD}+\overset{\frown}{DE}$

即 $\overset{\frown}{AC}=\overset{\frown}{AD}=\overset{\frown}{BD}=\overset{\frown}{BE}=\overset{\frown}{CE}$

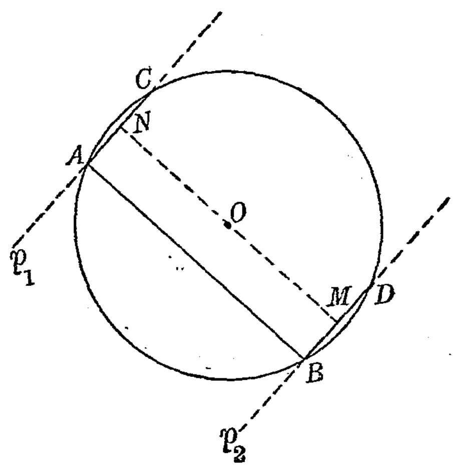
$\therefore$ $AC=AD=BD=BE=CE$

(7)將一圓隨便分作幾等分，倘順序把那些分點聯結起來，所成的多邊形總是等邊的麼？

〔答〕 當然是等邊的，因爲各邊都是等弧所對的等弦。

理解題十、(在教科書第 188 面)

(1)從一弦的兩端作弦的垂線，他們在圓內的部分相等。



〔解〕 已知：AB 是O 圓的一弦；$p_1\perp AB$ 於 A，交圓於 A 及 C；$p_2\perp AB$ 於 B，交圓於 B 及 D。

求證： $AC=BD$。

證： 作平行於 AB

之直徑，交 AC 於 N，而交 BD 於 M，則

$\because$　$AN \parallel BM$（同 $\perp$ 於一線）

$\therefore$　$AN=BM$（▱ 對邊相等）

但　$ON \perp AC$, $OM \perp BD$

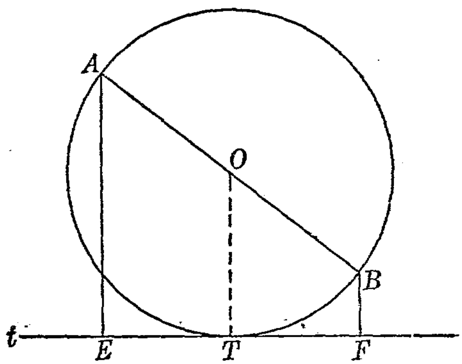
（$\perp$ 於 $\parallel s$ 中之一，必垂直於他一）

$\therefore$　$AN=\frac{1}{2}AC$, $BM=\frac{1}{2}BD$

（垂直於弦的直徑平分該弦）

因此　$AC=BD$（等量的兩倍）

（2）倘從直徑的兩端引隨便一切線的垂線，這垂線的和就等於這圓的直徑。



〔解〕已知：AB 是 O 圓的直徑；t 切 O 圓於 T；$AE \perp t$ 而與 t 交於 E；$BF \perp t$ 而與 t 交於 F。

求證：$AE+BF=AB$。

證：作半徑 OT，則 $OT \perp t$。

（切點半徑 $\perp$ 於切線）

$\therefore$　$AE \parallel OT \parallel BF$

（同為一線的 $\perp s$）

但　$AO=OB$（O 為圓心）

$\therefore$　$OT=\frac{1}{2}(AE+BF)$

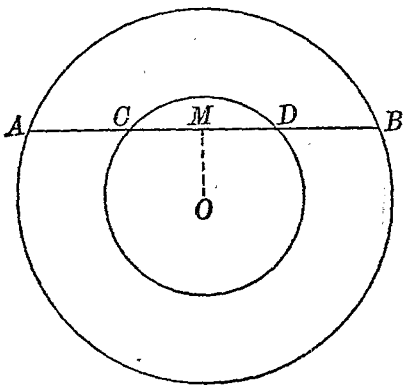
（平行梯形二底，過一腰中點之線，等於梯形兩底和之半。）

即　$AE+BF=2OT$（等量之倍）

但　$AB=2OT$（直徑＝半徑×2）

∴　$AE+BF=AB$（代替）

（3）兩同心圓被一線所割，那夾在兩圓中間的線份相等。



〔解〕　已知：兩同心圓的圓心是 O;

一線割兩圓，與外圓交於 A, B 兩點，與內圓交於 C, D 兩點。

求證：　$AC=BD$

證：　引 $OM \perp AB$,交 AB 於 M, 則

$AM=MB$ 而 $CM=MD$

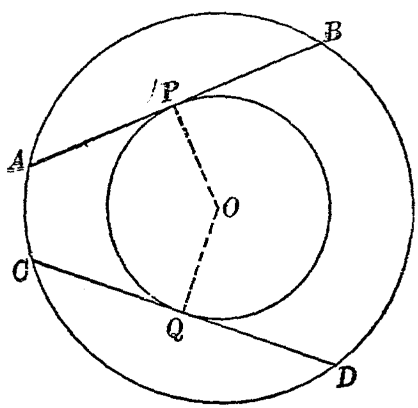
（⊥於弦的半徑平分該弦）

∴　$AM-CM=MB-MD$

即　　$AC=BD$

理解題十一、（在教科書第 192 面）

（1）在兩個同心圓裏面，所有同內圓相切的外圓的弦，都必等長。



〔解〕　已知：兩同心圓的圓心是 O; AB, CD是外圓的弦，切內圓於 P, Q。

求證：　$AB=CD$。

證：　引內圓半徑 OP, OQ。

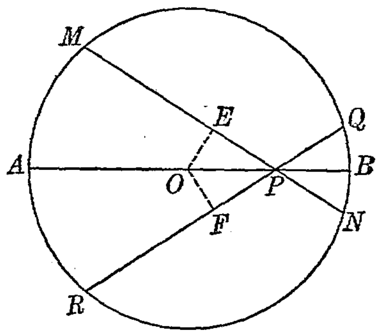
$OP=OQ$（半徑相等）

但　O 又爲外圓的圓心，且

$OP\perp AB$, $OQ\perp CD$（切點半徑 $\perp$ 切線）

$\therefore$　$AB=CD$（離圓心等遠的弦相等）

（2）如兩弦同直徑相交在一點，同直徑成功等角，這兩弦便相等。



〔解〕　已知：AB 爲 O 圓的直徑；

MN 與 RQ 二弦交於 AB 上 P 點；

$\angle APM=\angle APR$。

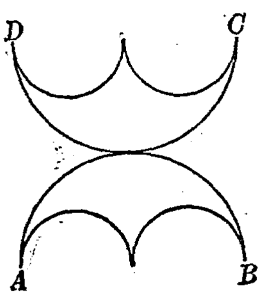
求證：　$MN=RQ$。

證：　從 O 作 MN 與 RQ 的 $\perp$s OE, OF。

則　$\because$ $\angle APN=\angle APR$　$\therefore$ $OE=OF$

（一角平分線上各點離兩邊等遠）

因此　$MN=RQ$（離圓心等遠的弦相等）



目解題二十七、　（在教科書第194面）

（1）如左圖 A, B, C, D 是一個正方形的頂點。這圖的作法怎樣？那幾個半圓是相切的？

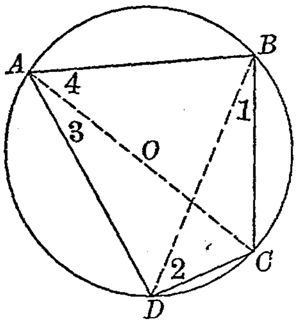
〔答〕　將 AB, CD, 四等分。以 AB, CD 的中點爲圓心，AB, CD 一

半爲半徑，畫兩個大半圓。以二邊四分之一的分點做圓心，四分之一長做半徑，畫四個小半圓。

兩個大半圓相切；四個小半圓兩兩相切；又各與大半圓相切。

理解題十二、（在教科書 197 面）

（1）任意四邊形的各頂角，若都在圓周上，那兩對相對的角必互爲補角。



〔解〕　已知：四邊形 $ABCD$ 各頂點都在 O 圓周上。

求證：　$\angle BAD+\angle BCD$
$=2\angle_s R$

證：　聯對角線 AC, BD, 則 $\angle BCD+\angle 1+\angle 2=2\angle_s R$

（△內角和）

但　$\angle 1=\angle 3$ 而 $\angle 2=\angle 4$

（同弧上的圓周角相等）

$\therefore$　$\angle BCD+\angle 3+\angle 4=2\angle_s R$

即　$\angle BAD=\angle BCD=2\angle_s R$

第二證法：　$\angle A=\frac{1}{2}\widehat{BCD}^\circ$

$\angle C=\frac{1}{2}\widehat{DAB}^\circ$

$\therefore$　$\angle A+\angle C=\frac{1}{2}(\widehat{BCD}^\circ+\widehat{DAB}^\circ)$

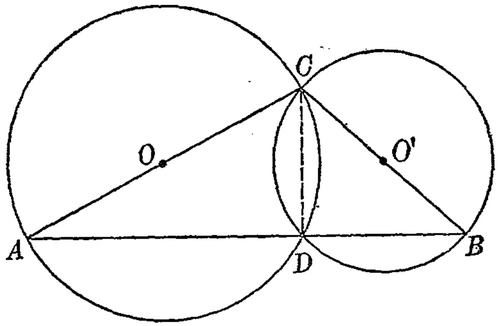
$=\frac{1}{2}\widehat{BCDAB}^\circ$

$=\frac{1}{2}\odot^\circ=\frac{1}{2}(360^\circ)=180^\circ$

附註：　$\frac{1}{2}\widehat{BCD}^\circ$ 的意思，便是 $\widehat{BCD}$ 所含弧度的一半，即其所張圓心角度數的一半。

又用共軛角亦可證明，惟記法不便，故借 △ 內角和，以避去共軛角。

(2)兩圓相交於 C, D。CA, CB 是兩圓的兩直徑，試證 A, D, B 在一直線上。



〔解〕 已知：O, O' 二圓交於 C, D; CA, CB 是兩圓直徑。

求證：A, D, B 共線。

證：聯 AD, DB, 作補助線 CD。

$\because$ AC 爲直徑　$\therefore$ $\overset{\frown}{ADC}$ 爲半圓

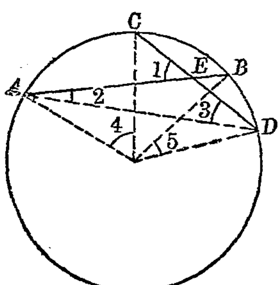
因而 $\angle ADC=\angle R$（半圓內圓周角）

同樣可證 $\angle BDC=\angle R$

$\therefore$ $\angle ADC+\angle BDC=2\angle s R$

因此 AD 與 DB 成爲一直線

（鄰角和$=2\angle s R$，其外邊成一直線）



目解題二十八、（在教科書第 199 面到第 200 面）

(1)若對 $\overset{\frown}{BD}$ 的圓心角是 30°，對 $\overset{\frown}{AC}$ 的圓心角是 40°；又若對 $\overset{\frown}{BD}$ 的圓心角是 12°，對 $\overset{\frown}{AC}$ 的圓心角是 18°，如左圖找出 $\angle 1$。(圖見教科書 198 面，今附載於左，以便參考。)

〔答〕　照第一組數值，得

$\angle 1=\frac{1}{2}(30^\circ+40^\circ)=35^\circ$

照第二組數值，得

$\angle 1=\frac{1}{2}(12^\circ+18^\circ)=15^\circ$

(2)若對 $\overset{\frown}{CB}$ 的圓心角是 110°，對 $\overset{\frown}{ACD}$ 的圓心角是 170°；又若對 $\overset{\frown}{CB}$ 的圓心角是 150°，對 $\overset{\frown}{ACD}$ 的圓心角是 200°，如上圖找出 $\angle 1$。

〔答〕　照第一組數值，得

$\angle 1=\frac{1}{2}(170^\circ-110^\circ)=30^\circ$

照第二組數值，得

$\angle 1=\frac{1}{2}(200^\circ-150^\circ)=25^\circ$

(3)同圖裏面，若 $\angle 1=20^\circ$，對 $\overset{\frown}{BD}$ 的圓心角是 30°，找出對 $\overset{\frown}{AC}$ 的圓心角。又若 $\angle 1=50^\circ$，對 $\overset{\frown}{BD}$ 的圓心角是 60°，也找對 $\overset{\frown}{AC}$ 的圓心角。

〔答〕　照第一組數值，命 $\overset{\frown}{AC}$ 所對的圓心角是 $\angle 4$，則得 $20^\circ=\frac{1}{2}(30^\circ+\angle 4)$，　$\therefore\ \angle 4=10^\circ$。

照第二組數值，得

$50^\circ=\frac{1}{2}(60^\circ+\angle 4)$，

$\therefore\ \angle 4=40^\circ$。

(4)如 § 161 的圖 1 裏面，對 $\overset{\frown}{AD}$ 的圓心角是 55°，找出對其他各弧的圓心角。如對 $\overset{\frown}{BD}$ 的圓心角是 110°，也找對其他諸弧的圓心角。(圖附於下)

〔答〕　照第一個數值，得各答數如下：

對 $\overset{\frown}{BD}$ 的圓心角$=55^\circ$

對 $\overset{\frown}{AB}$ (優弧)的圓心角$=250^\circ$

照第二個數值，得各答數如下：

對 $\overset{\frown}{AD}$ 的圓心角$=110°$

對 $\overset{\frown}{AB}$ (劣弧)的圓心角$=140°$

(5)如 § 161 的圖 2 裏面，對 $\overset{\frown}{AC}$ 的圓心角是 40°，對 $\overset{\frown}{CD}$ 的圓心角是 150°，找對 $\overset{\frown}{DB}$ 同 $\overset{\frown}{AB}$ 的圓心角。(圖附於下)

〔答〕 對 $\overset{\frown}{DB}$ 的圓心角$=40°$

對 $\overset{\frown}{AB}$ 的圓心角$=130°$

(6)如 § 161 的圖 3 裏面，對 $\overset{\frown}{BC}$ 的圓心角是 30°，找對 $\overset{\frown}{CD}$，$\overset{\frown}{DA}$ 同 $\overset{\frown}{AB}$ 的圓心角。又若對 $\overset{\frown}{AD}$ 的圓心角是 95°。也找對其餘諸弧的圓心角。(圖附於下)

〔答〕 對 $\overset{\frown}{CD}$ 的圓心角$=30°$
對 $\overset{\frown}{DA}$ 的圓心角$=150°$
對 $\overset{\frown}{AB}$ 的圓心角$=150°$
}(依第一已知數)

依第二已知數，得各數如下：

對 $\overset{\frown}{DC}$ 的圓心角$=85°$

對 $\overset{\frown}{CB}$ 的圓心角$=85°$

對 $\overset{\frown}{BA}$ 的圓心角$=95°$

附註： 題內所引 § 161 的 3 圖，見教科書 197 面，今

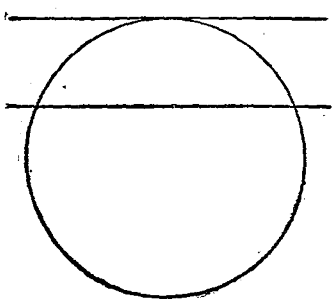


圖 1.

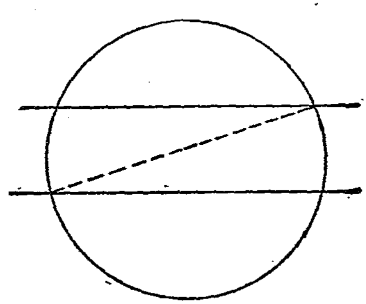


圖 2.

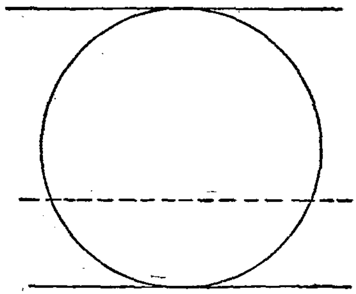


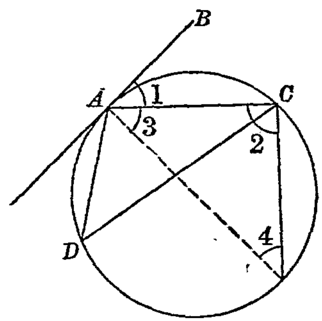
圖 3.

特附載於此,以便參考。

目解題二十九、(在教科書第 201 面)

(1)在上面的圖裏,(a)若 $\angle ADC=60°$;(b)若 $\angle ADC=47°$;(c)若 $\angle ADC=35°\ 30'$,試求 $\angle 1$。

〔答〕 因 $\angle 1=\angle ADC$(看右圖)



∴ 得各數如下:

(a) $\angle 1=60°$

(b) $\angle 1=47°$

(c) $\angle 1=35°\ 30'$

(2)(a)若 $\angle 1=40°$;(b)若 $\angle 1=35°$;(c)若 $\angle 1=23°15'$,問 $\overset{\frown}{AC}$ 所對的圓心角是多少度?

〔答〕 ∵ $\overset{\frown}{AC}$ 所對圓心角 $=2\angle ADC=2\angle 1$

∴ 得各答數如下:

(a) 80°

(b) 70°

(c) 46°30′。

理解題十三、(在教科書第 201 面)

(1)在一圓上畫兩切線同連結兩切點的弦。證所成的兩角相等。

〔解〕　已知：t_1 與 t_2 切 O 圓於 A, B。

求證：　$\angle 1=\angle 2$。

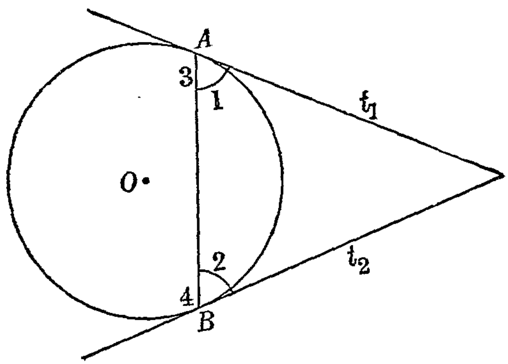
證：　$\angle 3=\angle 4$。

$\angle 1=\frac{1}{2}\widehat{AB}°$　　$\angle 2=\frac{1}{2}\widehat{AB}°$

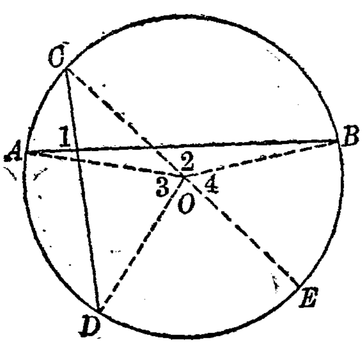
(弦切角等於其所夾弧上的圓周角)

$\therefore$　$\angle 1=\angle 2$ (等於同量)

因而　$\angle 3=\angle 4$ (等角補角)



附註：　延長 t_1 與 t_2 相交，利用等腰△亦可證，但過 $t_1 \parallel t_2$ 時卽失效。



(2)互相垂直的兩弦，所含相對兩弧的和等於半圓。

〔解〕　已知：AB, CD 為 O 圓內相交二弦，所成 $\angle 1=\angle R$。

求證：　$\widehat{AD}+\widehat{BC}=$半圓。

證：　作直徑 COE，半徑 OA, OD, OB，則

$\angle 1=\frac{1}{2}(\angle 2+\angle 3)=\angle R$

(交弦角等於其所含兩弧上圓周角半和)

$\therefore$　$\angle 2+\angle 3=2\measuredangle R$ (等量之倍)

但　$\angle 2+\angle 4=2\measuredangle R$ (一直線外邊的鄰角)

$\therefore$　　$\angle 3=\angle 4$ (等角的補角)

而　　$\widehat{AD}=\widehat{EB}$ (等圓心角對等弧)

$\therefore$　$\widehat{AD}+\widehat{BC}=\widehat{EB}+\widehat{BC}=\widehat{EBC}$

　　　　$=$半圓 ($\because$ CE 是直徑)

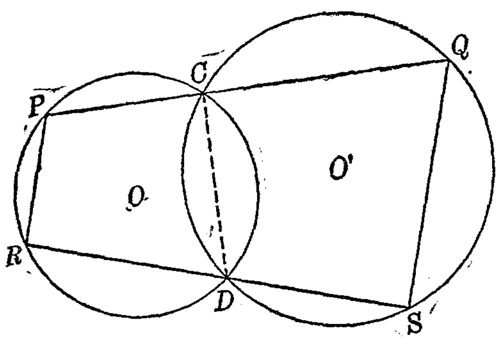
附註：　若用 $\frown^{\circ}$ 記法，則證明甚便。

$\angle 1=\frac{1}{2}(\widehat{AD}^{\circ}+\widehat{BC}^{\circ})=\angle R$

$\therefore$　　$\widehat{AD}^{\circ}+\widehat{BC}^{\circ}=2\measuredangle R$

即　　$\widehat{AD}+\widehat{BC}=$半圓。

(3)畫通過兩圓交點的二線，到圓周為止。證明聯結相當諸端點的弦必相平行。



〔解〕　已知：O 圓 O' 圓交於 C, D; PQ 線過 C 點，交二圓於 P, Q; RS 線過 D 點，交二圓於 R, S。

求證：$PR \parallel QS$

證：　聯公共弦 CD, 則

$\angle PCD=\angle RSQ$ (圓內接四邊形外角等於內對角)

但 $\angle PRS+\angle PCD=2\measuredangle R$(圓內接四邊形對角和$=2\measuredangle R$)

$\therefore \angle PRS+\angle RSQ=2\measuredangle R$

而　$PR \parallel QS$

（兩線與截線所成同側內角互補，則平行。）

附註：　此題所用定理雖在後，但 197 面理解題(1)，也可引為根據的。其實本題到 214 面又見，不過初學者畫圖，多數不會畫成兩線相交的。

目解題三十、（在教科書第 207 面到第 208 面）

（1）若 § 164 的圖 1 裏面，$\widehat{DF}$ 所對的圓心角是 50°，$\widehat{BE}$ 所對的圓心角是 20°，求 $\angle A$。

附註：　§ 164 的圖，附載於下，以便參考：

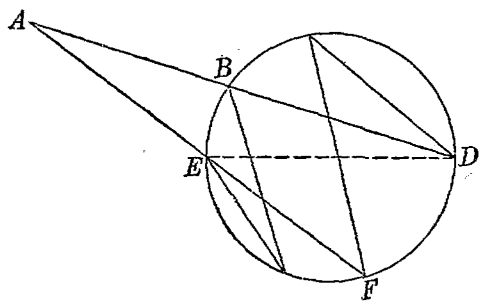


圖 1.

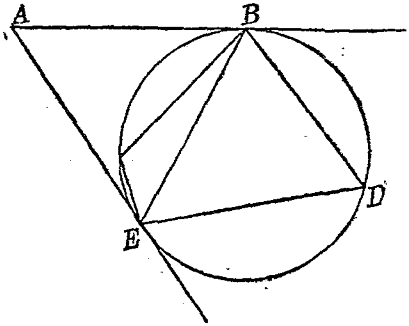


圖 2.

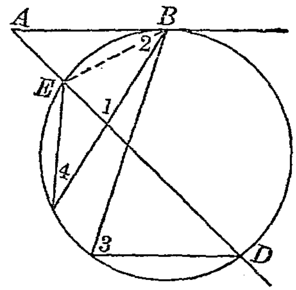


圖 3.

〔答〕　$\angle A=\frac{1}{2}(50^\circ-20^\circ)=15^\circ$

（2）若 § 164 的圖 2 裏面，$\overset{\frown}{BDE}$ 所對的圓心角是 280°，求$\angle A$。

〔答〕　$\angle A=\frac{1}{2}(280^\circ-80^\circ)=100^\circ$

（3）若 § 164 的圖 3 裏面，$\angle A=20^\circ$，$\angle 3=100^\circ$，求 $\angle 4$ 的度數。

〔解〕　$\angle A=\angle 3-\angle 4=100^\circ-\angle 4=20^\circ$

$\therefore$　　$\angle 4=80^\circ$〔答〕

（4）從下面圖 1，比較同弓形裏的圓周角。設頂點 P 沿着弧上移動，但兩邊都穿過 A 點同 B 點。問那些角的大小是不是不變？證一證。

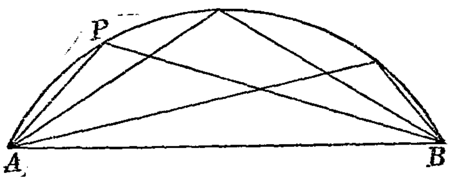


圖 1.

〔答〕　同弓形裏的圓角，就是同弧上的圓周角，當然相等。

設 P 點沿弧移動，兩邊穿過 A, B, 那些角是始終不變的，因爲各角仍舊是同弓形內的圓周角。

附註：　由此題可以引起下列重要軌跡定理：

一動點至兩定點的聯線所夾角一定，則此動點的軌跡，爲含有此角，而以定點聯線份爲弦的弓形弧。

這個定理很重要，但是教科書中未見，教者似宜提出補充。

（5）若一弧比半圓小，那麼裏面的圓周角比直角大還是小呢？看圖 2。

〔答〕　比直角大。

(6)若一弧比半圓大，那麼裏面的圓周角比直角小還是大呢？看圖 2。

〔答〕 比直角小。

(7)畫含有 120° 圓心角的弧，在這弧的兩端作兩切線，這兩切線組成的角是多少度？看圖 3。

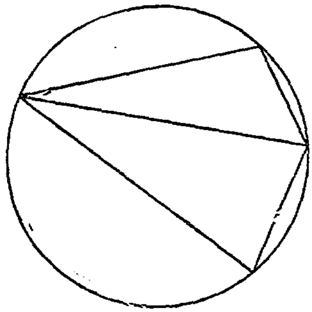


圖 2.

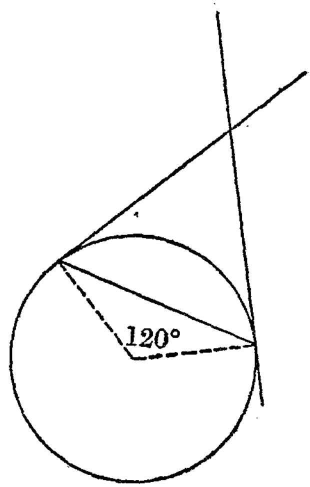


圖 3.

〔答〕 此角$=\frac{1}{2}(240°-120°)=60°$

(8) 如圖 4，AB 切於圓。$\angle 1=65°$，$\angle 2=25°$，求 $\angle B$。DC 是不是這圓的直徑？

〔答〕 $\angle B=40°$；DC 是直徑，

$\because\ \frac{1}{2}\overset{\frown}{AD}°=\angle 2=25°$

$\frac{1}{2}\overset{\frown}{CA}°=\angle 1=65°$

$\therefore\ \overset{\frown}{CA}°+\overset{\frown}{AD}°=130°+50°$

$=180°$

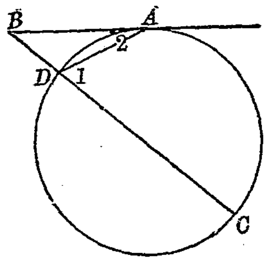


圖 4.

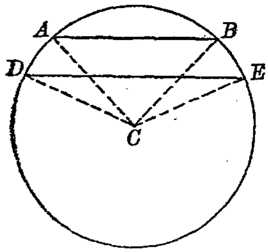


圖 5.

(9)如圖 5, AB 同 DE 兩弦平行,聯結各弦的兩端於圓心。證明 $\angle ACD=\angle BCE$。

〔解〕 已知: 如題。求證: 如題。

證: $\overset{\frown}{AD}=\overset{\frown}{BE}$

(二平行弦之間所截的弧相等)

$\therefore$ $\angle ACD=\angle BCE$ (等弧所對圓心角)

(10) 如圖 6, AB 爲直徑。若 $\overset{\frown}{AE}=\overset{\frown}{EF}$, $\overset{\frown}{FD}=\overset{\frown}{DB}$。證明 $\angle ECD$ 是直角。

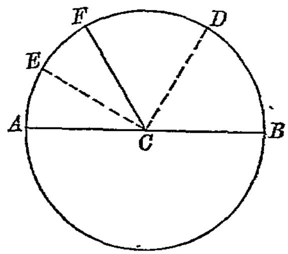


圖 6.

〔解〕 已知: 如題。

求證: 如題。

證: $\angle ACE=\angle ECF$

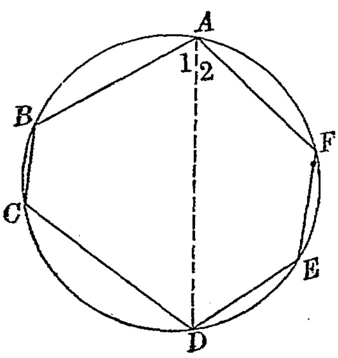
$=\frac{1}{2}\angle ACF$

$\angle BCD=\angle DCF$

$=\frac{1}{2}\angle BCF$

$\therefore$ $\angle ECF+\angle DCF=\frac{1}{2}(\angle ACF+\angle BCF)$

卽 $\angle ECD=\frac{1}{2}st.\angle=\angle R$



理解題十四、(在教科書第 209 面到第 210 面)

(1)若一個六角形 $ABCDEF$ 內接於圓。試證 $\angle A+\angle C+\angle E=4$ 直角。

〔解〕 已知: 如題。求證: 如題。

證：　聯 AD, 則

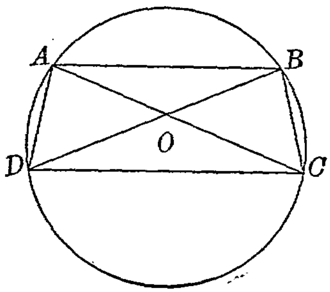
$$\angle C+\angle 1=2\measuredangle R \qquad \angle E+\angle 2=2\measuredangle R$$

(圓內四邊形對角互補)

$\therefore$　$\angle C+\angle E+\angle 1+\angle 2=4\measuredangle R$

卽　　$\angle A+\angle C+\angle E=4\measuredangle R$

(2)若一梯形的諸頂點都在圓周上,他的對角線相等;且梯形的兩腰也相等。



〔解〕 已知：梯形 $ABCD$ 內接於 O 圓, $AB \parallel CD$。

求證：　(a) $AC=BD$

　　　　(b) $AD=BC$

證：　(b) $\overset{\frown}{AD}=\overset{\frown}{BC}$

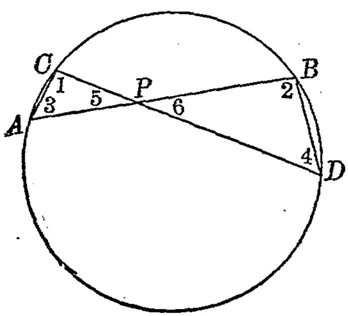
($\parallel$s 間截等弧)

$\therefore$　$AD=BC$(等弧所對弦)

(a) $\overset{\frown}{AD}+\overset{\frown}{BA}=\overset{\frown}{BC}+\overset{\frown}{AB}$

卽　　$\overset{\frown}{ABC}=\overset{\frown}{BAD}$

$\therefore$　　$AC=BD$ (等弧所對弦)



(3)聯結相交二弦的端點。證明這樣所成功的兩個三角形裏的各角都對應相等。

〔解〕 已知：AB, CD 兩弦交於 P。

求證：　$\triangle APC$ 與 BPD 的各角對應相等。

證：　$\angle 1=\angle 2$

(同立於 $\overset{\frown}{AD}$ 上)

$\angle 3=\angle 4$ (同立於 $\overset{\frown}{BC}$ 上)

$\angle 5=\angle 6$ (對頂角)

同樣可證 $\triangle APD$ 與 BPC 互等角。

(4)用所給線份做對角線作正方形。

〔解〕 已給：對角線 a。

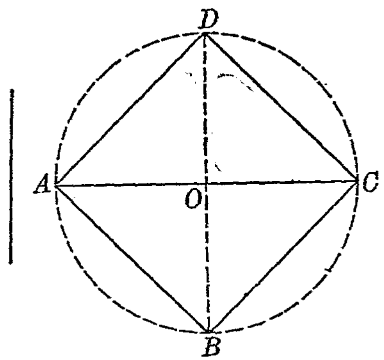
求作： 正方形。

作法： 作 $AC=a$。

作 AC 的中垂線。

以 AC 爲直徑畫圓，交其中垂線於 B, D。

聯 AB, BC, CD, DA 卽得所求正方形。



證明： $BD=AC=a$

$\overset{\frown}{AB}=\overset{\frown}{BC}=\overset{\frown}{CD}=\overset{\frown}{DA}$

(互相 $\perp$ 二直徑四分全圓周)

$\therefore\ AB=BC=CD=DA$ (等弧所對弦)

$\angle DAB=\angle ABC=\angle BCD$

$=\angle CDA=\angle R$

(半圓內圓周角爲直角)

$\therefore\ ABCD$ 是所求正方形。

(5) l 線與圓相切於 A (圖 1)。畫 AB, AC 弦，令 $\angle 1=\angle 2$。證明 $AB=AC$。

〔解〕 已知：如題。求證：如題。

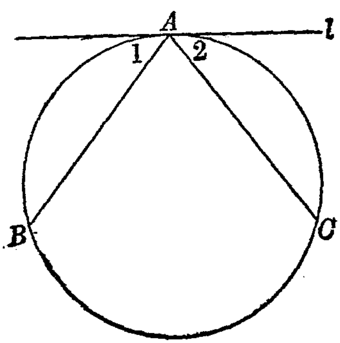


圖 1.

證: $\angle 1=\frac{1}{2}\overset{\frown}{AB}^{\circ}$ $\angle 2=\frac{1}{2}\overset{\frown}{AC}^{\circ}$

(弦切角度數＝所夾弧度數的一半)

令 $\angle 1=\angle 2$ $\therefore$ $\frac{1}{2}\overset{\frown}{AB}^{\circ}=\frac{1}{2}\overset{\frown}{AC}^{\circ}$

即 $\overset{\frown}{AB}=\overset{\frown}{AC}$ (等圓心角對等弧)

$\therefore$ $AB=AC$ (等弧對等弦)

(6)把等腰三角形的一腰做直徑作圓。證明圓周必平分這三角形的底(圖 2)。

〔解〕 已知: $\triangle ABC$ 中 $AC=BC$; 以 BC 爲直徑的圓,交 SD 於 D。

求證: $AD=DB$。

證: 聯 CD,則因 CB 爲直徑

$\therefore$ $\angle CDB=\angle R$ (半圓中圓周角爲$\angle R$)

因此 $AD=DB$ (等腰△頂點到底邊的高,平分底邊)

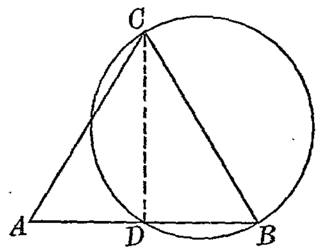


圖 2.

(7)隨便相等的或不等的兩外切圓相切於 D。畫他們的公切線 AB。試證 $\angle ADB$ 一定是直角。(圖 3)

〔解〕 已知: 如題所述。

求證: 如題所述。

證: 作兩圓公切線 DE 交 AB 於 E,則 $AE=ED$, $ED=EB$

(圓外一點到圓的兩切線相等)

$\therefore$ 以 AB 爲直徑所畫的半圓,必過 D 點。

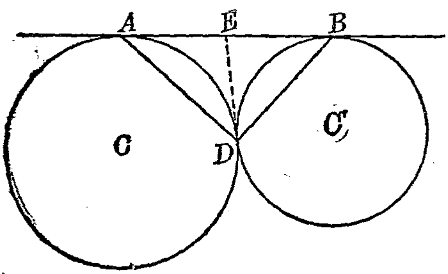
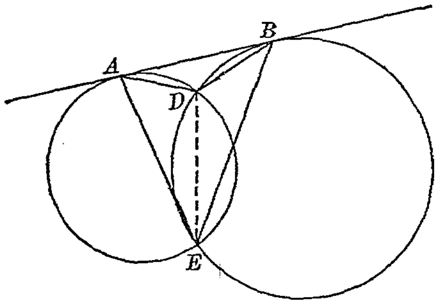


圖 3.

因此　$\angle ADB=\angle R$（半圓內圓周角）

（8）兩圓相交於 D, E，有公共的切線 AB。試證 $\measuredangle ADB$ 同 AEB 互爲補角(圖 4)。



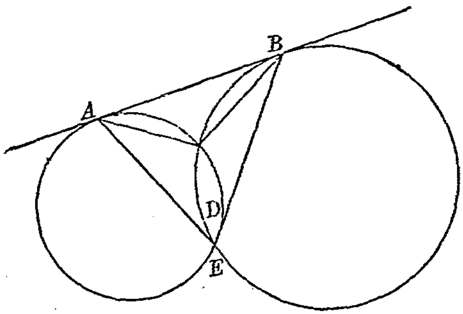


圖　4.

〔解〕　已知：如題所述。　求證：如題所述。

證：　另作一圖如上，而聯 DE，則

$$\left.\begin{array}{l}\angle BAD=\angle AED\\ \angle ABD=\angle BED\end{array}\right\}\text{(弦切角等於所夾弧上圓周角)}$$

$\therefore$　$\angle AEB=\angle BAD+\angle ABD$

$\angle ADB+\angle AEB=\angle ADB+\angle BAD+\angle ABD$

$=2\measuredangle R$（△內角和）

（9）過正方形對角線上隨便一點 E, 畫與正方形各邊平行的諸線,遇邊於 F,G,H 同 K。若 $AO=OC$, 表明用 O 做圓心, OG 做半徑所畫的圓,必經過 F, H,K 各點(圖 5)。

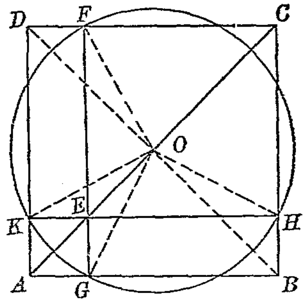


圖 5.

〔解〕 已知：如題。 求證：如題。

證：聯 OG,OH,OF,OK, 並作對角線 BD,則 BD 交 AC 於 O 而 $BO=OD$ (▱對角線互平分)

∵　$AC=BD$　(正方形對角線相等)

∴　$OA=OB=OD$ (等量之半等)……………(I)

又　$\angle OAG=\angle OCB$　(等腰△ABC 的底角)

　　$\angle OCB=\angle OAK$　(內錯角)

∴　$\angle OAG=\angle OAK=\frac{1}{2}\angle R$

同樣可證　$\angle OBH=\angle ODF=\frac{1}{2}\angle R$

∴　$\angle OAG=\angle OBH=\angle ODF=\angle OAK$……………(II)

又　$AK=BH$ 而 $AG=DF$ (▱對邊)

但　$\triangle AGE\equiv\triangle AKE$ $(a.s.a.=a.s.a.)$

而　$AG=AK$ (對應部分)

∴　$AG=BH=DF=AK$……………(III)

從　(I),(II),(III),即得

$$\triangle OAG\equiv\triangle OBH\equiv\triangle ODF\equiv\triangle OAK$$

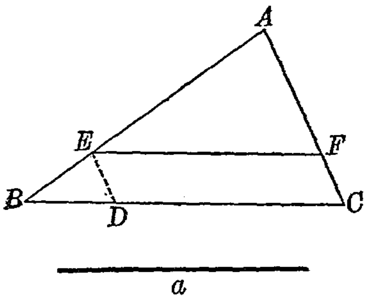
$$(s.\ a.\ s.=s.\ a.\ s.)$$

∴　$OG=OH=OF=OK$

即　G, H, F, K 四點在同一圓周上。

理解題十五、（在教科書第 213 面到第 215 面）

（1）在三角形裏面，作一線份令等於所給線份的長，他的兩端點在二邊上，並且同第三邊平行。



〔解〕 已給： $\triangle ABC$ 與線段 a。

求作： 如題所述的線段。

作法： 在大於 a 的 BC 邊上，截取 CD 等於 a。

過 D 作 $DE \parallel AC$，而與 AB 交於 E 點。

過 E 作 $EF \parallel BC$，交 AC 於 F 點。

EF 就是所求的線份。

證明： $EFCD$ 爲平行四邊形 （所作）

$\therefore$ $EF=DC$ （▱對邊等）

但 $DC=a$ （所作）

$\therefore$ $EF=a$ （等於同量）

討論： （I）a 小於三邊中的最小者，三解。

（II）a 小於二邊，大於一邊，二解。

（III）a 小於一邊，大於二邊，一解。

（IV）a 大於三邊中最大者，無解。

就本題所設的圖而論，$a>AC$，但小於 AB 與 BC，故有二解。

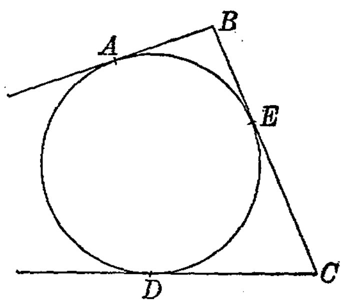
（2）如圖 AB, BC, CD 同圓相切於 A, E, D 三點。證明 $BC=BA+CD$。

〔解〕 已知： 如題。 求證： 如題。

證：　$BE=BA$，$EC=CD$

(從圓外一點到圓的二切線相等)

∴　$BE+EC=BC=BA+CD$



(3)過圓裏面的所給點作弦，令等於所給線份的長。

〔解〕　已給：　O 圓及圓內一點 P，線份 a。

求作：　過 P 點的弦等於 a。

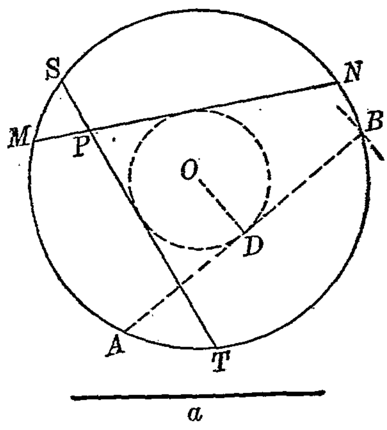
作法：　在 O 圓上取任意點 A，作 AB 弦$=a$。

引 $OD\perp AB$，交 AB 於 D。

以 O 爲心，OD 爲半徑作一小圓。

過 P 引小圓兩切線，延長之交大圓於 M，N；S，T。

MN 與 ST 卽所求的弦。



證明：　從略(利用「離圓心等遠的弦相等」一定理)。

討論：　(A) $a>O$ 圓直徑 $2r$，無解。

(B) $a<O$ 圓直徑 $2r$，則

(I) $OP<\sqrt{r^2-\frac{a^2}{4}}$ 時，無解。

(II) $OP=\sqrt{r^2-\frac{a^2}{4}}$ 時，一解。

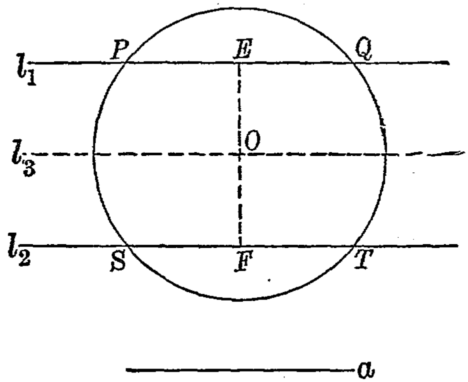
(III) $OP>\sqrt{r^2-\frac{a^2}{4}}$ 時，二解。

(C) $a=O$ 圓直徑 $2r$，則

(I) $OP>O$ 時，一解。

(II) $OP=O$ 時，無數解。

(4)作一圓，令在平行兩線上截取等於所設定長的相等二弦。



〔提示〕　圓心必須在同這兩線平行，並且在這兩線中間的一線上。

〔解〕　已給：$l_1 \parallel l_2$，線份 a。

求作：　一圓，在 l_1 與 l_2 兩線上截取等於 a 的線份。

作法：　在 l_1 上截取 $PQ=a$。

作 PQ 的中垂線，交 l_1 於 E，交 l_2 於 F。

作 EF 的中垂線 l_3，與 EF 交於 O。

以 O 爲心，OP 爲半徑，作圓便是。

證明：　$OE=OF$　$\therefore$　$PQ=ST=a$。

討論：　不問 a 的長短，常有無數解，圓心都在 l_3 上。

附註：　此題條件未完全。若規定須過一定點，則可得二解，或一解，與無解。先依上法作得任何地位的一圓，求得其半徑。然後以定點爲圓心，而得半徑(卽 OP)爲半徑，畫一圓，與 l_3 交於兩點(或一點，或不相交)。於是以此兩點爲心，同半徑畫兩圓便是。若不相交，卽無解；若相切，卽有一解。

(5)圖1裏有兩個不相交的線份 AB 同 CD。不許延長 AB，CD，求作 EF 線，要令這線平分延長 AB，CD 所成的角。

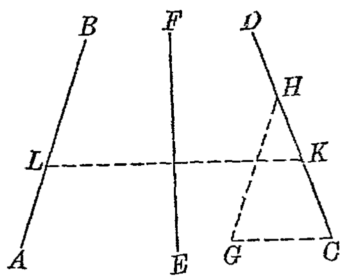


圖 1.

〔提示〕 過 CD 上的 H 點畫 HG，平行於 AB，並作等腰三角形 HCG。畫 $KL \parallel CG$，於是 EF 就是 KL 的中垂線。證明他。

〔解〕 已給：　AB，CD 兩線份，不平行而尚未相交。

求作：　AB，CD 延長後交角的平分線。

作法：　如提示所述。

證明：　$\because$ $HG \parallel AB$　而 $LK \parallel GC$

$\therefore$　$\angle BLK=\angle HGC$

但　$\angle HGC=\angle HCG$

$=\angle HKL$

$\therefore$　$\angle BLK=\angle DKL$

因此 LB 與 DK 延長相交，卽爲等腰△的二腰，其底邊

爲 LK。

但　　　EF 是 LK 的中垂線,

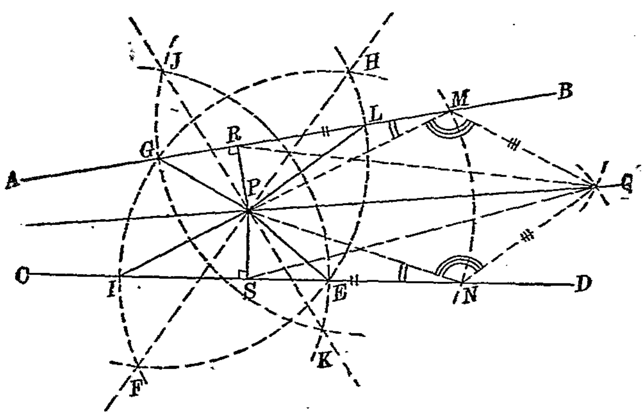
∴　　　EF 是所求的分角線。

(等腰△底邊中垂線是頂角平分線)

附註：　原題所附提示的作法,尙嫌累贅。其實只須在畫 CG 時,延長至與 AB 相交,譬如交於 P 點,乃作 PC 的中垂線,卽得。如此可以省却作 LK 一步,少去不少手續。

此題尙有一極簡便的作法如下：

在 CD 上取任意點 E 爲圓心,任意適當長度爲半徑,畫一弧 $FIGH$; 以 G 爲圓心,同長度爲半徑,畫第二弧 $HLEF$,



與 $FIGH$ 弧交於 H 與 F。用 L 做圓心,同長度爲半徑,畫第三弧 KGJ; 用 I 做圓心,同一半徑, 畫第四弧 JEK, 交 KGJ 弧於 K 及 J。引 HF 與 JK, 交於 P 點, 此點卽在分角線上。用 O 爲心, 任意適當長度爲半徑, 畫弧交 AB, CD 於 M, N。以 M, N 爲心, 任意適當長度同半徑,畫兩

弧交於 Q。聯 PQ 就是所求的分角線。

證明：$\because$ HF 是 G,E 聯線的中垂線，而 P 是 HF 上的一點，$\therefore$ $PG=PE$。(GPE 非直線)

$\because$ JK 是 L,I 聯線的中垂線，而 P 是 JK 上的一點，$\therefore$ $PL=PI$。(LPI 非直線)

又因　$GL=EI$ (所作)

$\therefore$　$\triangle PGL\equiv\triangle PEI$ ($s.\ s.\ s.=s.\ s.\ s.$)

若作　$PR\perp AB$，$PS\perp CD$，則

$PR=PS$ (全等△的對應高)

$\therefore$　P 在 $BA-CD$ 角的平分線上

(一點離角的兩邊等遠，點在分角線上)

其次　$\triangle PRM\equiv\triangle PSN$

($\because$ $PM=PN$, $PR=PS$, $\angle PRM=\angle R=\angle PSN$)

$\therefore$　$\angle PMR=\angle PNS$

又因　$\triangle PMQ\equiv\triangle PNQ$ ($s.\ s.\ s.=s.\ s.\ s.$)

$\therefore$　$\angle PMQ=\angle PNQ$

於是　$\triangle RMQ\equiv\triangle SNQ$.($s.\ a.\ s.=s.\ a.\ s.$)

而　Q 離 AB，CD 等遠

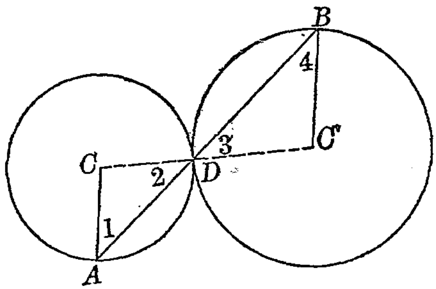
(全等形的對應高相等)

$\therefore$　Q 亦在 $BA-CD$ 角的平分線上

此題作法，不止一種，但以本法爲最簡便，所以最切實用。除此法以外，尙有一法，利用「三角形三條分角線交於一點」的定理，也可以求得 P 點。

(6)兩圓 C,C' 外切於 D。過 D 畫一線段，一端到 $\odot C$ 爲 A 點；又一端到 $\odot C'$ 爲 B 點。試證 $AC\parallel BC'$。

〔解〕 已知：如題。



求證：　如題。

證：　作聯心線 CC'，則 CC' 必過 D 點。(兩圓相切，則聯心線必過切點)

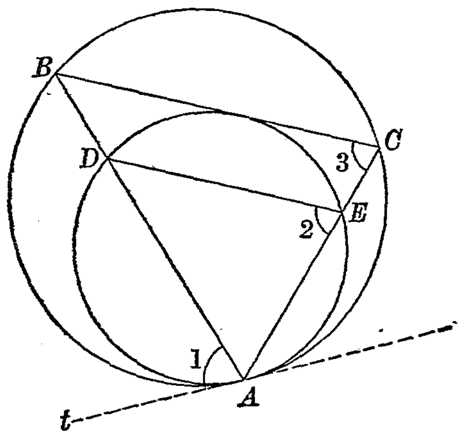
於是　$\angle 1=\angle 2$ 而 $\angle 3=\angle 4$

但　$\angle 2=\angle 3$

$\therefore$　$\angle 1=\angle 4$ 而 $AC \parallel BC'$

(7)大小兩圓內切於 A，從 A 畫大圓的一弦 AB，割小圓於 D；又一弦 AC 割小圓於 E。試證 $BC \parallel DE$。

〔提示〕　在 A 點畫公切線。



〔解〕已知：如題。

求證：　如題。

證：　作公切線 t，則

$\angle 1=\angle 2$，$\angle 1=\angle 3$

(弦切角等於所含弧上的圓周角)

$\therefore$　$\angle 2=\angle 3$ 而 $BC \parallel DE$。

(8)證圖 2 內 $CE \parallel FD$。圖 3 內 D 處的切線平行於 CE。

〔提示〕　每圖內畫 AB 弦。

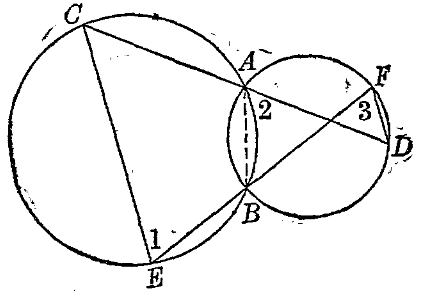


圖 2.

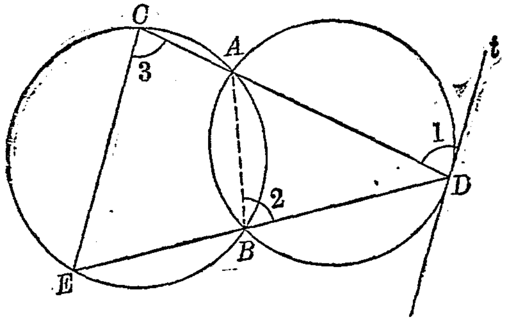


圖 3.

〔解〕 (a)（如圖 2）已知： 二圓交於 A,B; 過 A,B 的二割線，交二圓於 $C,D;E,F$。

求證： $CE \parallel FD$

證： 作公共 AB，則

$\angle 2 = \angle 1$ （圓內接四邊形外角＝內對角）

但 $\angle 2 = \angle 3$ （同弧上圓周角）

$\therefore$ $\angle 1 = \angle 3$ 而 $CE \parallel FD$

(b)（如圖 3）已知： 二圓交於 A,B; 過 A,B 的二割線，交一圓於 C,E; 交他圓於 D; t 切第二圓於 D。

求證： $t \parallel CE$

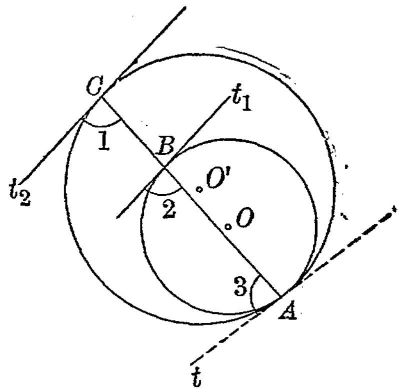
證: 作公共弦 AB, 則

$\angle 1=\angle 2$ (弦切角=所含弧上圓周角)

但 $\angle 2=\angle 3$ (圓內接四邊形外角=內對角)

$\therefore$ $\angle 1=\angle 3$ 而 $t \parallel CE$

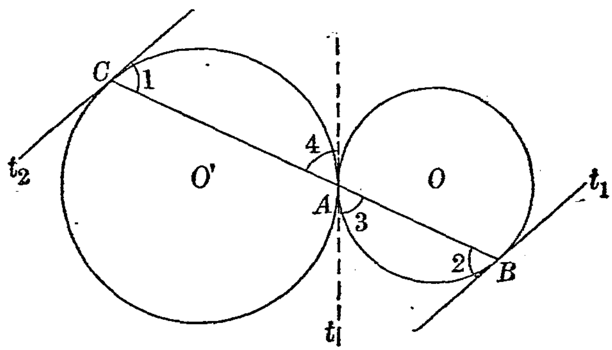
(9)兩圓內切或外切於A,過A的割線,遇兩圓於B,C。證明在 B,C 的切線相平行。



〔解〕 (a)(右圖)已知: O 圓與 O' 圓內切於 A,過 A 的割線交兩圓於 B,C; t_1,t_2 切兩圓於 B,C。

求證: $t_1 \parallel t_2$

證: 過 A 作公切線 t, 則



$\angle 2=\angle 3$, $\angle 1=\angle 3$ (兩弦切角含同弧)

$\therefore$ $\angle 1=\angle 2$ 而 $t_1 \parallel t_2$

(b)(上圖)已知: 兩圓 O,O' 外切於 A,……………。

求證: $t_1 \parallel t_2$

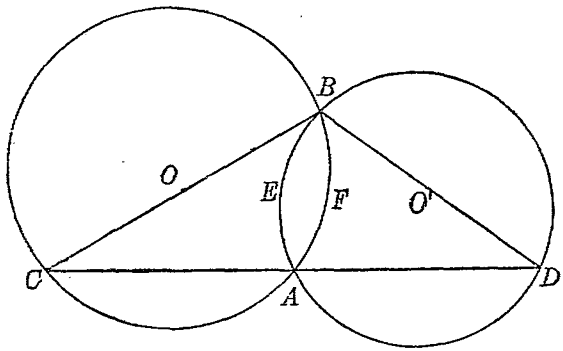
證：　過 A 作公切線 t，則

$\angle 2=\angle 3$，$\angle 1=\angle 4$　(兩弦切角含同弧)

但　　$\angle 3=\angle 4$

$\therefore$　$\angle 1=\angle 2$ 而 $t_1 \parallel t_2$

(10)兩圓相交於 A, B，過 A 作割線交兩圓於 C 同 D。證明 $\angle CBD$ 的大小一定。



〔解〕　已知：　O 圓與 O' 圓交於 A,B；過 A 的割線交兩圓於 C,D。

求證：　$\angle CBD=$ 定值。

證：　$\angle CBD=2\measuredangle R-(\angle C+\angle D)$ (△內角和$=2\measuredangle R$)

但　　$\angle C=\frac{1}{2}\,\overset{\frown}{AFB}^{\circ}$ (或 $\angle AOB$)$=$定值

$\angle D=\frac{1}{2}\,\overset{\frown}{AEB}^{\circ}$ (或 $\angle AO'B$)$=$定值

$\therefore$　$\angle C+\angle D=$定值

於是　$\angle CBD=$定值$-$定值$=$定值

目解題三十一、 (在教科書第 216 面到第 217 面)

試說明下面各題裏適合條件的平面軌跡，但不須去證明他。(看 §123, §124)

(1)和兩定點等遠的點。

〔答〕　軌跡是兩定點聯線的中垂線。

(2)和一定點有一定距離的點。

〔答〕　軌跡是以定點爲心,定距離爲半徑的圓。

(3)同一定線有一定距離的點。

〔答〕　軌跡是兩直線,與定線平行,在其兩側,與其相隔定距離。

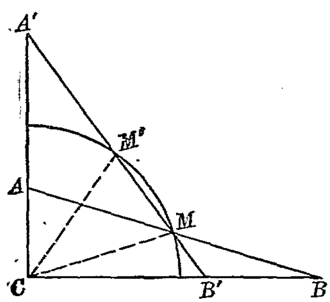
(4)同兩平行線等遠的點。

〔答〕　軌跡是介於兩線中間的平行線,與兩線等距離。

(5)同相交兩線等遠的點。

〔答〕　兩雙對頂角的平分線。

理解題十六、(在教科書第222面)



(1)一條一定長的線段的兩端,接着一隻直角的兩邊上移動,找出這條動線中點的軌跡。

〔解〕　已給:　直角C,定線份AB,其兩端接於$\angle ACB$的二邊上移動。

求:　AB中點M的軌跡。

軌跡:　以C爲圓心,AB半長爲半徑的四分圓。

證明:　(一)設M爲此四分圓上一點。

聯CM,並作$\triangle CMB$,使$MB=MC$。

延長BM,與AC交於A。於是

$\angle CAM+\angle CBM=\angle R$ ($\because \angle ACB=\angle R$)

$\angle ACM+\angle BCM=\angle R$ (全量=分量和)

但　$\angle CBM=\angle BCM$ ($\because MB=MC$)

$\therefore$　$\angle CAM=\angle ACM$ (等角的餘角)

而　　$AM=CM$

即　$AB=2CM=$定長,而 M 爲其中點。

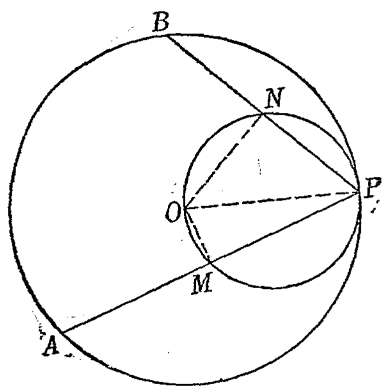
(二)設 $A'B'$ 爲定線份一位置, M' 爲其中點。

聯 CM', 則

$$CM'=A'M'=B'M'=\tfrac{1}{2}A'B'=\tfrac{1}{2}AB=CM$$

$\therefore$　M' 在以 C 爲心, CM 爲半徑的圓上。

(2)過圓上一定點畫所有的弦。試求那些弦上中點的軌跡。



〔解〕 已給: O 圓周上定點 P。

求: 過 P 各弦中點的軌跡。

軌跡: 是以 OP 爲直徑的圓。

證: (一)設 M 是此圓上一點。聯 PM, 延長交 O 圓於 A。聯 OM。

$\angle OMP=\angle R$ (半圓內圓周角)

$\therefore$　$AM=MP$ (垂直於弦半徑平分弦)

即　M 是 PA 弦的中點。

(二)設 PB 是過 P 的一弦, N 是其中點。

聯 ON, 則

$\angle ONP=\angle R$ (平分弦的半徑⊥弦)

$\therefore$　N 在半圓 ONP 上。

(一弦在一點所張之角,等於該弦所對弓形角,則該點在弓形弧上。)

(3)過一定點 A 畫若干線。求出另過一點 B 對於這許多線上所畫垂線正交的點的軌跡。

〔略解〕 軌跡是以 AB 爲直徑的圓,證法可仿照前題。

目解題三十二、(在教科書第 225 面)

怎樣求出下面各題裏適合條件的諸點,每題都加討論,但不必去證明他。

(1)離開 P 三吋, Q 三吋的點。

〔解〕 已知: P,Q 兩點。

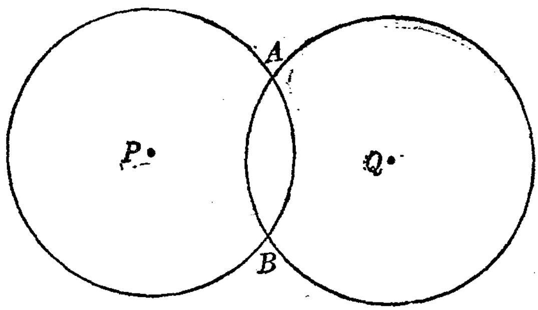
求作: 離 P 3 吋,離 Q 3 吋的點。

求法: 以 P,Q 爲圓心, 3 吋爲半徑,畫兩圓交於 A,B。A,B 即所求二點。

討論: $PQ>6$ 吋時,沒有解。

$PQ=6$ 吋時,有一點。

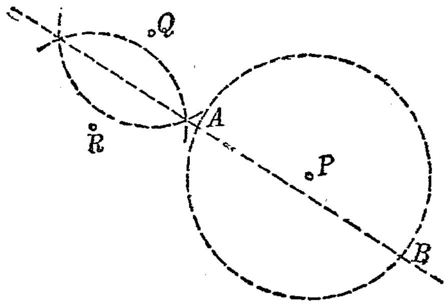
$PQ<6$ 吋時,常有二點。



(2)離開 P 四吋,並且和 Q 同 R 等遠的點。

〔解〕 已給: P,Q,R 三點。

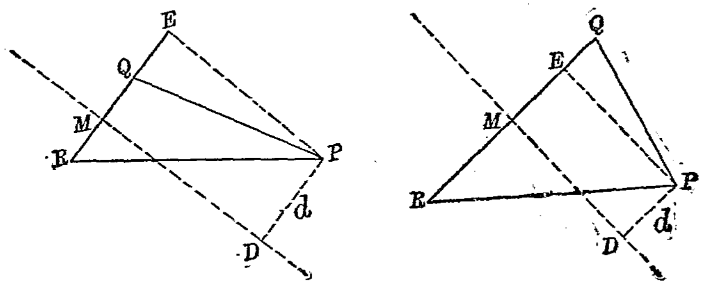
求作: 離 P 4吋,離 Q,R 等遠的點。



求法： 作 QR 的中垂線 AB。

以 P 爲心，4 吋爲半徑畫圓，交 AB 於 A,B。A 與 B 就是所求的兩點。

討論： 當 P,Q,R 成下列兩圖的位置時，有



$$\overline{PR}^2=\overline{RE}^2+\overline{PE}^2$$

$$\overline{RE}^2=\left(\frac{\overline{QR}}{2}+d\right)^2$$

$$\overline{PE}^2=\overline{PQ}^2-\overline{QE}^2$$

$$\therefore \quad \overline{PR}^2=\left(\frac{\overline{QR}}{2}+d\right)^2+\overline{PQ}^2-\overline{QE}^2$$

$$即 \quad \overline{PR}^2-\overline{PQ}^2=\left(\frac{\overline{QR}}{2}+d\right)^2-\overline{QE}^2$$

但 在右圖 $\overline{QE}^2=\left(\frac{\overline{QR}}{2}-d\right)^2$

在左圖 $\overline{QE}^2=\left(d-\frac{\overline{QR}}{2}\right)^2=\left(\frac{\overline{QR}}{2}-d\right)^2$

$$\therefore \quad \overline{PR}^2-\overline{PQ}^2=\left(\frac{\overline{QR}}{2}+d\right)^2-\left(\frac{\overline{QR}}{2}-d\right)^2$$

$$=2\overline{QR}\,d$$

即 $(\overline{PR}^2\sim\overline{PQ}^2)/2\ \overline{QR}\ =d$

$\therefore$ $(\overline{PR}^2\sim\overline{PQ}^2)/2\ \overline{QR}>4$ 时,無解。

$(\overline{PR}^2\sim\overline{PQ}^2)/2\ \overline{QR}=4$ 时,一解。

$(\overline{PR}^2\sim\overline{PQ}^2)/2\ \overline{QR}<4$ 时,二解。

(3)同 P,Q 等遠,也同兩平行線等遠的點。

〔解〕 已給: P,Q 兩點; $l_1 \parallel l_2$。

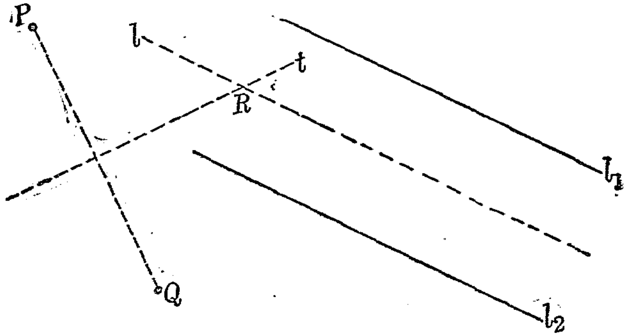
求作: 離 P,Q 等遠又離 l_1, l_2 等遠的點。

求法: 作 PQ 的中垂線 t。

作 l_1, l_2 中央平行線 l。t 與 l 的交點 R 便是所求的點。

證明: 從略。

討論 $PQ \nparallel l_1$ 時,常有一解。

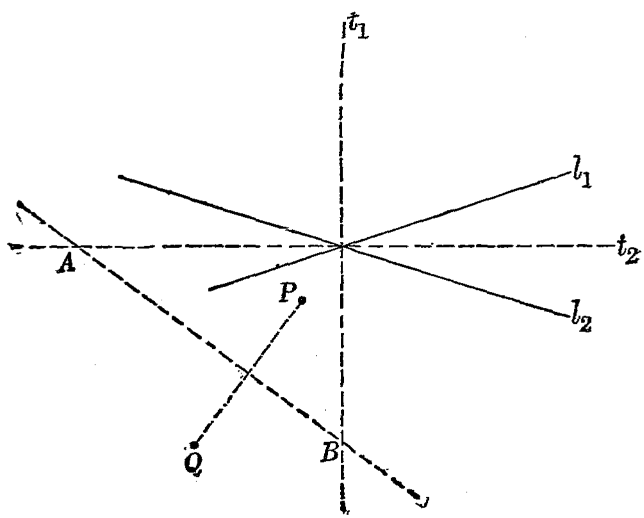


(4)同 P,Q 等遠，也同兩交線等遠的點。

〔解〕 已給： 相交線 l_1, l_2; P,Q 點。

求作： 離 P,Q 等遠，又離 l_1, l_2 等遠的點。

求法： 作 l_1, l_2 交角平分線 t_1, t_2。作 P,Q 聯線的中垂線 AB，交 t_1, t_2 於 A,B。A 及 B 就是所求的點。



討論： 至少有一解，至多有二解。

(5)離開一線有一定的長，又同兩點等遠的點。

〔解〕 已給： P,Q 兩點，l 線。

求作： 離 P,Q 等遠，又離 l 有定長的點。

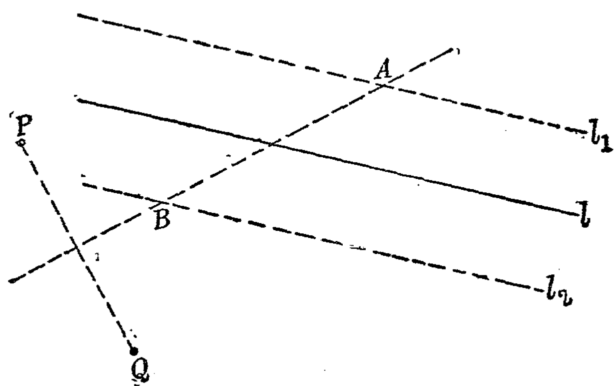
求法： 作 PQ 的中垂線 AB。

作 $l_1 \parallel l$, $l_2 \parallel l$, 與 l 相隔＝定長。

AB 交 l_1, l_2 於 A,B, 卽所求之點。

討論： $PQ \perp l$ 時，無解。

$PQ \not\perp l$ 時，常有二解。



(6)離開一線有一定的長，又同兩線等遠的點。

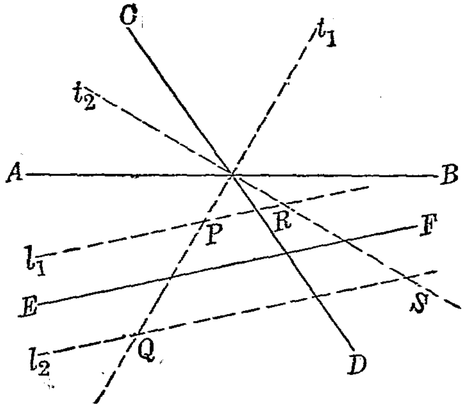
〔解〕已給： AB,CD 兩線，及 EF 一線。

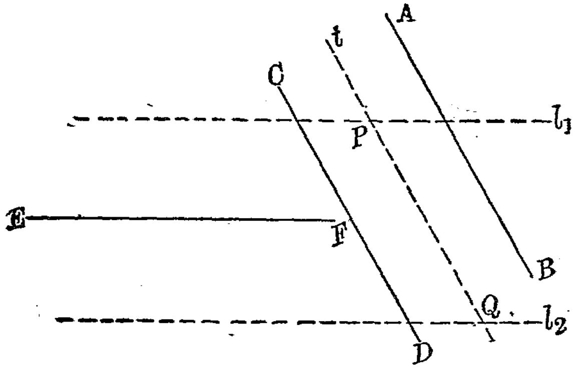
求作： 離 EF 有定長，離 AB,CD 等遠的點。

求法： 若 AB,CD 相交，求法如第一圖（觀圖自明，故從略），得 P,Q,R,S 四點。

若 $AB \parallel CD$，可得第二圖（作法從略）P,Q 二點。

討論： $AB \nparallel CD$，至多有四解，至少有二解。





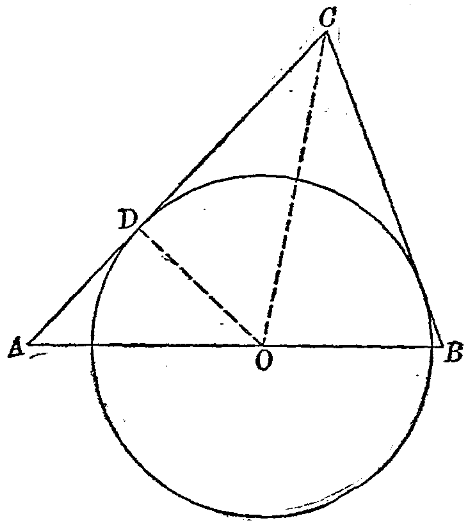
$AB \parallel CD$，或無解，或有二解。

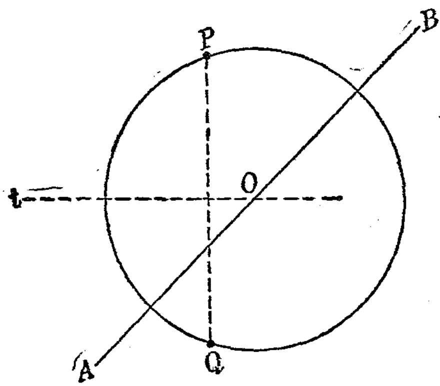
理解題十七、（在教科書第 225 面）

（1）作圓心在△一邊上，並切於這△其餘兩邊的一個圓（那△兩邊在必要時可以延長）。

〔解〕作法：平分 $\angle C$，平分線交 AB 於 O。作 $OD \perp AC$，交 AC 於 D。以 O 爲圓心，OD 爲半徑，畫一圓，便是。

證明：從略。





討論： 常可得三解。

(2)作圓心在一定線上，並經過兩定點的一個圓。

〔解〕 已給： P,Q 定點；AB 定線。

求作： 一圓過 P,Q，圓心在 AB 上。

作法： 作 PQ 的中垂線 t，交 AB 於 O 點。以 O 爲心，OP 爲半徑畫圓便是。

證明： $OQ=OP$， $\therefore$ Q,P 同在一圓上。

討論： P,Q 在 AB 同側時，若 $PQ \not\perp AB$，常有一解。

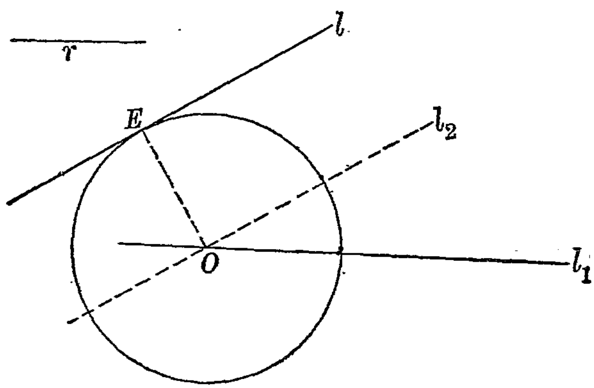
P,Q 在 AB 異側，若 $PQ \not\perp AB$，常有一解。若 $PQ \perp AB$，則 P 與 Q 離 AB 不等，無解；離 AB 等遠，有無數解。

(3)作圓心在所給線 l_1 上，用 r 做半徑同所給線 l 相切的一個圓。

〔解〕　已給：　l 與 l_1 二線；線份 r。

求作：　一圓切於 l，半徑等於 r，圓心在 l_1 上。

作法：　作 l_2 平行於 l，且與 l 相距 r，l_2 交 l_1 於 O。以 O 爲圓心，r 爲半徑畫圓便是。



證明：　作 $OE \perp l$，則 $OE = r$。

（$\|s$ 間的距離處處相等）

$\therefore$　E 點在 O 圓上，而 l 切於 O 圓。

討論：　$l \parallel l_1$ 時，若相距 $\neq r$，無解；若相距等於 r，無數解。

$l \nparallel l_1$ 時，常有一解。

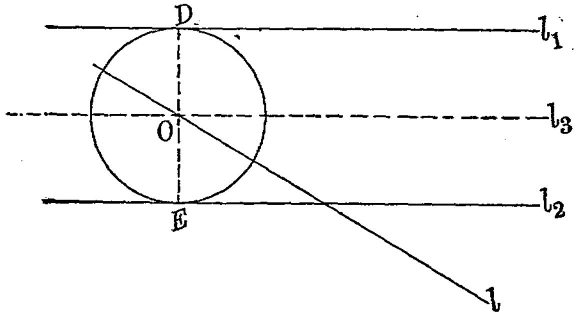
(4)作圓心在所給線上，並和兩平行線相切的一個圓。

〔解〕　已給：　l 線，又 $l_1 \parallel l_2$。

求作: 一圓,切 l_1 與 l_2, 圓心在 l 上。

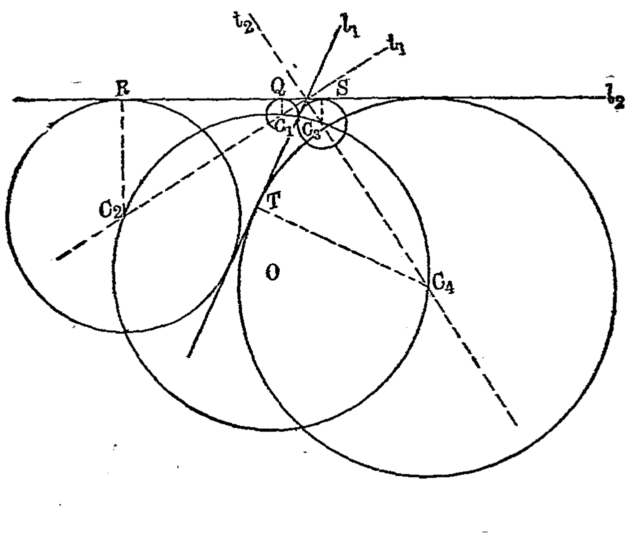
作法: 觀圖自明,從略。

討論: $l \not\parallel l_1$, 常可得一解。



(5)作圓心在所給圓周上，並和已定相交兩線相切的一個圓。

〔解〕 已給: O 圓與 l_1, l_2 兩條相交線。



求作：　一圓切於 l_1, l_2, 圓心在 O 圓周上。

作法：　作一雙分角線 t_1 與 t_2, 交 O 圓於 C_1, C_2, C_3, C_4 四點。

作 C_1Q, C_2R, C_3S, C_4T 諸⊥s。

以 C_1, C_2, C_3, C_4 為心，C_1Q, C_2R, C_3S, C_4T 為半徑，畫四圓便是。

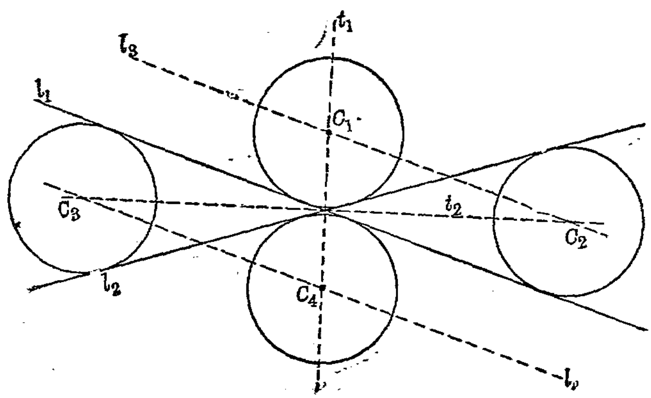
證明：　從略。

討論：　O 圓不與 t_1, t_2 相遇，無解；與二者相切，二解；與一線相切，與又一線相交，三解；與二線相交，四解。

(6)作一個一定半徑，並切於所給相交兩線的一個圓。

〔解〕　上略。

作法：　作 l_2, l_3 平行於 l_1，而與 l_1 相距等於定長。作分角線 t_1, t_2, 交 l_2, l_3 於 C_1, C_2, C_3, C_4。以定長為半徑，C_1, C_2, C_3, C_4 為心，作四圓如圖，便是。



證明：　從略。

討論：　常可得四解。

第六編　比例,相似形

目解題三十三、 (在教科書第236面)

(1)若 $x:4=7:8$, 求 x。

〔答〕 $x=3\frac{1}{2}$。

(2)若 $3:x=2:3$, 求 x。

〔答〕 $x=4\frac{1}{2}$。

(3)若 $4:5=x:10$, 求 x。

〔答〕 $x=8$。

理解題十八、 (在教科書第236面到237面)

(1)從 $a:b=c:d$, $m:n=r:s$, 證明 $am:bn=cr:ds$。

〔證〕 $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$ (1)　　$\frac{m}{n}=\frac{r}{s}$ (2)

$$(1)\times(2)\quad \frac{a}{b}\times\frac{m}{n}=\frac{c}{d}\times\frac{r}{s}$$

即 $$\frac{am}{bn}=\frac{cr}{ds}\text{或 } am:bn=cr:ds。$$

(2)若 $a:b=c:d$, 證明 $ma-b:mc-d=a:c$。

〔證〕 $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$,　$\frac{a}{c}=\frac{b}{d}$,　$\frac{ma}{mc}=\frac{b}{d}$

$$\frac{ma}{b}=\frac{mc}{d},\qquad \frac{ma-b}{b}=\frac{mc-d}{d},$$

$$\frac{ma-b}{mc-d}=\frac{b}{d}=\frac{a}{c},$$

即　$ma-b:mc-d=a:c$。

(3)若 $a:b=c:d$, 證明 $c+d:a+b=d:b$

〔證〕　$\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$,　　$\frac{a+b}{b}=\frac{c+d}{d}$,

$$\frac{b}{a+b}=\frac{d}{c+d},\quad \therefore \frac{c+d}{a+b}=\frac{d}{b},$$

即　$c+d:a+b=d:b$。

(4)求 17,19, 和 187 的比例第四項。

〔解〕　$17:19=187:x$, $x=209$〔答〕

(5)求 6 和 54 的比例中項。

〔答〕　18。

(6)求 27 和 189 的比例第三項。

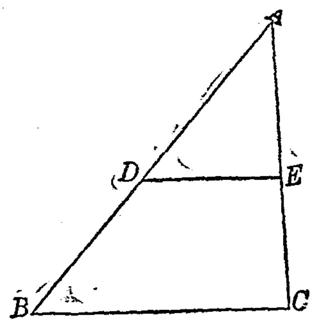
〔解〕　$27:189=189:x$

$x=189\times7=1323$。〔答〕

(7)求以下各比例的未知項：

$x:4::27:126$;　$78:x::13:3$;　$99:117::x:39$; $171:27::57:x$。

〔答〕　$\frac{6}{7}$; 18; 33; 9。



理解題十九、（在教科書第 244 面到第 246 面）

若在 $\triangle ABC$ 內，$DE \parallel BC$, 由下表裏面的已知數算出空格內線份之長。

AD	DB	AE	EC	AB	AC
20	24	15	(18)	(44)	(33)
4	56	(3)	42	(60)	(45)
(3)	102	12	408	(105)	(420)
25	(475)	18	342	(500)	(360)

〔答〕 (1) $AD:DB=AE:EC$　$\therefore 20:24=15:EC$

$EC=18$, $AB=44$, $AC=33$。

(2) $4:56=AE:42$,　$\therefore$　$AE=3$,

$AB=60$, $AC=45$。

(3)　$AD:102=12:408$,

$\therefore$　$AD=3$, $AB=105$, $AC=420$。

(4)　$25:DB=18:342$

$\therefore$　$DB=475$, $AB=5000$, $AC=360$。

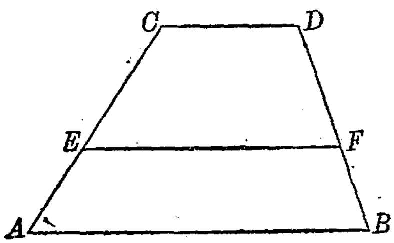
目解題三十四、（在教科書第248面）

(1)若 $a=6$, $b=10$, $c=18$, 求 a,b 同 c 的比例第四項的長。

〔答〕 30。

(2)若 $a=6$, $b=10$, 求 a 同 b 的比例第三項的長。

〔答〕 $16\frac{2}{3}$。



(3)一線與梯形的底平行，求證他分這梯形的不平行邊成比例。

〔解〕 已知：$ABCD$ 爲梯形；$EF \parallel AB \parallel CD$。

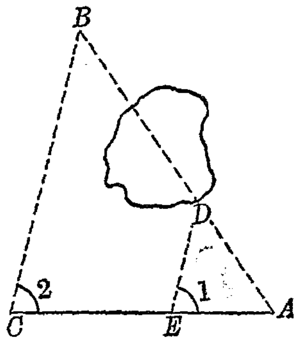
求證:　$CE : EA = DF : FB$。

證:　$\because$ $CD \parallel EF \parallel AB$

　　$\therefore$ $CE : EA = EA : FB$ (§202 定理四)

理解題二十、 (在教科書第248面到第249面)

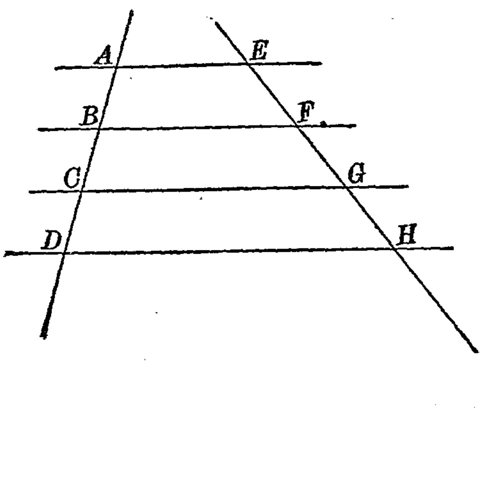
(1)從 A 到 B 中間被某物遮蔽，不能接近。求測 AB 的距離。



〔提示〕 選一個適當的 C 點,與 A 同 B 可以連通,過 AC 線上與 A 旁近的 E 點,作 $ED \parallel CB$，並遇 AB 於 D。這樣就可以量出 AE,EC 同 AD 來。從 §198,DB 和 AB 當然也可算得出來了。

〔解〕 $\because$ $ED \parallel CB$,　$\therefore$ $AD : DB = AE : EC$。

從此式即可算出 DB, 而 $AB = AD + DB$ 也可知道。



(2)在上圖裏面，諸水平線互相平行。若 $AB=8$ 吋，$BC=7$ 吋，$CD=6\frac{1}{2}$ 吋，並 $EF=10$ 吋，求 FG 同 GH 的長。

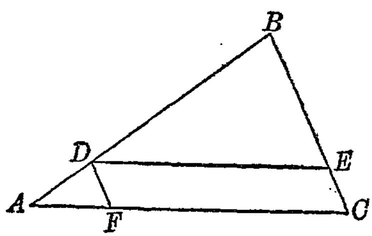
〔解〕 $AB:BC=EF:FG$

$\therefore$ $8:7=10:FG$ 而 $FG=8\frac{3}{4}$ 吋　〔答〕

$BC:CD=FG:GH$

$\therefore$ $7:6\frac{1}{2}=8\frac{3}{4}:GH$ 而 $GH=8\frac{1}{8}$ 吋　〔答〕

(3)在三角形 ABC 裏面，從 AB 邊上任一點 D，作 $DE\parallel AC$，$DF\parallel BC$；證明 $AF:FC=CE:EB$。



〔解〕 已知： 如題。

求證： 如題。

證： $\because$ $DF\parallel BC$

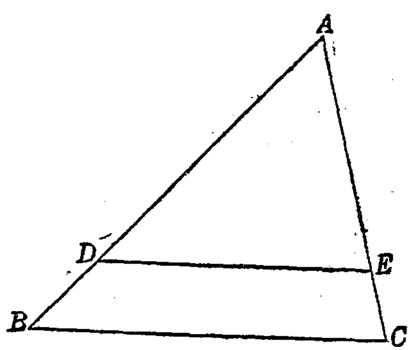
$\therefore$ $AF:FC=AD:DB$

但 $DE\parallel AC$

$\therefore$ $AD:DB=CE:EB$

$\therefore$ $AF:FC=CE:EB$

(4)若如下圖 $DE\parallel BC$，試用下表裏面已知線份，算出沒有填入的諸線份來。



AD	AB	DB	AE	AC	EC
8	12	(4)	6	(9)	(3)
6	9	(3)	(14)	(21)	7
10	(18)	8	(10)	18	(8)
240	(360)	(120)	200	300	(100)
120	(240)	(120)	(50)	100	50
(25)	40	15	$\left(18\frac{3}{4}\right)$	30	$\left(11\frac{1}{4}\right)$
$\left(51\frac{3}{7}\right)$	90	$\left(38\frac{4}{7}\right)$	40	70	(30)
$\left(144\frac{16}{61}\right)$	800	$\left(655\frac{45}{61}\right)$	(66)	366	300
(12)	(42)	30	20	(70)	50

〔答〕　各數均填入上表，加括弧爲記。

自解題三十五、（在教科書第256面）

（1）說出相似形的定義來。

〔答〕　兩形互等角，對應邊又成比例，纔是相似形。

（2）互等角多角形必相似麼？三角形呢？

〔答〕　互等角多角形不一定相似；互等角三角形常相似。

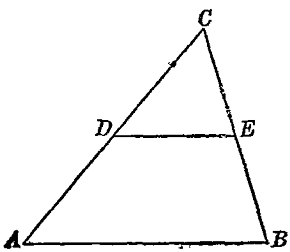
（3）多角形的對應邊成比例，那形就相似麼？若是三角形便怎樣？

〔答〕　前者未必相似;後者却一定相似。

(4)相等三角形都相似麼?什麼緣故?

〔答〕　都相似,因爲各角互等。

理解題二十一、(在教科書第 256 面到第 257 面)



(1)試用相似三角形,證明聯結三角形兩邊中點的線份,必等於第三邊的一半。

〔解〕　已知:　$\triangle ABC$ 中,$AD=DC$, $BE=EC$。

求證:　$DE=\frac{1}{2}AB$。

證:　$CD:CA=1:2$,

$CE:CB=1:2$

$\therefore\quad CD:CA=CE:CB$

$\angle DCE=\angle ACB$　(合一)

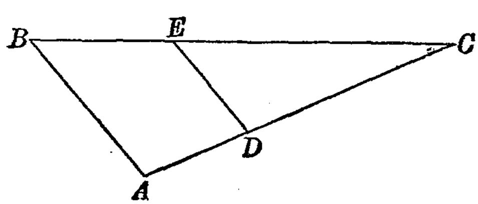
$\therefore\quad \triangle CDE \backsim \triangle CAB$

(兩邊成比例,夾角相等)

而　$DE:AB=CD:CA=1:2$

$\therefore\quad DE=\frac{1}{2}AB$

(2)如圖 $DE \parallel AB$, 且$\frac{CD}{DA}=\frac{5}{2}$。若 $DE=4$吋,求AB。



〔解〕　因 $\triangle CDE \backsim \triangle CAB$　$\therefore \dfrac{CD}{CA}=\dfrac{DE}{AB}$

但　$\dfrac{CD}{DA}=\dfrac{5}{2}$　　$\therefore \dfrac{CD}{CD+DA}=\dfrac{5}{5+2}=\dfrac{5}{7}$

因此　$\dfrac{DE}{AB}=\dfrac{5}{7}=\dfrac{4}{AB}$　　而 $AB=5\dfrac{3}{5}$吋　〔答〕

(3)如上圖，若 $AC=14$ 吋，$CD=10$ 吋，$BE=6$ 吋，$CE=15$ 吋，DE 與 AB 平行麼？什麼緣故？

〔解〕　$AD:CD=4:10=2:5$

$BE:CE=6:15=2:5$

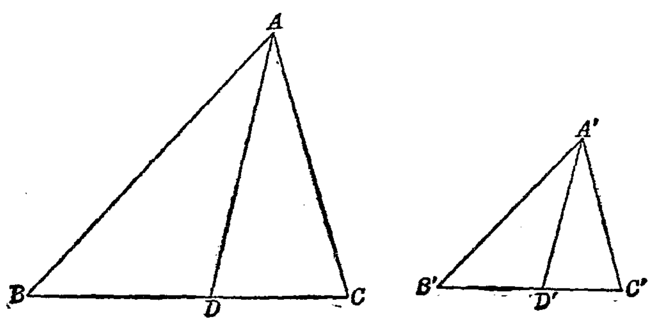
$\therefore$　$AD:CD=BE:CE$

可見　$DE \parallel AB$

(4)在兩個相似三角形裏面，對應角的平分線的比，等於兩三角形的相似比。

〔解〕　已知：　$\triangle ABC$ 相似於 $\triangle A'B'C'$；AD 平分 A 角，$A'D'$ 平分 A' 角。

求證：　$AD:A'D'=AB:A'B'$



證:　$\angle B=\angle B', \angle BAC=\angle B'A'C'$　(相似△對應角)

∴　$\frac{1}{2}\angle BAC=\frac{1}{2}\angle B'A'C'$

卽　$\angle BAD=\angle B'A'D'$

∴　$\triangle BAD \backsim \triangle B'A'D'$　(有兩角對應等)

而　$AD : A'D'=AB : A'B'$

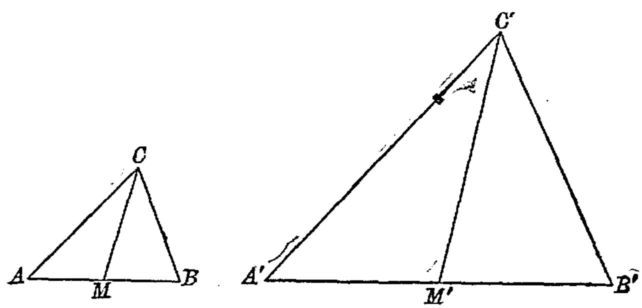
(5)兩個相似三角形裏面,對應邊上中線的比,等於兩三角形的相似比。

〔解〕 已知:　$\triangle ABC$ 相似於 $\triangle A'B'C'$; CM, $C'M'$ 爲中線。

求證:　$CM : C'M'=CA : C'A'$

證:　$\angle A=\angle A'$　(相似△對應角)

$AM=\frac{1}{2}AB,\ A'M'=\frac{1}{2}A'B'$



∴　$AM : A'M'=AB : A'B'=CA : C'A'$

於是　$\triangle ACM \backsim \triangle A'C'M'$

(兩△兩邊成比例,夾角等)

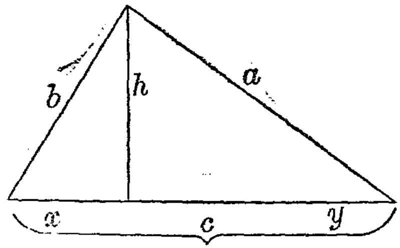
∴　$CM : C'M'=CA : C'A'$　(相似形定義)

目解題三十六、(在教科書第 261 面到第 262 面)

（1）若上面推論一的圖裏，$x=8$ 同 $y=18$，找 h。

〔提示〕　$h^2=xy=8\times18=144$。

〔答〕　$h=12$。



（2）若同圖裏，$a=3$ 同 $b=4$，找 x 對於 y 的比。

〔答〕　$x:y=b^2:a^2=16:9$。

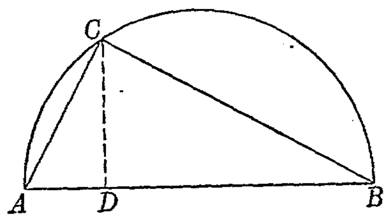
（3）又同圖裏 $c=5$，$b=3$，找 x。若 $c=5$，$a=4$，再找 y。

〔答〕　$b^2=9=cx=5x$，　$\therefore\ x=\frac{9}{5}$。

$a^2=16=cy=5y$，　$\therefore\ y=\frac{16}{5}$。

（4）又同圖裏，$c=10$，$y=8$，找 a。

〔答〕　$a^2=cy=80$　　$\therefore\ a=\sqrt{80}=4\sqrt{5}$。

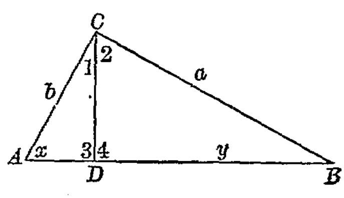


（5）上面推論三的圖裏面，若 $AD=4$，$CD=6$，求 DB。

〔答〕　$\overline{CD}^2=36=4\overline{DB}$

$\therefore$　$DB=9$

（6）在下圖裏，$\triangle ABC$ 的 $\angle C$ 是直角，$CD\perp AB$。指出三對相似三角形來。



〔答〕（一）$\triangle ADC\backsim\triangle CDB$，

（二）$\triangle ADC\backsim\triangle ACB$，

(三)$\triangle CDB \backsim \triangle ACB$。

(7)在上圖裏 $\triangle ACD$ 同 ACB 裏,那幾對角相等?那幾對邊是對應邊?

〔答〕 $\angle CAD=\angle BAC$, $\angle 1=\angle B$, $\angle 3=\angle ACB$。

AC 與 AB, AD 與 AC, BC 與 CD 對應。

(8)指出 $\triangle ACD$ 同 CDB 裏的等角同對應邊。

〔答〕 $\angle DAC=\angle 2$, $\angle 1=\angle B$, $\angle 3=\angle 4$。

AD 與 CD, AC 與 CB, CD 與 BD 對應。

(9)有兩三角形 ABC 同 $A'B'C'$, $\angle A=\angle A'$, $AB=12$, $AC=14$, $A'B'=16$, $A'C'=18\frac{2}{3}$。這兩三角形相似麼?倘若相似,爲什麼相似?

〔解〕 $AB:A'B'=12:16=3:4$

$AC:A'C'=14:18\frac{2}{3}=42:56=3:4$

$\therefore$ $AB:A'B'=AC:A'C'$ 又因 $\angle A=\angle A'$

$\therefore$ $\triangle ABC \backsim \triangle A'B'C'$

(兩$\triangle$有兩邊成比例,夾角等,則相似)

(10)兩個等腰三角形的頂角若相等,證明這兩個三角形相似。

〔提示〕 利用「兩$\triangle$有兩邊成比例,夾角等,則相似」一定理,卽可證明,因兩腰相等,其比亦等也。

(11)有兩三角形 ABC 同 $A'B'C'$, $AB=10$, $BC=14$, $CA=16$, $A'B'=15$, $B'C'=21$, $C'A'=24$。 這兩三角形相似麼? 申明理由。

〔解〕 $AB:A'B'=10:15=2:3$

$BC:B'C'=14:21=2:3$

$CA:C'A'=16:24=2:3$

$\therefore$　　$AB : A'B' = BC : B'C' = CA : C'A'$

而　　$\triangle ABC \backsim \triangle A'B'C'$　(兩△三邊成比例，卽相似)

目解題三十七、(在教科書第 263 面)

(1)若一個直角三角形的兩邊，一是 3 吋，一是 4 吋，試求他的斜邊。

〔答〕　5 吋。

(2)一直角三角形的邊各爲 4 吋同 5 吋，試求斜邊的平方。又用平方根號表斜邊的長。

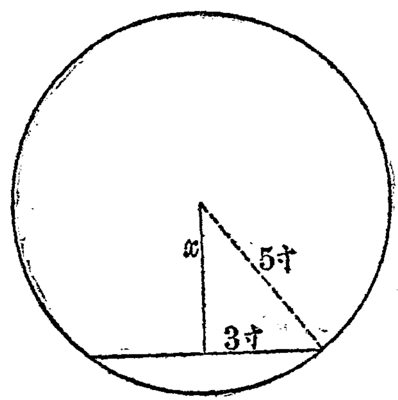
〔答〕　41；$\sqrt{41}$。

(3)一個直角三角形的邊是 5 吋同 8 吋，又一個直角三角形的邊是 6 吋同 7 吋，那一個的斜邊較長呢？

〔答〕　第一個的斜邊較長，　$\because$　$\sqrt{89} > \sqrt{85}$。

理解題二十二、(在教科書第 263 面到第 264 面)

(1)在直徑 1 尺的圓裏面，6 寸的弦到圓心的距離是多少寸？



〔解〕　命x＝距離寸數，則從右圖，易知 $x = \sqrt{25-9}$ ＝4寸。〔答〕

(2)在半徑 1 尺的圓裏面，有條弦到中心的距離是 6 寸。問這弦有多少長？

〔解〕　$x = \sqrt{10^2 - 6^2} = \sqrt{64} = 8$ 寸。　〔答〕

(3)一個正方形的邊是 5，求出他的對角線來，若他的

邊是 a，他的對角線是什麼？

〔答〕 對角線是 $5\sqrt{2}$，$a\sqrt{2}$。

(4)一個正方形的對角線是 8，他的邊是什麼？若他的對角線是 d，他的邊是什麼？

〔解〕
$$\left.\begin{aligned} &8^2=2a^2, \quad \therefore a=\sqrt{32}=4\sqrt{2}。\\ &d^2=2a^2, \quad \therefore a=\frac{d}{\sqrt{2}}=\frac{d}{2}\sqrt{2}。\end{aligned}\right\}〔答〕$$

(5)一個直角等腰三角形的斜邊是 12 吋，試求其餘邊的長。

〔答〕 $6\sqrt{2}$。

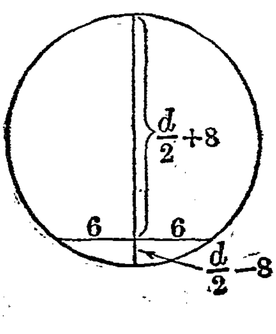
(6)一個斜方形的兩條對角線各是 14 寸同 10 寸，求這斜方形各邊的長。

〔提示〕 先證兩對角線互為垂線，並且互相平分。

〔答〕 $\sqrt{7^2+5^2}=\sqrt{74}$。

(7)在一個圓裏面，12 寸長的弦到圓心的距離是 9 寸，求這圓半徑的長。

〔答〕 $r=\sqrt{6^2+9^2}=3\sqrt{13}$ 寸。



目解題三十八、（在教科書第 267 面）

(1)一弦長 12 吋，離圓心 8 吋，求直徑。

〔解〕 從左圖，知

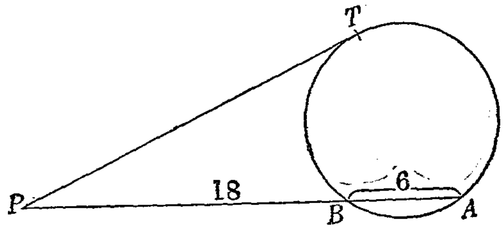
$$\left(\frac{d}{2}+8\right)\left(\frac{d}{2}-8\right)=36$$

$$\frac{d^3}{4}=36+64=100 \quad d^2=400$$

$\therefore \qquad d=20$。〔答〕

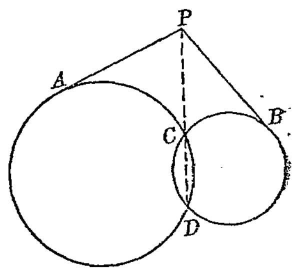
（2）一弦 AB 長 6 吋，延長從 B 到 P，令 PB 爲 18 吋，試求從 P 所畫到這圓的切線的長。

〔解〕從圖卽知 $\overline{PT}=\sqrt{\overline{PA}\cdot\overline{PB}}=\sqrt{24\times18}$ $=12\sqrt{3}$ 吋〔答〕



理解題二十三、（在教科書第 267 面到第 268 面）

（1）從兩交圓的公共弦的延長線上的一點，所畫兩圓的切線的長必相等。



〔解〕已知：兩圓交於 C,D；CD 延長到 P；PA，PB 切兩圓於 A，B。

求證：　$PA=PB$。

證：　$\overline{PA}^2=\overline{PC}\times\overline{PD}=\overline{PB}^2$

$\therefore \qquad PA=PB$.

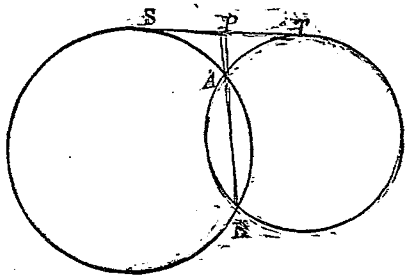
（2）兩交圓的公共弦（延長）必平分他們的公切線。

〔解〕已知：兩圓交於 A,B；ST 爲公切線；BA 延長交 ST 於 P。

求證：　$SP=PT$。

證：　$\overline{SP}^2=\overline{PA}\times\overline{PB}=\overline{PT}^2$

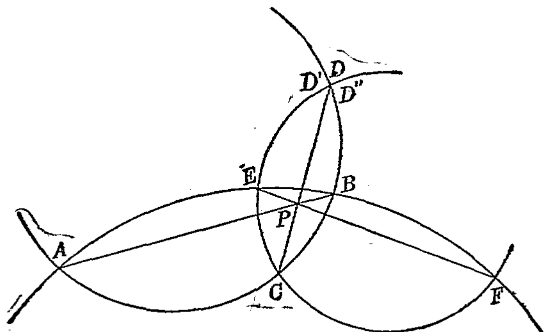
∴　$SP=PT$



（3）若三個圓裏面，每一圓割開其他的二圓，那麼所有公共的三弦，必相遇於一點。

〔解〕　已知：　三圓互相交於 A,B; C,D; E,F 六點。

求證：　AB, CD, EF 共點。



證：　設 AB, CD 交於 P 點。

聯 CP 延長，與 ECF 圓交於 D''，與 ACB 圓交於

D'。於是

$$\left.\begin{array}{l}\overline{D''P}\cdot\overline{PC}=\overline{EP}\cdot\overline{PF}\\ \overline{D'P}\cdot\overline{PC}=\overline{BP}\cdot\overline{PA}\end{array}\right\}\text{(交弦比例線份)}$$

但 $\overline{EP}\cdot\overline{PF}=\overline{BP}\cdot\overline{PA}$　($\because$ A, B, E, F 共圓)

$\therefore$ $\overline{D'P}\cdot\overline{PC}=\overline{D''P}\cdot\overline{PC}$

而　　$D'P=D''P$

$\therefore$ D' 與 D'' 合爲一點，成爲 ECF, ACB 兩圓的公共點。

但　此兩圓的公共點除 C 而外，祇有 D 點，所以 D' 與 D'' 都合於 D。

即　CP 過 D 點。

$\therefore$ AB, EF, CD 交於 P 點。

(4)一個圓的圓心離 P 爲 8 吋，他的半徑長 4 吋，從 P 隨便畫割線 PAB。試求 $PA\times PB$ 的值。

〔解〕　設從 P 引第二割線 PCD 過圓心，則 $PC=8-4=4$ 吋；$PD=8+4=12$ 吋。

但　$\overline{PC}\cdot\overline{PD}=\overline{PA}\cdot\overline{PB}$

$\therefore$ $\overline{PA}\cdot\overline{PB}=4\times12=48$ 方吋。〔答〕

(5)一個圓的圓心離 P 點爲 10 吋，他的半徑是 6 吋。求從 P 點所畫切線的長。

〔解〕　設此長爲 x 吋，則

$$x^2=(10-6)(10+6),\quad\therefore x=8\text{ 吋。〔答〕}$$

(6)一切線從 P 到圓周爲 7 吋，又一割線 PAB, PA 長 4 吋。求 PB。

〔解〕　$\overline{PA}\cdot\overline{PB}=7^2$,　$4\cdot\overline{PB}=49$,　$\therefore\overline{PB}=12\frac{1}{4}$ 吋。〔答〕

目解題三十九、（在教科書第 274 面到第 275 面）

（1）若線份 AB 垂直於一直線 l，那麼 AB 在 l 上正射影的長是什麼？若 $AB \parallel l$ 又怎樣？

〔答〕 $AB \perp l$ 時，AB 在 l 上正射影是零。

$AB \parallel l$ 時，AB 在 l 上正射影等於 AB。

（2）若上節 $\angle B$ 是直角，那方程式 $b^2=a^2+c^2-2cm$ 該變到怎麼樣？

〔答〕 該變成 $b^2=a^2+c^2$，$\because$ $m=0$。

（3）若上面的右圖內，$a=10$，$c=8$，$m=9$，求 b。

〔答〕 $b=\sqrt{100+64-144}=\sqrt{20}=2\sqrt{5}$。

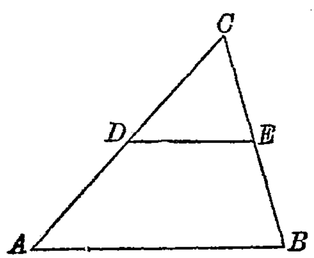
理解題二十四、（在教科書第 275 面到第 277 面）

（1）在 §228 的圖裏面，已知 a, b, c, 求 m 的長。若 $AC=15$，$AB=8$，$BC=9$，找出 m 來。

〔解〕 $m=(b^2-a^2-c^2)/2C$。　　〔答〕

$=(15^2-9^2-8^2)/16=5$。〔答〕

（2）聯結三角形兩邊中點的線份，必與第三邊平行。應用本編的定理去證他。



〔解〕 已知：　$\triangle ABC$ 中，$AD=DC$，$BE=EC$。

求證：　$DE \parallel AB$。

證：　$CD : CA=1:2$

$CE : CB=1:2$

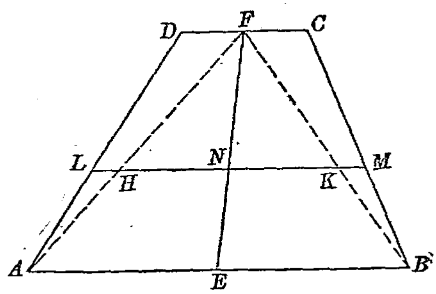
$\therefore$　$CD : CA=CE : CB$。

$\angle DCE=\angle ACB$　（合一）

$\therefore$　$\triangle CDE \backsim \triangle CAB$

於是　$\angle CDE=\angle CAB$ 而 $DE \parallel AB$。

(3)平分梯形兩底的線份，必平分界於他兩邊，而且平行於底邊的隨便什麼線份。



〔解〕已知：梯形 $ABCD$; $LM \parallel AB \parallel CD$, LM 交 AD, BC 於 L, M; $DF=FC$, $AE=EB$, FE 交 LM 於 N。

求證：　$LN=NM$。

證：聯 AE, BE, 交 LM 於 H, K, 則

$$LH:DF=AH:AF$$

$$MK:CF=BK:BF$$

但　$AH:AF=BK:BF$ 而 $DF=CF$

$\therefore$　$LH:MK=DF:DF=1$

即　$LH=MK$

又　$HN:AE=FN:FE$

$NK:BE=FN:FE$

但　$AE=BE$

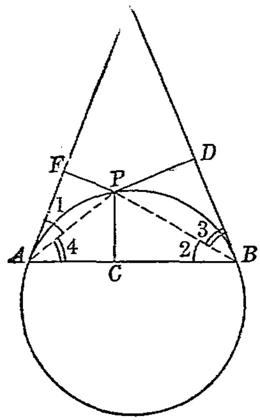
$\therefore$　$HN:NK=AE:BE=1$

即　$HN=NK$

$\therefore$　$LH+HN=NK+KM$

即　$LN=NM$

(4)在 AB 弦的兩端畫切線,從 $\widehat{AB}$ 上一點,畫對於切線同弦的垂線,如 PD, PF 同 PC。求證 PC 爲 PD, PF 的



比例中項。

〔提示〕 畫 AP, BP 兩弦，並證 $\triangle APF \backsim \triangle BCP$ 同 $\triangle APC \backsim \triangle BPD$。

〔解〕 已知：如題。 求證：如題。

證： 聯 AP, BP, 則

$\angle 1 = \angle 2$, $\angle 3 = \angle 4$

(弦切角＝所含弧上圓周角)

但 $\angle AFP = \angle R = \angle BCP$

$\angle BDP = \angle R = \angle ACP$

$\therefore$ $\triangle PFA \backsim \triangle PCB$

$\triangle PCA \backsim \triangle PDB$

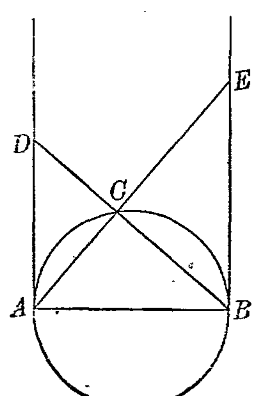
(兩$\triangle$有兩角對應等，卽相似。)

於是 $PF : PC = PA : PB$

$PC : PD = PA : PB$

$\therefore$ $PF : PC = PC : PD$

(5)下圖裏面，AD, BE 切於直徑的兩端，若 BD, AE 與圓相遇於 C, 證明 AB 是 AD, BE 的比例中項。



〔解〕 已知：如題。 求證：如題。

證： $\angle ACB = \angle R = \angle ABE$

$\therefore$ $\angle ABC = \angle BEA$

(同爲 $\angle CAB$ 的餘角)

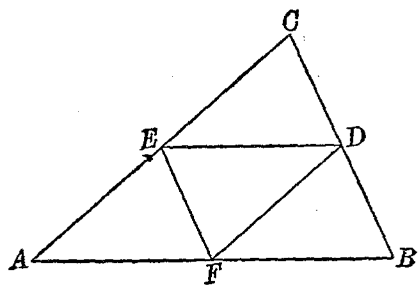
又 $\angle DAB = \angle R = \angle ABE$

$\therefore$ $\triangle DAB \backsim \triangle ABE$

(兩角對應等)

而 $AD : AB = AB : BE$

(6)聯結三角形各邊中點所成的內接三角形必與原三角形相似。



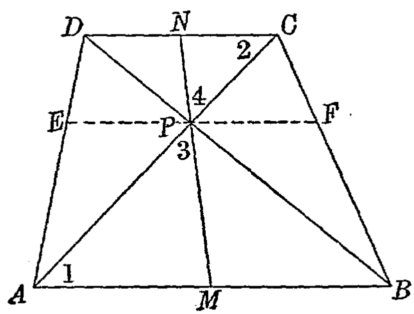
〔解〕 已知：D, E, F 是 $\triangle ABC$ 各邊中點。

求證： $\triangle DEF \backsim \triangle ABC$。

證： $DE \parallel AB, EF \parallel BC, FD \parallel CA$。

$\therefore \triangle DEF \backsim \triangle ABC$

(兩△三邊對應平行,則相似。)



(7)梯形兩底的平分線,必經過他的兩對角線的交點。

〔解〕 第一證法：

設 AC, BD 交於 P, 聯 MP, NP, 則因 $AB \parallel DC$

$\therefore \triangle APB \backsim \triangle CPD$

而 $AB : CD = AP : CP$

但 $AM = \frac{1}{2}AB$, $CN = \frac{1}{2}CD$

$\therefore AM : CN = AB : CD = AP : CP$

但 $\angle 1 = \angle 2$ $\therefore \triangle APM \backsim \triangle CPN$

(兩邊成比例，夾角等)

因而 $\angle 3 = \angle 4$ $\therefore NPM$ 爲一直線

即 AC, BD, MN 共 P 點。

第二證法： 聯 MP 延長交 CD 於 N, 則

$AM : CN = PM : PN$

$BM : DN = PM : PN$

∴ $AM : CN = BM : DN$

但 $AM = BM$

∴ $CN = DN$

卽 N 爲 CD 中點

第三證法： 設 AC, BD 交於 P; 過 P 作 $EF \parallel AB$。

於是 $EP : DC = AE : AD$

$FP : DC = BF : BC$

但 $AE : AD = BF : BC$

∴ $EP : DC = FP : DC$

而 $EP = FP$

今若聯 AB 中點 M 與 CD 中點 N, 則 NM 必過 P 點。（第3題）

第七編　多角形的面積

目解題四十、（在教科書第 287 面）

（1）平行四邊形的底爲 8，高是 7；試求他的面積。

〔答〕 56。

（2）平行四邊形的面積是 63，底邊是 9；試求他的高。

〔答〕 $63 \div 9 = 7$。

（3）平行四邊形面積是 48，高是 6；試求他的底。

〔答〕 8。

（4）有一三角形底是 10，高是 6；試求他的面積。

〔答〕 $10 \times 6 \times \frac{1}{2} = 30$。

（5）有一梯形兩底是 8 同 6，高是 5；試求他的面積。

〔答〕 $(8+6) \times 5 \times \frac{1}{2} = 35$。

（6） 兩個相似三角形的對應邊是 3 同 5，找出他們面積的比來。

〔答〕 $9:25$。

（7）兩個相似三角形的相似比是 $1:3$。知道小三角形的面積是 25，試求大三角形的面積。

〔解〕 命 A 表大三角形的面積，則

$$25 : A = 1 : 9, \quad \therefore A = 225 \text{ 〔答〕}$$

（8）兩個相似三角形的面積是 25 和 144。找出他們的相似比來。

〔答〕 $5:12$。

目解題四十一、(在教科書第 289 面)

(1)兩個相似多角形面積的比是 $3:8$。若小多角形一邊的長是 3 英寸,問大形對應一邊的長是多少?

〔解〕 命 $x=$ 大形對應邊長英寸數,則

$3:8=9:x^2$, $\therefore\ x=\sqrt{24}=2\sqrt{6}$ 英寸。〔答〕

(2)兩個相似多角形的相似比是 $1:4$。若小形的面積是 9,問大形的面積是多少?

〔答〕 $9\times16=144$。

(3)兩個相似多角形周界的比是 $3:11$。若小多角形的面積是 74,問大形的面積是多少?

〔解〕 $74:A=9:121$

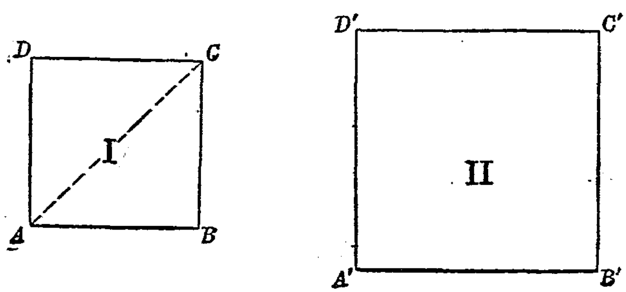
$$\therefore \qquad A=74\times\frac{121}{9}=994\frac{8}{9} \quad \text{〔答〕}$$

(4)設 1, 2, 3, 4, 5, 6 代表一組相似多角形的對應邊。若第一個多角形的面積是 1,問其餘各個多角形的面積是什麼?

〔答〕 4, 9, 16, 25, 36。

理解題二十五、(在教科書第 295 面)

(1)作一個正方形,令他的面積等於所給正方形面積的



二倍。

〔解〕　已給：　正方形 I。

求作：　一正方形 $=2$ □ I。

作法：　作線份 $A'B'=$□ I 的對角線 AC。

在 $A'B'$ 上作□ II 便是。

證明：　從略。

討論：　常可得一解。

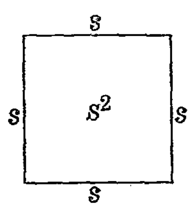
(2)作一平行四邊形,令他的面積等於所給正方形。

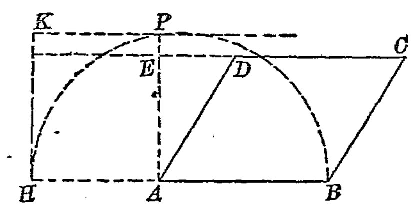
〔提示〕　用隨便一個大於 $2s$ 的直徑畫圓。從圓周上找一點,可從這點作直徑上的垂線等於 s。

〔解〕　已給：　正方形 S^2。

求作：　▱$=S^2$。

作法：　作線份 HB 大於 s; 畫半圓 HPB; 作 $HK \perp HB$, 使 $KH=s$; 過 K 作 $KP \parallel HB$, 交半圓於 P; 作 $PA \perp HB$,





交 HB 於 A; 截 $AE=AH$; 過 E 作 $EC \parallel HB$; 作 $AD \parallel BC$, 交 EC 於 D, C。$ABCD$ 卽所求▱。

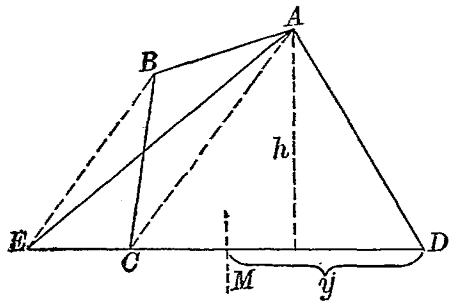
證明：　從略。

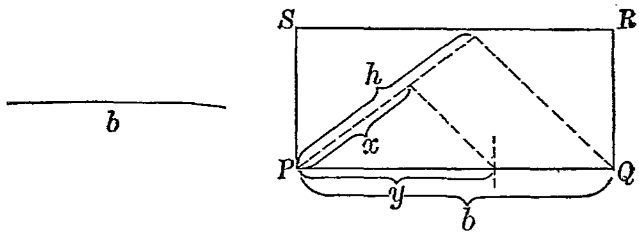
討論：　有無數▱可作。

附註：　此題條件不充分。又,利用 259 面(2),較[提示]所示本法爲簡。

理解題二十六、（在教科書第 296 面）

（1）以所給線份做底，作同所給四角形等積的長方形。





〔解〕　已知：　四邊形 $ABCD$, 線份 b。

求作：　長方形，面積 $=ABCD$, 底 $=b$。

作法：　化 $ABCD$ 爲等積 $\angle AED$。

求　b, h, y 的第四比例項 x。

以　b, x 爲邊，作長方形 $PQRS$ 便是。

證明：　從略。

討論：　常可得一解。

（2）以所給線份做底，作同所給五角形等積的長方形。

〔解〕　作法：　先化五角形爲等積三角形，再化三角形爲等積長方形。　圖略。

討論： 常可得一解。

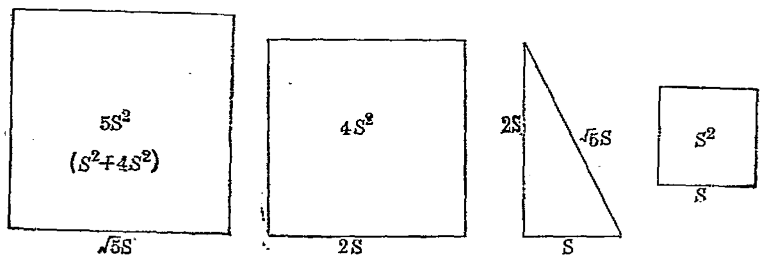
(3)用五角形的一邊做底,作一同他等積的長方形。

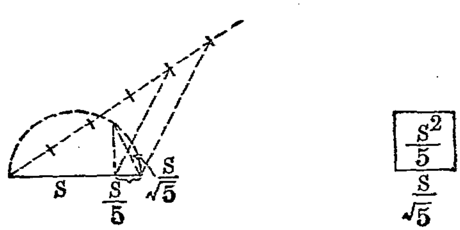
〔解〕 法同前;常可得一解。

(4)作正方形，使他的面積等於所給正方形的四倍；五倍;二分之一,同五分之一。

〔解〕 已給： 正方形 S^2。

求作： 正方形 $x^2=4S^2$; $5S^2$; $\frac{1}{2}S^2$; 或 $\frac{1}{5}S^2$。



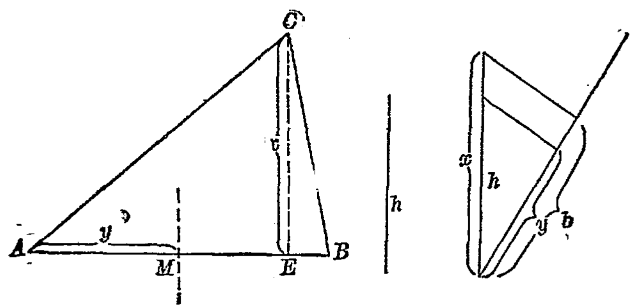


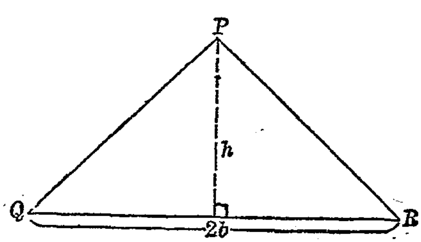
作法： 如圖所示，辭句從略。

證明： 從略。

討論： 常可得一解。

(5)用所給的高 h，作同所給三角形等積的等腰三角形。





〔解〕 已知： $\triangle ABC$，線份 h。

求作： 等腰 $\triangle$，高$=h$，面積$=\triangle ABC$。

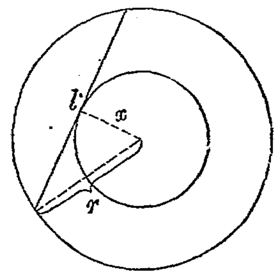
作法： 如圖所示，辭句從略。

證明： 從略。

討論： 當可得一解。

理解題二十七、（在教科書第 298 面到第 300 面）

(1)所給同心圓的半徑，一是 r；一是 r'。求切於小圓並且是大圓的弦的長。

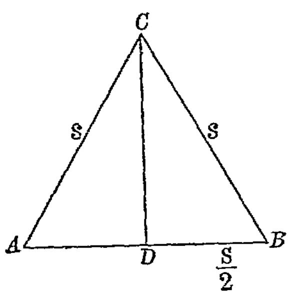


〔解〕　從圖可知

$$r'^2+\frac{l^2}{4}=r^2$$

$\therefore\quad l=2\sqrt{r^2-r'^2}$。〔答〕

(2)說明每邊為 s 的等邊三角形的高是 $\frac{s}{2}\sqrt{3}$。



〔解〕　設 CD 為等邊 $\triangle ABC$ 的高，則 $AD=DB=\frac{1}{2}s$

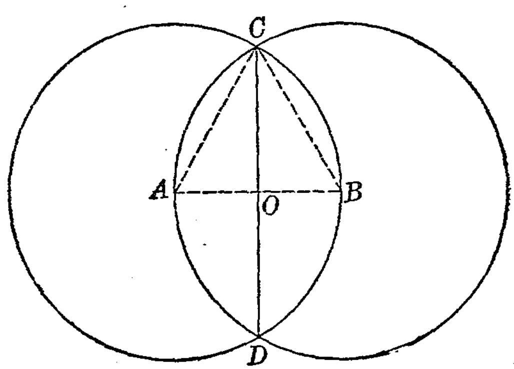
(等腰△底邊上的高平分底邊。)

$$\therefore\quad \overline{CD}^2=s^2-\left(\frac{s}{2}\right)^2=s^2-\frac{s^2}{4}$$

$$=\frac{3}{4}s^2$$

而　$CD=\sqrt{\frac{3}{4}s^2}=\frac{s}{2}\sqrt{3}$

(3)兩等圓的半徑都是 r，這兩圓相交，互過圓心。求公共弦的長。



〔解〕　從圖，知 ABC 是等邊三角形。

又因 $CD\perp AB$

而　$CO=DO$

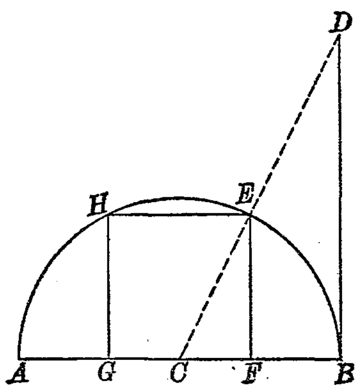
(交圓聯心線垂直平分公弦)

∴　由前題，知

$$CD=2CO=2\times\frac{r}{2}\sqrt{3}=r\sqrt{3}。\text{〔答〕}$$

(4)在半圓裏面，作正方形，頂點在圓周同直徑上。

〔作法〕　令 AB 是所給半圓的直徑。在 B 處作 AB 的垂線 BD，取 $BD=AB$。聯結圓心 C 同 D，遇圓於 E。畫 EF 垂直於 AB，於是 EF 便是所求正方的一邊。完成這個圖形，並表明 $EF=2CF$ 去造出證明來。



〔解〕　已知：半圓 AB。

求作：　正方形，頂點在圓周及直徑上。

作法：　前半如上所述。後半如下：

在 CA 上取 $CG=CF$；作 $GH\perp AB$，交圓周於 H；聯 HE。$EFGH$ 即所求正方形。

證明：　$EF\parallel DB$ (同$\perp AB$)

　∴　$CF:CB=EF:DB$

但　$DB=AB=2CB$　∴　$EF=2CF=GF$

又　$HG=EF$ (離圓心等遠)

　　$HG\parallel EF$ (同$\perp AB$)

　∴　$HE=GF$ (▱對邊)

於是　$EF=FG=GH=HE$

且　$\angle HEF = \angle EFG = \angle FGH = \angle GHE = \angle R$

$\therefore$　$EFGH$ 為正方形。

（5）有兩個等邊三角形，一個的邊是 a，一個的邊是 b。找出等於這兩個三角形面積和的另一等邊三角形的邊長。

〔解〕　設三個等邊三角形的面積是 A, B, C；而第三個等邊 $\triangle$ 的邊是 c；則

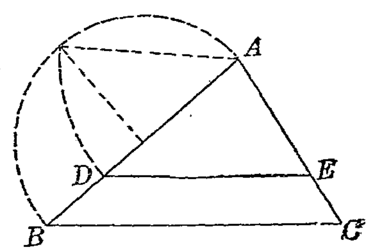
$$\frac{A}{C}=\frac{a^2}{c^2} \quad 而 \quad \frac{B}{C}=\frac{b^2}{c^2}$$

（兩$\triangle$有一角等，面積比＝夾邊相乘比）

$$\therefore \qquad \frac{A+B}{C}=\frac{a^2+b^2}{c^2} \text{（等量和）}$$

今　$A+B=C$　$\therefore$　$c=\sqrt{a^2+b^2}$。〔答〕

（6）令一個三角形的三邊是 6，8，9。畫一條平行於長邊的線份，分這三角形成一個梯形同一個三角形，互相等積。找出那分開兩邊的線份的比。



〔解〕　設 $\triangle ABC$，$DE \parallel BC$，平分 $\triangle ABC$ 為二。於是

$$\triangle ADE : \triangle ABC = 1 : 2$$

但　$\triangle ADE \backsim \triangle ABC$

$\therefore$　$\triangle ADE : \triangle ABC = \overline{AD}^2 : \overline{AB}^2 = 1 : 2$

即　$$\frac{AB}{AD}=\frac{\sqrt{2}}{1}$$

$$\therefore \qquad \frac{AB-AD}{AD}=\frac{BD}{AD}=\frac{\sqrt{2}-1}{1}=\sqrt{2}-1$$

附註：　此題原意不明，因求比無須知三邊長度。

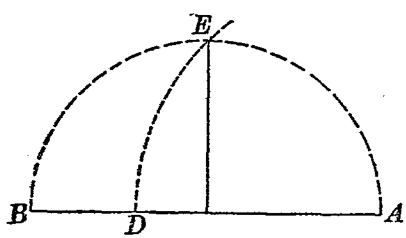
又，作法看圖自明。

（7）斜方形的面積等於他的兩對角線相乘積的一半。

〔略解〕　因對角線互相垂直，故由 △ 面積公式，卽可推得。

（8）在所給線份 AB 上，求 D 點要令

$$\frac{\overline{AB}^2}{\overline{AD}^2}=\frac{2}{1}。$$



〔解〕已知：線份 AB。

求作：AB 上一點 D，

使 $\overline{AB}^2:\overline{AD}^2=2:1$

作法：如圖所示甚明。

（9）設一個三角形的三角，是 30°，60°，90°。又設對着 60° 角的邊是 a，試求其他兩邊。

〔解〕　設對 30° 角的邊是 x，則對 90° 角的邊是 $2x$。於是

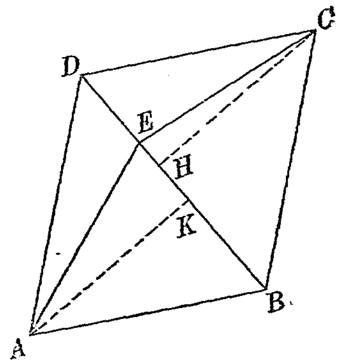
$$4x^2-x^2=3x^2=a^2$$

$$x=\frac{a}{\sqrt{3}}=\frac{a}{3}\sqrt{3} \qquad 2x=\frac{2}{3}a\sqrt{3}。$$

（10）若在平行四邊形 $ABCD$ 裏面的對角線 BD 上，從隨便一點 E 畫 AE，CE，那麽 ⚠ BEA 同 BEC 必是等積；⚠ DEA 同 DEC 便也等積。

〔解〕　已知：如題。求證：如題。

證：　作 $CH\perp BD$　$AK\perp BD$



則　$\triangle AKB \equiv \triangle CHD$

而　$AK = CH$

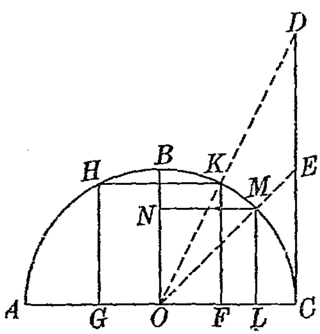
$\therefore$　$\triangle ABE = \triangle BCE$

(等底等高)

$\triangle AED = \triangle CED$

(等量差)

(11)在半圓同象限裏面，各作一正方形，頂點在圓周同圓徑上，比較他們的面積。



〔解〕設半圓ABC,依第(4)題方法作得半圓內正方形 $GFKH$，又作得象限內正方形 $OLMN$。

(正方 OM 的作法如下：取 $EC = OC$，聯 OE 交圓周於 M，作 $MN \perp OB$，$ML \perp OC$ 便是)

今命圓半徑爲 r，小正方爲 a^2，大正方爲 b^2，則 $2a^2 = r^2$，

$\therefore$　$a^2 = r^2/2$。

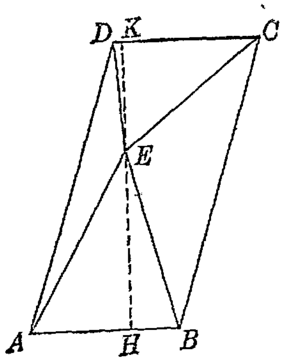
又因　$CD = 2r$　$\therefore$　$\overline{OD}^2 = 5r^2$

於是　$b^2 : 4r^2 = r^2 : 5r^2 = 1 : 5$

$\therefore$　$b^2 = \dfrac{4}{5}r^2$

因此　$a^2 : b^2 = \dfrac{r^2}{2} : \dfrac{4r^2}{5} = 5 : 8$。〔答〕

(12)若 E 是平行四邊形 $ABCD$ 裏面的隨便一點，那麼



$\triangle ABE+\triangle CDE$ 等於 $\square ABCD$ 面積的一半。

〔解〕 已知：如題。求證：如題。

證： 作 $KEH\perp AB$, 與 CD,AB 交於 K, H, 則 $KEH\perp CD$

於是 $\triangle ABE=\frac{1}{2}\overline{AB}\cdot\overline{EH}$

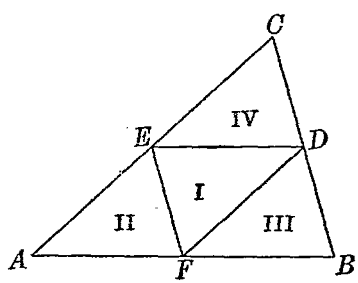
$\triangle CDE=\frac{1}{2}CD\cdot\overline{EK}$

但 $AB=CD$

$\therefore$ $\triangle ABE+\triangle CDE$

$=\frac{1}{2}\overline{AB}\cdot\overline{KH}=\frac{1}{2}\square ABCD$。

(13)聯結三角形的各邊中點，所成的平行四邊形同原三角形的一半等積。



〔解〕 已知：D, E, F 是 $\triangle ABC$ 各邊中點。

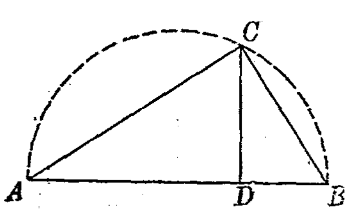
求證： ▱ AD, BE, CF 是 $\frac{1}{2}\triangle ABC$。

證： $\square AD=\triangle I+\triangle II$ $=2\triangle I$

但 $\triangle I\equiv\triangle II\equiv\triangle III$ $\equiv\triangle IV=\frac{1}{4}\triangle ABC$

$\therefore$ $\square AD=2\times\frac{1}{4}\triangle ABC=\frac{1}{2}\triangle ABC$

同樣可證其餘。

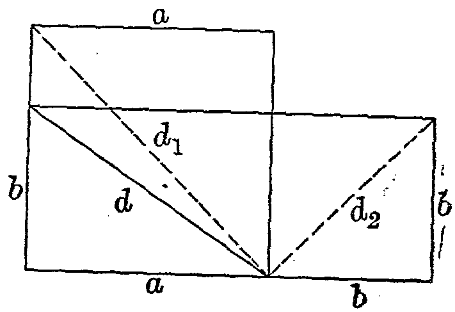


(14)用已知線份 AB 做斜邊，求作一直角三角形，要令這三角形在斜邊上的高，恰遇於 D 點。

〔解〕作法：作半圓 ACB，作 $CD\perp AB$，遇 $\widehat{AB}$ 於 C。聯 AC，BC 便是。

證明：$\angle ACB=\angle R$(半圓內圓周角)

(15)一長方形對角線上的正方，等於這長方形的兩鄰邊上所作正方的對角線上正方和的一半。



〔解〕設長方形兩邊長是 a，b；對角線長是 d，則

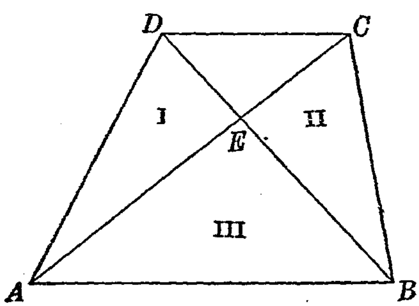
$$d^2=a^2+b^2$$

又設鄰邊上正方對角線長是 d_1，d_2，則

$$d_1=2a^2 \qquad d_2=2b^2$$

$$\therefore\quad d^2=\tfrac{1}{2}(d_1{}^2+d_2{}^2)$$

(16)畫梯形裏面的兩對角線，在不相平行的兩邊上所成兩三角形是等積。



〔解〕已知：梯形 $ABCD$，對角線 AC，BD 交於 E，$DC\parallel AB$。

求證：$\triangle AED=\triangle BEC$

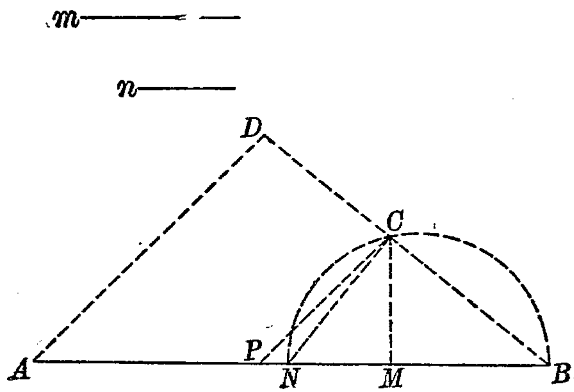
證：$\triangle ABD=\triangle ABC$

(底相同，頂點在平行於底的線上)

$\therefore\quad \triangle ABD-\triangle III=\triangle ABC-\triangle III$

即　　　　$\triangle I=\triangle II$

(17)分所給線爲兩線份，要使每線份上所作正方同所設的比相等。



〔解〕 已給：AB 線份，m, n 二線份。

求作： AB 上一點 P, 使 $\overline{AP}^2:\overline{BP}^2=n:m$。

作法： 在 AB 上截取 $BM=m$, $MN=n$。

以 BN 爲直徑作半圓。

作 $CM\perp NB$, 交半圓於 C。

聯 BC 延長至 D, $CD=CN$。

聯 AD, 作 $CP\parallel AD$, 交 AB 於 P。

證明： $AP:BP=DC:BC$

$\therefore$ $\overline{AP}^2:\overline{BP}^2=\overline{DC}^2:\overline{BC}^2$

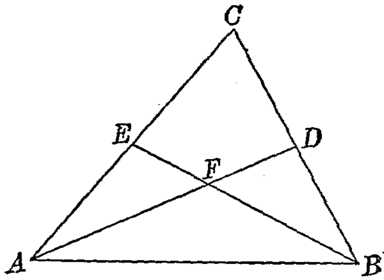
$=\overline{CN}^2:\overline{CB}^2$

但因 $\angle NCB=\angle R$

$\therefore$ $\overline{CN}^2:\overline{CB}^2=NM:BM=n:m$

即 $\overline{AP}^2:\overline{BP}^2=n:m$。

(18) AD 同 BE 是 $\triangle ABC$ 的中線，AD 遇 BE 於 F，求證 $\triangle ABF$ 與四角形 $CDFE$ 等積。



〔解〕　已知：如題。

求證：如題。

證：　$\triangle ACD=\frac{1}{2}\triangle ABC$

(等高半底)

$\triangle AEB=\frac{1}{2}\triangle ABC$

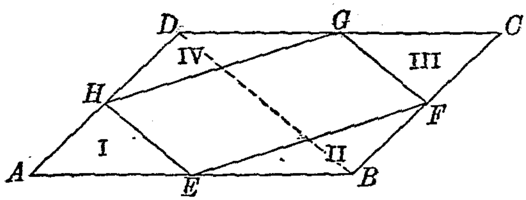
(同上)

$\therefore\quad \triangle ACD=\triangle AEB$

於是　$\triangle ACD-\triangle AEF=\triangle AEB-\triangle AEF$

即　　四角形 $CDEF=\triangle ABF$。

(19) 若聯結一個隨便的平行四邊形鄰邊的中點，所成四個三角形必都等積。



〔解〕　已知：

E, F, G, H 是 $\square ABCD$ 各邊中點。

求證：　$\triangle I=\triangle II=\triangle III=\triangle IV$

證：　$\triangle I:\triangle ABD=\frac{1}{2}\overline{AB}\cdot\frac{1}{2}\overline{AD}:\overline{AB}\cdot\overline{AD}$

$=\frac{1}{4}:1=1:4$

$\therefore\quad \triangle I=\frac{1}{4}\triangle ABD=\frac{1}{8}\square ABCD$

同理可證其餘 ⚠ 各 $=\frac{1}{8}\square ABCD$

$\therefore\quad \triangle I=\triangle II=\triangle III=\triangle IV$。

第八編　正多角形同圓

目解題四十二、（在教科書第 303 面）

（1）正三角形的中心角是幾度？正四角形，五角形，六角形，各是幾度。

〔答〕 正三角形，$120°$；正四角形，$90°$；正五角形，$72°$；正六角形，$60°$。

（2）正多角形的中心角應該怎樣求法？

〔答〕 以邊數除 $360°$。

（3）把六個相等正三角形聚攏在一點，表明怎樣能成功一個正六邊形。

〔解〕 因各邊相等，所以各三角形順次排列，令合一邊，其一頂點在外相合，成爲正六邊形的頂點；又因各角等於 $60°$，六角合成一週角，所以又一頂點在內相合，成爲正六邊形的中心。

（4）一個正三角形的各角是多少度？正四角形呢？五角形呢？又六角形呢？

〔答〕 正三角形，$60°$；正四角形，$90°$；正五角形，$108°$；正六角形，$120°$。

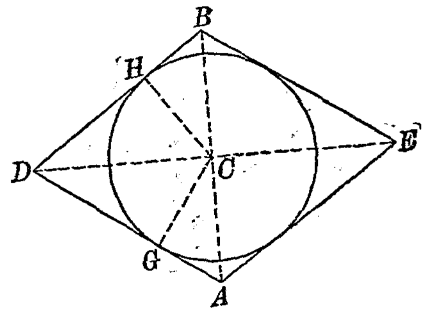
（5）無論什麽正多角形各角的度數，應當怎樣求出來？

〔答〕 $2(n-2)\angle R/n$ （n 爲邊數）

理解題二十八、（在教科書第 305 面到第 306 面）

（1）在 $\odot C$ 直徑的延長線上取 A 點同 B 點，令 $AC=BC$。AD，BD，AE，BE 諸切線，相遇於 D，E 兩點。證明 AD

$=BD=BE=AE$。



〔註〕 AC 須要等於 DC, 外切多邊形的各角方才相等。因為 AC 不必定要等於 DC, 所以外切等邊多邊形就未必等角。試同 § 247 的定理比較。

〔解〕 已知：如題。

求證：如題。

證：作 $CG \perp AD$, $CH \perp BD$

則 $\triangle CAG \equiv \triangle CBH$

(直角△有兩邊對應等)

$\therefore$ $AG=BH$

但 G, H 即為切點

$\therefore$ $DG=DH$ (一點到圓兩切線)

於是 $AD=BD$ (等量和)

同樣可證 $AE=BE$

又 $\angle DAB=\angle EAB$, $\angle DBA=\angle EBA$

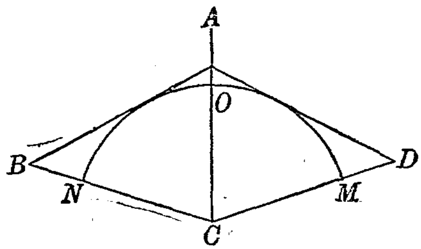
(一點到圓兩切線，與此點到圓心聯線成等角。)

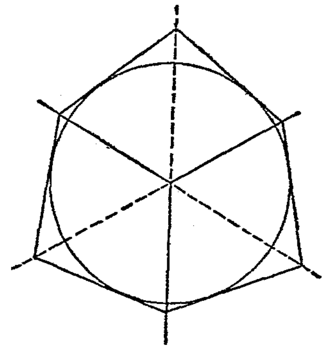
$\therefore$ $\triangle ABD \equiv \triangle ABE$ $AD=AE$ $BD=BE$

於是 $AD=BD=BE=AE$

以註中之語與 § 247 定理比較，則「等邊外切多角形必等角」，是其逆定理，此逆定理不真。

(2)如圖 C 為 MON 弧的圓心，且 $\angle DCA=\angle BCA$。AB 同 AD 是從 CO 延長線上的隨便一點 A 所畫 OM 同 ON 兩弧的切線，證明 $AB=AD$。





〔提示〕 在$\triangle ACD$同ACB裏面，$\angle CAB=\angle CAD$。

〔解〕 已知：如題。求證：如題。

證： $\angle CAB=\angle CAD$

(一點到圓兩切線，與該點聯心線成等角)

$\therefore$ $\triangle ABC\equiv\triangle ADC$ $(a.s.a.=a.s.a.)$

而 $AB=AD$

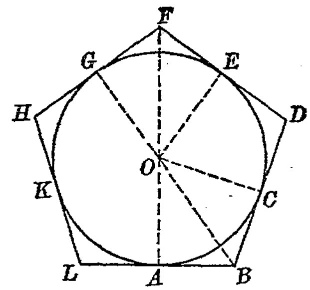
(3)求作等邊外切六角形，但不等角。

〔提示〕 在圓心處做$120°$的角把圓分成三等分。如題2，聯結每弧作一圖形便得所求的六角形。注意這作法常常成功雙邊數的多角形。

〔解〕 作法如提示所述，不再贅，圖見(2)題下，證明利用(2)題。

(4)若外切於圓的等邊多角形，他的邊數是單數，必是等角。

〔提示〕 $BC+CD=DE+EF$。因 $CD=DE$。$\therefore$ $BC=EF$。同樣證得 $AB=GF$。再用$\triangle OBC$, OEF同§153的推論二證明$\angle B=\angle F$。這樣又證明和他同樣的諸角也相等。



若角數是單數，就能證明所有的角都相等。假使他的角是 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7。那麼照上面的證法，可以表明 $\angle 1=\angle 3=\angle 5=\angle 7=\angle 2=\angle 4=\angle 6$。若角的數目是雙數，裏面自然就有兩組相等的角，那時我們便不能決定這組是不是和那組相等。

〔解〕 已知：$LBDFH$……爲單邊數外切等邊多角形。

求證：　他是等角多角形。

證：　設 $A, C, E, G,$……是切點，則

因　$CD=DE$（一點到圓兩切線）

$\therefore$　$BC=EF$（等量差）

同樣證得　$AB=GF$

今聯圓心 O 至 $A, C, E, G,$……

並聯 $OB, OF,$……

則　$\triangle OBC\equiv\triangle OFE$

$\triangle OBA\equiv\triangle OFG$

（直角 $\triangle$ 有兩邊對應等）

$\therefore$　$\angle ABC=\angle EFG$（等量和）

仿此可證每間一頂點的兩角相等。

因邊數是單數，$\therefore$　最後可證得相隣二角等。

於是各角都等。

理解題二十九、（在教科書第 313 面）

（1）一個多角形的周界是 48 吋，外接於半徑 4 吋的圓。求那多角形的面積。

〔答〕　面積$=\frac{1}{2}\times4\times48=96$ 方吋。

（2）同邊數兩個正多角形的頂心距，各是 3 吋同 7 吋。找出兩形周界的比，並兩形面積的比。

〔答〕周界比，3：7；面積比，9：49。

（3）同邊數兩正多角形，他們的邊心距各是 2 吋同 6 吋。求出兩形的周界並面積的比。

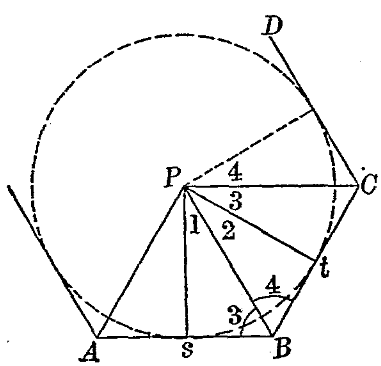
〔答〕　周界比，1：3；面積比，1：9。

理解題三十、（在教科書第 316 面到第 317 面）

（1）凡內接於圓的等角多角形都是正多角形嗎？是不是要看邊數是雙數或是單數呢？

比較 §247 後面的理解題。

〔答〕　不都是正多角形，因爲祇能夠證明相間兩弧相等，因而祇能夠證明相間兩邊相等。若邊數是單數，則必爲正多角形，邊數是雙數，就不一定了。此與 §247 後面的理解題相比，彼此有相同之點，所不同者，角與邊，內接與外切而已。



（2）證明正多角形的頂心距平分他的兩相鄰邊心距所成的角。

〔提示〕　作這正多角形的內接圓。

〔解〕已知：$ABCD\cdots\cdots$ 是正多角形；$PA, PB, PC, \cdots$

是頂心距；Ps, Pt,……是邊心距。

求證：　$\angle 1=\angle 2, \angle 3=\angle 4,$

……………………………

證：作內接圓，則圓心爲 P 而切點爲 s, t,……。

於是　$\angle 3=\angle 4$　$\therefore$　$\angle 1=\angle 2$

同樣可證：$\angle 3=\angle 4$,………………………。

(3)在同圓內，證明 n 邊內接多角形的周界，必比 $2n$ 邊內接多角形的周界小。

〔提示〕利用「三角形二邊和大於第三邊」一定理。

(4)在同圓內，證明 n 邊外接多角形的周界，必比 $2n$ 邊外接多角形的周界大。

〔提示〕與前題同。

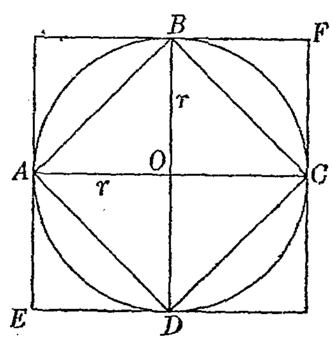
(5)比較題3裏面的兩個多角形的面積。

〔答〕n 邊形的面積也較小。

(6)比較題4裏面的兩個多角形的面積。

〔答〕n 邊形的面積也較大。

(7)表明內接於圓的正方形，若是他的頂心距爲 r，他的面積就是 $2r^2$。這同外接正方形的面積比較，有什麼關係？



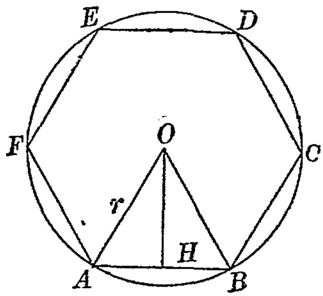
〔解〕如圖，

$OA=OB=r$

$\angle AOB=\angle R$

$\therefore$　$\overline{AB}^2=2r^2$

外接正方形 EF 的面積是 $4r^2$，等於內接正方形的 2 倍。



(8)若一個圓的半徑是r,那麼內接於這圓的正六角形的邊心距同面積,該怎樣計算?

〔解〕 如圖, $ABCDEF$ 爲正六角形,內接於 O 圓。

$$OA=r=OB$$

但 $\angle AOB=60^\circ$

$\therefore$ $\angle OAB=\angle OBA$

$=\angle AOB$

於是 $AB=r$ $AH=\dfrac{r}{2}$

$\therefore$ $OH=\sqrt{r^2-\dfrac{r^2}{4}}=\sqrt{\dfrac{3r^2}{4}}=\sqrt{\dfrac{3}{2}}r$。〔答〕

六角形面積$=\dfrac{1}{2}\times 6r\times\sqrt{\dfrac{3}{2}}r=\dfrac{3}{2}\sqrt{3}r^2$。〔答〕

(9)一個正六角形內接於半徑是 10 的一個圓內。求這三角形的邊心距同邊。

〔答〕 邊心距$=5\sqrt{3}$,邊$=10$。

(10)找出外接於同圓所有邊數相同的正多角形的頂點的軌跡。

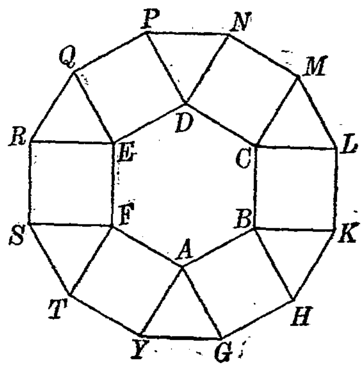
〔答〕 是一個圓,與原圓同心,而在原圓之外。

(11)找出內接於同圓所有邊數相同的正多角形各邊中點的軌跡。

〔答〕 就是等弦中點的軌跡。

理解題三十一、(在教科書第 324 面到第 325 面)

(1) 如圖 $ABCDEF$……是正六角形，$ABHG$, $BCLK$,……是在他的邊上所作的平方。證明 $GHKL$……TY 是正十二角形。



〔解〕 已知：如題。

求證：如題。

證：　$\angle FAB=120°$

$\angle FAY=90°=\angle BAG$

$\therefore$　$\angle YAG$

$=360°-300°=60°$

又　$AY=AF$　　$AG=AB$

但　$AF=AB$　$\therefore$ $AY=AG$

於是　$\triangle AYG$ 是正三角形。

同樣可證其餘五 $\triangle$ 都是正三角形。

$\therefore$　$YG=AG=GH=BH=HK$

$=KL=LM=\cdots\cdots=TY$

其次　$\angle YGA=60°$，$\angle AGH=90°$

$\therefore$　$\angle YGH=150°$

同樣可證其餘各角都是 150°

$\therefore$　$GHKL$……TY 是正十二角形。

(2) 用上圖求正十二角形的面積(各邊都 6 吋)。

〔提示〕 十二角形中含有一個正六角形，六個等邊三角形，同六個正方形。

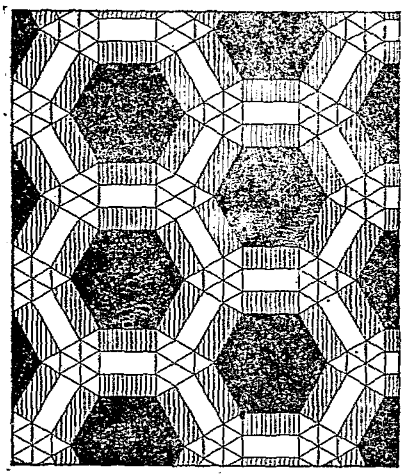
看下圖上面的方磚設計，就是照這個圖形裝成的。

〔解〕 一個正六角形面積$=54\sqrt{3}$ 方吋。

六個等邊三角形面積和$=54\sqrt{3}$方吋，

六個正方形面積和$=216$ 方吋，

$\therefore$ 正十二角形面積$=(216+108\sqrt{3})$方吋。〔答〕



(3)若一個正十二角形的每邊是 a，他的面積該怎樣表出？

〔答〕 $A=2\times\frac{2}{3}\sqrt{3}\,r^2+6r^2=(6+3\sqrt{3})r^2$。〔答〕

(4) 如圖，把一個正八角形每間一邊的中點聯結起來。AH 垂直於 AE 並等於 AE，同樣作 BG, CK 同 DL。

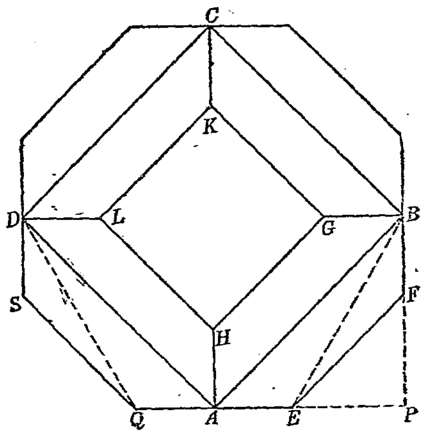
證明 $ABCD$ 同 $HGKL$ 都是正方形。

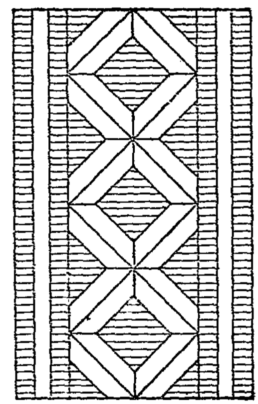
〔解〕 已知：如題。求證：如題。

證： 延長 AE, BF 交於 P，則

因 $\angle AEF=\angle BFE$ $\therefore$ $\angle PEF=\angle PFE$

於是 $PE=PF$





但　$AE = BF$ (等量之半)

$\therefore$　$PA = PB$　而　$\angle EAB = \angle FBA$

$\therefore$　$\angle EAB + \angle AEF = 2\angle s R$

但　$\angle ABF = \frac{3}{2}\angle R$　$\therefore$　$\angle EAB = \frac{1}{2}\angle R$

同樣可證其他類似角 $= \frac{1}{2}\angle R$

$\therefore$　$\angle DAB = \angle R = \angle ABC = \cdots\cdots$。

其次　$\triangle BEF \equiv \triangle DQS$　$\therefore$　$BE = DQ$

於是　$\triangle AGE \equiv \triangle ADQ$　而　$AB = AD$

$\therefore$　$ABCD$ 是正方形，

用相仿的推理，可證 $HGKL$ 是正方形。

(5)一圓的直徑是 5 吋。求他的面積和圓周。

〔答〕　面積 $= 3.1416 \times \frac{25}{4} = 19.635$ 方吋。

　　圓周 $= 3.1416 \times 5 = 15.708$ 吋。

(6)一圓的圓周是 10 呎。求他的半徑同面積。

〔解〕　$10 = 2 \times 3.1416\ r$,

$\therefore \qquad r=\dfrac{10}{6.2832}=1.59$ 呎。〔答〕

面積$=\frac{1}{2}\times10\times1.59=7.95$ 方呎。〔答〕

(7)一圓的面積是 24 平方吋。找出他的半徑同圓周。

〔解〕 $24=\pi r^2=3.1416\ r^2$

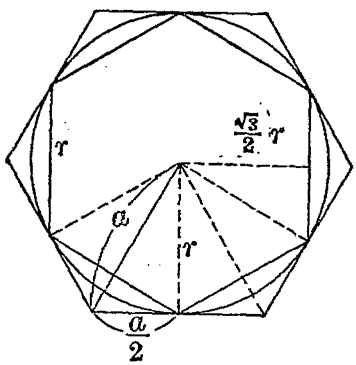
$$\therefore \qquad r=\sqrt{\frac{24}{3.1416}}=\frac{\sqrt{24\times3.1416}}{3.1416}$$

$$=\frac{2\sqrt{6\times3.1416}}{3.1416}=\frac{24\sqrt{.1309}}{3.1416}$$

$$=\frac{24\times.36}{3.1416}=2.7\ \text{吋。〔答〕}$$

$C=2\pi r=2\times3.1416\times2.7=16.7$ 吋。

(8)找出同圓的內接同外切正三角形面積的比。並找出這樣正方形同這樣六角形面積的比。



〔答〕 正三角形，$1:4$。

正方形， $1:2$。

內接正六角形面積，從圖，知其爲 $A_1=\dfrac{3}{2}\sqrt{3}\,r^2$。

外切正六角形一邊若$=a$，則 $a^2-\dfrac{a^2}{4}=r^2$，$\dfrac{3}{4}a^2=r^2$，

$3a^2=4r^2 \qquad a^2=\dfrac{4}{3}r^2$

$\therefore\ a=\dfrac{2}{\sqrt{3}}r=\dfrac{2}{3}\sqrt{3}\,r$

面積 $A_2=6\times\frac{2}{3}\sqrt{3}\,r^2\times\frac{1}{2}=2\sqrt{3}\,r^2$。

$\therefore\quad A_1:A_2=\frac{3}{2}:2=3:4$。

(9)找出 6 吋圓半徑的內接正三角形的面積。

〔答〕　$A=\frac{3}{4}\sqrt{3}\,r^2=\frac{3}{4}\sqrt{3}\times6^2=27\sqrt{3}$ 方吋。

(10)找出 6 吋圓半徑的內接正六角形的面積。

〔答〕　$A=\frac{3}{2}\sqrt{3}\,r^2=\frac{3}{2}\sqrt{3}\times36=54\sqrt{3}$ 方吋。

567

中華民國三十年四月初版

(51322.1)

現代初中教科書 幾何習題解答 一冊

每冊原定價國幣捌角
同業公議加五發售 實售國幣壹元貳角
外加運費匯費

編纂者 陳嶽生

發行人 王雲五
長沙南正路

印刷所 商務印書館

發行所 各埠 商務印書館

(本書校對者徐鼎銘)

五四六二〇上

甲