近世初等幾何學

上冊

大同大學叢書之三

近世
初等幾何學

大同大學叢書之三

下學工夫有理有事此書爲益能令
學理者祛其浮氣練其精華學事者資
其定法發其巧思故舉世無人不當學
聞西國古有大學師門生常數百千人
來學者先問能通此書乃聽入何故欲
其心思細密而已　明徐光啟

序

往者嘗有多數已修畢幾何學之人問不佞曰:幾何學有何實用?法艱而思繁,徒令人勞精弊神而羌無所益,是亦不可以已乎?不佞應之曰:子習幾何已畢而渺不知其所用,是誠教者之過;而以有用與否衡幾何,則又子之陋矣.坐.吾姑舉其犖犖大者以相告.夫幾何研究空間之學問也.凡人不能自外於空間,卽不能自外於幾何.夫魚處水而忘水者,以其爲魚耳.若吾人固覥然爲萬物之靈.居空間而不知空間之性質,烏乎可?他不必問,卽就此一端而言,幾何學已當在鍥而不舍之列矣.

問者曰:幾何旣爲論空間之學問,奈何不設空間之定義?且吾徧觀幾何學教科書,無一涉及空間之性質者.何耶?不佞應之曰:子自不察耳.幾何學論圖形.圖形有位置,空間之位置也.有形象,空間部分之形象也.有大小,空間部分之大小也.有關係,空間部分之關係也.幾何學

問無一語不論空間,奈何熟視之若無覩?至不及空間之定義者,非不欲也,勢不能也.吾人以渺小之身,處浩無涯岸之空間,前不知其所止,後不知其所屆,四游上下皆然.而欲恃四肢五官微弱之感覺以定空間之義,苟非超人,吾知其難矣.銖銖而累之,寸寸而積之,就可見以推所不能見,就可知以推所不能知,斯亦無可如何者也.惟然,而研究之任,吾人益不能自已矣.會而通之,是在學者,固無取乎曉曉然形之口舌筆墨間也.

問者曰:凡科學之基礎皆從歸納而來.幾何學殆亦不能外是乎?應之曰:唯,唯,否,否,不然.歸納固爲研究學之一要法,而要不能用之於幾何.夫歸納者,必有實驗開其先,而空間無從實驗也.空間大莫能外,不能知其外延.又廣莫能窮,不能知其普遍.既不能切而臠分之,又不能捕而鍵置之.以云實驗,戛乎難矣.且實驗歸納之時,必吾人先有感覺此實驗,建設此歸納之

概念,而後實驗歸納乃可施.然而此概念之存在,不能離空間時間而獨立.卽空間之形式,實居吾人概念之前,而吾人概念,乃與空間形式共生而偕沒.故實驗歸納雖爲一切科學之原,而幾何學乃又居實驗歸納之巓.歸納生於幾何而不足以生幾何也.

問者曰:信如子言,則幾何學中之公理將亦非從實驗來乎?毋乃駭人太甚矣.應之曰:公理之外貌雖似由實驗而來,而一爲推究其原,則亦不過託之於實驗耳.今試舉一例言之.如(圖形可不變其形象大小而任意變其位置.)此非所謂由實驗而來之一公理乎?然此公理有一背景,卽(空間之任何部分必皆勻稱而齊一.)不承認此後者,則前之所謂公理顯然不能成立也.此後者之爲假定而無從實驗,不待言而可知.然則前者之不過貌託爲實驗,亦卽不煩言而可解.推之其他公理,殆無一不然.故自不佞言之,幾何學之公理無一不爲臆說.必

此臆說成立而後乃有實驗之可言.否則無從實驗也.惟爲初學者言,亦不妨姑謂從實驗所得云爾.

問者曰:幾何學全部皆從公理演繹而來.今言公理不過爲臆說,則其不足恃已甚矣.毀幾何學之嚴密而納之於不足恃之途,先生其忍人哉!應之曰:學問之從實驗建設者,其眞確爲相對而非絕對;從臆說建設者,其眞確爲或然而非必然.此固源於人類才能之薄弱,無可如何者也.就幾何學而言.公理固不過爲或然之眞確,而假使此公理不誤,則由是推演之定理卽能絕對眞確,固無損其尊嚴.至於論證之綿密,自有其確乎不拔者存,價値自在,何損之有.且幾何學者,固非特歐几里得之一種而已.學者盡其臆說之所可起,各推其極之所能至,無黨無偏,以待後人之採用.此各種者,其眞確雖無一不具或然之性質,然所或然者旣盡起而無遺,則必然者亦必涵中而莫外.故人類可滅

而幾何之理不能滅,星球可毀而幾何之理不能毀.予所謂不足恃,正乃大可恃之基也.

以故,幾何學實建築於吾人理性之上.理性可貴,故幾何學亦可貴.其基雖爲臆說,而要無荒誕不經之談.推至無垠,雖若渺茫,而縮其範圍,則一一皆合於尋常所聞見,不與時俱變,而爲後起科學之所取汲.其效用之廣如是,而欲以實用範圍之,此不佞之所以謂爲陋也.

至於歐几里得幾何,創始最早而構造最簡.舍遠而圖近,略大而究小,去變而取常,故尤合於淺近日用之事物.雖不規規於實用,而如航海,測量繪圖,建築,物理,工作等各方面無一不可見予取予求之蹤.故卽以實用言,亦萬無可以捨棄之理.第學者不當舍本逐末,棄其本幹而專務其枝葉耳.

更就其論證之方法觀之.有條不紊,推陳出新,旣已無懈可擊矣;而教人用心之法,出話之程,尤隨在可覺其寶貴.其材淺,爲童子所易知.

其效闕,爲成人所莫踰.其理又爲各科學之所需.求之他科,無與並者.故不特不可或缺而已,卽緣學此而屏棄他科,所得者尤將遠勝於所失.蓋幾何學,實爲修養身心之學,非徒作工具之學所能望其項背也.

抑且幾何學爲千古賢哲所經營.其壯麗,偉大,優美,尊嚴,高尚殆皆有登峯造極之觀.學者苟能寢饋於是中,則鄙倍之氣將潛移而默化,而蠅營狗苟之行或可消弭於無形乎?

問者曰:幾何學之當學,既聞命矣.敢問有減少困難之道乎?應之曰:吾聞以難能而可貴,未聞有易能而可貴者也.古昔歐几里得曾言曰:幾何不能以王者之尊嚴而改難爲易.此其語已足答子之問矣.雖然,天下事欲則不難.難者,自晝之代名詞耳.在中學校之教科中,既循序以進,復有例可模,所謂難者,亦已僅矣.此僅少之難而尙無力以勝之,非有志求學者所宜出也.解除困難之道,在授課者固宜悉心研求,而

在爲學者則宜勉力自克.且難之中有趣,趣生則感難之心自滅,且將樂此而不疲.至趣之由來,第一在嚮往,第二在自得.不佞教授幾何二十餘年,每遇尅苦自勵者,恆向不佞索難題.題不難,且不樂也.得題一時不能解,不佞憫其勞而欲告之以法,則深拒,請勿告.既而自有得,來告不佞,述其思索之途徑,津津樂道而不倦也.不佞因亦樂其所樂而不能自已,如是者已數見不鮮焉.蓋惟樂之者不見其難,而見難者始日感其苦也.是可見授課者但宜引學者入能樂之途,而不宜導學者至避難之境.一有避難之心,則教者學者將日務相遁之法,漸進,則甚易者亦將視爲至難,而學問二字不能言矣.至是雖竭力汰難就易,求媚學者,庸有濟哉.庸有濟哉.

以上皆不佞平日問答之言,問固不一人,言亦非一時,今拉雜記之,以作本書之序.並祈高明之指正.

中華民國十四年夏曆元旦夜　吳在淵識

編輯大意

本書教材,約計每週教授五小時,可教一年.緒論中題問,備學者自作,及教師口問.以後題問,則備學生輪流上黑版演習,教師在旁指導.大抵每五小時中,可以二小時講解,三小時令學生練習.

本書爲新中學及師範學校教學而輯,故力避艱深之理論.凡所論列,以初學所能了解者爲限.更備諸實用題,令初學者知幾何學在尋常日用方面亦有莫大之功用.

緒論一篇,敍述幾何圖形種種基本概念,略參近世思想,而決不流入高深之境.同時令初學者從事實驗,籍以使此諸概念明確而精熟.雖微有喧賓奪主之嫌,而實爲初學最相宜之程序.

半軸轉,半旋轉,平行移動諸法,實不過爲疊置法之變形,初學者萬無不能了解之理.而其效用絕大.提前練習,則隨在可得其益,故本書

於第二編證定理時即用之.尋常證法,則在問題中一一更使學者練習,似更足以啓發初學之心思,且亦不患不能諧世而協俗.

以參加近世幾何思想之故,定義中有與普通教科書相異者;其間頗費經營.自問或尚能斟酌盡善,不至新不如故.(例如直線之定義,在教科書中有定作「二點間最短之徑」者.此語實僅可作爲公理,用作定義,殊覺未安.又有定作「線中無處不具同一方向」者.此實犯倒果爲因之病.以方向之概念,須先有直線之概念而後能發生也.本書中之定義,較此似尚爲妥洽).

量與數,在高等數學中往往不細加區別,(在純粹幾何方面不然)因學者已知量數方法之原理,無庸再爲覶縷也.至學本書者,則方在履端之始,又值理論嚴密之科.混而一之,心殊未安.故不辭煩瀆,斤斤致辯.

間接證法,用處固屬不多,學者亦以能避爲

佳.然就方法方面言,實不可不知之詳且盡.故在第二篇中,歷舉靡遺,反覆申說.

從來幾何學教科書,除解析法外,無告學者以入手之方法者.故學者得題,恆苦無從措手,遂致畏難欲破此關,除舉例指導外,別無普通合用之道.本書故於每編之末,舉例以示初學者若何構思之路.惟限於篇幅,無從詳盡.教師於此,宜更增益,多多益善.

證題時添加補助線,羌無成規,實爲初學者最感困難之點.本書勉就可言者略述其法.雖題情萬變,不能一例而論.然學者如能舉一反三,卽不難自得康莊之道.

一題數證,旣能活用定理,又足啟發心靈,且極能引起學者之興趣,能使學者難中感樂.因樂忘難,端在此事.本書每編,略示範例.引而伸之,是在教者.

軌跡爲幾何學重要子目之一.其效用及分量,不亞於定理.且有多數作圖題,賴此而得解

法.似不宜因陋就簡,略而不論.惟初學者畏之殊甚.本書先示實例,後明證法,或可稍解困難.至所舉軌跡定理,以學者時間有限,故裁足應用卽止.他日不佞當更出專書,詳示討究之法.

作圖題與定理相輔而行,盡人皆知其解法,除最簡者基於定理之外,稍繁複者卽須駕御有方.本書在第三篇及第五篇中,略示數法.初學者得此,可不必畏難矣.

法美二國之幾何教科書,混面積於比例之中,有長而亦有短.長者爲講解之便利,短者此一部分之特性將不顯.且學者證題之途寬,則練習本部分定理之機會少.本書從英德日體裁,以可從比例分出者特立一編.

比例基礎定理之論證,從純粹幾何學家之插合法,雖盡善,而初學太難.從實用幾何學家之代數法,雖簡便,而系統太亂.本書斟酌其間,採取代數證法之意,而以不毀量之系統爲限.

調和性,相似軸,相似中心及根軸,共軸圓等,

爲近世幾何中重要之性質.欲於此詳論,固不免失之太難.然略示端倪.而不涉艱深之境,於學者有益而無損也.

反形.非調和比.對合,圓錐射影等,初擬皆稍涉藩籬,終以不宜於初學,決然舍去

本書爲初學者實用方面之便利起見,凡工程,建築,航海.測量,繪圖,物理等各方面,能應用初等幾何而爲初學力所能勝之問題,皆盡量載入.

三角法除解析方面外,實皆爲初等幾何之附屬品,本可悉行附入.爲節省學者之時力起見,僅附三角函數定義及其最簡之關係,並及一部分特別角之函數值.蓋後一部分,在三角法中論之,不如在此爲便也.

解析幾何學中之坐標,與此純粹幾何學,大體可謂格不相入.惟於實用問題方面,略有可溝通者.附之,令學者略見一斑.

正多角形及圓周圓面積,本可在圓及比例

中論之.惟就實用方面,分之殊便,故另立一編.

本書以理論爲經,實用爲緯,純爲便於初學之故.頗聞有學畢幾何,而渺不知其何用者.幾何學大用,固不在此區區日用尋常之間.然卽此區區者而尙不知,則教者及編輯教科書者之過也.本書所搜羅之實用問題,似較以實用自名者尙多.初學者得此,其亦足副所望乎?

本書計共一百九十九款,練習題千零六十餘.照新中學案,幾何學授課有二百小時.則教師每小時平均教授一款,學者每受課一小時平均作題五六個,或不爲多也.

本書中練習題,除實用題外,凡不假思索而卽得者不採用,亦決不列入初學所不能解之問題,俾學者足以發展能力而不致畏難.

本書編制,取可伸縮性.如學者程度不齊,或時間短促,則在實用問題中,可删去繪圖,建築,求積等類問題,及以下各處:

第二編第六章及以後聯帶之諸例

第三編第五章及以後聯帶之諸定理及例

第四編第三章之軌跡定理及以後聯帶之諸例

第五編第六章及以後聯帶之諸例

第五編第七章之軌跡定理

第五編第八章

第五編第九章之54, 55兩款

第六編第一章中關於計算之問題及系

應用以上各節諸定理及問題之練習題

第二三四五編末章中例之爲近世幾何學定理者

又若學者能力有餘,且時間充足,則可揀選附錄中之問題俾學者練習.

凡算學名詞審查會已審定之名詞,本書一律照用.其尚未審定者,姑用通行之名詞,俟定後再改.

不佞才短力薄,紕繆知所難免,所望海內宏儒,進而教之.

告初學者

初學幾何時,須悉心參究,不能輕易放過一字.若有忽略,至後應用,卽有扞格不通之病.

學幾何須看其論理着手處,方能得入門之徑.

學幾何須時時用心.此心須深入題內,得其窾竅;又須高踞題巔,求其綱領.

學幾何出話須有程式,須語語有據而句句就範.不得下一朦朧語,亦不得作一武斷語,至若妄下命令詞或縱所欲言,皆在禁例.

證理長者前後皆有線索可尋.學者須探其草蛇灰線之跡,庶能得立言之法.

已學得之公理定理等務須時時省憶,不可遺忘.

記憶定理時,務須在證法上,圖形關係上,會通上着意,不必在字句上死憶.若徒事背誦,以後用時仍難驅遣,卽落下乘.

學定理須力求清徹,稍有含糊處卽宜詢問.

至完全了解後,宜更推求何故如此證法,試自掩卷尋思,別求他道,至必不能得而後止.

證題如認路.身自摸索,雖或誤入歧途空費時力;然一再循行,路之熟者孔多,以後卽能頭頭是道.故初學者證題須力自思索.苟非萬不得已,不宜輕易詢人.

初學證題時,第一.就題中所有名詞體會其義;第二.就與假設終決有關之圖形性質盡數臚列.由是淘沙取金,闡發其間關係,再行整理,卽得之矣.

證題前繪圖,圖宜精確;證題時寫式,式宜淸晰.圖不精則將陷於謬誤,且不易見出其病源;式不淸則將紊亂思路而艱於收束.

記號一定則少淆亂,且可略去無謂之申明,故記號不宜妄改.

學者不宜輕視易作之題.蓋易者卽爲難者之基,輕之不加熟習,則後此皆荊棘矣.

學者更不宜畏視難作之題吾人睿智,用而

始出,不有磨練,則思致不靈.且凡所謂難,不過在着手之初不能一索卽獲耳.若一再得手,卽能力進而路徑多,非特難將自退,且有左右逢源之樂.若一存畏避之念,難更將日出而不窮.何況教科書中初無絕對之難題乎.

學者初遇難題時,宜存必得之心,鍥而不舍.語曰(思之思之,鬼神通之.)蓋思索既久,自有新意潛來而能力長矣.思一意未盡,不宜中輟.必不得已舍而之他,亦宜撮錄所得,以便後之續思,若以苦思不獲而覺神疲,則宜棄此而習他科,至精力已復,再事探索.如此數四以後,難將轉避我矣.

算學不加練習,雖理論通明,臨用時萬不能驅遣自如.幾何學尤甚.故學宜注重自作問題,不可專事聽講.

上黑版之演寫,不過為指正學者有無錯誤.未上以前,宜先事預備;既上以後,宜更行複習.若無預備,則甚者勢將面牆呆立,專俟教師代

作,否則亦延誤有用之光陰.若不複習,則久之將前功盡棄而無會通之時.

學者遇求軌跡題一時不得其解,可先就題義繪出軌跡中若干點,得其全線.於是再考察此線之特性以定施解之途徑.

學者每學得一法,宜求善用之道;或於已解之諸題中求其合此之例;再考察,能用此法者恆屬何類之題;則嗣後應用庶能確有把握.

以上所言,不過爲初學者示其大略.神而明之,存乎其人.

近世
初等幾何學

上冊　目錄

近　世
初等幾何學

第一編
緒論

第一章　幾何學之目的及要素

1. 幾何學

幾何學 (Geometry) 者,研究空間性質之科學也.

凡物體之在空間,必占有某一位置,而空間爲其所占之部分,有形象,有大小,幾何學就此三事以研究空間,由部分而推之於全體.

2. 初等幾何學

研究空間之幾何學大致可分之爲二,一爲歐几里得幾何學(Euclid Geometry),一爲非歐几里得幾何學(Non-Euclid Geometry),所研究之空間各自有其特性及系統.歐几里得幾何學,集成於希臘人歐几里得氏之手(在西曆紀元前250年),卽本書所述者是也.其後至西曆十七世紀時,法人

待帥谷(Desarques)及巴斯客兒(Pascal)二氏又闢近世幾何學之路徑(Modern Geometry),笛卡兒(Descartes)則建設解析幾何學(Analytic Geometry),所研究者皆仍爲歐几里得氏之空間,而所用以研究之方法則大異;於是德法等國研究歐氏幾何學者,亦稍改易其方法矣.歐氏幾何學對於其餘各種幾何學而言,特名之曰古幾何學,或曰初等幾何學(Elementary geometry).

3. 幾何學之第一目的

幾何學之第一目的,在論空間部分之形象(§1);*惟懸想爲難而敷陳不易,故往往舉物以表之;如是則所舉之物,不過作一記號觀之,幾何學初不論物,亦不論物之形象;此不可不知者也.

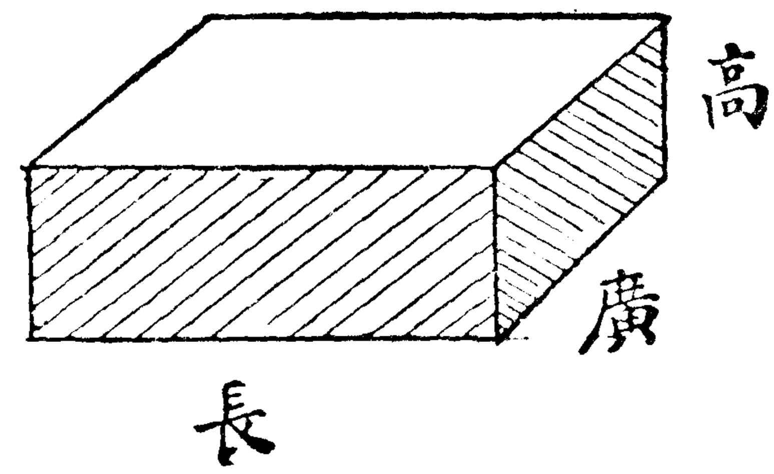
世之侈言實用者,在幾何學中,往往卽形卽物混爲一談,此大誤也.爲初學謀興趣,爲學問闢疆土,吾人皆甚歡迎之;特是喧賓奪主,致學問眞實之價値湮沒而不彰;則吾人爲學問本身計,不能不稍稍顧惜之矣.昔有人從歐几里得學,習畢第一定理,問歐氏曰,學此有何利益;歐氏乃召僕擲與三錢而揮之去,以其非爲學而欲求利也;此其故可深長思矣.†

註.* §1 卽 1 款之略記法,後倣此.

† 教師對於初學者不妨多舉實物以作例,不佞此言僅爲過甚者下針砭

構成空間部分之形象,全恃四種要素(Elements),吾人次當列舉之.

4. 體.



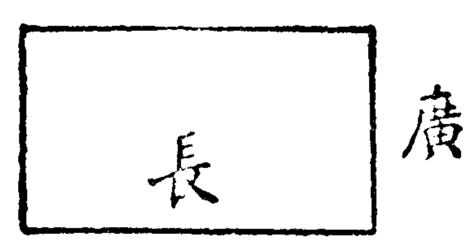
空間之有盡部分曰體 (Solid).

體有三個向度 (Dimensions) 爲長 (Length),廣(Breadth),及 高(Height).

〔注意一〕 體之三個向度,皆擴至無窮遠,則此體卽爲一完全之空間.

〔注意二〕 體爲空間之部分,故二體可相交.

5. 面.



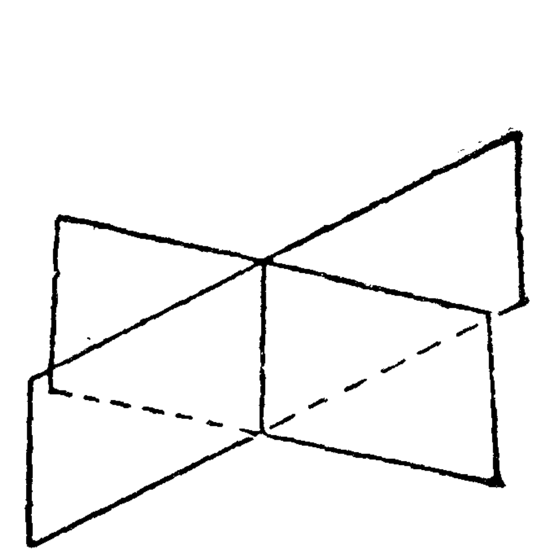
相隣二體之交界爲面(Surface).

例如置一桌於空間,桌所占空間之部分,與其未占之部分二者之交界爲面.

面有二個向度,爲長及廣.

〔注意〕 面之高爲零,故疊面不能成體,分體不能爲面;且諸面能相交.

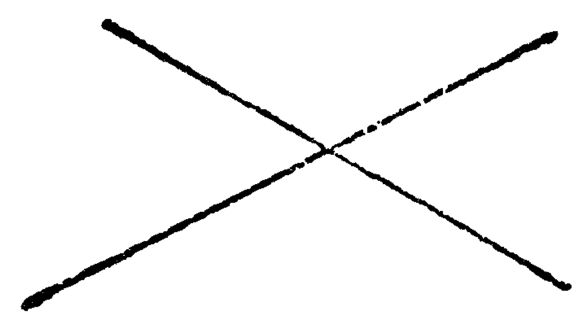
6. 線.



面之交界爲線 (Line). 線有一個向度,爲長.

〔注意〕 線之廣及高皆爲零,故疊線不能成面,分面不能成線;且諸線可相交.

7. 點.



線之交界爲點(Point),點無向度.

〔注意〕 點之長,廣及高皆爲零,故疊點不能成線,分線不能成點.

8. 幾何圖

點,線,面,體,或各自分離,或任意集合,統名之曰圖(Figure).

例題一

(1) 舉實例明體.

(2) 舉實例明面.

(3) 舉實例明線.

(4) 舉實例明點.

(5) 舉實例明面之交界爲線.

(6) 舉實例明線之交界爲點.

(7) 體之盡處爲面,舉實例以明之

(8) 面之盡處爲線,舉實例以明之.

(9) 線之盡處爲點,舉實例以明之.

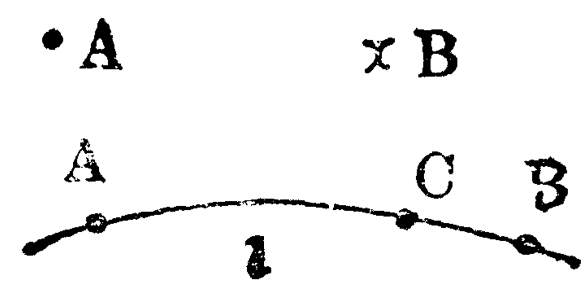
第二章 幾何要素從運動而成

9. 點.

設想空間部分漸次縮小,小至比吾人想像中所能謂爲

至小者尙小,以至成莫破之一要素,名之曰點. 故點無形象,無大小,僅有位置.

點之記號,可以墨筆或鉛筆作一至小之黑漬(•),或作一小叉(×). 有數點欲分別之,可以一大體字母 A 或 B 置於其旁而讀之曰點 A,或點 B.



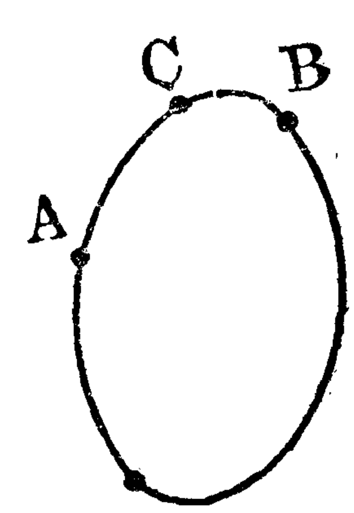
10　線.

點運動則生長,故其運動所經之路爲線. 以是線可視作動點位置之羣,而一線中包含無數個點. 如此各點謂爲在線上,或曰線過其點.

表示一線,用筆尖畫於紙上之黑痕爲其記號,取其上之二點或數點用大體字母記其旁,如上圖中線 $A\ C\ B$,或線 ACB. 有時以一個小體文字置其旁,如線 l.

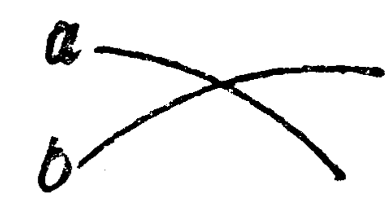
線之有起有迄者,其起迄之二點爲線之端(Ends).

線之兩端合爲一點者曰封閉線(Closed line).



線之兩端若不絕向外擴張,遠而又遠,以至比吾人想像中所能謂爲至遠之處尙遠,此時二端所在之位置,曰無窮遠 (Infinitefy Distant). 此線上在無窮遠之點,曰無窮遠點 (Point at Infinitv).

一動點產生一線,可視作由二個相反之運動所生. 例如線 ACB,其一可視作從 A 起過 C 而至 B,其二可視作從 B 起過 C 而至 A 也.



二線共有一點者曰相交(To intersect),此公共之點爲二線之交點(Point of intersection),或曰二線之會(Meet)

二點 a, b 之交點時或記爲點 ab.

11. 面.

線運動則生廣.故其運動所經之路爲面. 以是而可視作動線位置之羣,而一面中包含無數個線,更包含無數個點,如此之線或點謂爲在面中.

線運行成面時,線中各點一一運行成線,而如此諸線皆在面中. 有盡線作無盡運動時,其兩端各產生一無盡線;無盡線作無盡運動時,其無窮遠點產生一無窮遠線(Line at infinity). 面之起迄相合者曰封閉面. (Closed Surface) 封閉面中無無窮遠線,封閉線運動時亦不生無窮遠線.

二面有公共線者爲相交之面,此公共線曰交線.

12. 體.

面運動生高,故其所經之路爲體. 體中包含無數個面,無數個線,無數個點.

例題二

(1)　舉實例以明點運動成線.

(2)　舉實例以明線運動成面.

(3)　舉實例以明面運動成體.

(4)　點如何運動則可不生線?

(5)　線如何運動則可不生面?

(6)　面如何運動則可不生體?

(7)　體運動時成何?

(8)　何謂無窮遠?

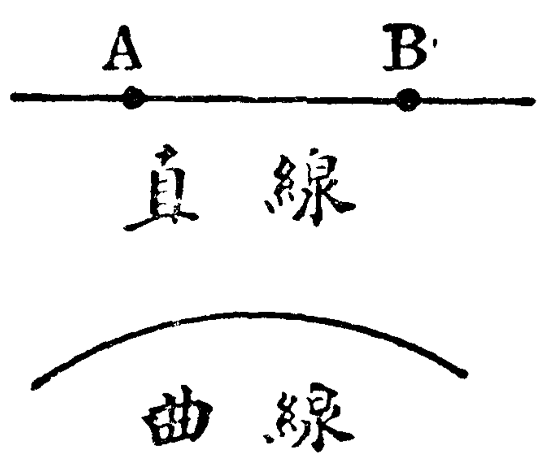
(9)　一點向四方運動能否發生一面?

(10)　一直線向四方運動能否發生一體?

第三章　直線及平面

13　直線及曲線. 點列.

一線過其上二點旋轉而各新位置恆與其原位置相合者曰直線(Straight line), 否則曰曲線 (Curved line or curve). 故二直線若有二點相合,則完全相合.



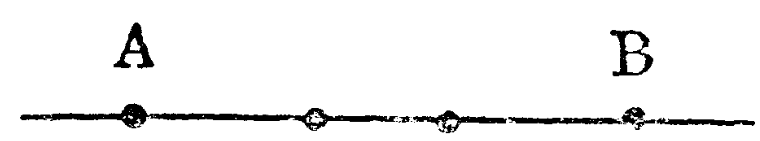
由是可知過二點之直線有一無二. 易一語言之,即二點定一直線. 又可知二直線不能交於二點.

畫直線之器具,幾何學中僅許用一不劃分寸之直尺.*

欲過二點畫一直線,可以直尺之邊緣緊切此二點,左手力壓此尺,右手用筆尖沿尺畫之,† 以故過二點恆可引(to draw)一直線.

過二點畫直線時曰聯(to join)此二點. 所畫之直線或曰二點之聯(Join). 二點A, B之聯讀之曰線AB.

若干點在同一直線上,則曰此諸點共線(Collinear).舉其完全之系統而言曰點列(Range, or row of points),其線爲列之底(Base).



14. 方向. 射線.

一動點從直線AB上一點A向又一點B進行,則曰此動點進行之方向(Direction)爲AB;若動點從B向A進行,則其方向爲BA. 表示方向用矢形(⋙→).

AB及BA二方向相反對,從代數學記號之概念,可以正負號區別之. 任意定一方向爲正,則又一方向卽爲負.

過一點之直線爲此點之射線(Ray);此點分射線爲二分,各分曰半射線(Half-ray).點曰半射線之原點(Origin). 半射線恆以原點爲起點,故一直線上二個半射線之方向

---

* 如此限制爲理論幾何學而設;若爲實用便利起見,固可偷用別種器具也.

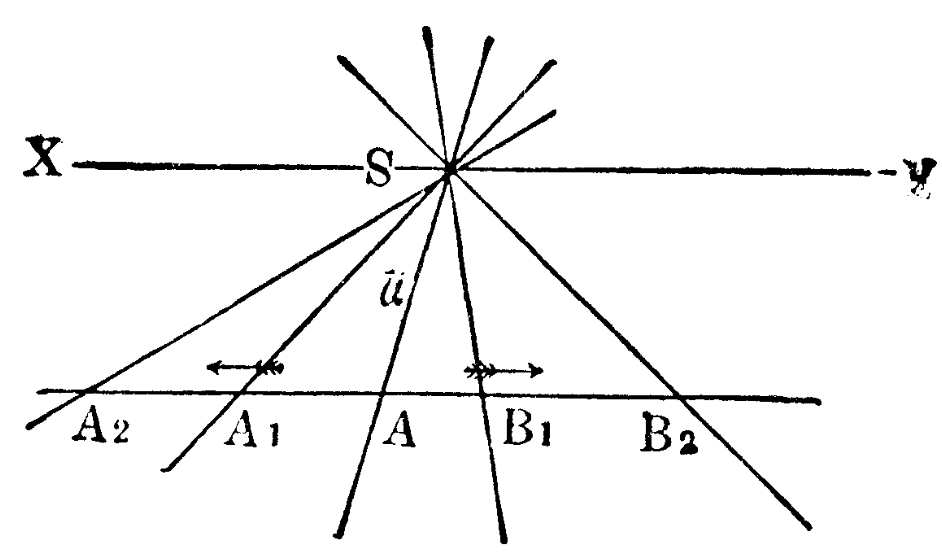
† 教師於此當在黑板上實做畫法,示學生以直線板,丁字板,三角板等,幷述其用法.

相反.

15 平行線.

二點定一直線,故過一點之直線其位置不定,可固定此點而轉之,是曰旋轉(Revolution),此點曰旋轉之中心(Center).

一直線繞其上一點 S 而旋轉,則其途中各位置之射線可與他一定直線相交,此定直線爲各射線之截線 (Transversal).



如圖射線最初之位置 a 與截線交於點 A,因射線旋轉於一個方向中而交點 A 次第向 $A_1, A_2, \cdots$ 進行,漸行漸遠以至迫近於無窮遠點,此時射線之位置迫近於 SX;射線 a 又旋轉於別一方向中,其與截線之交點 A 次第向 B_1, B_2 進行,逐漸行遠而至迫近於無窮遠點,此時射線之位置迫近於 SY;但 SX, SY 爲一直線上之二個半射線,故 SX, SY 二者合成一直線 XY;射線在如此位置 (XY) 時名之曰平行於 (parallel to) 截線 AA_1 名 XY 曰 AA_1 之平行線(Parallel).

簡言之,一點之射線與他一直線交於無窮遠點,則曰此射線平行於直線.

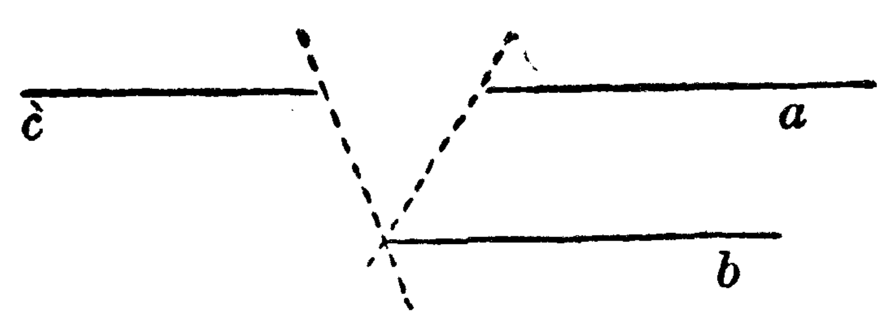
因無窮遠點爲吾人想像不到之點,故爲初學者簡易說

法,可曰不相交之二直線(在同平面中)爲平行直線.

XY 平行於 AA_1 記之爲 $XY \parallel AA_1$.

旋轉線 a 之各位置如 SA_1, SB_1 等凡過截線上一定點者皆一定,故在 SX 之一位置者亦然.即過直線外一點而與此直線平行之直線有一無二.

從二個原點所引平行半射線在二原點聯線之同旁者爲同向 (Same direction),



在兩旁者曰異向(Different direction).例如上圖中二線 a, b 爲同向, b, c 爲異向.

16. 平面.

過一面中任意二點之直線全在此面之內,則此面曰平面 (Plane surface, or plane). 非平面之面曰曲面 (Curved surface). 由是可知平面爲一直線運動所生.

平面之長及廣皆無窮. 由是一平面可分空間爲二部分.

直線之長無窮,故一直線可分平面爲二部分,此所分之二部分,各爲半平面.

以一平面繞其中一直線旋轉,則其所經之路爲一完全之空間. 若旋轉中某一位置過所繞直線外之一點,則此位置一定,故過一直線及線外一點之平面有一無二.

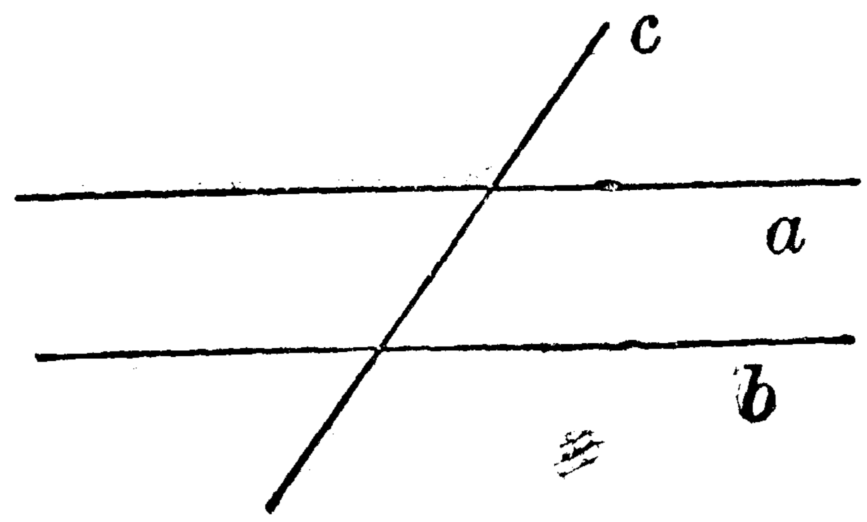
17.　線束.

在一平面中取一直線及線外一點,若過此點引一射線令與所取直線相交,則此射線當全在所設平面中(§16).今令射線與直線之交點沿直線運動,則此射線隨之而繞定點旋轉,其旋轉中之各位置皆在所設平面中可知,而所設平面卽可視作由此旋轉之射線所生.在如此旋轉中,有一個位置平行於所取直線(§15),故過一點而與一直線平行之直線在此點與直線所定之平面中.由是可知

一平面中之二直線或則相交,或則平行.

如此旋轉射線之諸位置,卽過一點而在一平面內之諸直線名之曰線束(Pencil of lines),此點曰束之中心(Center).諸線共過一點曰共點(Concurrent),平行諸直線亦可爲線束,其中心在無窮遠.

18.　平行線之性質.



從上二款,卽可推得下之平行線性質:

(一)　一直線(c)與平行二線(a, b)之一相交,則與其二(b)亦必相交.

何則,若c與b不相交,則是過一點a c能引一直線b之二個平行線矣.此與已知之事相背,不可.故c必與b相交.

(二) 三個直線在同平面中,而前二線各與後一線平行,則前二線相平行.

因若不平行,則過其交點能有二個直線與第三線平行,此為背理之事故也(§15).

19. 初等幾何學之分類.

一圖中各要素皆在同平面上者曰平面圖 (Plane figure)

僅論平面圖之幾何學曰平面幾何學 (Plane Geometry).

論非平面圖之幾何學曰立體幾何學 (Solid Geometry).

本書為初等平面幾何學,中學生學此至熟足矣.

例 題 三

(1) 緊張一絲,視其類於直線否?

(2) 取細絲三四條緊張於二釘上,視其相合否? 此試驗所得合於§13中之何語?

(3) 以一洋紙平鋪桌上摺而開之,視其摺痕為何線.

(4) 取一米突尺就目豎看其邊,能否看成一點? 若看之成一點則此邊直否?

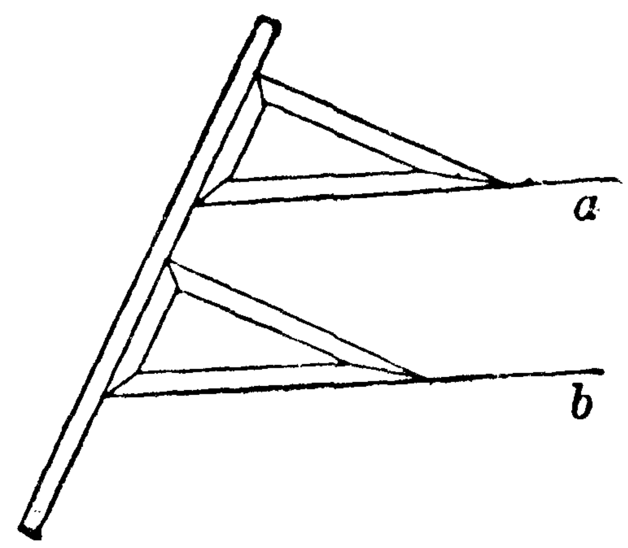
(5) 取一三角板緊貼紙上,沿其邊畫一線,再以此板翻一面,仍用前一邊湊合前所畫之線,若能相合則此線為何線? 何故?

(6) 用何法可試一三角板之邊是否真直?

(7)　過一點可畫幾個直線? 過二點可畫幾個直線?

(8)　試過一點畫一四射線之線束.

(9)　就講堂中實物舉曲線及直線之例.



(10)　就講堂中實物舉線束之例.

(11)　二點能分一直線成幾分?

(12)　試過二點畫一直線.

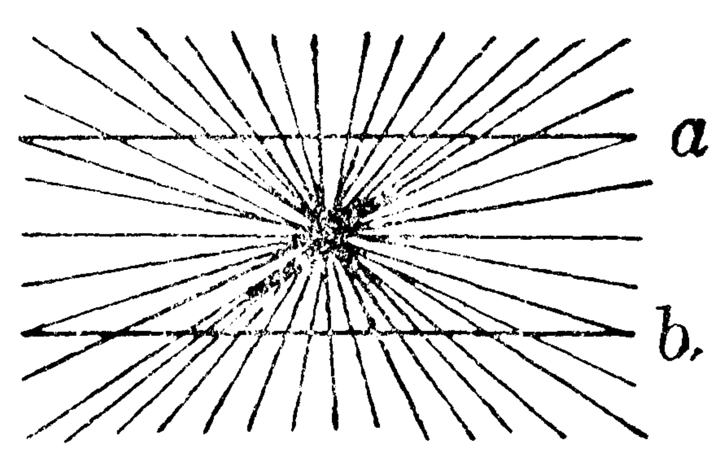
(13)　二直線能封閉一空間部分否?

(14)　如右圖用一尺及一三角板可畫平行直線. 學者試做此畫四個平行直線.

(15)　任意在紙上作三點,試其能否在一直線上.

(16)　二個直線能交於幾點?

(17)　就室中實物舉平面及曲面之例.



(18)　桌面平否若何驗之?

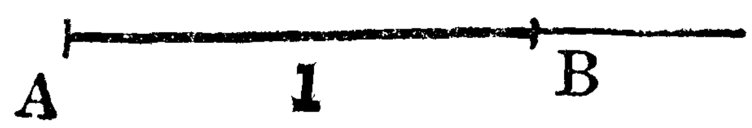
(19)　用目力觀察右圖中二線 a, b 何處相離最遠何處最近,再用14題之法驗此二線是否平行. 實驗後有何感覺?

(20)　用一鉛筆滾於書面上處處吻合無間,此舉使吾人知悉何事?

第四章 線分

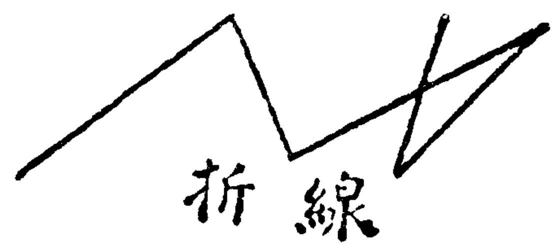
20 線分. 延線. 二點之距離

在直線上二點間之一部分曰線分 (Segment of line). 其餘部分爲此線分之延長線,略曰延線 (Prolongation), 而此線分爲其二點之距離 (Distance).



記一線分之法,在其兩端記二個大體字母,如 A 及 B, 讀之曰線分 $A\,B$; 或在其旁識一小體字母,如 l, 讀之曰線分 l.

延長 (to produce) 線分 $A\,B$, 謂作 B 端外之延線讀線分時之次序宜與其方向相同.



不在同直線上之若干線分連接而成者曰折線(Broken line).

21. 幾何學之第二目的.

幾何學之第二目的在論圖之位置. 論之道有二:其一,定位置之何在,例如一直線上有三點 O, A, B, 若 OB 比 OA 大,則 B 在 O, A 之外;若 OB 比 OA 小,則 B 在 O, A 之間;若 OB 與 OA 方向相反則 O 在 A, B 之間等,是也;其二,察位置之變遷,例如以一在此之線分移至彼處,若其兩端間之關係不變則線分之形象大小皆不變,卽幾何圖可不變其形象及大小

而任意變其位置是也。

22. 合同圖.

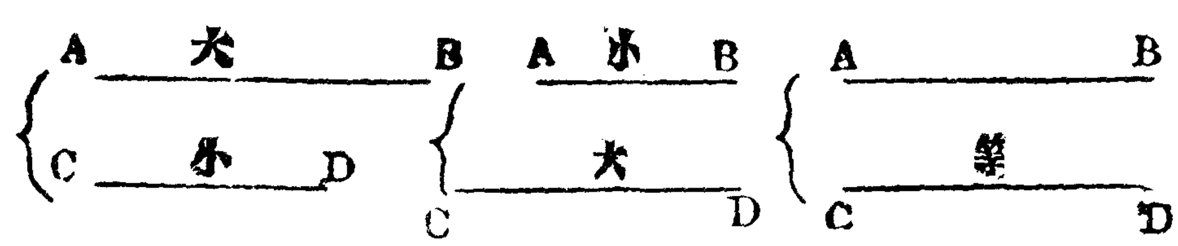
移置一圖重於第二圖上,若第一圖中各要素一一與第二圖中相同之各要素合,反之,第二圖中各要素亦一一與第一圖中相同之各要素合,則此二圖曰合同圖,或曰全等形 (Congruent figures).

合同二圖可視作一圖之在相異二位置者,故其大小必相等。

疊置二圖而視其合同與否,此法曰疊置法(Superposition)

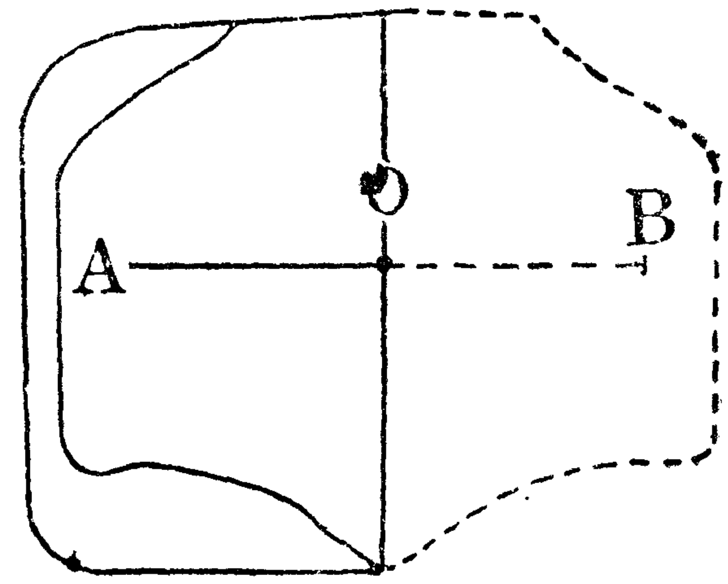
吾人在二紙上任意作二圖而疊此二紙,可見二圖中一直線可使其相重,此相重線上之一點可使其相合,其餘各要素之能合與否恃其關係之位置而定,不能強令之合也。

23. 線分之大小.



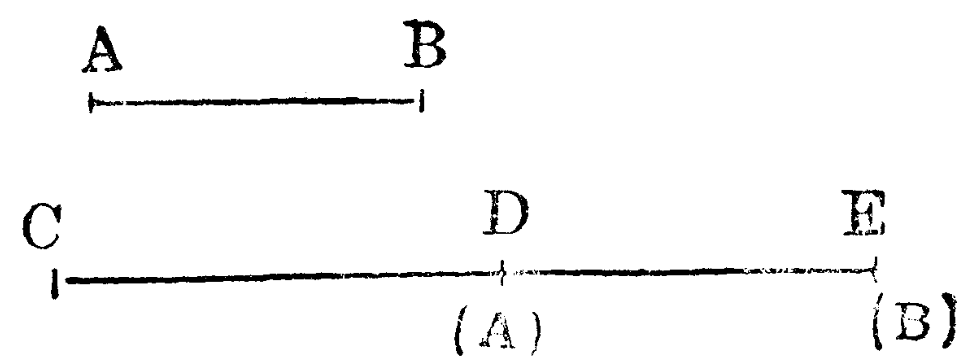
欲比較二線分 AB, CD 之大小,可疊置 AB 於 CD 上,令其相重,且一端 A 及 C 合。若 B 及 D 亦合,則 AB 與 CD 相等,記之爲 $AB=CD$. 若 B 落於 C,D 之間,則 AB 比 CD 小,記之爲 $AB<CD$. 若 B 落於 CD 之延線上,則 AB 比 CD 大,記之爲 $AB>CD$. $=,<,>$ 各讀曰等於(is equal to),小於(is less than),大於(is greater than).

以一線分 AB 所處之平面摺疊而令 B 與 A 合,線分之一部分 BO 與他一部分 AO 相重,則 $AO=OB$, 卽一點 O 分

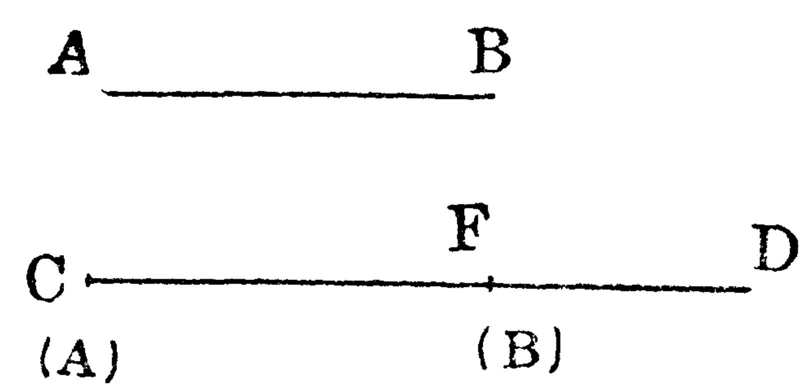


線分AB為二等分此O曰AB之中點(Mid-point).因如此摺疊僅有一法,故所得之O僅有一點,故一線分之中點有一無二.

24. 二線分之和及差.



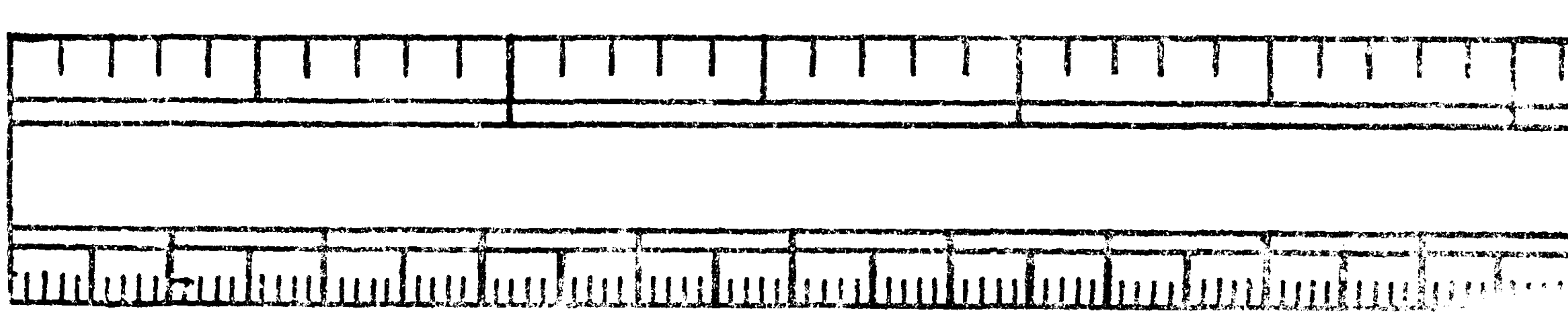
欲加一線分AB於又一線分CD,可以AB移置於CD之延線上,令A與D合;若B落於E,則CE等於AB及CD之和(Sum).記之為$CE=CD+AB$.*



一線分AB欲從又一線分CD中減之,可以AB移置於CD上而令A與C合;若B落於F,則FD等於從CD減AB之差(Remainder).記之為$FD=CD-AB$.*

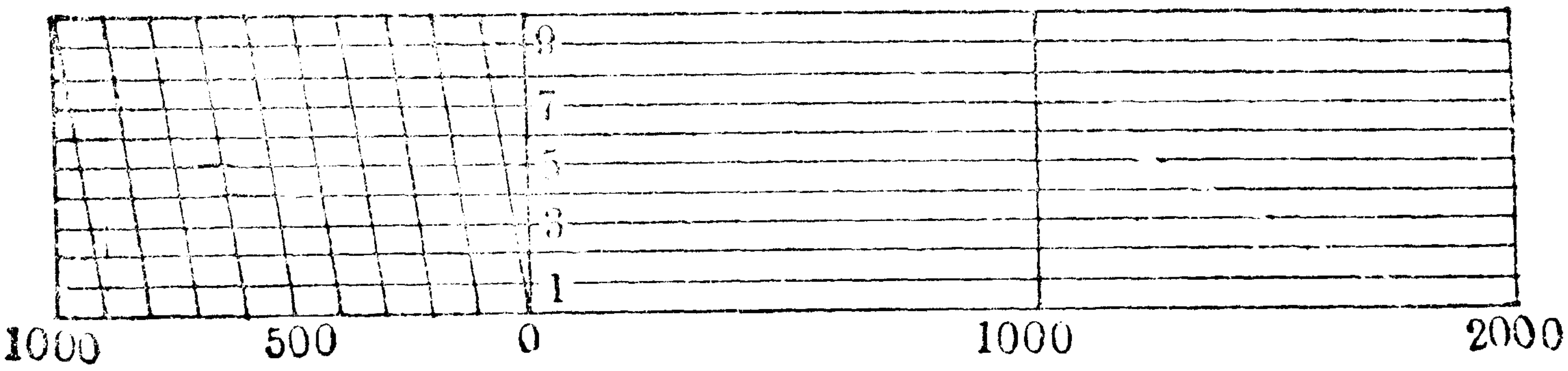
〔注意〕二線分不能行乘法,學者在算術中當已知之.

例 題 四

營造尺
公尺


*(+),(−)號之意義與代數中相同.

分　微　尺



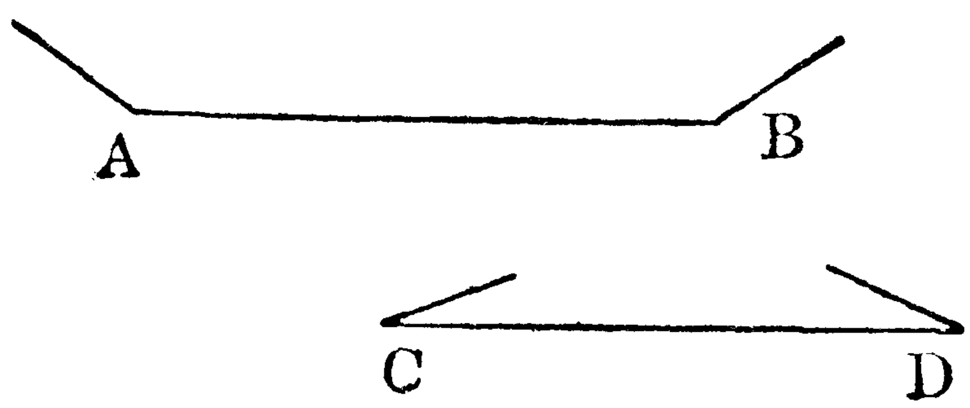
(學者宜備公尺及分微尺,等以備量長短之用.*)

(1)　畫二線,在第一線上任意截一部分 a,欲在第二線上亦取一等於 a 之線分;(a)用紙邊量之;(b)用尺量之;(c)用規筆之二足量之. 此三法中以何法爲最便?

(2)　欲試二個線分相等與否有幾種方法? 最便者爲何?

(3)　畫二個異長之線分,用尺比其長短,又用規筆比之.二者孰便?

(4)　用目力測右圖中二線分 AB, CD 孰長. 再實量而比較之. 得何感覺?



(5)　欲畫一線分以試驗尺之眞確與否,其法若何?

---

*此等器具,教師在此宜畧講其用法. 惟至以後純粹之理論中不許用之. 凡本編例題中所載之器具皆然.

(6) 任意在紙上作二點,在其間畫線分,折線,曲線;用絲線量此諸線孰爲最短.

(7) 在一直線上取一點 A,再取二點令與 A 之距離各爲 2 寸,則從 A 至此二點之二方向有何關係?

(8) 以一直線上一點作原點則此直線可表幾個方向?

(9) 疊置等長二線分,令其一端相合,則第二端是否亦必相合?

(10) 已知一線分之兩端,則此線分之位置及長短能否皆一定?

(11) 從一點至又一點之最短路徑爲何?

(12) 交叉二直線表幾個方向? 三直線若何? n 個直線若何?

(13) 比較二個線分 AB, CD 之長短是否僅有 $AB>CD$, $AB=CD$, 或 $AB<CD$ 三種?

(14) 在一直線上順次取 A, B, C 三點,令 AB 長 5 寸,BC 長 3 寸;再取 AC 之中點 O, 則 AO, OB, OC 各長幾寸? 比較 AB, BC, AO 之長短,用不等式表之.

(15) 在一直線上順次取 A, B, C 三點,令 AB 長 3 公分,BC 長 2 公分;再取 AC 之中點 O,則 AO, OC 之長各幾何? 比較 AB, BC, AO 之大小,用不等式表之.

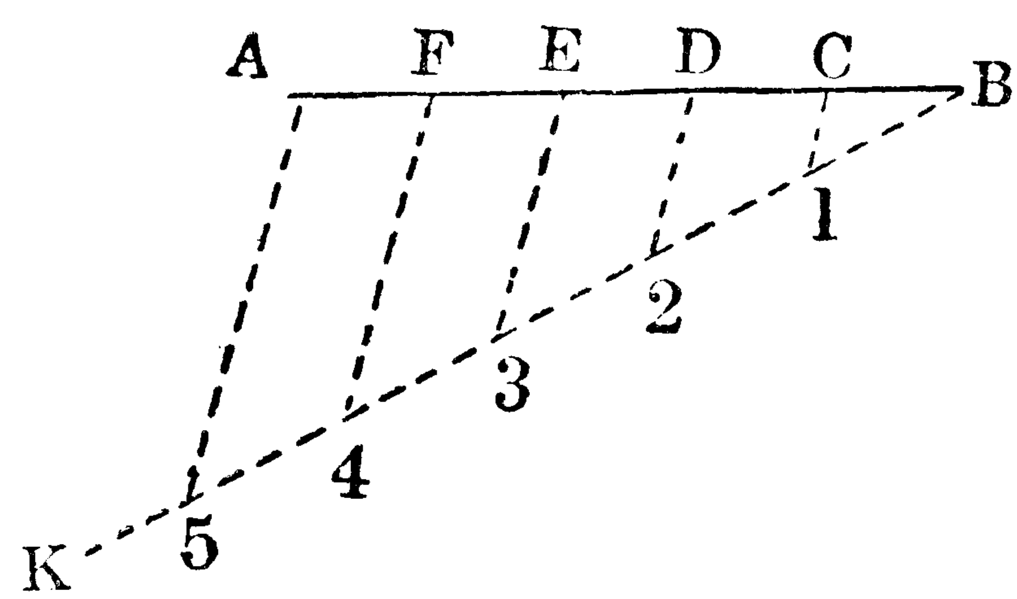
(16)　在一直線上順次取 A, B, C 三點,再取 AC 之中點 O.若 AB 比 BC 大,則 AB, BC, AO 之大小若何? 用不等式表之.

(17)　在前三題中所得結果用普徧之言語述之.

(18)　在一直線上接續取四個線分,每線分皆長 2•5 公分,則其總長幾何? 量之. 此事與算術中何法相當?

(19)　任意引一線分. 再作一線分,令為第一線分之 3 倍.

(20)　如右圖,有一線分 AB, 過 B 引一半射線 BK, 在 BK 上從 B 起用規筆之二足取五個等長(任意長) BI, 12, 23, 34, 45, 引聯線 $5A$; 再用例題三(14)題之法過 4, 3, 2, 1 各點引 $5A$ 之平行線,得其與 AB 之交點 F, E, D, C, 則 AF, FE, ED, DC 及 CB 皆相等;卽線分 AB 分成五等分. 用尺量而驗之.



(23)　任意引一線分,倣照前題方法分之為六等分.

(24)　在一直線上順次取六點 A, B, C, D, E, F, 令線分 AB, BC, CD, DE, 及 EF 之長各為營造尺上之 2 分, $3\frac{1}{2}$ 分, $5\frac{7}{8}$ 分, $4\frac{3}{16}$, 及 12 分. 用公尺量 AF 之長記其結果. 再求以上諸數和用諸等數化法化之. 二者之結果有異

否? 何法爲眞確?

(25) 在前題中,令 AB, BC, CD, DE, 及 EF 之長各爲公尺上之 2 分, $3\frac{1}{2}$分, $5\frac{7}{8}$分, $4\frac{3}{16}$分,及 12 分. 用營造尺量 AF 之長記其結果. 再用分數加法及諸等數化法求其結果. 二者之結果有異否? 何法爲精確?

(26) 實驗之量法能否精確無誤? 幾何學中有實驗之量法能否卽可爲滿足?

(27) 前(20)題中等分一線分之法能明其理由否? 不明理由僅恃實驗能否斷言此法不誤? 幾何學是否以能得實用卽爲滿足?

(28) 在一直線上順次置六點 A, B, C, X, Y, Z.

(a) AC, BX, CZ 各用式表作二個線分之和;

(b) AX, BY, BZ, AZ 各用式表作三個線分之和;

(c) AB, CX, BY 各用表作二個線分之差;

(d) $AB+BX$, $BX+XZ$, $AB+BX+XY$, $BY-XY$, $AB+BY-XY$, $AC-XZ+CZ$.

各表作一個線分.

(29) 三點 A, B, C 在同直線上,其位置爲:

(a) A 左, B 中, C 右; (b) A 左, C 中, B 右; (c) B 左, A 中, C 右; (d) B 左, C 中, A 右; (e) C 左, A 中, B 右; (f) C 左, B 中, A 右. 量三個方向線分 AB, BC, AC (從左至右得數爲正數,反

之為負數).記其結果,以驗恆等式 $AB+BC=AC$.

(30)　三個所設線分以公釐為單位量之,量得之數各為 $u=32,\quad v=19,\quad w=58$;

(a)引四個線分,令其長所含公釐之數各為 $u-w,\quad v-w,\quad u-3v,\quad 2v-w$;

(b)引三個線分,令其長所含公釐之數各為 $(u+v)-w,\quad u-(v+w),\quad v+(u-w)$.

(31)　a, b 為二線分長之寸數(營造尺),已知 $a=36,\ b=-24$, 作各線分,令其長之寸數為 (a) $\dfrac{a+b}{2}$, (b) $3(a-b)$, (c) $2a+\dfrac{b}{3}$, (d) $\dfrac{2a}{3}+\dfrac{3b}{4}$.

(32)　O 為一直線上一定點.　在此直線上任意取他二點 A, B, 則

$$\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OA},$$

此中 $\overrightarrow{AB}$ 表 AB 為方向線分,餘倣此.　依照 (29) 題 A, B 取種種位置,用尺量各線分之大小以驗此等式之不誤.

(33)　A, B 為一直線上二定點, C 為 AB 間任意一點(在此直線上), O 為 AB 之中點,則　$AO=OB=\dfrac{AC+CB}{2}$:

(a)用尺量而驗之.　　(b)用代數式證之.*

(34)　A, B 為一直線上二定點, O 為其中點, D 為線分

---

*學此之學者當已學過代數學,故在代數學中已知之法不再復述

AB 延線上任意一點,則 $AO=OB=\frac{AD-BD}{2}$:

(a)用尺量而實驗之; (b)用代數式證之.

(35) 用正負數表方向線分所含單位長之倍數(不問何種尺度),則無論 C 在線分 AB 上或在其延線上,恆有關係式.

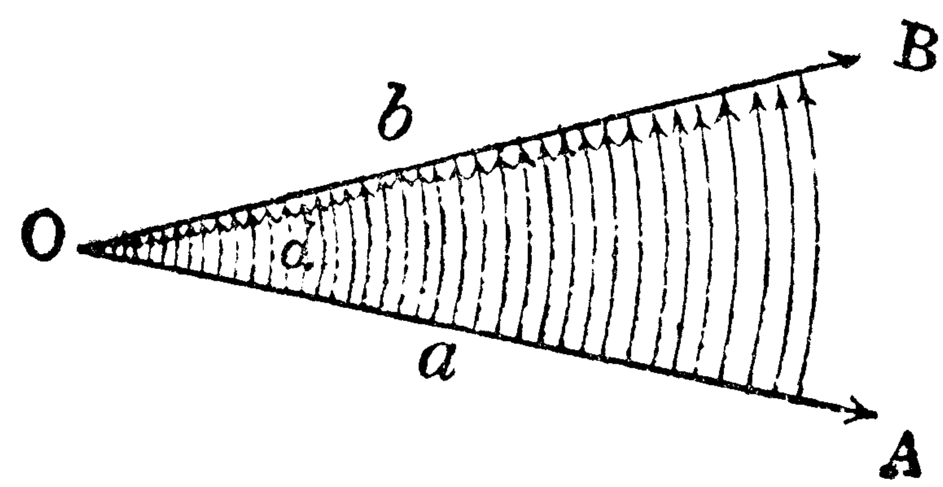
$$\overrightarrow{AO}=\overrightarrow{OB}=\frac{\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{CB}}{2},$$

此中 O 爲線分 AB 之中點. 用代數方法證之

第五章 角

25. 角. 旋轉方向.

相屬角.



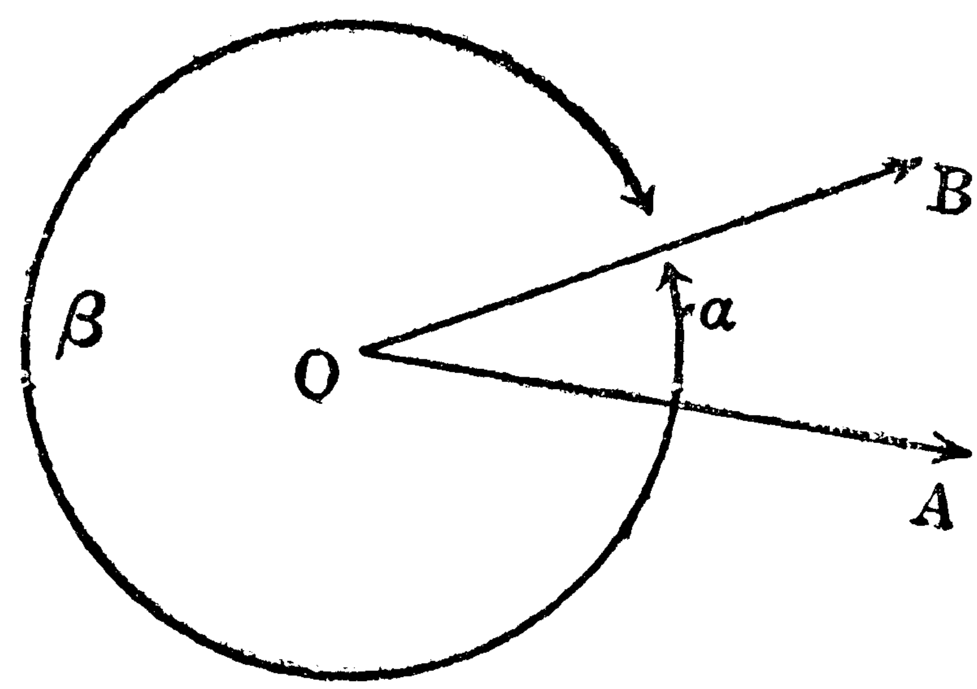
一個半射線 OA 繞原點 O 而旋轉至 OB 其所經過平面之部分就原點觀之曰角(Angle). 原點 O 爲角之頂點(Vertex),半直線之前後二位置爲角之邊(Sides).

記角之法,先記半直線原位置上一點 A,次記原點,又次記半直線後一位置上一點 B,如角 AOB,省記爲 $\measuredangle AOB$. 在能省略時亦可單記一頂點,如 $\measuredangle O$. 有時半射線之前後二位置記爲 a 及 b,則其所成之角亦可省記爲 $\measuredangle ab$. 又

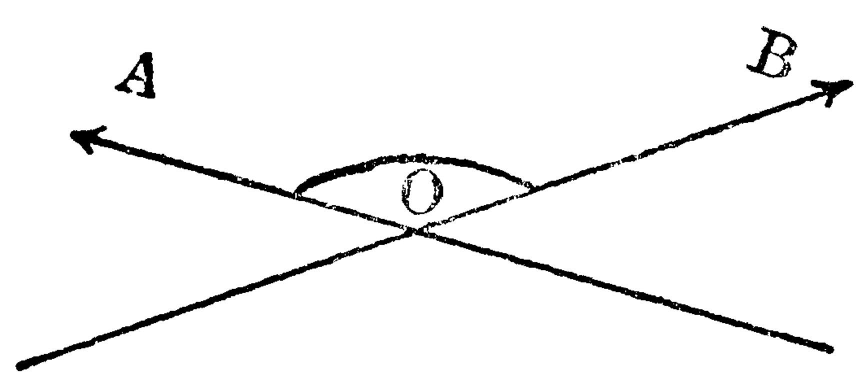
有時以一希臘字母 α, β, 或 θ, 記於角之內部,如 $\measuredangle\alpha$, $\measuredangle\theta$ 等.

$\measuredangle AOB$ 爲半射線從 OA 轉至 OB 所生之角,若從 OB 轉至 OA 所生之角當記爲 $\measuredangle BOA$, 二者旋轉之方向相反,即 $\measuredangle ab = -\measuredangle ba$.

旋轉之方向,與計時鐘中針行方向相反者爲正,相同者爲負.

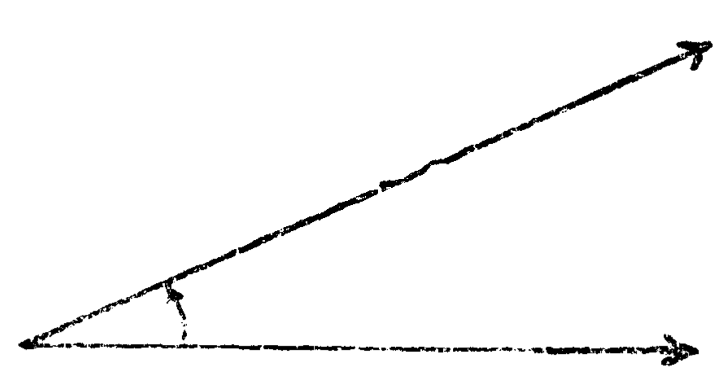


一角 AOB 可由二種之旋轉發生;其一,轉於正方向中者,如圖中 $\measuredangle\alpha$; 其又一轉於負方向中者,如圖中 $\measuredangle\beta$. 名此二角曰相屬角(Conjugate Angles).



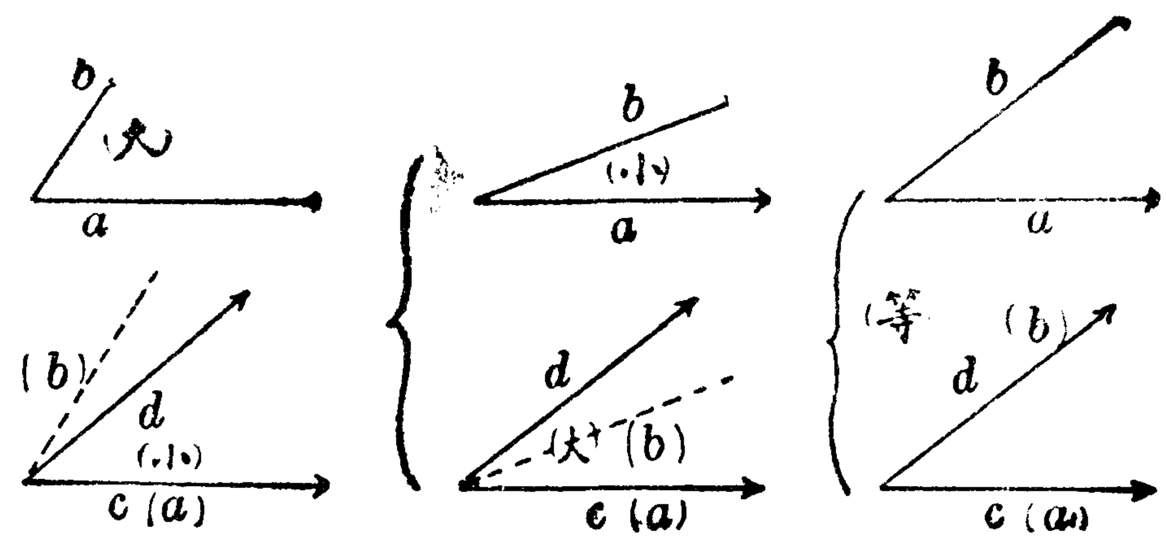
不定方向相交二直線所成之角謂其四個交角(Angles of Intersection).

定方向相交二直線所成之角謂其正方向之交角.

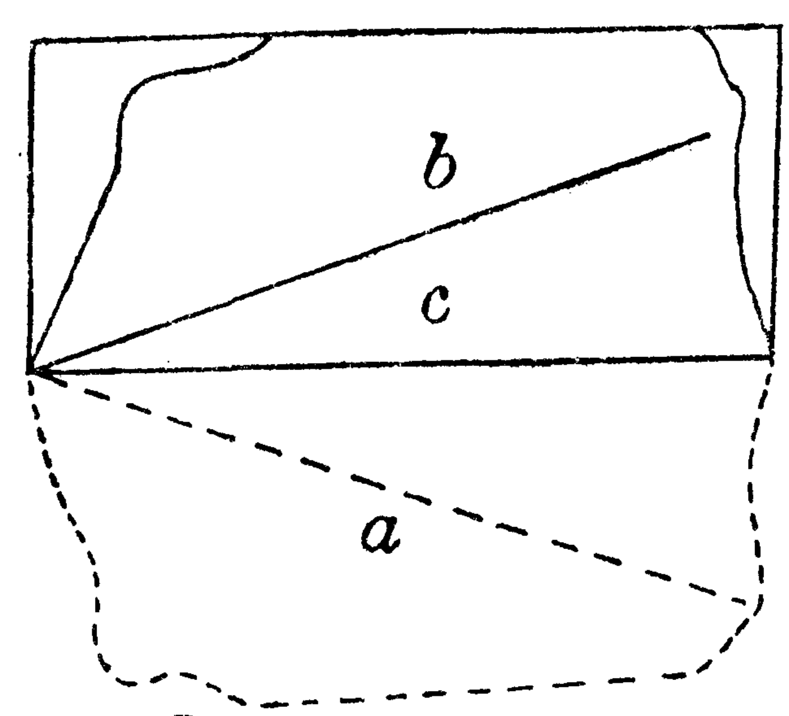


共有一端二線分之角與各線分所處二個半射線之角相同;即角之大小與其邊之大小無關係.

26. 角之大小.

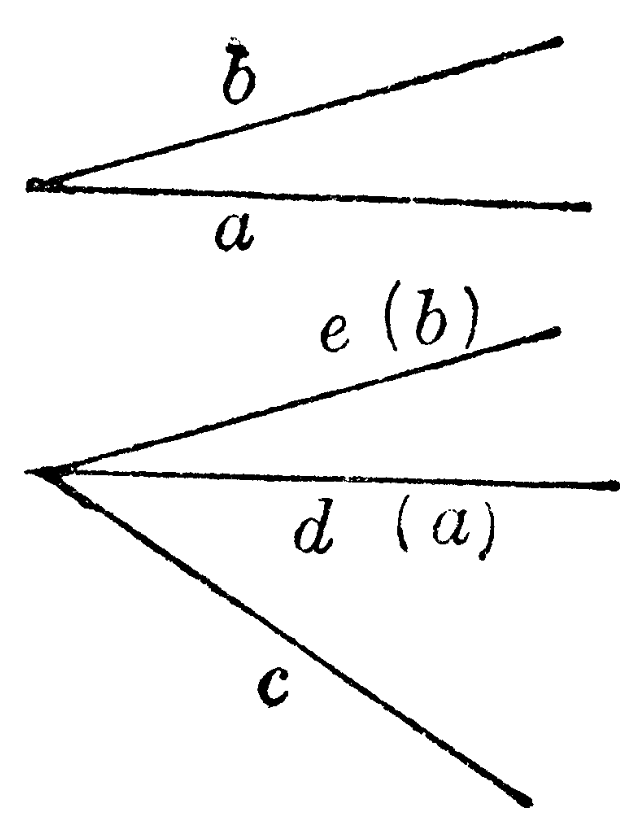


欲比較 ∡ab 及 ∡cd 之大小,可疊置 ∡ab 於 ∡cd 上,令 a 與 c 相重而二角之頂點相合. 若 b 與 d 亦相重,則 ∡ab 與 ∡cd 相等,卽 ∡$ab=cd$. 若 b 落於 ∡cd 之內,則 ∡ab 比 ∡cd 小,卽 ∡$ab<cd$. 若 b 落於 ∡cd 之相屬角內,則 ∡ab 比 ∡cd 大,卽 ∡$ab>cd$.



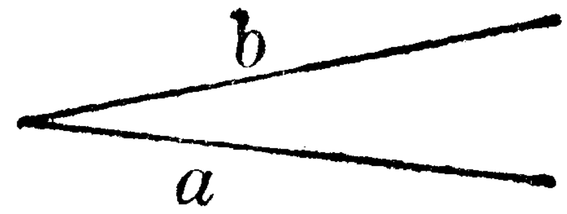
<u>過一角頂點而在角內之半射線分此角爲二分.</u>

以 ∡ab 所處之平面摺疊而令邊 a 與邊 b 相重,則其摺痕 c 過此角頂而角之相重二部分相等,卽 ∡$ac=cb$, 卽<u>一個半射線 c 分 ∡ab 爲二等分.</u> <u>名此 c 曰 ∡ab 之二等分線,或略曰等分線</u> (Bisector). 因如此摺疊之法僅有一種,故一角之等分線有一無二.



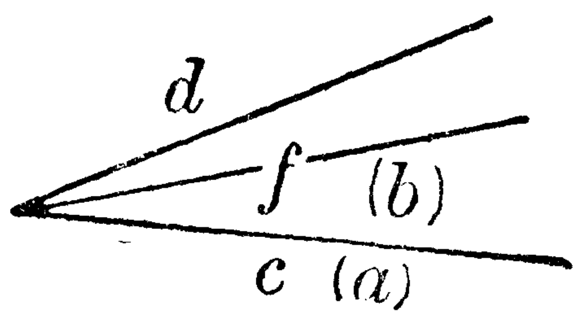
27. 二角之和及差. 隣角.

欲以一角 ab 加於又一角 cd, 可以 ∡ab 移置於 ∡cd 之相屬角上,令頂



點相合，a 與 d 相重；若 b 落於 e，則 $\measuredangle ce$ 等於 $\measuredangle ab$ 及 cd 之和記之爲

$\measuredangle ce = ab + cd.$



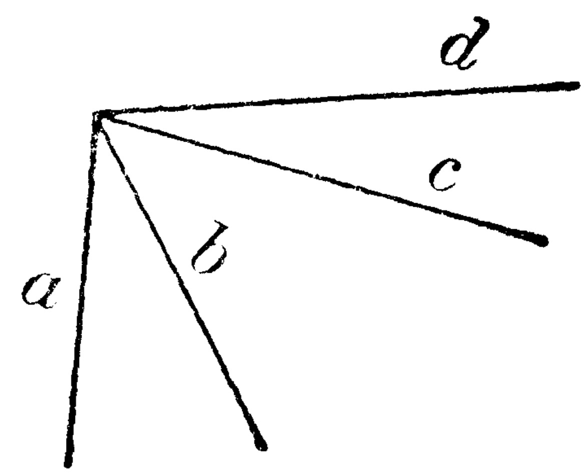
$\measuredangle ab$ 欲從 $\measuredangle cd$ 減之，可以 $\measuredangle ab$ 移置於 $\measuredangle cd$ 上；令頂點相合，a 與 c 相重；若 b 落於 f，則 $\measuredangle fd$ 爲從 $\measuredangle cd$ 減 $\measuredangle ab$ 之差。記之爲

$\measuredangle fe = cd - ab.$

〔注意〕 二角不能行乘法，其理由與二線不能行乘法相同。

共有一頂點及一邊之二角曰鄰角 (Adjacent Angles).

鄰角兩外邊所夾之角爲其二角之和如右圖，$\measuredangle ab$ 及 $\measuredangle bc$ 爲鄰角，而 $\measuredangle ac$ 爲其和。

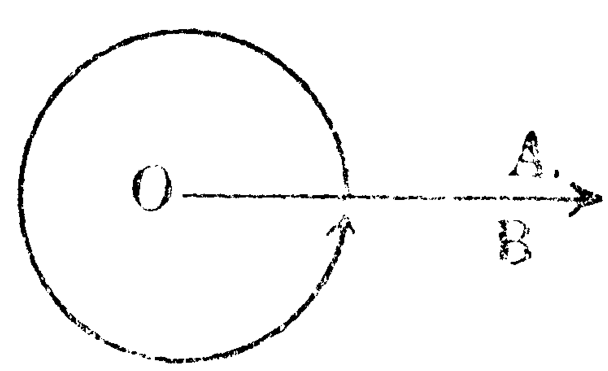


推之，可知順次相鄰諸角之和爲其二外邊所夾之角. 如右圖

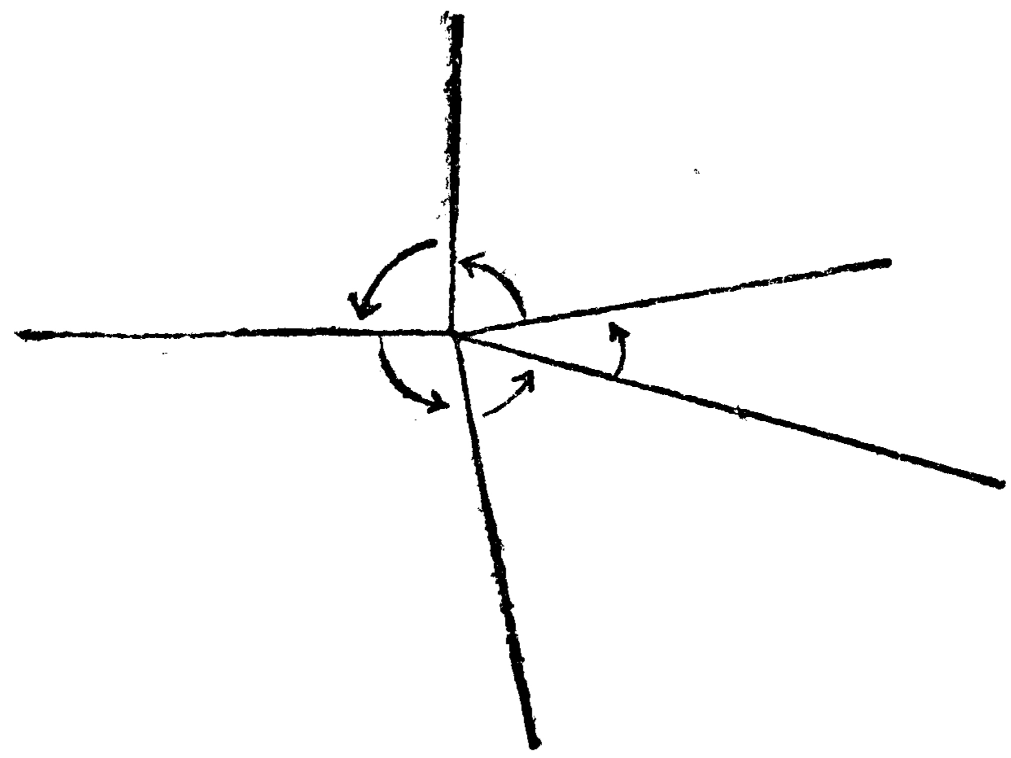
$\measuredangle ad = ab + bc + cd.$

23. 周角，直線角，直角及垂線.

一個半射線 OA 繞其原點 O 旋轉一周，卽其最後位置 OB 與原位置 OA 合，其發生之角曰周角 (Perigon).

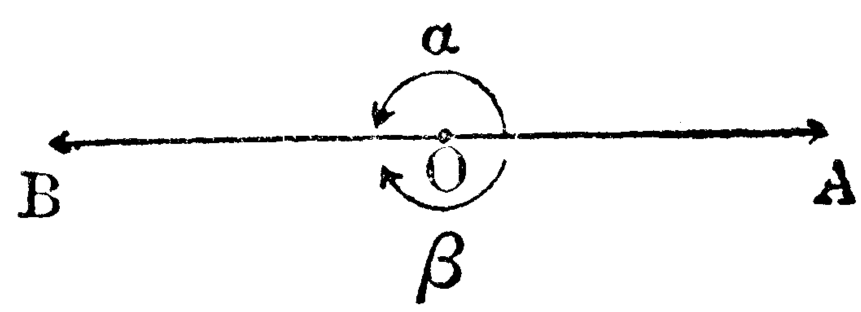


因半直線旋轉一周所經之路爲一

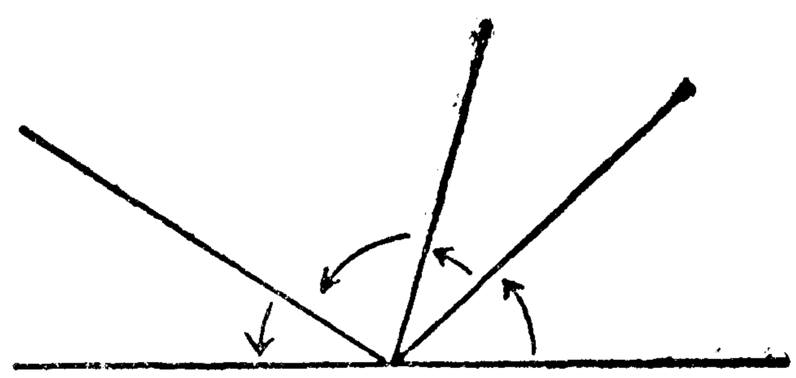


平面故就平面中一點觀此平面,則此平面爲一周角.

從前款末,可知在一點周圍順次諸隣角之和等於一周角

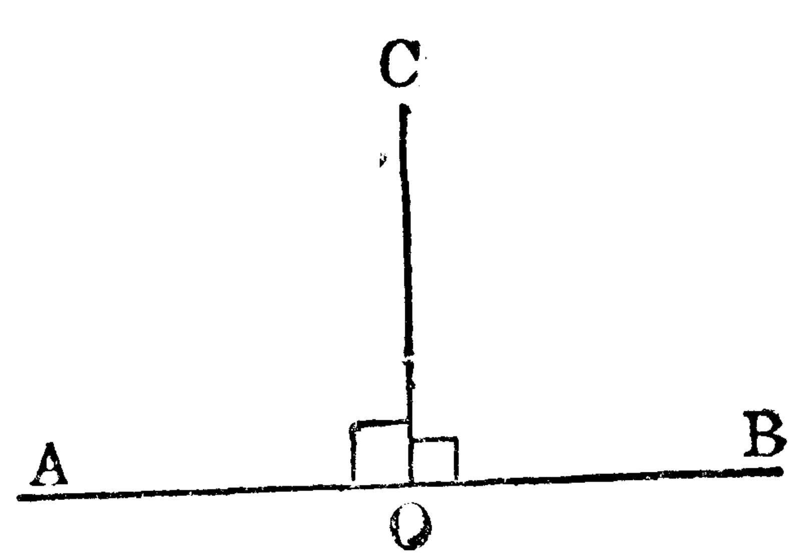


一角之第二邊合於第一邊之延線,卽二邊成一直線則此角曰直線角(Straight Angle). 由是可知以半平面界上一點爲頂點,則可視此半平面爲直線角. 因二個半平面疊之能全合,故凡直線角皆相等;且直線角等於周角之半,卽周角等於直線角之倍,故凡周角皆相等.



從前款之末,又可知順次諸隣角之兩外邊成一直線,則此諸角之和等於一直線角.

反之,二隣角和等於一直線角,則其兩外邊成一直線. 因直線角之二邊成一直線故也.



直線角之半曰直角 (Right Angle). 直角之一邊謂爲垂直

於(Perpendicular to)他一邊,或曰他一邊之垂線(Perpendicular).由此可知直線角等於二直角而周角等於四直角. 因直線角皆相等,故其半亦皆相等,即凡直角皆相等.

直線角之簡號爲 $st\measuredangle$; 直角之簡號爲 $rt\measuredangle$, 或 $R\measuredangle$. 垂直之簡號爲 $\perp$. 例如 CO 垂直於 AB 可記作 $CO\perp AB$.

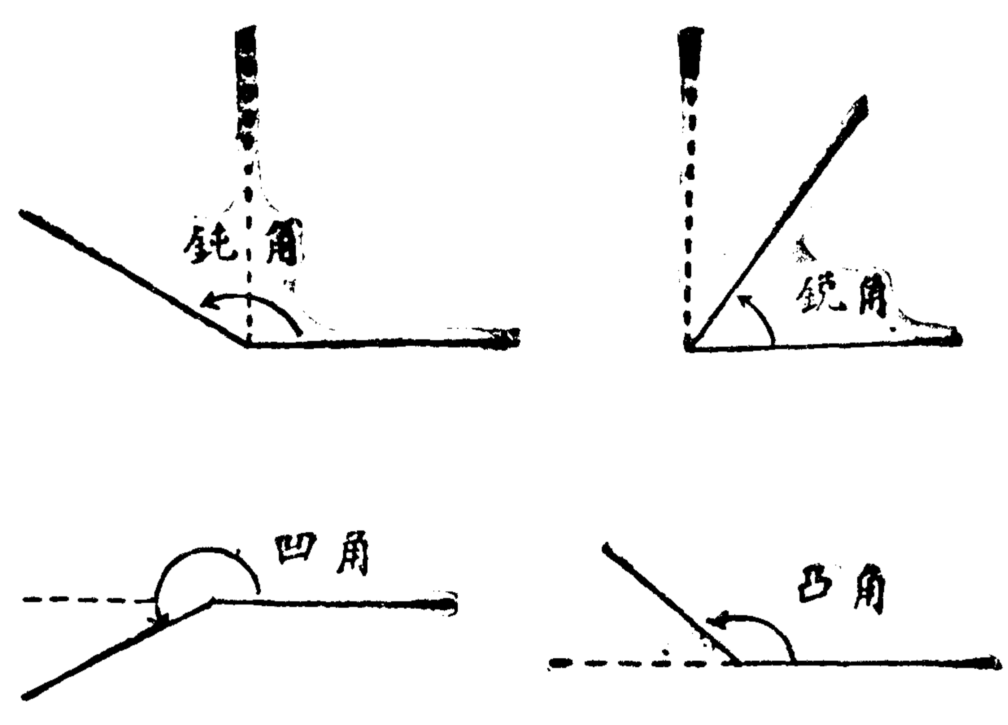
因一角之等分線有一無二,故一直線上一點之垂線有一無二.

從一點至一直線所引垂線之長爲此點與直線之距離. 例如上一圖中 CO 之長爲點 C 及直線 AB 之距離.

一直線上一點之垂線以此一點爲其足(Foot).

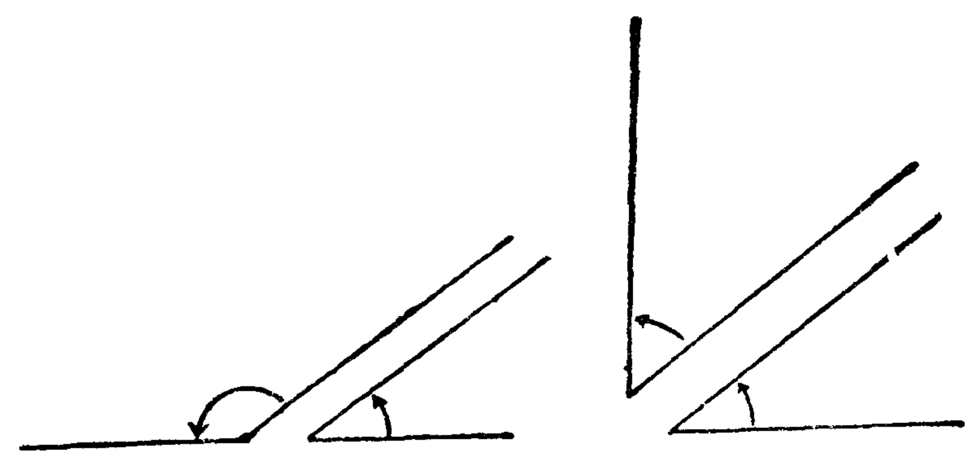
〔注意〕　角之單位,在實際應用爲度,分,及秒,已詳算術諸等數中;在理論上則恆以直角爲單位.

29. 藉直角及直線角而定之諸角.



以直角爲標準,凡小於直角之角曰銳角 (Acute Angle), 大於直角之角曰鈍角(Obtuse Angle). 以直線角爲標準,凡小於直線角之角曰凸角 (Convex Angle), 大於直線角之角曰凹角 (Reflex Angle). 銳角及鈍角皆爲凸角.

以上四種總名之曰斜角(Oblique Angle). 斜角之二邊互爲斜線(Oblique Lines). 其頂點爲斜線之足;或謂此二線爲斜交.

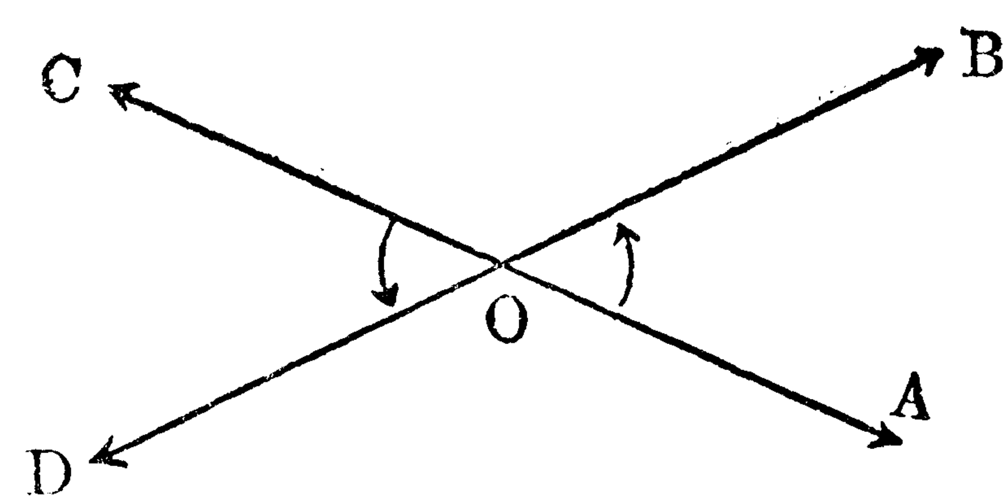


二角互爲補　　二角互爲餘

和等於一直角之二角互爲餘 (Complementary),或稱各角爲他角之餘角(Complement). 和等於直線角之二角互爲補(Supplementary),或謂各角爲他角之補角(Supplement).

由是,設有一角,從直角減之可得其餘角;從直線角減之可得其補角. 因凡直線角皆相等,故等角之補角相等.*

又因凡直角皆相等,故等角之餘角相等.*



30. 有特別位置之諸角

有二角其中一角之二邊各與他角二邊之延線相合,則此二角互爲對頂角(Vertical Angles).

如右圖,二角 AOB, COD 中, OC 合於 AO 之延線, OD 合於

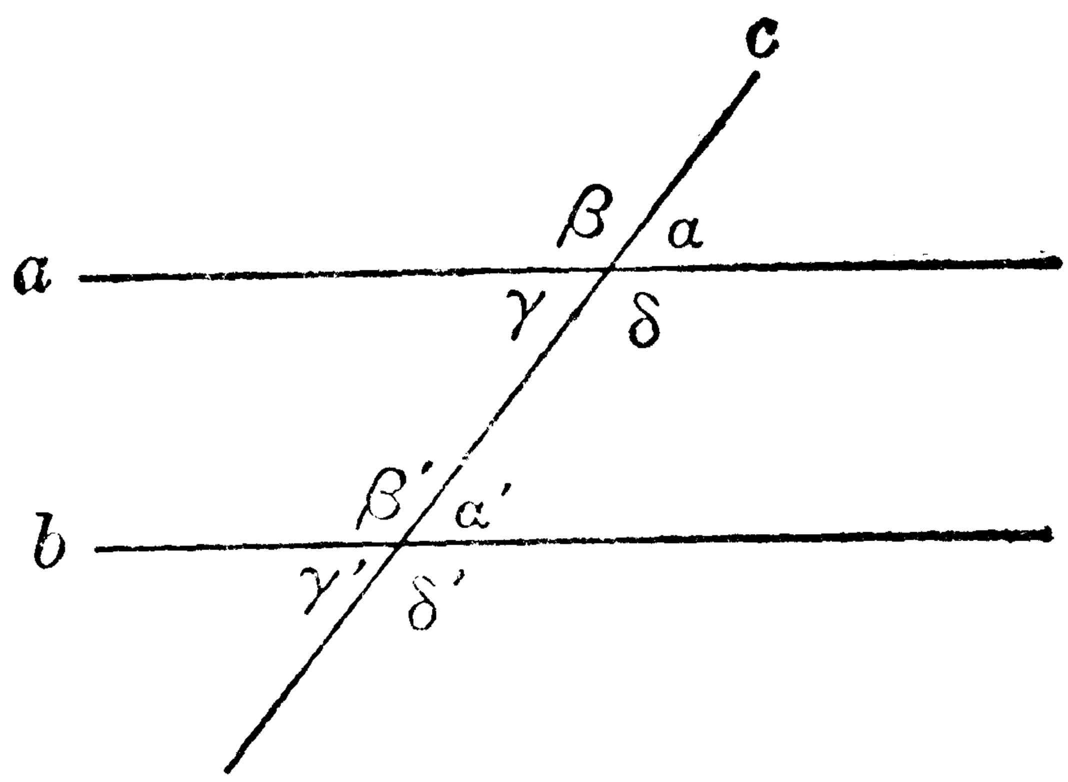
---

*嚴格言之,未嘗先學普徧公理,此等處似欠根據;然在此緒論中,本尚未達正式論證之地位,且普徧公理非幾何所專有,學者學此時在代數中早已學得;有此二因,故敢以此等定理提前作不正式之介紹,以免教師單講定義有寂寞無聊之感.

BO 之延線故此二角互爲對頂角.

AO, OC 成一直線,則 $\measuredangle AOB$ 爲 $\measuredangle BOC$ 之補角可知;倣此,知 $\measuredangle COD$ 爲 $\measuredangle BOC$ 之補角. 因等角之補角相等,故 $\measuredangle AOB = \measuredangle COD$. 於是對頂角相等.

一直線 c 截二直線 a, b, 得右圖之八角此中:



α, β, γ', δ' 曰外角 (Exterior Angles),

γ, δ, α', β' 曰内角 (Interior Angles),

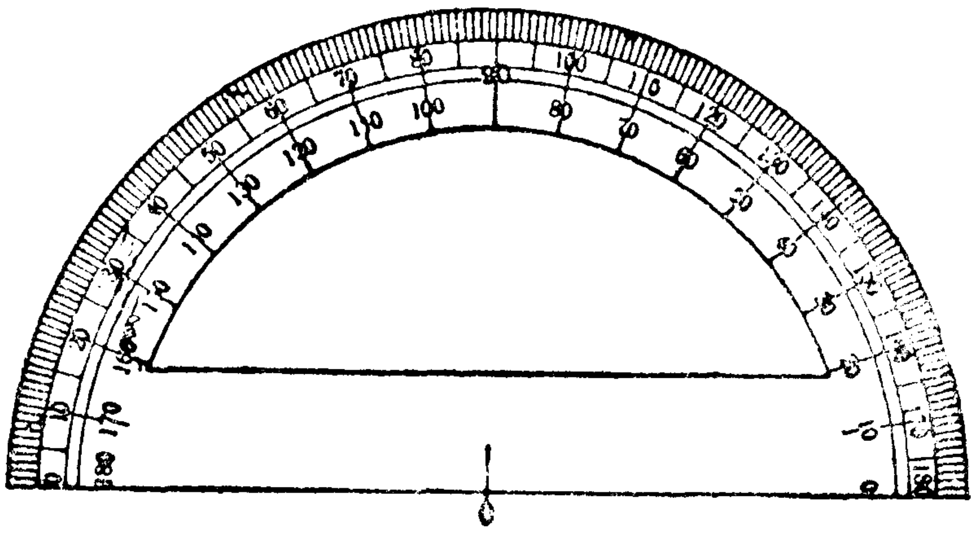
α 及 α', β 及 β', γ 及 γ', δ 及 δ' 互爲同位角 (Corresponding Angles),

α 及 γ', β 及 δ', γ 及 α', δ 及 β' 互爲錯角 (Alternate Angles).

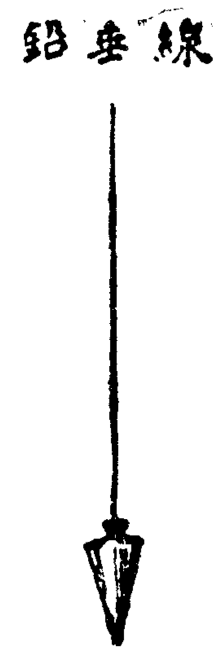
今在此圖中,設 $\measuredangle \alpha = \measuredangle \alpha'$,則從本款,知 $\measuredangle \alpha = \gamma$, $\measuredangle \alpha' = \gamma'$;從上款末,知 $\measuredangle \beta = \beta'$, 又從本款,知 $\measuredangle \beta = \delta$, $\measuredangle \beta' = \delta'$;故 $\measuredangle \alpha = \gamma = \alpha' = \gamma'$,* $\measuredangle \beta = \delta = \beta' = \delta$. 由是 $\measuredangle \gamma + \beta' = \alpha' + \delta \quad \alpha + \delta = st\measuredangle$. 故

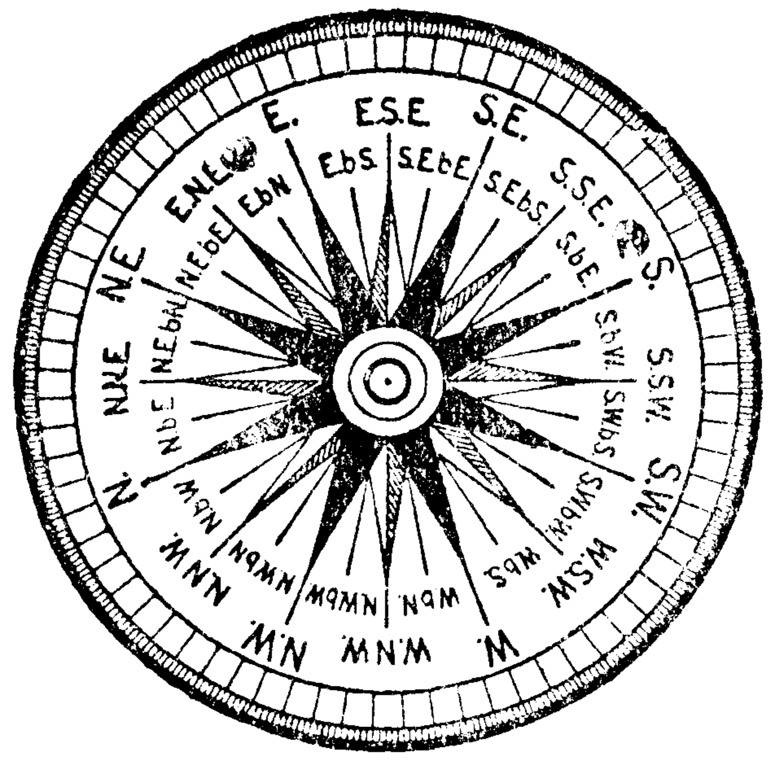
以一直線截他二直線若在所得八角中有一雙同位角相等,則四個銳角皆相等,四個鈍角皆相等,二雙同旁内角互爲補.

例 題 五

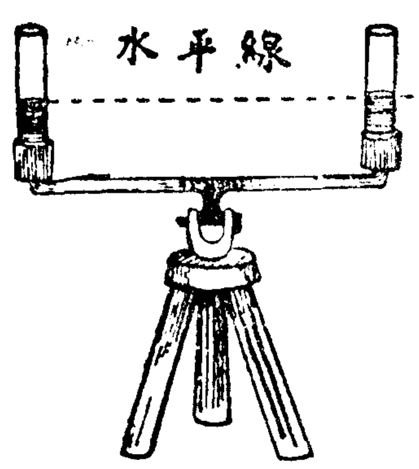


分角規

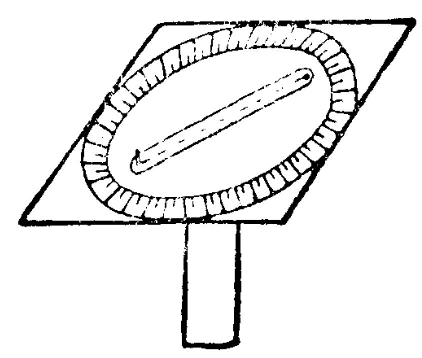




羅盤



水平儀



平面桌

羅盤之說明

(1) 共有頂點之二角能不爲隣角否? 共有一邊之二角能不爲隣角否? 共有頂點及一邊之二角能不爲隣角否?

(2) 摺一直邊紙成一直角. 於是可悟得一作垂線

---

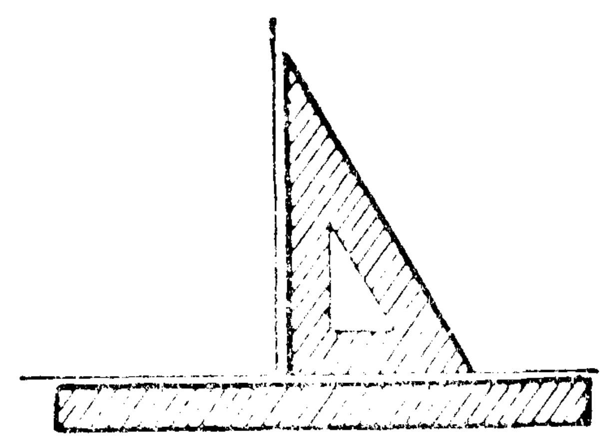
*作此例題,學者必須備之器具爲直線板,尺,紙,三角板,分角規,及鉛筆.

之便法.

(3)　在紙上任意畫一角,摺此紙以作此角之等分線.

(4)　在紙上任意畫一角,用分角規作其等分線.

(5)　用分角規量二種三角板之各角度.



(6)　用分角規作一直線上一點之垂線.

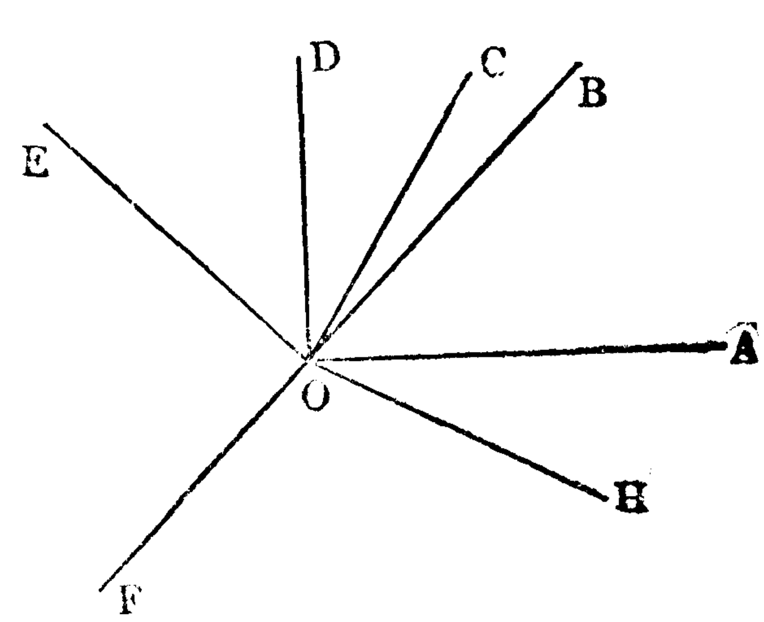
(7)　右圖示用三角板及直線板作一直線之垂線法.試用此法作一直線上一點之垂線.

(8)　從一直線外一點作此線之垂線當如何作之?(2),(6),及(7)三題中之法孰能適用於此題?　又孰爲最便?

(9)　水平線與鉛垂線是否垂直?　若何試之?

(10)　比較二角 α 及 β 之大小是否僅有 $\measuredangle\alpha>\beta$, $\measuredangle\alpha=\beta$, $\measuredangle\alpha<\beta$ 三種?

(11)　就右圖量下所舉之各角而舉其名稱: $\measuredangle AOB$, $\measuredangle AOD$, $\measuredangle AOE$, $\measuredangle AOF$, $\measuredangle BOD$, $\measuredangle BOE$, $\measuredangle BOF$, $\measuredangle EOF$.



(12)　在右圖中, OA 及 OD, OC 及 OD, OB 及 OE, OB 及 OF 有若何關係?

(13)　已知一角之大小,則其相屬角之大小,當若何求

之?

(14)　任意畫一銳角而作其二個隣餘角．用分角規量此所作二角以比較其大小．

(15)　任意畫一銳角而作其餘角及補角,且求此二角之差．

(16)　任意畫二個等角而作此各角之餘角及補角以比較其大小．

(17)　何種角比其補角小?　何種角比其補角大?　何種角等於其補角?

(18)　何種角比其相屬角小?　何種角比其相屬角大?何種角等於其相屬角?

(19)　一角與其餘角相等,則此角等於直角幾分之幾?

(20)　畫圖說明二個隣餘角之對頂角互爲餘,二個隣補角之對頂角互爲補．

(21)　設有$\measuredangle\alpha, \beta, \gamma$,而:——

(a) $\measuredangle\beta$爲$\measuredangle\alpha$之補角,$\measuredangle\gamma$爲$\measuredangle\beta$之補角,則$\measuredangle\alpha, \gamma$之大小若何?

(b) $\measuredangle\beta$爲$\measuredangle\alpha$之補角,$\measuredangle\gamma$爲$\measuredangle\beta$之餘角,則$\measuredangle\alpha, \gamma$之大小若何?

(c) $\measuredangle\beta$爲$\measuredangle\alpha$之餘角,$\measuredangle\gamma$爲$\measuredangle\beta$之餘角,則$\measuredangle\alpha, \gamma$之大小若何?

(*d*) $\measuredangle\beta$ 爲 $\measuredangle\alpha$ 之餘角, $\measuredangle\gamma$ 爲 $\measuredangle\beta$ 之補角,則 $\measuredangle\alpha,\gamma$ 之大小若何?

(*e*) $\measuredangle\beta$ 爲 $\measuredangle\alpha$ 之補角,而 $\measuredangle\gamma = \measuredangle\beta$, 則 $\measuredangle\alpha,\gamma$ 之關係若何?

(*f*) $\measuredangle\beta$ 爲 $\measuredangle\alpha$ 之補角,而 $\measuredangle\beta$ 之補角等於 $\measuredangle\gamma$ 之補角,則 $\measuredangle\alpha,\gamma$ 關係若何?

(*g*) $\measuredangle\beta$ 之補角比 $\measuredangle\alpha$ 之補角大, $\measuredangle\gamma$ 之補角又比 $\measuredangle\beta$ 之補角大,則 $\measuredangle\alpha\ \gamma$ 之大小若何?

凡此諸問須略思卽答不必藉助於實驗.

(22)　用代數中正負號表相反對之二種旋轉,則鈍角之餘角及凹角之補角均爲負角.

(*a*)用圖說明之.　(*b*)用代數式表明之.

(23)　二角互爲餘,則其補角合成 3 直角.

(*a*)用圖實驗之.　(*b*)用代數式明之.

(24)　二角互爲補,則各角之餘角有何關係? 又各角之補角有何關係?

(25)　畫二個平行線,任意以一直線截之,用分角規量其各雙同位角是否相等? 量其各雙錯角是否相等? 量其各雙同旁內角是否互爲補?

(26)　任意畫一角,別畫一直線而在其上取　點,欲再畫一半射線與前線成一角,令其大小與已畫之角相等而頂點在所取之一點. 用分角規及直線板畫之.

(27)　在前題中,於直線上取三點作頂點,過此一一畫半射線,令與前一直線所成之角皆等於所已畫之一角,由是得六個半射線．以例題三中(14)題之法驗此六個半射線三個一羣成二羣平行線．

(28)　任意畫一角．用分角規作其三倍之角,再等分爲四分．

(29)　一直線垂直於第二直線,則第二直線是否亦垂直於第一直線?

(30)　用分角規作以下各角:

$\frac{1}{2}R\measuredangle$,　$\frac{1}{3}R\measuredangle$,　$\frac{1}{4}R\measuredangle$,　$\frac{1}{5}R\measuredangle$,　$\frac{1}{6}R\measuredangle$,　$\frac{1}{8}R\measuredangle$,

$\frac{1}{10}R\measuredangle$,　$\frac{1}{12}R\measuredangle$,　$\frac{1}{15}R\measuredangle$,　$\frac{1}{18}R\measuredangle$.

作其和角而量之．再實行計算求和．二者之結果密合否?　當以何法爲可恃?

(31)　用分角規作以下各角之補角:

120°35,′　130°30,′　140°43,′　150°49,′　160°52,′　169°7,′　173°17.′

加之量其和角．再實行計算求其結果．二者所得能否密合?　當以何法爲可恃?

(32)　羅盤面上每相鄰二分線間之角度若何?

(33)　用度數表以下各二個方向間之差:

北及東,　　北及西,　　北及南,

南及南西，　北及東南東，　西南西及南東，

南及北西，　西及北東　北西及南東，

北北東及東南東，　北西及南西，　南南東及西北西，

南西微南及南西微西，　北微西及南東微東，

西微北及南，　北西微西及南微東

(34)　用分角規作下諸方向角：

北 45° 西，　南 45° 東，　北 $67\frac{1}{2}$° 西，　南 $22\frac{1}{2}$° 西，　南 $11\frac{1}{4}$° 東

北 90° 東，　南 $67\frac{1}{2}$° 東，　南 $56\frac{1}{4}$° 西.

〔註〕北 45° 西，謂從正北之方向往東轉 45° 也.　餘倣此.

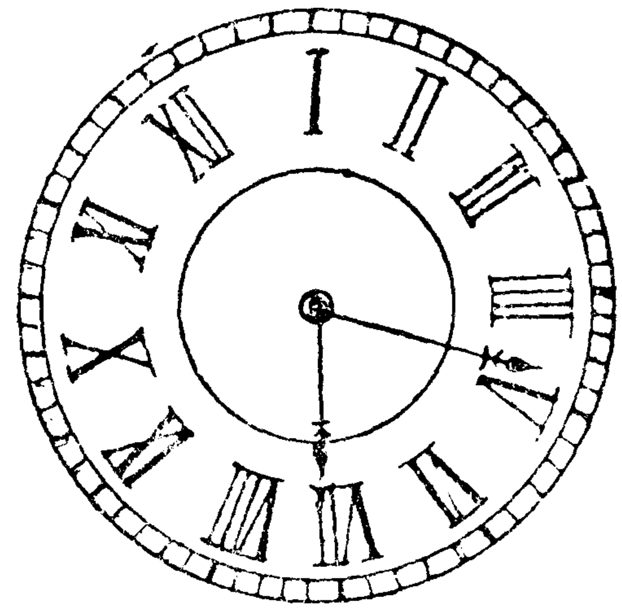
(35)　一船初向東行，五里後，向西北西行七里，又向南東微東行四里，又向北北東行八里.　試取一公分表一里繪其航路.

(35)　一人用一平面桌及皮帶尺測量一地面.　從第一隅測第二隅得其方向爲北35°東，其間之距離爲 40 丈.　從第二隅至第三隅，方向爲北 75°東，距離爲 85 丈　第三隅至第四隅，方向爲南 35°西，距離爲 40 丈.　第四隅至第一隅方向爲南 75°西，距離爲 85 丈.　試取營造尺上一分作一丈，用分角規及尺繪此地面.

(36)　在計時鐘中，

(a) 每 1 時，$\frac{1}{2}$ 時，$\frac{1}{4}$ 時，$\frac{3}{4}$ 時間，分針轉過幾度？

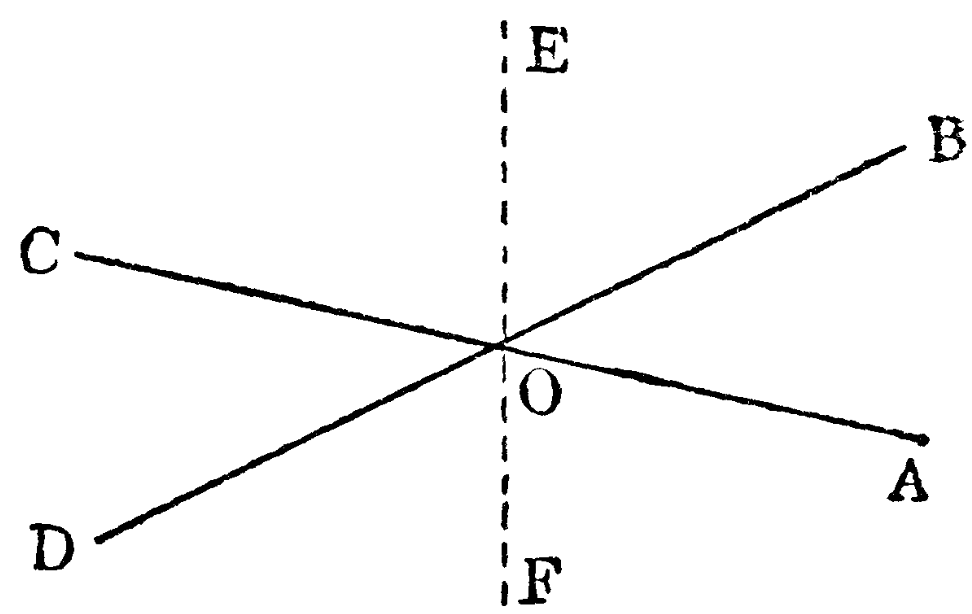
(b) 每 30 分，20 分，25 分，45 分間，分針轉過幾度？



(c)分針轉過 270°, 45°, 18°, 須行幾分鐘?

(37) 設$\measuredangle\alpha=57°38'$, $\measuredangle\beta=29°42'$, $\measuredangle\gamma=100°47'$, 用分角規作以下諸角,且實行計算之:

$\measuredangle\alpha+\beta$, $\measuredangle\beta+\gamma$, $\measuredangle\alpha+\beta+\gamma$, $\measuredangle\alpha-\beta$, $\measuredangle\gamma-\beta$, $\measuredangle(\alpha+\gamma)-\beta$, $\measuredangle\gamma-(\beta+\alpha)$.



(38) $\measuredangle AOB$, COD, 為二個對頂角,作$\measuredangle BOC$之等分線OE, $\measuredangle AOD$之等分線OF.(a)證$\measuredangle BOE=DOF$; (b)證以OE, OF作二邊之二個相屬角相等; (c)證$\measuredangle EOF=st\angle$; ($d$)證$OE$, OF合成一直線. 先用實量,次根據上所言之理述其理由.

(39) 以一紙視作一平面,繪上圖於紙上,就EF裁開得二個半平面. 取此中一個半平面疊置於又一個半平面上則無論正疊或反疊皆能使$\measuredangle AOB$, COD重合. 試為之. 此事實示吾人證對頂角相等之又一法.

(40) 二個隣補角之等分線互相垂直.

(a)量而實驗之; (b)說明其理由.

(41) 二個隣餘角之等分線夾成半直角.

(a)量而實驗之;　　(b)說明其理由.

(42)　OC 爲 $\measuredangle AOB$ 之等分線, OM 爲過頂 O 之任意半射線. 若 OM 在 $\measuredangle AOB$ 內,則 $\measuredangle AOC=COB=\frac{1}{2}(AOM+MOB)$.

(a)量而實驗之;　　(b)說明其理由.

(43)　在前題之圖中,若 $\measuredangle AOM$ 比 $\measuredangle MOB$ 大,則

$$\measuredangle AOM>\measuredangle AOC>\measuredangle MOB.$$

(a)量而實驗之;　　(b)說明其理由.

(44)　在 (42) 題之圖中. $\measuredangle COM=\frac{1}{2}(\measuredangle AOM-\measuredangle MOB)$.

(a)量而實驗之;　　(b)說明其理由.

(45)　在前三題中, OM 若在 $\measuredangle AOB$ 之相屬角內,則三個結果化作若何? 但旋轉方向相反之角用 (+), (−) 號區別.

以下各題用代數一次方程式解之:

(46)　一角之補角等於其餘角之三倍.求此角之度數.

(47)　有一角其補角之二倍等於其餘角之五倍.求此角之度數.

(48)　一角之相屬角等於其餘角之七倍.求此角之度數.

(49)　有一角其餘角之補角等於其補角之三倍.求此角之度數.

(50)　二直線以第三直線截之,已知其一雙同位角相

等. 若其同旁二內角中大角比小角之三倍多20度,則此大小二角之度數各若何? 又其餘六角之度數各若何?

(51) 二直線相交所成二雙對頂角中大者比小者多40度.求各角之度數.

(52) 二角和之補角等於其餘角之三倍.求此二角.

(53) 二點鐘以後計時鐘上長短兩針所行路之和等於半點鐘中長針所行之路,此時二針所夾之角爲幾度?

(54) 有二角,其第一角補角之三倍等於第二角之二倍;而第二角餘角之四倍比第一角大30,° 求此二角.

(55) 一人詢問時刻,第二人答曰,今在一點鐘後而長針與XII之距離爲短針離XII之四倍. 求此時刻,且求此時二針所夾角之度數.

第六章 封閉圖

31. 封閉圖.

封閉線所圍平面之部分曰封閉圖(Closed Figure). 圖之界僅爲直線或線分者曰直線圖 (Rectilinear Figure), 界爲曲線者曰曲線圖 (Curved Figure). 所圍平面部分爲圖之面積 (Area).

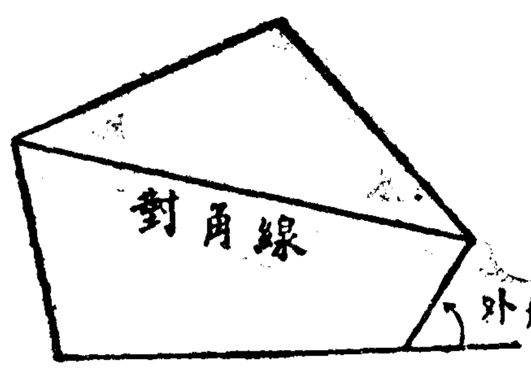
---

*其理由見本欵注意.

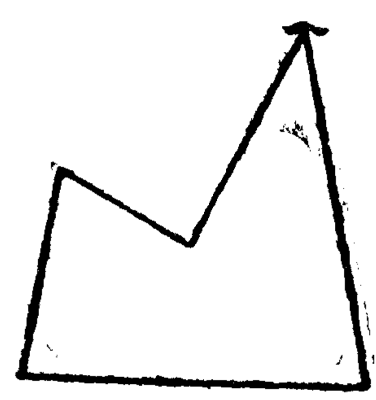
32. 直線圖. 單多角形.

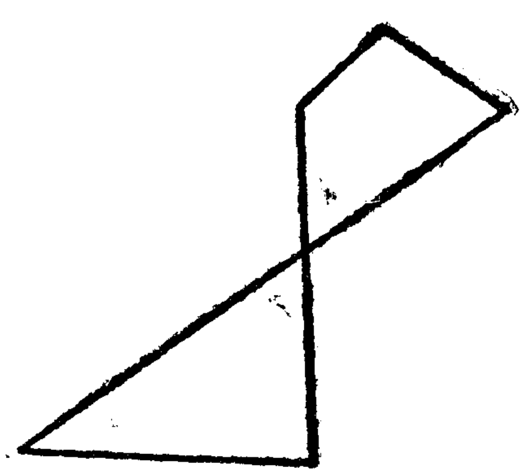
封閉折線所圍之直線圖曰單多角形 (Simple Polygon), 略曰多角形亦可名爲多邊形.* 爲界之諸線分爲多角形之邊 (Sides). 諸邊所成之角爲多角形之角 (Angles). 諸角之頂點爲形之頂點(Vertices). 聯不相隣二頂點之線分爲形之對角線 (Diagonal). 諸邊之和爲形之周 (Perimeter) 一邊延線與隣邊所成之角爲形之外角 (Exterior Angle),

多角形各邊延線皆在形外者曰凸多角形 (Convex Polygon), 延線有入形內者曰凹多角形 (Concave Polygon), 周自交者曰交截多角形 (Cross Polygon). 本書爲初學便利起見所論之多角形皆爲凸多角形.



凸多角形


凹多角形


交截多角形

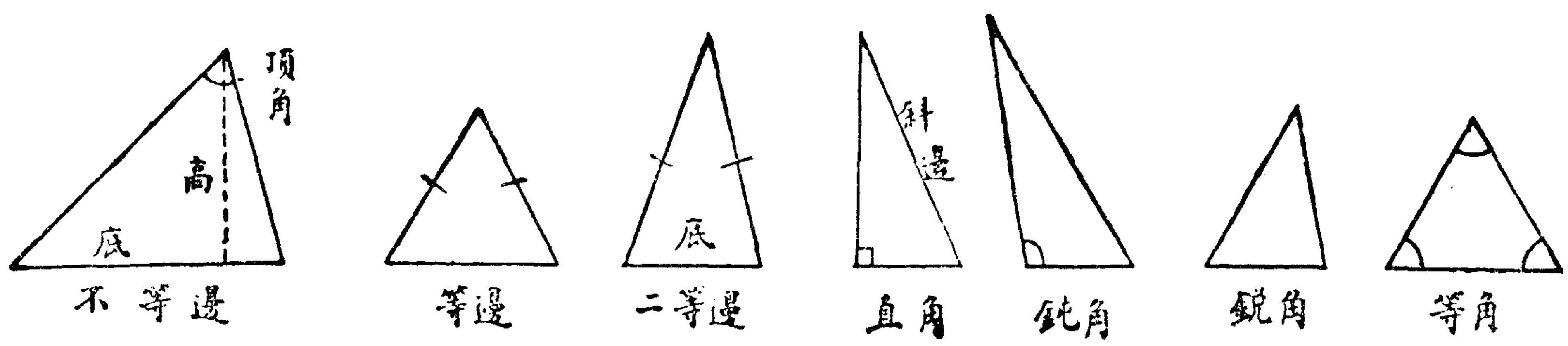
多角形之邊數爲 3,4,5,6,7,8,9,10,····,12,····,15,····, n 者各名之爲三角形 (Triangle), 四角形(Quadrilateral) 五角形 (Pentagon), 六角形 (Hexagon), 七角形 (Heptagon), 八角形 (Octagon), 九角形(Nonagon), 十角形(Decagon), ····, 十二角形 (Dodecagon), ····, 十五角形 (Pentedecagon), ····, n 角形(n-*gon*).

〔注意〕 單多角形中所有頂點之數與邊數相同.

33. 三邊形或三角形.

三角形,爲有三邊之多角形. 其三邊皆不等者曰不等邊三角形(Scalene Triangle),有二邊相等者曰二等邊三角形(Isosceles Triangle),三邊皆等者曰等邊三角形(Equilateral Triangle). 若僅曰三邊形或三角形,必指不等邊者而言.

次就角觀之,形之三角中有一角爲直角者曰直角三角形(Right Triangle),有一角爲鈍角者曰鈍角三角形(Obtuse Triangle),三角皆爲銳角者曰銳角三角形(Acute Triangle). 又三角皆等者曰等角三角形 (Equiangular Triangle)、



不等邊三角形,可以任意一邊爲其底 (Base), 對底之角爲其頂角 (Vertex Angle), 從頂角頂點至底之距離 (§28) 爲其高 (Altitude). 二等邊三角形則恆以他邊不等之一邊爲其底. 直角三角形若以直角二邊之一爲底,則又一邊卽爲高.

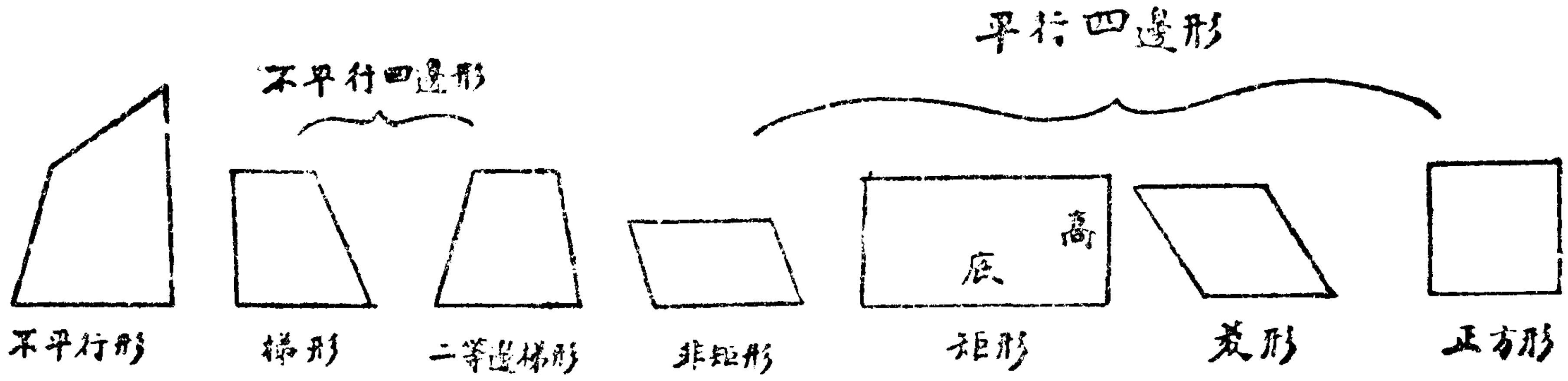
直角三角形中對直角之一邊特名之曰斜邊 (Hypotenuse). 三角形之略號爲△.

34. 四角形.

多角形之有四邊者爲四角形. 四角形之四邊兩兩皆不平行者曰不平行四邊形(Trapezium), 僅有一雙對邊平行者曰梯形 (Trapezoid), 二雙對邊皆平行者曰平行四邊形 (Parallelogram). 梯形之不平行二邊相等者曰二等邊梯形 (Isosceles Trapezoid). 平行四邊形之諸角皆爲斜角者曰非矩形 (Rhomboid), 諸角皆爲直角者曰矩形 (Rectangle). 非矩形之諸邊皆等者曰菱形 (Rhombus). 矩形之諸邊皆等者曰正方形,或曰平方(Square).

〔注意〕　菱形之諸角皆爲直角者亦爲正方形.

平行四邊形之略號爲▱,矩形之略號爲▭,正方形之略號爲□.

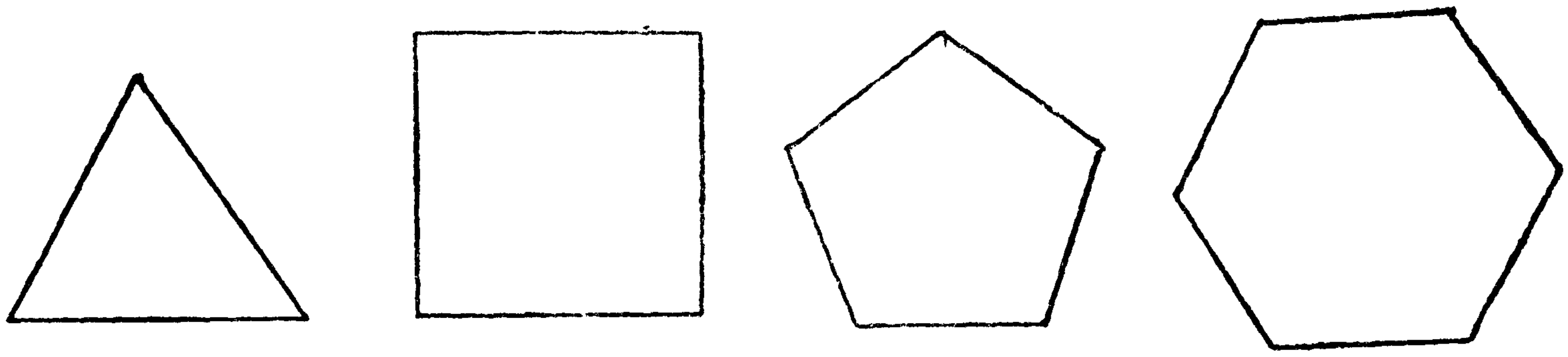


以矩形之一邊爲底,則其隣邊爲高.

35. 特種多角形.

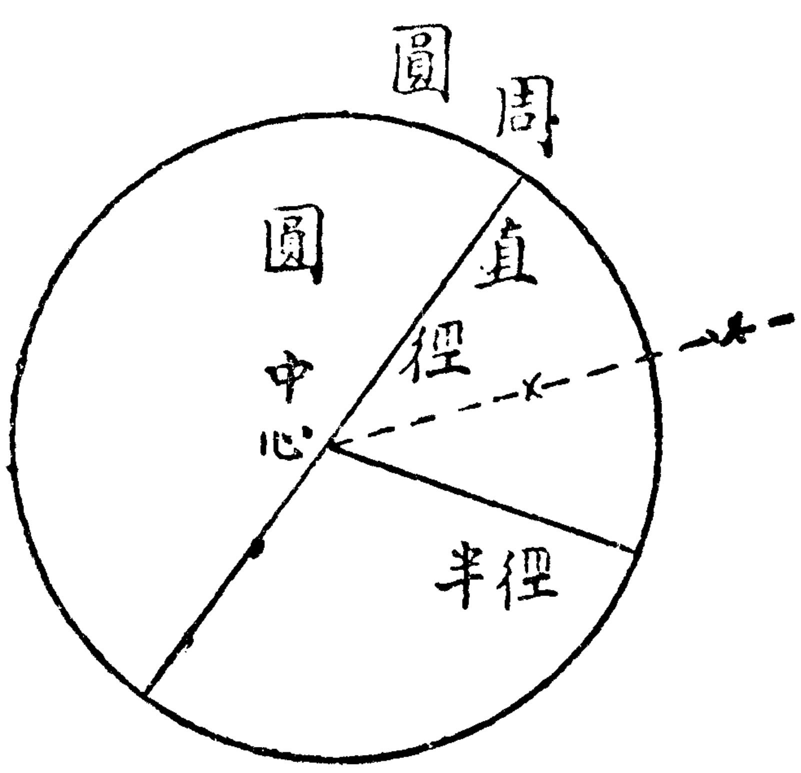
多角形之諸邊悉相等者爲等邊多角形(Equilateral Polygon), 諸角悉相等者爲等角多角形(Equiangular Polygon), 諸邊既悉等諸角又悉等者爲正多角形 (Regular Polygon).

等邊多角形不必等角,視菱形可知;等角多角形不必等邊,視矩形可知;惟正多角形則既等邊,又等角



36. 曲線圖. 圓.

初等平面幾何學中僅有一種曲線圖,是曰圓.



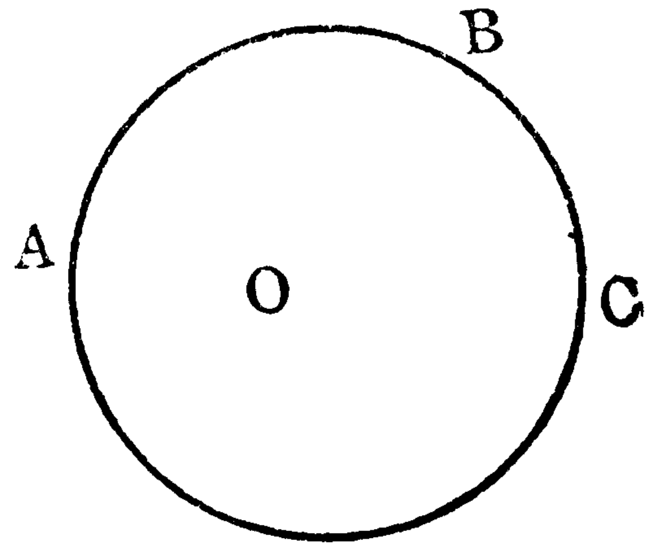
一線分繞其一端旋轉一周,其所經過平面之部分為圓 (Circle), 此線分在旋轉中之任意一位置為圓之半徑 (Radius), 其固定之一端為圓之中心 (Center), 他端所經之路為圓之周, (Circumference), 略曰圓周.

圓為其周所圍之平面部分,故亦為封閉圖.

圓周為曲線.圓指面積;惟今人慣例,二者恆混稱之為圓.

圓之略號為⊙. 記圓之法,記其周上之三點,如⊙ ABC; 或記其中心,如⊙O.

聯圓周上任意點至中心所引之線分必合於動線分之



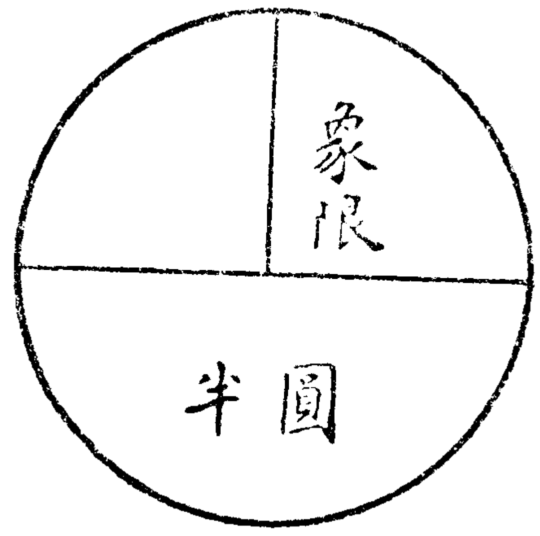
一位置而爲半徑,故圓周上各點與中心之距離等於半徑. 又一圓之諸半徑不過爲同一動線分之相異位置,故同圓之半徑皆相等.

一點不在圓周上則此點與圓之中心定一半直線(§13),此半直線必與圓周相會而得一半徑(因半直線之一端爲圓之中心在圓內,而他端爲無窮遠點必在圓外,故必貫過圓周). 於是從 §23, 所設點在此半徑之上則其與中心之距離必小於半徑;在半徑之延線上,則其與中心之距離必大於半徑:卽圓內各點與中心距離小於半徑,圓外各點與中心距離大於半徑.

延長半徑至會圓周而止,所得全線分爲直徑(Diameter). 卽一線分過圓心而兩端在圓周上者爲直徑. 直徑顯然爲二個半徑之和 (§24), 故直徑爲半徑之倍. 因一圓之半徑皆相等,故同圓之直徑皆相等. 直徑有時簡稱曰徑.

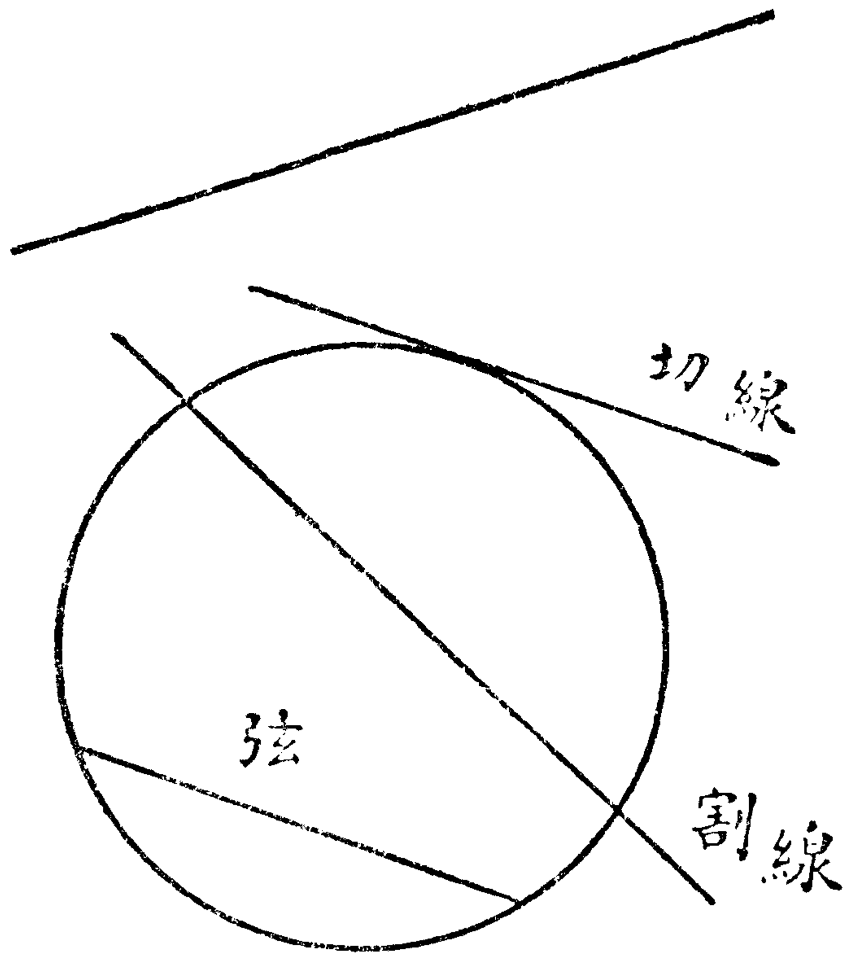
以直徑爲摺痕而摺疊圓所處之平面,則此直徑所分圓之二部分可全相合(二個相合動線分旋轉所經之路). 故一直徑所分圓之二部分各名之曰半圓(Semicircle). 倣此可知互相垂直二直徑可分一圓爲四等分,名其各分曰象限 (Quadrant).

圓周之一部分曰弧(Arc). 半圓之弧曰半圓周(Semicircumference). 弧之比半圓周小者曰劣弧(Minor Arc), 比半圓周大者曰優弧*(Major Arc). 僅言弧者恆指劣弧而言.



弧之略號爲⌒

37. 圓與直線之關係位置.



一直線或全在一圓之外, 或與圓共有一點,或與圓共有二點. 與圓共有一點之直線曰圓之切線(Tangent), 其共有之點曰切點(Point of Contact), 共有二點之直線曰圓之割線(Secant). 割線在圓內之部分,卽兩端在圓周上之線分,爲圓之弦(Chord).

38. 二圓及其關係位置.

半徑相等之二圓,可視作一圓之在二個相異位置者;若疊置之,必能相合;故名等半徑之二圓爲等圓(Equal Circles). 因同圓之半徑皆相等,故等圓之半徑皆相等. 推之,可知

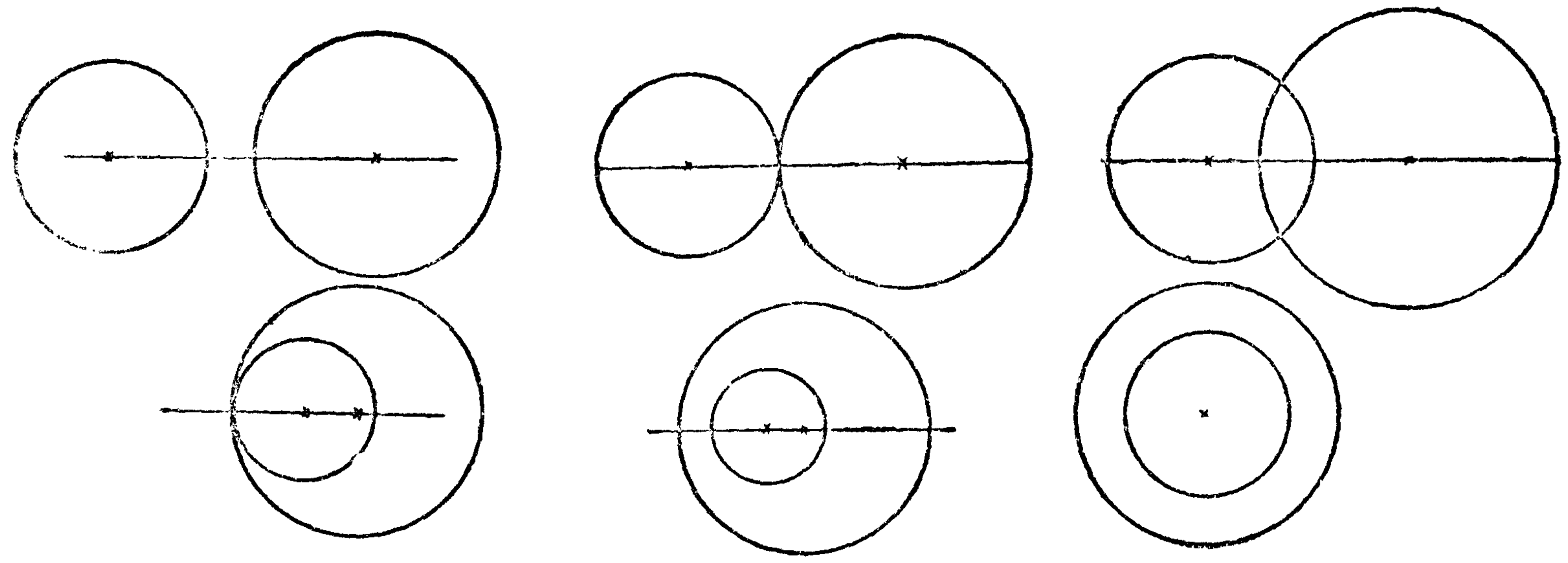
*同圓或等圓上之二弧可做照§§23, 26之法比較其大小.

等圓之直徑皆相等. 又可知等半徑之二圓爲合同圖.*

任意二圓相關之位置有六種:(一)一圓全在他圓外;(二)一圓在他圓外而會於一點,是曰外切 (to touch externally);(三)二圓會於二點,是曰相交(to intersect);(四)一圓在他圓內而會於一點,是曰內切(to touch internally);(五)一圓全在他圓之內;(六)二圓之中心相合是曰共心(Concentric).

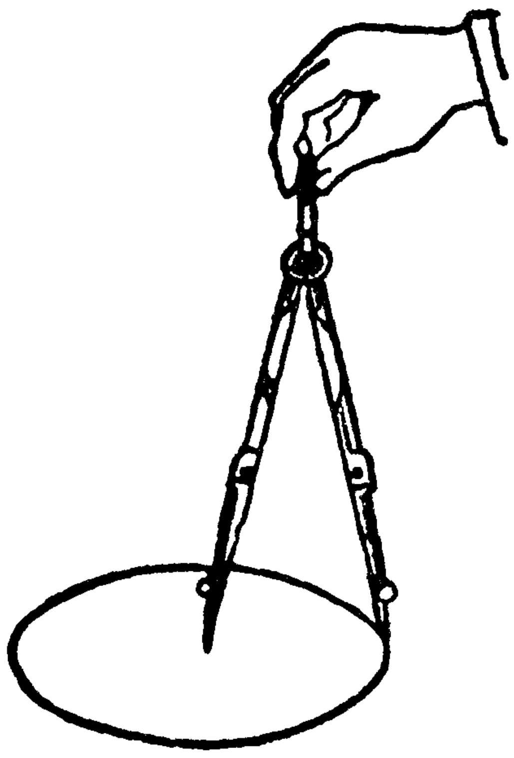
相切二圓相會之點曰切點(Point of Contact or Point of Tangency).

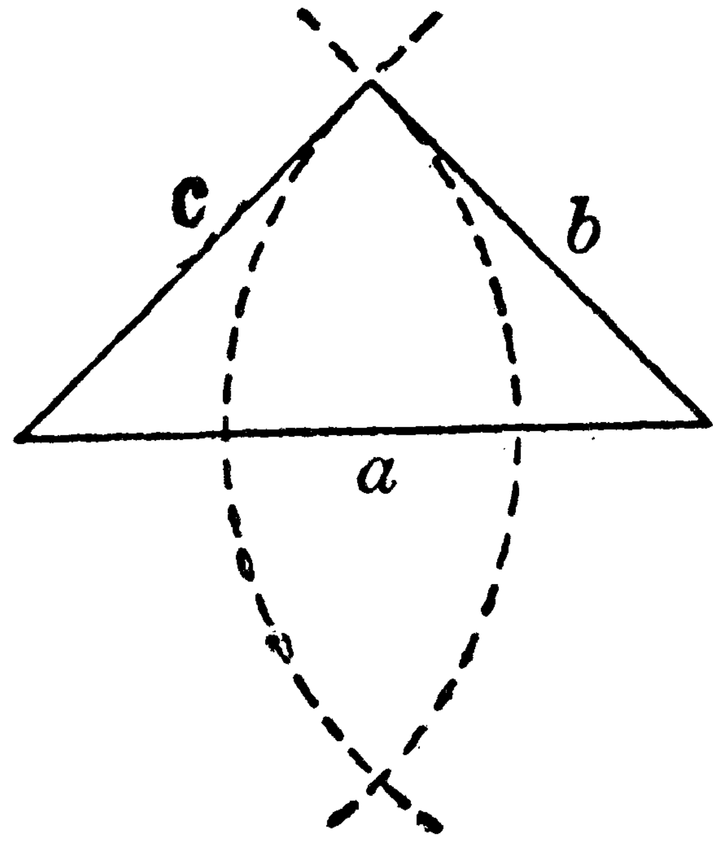
聯不共心二圓中心之直線曰中心線(Center-line), 二中心間之線分曰中心線分(Center-segment).



39. 圓之作圖.

幾何學中許用規筆畫圓. 法先開其兩足,令其二足尖間之距離,等於所設半徑,以一足尖固定於所設中心而旋轉之,則他足尖即畫一圓周. 故以所設點爲中心,所設線分爲半徑,恆能作一圓.





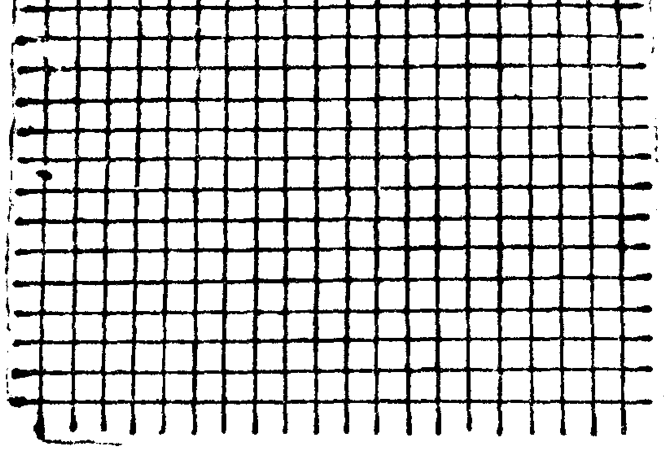
由是直線圖中已知其中若干線分之長者恆可用規筆作出其圖. 今舉最簡之一例:

例　設一個三角形三邊之長 a, b, c, 作此形.

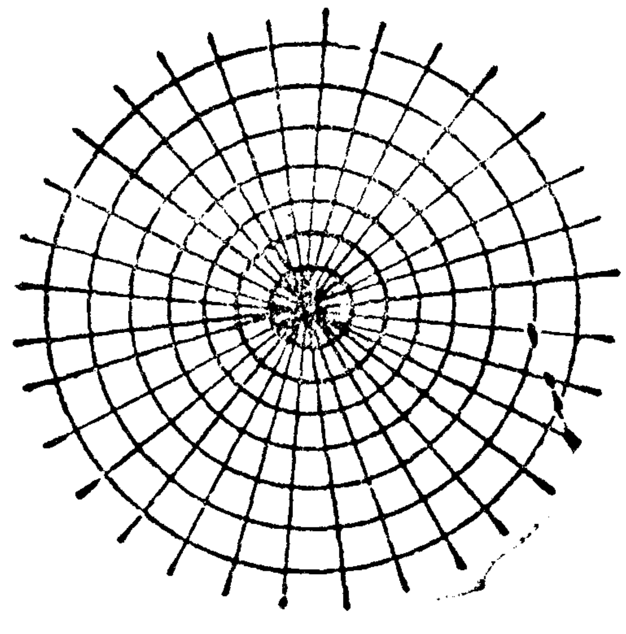
法取 a 之一端爲中心,以 b 爲半徑畫圓;更取 a 之他端爲中心,以 c 爲半徑畫圓;

聯二圓之交點至 a 之兩端,即得所求之三角形.

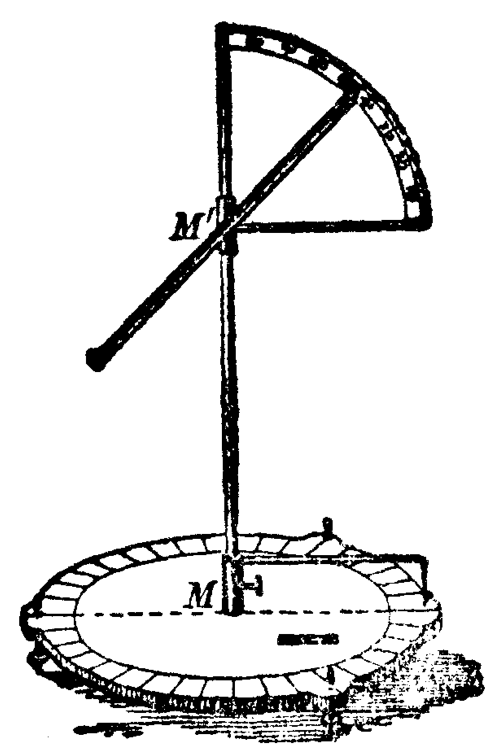
例　題　六



坐標紙

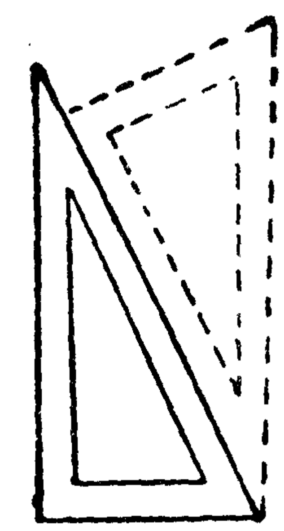


極坐標紙

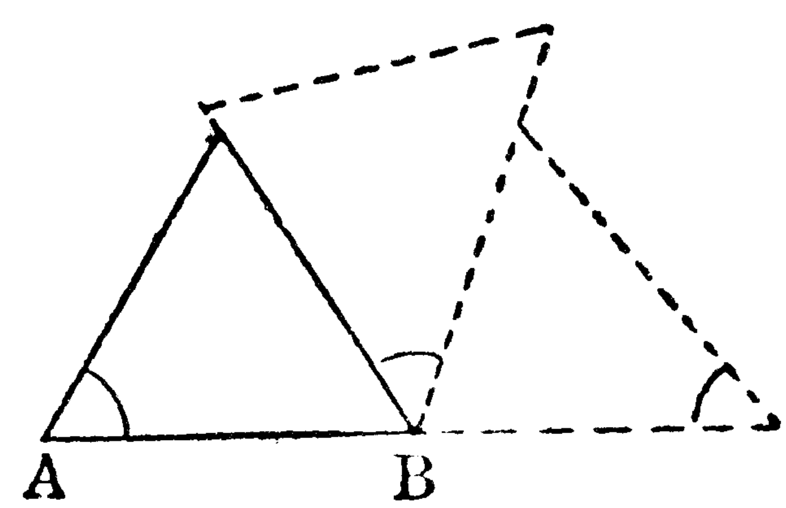


以下各題由實驗以推想所得圖之性質:

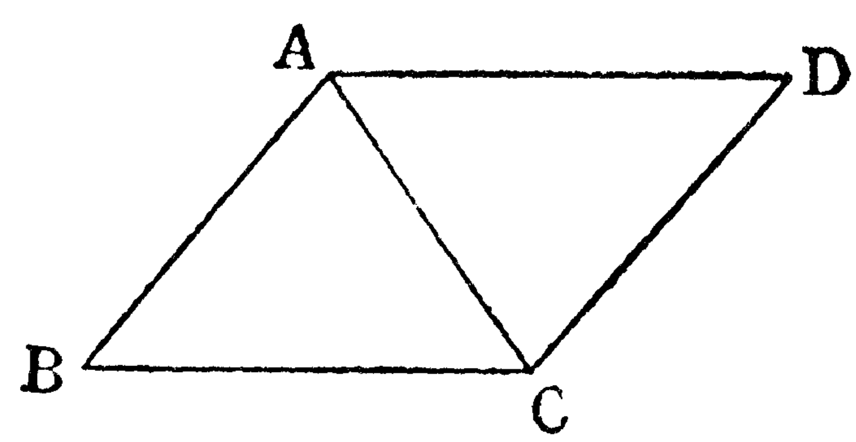
(1)　如右圖,用二塊相同之三角板顛倒置之,量 $\measuredangle ABC$ 是否爲一直角。如爲直角,則一個直角三角形之二銳角間有何關係?



(2)　以硬紙切成三塊相同之三角板,如右圖顛倒置之,以驗 $\measuredangle ABC$ 是否爲一直線角。若爲直線角,則一個三角形之三個角有何關係? 又一外角與其餘二角有何關係?



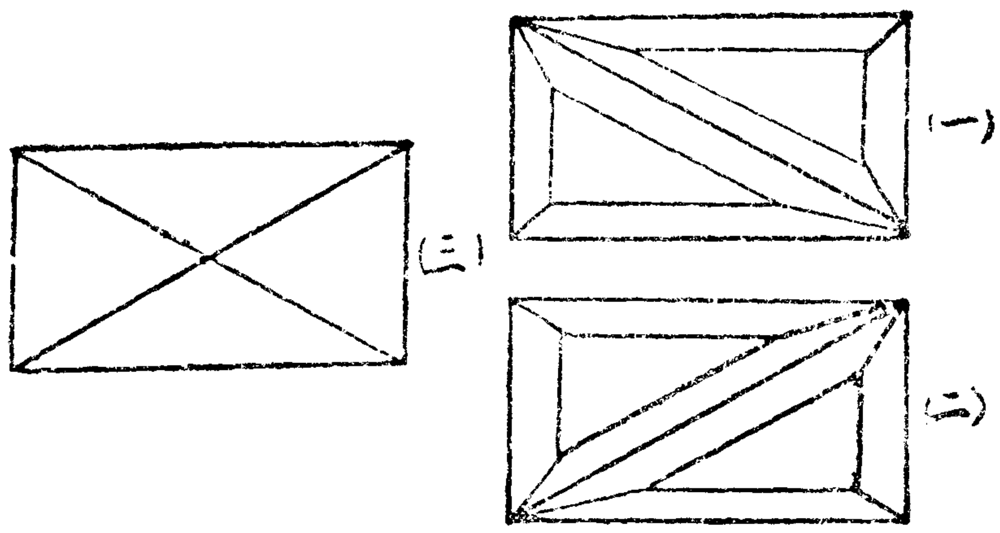
(3)　二板硬紙相同三角板一正一反如右圖置之,沿其邊畫直線錄下。用例題三 (14) 題之法,驗其能否 $AB//DC$, $AD//BC$。如能如此,則 $ABCD$ 爲何種直線圖? 又 $\measuredangle A$ 與 $\measuredangle C$, $\measuredangle A$ 與 $\measuredangle D$ 間有何關係? AB 與 DC, AD 與 BC 間有何關係? 此外尙有何種性質? 一一述之。



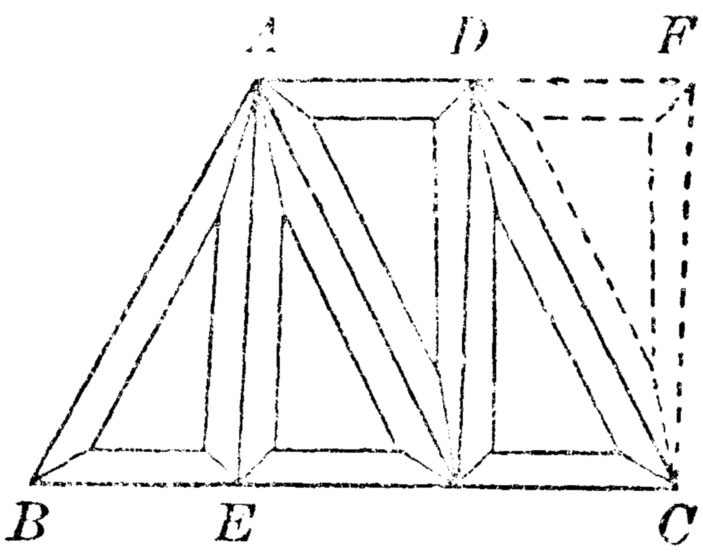
---

*學者作此例題,須備畫圖各器具及二種坐標紙。

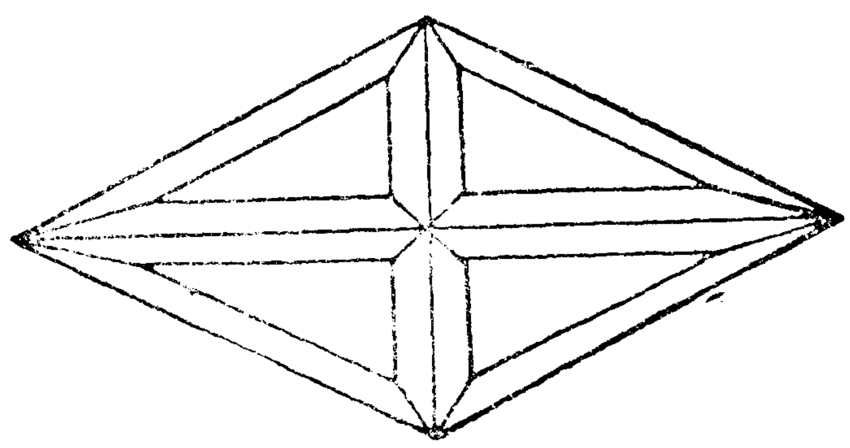
(4) 以二塊相同之直角三角板如右(一)合之,再如右(二)合之. 所得二圖是否皆與(三)同? 量所得圖之各角而呼其名. 此圖各角間有何關係? 二雙對邊間有何關係? 二個對角線間有何關係? 一一述之.



(5) 四塊相同之直角三角板如右圖合成一圖 $ABCD$. 試驗 AD 及 BC 之關係,比較 AB 及 DC 之大小而呼之. 若以左邊一塊三角板翻身置於右邊,成一新圖 $AECF$, 則此新圖之名爲何? 新舊二圖中 AD, BC 與 AF, EC 間有何關係? 二圖之大小又有何關係? 試以普通言語述之.



(6) 以四塊相同之直角三角板合成右圖. 量其諸邊而舉其名. 此圖中二雙對角之關係若何? 二個對角線之關係若何?



<u>以下各題用公尺及分角規作圖:</u>

(7) 等分一周角爲四等分,五等分,六等分.從角頂起

在各分角線上截取 3 公分之長作點,順次以線分聯其兩兩相鄰之點,則所得之圖各為何種名稱?

(8)　作一三角形,令其一邊長 5 公分,此邊兩端之角為 50° 及 60,° 並述其作法.

(9)　任意設一邊作正三角形. 但正三角形之各角為 60.°

(10)　任意設一邊,畫正方形.

(11)　已知正五角形之各角為 108.° 任意設一邊,畫正五角形.

(12)　已知正六角形之各角為 120.° 任意設一邊,畫正六角形.

(13)　一樹直立於地上. 一人離其根十丈用象限儀測之得其頂之仰角 為 50.° 以一公分表一丈而畫之於紙上以量此樹之高能約略知其眞高否?

(14)　一禮拜堂屋頂之尖塔不知其高. 一人用象限儀離此塔底十丈之遠測之,得仰角* 為 30.° 取一公分表一丈畫之於紙上而量所畫塔之高以推測其眞高.

(15)　隔河一浮圖不知其高. 一人用象限儀在河之此岸測之得仰角 60 度,退後二十丈再測之得仰角 30.° 如

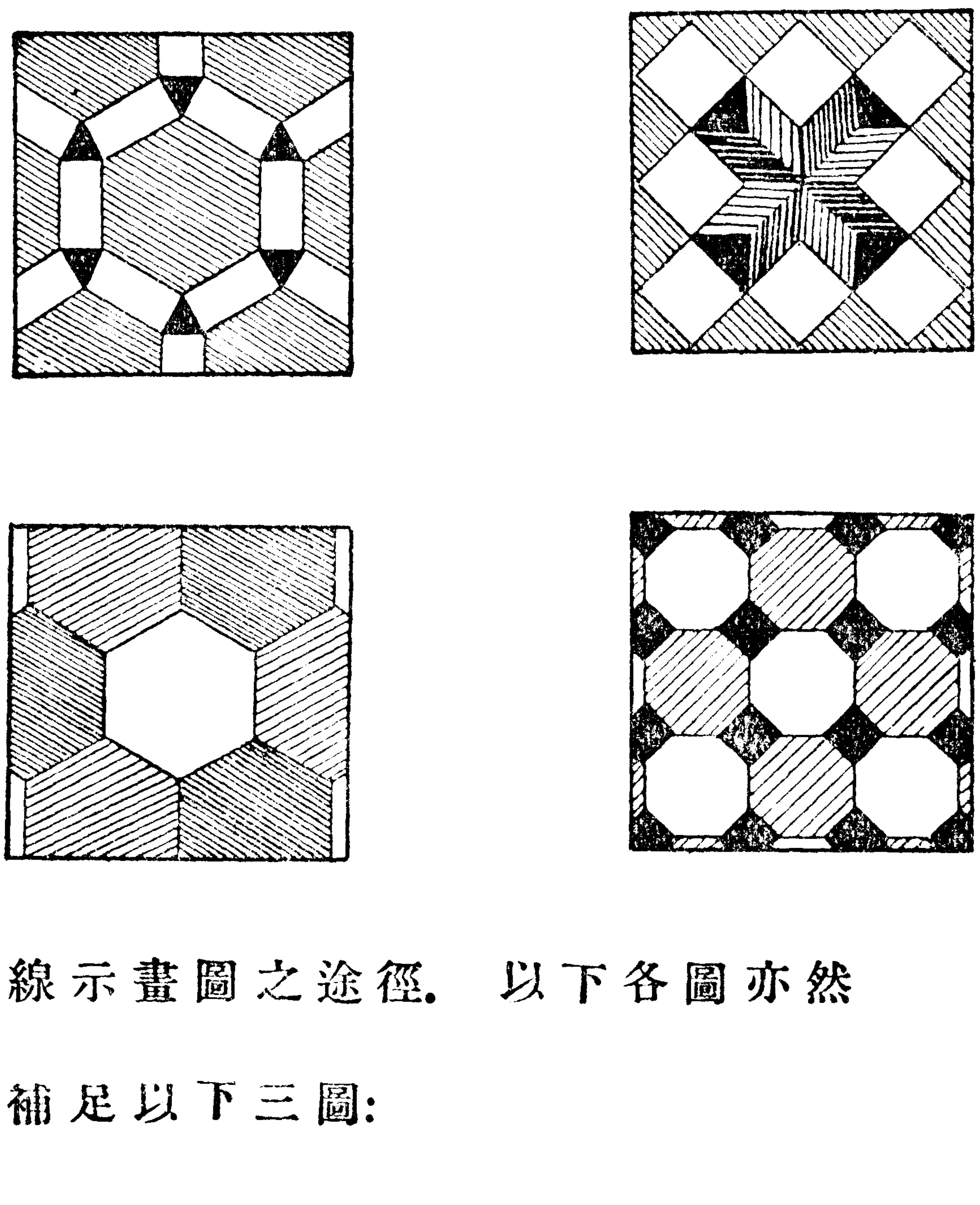
---

*仰角,謂仰望視線與水平線所成之角.

前以測得之事繪於紙上而量此紙上浮圖之高以推測其眞高.

以下各題,藉坐標紙之助畫美術上之圖:

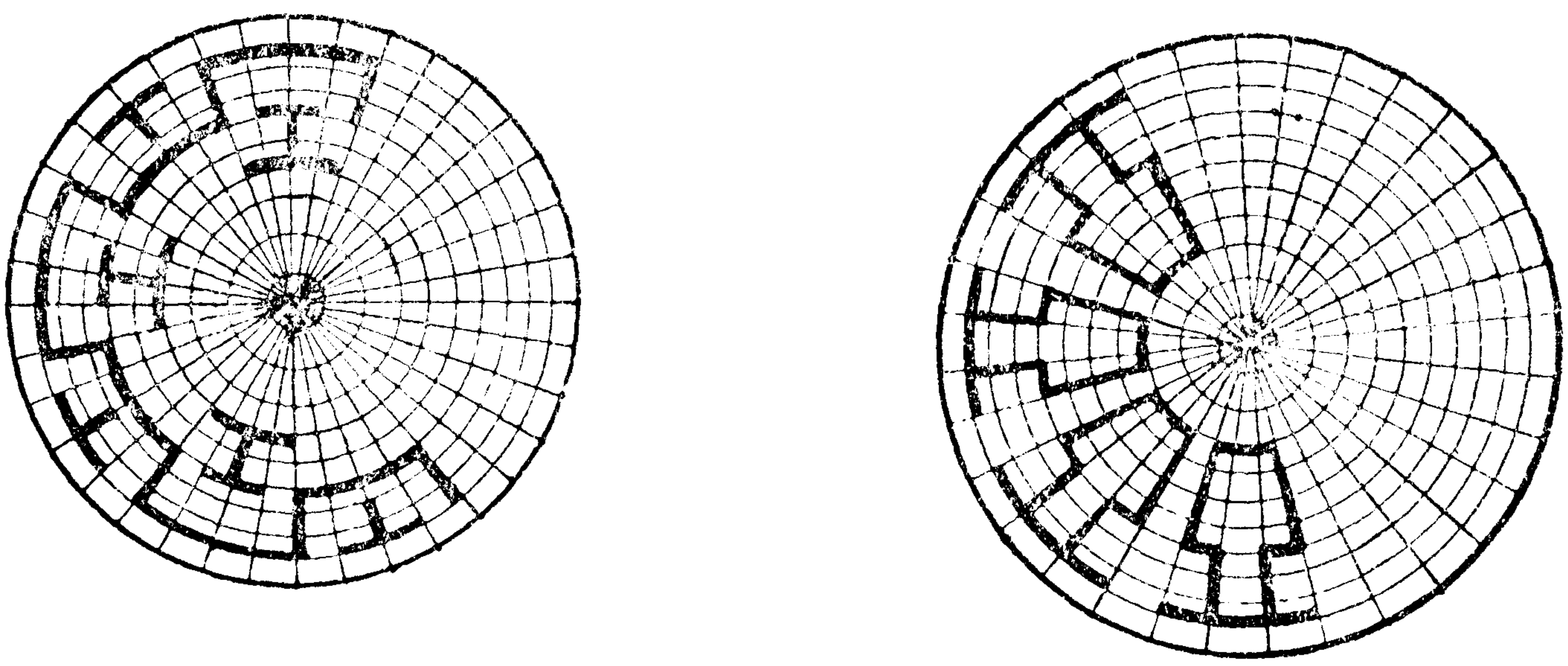
(16) 放大下四圖. 圖中有何種直線圖形?(放大至二倍).



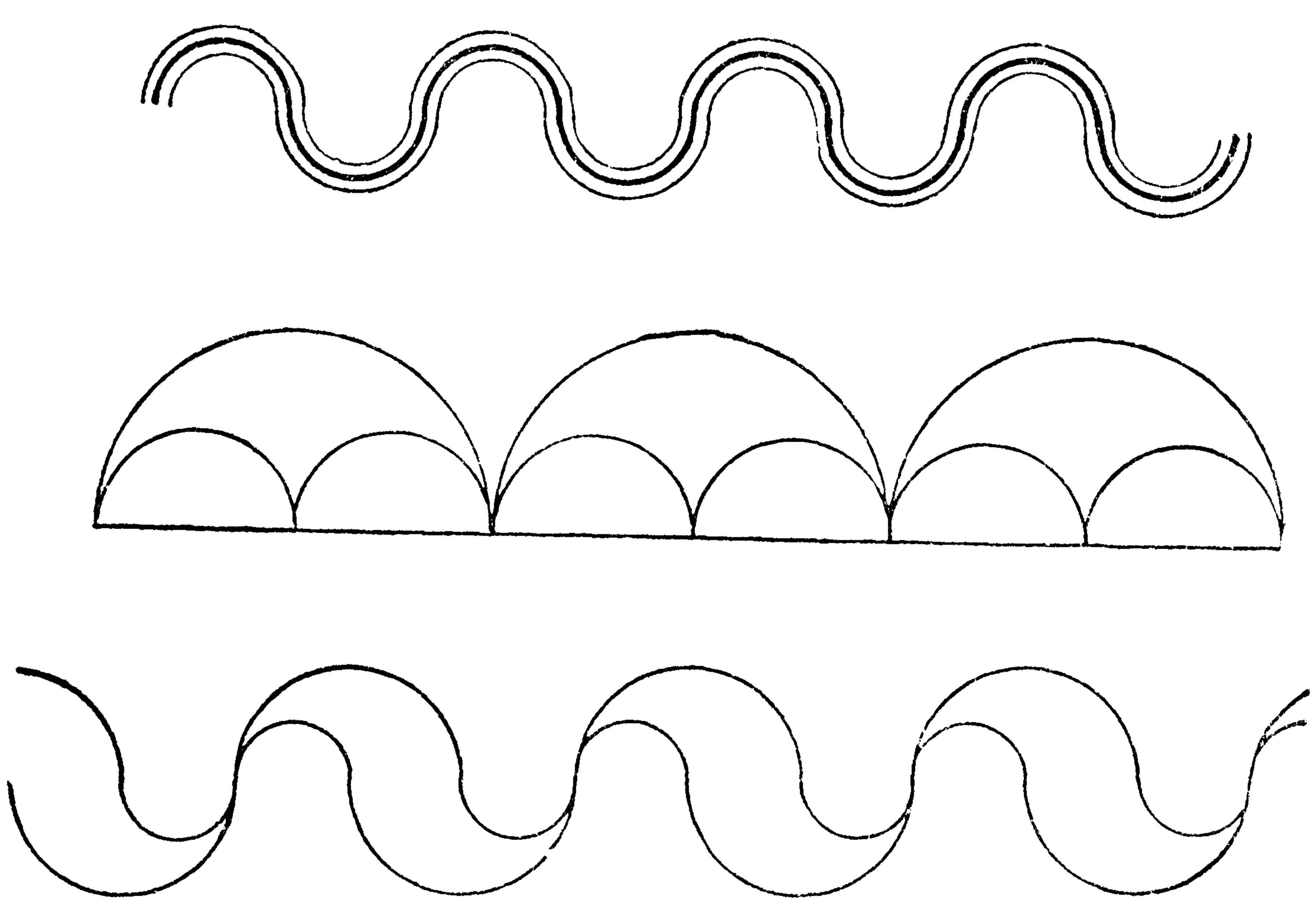
圖中格線示畫圖之途徑. 以下各圖亦然

(17) 補足以下三圖:

(18)　補足以下二圖:



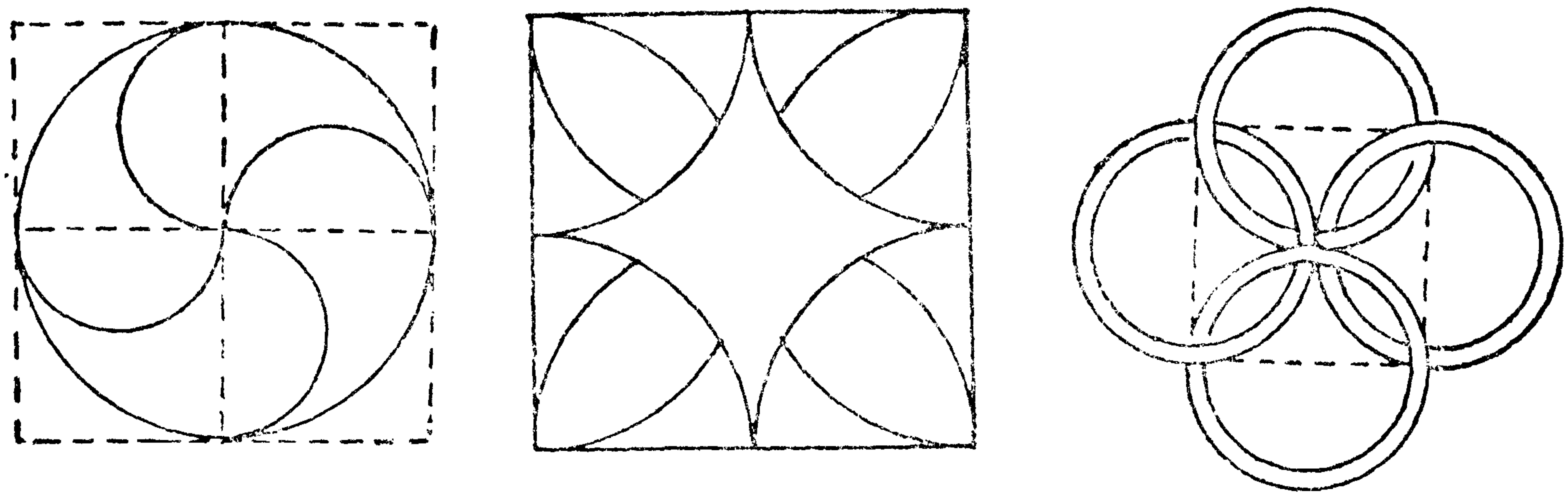
(18)　述下三圖之畫法而照式畫之:



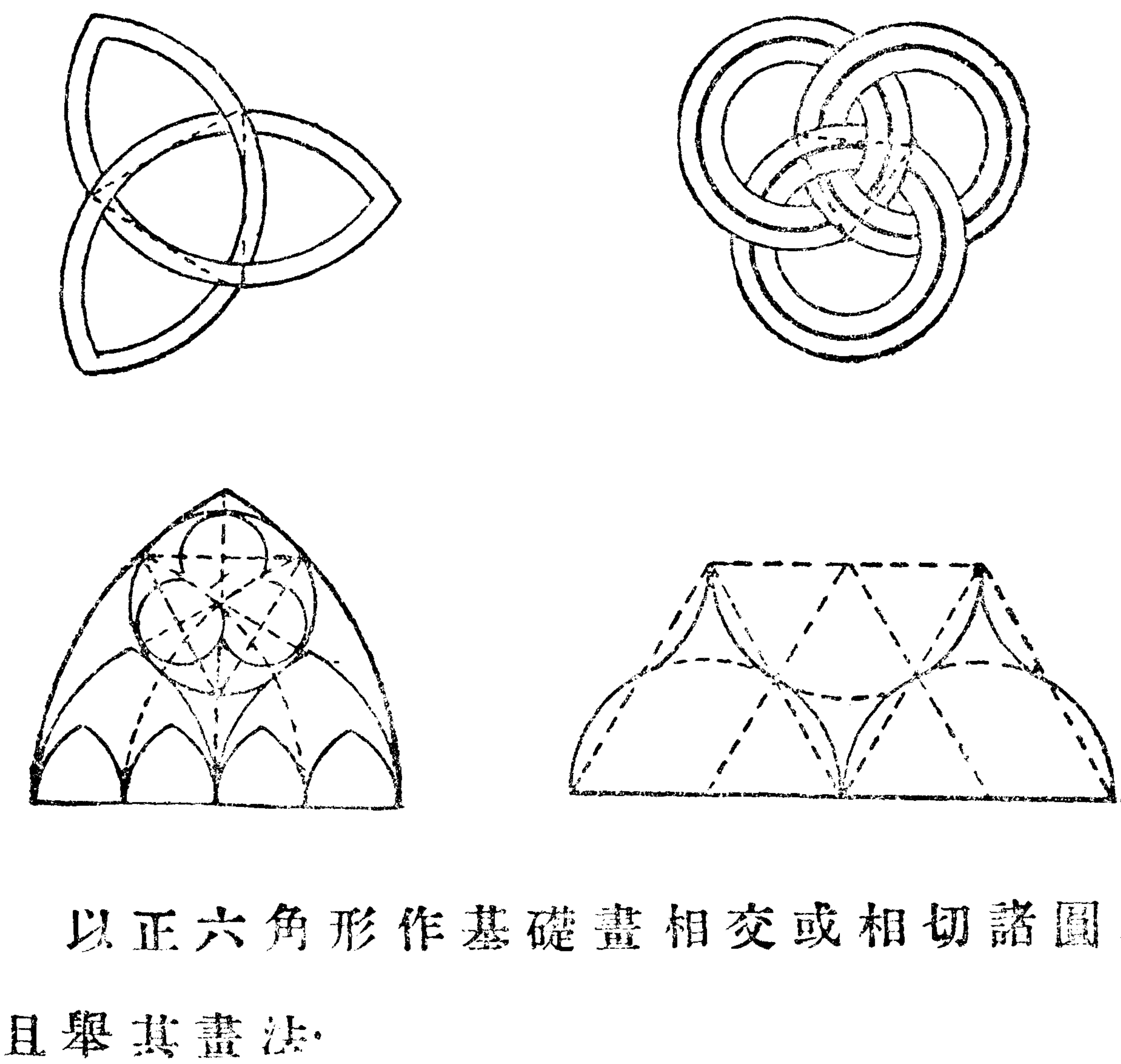
〔提示〕　自加方格,畫切圓及同心圓.

以下各題,用規筆及直線板畫建築上之圖式:

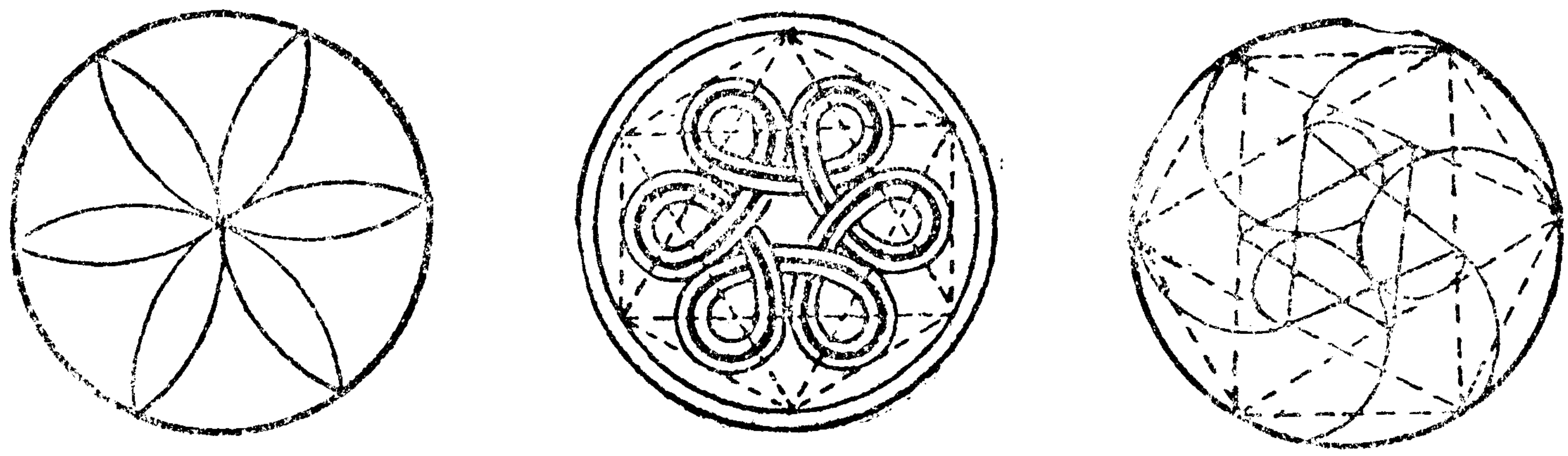
(19) 用正方形作基礎畫等圓成以下各圖,且述其畫法:



(20) 以正三角形作基礎畫相交或相切等圓以成如下各圖,且述其畫法:



(21) 以正六角形作基礎畫相交或相切諸圓以成如下各圖,且舉其畫法:



以下各題,少行實驗或略加思索即可解決之:

(22)　一圓與一點之關係位置共有幾種?

(23)　二圓相會之點至多有幾個?　至少有幾個?

(24)　一直線與一圓相會之點至多有幾個?　至少有幾個?

(25)　一圓全在他圓之外,則其半徑之和與中心線分孰大?

(26)　二圓外切,則其半徑和與中心線分孰大?

(27)　二圓相交,則其半徑和及差與中心線分大小之關係若何?

(28)　二圓內切,則其半徑差與中心線分大小之關係若何?

(29)　一圓全在他圓內,則其半徑差與中心線分孰大?

(30)　共心二圓能相交或相切否?

以下各題,用代數配合法 (Combination) 解之,但亦可先就簡單者實驗再行推至最公一類:

(31) 從 n 角形之一個角頂能作幾個對角線? 此諸對角線分原形成幾個三角形?

(32) n 角形所能有之對角線個數有幾?

(33) 完全多邊形 (Complete Multilateral) 為以諸無盡直線作邊之多邊形,各邊兩兩之會,皆為其頂點. 今有 n 個無盡直線其中無三個以上為共點者,以此作一完全 n 邊形之諸邊,則此形有幾個頂點?

(34) 完全多角形(Complete Polygon)為以諸點作頂點之多角形,諸頂點兩兩之聯皆為其邊. 今有 n 個點其中無三個以上為共線者,以此作一完全 n 角形之頂點則此形共有幾邊?

第七章 數量

40. 幾何學之第三目的.

幾何學之第三目的在研究圖之大小.

前在23,26兩款中已曾比較線分及角之大小矣,顧如此比較之法簡而不備,略而不精,不足以盡研究之目的也.

欲求完備,必盡知各種圖之性質及變化而後能. 此事非倉猝能詳言,學者習畢以後各編,則水到渠成自達此境地.

欲求精密,當定量法,用算術及代數計算各種圖之數值,

則錙銖悉呈自能毫釐不誤. 此事應用雖易而探原實難. 蓋一圖何以能量?量之所得何以爲數?數與原圖是一是二? 計算方法何自而得?凡此諸問題一一悉當解決始可坦然應用而不疑.通常言實用者於此一不之問,僅以能用爲已足,在算術及代數中固出於不得不然,至幾何學本身而亦如是,則非求眞知之學者所宜出矣. 此等問題於此能略言者當於本章逐款言之,不能者俟以後各編可言時言之.

41. 量及數.

凡事物可與一同種類之標準比較而得其大小多寡者曰量 (Quantity), 此標準爲量之單位(Unit), 所得之大小多寡爲度數(Measure), 卽不名數.

在平面幾何圖中線分,角,弧,及面積皆爲量. 線分之單位,尋常實用爲尺,寸,分,理論中則可任意定一線分之長用之. 角之單位尋常爲度,分,秒,理論中則恆用直角,亦可任意定一角用之. 圓弧之單位,尋常用度,分,秒,理論中則取一圓弧等於半徑之長者用之. 面積之單位,尋常用平方尺,平方寸,等,理論上則取在任意線分單位上所作正方形用之.

用單位度量,乃以量分作若干等分,令其每分之大小等於單位之大小,此所分得之分數卽爲量得之度數,卽此量爲其單位之倍數,與量之本身無關. 故度數爲不名數,雖

從量所出而實非量.

今如一線以尺爲單位量之得 3,* 或曰線長 3 尺,* 此中所謂線, 3 尺,及 3, 三者截然不同. 何則,線爲一量,渾然一圖,長之外更有其存在者在也; 3 尺爲名數,乃比較之一事,其數恃尺而定者也; 3 爲不名數,乃抽象之概念,超越乎跡象之外者也.

數爲量所生,故當論量本身之性質時不可以數代之.†

42. 比.

以單位度量之法,即一圖何以能量之故,在此不能詳言,當俟第五編中再論之;今惟略舉大概以爲應用之預備.

有同種類甲乙二量,以乙度甲,名之曰甲對於乙之比; (Ratio) 所度得之倍數 (包括整分數而言)‡ 曰比值 (Value of Ratio).

以故比值爲不名數.

求比值之法,在甲量中取去等於乙量之量,取 p 回而適盡則甲對於乙之比值爲 p (p 顯然爲整數).記之爲 甲:乙$=p$.

例如有二線分 a, b (或二角 α, β), 在 a (或 α) 中截取等於 b

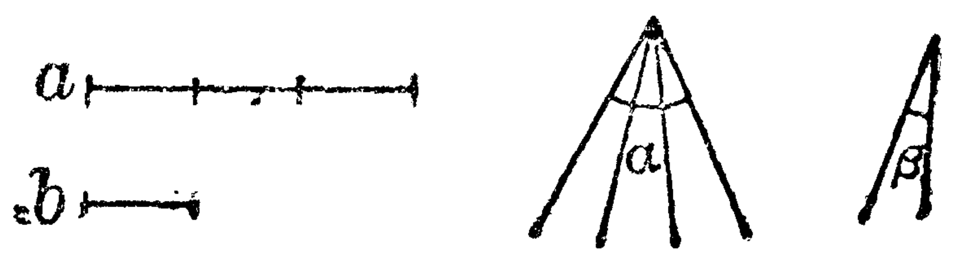
---

*此第二語顯然不如第一語之完善.

†以前各例題中用數計算諸題皆屬應用方面非理論中事也.

‡比值之非整分數者至後再論.

(或 β)之線分(或角),截三回而適盡,則 a 對於 b(或 α 對於 β)之比爲 3; 卽 $a:b=3$ (或 α $\beta=3$).



如此者甲爲乙之倍量(Multiple).

如前例 a(或 α)爲 b(或 β)之倍量,可記之爲 $a=3b$(或 $\alpha=3\beta$).

若甲非乙之倍量,則可更取第三量丙殿甲乙二量;若甲爲丙之 m 倍量,乙爲丙之 n 倍量,則甲對於乙之比値爲 $\frac{m}{n}$.

如右圖, $a=5c$, $b=3c$,

則 $a\,.\,b=5:3=\frac{5}{3}$.

從上所言,可知此與 $a=\frac{5}{3}\cdot b$ 相同.

如此之甲乙二量曰可通約量(Commensurable Quantity), 丙爲其公度(Common Measure).

凡可通約量之比値恆能如此求之,故其比値爲一有理數(卽整數或分數). 以此比値倍第二量可得其第一量.

若不能得有同時能殿盡甲乙二量之第三量丙,則甲乙二量曰不可通約量(Incommensurable Quantity).

不可通約量今暫不論.

43. 比例.

第一量對於第二量之比,等於第三量對於第四量之比,則謂此四量成比例(Proportion). 名第一第三兩量曰前項(Antecedents), 第二,第四兩量曰後項(Consequents);第一,第四兩量曰外項(Extremes),第二第三兩量曰內項(Means);第四量曰第四比例項(Fourth Proportional).

a 對於 b 之比等於 c 對於 d 之比,記之為 $a.b::c.d$,或 $a:b=c.d$, 或 $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$.

若第一量對於第二量之比等於第二量對於第三量之比,則曰此三量成連比例 (Continued Proportion),其第二量曰比例中項 (Mean Proportional), 第三量曰第三比例項(Third Proportional).

〔注意一〕 依比之定義(§42),比值為不名數而 $a:b=\frac{m}{n}$ 與 $a=\frac{m}{n}\cdot b$ 相同,此中 a 及 b 為同種之量.

〔注意二〕 幾何學中諸量經過比及比例以後,方有求數之完全方法(即如面積求數,非經比例,法不完全成立),今方開始論比例,不能易量為數;又從41款,知數與量截然為二事,今方論量之本身,更不應棄量言數;故一比例式中至少成一比之二項為量,否則四項皆為量,決不能全為數.惟論實用數學時可不拘此例,因既名為實用,則即完全不問理論固無不可也.

〔注意三〕　比例式中成一比之二量必同種類.

〔注意四〕　二量不能乘,惟數可乘量,亦可乘數.比爲一數,故比可乘量,比亦可乘比.

二比之積爲原二比之複比(Compound Ratio). 相等二比之複比爲各比之第二羃比(Duplicate Ratio).

今舉比及比例化法之重要公式如下:

(一)　$A:B=mA:mB$

何則,設 $A:B$ 之比值爲 r†, 則 $A:B=r$, 卽 $A=rB$;

由是　$mA=r(mB)$, 卽 $mA:mB=r=A:B$

〔注意〕　在此公式中,大體文字表量,小體文字表數.說明此式所以成立之法,就量與數皆可通用. 本款中之以下諸式亦然.

(二)　$P:Q=A:B,\ X:Y=A:B$, 則 $P:Q=X:Y$*

(三)　$A:B=P:Q$, 則 $B:A=Q:P$

何則,設 $A:B=r$, 則 $P:Q=r$, 卽 $A=rB$, 及 $P=rQ$,

由是　$B:A=\frac{1}{r}$, 及 $Q:P=\frac{1}{r}$, 而 $B:A=Q:P$.

此公式曰反比定理(Invertendo).

---

† r 包括整數及分數二種.

*自然顯明,不必更說理由.

♦$\gtrless$ 表或大於或小於之意,卽此公式可分作二起,一始終用 $>$ 者,又一始終用 $<$ 者.

(四) $A=B$, 則 $A:C=B:C$, 又 $C:A=C:B$ *

(五) $A\gtrless B$,+ 則 $A:C\gtrless B:C$, 又 $C:B\gtrless C:A$

何則,設以 C 及 A 之公度敷 A 得 m, 敷 C 得 n; 若以此敷 B 得 m', 則因 $A\gtrless B$ 而 $m\gtrless m'$ 由是 $\frac{m}{n}\gtrless\frac{m'}{n}$, 及 $\frac{n}{m'}\gtrless\frac{n}{m}$.

因 $A:C=\frac{m}{n}$, $B:C=\frac{m'}{n}$, $C:B=\frac{n}{m'}$, $C:A=\frac{n}{m}$; 故 $A:C\gtrless B:C$, 及 $C:B\gtrless C:A$.

(六) <u>比例中三項一定,則第四比例項有一無二.</u>

何則,設 P, Q, A 皆一定,而 $P:Q=r$; 從 $B=\frac{1}{r}A$ 定 B, 則 $A:B=r$, 而 $P:Q=A:B$, 故以 P, Q, A 爲比例之前三項時,必能有一第四比例項 B 今若云 B 外尙有一第四比例項 B', 而 $B'\gtrless B$; 則從(五), 知 $A:B\gtrless A:B'$; 因 $P:Q=A:B$, 故 $P:Q\gtrless A:B'$; 由是此 B' 決不能爲 P,Q,A 之第四比例項. 故 P,Q,A 之第四比例項有一無二.

(七) <u>連比例中二項一定,則其餘一項有一無二.</u>

此事說明與上一事相類.

(八) <u>$A:B=P:Q$, 則 $A:P=B:Q$. 但 A,B,P,Q 皆爲同種類量.</u>

設 $A:B=P:Q=r$, 則 $A=rB, P=rQ$; $\therefore A:P=rB:rQ=B:Q$ (見一).

<u>此公式曰更比定理</u>(Alternando)

<u>(九)　$A, B, C, D, E, F, \cdots$ 皆爲同種類量,而 $A:B=C:D=E:F=\cdots$, 則 $(A+C+E+\cdots):(B+D+F+\cdots)=A:B$.</u>

設 $A:B=C:D=E:F=\cdots=r$, 則 $A=rB, C=rD, E=rF, \cdots$;

$\therefore\ A+C+E+\cdots=r(B+D+F+\cdots)$, 而 $(A+C+E+\cdots):(B+D+F+\cdots)=r=A:B$.

<u>此公式名曰加比定理</u>(Addendo).

<u>(十)　$A:B=P:Q$, 則 $A+B:B=P+Q:Q$.</u>

設 $A:B=P:Q=r$, 則 $A=rB, P=rQ$; $\therefore A+B=(1+r)B$, $P+Q=(1+r)Q$;

由是 $A+B:B=1+r, P+Q:Q=1+r$, 而 $A+B:B=P+Q:Q$.

<u>此公式名曰合比定理</u>(Componendo).

<u>(十一)　$A:B=P:Q$, 則 $A-B:B=P-Q:Q$.</u>

此事理由可倣(十)說明之.

<u>此公式名曰分比定理</u>(Dividendo).

<u>(十二)　$A:B=P:Q$ 則 $A+B:A-B=P+Q:P-Q$.</u>

設 $A:B=C:D=r$, 則 $A=rB, P=rQ$; $\therefore A+B=(r+1)B$, $P+Q=(r+1)Q$, 及 $A-B=(r-1)B$, $P-Q=(r-1)Q$; 由是 $A+B:A-B=\frac{r+1}{r-1}$, $P+Q:P-Q=\frac{r+1}{r-1}$, $\therefore A+B:A-B=P+Q:P-Q$.

<u>此公式名曰合分比定理.</u>

<u>(十三)　$A:B=P:Q, B:C=Q:R$ 則 $A:C=P:R$.</u>

設 $A:B=P:Q=r$, $B:C=Q:R=s$, 則 $A=rB$, $P=rQ$, $B=sC$, $Q=sR$; ∵ $A=r(sc)=rsC$, $P=r(sR)=rsR$; ∴ $A:C=rs$, $P:R=rs$, 而 $A:C=P:R$.

〔附識〕 $A:C=(A:B)(B:C)$. 因皆等於 rs 故也.

(十四) $A.B=P:Q$, 則 $(A:B)^2=(P:Q)^2$

〔注意一〕 (十四)之結果不能書作 $A^2:B^2=P^2:Q^2$, 因量不能自乘故也. 特例, A, B, P, Q 皆爲線分,則上式成立而意義則非自乘,視四,五,兩編可知.

〔注意二〕 $A:B=C:D$ 則 $AD=BC$, 此在算術及代數中恆用之;在此則不能用.因二量不能相乘故也. 特例至五編8款論之.

44. 實驗幾何學及實用幾何學.

幾何圖之諸性質專從畫圖,實量,及觀察以發見之之幾何學曰實驗幾何學(Experimental Geometry). 汰去幾何學特有之精神,取材限於應用,不習專門問題,不作謹嚴理論,混數與量以達其應用目的之幾何學曰實用幾何學 (Practical Geometry)

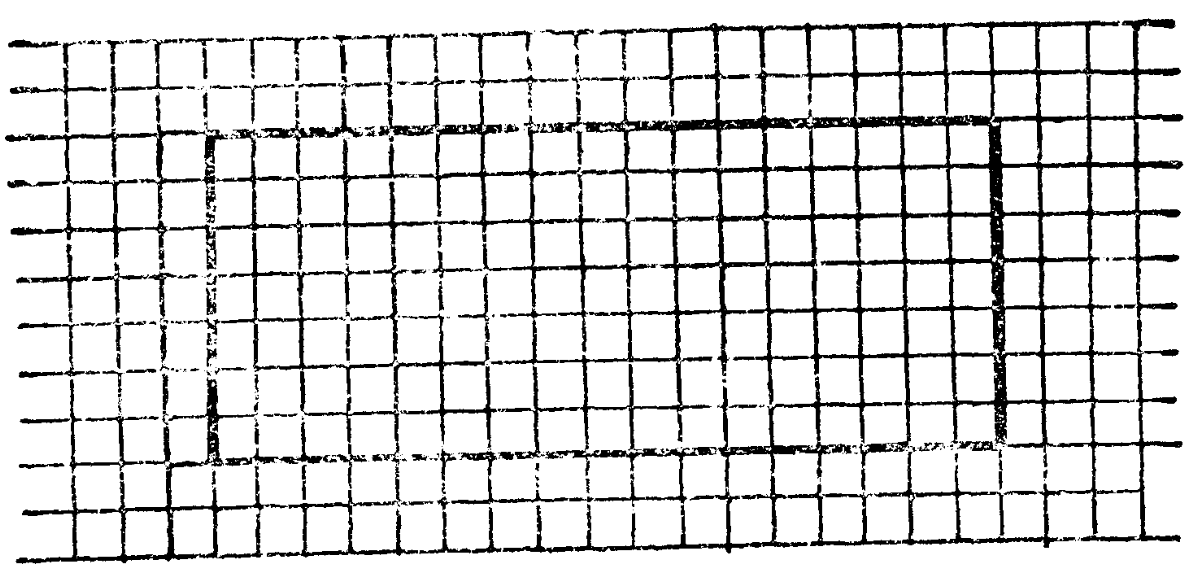
實驗幾何學施之年幼學生或初學者,足以引發其興趣,明確其觀念,不爲無益;故本書於以前自例題三起多集此類問題:特是吾人耳目手足之力渺小至不堪言,恃此以自封,眞學問將不可得;以是嗣後將不再戀此幼稚之途而別

闢正路矣.

有守有爲本學者分內之事,爲學而不知用,此學者之過,與學問本身無與也. 實用幾何家爲學問求實用,吾人至贊成之;惟犧牲幾何精神以殉其目的,則所得雖多而所損尤大,此則偏矣.本書嗣後,實用精神當兩者兼顧.使學知者可以利行而其界限仍劃然而不混,此亦求眞知之學者所當有之事也.

45. 實用上之數面積法.

〔第一〕 矩形之面積.



如右圖,畫一矩形於坐標紙上,其底適合17格,高適合7格,面積合 $17\times7=119$ 小方. 若取坐標紙上一格之長作一線分單位,其一小方卽爲面積單位,則此矩形底,高,及面積之數數卽各爲17,7,及119(§41). 由是可假定* 矩形面積之數數等於底及高二數數之相乘積.

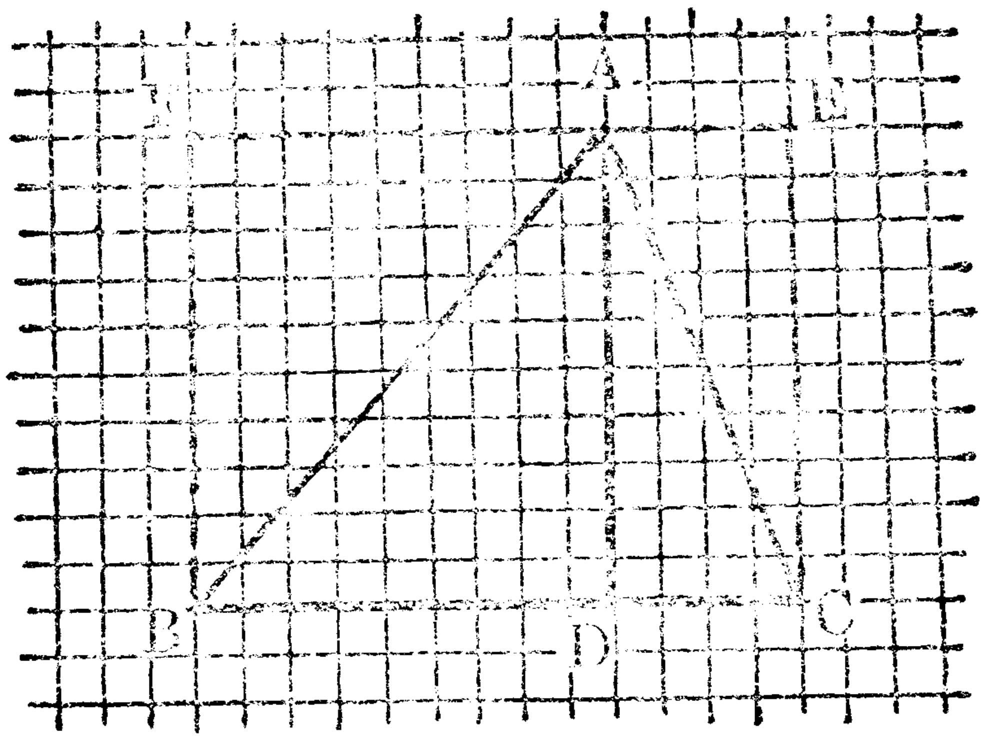
〔第二〕 三角形之面積.

---

*若矩形之底或高有一爲不可通約量,卽不能行此實驗.

*此後在應用題中可用此款得規律,但在理論中暫不能用.

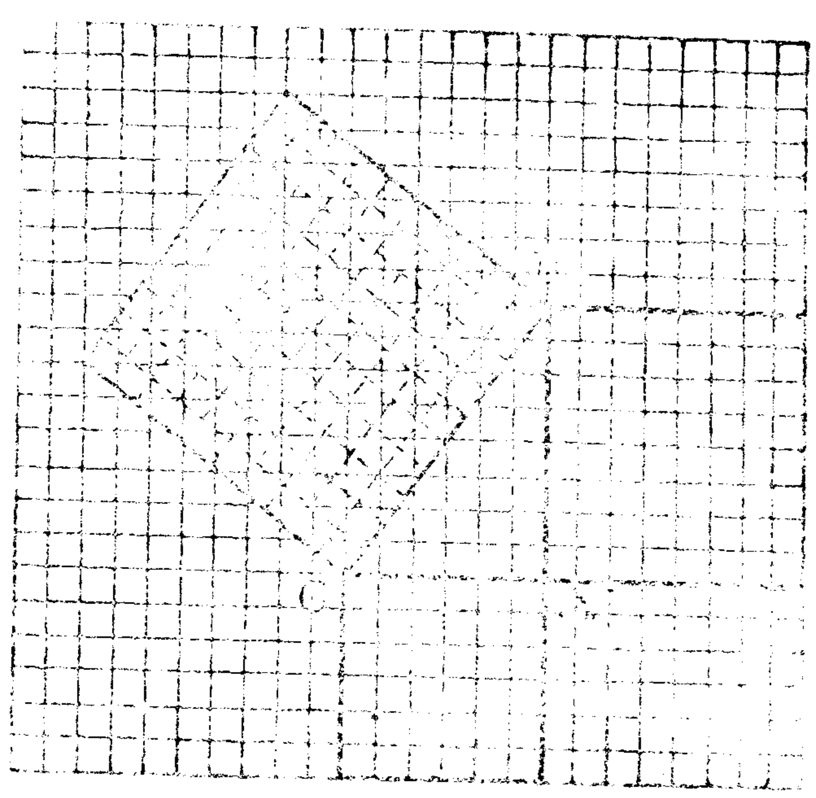
如右圖,畫一三角形於坐標紙上,其底適合13格,其高適合10格. 補畫矩形 $BCEF$,則可見三角形之一部分ABD恰爲矩形一部分$AFBD$之半,三角形之又一部分ACD,恰爲矩形又一部分$AECD$之半;故三角形ABC之面積恰爲矩形$BCEF$面積之半. 矩形之底及高各與三角形之底及高等. 從上,知矩形$BCEF$面積之𢿙數爲 $13\times10=130$, 故三角形ABC面積之𢿙數當爲 $\frac{1}{2}\times13\times10=65$. 由是可假定三角形面積之𢿙數等於其底及高二𢿙數相乘積之半.



〔第三〕 正方形之面積.

正方形爲底及高相等之矩形(§34) 故從〔第一〕可定正方形面積之𢿙數等於其一邊𢿙數之平方.

〔第四〕 直角三角形三邊上正方形面積之關係.



如右圖,就坐標紙上地位,畫直角三角形 ABC 直角二邊 AB, AC 上之正方形,其斜邊上之正方形更用別一坐標紙畫

之,數三個正方形中小方之數,可見斜邊上正方形之面積等於餘二邊上正方形面積之和.

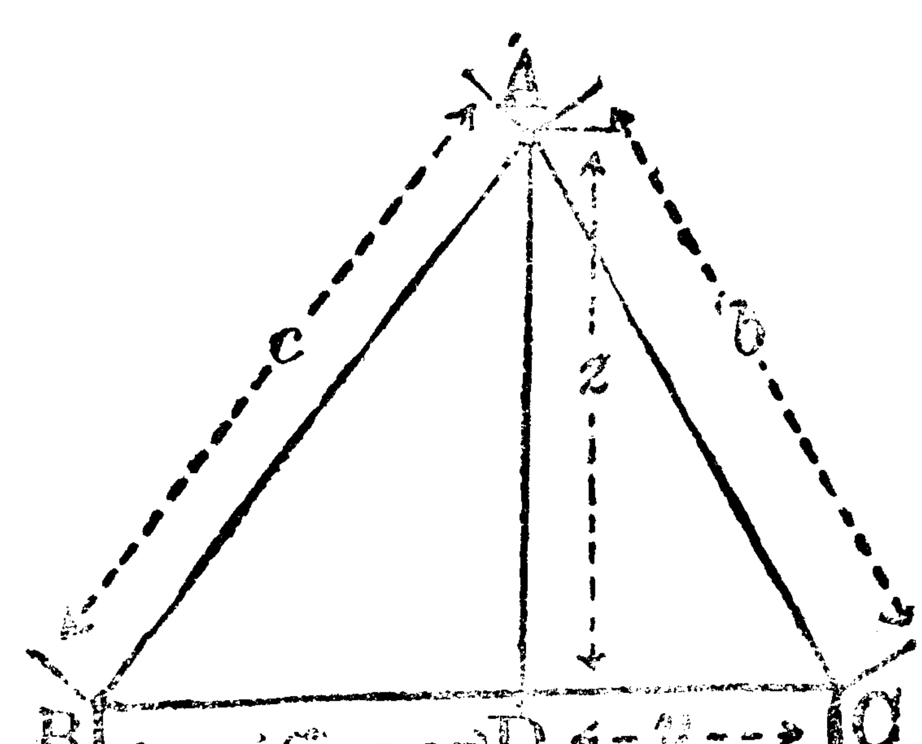
從第三,若 BC, CA, AB 三邊之𠫵數各爲 a, b, c, 則此三邊上正方形面積之𠫵數當爲 a^2, b^2, c^2. 故由此所得關係,可得

$$a^2=b^2+c^2.$$

今設一應用此諸事之代數計算於下:

例. 一三角形,已知其三邊之𠫵數各爲 a, b, c. 求其面積之𠫵數.

如圖,三角形 ABC 三邊 BC, CA, AB 中所含線分單位之數各爲 a, b, c, 從 A 至 BC 引高 AD. 設 BD, DC, AD 中所含線分單位之數各爲 x, y, z, 則因 ADB, ADC 皆爲直角三角形而得



三角形而得 $x^2+z^2=c^2, \cdots\cdots(1)$

同理, $y^2+z^2=b^2, \cdots\cdots(2)$

又從圖, $x+y=a, \cdots\cdots(3)$

$(1)-(2)$, $x^2-y^2=c^2-b^2,\ (4)$

$(4)-(3)$ $x-y=\dfrac{c^2-b^2}{a},\ (5)$

$\dfrac{(3)+(5)}{2}$, $x=\frac{1}{2}\left(a+\dfrac{c^2-b^2}{a}\right)=\dfrac{a^2+c^2-b^2}{2a},$

由此及(1), $z^2=c^2-\left(\dfrac{a^2+c^2-b^2}{2a}\right)^2$

$$=\frac{4a^2c^2-(a^2+c^2-b^2)^2}{4a^2}$$

$$=\frac{1}{4a^2}[2ac+a^2+c^2-b^2][2ac-a^2-c^2+b^2]$$

$$=\frac{1}{4a^2}[(a+c)^2-b^2][b^2-(a-c)^2]$$

$$=\frac{1}{4a^2}(a+b+c)(a-b+c)(b+a-c)(b-a+c)$$

$$=\frac{1}{4a^2}(a+b+c)(-a+b+c)(a-b+c)(a+b-c)$$

今爲便利起見,命 $a+b+c=2s$, 則

$$-a+b+c=2(s-a),\ a-b+c=2(s-b),\ a+b-c=2(s-c),$$

而 $$z^2=\frac{4}{a^2}s(s-a)(s-b)(s-c),$$

$$\therefore\quad z=\frac{2}{a}\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}.$$

從本款第二,三角形 ABC 面積所含面積單位之數爲 A, 則

$$A=\tfrac{1}{2}\times a\times z=\tfrac{1}{2}\times a\times\frac{2}{a}\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)},$$

$$\therefore\quad A=\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}.$$ 答.

例題七(實用題)*

本例題中所有文字皆表數.

(1) 求 $\frac{a}{b}$ 及 $\frac{b}{a}$ 之比例中項.

(2) 從 $x:27=y:9=2:x-y$ 求 x 及 y 之值.

(3) $a:b=c:d$, 則 $(a+c)^2:(b+d)^2=(a^2+c^2):(b^2+d^2)$. 證之.

(4)　$a:b=b:c=c:d$, 則 $(a-c)(b-d)-(a-d)(b-c)=(b-c)^2$ 證之.

(5)　$ax+cy:by+dz=ay+cz:bz+dx=az+cx:bx+dy$. $x+y+z\neq o$,† 則此各比又等於 $a+c:b+d$. 證之.

(6)　$a:b=b:c=c:d$, 則 $a+b:b+c=b+c:c+d$. 證之.

(7)　$a:b=b:c=c:d$, 則

$(a^2+b^2+c^2):(ab+bc+cd)=(ab+bc+cd):(b^2+c^2+d^2)$. 證之.

(8)　$a:b=c:d$, 則 $pa^2+qb^2:pa^2-qb^2=pc^2+qd^2:pc^2-qd^2$ 證之.

(9)　$a:b=c:d$, 及 $e:f=g:h$. 則

$ae+bf:ae-bf=cg+dh:cg-dh$ 證之.

(10)　$x:y=b+c-a:c+a-b$ 及 $y:z=c+a-b:a+b-c$, 則 $x:z=b+c-a:a+b-c$. 證之.

(11)　畫一非矩形於坐標紙上以推求其面積smaller數之法.

(12)　畫一梯形於坐標紙上以推求其面積數之法.

(13)　畫一菱形於坐標紙上以推求其面積數之法*

---

*在此例題中,一比例式兩外項之積可等於兩內項之積.

†($\neq$)爲不等於.

*若學者於代數方面學力尙未充足,則此例題集可省去.

*畫時令其兩對角線與坐標紙上縱橫各一線合.

(14) 畫一不平行四邊形於坐標紙上以推求其面積畝數之法.

(15) 一矩形地面不知其面積之大小,但知若底增2尺,高增3尺,則面積當增64平方尺;若底增3尺,高增2尺,則面積當增68平方尺. 求其面積所含平方尺之數.

(16) 一矩形板,面積含24平方尺,而長邊上正方形與短邊上正方形面積之和爲73平方尺. 求其各邊所含尺數.

(17) 一矩形地面周46尺,對角線長17尺. 求其各邊之尺數.

(18) 二塊矩形地面,面積各爲m^2平方尺,但知此二地長邊之差爲a尺,短邊之差爲b尺. 求各地長邊及短邊之尺數.

(19) 已知一直角三角形周長a尺,面積爲m^2平方尺. 其各邊之尺數.

(20) 已知一直角三角形周長a尺,從直角頂點至斜邊所引垂線之長爲b尺. 求其三邊之尺數.

第八章　理論之基礎

46. 理論幾何學或證明幾何學.

理論幾何學(Theoretical Geometry)與證明幾何學(Demonstrative Geometry)實同事而異名,蓋對於實用而言曰理論,對於實驗而言曰證明也. 此爲幾何學之正軌. 其爲學先定若干淺顯易明之基礎,由此用演繹法以逐層推闡眞理,系統謹嚴,語必有據,使凡有所論皆確乎不拔者也.

幾何學理論之基礎有二種,一曰定義,一曰公理.

47. 定義.

舉一圖之形象或性質以確定所用名詞之概念者爲幾何定義 (Definition).

幾何學中基礎圖形之定義已舉於前文者今更擇要述之:

(1)點. 有位置無形象及大小之空間部分曰點.

(2)線. 有位置,形象,及長而無廣無高之空間部分曰線.

(3)面. 有位置,形象,長,廣,而無高之空間部分曰面.

(4)體. 有位置,形象,長,廣及高之空間部分曰體.

(5)圖. 點線,面,體或分或合所成者曰圖.

(6)直線. 線之繞其上兩點旋轉而恒合於其原位置者曰直線.

(7)平面. 平面者,過其中兩點之線完全在其中者也.

此外尚有諸圖之定義爲前文所已言者,學者宜錄成一表,習之至熟,庶臨用之時,能不假思索而得。

例題八

(1) 幾何學之定義若何?

(2) 點,線,面,體之性質若何?

(3) 何謂封閉線?

(4) 何謂無窮遠點?

(5) 何謂相交直線?

(6) 何謂交點?

(7) 何謂會? 何謂聯?

(8) 何謂面之交線?

(9) 何謂曲線? 何謂折線?

(10) 何謂點列? 何謂線束?

(11) 線之方向若何?

(12) 旋轉之方向若何?

(13) 何謂半射線及其原點?

(14) 何謂線分及其延線?

(15) 何謂平行線?

(16) 何謂同向異向?

(17) 何謂平面圖及直線圖?

(18) 初等幾何學若何分類?

(19) 何謂二點之距離?

(20) 何謂點與直線之距離?

(21) 何謂合同圖?

(22) 何謂疊置法?

(23) 何謂角? 角有何性質?

(24) 何謂線分之中點?

(25) 何謂角之等分線?

(26) 何謂垂線? 何謂斜線?

(27) 何謂隣角? 何謂交角?

(28) 何謂周角? 直線角? 直角?

(29) 何謂相屬角?

(30) 何謂補角? 餘角?

(31) 何謂凸角? 凹角?

(32) 何謂銳角? 鈍角?

(33) 何謂對頂角?

(34) 何謂同位角? 錯角? 內角?

(35) 垂線及斜線之足爲何?

(36) 何謂封閉圖?

(37) 何謂單多角形?

(38) 多邊形與多角形有異否?

(39) 何謂凸多角形? 凹多角形? 交截多角形?

(40) 何謂三角形? 四角形? 五角形?……, n 角形?

(41) 三角形若何以邊分類? 試舉各種名稱及其定義.

(42) 三角形若何以角分類? 舉試各種名稱及其定義.

(43) 四角形若何分類? 試舉各種名稱及其定義.

(44) 三形角及矩形中何者爲底? 何者爲高?

(45) 特種多角形有幾種? 試舉其名稱及定義?

(46) 何謂圓? 圓周? 半圓? 象限?

(47) 何謂弧? 優弧? 劣弧?

(48) 圓之中心,半徑,直徑各若何?

(49) 圓之切線,割線,弦各若何?

(50) 二圓之關係位置共有幾種?

(51) 何謂數數?

(52) 量,名數,數相同否?

(53) 各種單位若何?

(54) 何謂比及比例?

(55) 何謂可通約量及不可通約量?

(56) 比爲數抑爲量?

(57)　何謂理論幾何學?

(58)　二線分之大小相等若何定之?

(59)　二角之大小相等若何定之?

(60)　一點在圓內,圓外,或周上若何定之?

48. 定義一. 公理.

歸納吾人經驗所得最簡單之理以作推斷之基礎者曰公理(Axiom).

公理由經驗而來,故為假設之眞確,* 因其最簡,故不能更據他理說明之. 幾何學中所用公理可分為二,一曰普徧公理(General Axioms),一曰幾何公理(Geometric Axioms)

普徧公理:†

(一)　等於同量之量相等,等於等量之量相等.

(二)　等量加等量,其和相等.

(三)　等量從等量減之,其餘相等.

(四)　等量之同倍量相等.

(五)　等量之同分量相等.

(六)　全量等於其諸部分之和.

(七)　全量比其任意部分大.

---

*經驗之範圍有限,故此眞確為有限之眞確.

†學者若以文字表量,則此十六個普徧公理皆可以代數式表之.

(八) 一量恆可以其等量代之.

(九) 等量加不等量其和不等,所加者大和亦大.

(十) 不等量加等量其和不等,原大者和亦大.

(十一) 從等量減不等量其餘不等,所減者大則餘小.

(十二) 從不等量減等量其餘不等,原大者餘亦大.

(十三) 不等量之同倍量不等,倍量大小與原量大小之序相同.

(十四) 若第一量比第二量大,第二量比第三量大,則第一量比第三量大.

(十五) 諸量相加,其加時次序與所得之和無涉.

(十六) 以一所設量比較一同類量,則此量或大於彼量,或等於彼量,或小於彼量,三者必居其一.

幾何公理:

(一) 幾何圖可不變其形象大小而任意變其位置(§21).

(二) 二圖合同則其大小相等.(§22).

(三) 過二點之直線有一無二(§13).

由此可推得三事:

(*a*)疊置二直線可令各線上之任意一點相合(§22).

(*b*)共有二點或一部分之二直線合而爲一.

(*c*)二直線之交點有一無二(§13).

(四)　二點在一直線之兩旁,則其聯交此直線.

(五)　線分爲其兩端間之最短路徑.

(六)　大可以容小,小不可以容大.

(七)　過一直線及此外一點之平面有一無二(§16).

(八)　平面以其中一直線爲摺痕而摺之,則此線一旁之半平面,可與他旁之半平面相合.

49.　定義二.　公設.

假定爲可能之事曰公設(Postulate).幾何學之公設如下:

(一)　過任意二點必能引一直線(§13).

(二)　一線分必能延長至任何遠.

(三)　以所設點爲中心,所設線分爲半徑,恒能畫一圓(§39).

(四)　過直線外一點,而與此直線平行之直線有一無二(§15).

(五)　一平面中二直線或相交,或平行,必居其一(§17).

由此可推得二事.

(a)一直線與平行二線之一相交,則與其二亦必相交(§18).

(b)共面三直線中二線各與第三線平行,則此二線自相平行(§18).

此外尚有不明言之公設.例如在論理中之圖恆視爲能作者.其圖確能作否爲另一事.

50. 定義三. 定理. 系.

根據定義,公理,等已認爲眞之事而能證明之眞理曰定理 (Theorem). 從已證明之定理畧加推想卽可斷定之定理曰系 (Corollary).

前文中已證明之定理今舉之於下:

(一) 一線分之中點有一無二(§23).

(二) 一角之等分線有一無二(§26).

(三) 一直線上一點之垂線有一無二(§28).

(四) 凡直線角皆相等(§28).

系一. 凡周角皆相等(§28).

系二. 凡直角皆相等(§28).

系三. 直線角等於二直角,周角等於四直角(§28).

(五) 一點周圍順次諸隣角之和等於一周角(§28).

系 順次諸隣角之兩外邊成一直線,則此諸角和等於一直線角(§28).

(六) 二隣角和等於一直線角,則其兩外邊成一直線(§28).

(七) 等角之補角相等(§29).

系 等角之餘角相等(§29).

(八) 對頂角相等(§30).

(九) 一直線截他二直線,若在所得八角中有一雙同位

角相等,則四個銳角皆相等,四個鈍角皆相等,二雙同旁內角互為補(§30).

(十)　同圓之半徑相等(§36),等圓之半徑相等(§38).

系一.　直徑為半徑之倍(§36),

系二.　同圓之直徑相等(§36),等圓之直徑相等(§38).

系三.　等半徑之二圓為合同圖(§38).

(十一)　直徑分圓為全等二部分,直交二直徑分圓為全等四部分.

(十二)　一點在圓周上,或外,或內,則此點與圓心之距離等於半徑,或大於半徑,或小於半徑.

又關於比例之基本定理如下(§43):

(一)　$A:B=mA:mB$ (大體文字表量,小體文字表數).

(二)　$P:Q=A:B$, $X:Y=A:B$ 則 $P:Q=X:Y$.

(三)　$A:B=P:Q$, 則 $B:A=Q:P$(反比定理).

(四)　$A=B$, 則 $A:C=B:C$, 又 $C:B=C:A$

(五)　$A\gtreqless B$, 則 $A:C\gtreqless B:C$, 又 $C:B\gtreqless C:A$

(六)　比例中三項一定,則第四比例項有一無二.

(七)　連比例中二項一定,則其餘一項有一無二.

(八)　$A:B=P:Q$, 則 $A:P=B:Q$(更比定理).

(九)　$A:B=C:D=E:F=\cdots$, 則

$(A+C+E+\cdots):(B+D+F+\cdots)=A:B$(加比定理).

(十)　$A:B=P:Q$, 則 $(A+B):B=(P+Q):Q$ (合比定理).

(十一)　$A:B=P:Q$, 則 $(A-B):B=(P-Q):Q$ (分比定理).

(十二)　$A:B=P:Q$, 則 $(A+B):(A-B)=(P+Q):(P-Q)$ (合分比定理).

(十三)　$A:B=P:Q$, $B:C=Q:R$, 則 $A:C=P:R$.

系　$A:C=(A:B)(B:C)$.

(十四)　$A:B=P:Q$, 則 $(A:B)^2=(P:Q)^2$

51. 定義四. 假設及終決.

定理由二部分所成,前一部分為假設 (Hypothesis), 後一部分為終決(Conclusion), 假設者,假定圖形有某種關係;終決者,假設所生之果,待證之性質也;證 (Proof) 則說明何以能從假設得終決之理由. 譬之一案之判斷,假設為案情,終決為判決,證則判決理由書也. 判案必根據律或例,公理公設猶律,已證明之定理猶例;此外不能引用*

凡證一題,必先分別題之假設及終決. 題為普徧語,則當畫圖記字母分別說明之,† 以便證時可用.

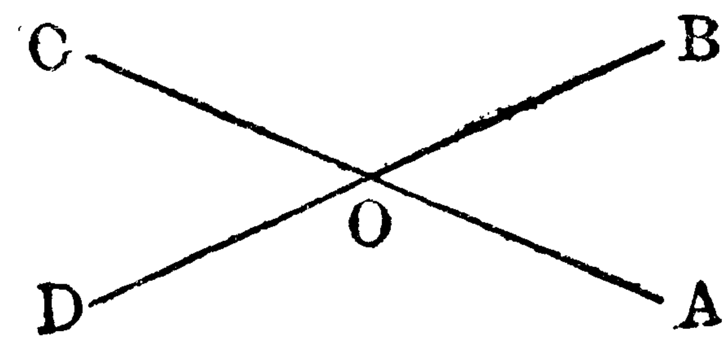
---

*定義亦案情之一部分,不在引用之列,故當然不可少.

†所畫之圖必當普徧. 如畫角,不宜畫直角或直線角等特別角.

** Thales 氏(西曆紀元前 640—548)為希臘七哲人之一,以埃及之幾何傳入希臘者也.

例. 對頂角相等(Thales 氏定理)**



〔假設〕 AOB, COD 爲對頂角.

〔終決〕 $\measuredangle AOB = COD$.

例 題 九

繪圖說明以下各定理之假設及終決:

(1) 一線分之中點有一無二.

(2) 凡直角皆相等.

(3) 一點周圍順次諸隣角之和等於一周角.

(4) 二隣角和等於兩直角則其兩外邊成一直線.

(5) 等角之補角相等.

(6) 一圓直徑爲其半徑之倍.

(7) 等圓之半徑相等.

(8) 一直線截他二直線,若在所得八角中有一雙同位角相等,則四個銳角皆相等,四個鈍角皆相等,二雙同旁內角互爲補.

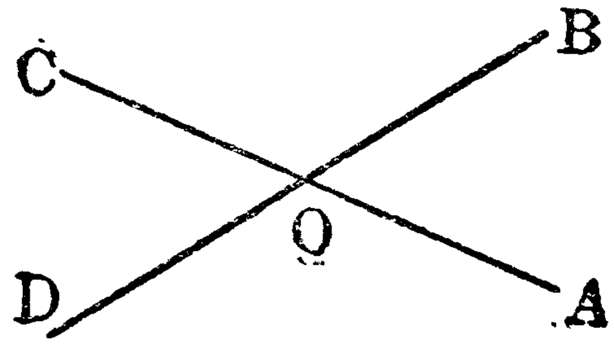
(9) 一點在圓周上,或外,或內,則此點與圓心之距離等於半徑,或大於半徑,或小於半徑.

(10) 連比例中二項一定,則其餘一項有一無二.

52. 證題之範式.

如前款言,證題時僅能用已知之事(假設,定義,公理,公設,

已證明之定理);故一語之出從何而來,必須註明於旁以明非妄,否則難期人之共信也. 今舉例以明之:



例. 對頂角相等.

〔假設〕 AOB, COD 爲對頂角.

〔終決〕 $\measuredangle AOB = COD$

	理由
〔證〕 $\measuredangle AOB$, COD 爲對頂角	假設.
故 AO, OC 成一直線; BO, OD 亦成一	對頂角之定義.
直線;由是 $\measuredangle AOB$ 爲 BOC 之補, $\measuredangle COD$	補角之定義
亦爲 BOC 之補;	
故 $\measuredangle AOB = COD$. $Q. E D$*	等角之補角相等.

〔注意〕 學者證題,必當照此格局書寫,本書爲節省篇幅起見,圓以後概從簡略,學者不可倣傚.

幾何學中主要部分爲證理之題,故求證語氣題中恆略而不書,以學者自知之毋庸縷縷也.

例 題 十

50款中所舉已證明之諸定理,除關於此例者以外,一一模倣範式詳寫其證(可仍用前文之證法而改其格式).

53. 定義五. 問題.

凡待解之題曰問題 (Problem). 問題有二種,一曰作圖

題(Problem of Construction),一曰計算題(Problem of Computation)

作圖題,爲求以幾何方法作圖令合於所設條件之題.

計算題,則設一圖中若干部分之度數以求他部分度數之題也.

作圖題分二部分,一爲所設條件,一爲欲作何圖. 題語普徧者,宜任意設條件中所言圖之部分而後說明之. 作此圖之方法曰解法(Construction),所作之圖曰解答(Solution). 解答能否合於所設條件宜有證(Proof),查考解法能有之範圍,研究解答種種之特例曰討論(Discussion).

幾何方法,謂僅用幾何學所許用之具藉公設以作圖之法.

幾何學所許用之具爲不劃分寸之直尺及規筆.

計算題實即算術或代數學之應用題.

54.　定義六.

定理及問題總名曰設題(Proposition).

55.　幾何學之精神及功用.

幾何學之精神,在系統謹嚴,終始一貫,語不妄發,無徵不信.

幾何學之功用,能使心粗者細,氣浮者靜,思密者肆應有

---

*Q. E. D. 爲已證明之畧語.

方,才大者收斂就範,幾何學乃發展吾人智識教導吾人推理之學問,能使吾人就淆然雜陳之諸事中,汰其龐雜而擷其英華配置先後,秩然有序;尤能使吾人出言吐詞皆有理法,左右逢源,無虞隕越.在昔徐光啟有言曰,人具上資而意理疏莽即上資無用,人具中材而心思縝密即中材有用;能通幾何之學縝密甚矣,故率天下之人而歸於實用者是或其所由之道也,旨哉斯言.其於幾何,知其眞矣.

第　二　編

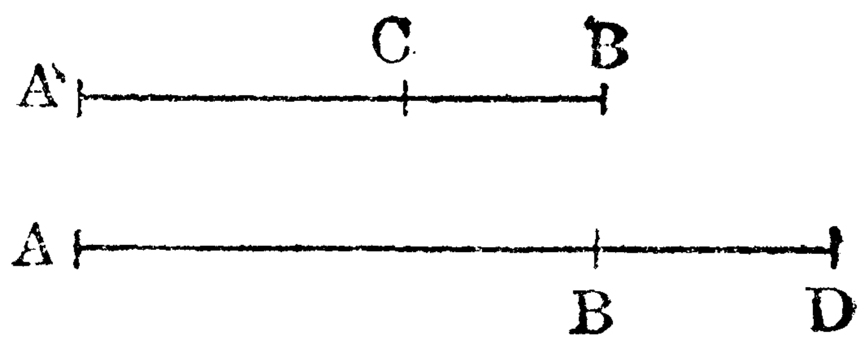
直　線　圖

第一章　直線及角

1. 定義一.

一點在一線分之上,則曰線分内分於(is divided internally) 此點,若在線分之延線上,則曰線分外分於(is divided externally)此點.

如圖,線分 AB 内分於 C,外分於 D



於此.　$AB=AC+CB,\cdots\cdots(1)$

又　$AB=AD-BD\cdots\cdots(2)$

2, 簡單之定理.

定理一. 一線分之中點有一無二.

定理二. 一角之等分線有一無二.

定理三. 一直線上一點之垂線有一無二.

定理四. 凡直線角皆相等.

系一. 凡周角皆相等.

系二. 凡直角皆相等.

系三. 直線角等於二直角,周角等於四直角.

定理五. 一點周圍順次諸隣角之和等於一周角.

系. 順次諸隣角之兩外邊成一直線,則此諸角和等於一直線角.

定理六. 二隣角和等於一直線角,則其兩外邊成一直線.

定理七. 等角之補角相等.

系. 等角之餘角相等.

定理八. 對頂角相等.

定理九. 一直線截他二直線,若在所得八角中有一雙同位角相等,則四個銳角皆相等,四個鈍角皆相等,二雙同旁內角各互爲補.

例題一　定理

(1)　C 爲線分 AB 之任意內分點, M 爲中點,則

$$MC=\tfrac{1}{2}(AC\sim CB)^{*}$$

(2)　在前題中, $\overrightarrow{AC}=\tfrac{1}{2}\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{MC}$,† $\overrightarrow{CB}=\tfrac{1}{2}\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{MC}$.

(3)　在(1)題中,若 $AC>CB$, 則 $AC>AM>CB$.

(4)　D 爲線分 AB 之任意外分點, M 爲中點,則

$$MD=\tfrac{1}{2}(AD+BD).$$

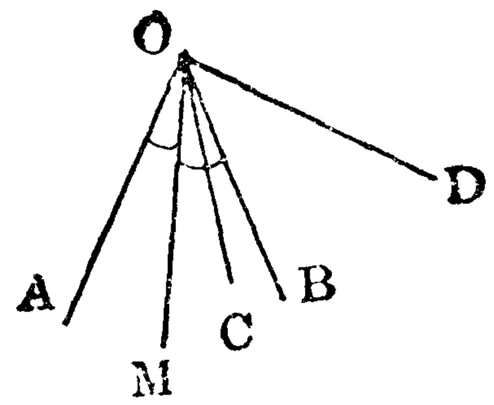
---

*∼ 讀差,示 AC, CB 中大者減小者之餘.

† $\overrightarrow{AC}$ 示方向線分 AB, 餘倣此

(5)　OC 爲在角 AOB 內之任意半射線, OM 爲 $\measuredangle AOB$ 之等分線,則

$$\measuredangle MOC=\tfrac{1}{2}(AOC\sim COB).$$



(6)　在前題中,若 $\measuredangle AOC>COB$, 則

$\measuredangle AOC=\tfrac{1}{2}\measuredangle AOB+MOC$,

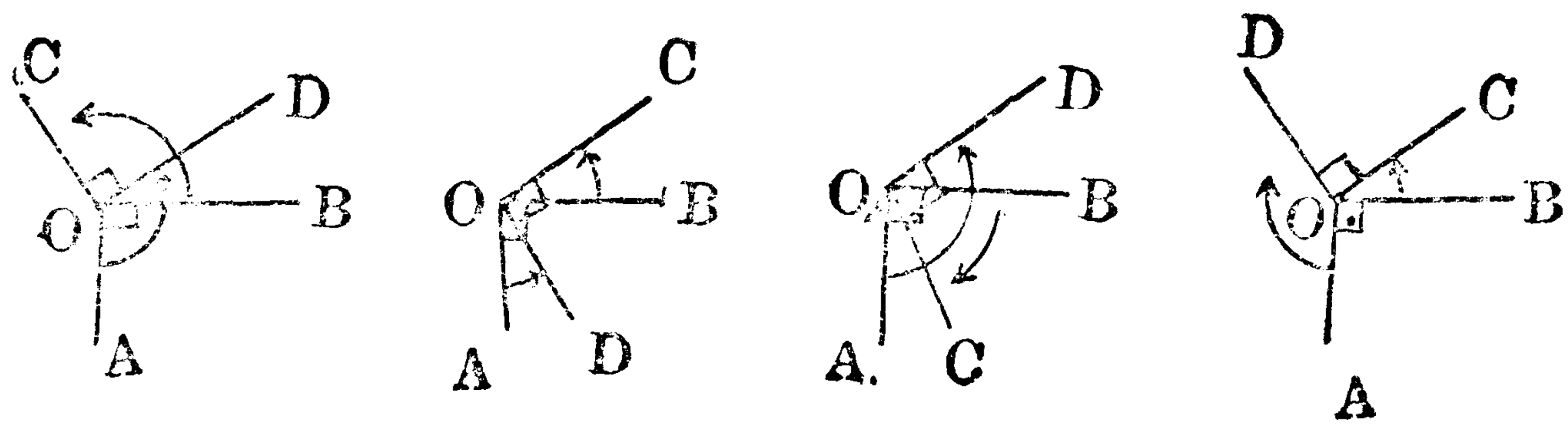
$\measuredangle COB=\tfrac{1}{2}\measuredangle AOB-MOC$.

(7)　在前題中, $\measuredangle AOC>\tfrac{1}{2}\measuredangle AOB>\measuredangle COB$

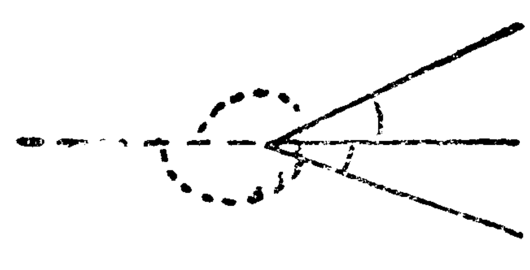
(8)　若半射線 OD 在角 AOB 之外而 OM 爲 $\measuredangle AOB$ 之等分線,則

$$\measuredangle MOD=\tfrac{1}{2}(AOD+BOD).$$

(9)　二個直角 AOB, COD 共有頂點 O, 則二角 AOD, BOC 或相等,或互爲補。

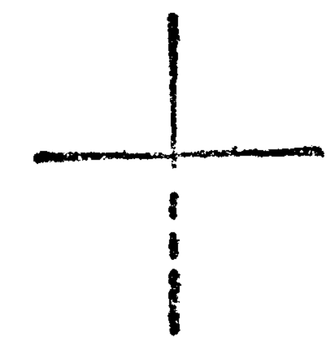


(10)　一角等分線之延線等分此角之相屬角。



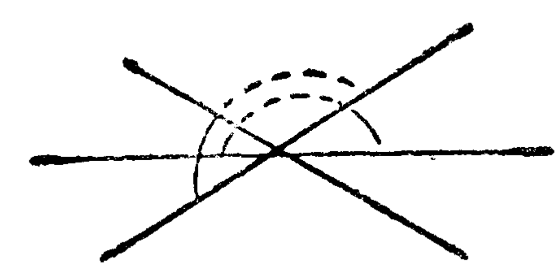
(11)　二直線相交所成四角中,其一爲直角,則他三角亦爲直角。

(12)　第一直線垂直於第二直線,則其延線亦垂直於第二直線.



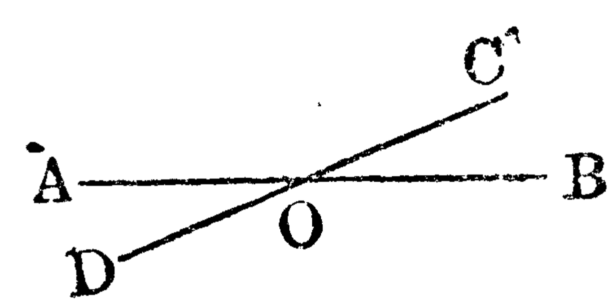
(13)　第一直線垂直於第二直線,則第二直線亦垂直於第一直線.

(14)　二個對頂角之等分線合成一直線.



(15)　二個隣補角之等分線互相垂直.

(16)　二個半射線 OC, OD 分居直線 AOB 之兩旁而 $\measuredangle AOC = BOD$, 則 CO, OD 成一直線.



3　定義二.

二直線互相垂直曰直交(are perpendicular to each other), 互爲斜線曰斜交(are oblique to each other).

4.　定義三.

二角爲隣補角,則可名其一爲內角,他一爲外角.

一角及其外角之等分線名曰內等分線 (Bisector) 及外等分線(The bisector of an exterior angle).

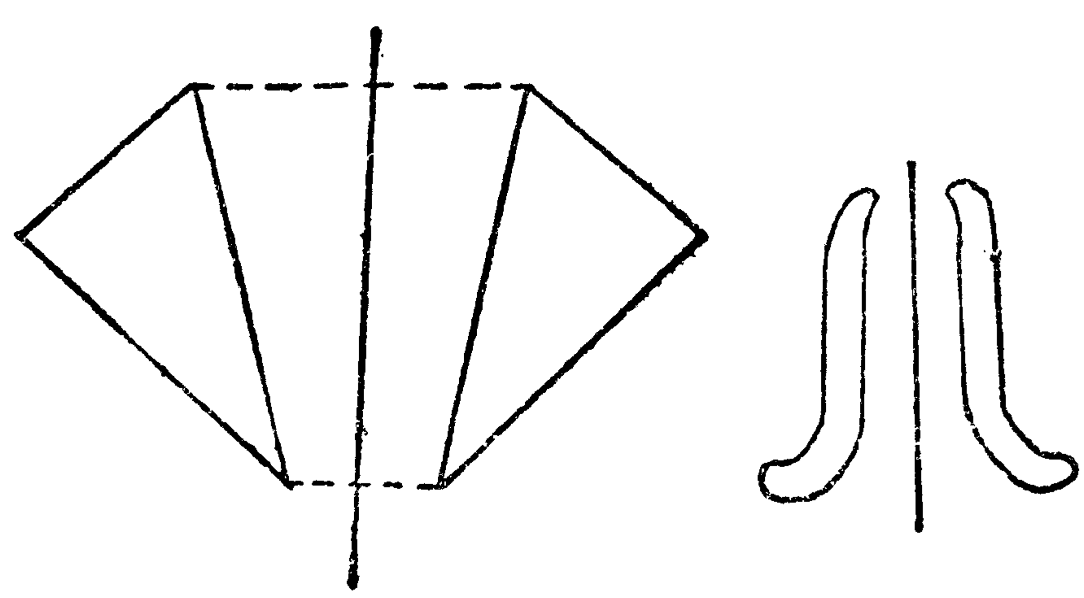
5.　定義四.

一法用於一幾何圖上而可產生一新圖者曰幾何運算(Geometric Operation).

6. 幾何運算一. 軸轉. 半軸轉.

一平面爲一直線分成二個半平面. 固定此直線而以一個半平面繞此直線旋轉,是曰軸轉(Rotation about an axis)此直線爲軸 (Axis). 轉至與又一個半平面合時曰半軸轉. 於是第一半平面上之圖因半軸轉而至第二半平面上,其形象大小皆可不變(幾何公理一). 在此法中,同點之前後二位置曰對應點 (Corresponding Points),同線之前後二位置曰對應線 (Corresponding Lines), 同圖之前後二位置曰對應圖(Corresponding Figures). 凡一圖中之諸要素行半軸轉後可一一與其對應圖中各對應要素相重合. 軸上諸點不以旋轉而變其位置,故自爲對應點,而軸自爲對應線.

7. 定義五.



二圖爲半軸轉中之對應圖,則曰此二圖關於軸爲對稱(to be symmetric with respect to an axis),旋轉之軸爲對稱軸 (Axis of Symmetry), 對應點爲對稱點,對應線爲對稱線.

8 定義六.

一線分中點之垂線爲此線分之垂直等分線(Perpendicular-bisector).

9. **定義七.**

二個距離相等曰等距(Equidistant).

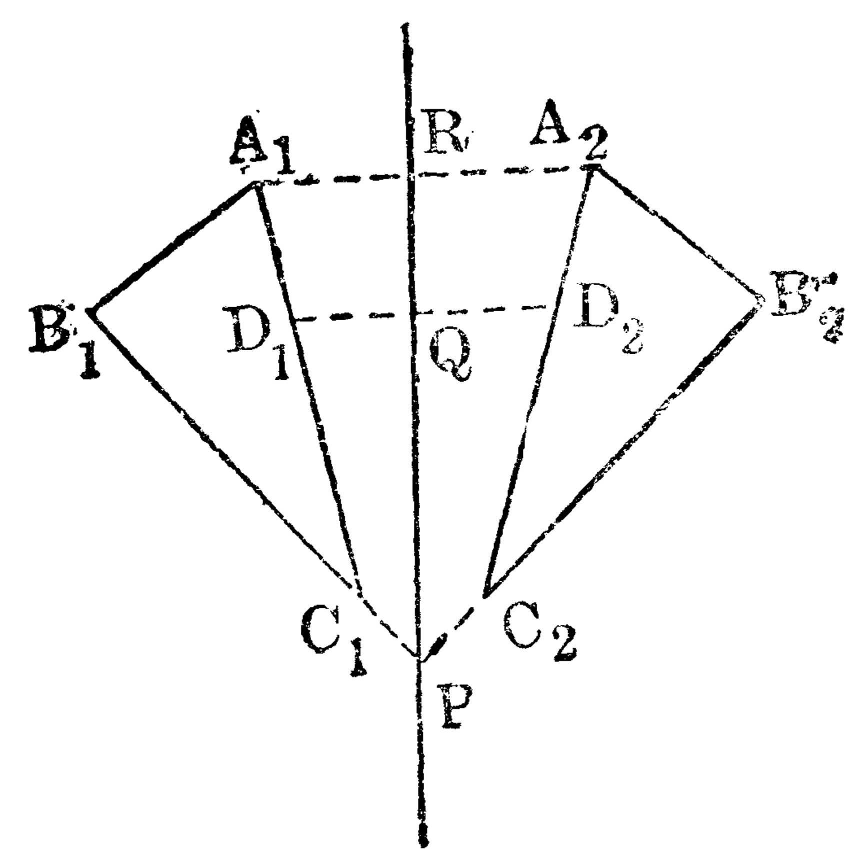
10. **定理十(軸對稱之定理).**

二圖關於一軸爲對稱,則

(一) 此二圖爲全等形,

(二) 二圖中二雙對稱點之距離相等而爲對稱線分;

(三) 二圖中二雙對稱線之會爲對稱點.



〔假設〕二圖 $A_1B_1C_1$, $A_2B_2C_2$ 關於軸 PQ 為對稱; A_1 及 A_2, B_1 及 B_2,…爲各雙對稱點; B_1C_1 及 B_2C_2, C_1A_1 及 C_2A_2,……爲各雙對稱線.

〔終決〕(一) $A_1B_1C_1 \cong A_2B_2C_2$;* (二) $A_1B_1=A_2B_2$; 且 A_1B_1 及 A_2B_2 爲對稱線分; (三) C_1 及 C_2 爲對稱點.

〔證〕 以對稱軸作爲半軸轉之軸, | 軸對稱之定義

*≌爲全等於,表示分居其兩端之二圖全等。

†∵故也。

則 $A_1B_1C_1$ 及 $A_2B_2C_2$ 為一雙對應圖;	
故行半軸轉,則此二圖相重合;	半軸轉之定義.
而凡對應點皆相合,對應線皆相合;	
∴ $A_1B_1C_1 \cong A_2B_2C_2$;	合同圖定義.
A_1B_1 及 A_2B_2 為對稱線分而 $A_1B_1=A_2B_2$,	對稱線之定義,一編 §23.
又 C_1 及 C_2 為對稱點　*Q. E. D.*	對稱點之定義.

系一. 在軸對稱二圖中,二雙對稱點之聯(無盡直線)為一雙對稱線(從定理中(二)可知).

系二. 二雙對稱線之交角相等(一編 §26).

系三. 一雙對稱點之聯線分垂直於軸而為軸所等分.

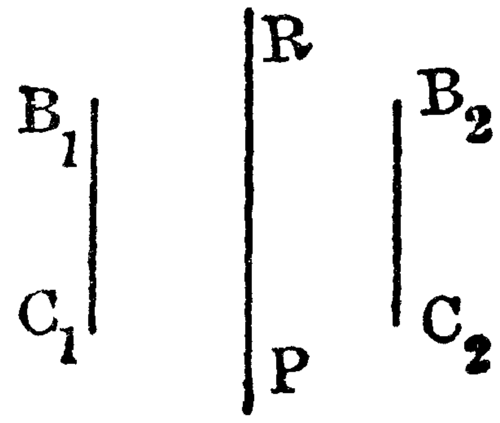
例如 A_1A_2 為軸所垂直等分. 何則, A_1A_2 交軸 PR 於 R, 則 RA_1 及 RA_2 為一雙對稱線分〔定理中(二)〕, PR 自為對稱線(對稱之定義),故 $A_1R=A_2R$, 及 $\measuredangle A_1RP=A_2RP$ (系二), 由是 $A_1A_2 \perp RP$ (垂線之定義),

系四. 一雙相交對稱線之會在軸上而以軸為其交角之等分線.

例如 B_1C_1 及 B_2C_2 會於軸上一點 P, 且 PR 等分 $\measuredangle B_1PB_2$.

何則，B_1C_1 及 B_2C_2 爲對稱線，軸 PR 自爲對稱線，故 B_1C_1 及 PR 之交點當爲 B_2C_2 及 PR 交點 P 之對稱點〔定理中(三)〕；然 P 自爲對稱點，故前二線之會亦爲 P，卽 B_1C_1 及 B_2C_2 會於軸上．又從系二，知 $\angle B_1PR = B_2PR$．

系五．一雙平行對稱線與軸平行．



例如 B_1C_1 及 B_2C_2 若平行，則此二線又與軸 RP 平行．何則，使 B_2C_2 與軸交，則此交點亦爲 B_1C_1 與軸之交點(系四)，卽 B_1C_1 與 B_2C_2 當相交矣；此不合理；故 B_2C_2 不與軸交．同理，可知 B_1C_1 亦不與軸交．

系六．軸之一個垂線交任意一雙對稱線於一雙對稱點．

例如 D_1, D_2 爲直交軸於 Q 之一線與一雙對稱線 C_1A_1, C_2A_2 之交點，則 D_1 及 D_2 爲一雙對稱點．何則，行半軸轉時，QD_1 及 QD_2 可相合(垂線之定義)，故爲一雙對稱線；由是可知 D_1 及 D_2 爲一雙對稱點〔定理中(3)〕．

軸對稱之記號爲 $\wedge$．例如 $A_1B_1C_1$ 及 $A_2B_2C_2$ 關於一軸爲對稱記作 $A_1B_1C_1 \wedge A_2B_2C_2$．

例題二　(定理)

(1)　一角之二邊以角之等分線爲對稱軸．(由半軸

轉證之)。

(2)　一線分之兩端以線分之垂直等分線爲對稱軸。

(3)　對稱二圖中,相等二線分之一端爲對稱點,且此二線分平行,或其延線交於軸上,則其他一端亦爲對稱點。

(4)　對稱二圖中,大小相等而旋轉方向相反之二角頂點爲對稱點,且其第一邊爲對稱線,則其第二邊亦爲對稱線。

(5)　從一點至對稱軸引垂線,延長之,與其延線分之長等於未延長時垂直線分之長,則此延線止點與原有一點關於軸爲對稱點。

〔注意〕　從此題,則設一點及一軸時易於求得其對稱點。

(6)　從一線與軸之交點引一線,令與原線分居軸之兩旁而與軸成等角,則此前後兩線關於軸爲對稱線。

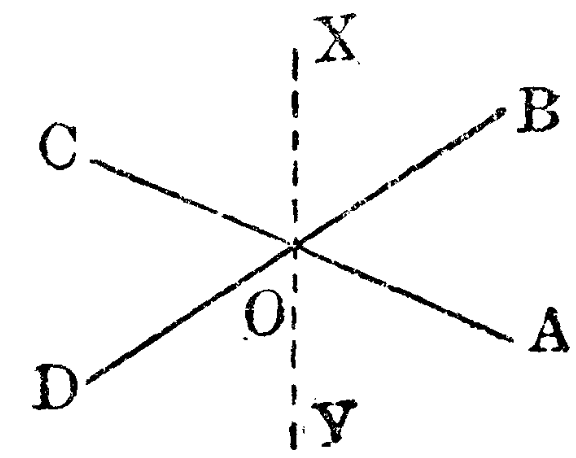
(7)　一直線與對稱軸平行,從(5)題之法求此線上任意一點關於軸之對稱點,由此所得點引軸之平行線,則此所引之線爲原線之對稱線。

(8)　與對稱軸相交之一直線,在其上取交點外任意一點用(5)題之法求其對稱點,此所得點與前一交點之聯爲原線之對稱線。

(9)　關於一軸用(5)題之法求一直線上任意二點之

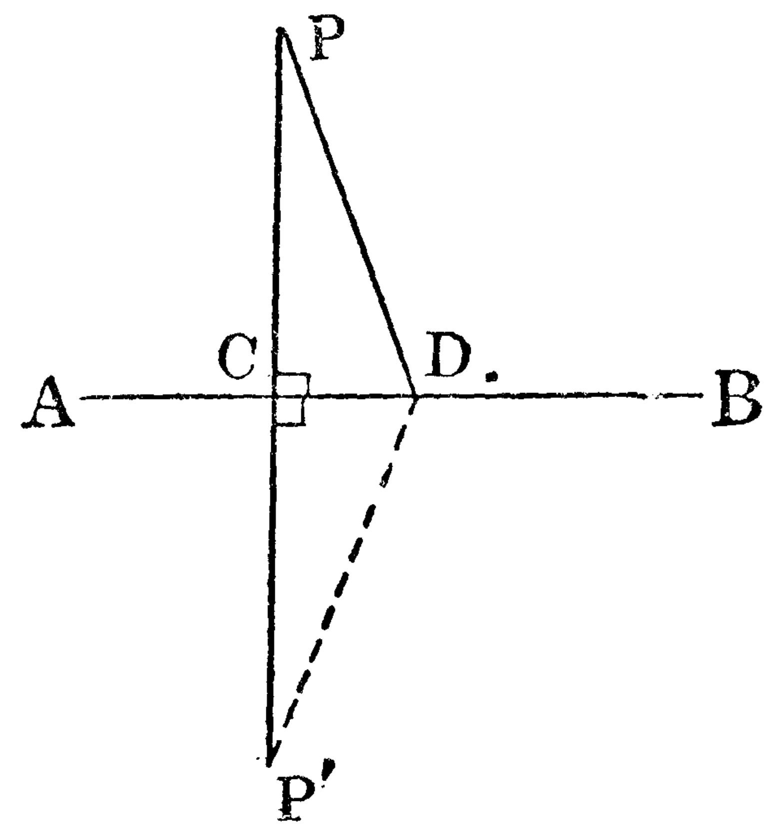
對稱點,此所得二點之聯爲前一直線之對稱線.

(10)　AOB, COD 爲一雙對頂角,以 $\measuredangle BOC$ 之等分線 XY 作對稱軸,用半軸轉證定理八.



11.　定理十一.

從一直線外一點,至此直線所引之垂線有一無二.



〔假設〕　有　直線 AB 及此外一點 P.

〔終決〕　從 P 至 AB 之垂線有一無二.

〔證〕　以 AB 爲軸求 P 之對稱點 P', 聯 PP', 交 AB 於 C, 則 PP' 以 AB 爲其垂直等分線;故從 P 至 AB 之垂線必有一個.　$Q.E.D.$　　前款系三.

從 P 至 AB 再任意引一線 PD, 聯 $P'D$, 則 $P'D$, PD 爲關於 AB 之一雙對稱線;　　前款系一.

$\therefore\ \measuredangle PDA = P'DA = \frac{1}{2}PDP'$;　　前款系四.

然 PDP' 爲折線而非直線,即 $\measuredangle PDP' \neq st\measuredangle$,　　幾何公理(三).

故 $\measuredangle PDA \neq R\measuredangle$, 即 PD 爲 AB 之斜線而非垂線;　　斜線之定義.

故從 P 至 AB 之垂線除 PC 外,無第二個. $Q.E.D.$

系.　從直線外一點至此線引垂線及任意斜線,則垂線

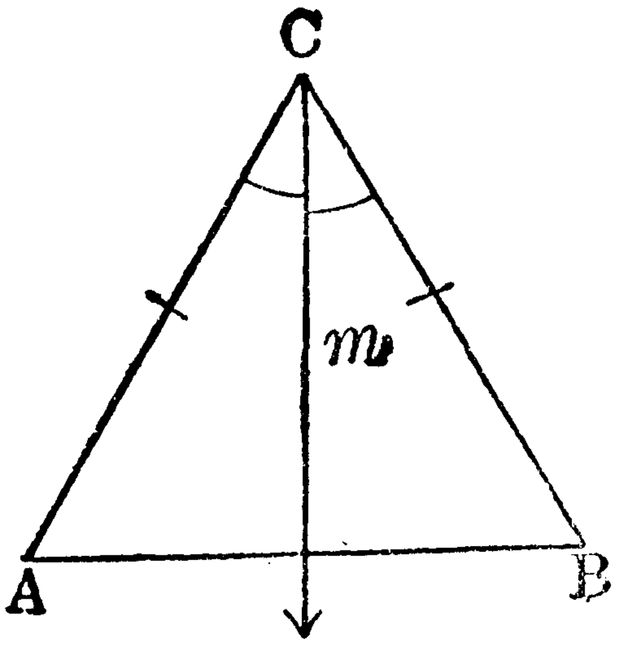
比斜線小.

例如在前圖中 $PC<PD$ 何則, $PP'=2PC$, $PD+P'D=2PD$〔定理十(二)〕;然 $PP'<PD+P'D$〔幾何公理(五)〕,故 $2PC<2PD$ 而 $PC<PD$(普徧公理).

12. 定理十二.

二等邊三角形中,對等邊之二角頂點關於等邊間角之等分線爲對稱點.

〔假設〕 $\triangle ABC$ 中, $AC=BC$, m 爲角 C 之等分線.



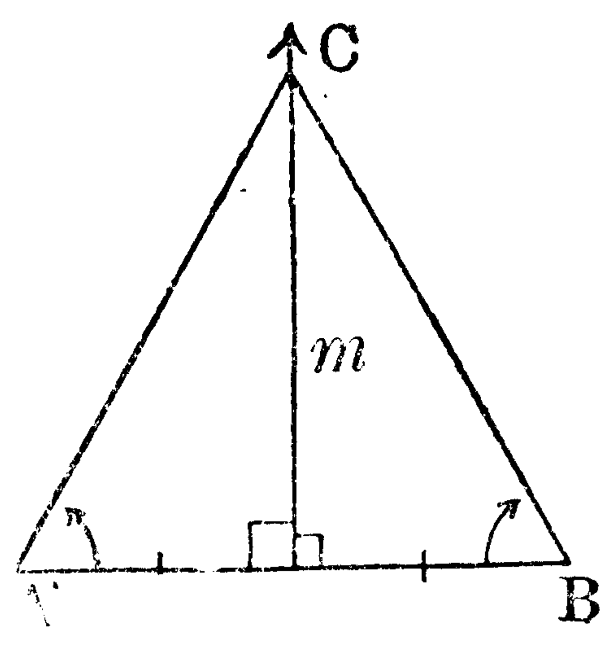
〔終決〕 A 及 B 關於 m 爲對稱點.

〔證〕 以 m 爲旋轉軸,作半軸轉,則因 m 爲 $\measuredangle ACB$ 之

定理十三.

二等角三角形,對等角之二邊關於等角間邊之垂直等分線爲對稱線.

〔假設〕 $\triangle ABC$ 中, $\measuredangle A=B$, m 爲 AB 之垂直等分線.



〔終決〕 AC 及 BC 關於 m 爲對稱線.

〔證〕 以 m 爲旋轉軸,作半軸轉,則因 m 爲 AB 之垂

等分線,故 CA 與 CB 相重(一編 §26);

又因 $CA=CB$(假設),

故 A 與 B 合(§23);

故 A, B 關於 m 爲對稱點(定義).　$Q.E.D.$

系一. 二等邊三角形中頂角之等分線垂直等分其底.(§10 系三).

系二. 二等邊三角形亦爲二等角(§10 系二).

系三. 等邊三角形亦爲等角(系二).

系四. 從直線外一點至直線引垂線及二斜線;若二斜線相等,則其足與垂線足等距,(系一).

系五. 與一線分兩端等距之點在此線分之垂直等分線上(系一).

直等分線,故 A 與 B 合(一編 §26, §23);

又因 $\measuredangle A=B$(假設),

故 AC 與 BC 相重(§26);

故 AC, BC 關於 m 爲對稱線(定義).　$Q.E.D.$

系一. 二等角三角形中底之垂直等分線等分頂角(§10 系四).

系二. 二等角三角形亦爲二等邊〔§10(二)〕.

系三. 等角三角形亦爲等邊(系二).

系四. 從直線外一點至直線引垂線及二斜線,若二斜線足與垂線足等距,則此二斜線相等(系一).

系五. 一線分之垂直等分線上之點與其兩端等距(系一).

13. 定義八.

有一對稱軸之圖曰有軸圖(Axial Figure).

例如二等邊三角形有一個對稱軸,等邊三角形有三個對稱軸.

〔注意〕　等邊三角形或等角三角形同爲正三角形.

14. 定義九.

有彼此二個定理,此定理之假設爲彼定理之終決,此定理之終決爲彼定理之假設,則此二定理互爲倒(Converse).

例如 §12 中左右二個系一互爲倒.

凡一定理眞確,則其倒定理之確否未可知,當作爲別一定理而證之.

15. 定義十.

從三角形一角頂點至對邊所引之垂線爲三角形之垂線 (Perpendicular),或卽曰高. 從一角頂點至對邊中點之線分爲三角形之中線 (Median), 從一角頂至對邊所引此角之等分線爲三角形之等分角線(Angle-bisector).

例題三　(定理)

(1)　同一直線之二垂線必平行(證其不能會於一點).

(2)　直角三角形之直角二邊皆比斜邊小.

(3)　從二等邊三角形頂角點至底所引之垂線必過

底之中點.

(4) 從二等邊三角形頂角點至底所引之中線必垂直於底.

(5) 從三角形一角頂點所引角之等分線垂直於對邊,則此形為二等邊.

(6) 從三角形一角頂點所引角之等分線過底之中點,則此形為二等邊.

(7) 三角形一邊之垂直等分線過對角頂點,則此線亦必等分對角.

(8) 從一點至一直線引垂線及二斜線,若此二斜線與垂線成等角,則此二斜線相等.

(9) 從一點至一直線引垂線及相等二斜線,則此二斜線與垂線成等角.

(10) 三角形二邊垂直等分線之交點與三個角點等距.

第二章 平行線

16. 幾何運算二. 中心旋轉. 半旋轉.

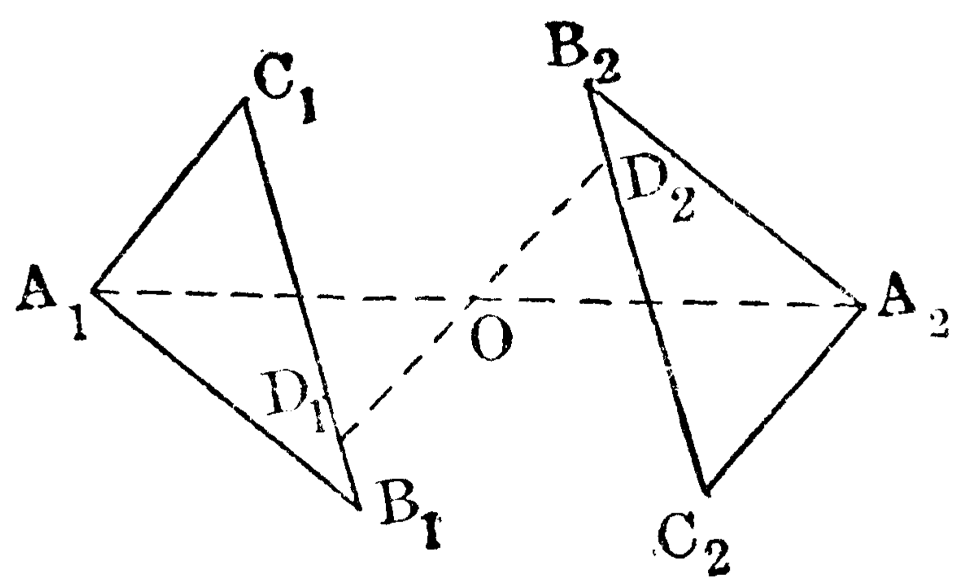
一圖繞其所居平面中一點而在此平面中旋轉,是曰中心旋轉(Rotation about a center),此點為中心(Center);若轉過二直角,則曰半旋轉. 一圖行半旋轉後其形象大小皆可

不變(幾何公理一),故原位置中之圖與旋轉後位置之圖全等. 如此同圖之前後二位置曰對應圖,同點之前後二位置曰對應點,同線之前後二位置曰對應線. 凡一圖中諸要素行半旋轉後可各與其對應圖中諸對應要素相重合. 中心不以旋轉而變其位置,故自爲對應點.

17. 定義十一.

二圖爲半旋轉中之對應圖,則曰此二圖關於中心爲對稱(to be symmetric with respect to a center),旋轉之中心爲對稱中心(Center of symmetry),對應點爲對稱點,對應線爲對稱線.

18. 定理十四(中心對稱之定理).



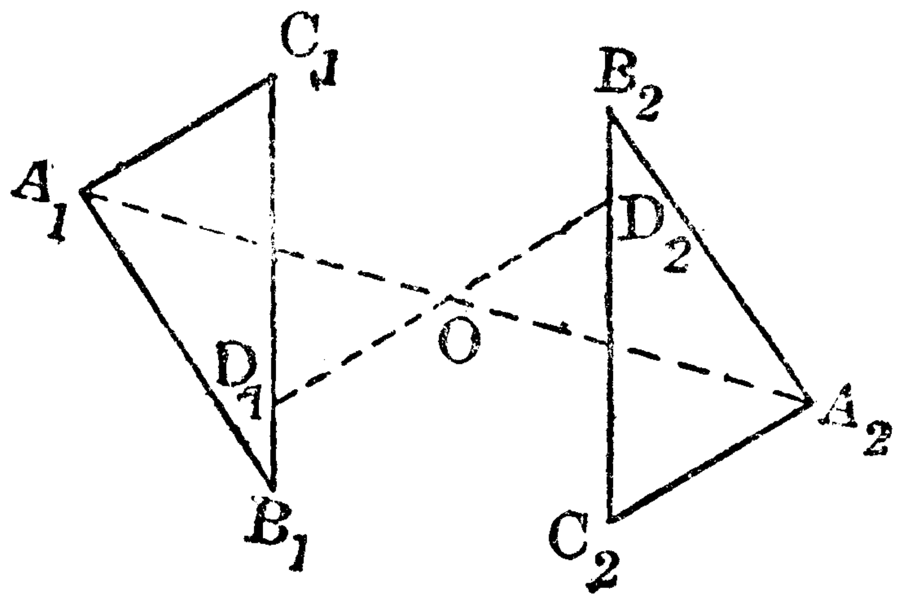
二圖關於一中心爲對稱,則.

(一) 此二圖爲全等形;

(二) 二圖中二雙對稱點之距離相等而爲對稱線分.

(三) 二圖中二雙對稱線之會爲對稱點.

〔假設〕 二圖 $A_1B_1C_1$, $A_2B_2C_2$ 關於中心 O 爲對稱; A_1 及 A_2, B_1 及 B_2, … 爲各雙對稱點; B_1C_1 及 B_2C_2, C_1A_1 及 C_2A_2, … 爲各雙對稱線.



〔終決〕

(一)　$A_1B_1C_1 \cong A_2B_2C_2$;

(二)　$A_1B_1=A_2B_2$, 且 A_1B_1 及 A_2A_2 爲對稱線分;

(三)　C_1 及 C_2 爲對稱點.

〔證〕　以對稱 O 中心爲半旋轉中心,則 $A_1B_1C_1$ 及 $A_2B_2C_2$ 爲一雙對應圖;	中心對稱定義.
故行半旋轉,則此二圖相重合而凡對應點皆相合,對應線皆相合;	半旋轉定義.
$\therefore\ A_1B_1C_1 \cong A_2B_2C_2$	合同圖定義.
A_1B_1 及 A_2B_2 爲對稱線分,而 $A_1B_1=A_2B_2$;	對稱線之定義,一編§23.
又 C_1 及 C_2 爲對稱點　　Q.E.D	對稱點之定義.

系一.　在中心對稱二圖中,二雙對稱點之聯(無盡直線)爲一雙對稱線〔本定理(二)〕.

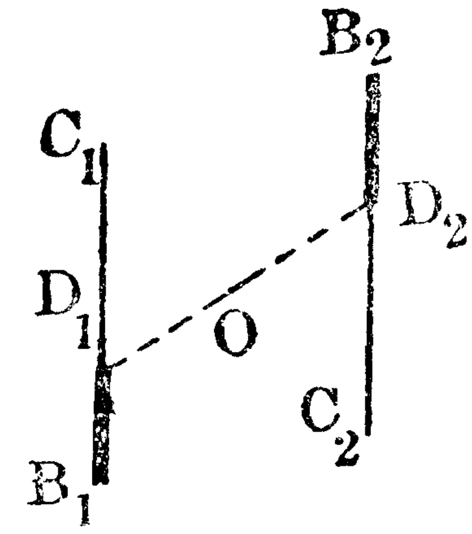
系二.　二雙對稱線之交角相等(一編§26).

系三.　任意一雙對稱點之聯線分過中心而以中心爲中點.

例如 A_1A_2 過 O 而以 O 爲中點.　何則, OA_1 轉 $2R_{\angle}$ 至 OA_2

(定義),故 A_1O, OA_2 成一直線(定理四系二),而 $OA_1=OA_2$ (一編 §23) 也.

系四. 任意一雙對稱線平行.



例如 B_1C_1 及 B_2C_2 平行. 何則, D_1, D_2 各在 B_1C_1, B_2C_2 上而爲一雙對稱點;則從系三,知以 $B_1D_1C_1$ 繞 O 作半旋轉時 D_1 合於 D_2, D_1B_1 合於 D_2B_2, D_1C_1 合於 D_2C_2 (定義);故 D_1B_1 及 D_2B_2, D_1C_1 及 D_2C_2 爲二雙對稱半射線(中心對稱定義);若 D_1B_1 與 D_2C_2 交,則 D_2B_2 與 D_1C_1 亦當相交而此交點爲前一交點之對稱點〔本定理(三)〕;此爲背理之事,不可(幾何公理三);故必 $B_1C_1//B_2C_2$.

系五. 過中心之任意線交任意一雙對稱線於一雙對稱點(系三及幾何公理三).

中心對稱之記號爲 ⋈、如 $A_1B_1C_1$ 及 $A_2B_2C_2$ 關於一中心爲對稱記作 $A_1B_1C_1$ ⋈ $A_2B_2C_2$.

例題四　(定理)

(1)　一半射線以原點爲對稱中心,則其對稱線爲其延線.

(2)　過中心之任意直線與一雙對稱線所成之錯角相等.

(3) 平行二直線以其所夾任意一線分之中點爲對稱中心.

(4) 二雙中心對稱點順次聯之成一平行四邊形.

(5) 以一點聯至中心之線分延長之使延線之長等於原線分,則其止點爲原有點關於中心之對稱點.

(6) 從(5)取一線上任意一點之對稱點,過此點引原線之平行線,則此線與原線關於中心爲對稱線.

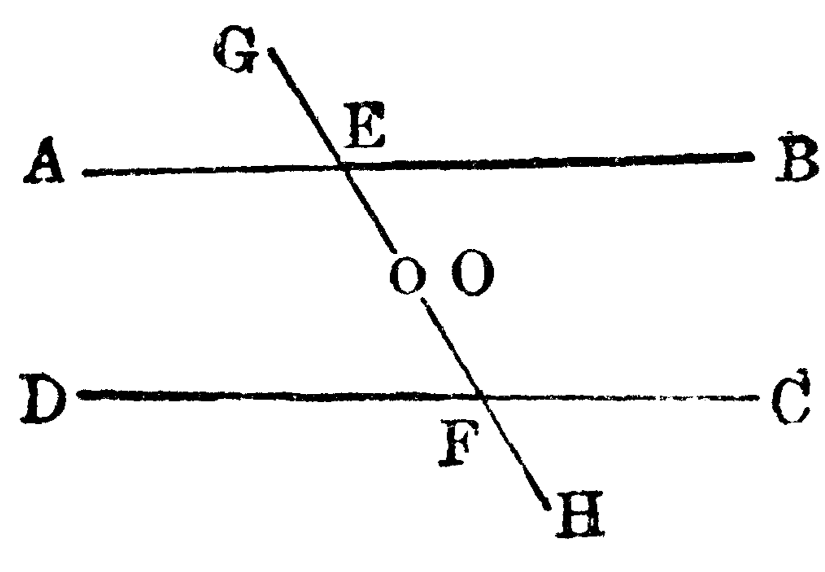
(7) 以二個對頂角之公共頂點作對稱中心而證定理八.

19. 定義十二.

有對稱中心之圖曰有中心圖(Central Figure).

20. 定理十五.

二直線以一截線截之,若所得一雙錯角相等,則此二線關於其所夾截線上線分之中點爲對稱線.



〔假設〕 二直線 AB, CD 爲截線 GH 各截於 E, F, 而 $\angle BEF = DFE$, EF 之中點爲 O

〔終決〕 取 O 爲對稱中心時, $AB \parallel CD$.

〔證〕 以圖 $OAEBG$ 繞 O 作半旋轉, | 中心旋轉定義.

則因 $OE=OF$ 而 與 F 合;	一編, §23.
因 $\measuredangle BEO=DFO$ 而 EB 與 FD 相重;	一編, §26.
$EB \parallel FD$, 卽 $AC \parallel BD$	中心對稱定義,§18系四.

系一. 對稱二直線以過對稱中心之一直線截之,則所得錯角相等(一編 §26).

系二. 二直線以一截線截之,若所得一雙錯角相等,則此二直線平行(定理十四系三).

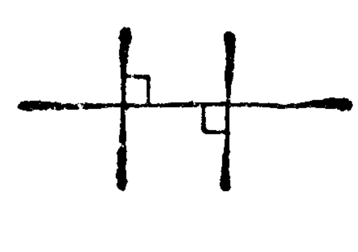
系三. 二平行線以一截線截之,則各雙錯角相等(系一).

系四. 二直線以一直線截之,(一)所得一雙同位角相等,(二)一雙同旁內角互爲補;則此二直線平行.

(一) $\measuredangle BEO=CFH$ (假設) $=DFO$ (定理八),合於本定理;

(二) $\measuredangle BEO=st\measuredangle-OFC$ (假設) $=DFO$ (定理七),合於本定理.

系五. 二平行線以一截線截之,則(一)各雙同位角相等,(二)二雙同旁內角皆互爲補.



$\measuredangle BEO=DFO$(系三) $=CFH$(定理八),由是從定理九卽得此系.

系六. 一直線之二垂線互相平行(系二).

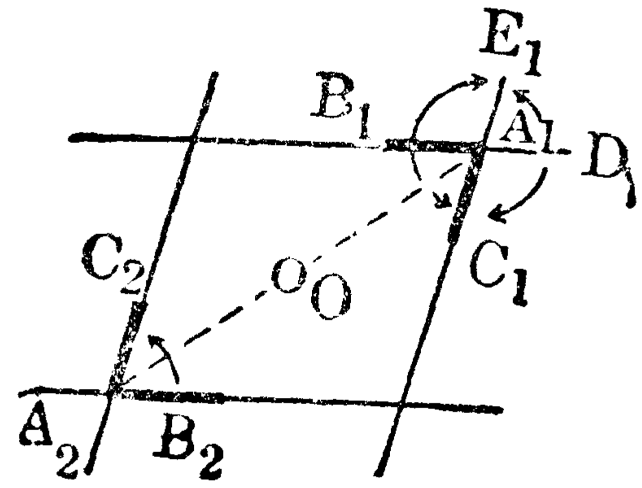
系七. 一直線垂直於二平行線之一,則亦垂直於其二(系三),卽二平行線有公共垂線.

系八. 平行二直線關於其間所夾任意線分之中點爲對稱線(從系一及本定理可知).

系九. 二角中一雙第一邊平行,一雙第二邊亦平行,則

(一) 其旋轉方向相同時,此二角相等;

(二) 其旋轉方向相反時,此二角互爲補.



如圖 $A_1B_1 // A_2B_2$. $A_1C_1 // A_2C_2$;

(一) 取 A_1A_2 中點 O 作對稱中心,則 $A_1B_1 \mid\!/\!\mid A_2B_2$, $A_1C_1 \mid\!/\!\mid A_2C_2$ (系八),故

$\measuredangle B_1A_1C_1 = B_2A_2C_2$(定理十四系二). 又

$\measuredangle D_1A_1E_1 = B_1A_1C_1$(定理八)$= B_2A_2C_2$.

(二) $\measuredangle B_1A_1E_1 = D_1A_1C_1 = st\measuredangle - B_1A_1C_1 = st\measuredangle - B_2A_2C_2$.

系十. 二個等角之旋轉方向相同而第一雙邊平行,則其第二雙邊亦必平行.

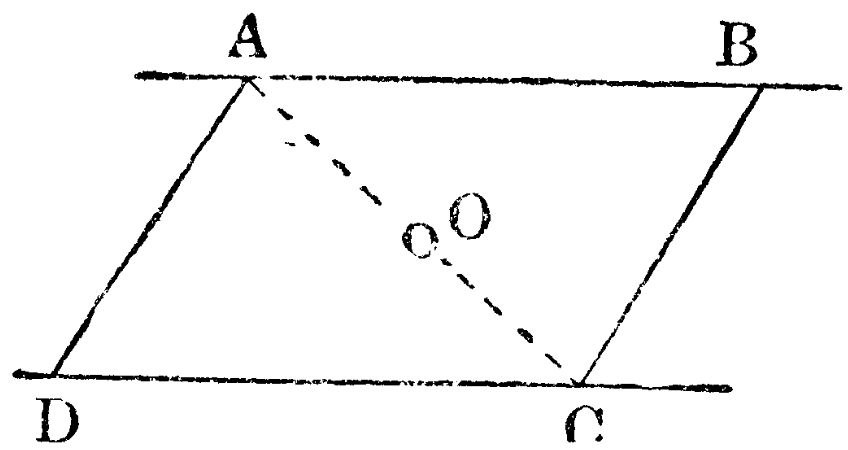
系十一. 二角中第一雙邊直交,第二雙邊亦直交,則(一)其旋轉方向相同時,此二角相等;(二)其旋轉方向相反時此二角互爲補.

以一角繞其項點轉過一直角,則歸於系九.

21. 定義十三.

二平行線以其間公共垂線之長爲其距離.

22. **定理十六.**



夾於二平行線間之平行線分相等.

〔假設〕 $AB//CD, AD//CB$,

而 AD 及 BC 夾於 AB 及 CD 之間.

〔決終〕 $AD=BC$

〔證〕 聯 AC, 以 AC 之中點 O 爲對稱中心,

因	$AB//CD$, $AD//CB$,	假設.
故	$AB\bigvee\!\!\bigwedge CD$, $AD\bigvee\!\!\bigwedge CB$;	定理十五系八.
由是	$B\bigvee\!\!\bigwedge D$;	定理十四(三).
然	$A\bigvee\!\!\bigwedge C$,	定理十四系五.
	$\therefore$ $AD=BC$ $Q.E.D$	定理十四(二).

系一. 二個相等而且平行之線分其各端在二平行線上,

設 $AD \perp\!\!\!\!= CB$* 取 AC 中點 O 爲中心,則 $AD\bigvee\!\!\bigwedge CB$(定理十五),由是 $B\bigvee\!\!\bigwedge D$(半旋轉,對稱點定義);又因 $A\bigvee\!\!\bigwedge C$,. $AB\bigvee\!\!\bigwedge CD$〔定理十四(三)〕; $AB//CD$ (定理十四系三).

系二. 二個平行線間之距離皆相等(本定理).

系三. 諸點與二平行線等距,則此諸點在平行於此二

*$\perp\!\!\!\!=$ 讀曰相等而且平行.

線之第三直線上,而此第三直線位於原二線間之正中(系一).

系四. 在平行二直線正中而與二線平行之一直線其上各點皆與原二線等距(本定理).

系五. 與一直線距離一定之點在此直線兩旁之二個平行直線上(本定理) 又,此二個平行直線上各點與原直線之距離皆一定(系二).

例題五 (定理)

(1) 用定理十五系六證定理十一.

(2) 二平行線同位角之等分線平行

(3) 二角之二雙邊各相平行且其旋轉方向相同,則此二角之等分線平行;若旋轉方向相異則其等分線直交.

(4) 二個等角之等分線平行,則此二角之二雙邊各相平行.

(5) 用公設四及定理十五系六證其系七.

(6) 過三角形各角頂引對邊之平行線,可得一新三角形,而原三角形之三個頂點爲新三角形三邊之中點.

23. 定義十四.

有二定理一定理之假設爲他一定理假設之否定辭,終決爲他定理終決之否定辭,則此二定理互爲否(Obverse).

例如本定理爲'錯角相等者爲平行線',則其否定理爲'錯角不相等之二線非平行線',或曰錯角不相等之二線必相交.

有二定理,一定理之假設爲他一定理終決之否定辭,終決爲他定理假設之否定辭,則此二定理互爲倒否(Contraposition).

例如本定理爲'錯角相等之二線平行',則其倒否定理爲'不平行線之錯角不相等'.

凡一定理眞確,則其否定理之眞確與否未可知,宜另證之;而其倒否定理則必隨之而眞確.

24. 一定理之四方面.

今從§14, §23, 舉一定理四方面之例如下:

(一)〔本定理〕　錯角相等之二線平行;

(二)〔倒定理〕　平行二線之錯角相等;

(三)〔否定理〕　錯角不相等之二線不平行;

(四)〔倒否定理〕　不平行二線之錯角不相等.

今舉其關係如下:

$\left.\begin{array}{l}(一)\\(二)\end{array}\right\}$ 互爲倒,　$\left.\begin{array}{l}(一)\\(三)\end{array}\right\}$ 互爲否,　$\left.\begin{array}{l}(一)\\(四)\end{array}\right\}$ 互爲倒否,

$\left.\begin{array}{l}(二)\\(三)\end{array}\right\}$ 互爲倒否,　$\left.\begin{array}{l}(二)\\(四)\end{array}\right\}$ 互爲否,　$\left.\begin{array}{l}(三)\\(四)\end{array}\right\}$ 互爲倒.

由是(一)與(四),或(二)與(三)皆能同時眞確(一)及(二),(一)及(三),(二)及(四),(三)及(四)中,一者是或非,他一者之是非不能豫決.

25. **已知本定理證其倒否定理之法.** **定理十七十八**

前款言本定理與其倒否定理同時眞確,此非無徵之言,今舉一例以概其餘.

已知(一)(定理十五系二),證(4):

定理十七. 相交二直線以截線截之,所得錯角不相等.

〔證〕 使錯角相等,則原二線當平行,與假設矛盾;故不可等.

已知(二)(定理十五系三),證(三).

定理十八. 二直線以一截線截之,若所得錯角不相等,則此二直線相交.

〔證〕 使二線平行,則其錯角相等而與假設矛盾,不可;故相交.

系. 二直線以一截線截之,若所得同位角不等,或同旁內角不互爲補,則此二直線相交.

〔注意〕 證二直線相交,或用本定理,或用公設四.

二定理互爲倒,或互爲否者,在前款中已見一者眞確其又一者亦爲眞確之一例;然若下例:

〔本定理〕 凡直角皆相等,

〔倒定理〕 相等之二角爲直角,

〔否定理〕 二角不爲直角者不相等;

可見本定理眞確時,其倒及否皆不眞確.

26. 歸謬證法.

欲證一定理,先否定其終决,由此否定推出與已知事理相背之結果而斷此否定爲誤,如此之證法曰歸謬證法(Reductio ad absurdum).

27. 間接證法.

證一定理之倒否定理以決定其眞確,如此證法曰間接證法(Indirect Demonstration).

歸謬證法爲間接證法之一種,故有時徑名之曰間接證法.

28. 定性質之定義.

幾何定義大致可分爲二種,一種舉圖之形象定圖名,如三角形,四邊形等定義皆是;又一種舉圖之性質定圖名,如平行線,圓之切線等定義皆是.

以圖之性質定圖名者,此圖有若干性質,則可擇其一作定義而以其餘作定理,以故此種定義與定理相類.

例如就平行線而言,亦可以'錯角相等之二線爲平行線'作定義而以'不相交之二線爲平行線'作定理.

此種定義與定理分別之處;在定理,一方面眞確時其倒及否之眞確與否未可知,定義則不然.

圖名以性質定者,有此性質之圖舉此名,舉此名則其圖有此性質,無此性質之圖不舉此名,非此名之圖卽無此性質;故以定理之一方面作定義,則其餘三方面卽皆可用.

例如: (一)不相交之二直線爲平行線,(二)平行二直線不相交,(三)相交二直線非平行線,(四)不平行二直線相交;若以(一)作定理,則雖已證明而(二),(三)兩事不能徑用須另加證明而後可;若以(一)作定義則(二),(三),(四)皆可徑用無礙.

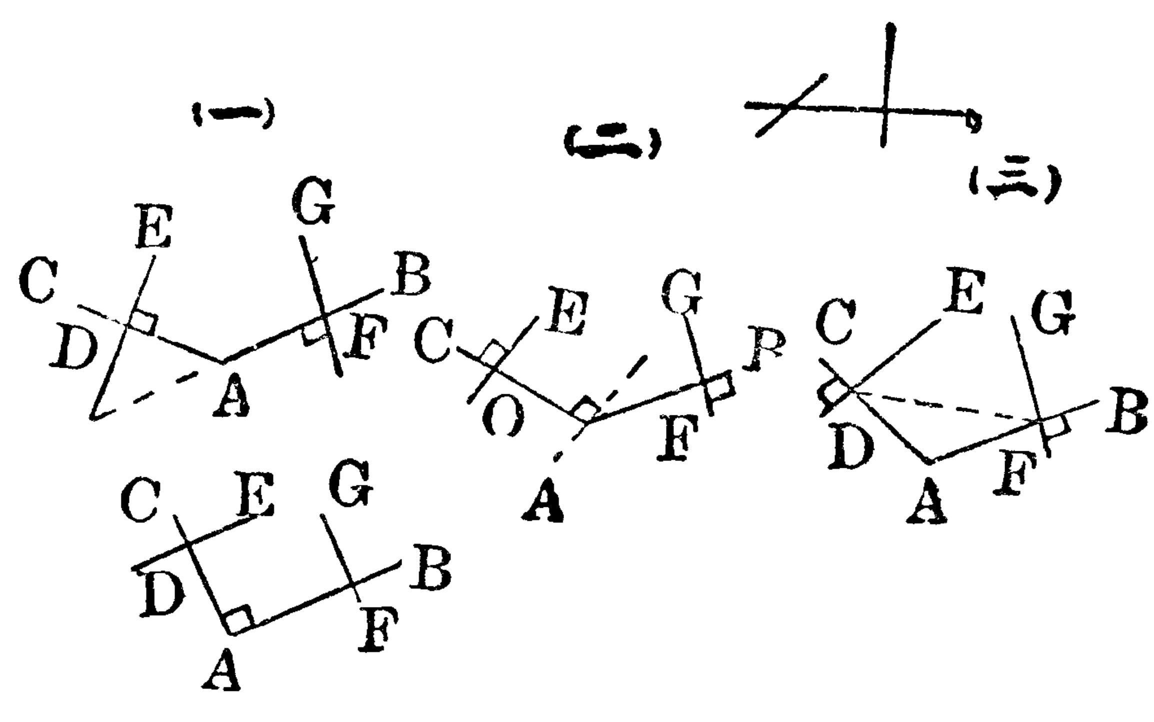
例題六 (定理)

(1) 在一個三角形中對於二邊之中線必相交.

(2) 二直線各與相交二直線平行,則此二線必相交.

(3) 一直線之垂線及斜線必相交.

(4) 相交二直線之垂線必相交.



〔提示〕 第一證法,如(一)圖,分作二起證:其一,AB, AC 斜交者,延長 BA, 累用(3)題;其二,AB, AC 直交者,用定理十五系七. 第二證法,如(二)圖,過 A 引 DE 之平行線,用(3)題及定理十五系七.

第三證法,如(三)圖,證 DF 在二角 D 及 F 中,用定理十八系.

(5) 一個三角形對於二邊之垂線必相交.

(6) 一個三角形二邊之垂直等分線必相交.

例題七

(1) 試舉定理一二,及三之倒定理及否定理.

(2) 述定理六之倒定理及否定理且言其眞確與否?

(3) 定理十及十四有倒定理否?

(4) 定理十二及十三中各對應系之關係若何?

(5) 述定理十二及十三系四之否定理?

(6) 定理十五系七之否定理若何? 確否?

(7) 定理十六系三及系四之否定理若何? 試證之.

(8) 定理十六系五之否定理若何? 證之.

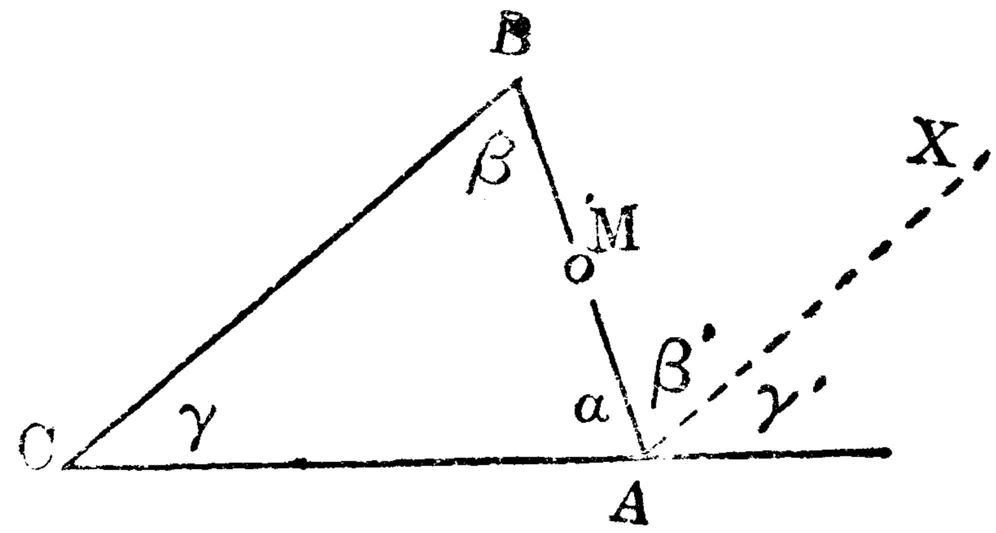
第三章 三角形

29. 定義十五.

三角形中,與一外角不相隣之二內角皆曰此外角之內對角 (Interior and opposite angles). 四角形之內角中對於與一外角相隣之一內角者爲此外角之內對角.

30. 定理十九.

三角形三內角之和等於二直角.



〔假設〕 如圖 $\alpha, \beta,$ 爲 $\triangle ABC$ 之三內角.

〔終決〕 $\measuredangle \alpha+\beta+\gamma=2R_{\measuredangle}$,

〔證〕 取 AB 中點 M 作半旋轉中心轉 $\measuredangle MBC$, 卽 β, 至 $\measuredangle MAX$, 卽 β', 則 $\measuredangle\beta'=\beta$, 又 $AX \not\parallel BC$, $\therefore AX//BC$; | 定理十四.

由是 $\measuredangle\gamma'=\gamma$; | 定理十五系三.

$\therefore \measuredangle \alpha+\beta+\gamma=\alpha+(\beta'+\gamma')=2R_{\measuredangle}$. Q. E. D. | 定理六.

系一. 三角形中任意二內角之和小於二直角(普徧公理七).

系二. 三角形之一外角等於其內對角之和(本定理)

系三. 三角形之三內角僅能有一爲直角或鈍角.

系四. 直角三角形中二銳角互爲餘.

系五. 二等邊三角形之底角必爲銳角.

系六. 二個三角形中二雙角各相等,則第三雙角亦相等.

系七. 二個直角三角形中一雙銳角相等,則又一雙銳角亦相等.

系八. 三角形一外角比其內對角之各角大.

31. 定義十六.

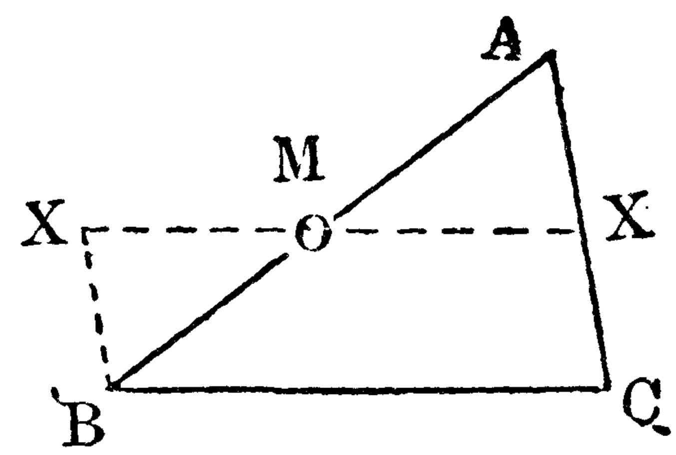
聯梯形中不平行二邊中點之線分爲梯形之中線,其平

行二邊皆爲梯形之底.

32. 定理二十.

(一) 過三角形一邊中點而與第二邊平行之直線過第三邊之中點.

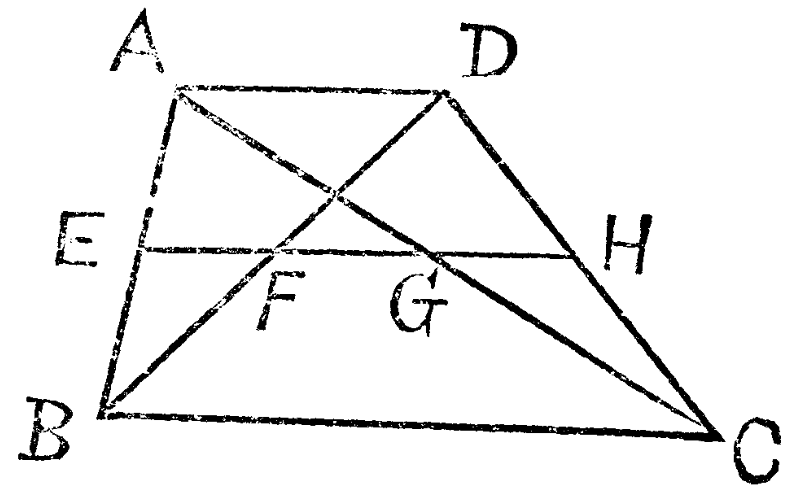
(二) 聯三角形二邊中點之線分平行於第三邊而等於其半.



〔假設〕 $\triangle ABC$ 中 M 爲 AB 之中點; (一) $MX // BC$, (二) X 爲 AC 之中點.

〔終決〕 (一) X 等分 AC; (二) $MX \perp\!\!\!\perp \frac{1}{2}BC$.

〔證〕 關於 AB 之中點 M 取 X 之對稱點 X_1,	中心旋轉.
則 $X_1 \sqcup X$, $B \sqcup A$, $\therefore BX_1 \perp\!\!\!\perp AX$;	定理十四系四,(二)及系三.
(一)因 $X_1X // BC$ (假設),	定理十六.
而 $BX_1 = XC$	
$\therefore AX = BX_1 = XC$ 而 X 等分 AC	
(二)因 $XC = AX$ (假設) $= BX_1$,	本題,定理十六系一.
而 $X_1B // XC$;	
且因 $MX = MX_1 = \frac{1}{2}X_1X$,	
而 $MX = \frac{1}{2}BC$. Q.E.D.	



系一. 梯形二邊中點之聯線分平行於二底而等於二底之半和.

G 爲 AC 中點,則 $EG//BC//AD//GH$ (本定理(二)及公設四);

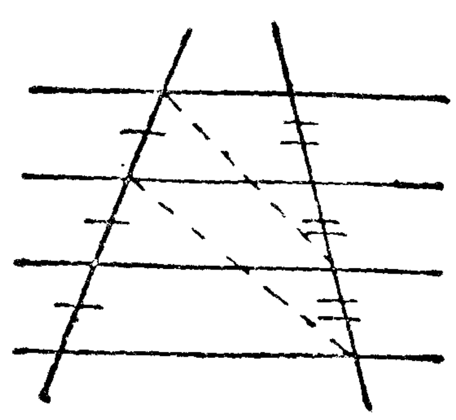
又 $EH=EG+GH=\frac{1}{2}BC+\frac{1}{2}AD=\frac{1}{2}(BC+AD)$ (本定理二)。

系二. 梯形二對角線中點之聯線分平行於二底而等於二底之半差.

$FG=FH-GH=\frac{1}{2}BC-\frac{1}{2}AD=\frac{1}{2}(BC-AD)$〔本定理(二)〕.

系三. 過梯形不平行一邊中點,而平行於二底之直線,過第二不平行邊,及二對角線之中點〔本定理(二)〕.

系四. 二直線皆與三個平行線相交,若一線爲平行線截取相等部分,則第二線亦爲平行線截取相等部分(系三)

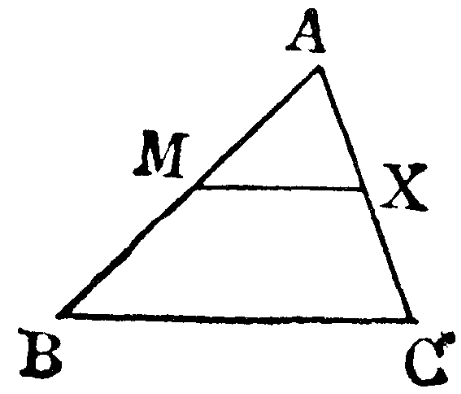


系五. 諸平行線在一截線上截取相等部分,則在他截線上亦截取相等部分(系四).

33. 同一證法.

欲證一圖有某性質,別作有此性質之圖而證所作者與欲證者同爲一圖以達目的,如此證法曰同一證法 (Rule of Identity).

例如已知『三角形 ABC 二邊 AB, AC 中點 M, X之聯線平



行於 BC', 欲證 '從 M 所引 BC 之平行線過 AC 之中點', 用同一證法,先聯 M 與 AC 中點 X 得 BC 之平行線;因從 M 所引 BC 之平行線,有一無二(公設四),故欲證之線與 MX 合一而亦過 AC 之中點 X.

例題八　(定理)

(1)　過三角形一頂點引對邊之平行線以證定理十九.

(2)　二等邊三角形頂角之外等分線平行於底.

(3)　四邊形內角之和等於四直角.

(4)　從直角三角形直角頂點至斜邊引高則其所分得之二個三角形中三雙角各相等.

(5)　三角形二角內等分線之夾角等於直角中加半第三角之和.

(6)　三角形二角外等分線之夾角等於從直角減去半第三角之差.

(7)　述 2 題之倒定理而證之.

(8)　四邊形中相隣二內角之和等於在他二角頂之二內角之和

三角形二角之內等分線必相交.

(10) 三角形二角之外等分線必相交.

(11) 從三角形二邊中點各引一線至第三邊,且各與對於第三邊之中線平行,則此所引二線及中線,分第三邊爲四等分.

(12) 順次聯不平行四邊形各邊中點引線分,則此四線分兩兩平行而且相等.

(13) 聯不平行四邊形二對邊中點至二對角線中點引線分,則此四線分兩兩平行而且相等.

(14) 聯二等邊三角形三邊中點,可分原形爲四個二等邊三角形.

(15) 從梯形一底之一角頂,引一線與過他一角頂之不平行邊平行,而止於又一底上,由此以證定理二十系一.

34. 定義十七.

二個多角形諸角兩兩相等者曰互等角(Mutually equiangular),諸邊兩兩相等者曰互等邊(Mutually equilateral),既互等角又互等邊者曰全等形(已見一編22款).

35. 定義十八.

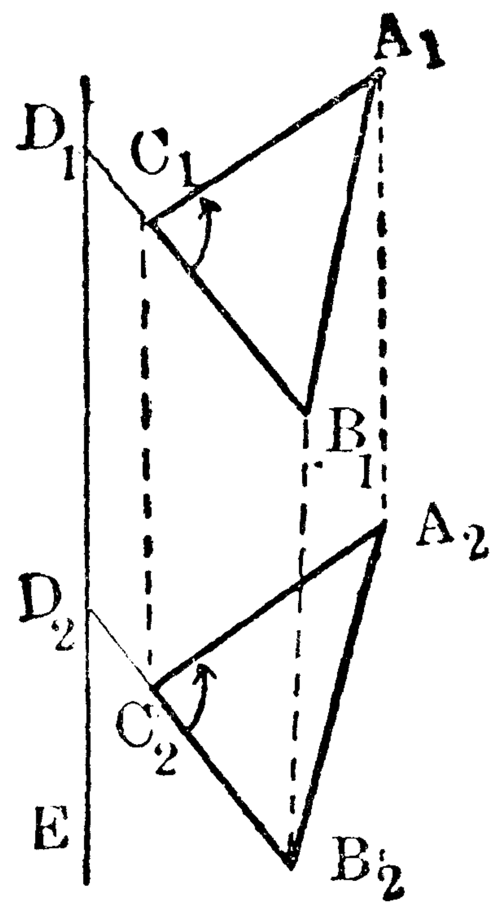
二個多角形大小不同,而形象同者曰相似形 (Similar Polygons),形象不同,而大小同者曰等積形(Equal Polygons),形象大小皆同者曰全等形 (Congruent Polygons),全等形即合同圖.

記相似用$\backsim$,記等積用$=$,記全等用$\cong$.

36.　幾何運算三.　平行移動法.

以一圖移動令其中所有各點移動之路皆與其所居平面中之一定直線平行,是曰平行移動,略曰移動(Parallel Translation),定直線爲移動之方向,各點所行路之長爲移動之距離.以一圖移動其形象大小皆可不變(幾何公理一),故前後二位置之圖全等.如此同圖之前後二位置曰對應圖,同點之前後二位置曰對應點,同角之前後二位置曰對應角,同邊之前後二位置曰對應邊.

37.　定理二十一(平行移動之定理).



二圖爲平行移動中之二對應圖,則

(一)　對應點之聯線分皆相等而且平行;

(二)　對應線分皆同向相等;

(三)　對應角皆旋轉方向相同而相等,且二雙對應邊各同向;

(四)　一圖沿對應點之聯線平行移動,則可與他圖重合.

〔假設〕　二圖$A_1B_1C_1$, $A_2B_2C_2$爲平行移動中之二個對應圖; B_1及B_2, C_1及C_2,…爲對應點; B_1C_1及B_2C_2,…爲對應線分; $\measuredangle B_1C_1A_1$及$B_2C_2A_2$,…爲對應角.

〔終決〕　(一)　$B_1B_2 \perp\!\!\!\!\!\!= C_1C_2$…;　(二)　$B_1C_1 \# B_2C_2$,…;*

---

*$\#$爲同向相等之記號.

(三)　$\measuredangle C_1=C_2$,且其旋轉方向相同;　(四)　$A_1E_1C_1 \cong A_2B_2C_2$.

〔證〕　設移動之方向為 D_1D_2E, B_1C_1 及 B_2C_2 或其延線各交 D_1D_2E 於 D_1 及 D_2, 今設想 D_1 及 D_2 各與 $A_1B_1C_1$ 及 $A_2B_2C_2$ 之關係位置不變,而以 $A_1B_1C_1$ 移動至 $A_2B_2C_2$ 時 D_1 亦隨之沿所設方向 D_1D_2 移動,且仍在 B_1C_1 或其延線上,由是 B_1C_1 移至 B_2C_2 時 D_1 當合於 D_2;	平行移動定義.
因在此移動中 $\measuredangle B_1D_1E$ 不變,故等於 $\measuredangle A_2D_2E$;	平行移動定義.
由是　$B_1D_1 \underline{\parallel} B_2D_2$;	定理十五系十.
$\therefore$ $B_1B_2 \underline{\parallel} D_1D_2$;　由是	定理十六及系一.
(一)同理, $C_1C_2 \underline{\parallel} D_1D_2$,	普偏公理(一),公設五(b).
$\therefore$ $B_1B_2 \underline{\parallel} C_1C_2$,$\cdots$.	
(二)　$B_1C_1 \# B_2C_2$;	普偏公理(三),一編 §15.
(三)如上, $C_1A_1 \# C_2A_2$,	定理十五系九,移動定義.
$\therefore$ $\measuredangle C_1=C_2$.	
(四)從平行移動定義卽可知	

系一. 二個同向相等線分以其一沿其對應一端之聯移動,則可與其二重合〔本定理(二)及(四)〕.

系二. 相等二角之旋轉方向相同,且其一雙邊爲同向,則以其一沿其角頂之聯移動時,可使與其二重合〔本定理(三)及(四)〕.

系三. 二圖中雙雙線分各同向相等,雙雙角各同向相等,則以其一沿一雙對應點之聯移動時,可與其二重合(系一及二).

二圖 $A_1B_1C_1$ 及 $A_2B_2C_2$ 爲平行移動中之二對應圖,記之爲

$$A_1B_1C_1 \# A_2B_2C_2.$$

系四. 二雙對應點之聯爲對應線〔本定理(一)及系三〕.

系五. 二雙對應線之會爲對應點〔系三〕.

38. 定理二十二.

在二個三角形中,

(一) 二雙角各相等,在此二雙角頂間之邊亦相等;

(二) 二雙邊各相等,其所雙之角亦相等;

(三) 三雙邊各相等;

(四) 二雙邊各相等,對一雙等邊之角相等,對他雙等邊之角,或皆爲銳角,或皆爲鈍角;

則此二個三角形,爲全等形.

〔假設〕 在$\triangle$*$A_1B_1C_1$,

$A_2B_2C_2$ 中,

(一) $\measuredangle A_1=A_2$, $\measuredangle B_1=B_2$,

$A_1B_1=A_2B_2$;

(二) $A_1B_1=A_2B_2$,

$B_1C_1=B_2C_2$, $\measuredangle B_1=B_2$;

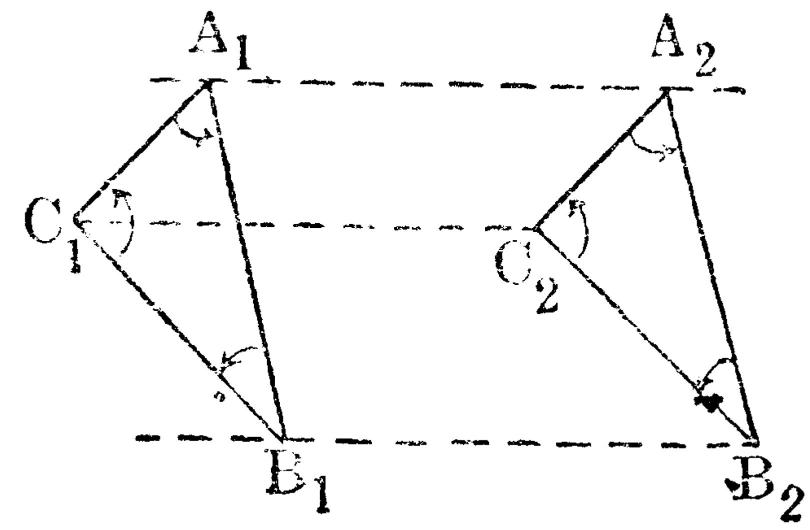
(三) $A_1B_1=A_2B_2$,

$B_1C_1=B_2C_1$, $C_1A_1=C_2A_2$;

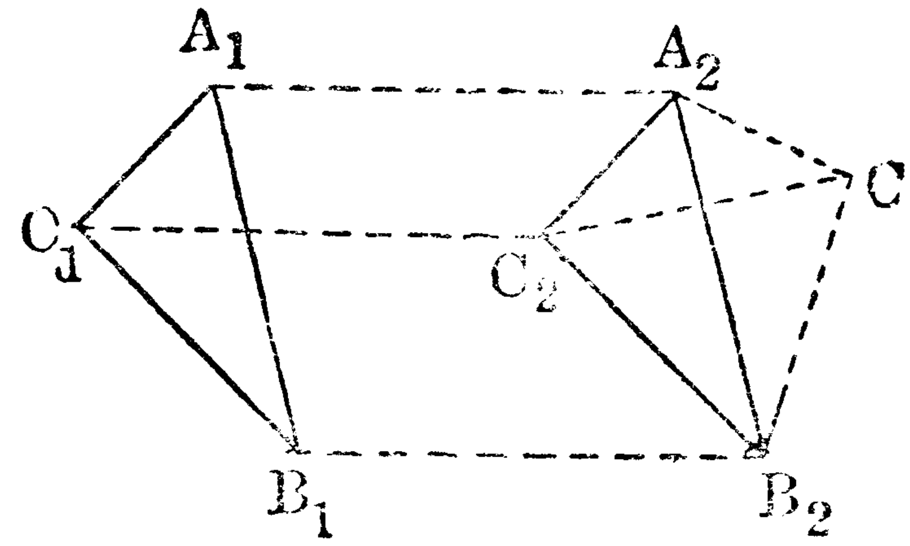
(四) $A_1B_1=A_2B_2$,

$C_1A_1=C_2A_2$, $\measuredangle B_1=B_2$, 且 $\measuredangle C_1$, C_2 或同爲銳角,或同爲鈍角.

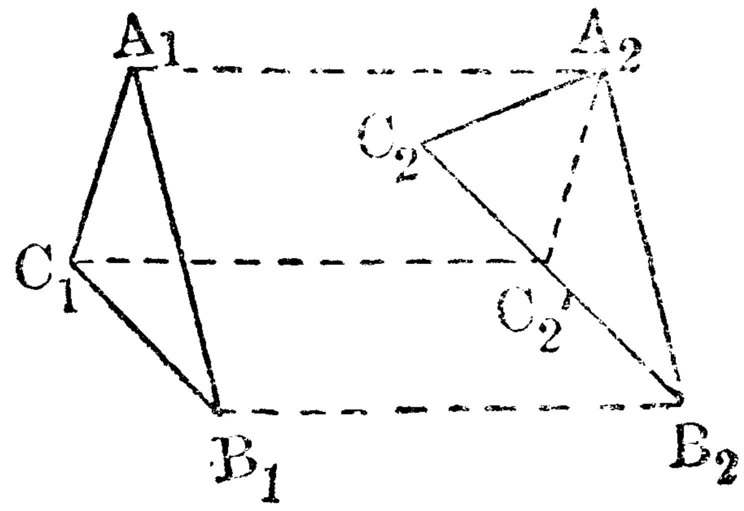
(Ⅰ)



(Ⅱ)



(Ⅲ)



〔終決〕 $\triangle A_1B_1C_1 \cong A_2B_2C_2$.

〔證〕 位置二個三角形,使

$A_1B_1 // A_2B_2$,

又使二形皆同向,卽 $A_1B_1C_1$ 及 $A_2B_2C_2$之對應次序相同. — 幾何公理一.

(一) $A_1B_1 \# A_2B_2$, $\measuredangle A_1=A_2$, $\measuredangle B_1=B_2$, 且 $\measuredangle A_1$ 及 A_2, $\measuredangle B_1$ 及 B_2 旋轉方向皆同, (圖 I) — 本題.

*$\triangle$ 表多數三角形

由是 $B_1C_1 /\!/ B_2C_2$, $C_1A_1 /\!/ C_2A_2$,	§20 系十.
故 $\measuredangle C_1 \# C_2$, 而	定理二十一(三)及系三.
$\triangle A_1B_1C_1 \cong A_2B_2C_2$. Q. E D	
(二) $A_1B_1 \# A_2B_2$, $\measuredangle B_1 \# B_2$(圖 I)	本題,前款(二)及(三)
$\therefore$ $B_1C_1 /\!/ B_2C_2$;	§20 系十.
又因 $B_1C_1 = B_2C_2$, 而 $B_1C_1 \# B_2C_2$;	前款(二).
$\therefore$ $C_1A_1 \# C_2A_2$, 而	前款系四及系三.
$\triangle A_1B_1C_1 \cong A_2B_2C_2$. Q. E. D.	
(三) 以 $\triangle A_1B_1C_1$ 沿 A_1A_2 移動, 則 A_1B_1 可合於 A_2B_2;	前款系一.
此時 C_1 及 C_2 或合或不合,二者必居其一;	
若 C_1 與 C_2 相合則	§22.
$\triangle A_1B_1C_1 \cong A_2B_2C_2$; (圖 I) Q. E D.	
若 C_1 與 C_2 不合而落於 C_1', 則因 $B_2C_1' = B_2C_2$, $C_1'A_2 = C_2A_2$,	假設.
而 B_2 及 A_2 皆當在 C_2C_1' 之垂直等分線上,故 C_2, C_1' 分居 A_2B_2 之兩旁	定理十二系五.
卽 $A_1B_1C_1$ 及 $A_2B_2C_2$ 非同向;(圖II)	
此事與前位置之法自相矛盾,不可;	

故 C_1 必與 C_2 合而僅有此全等之一途. $Q.E D$	
(四) $A_1B_1 \# A_2B_2$, $\measuredangle B_1 \# B_2$;	本題前款(二)及(三).
$\measuredangle B_1A_1C_1$ 與 $B_2A_2C_2$ 未知其相等與否:	
若相等(圖 I),則從(一),	
$\triangle A_1B_1C_1 \cong A_2B_2C_2$; $Q.E D$	
若不等,則引 A_2C_2' 令	
$\measuredangle B_2A_2C_2' = B_1A_1C_1$ (圖III),	
由是 $\triangle A_1B_1C_1 \cong A_2B_2C_2'$,	本題(一).
此時因 $A_2C_2 = A_1C_1 = A_2C_2,'$ 而 $\measuredangle A_2C_2'C_2 = C_2$;	定理十二系二.
於是	
$\measuredangle C_2 + C_1 = A_2C_2'C_2 + A_2C_2'B_2 = 2R\measuredangle$;	普偏公理二,一編§29.
然今因 $\measuredangle C_1$ 及 C_2 同爲銳角或同爲鈍角,不能合於此式;	假設.
故 $\measuredangle B_1A_1C_1$ 及 $B_2A_2C_1$ 不能不等而如前. $Q.E D$	

<u>系一. 在二個三角形中,二雙角各相等,對一雙等角之邊亦相等,則此二形全等</u>〔定理十九,系六,本定理(一)〕.

<u>系二. 在二個三角形中,二雙邊各相等,對一雙等邊之</u>

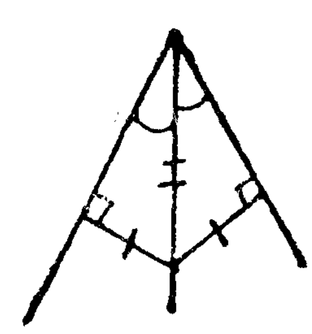
角亦相等,且(a)此所對一雙等邊較大;(b)已知二形皆爲銳角三形或皆爲直角三角形,或皆爲鈍角三角形;則此二形全等(四).

系三. 二個直角三角形中二雙直角邊各相等,則二形全等〔本定理(二)〕.

系四. 二個直角三角形中一雙斜邊及一雙直角邊各相等,則二形全等(系二).

系五. 二個直角三角形中一雙銳角相等,一雙對此或隣此之直角邊又相等,或一雙斜邊又相等,則此二形爲全等形(本定理(一)或系一).

系六. 與一角二邊等距之點在此角之等分線上.



系七. 在一角等分線上之點皆與二邊等距(系六用系四可證,系七用系五可證).

系八. 二個三角形中,一雙邊相等,在此邊一端之一雙角相等,而在他端之一雙角不等,則對第二雙角之邊不等,對大角者邊較大(視本定理圖 III 之右一圖可知)

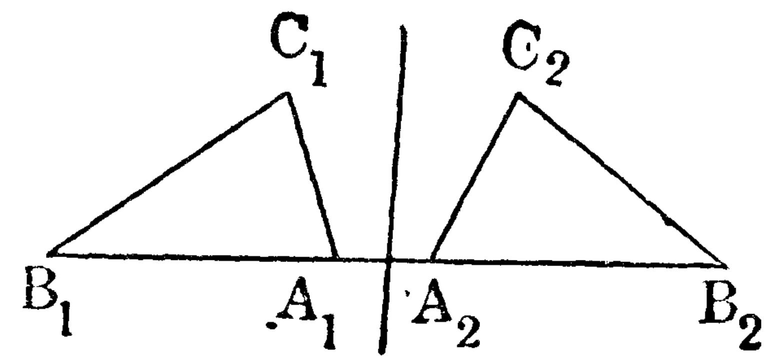
〔注意〕 (一)在二個全等三角形中,對等邊之角相等,對等角之邊相等. 等邊曰對應邊,等角曰對應角.

(二) 應用本定理時,合於(一)可簡記爲 $a.\ s.\ a. = a.\ s.\ a$; 合於(二)可簡記爲 $s.\ a.\ s. = s.\ a.\ s$; 合於(三)可簡記爲 $s.\ s.\ s. = s.\ s.\ s.$

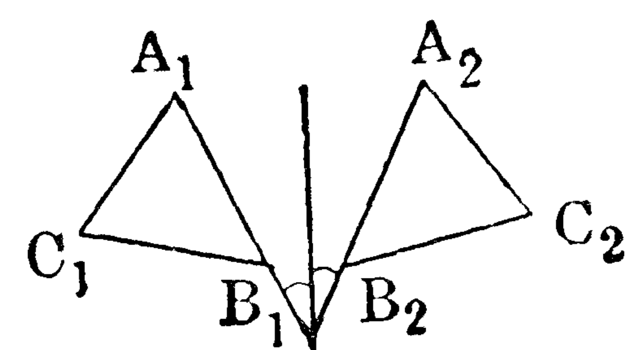
例題九　(定理)

(1)　用叠置法證本定理(一)及(二)〔參觀一編 §23, §26 及幾何公理三〕.

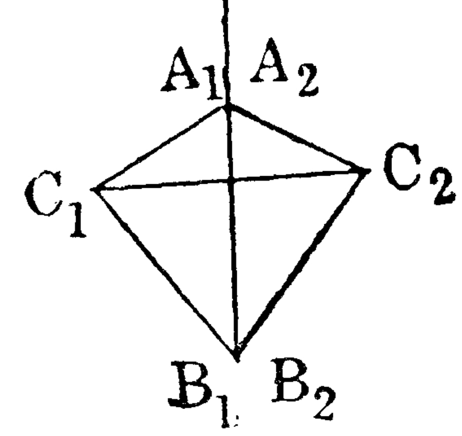
(2)　如右圖置 $\triangle A_1B_1C_1$, $A_2B_2C_1$ 令 B_1, A_1, A_2, B_2 共線而二形反向. 以 A_1A_2 之垂直等分線爲對稱軸,用軸對稱定理證本定理(一).



(3)　如右圖置二三角形於反向中.以 A_1B_1, A_2B_2 交角之等分線爲軸,用軸對稱定理證本定理(二).



(4)　如右圖置二三角形於反向中而一雙對應邊相合. 由定理十二系二及本定理二證本題(三).



(5)　用本定理(二)證定理十二系二(引頂角之等分線).

(6)　用本定理系五,證定理十三系二(從頂點至底引垂線).

(7)　用本定理系四,證定理十二系四.

(8)　用本定理系三,證定理十三系三.

(9)　平行四邊形之一個對角線,分原形爲二個全等三角形.

(10)　平行四邊形之二個對角線互相等分.

(11)　正方形之二個對角線相等.

(12)　直角三角形斜邊中點與三個角頂等距.

(13)　在二個二等邊三角形中,一雙對應角相等,一雙對應邊相等,則此二形全等.

(14)　在二個等邊三角形中一雙邊相等,則二形全等.

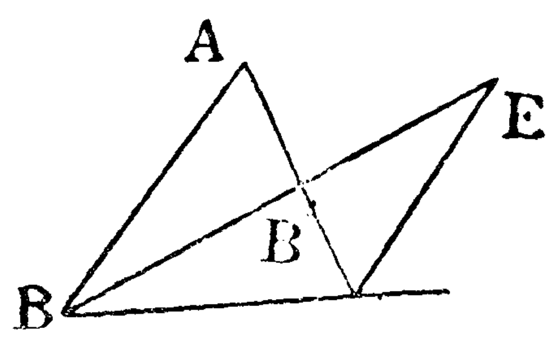
(15)　二等邊三角形中對等邊之二中線相等.

(16)　二等邊三角形中對等邊之二垂線相等.

(17)　二等邊三角形中等角之等分線相等.

(18)　$BB,' CC'$ 各為 $\triangle ABC$ 中對二邊 AC, AB 之中線,延長 BB' 至 E, CC' 至 F, 令 $B'E=BB,'$ $C'F=CC,'$ 則 $E, A_1 F$ 共線.

(19)　三角形之二個垂線相等,則此形為二等邊.

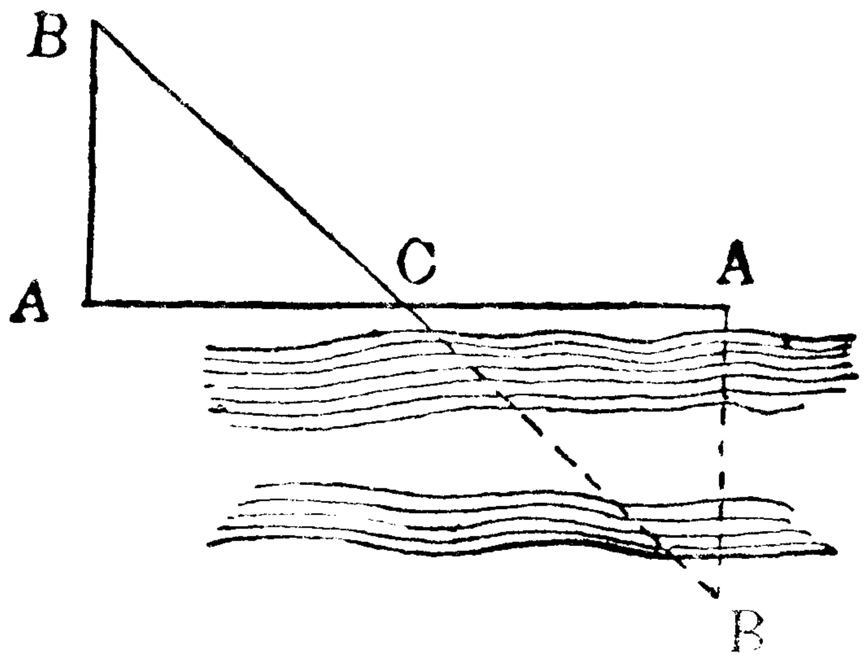


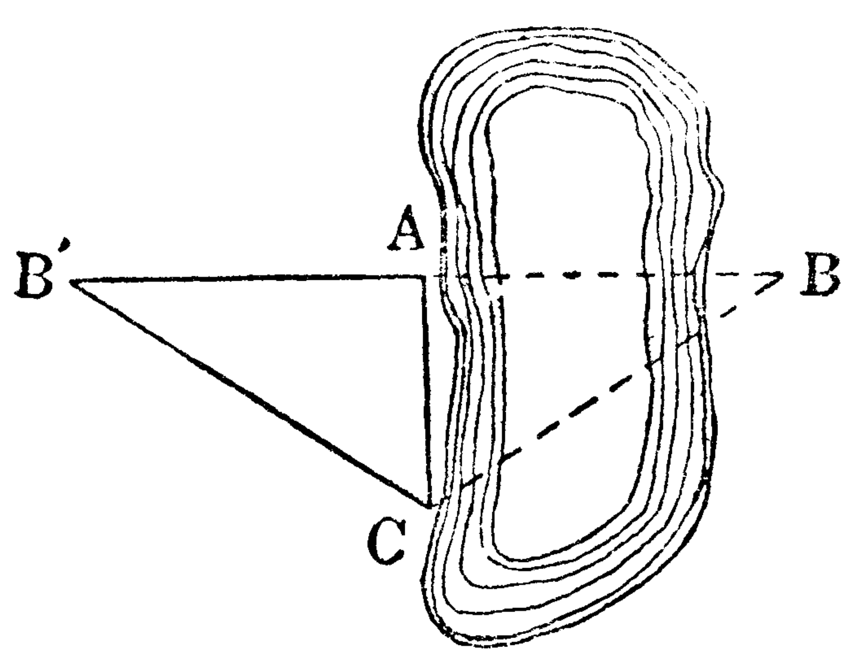
(20)　如右圖 BB' 為 $\triangle ABC$ 中對邊 AC 之一中線,延長 BB' 至 E 令 $B'E=BB,'$ 聯 EC, 則

$$\triangle ABB' \cong \triangle CB'E.$$

例題十　(實用)

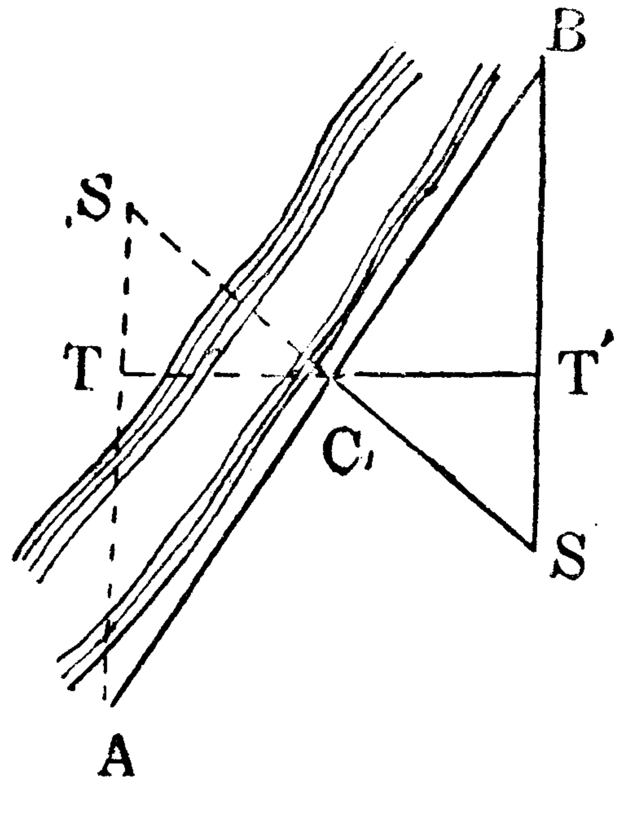
(1)　河寬 AB 欲知之,在一岸上垂直於 AB 量 $AA,'$ 等分之於 C. 從 A' 起在正離河之方向中行至 $B,'$ 測得 B, C 與 B' 成一直線. 然則量何線即得 AB 之長? 何故?

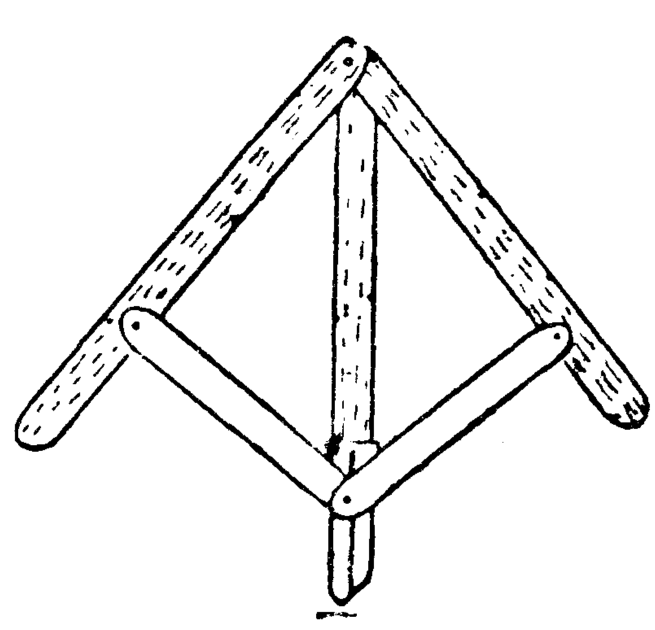




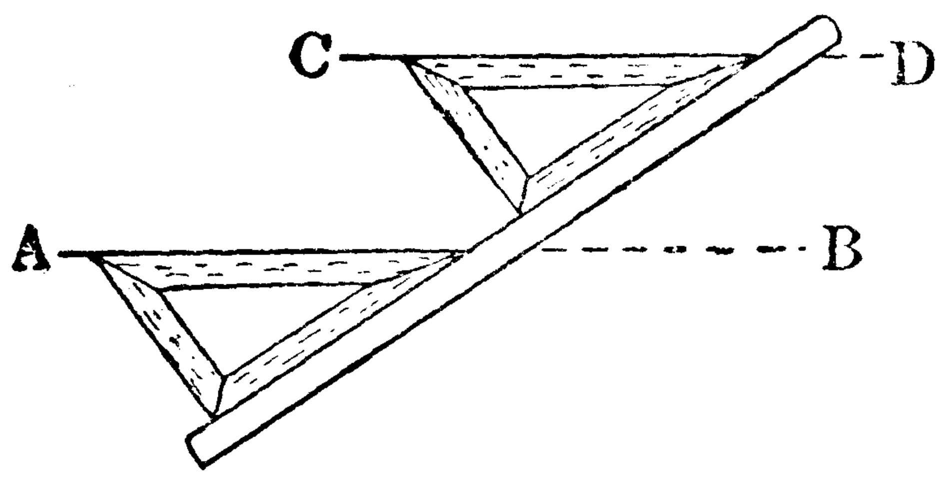
(2) 欲知沼廣 AB, 從 A 定 AB 之垂線 AC, 在其上取一處 C, 從 C 測得 $\measuredangle ACB = ACB'$ 而定 B' 於 BA 之延線上. 然則量何線可得 AB 之長?

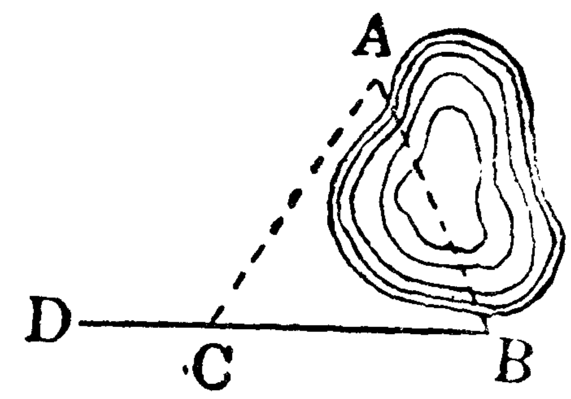
(3) 隔河有一樹 T 及一塔 S 欲在此岸知其距離;在 ST 之延線上取一點 A, 再取一底線 AB, 定一標竿於其中點 C; 從 B 測一角 ABS' 等於 $\measuredangle SAB$; 沿 BS' 行至 T' 測得 T' 在 TC 之延線上,至 S' 測得 S' 在 SC 之延線上,在 T' 及 S' 定樁; 量何線可得 T, S 之距離? 何故?





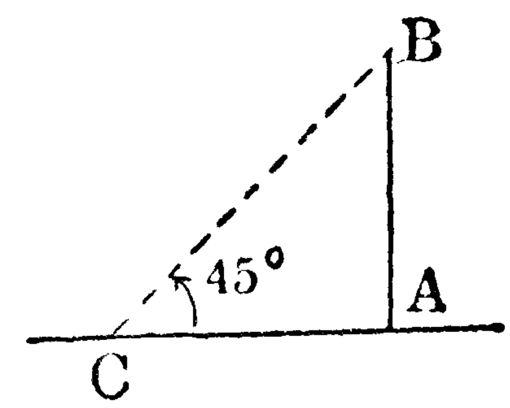
(4) 上面右圖爲一分角矩(Angle Divider),可用以作任意角之等分線. 試述其構造方法及原理.



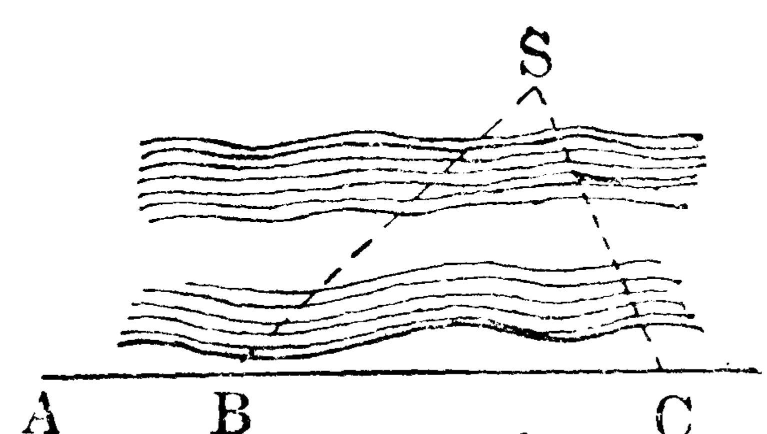


(5) 上面左圖爲用一直線板及一三角板畫平行於一所設線 AB 之線 CD. 試述此實用方法之理由.

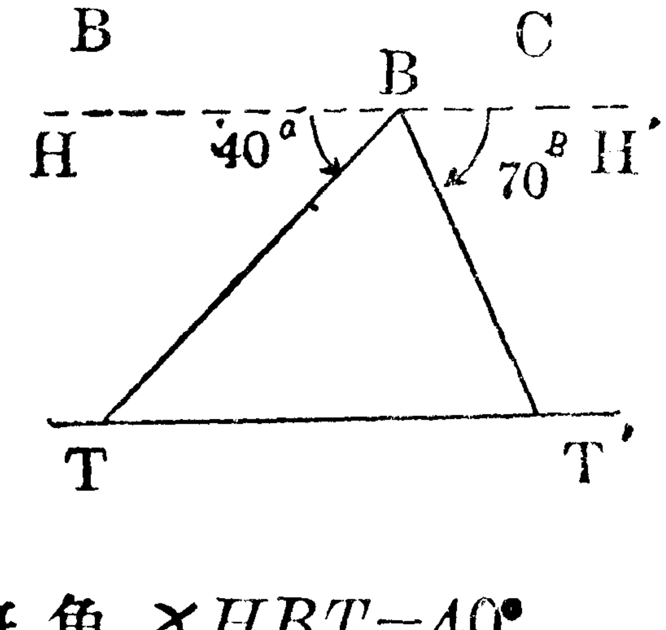
(6) 上面右圖欲量隔沼二點 A, B 之距離,吾人從 B 取一路 BD,使 $\measuredangle B=60°$ 從 B 向 D 行至 C,測得 $\measuredangle ACB=60°$,則量何線可知 AB? 述其理由.



(7) 從 C 量至一竿 AB 之足 A,得 a 尺;測其頂得仰角45°. 竿高幾尺?

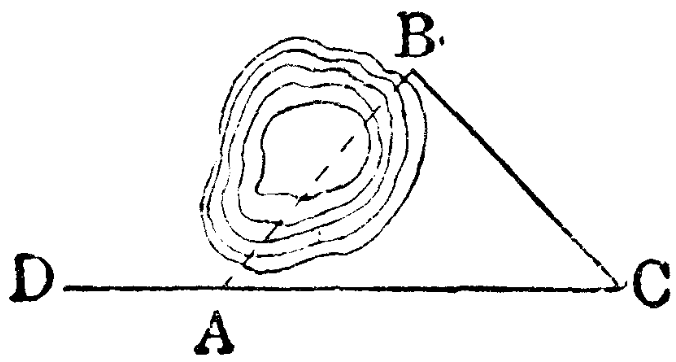


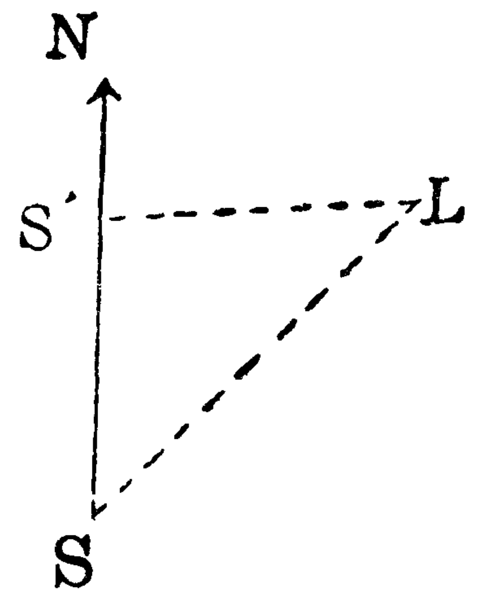
(8) 一測量者在河邊從 A 向 C 而行至 B,測對岸一處 S 得 $\measuredangle ABS=a°$ 再行至 C 測 S,得 $\measuredangle BCS=\frac{1}{2}a°$. 則若何可知 B_1S 之遠?何故?

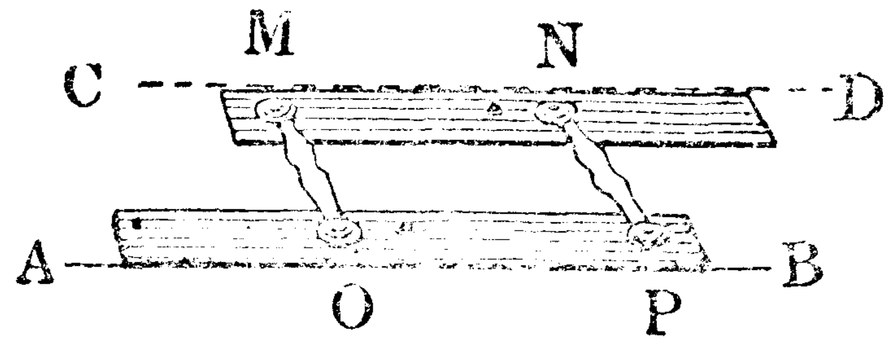


(9) 一人在一氣球 B 中測得一水平線 HH. 於是直往下視,見有二市 T, T,' 乃測得二個俯角 $\measuredangle HBT=40°$ $\measuredangle H'BT'=70°$. 已知 TT' 相距 6 里,求此球離 T 之遠.

(10)　如圖,已知 $\angle DAB=138°$, $\angle C=42°$; $AC=610$ 丈, $BC=400$ 丈. 求 AB 之長.

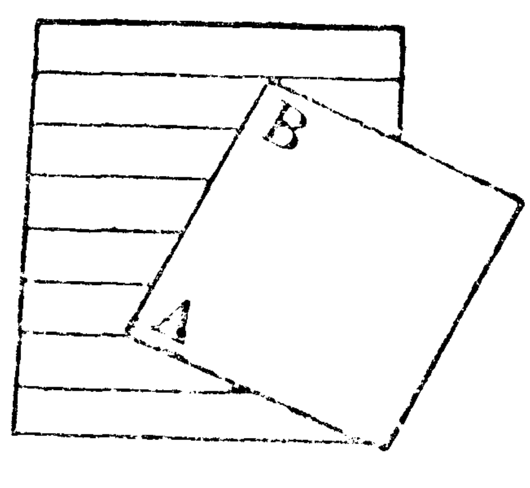


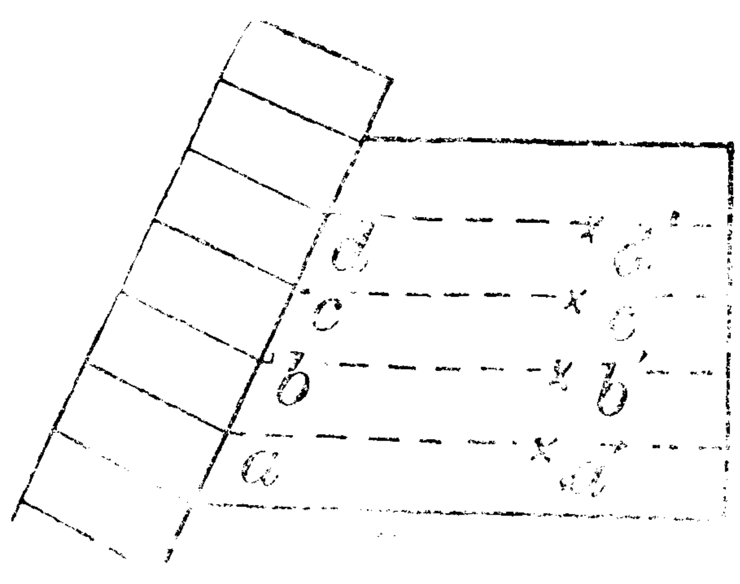




(11)　上面左圖一船向北航行,每時速10浬;上午八時在 S, 上午十一時在 S'. 若 L 爲一燈塔,已知 $\angle S=43°$, $\angle NS'L=86°$. 求上午十時此船離燈塔之遠.

(12)　上面右圖示一器具,其中 $OP=MN$, $OM=PN$. 可用以畫一所設直線 AB 之平行線 CD. 說明其理

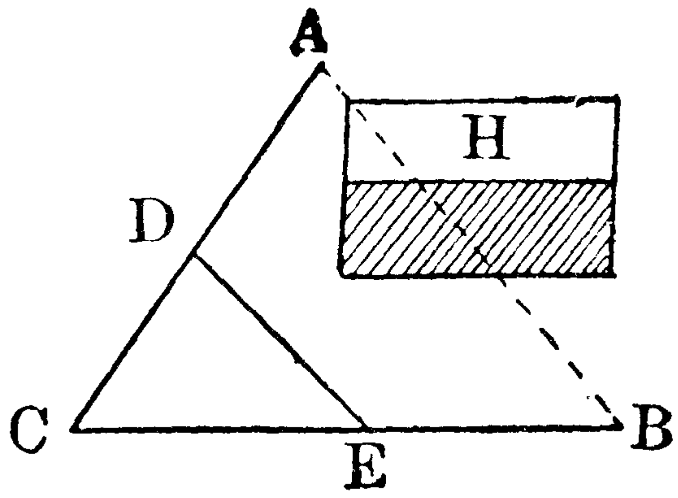




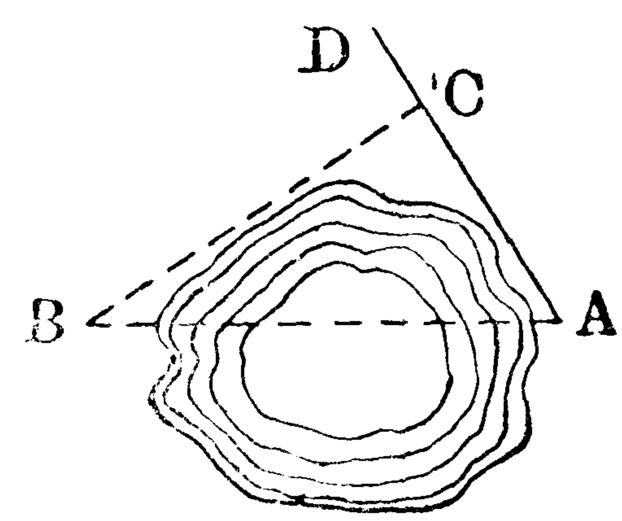
(13)　欲分一線 AB 成五等分,用一精確之格紙分之如上面左圖,說明其理. 此法在何種情形中不能用?

(14)　上面右圖爲紙一方,欲分成等寬之五條,已有一

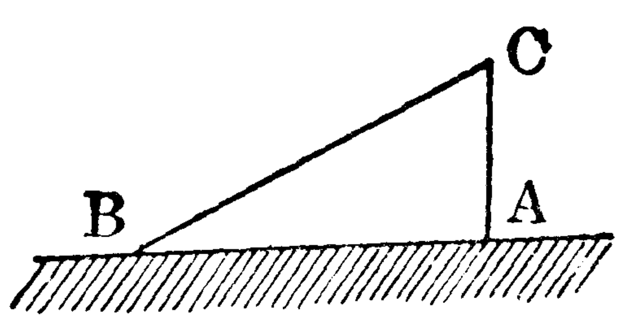
等寬之格紙惟嫌其太寬;乃如圖截得紙上四點 a, b, c, d,再用此法又得四點 a', b', c', d'. 聯 aa', bb', cc', dd' 卽得等寬五條. 試明其理.

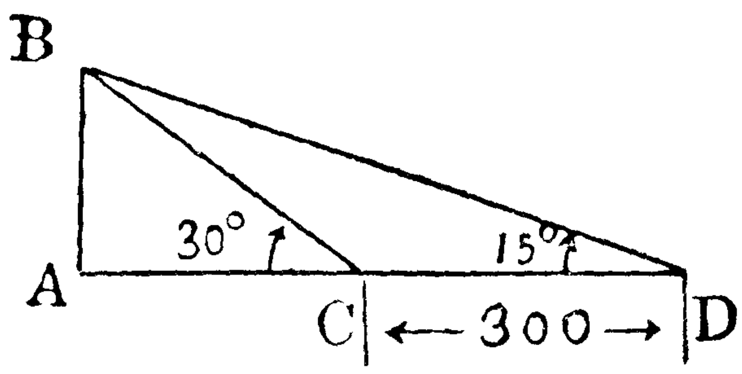


(15)　A, B 二處爲一宅所隔,欲量其遠. 法從能見二處之一點 C 量 AC, BC, 各取其正中之點 D 及 E, 則量 DE 可知 AB 之長. 何故?



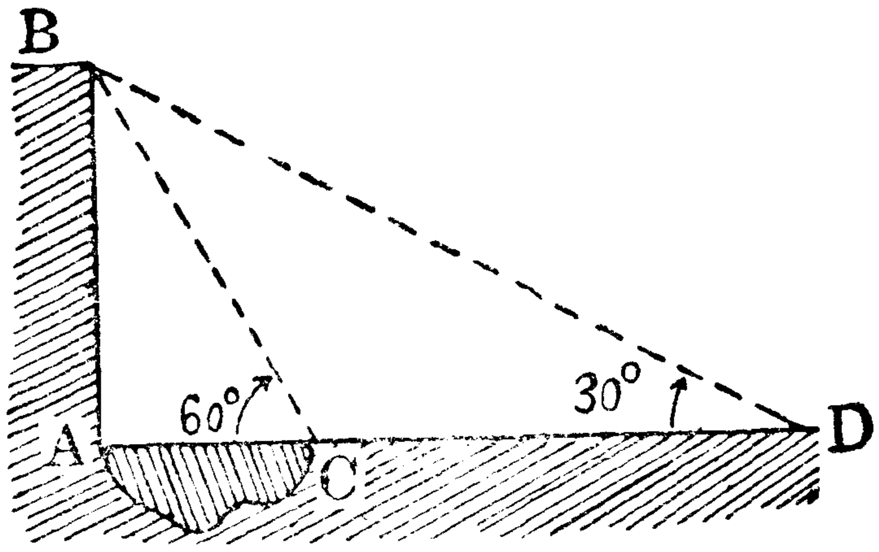
(16)　A, B 二處隔一沼. 一人行於 AD 方向中,測得 $\measuredangle BAD=60°$; 行時覓得 C 點, $\measuredangle BCD=90°$, 則量 AC 可得 AB 之距離. 何故?

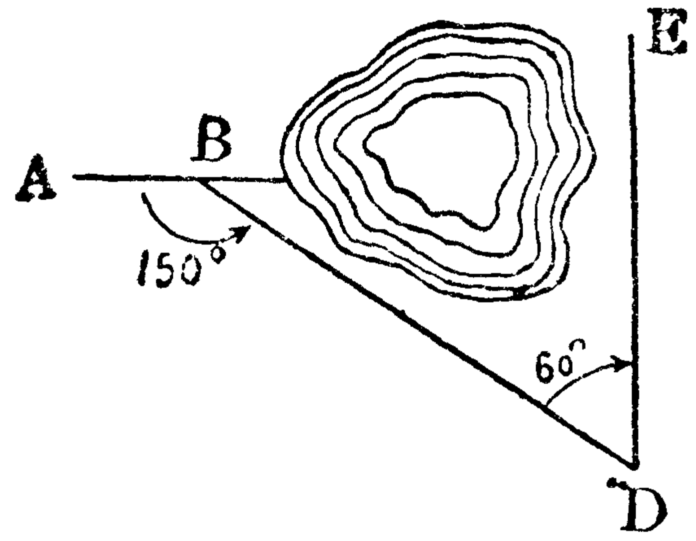




(17)　一旗竿高27尺被風吹折,其頂達地如上面左圖,而 $\measuredangle CBA=30°$. 求 AC 之高.

(18)　上面右圖爲欲量一塔 AB 之高,在正向塔底 A 之平路 ACD 上從 D 點測塔頂 B 得仰角 $15°$, 行近 300 尺至 C, 再測 B 得仰角 $30°$. 求 AB 之高.

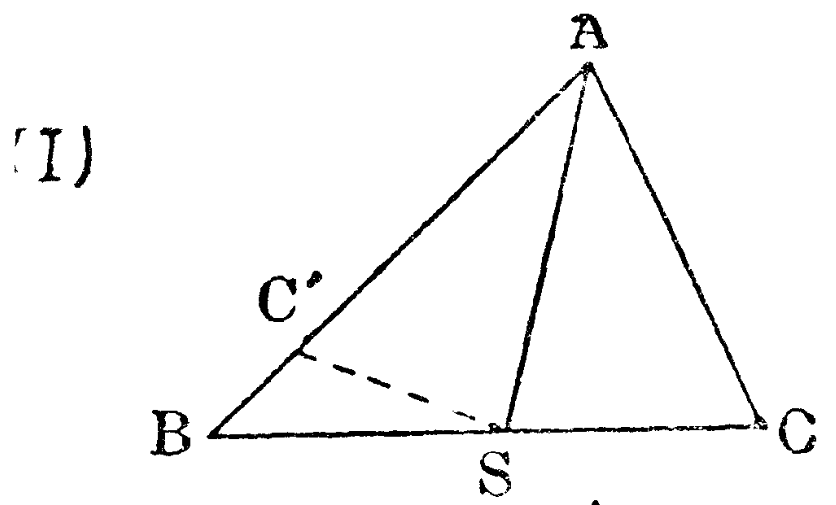


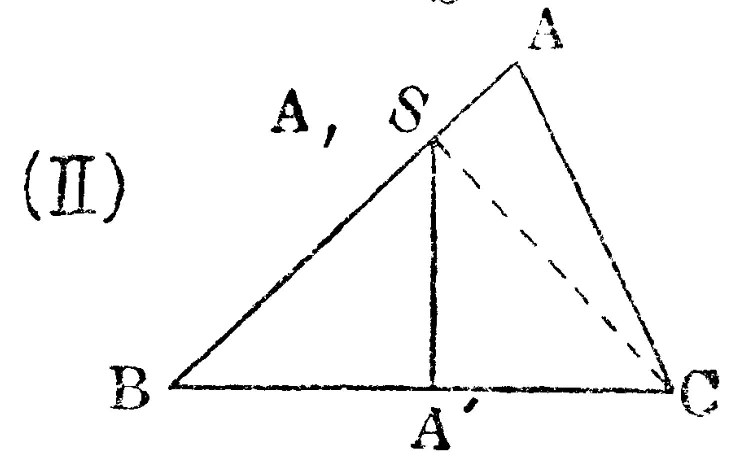


(19) 上面左圖為一峭壁 AB 立一河邊上,一測量者在河之對岸一點 C 測壁頂 B,得 60°. 已知 A, C 相距 6 丈,離 C 再行 60 丈至 D 測壁頂得 30°. 求壁高.

(20) 一直路 AB 如上面右圖正對一湖 M. 從 B 出一支路 BD, $\measuredangle ABD=150°$, BD 長 3000 公尺. 從 D 再折而向 E, $\measuredangle D=60°$. 求從 B 至 DE 對直之距離.

39. 定理二十三.





在一三角形中,

(一) 二邊不等,則其對角亦不等,邊大者對角大;

(二) 二角不等,則其對邊亦不等,角大者對邊大.

〔假設〕 $\triangle ABC$ 中,

(一) $AB>AC$; (二) $\measuredangle C>B$.

〔終決〕 (一) $\measuredangle C>B$; (二) $AB>AC$.

〔證〕 (一)引 $\measuredangle A$ 之等分線	
AS, 在 AB 上取 C 關於 AS 之對稱點 C', 則 $\triangle AC'S \wedge ACS$;	定理十,軸對稱定義.
故 C' 在 AB 上,而 $AC'=AC<AB$	因 $\measuredangle SAC'=SAC$, 一編 §23.
∴ C' 在 A 及 B 之間;	
由是 $\measuredangle C=AC'S>\measuredangle B$.	定理十九系八.
(圖 I)　　　　Q. E D.	
(二)引 BC 之垂直等分線 $A'S$,	
關於此線取 BA 之對稱線 CA_1'	定理十系四.
與 BA 會於軸上 S 點,則	
$\triangle SA'B \wedge SA'C$;	定理十,軸對稱定義.
故 $\measuredangle A'CS=A'CS<A'CA$, 而 S 在 AB 上,且 $DS=BS$;	定理十,其系二,一編 §26.
∴ $BA=BS+SA=CS+SA>CA$	幾何公理五.
(圖 II)　　　　Q. E D	

系一. 不在一線分垂直等分線上之點與此線分兩端不等距〔本定理(二)〕.

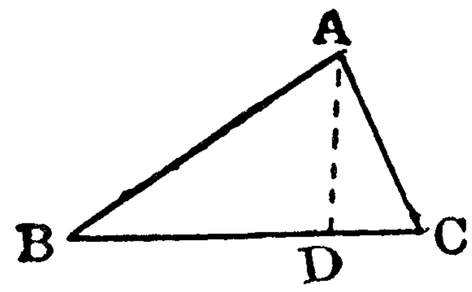
系二. 與線分兩端不等距之點不在其垂直等分線上.

系三. 直角三角形中對直角之邊(卽斜邊)最大〔本定理(二)〕.

系四. 鈍角三角形中對鈍角之邊最大〔本定理(二)〕.

系五. 三角形二邊不等,則與其第三邊垂直等分線交者爲大邊(視本定理(二)之證).

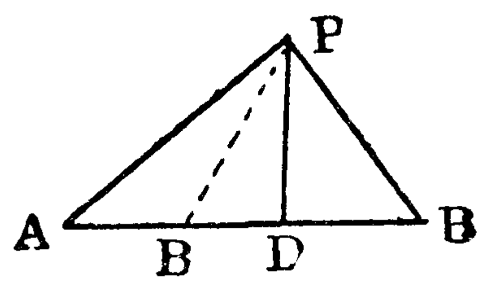
系六. 三角形二邊之和比第三邊大. 又二邊之差比第三邊小.



如 $AB+AC>BC$ 此從幾何公理五可知. 又法,引 $AD\perp BC$, 則 $AB>BD$ $AC>DC$(系三),加之 $AB+AC>BC$.

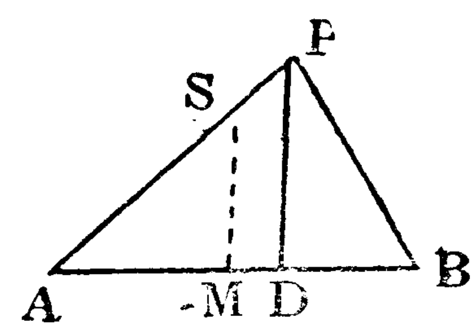
既得 $AB+AC>BC$ 卽可得 $BC-AB<AC$, 或 $BC-AC<AB$

系七. 共有兩端之折線以包圍於外者爲大.



系八. 從直線外一點至直線引垂線及二斜線,若二斜線足離垂線足不等,則足遠之斜線較大.

例如 $AD>BD$, 則 $PA>PB$. 何則,關於 PD 取 $PB_1 \wedge PB$, 則 $PB_1=PB$, 而 $DB_1=BD<AD$, ∴ B_1 在 A, D 之間,而 $\angle AB_1P>R\angle$ (定理十九系八), ∴ $PA>PB_1$(系四),卽 $PA>PB$



系九. 從直線外一點至直線引垂線及二斜線,則斜線大者,其足離垂線足遠.

如圖 $PA>PB$, 則 $AD>BD$. 何則, AB 之垂直等分線 MS 交 PA(系五),故 PD 及 PB 在 MS 之同旁,而 $AD>AM(=BM)>BD$

40 定理二十四.

二個三角形中,二雙邊各相等.

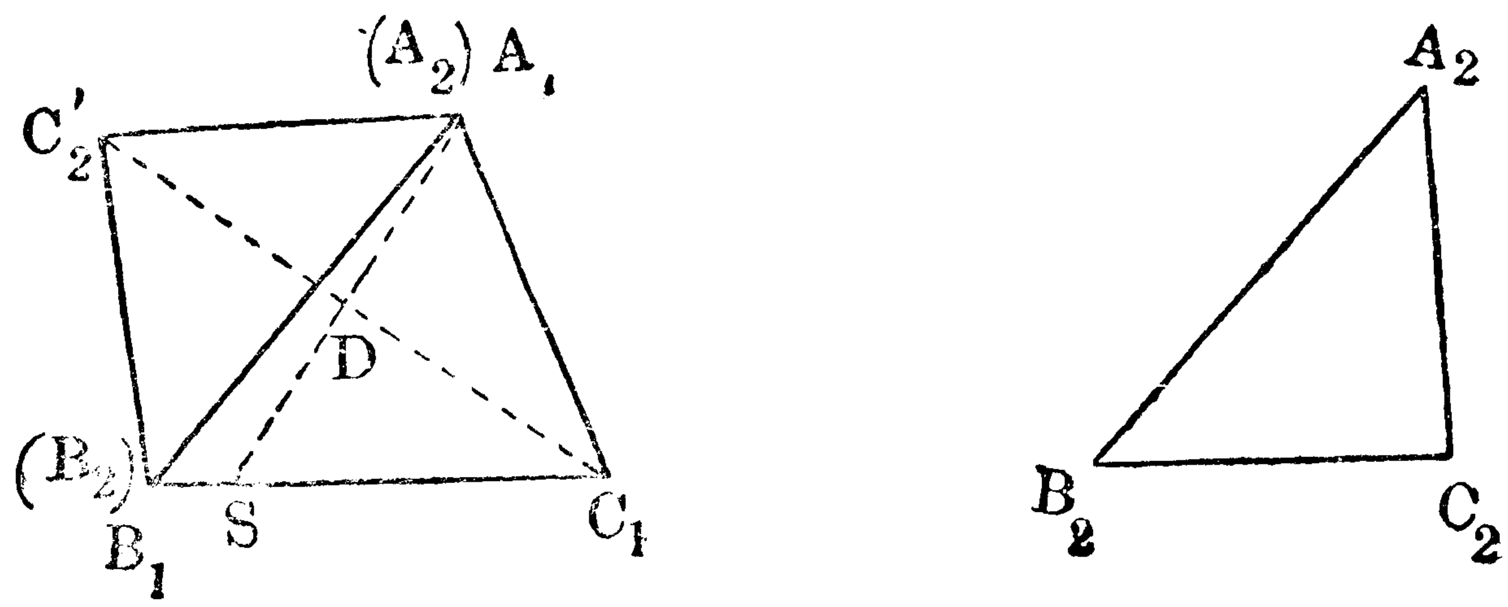
(一)　其所夾角不等,則第三邊亦不等而對大角之邊大;

(二)　第三邊不等,則前二邊所夾角不等而對大邊之角大.

〔假設〕　在$\triangle A_1B_1C_1$, $A_2B_2C_2$中, $A_1B_1=A_2B_2$, $A_1C_1=A_2C_2$,

(一)　$\angle B_1A_1C_1>B_2A_2C_2$;

(二)　$B_1C_1>B_2C_2$.



〔終決〕　(一)　$B_1C_1>B_2C_2$;　(二)　$\angle B_1A_1C_1>B_2A_2C_2$.

〔證〕　置$\triangle A_1B_1C_1$, $A_2B_2C_2$於反向中而以$\triangle A_2B_2C_2$移動置A_2B_2於A_1B_1上,使A_2與A_1相合,　　幾何公理一.

因$A_2B_2=A_1B_1$而B_2與B_1相合;　　一編§23.

設C_2落於C_2'. 聯C_1C_2', 引C_1C_2'之垂直等分線,

因$A_1C_2'=A_2C_2=A_1C_1$, 故此所引線　　定理十三系一.

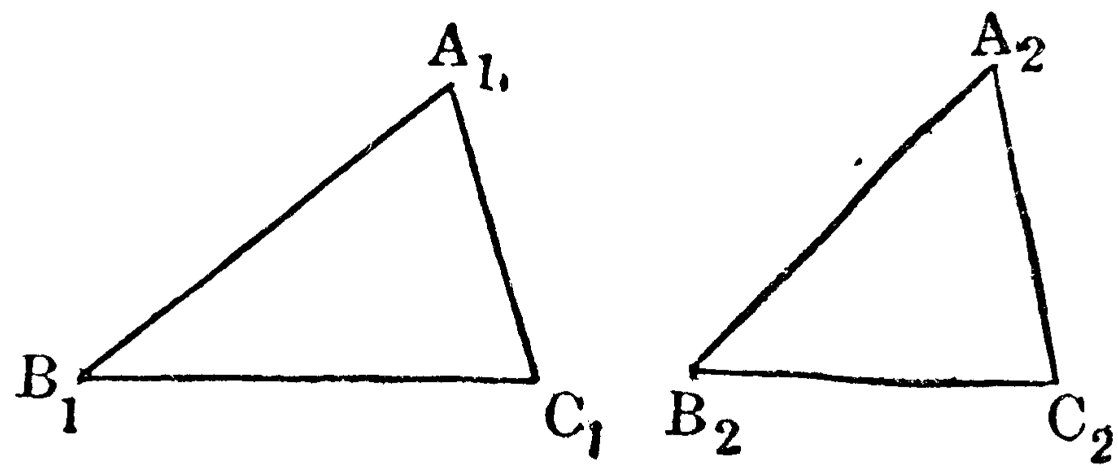
必過 A_1 而等分 $\measuredangle C_1A_1C_2'$, 卽	
$\measuredangle D_1A_1C_1=\frac{1}{2}C_1A_1C_2'=\frac{1}{2}(C_1A_1B_1+C_2'A_1B_1)$	
(一) 因 $\measuredangle B_1A_1C_1>B_2A_2C_2$ 卽 $>B_1A_1C_2'$,	假設.
故 $\measuredangle B_1A_1C_1=\frac{1}{2}(B^1A_1C_1+B_1A_1C_1)>\frac{1}{2}$ $(B_1A_1C_1+C_2'A_1B_1)$.	
卽 $\measuredangle B_1A_1C_1>DA_1C_1$, 而 A_1D 在 $\measuredangle B_1A_1C_1$ 之內;	一編 §26.
故 A_1D 可交 B_1C_1 於 S, 而 $B_1C_1>B_1C_2'$, 卽 $>B_2C_2$ Q. E D	定理二十三系五.
(二) 因 $B_1C_1>B_1C_2'$ 而 A_1D_1 交 B_1C_1 於 S;	同上.
由是 A_1S 在 $\measuredangle B_1A_1C_1$ 之內而 $\measuredangle DAC_1<B_1A_1C_1$,	一編 §26.
卽 $\frac{1}{2}\measuredangle(C_1A_1B_1+C_2'A_1B_1<\frac{1}{2}(C_1A_1B_1+C_1A_1B_1)$;	
故 $\measuredangle C_2'A_1B_1<C_1A_1B_1$, 卽 $\measuredangle B_1A_1C_1>B_2A_2C_2$ Q. E D	

41. 窮舉證法.

欲證一定理之終決,乃悉舉與此終決同類異種之諸終決而一一證其不合於假設.如是證法曰窮舉證法(Method of exhaustion).

<u>凡在某一類定理中,其假設之同類異種者悉已發見,而其終決各不相容,則其任意一個之倒定理必能以窮舉證法證之.</u>

例如已知定理二十二(二)及定理二十四(一),欲以窮舉證法證定理二十四(二)〔即(一)之倒定理〕:



〔假設〕 Ⓢ $A_1B_1C_1$, $A_2B_2C_2$ 中 $A_1B_1=A_2B_2$, $A_1C_1=A_2C_2$, 及 $B_1C_1>B_2C_2$.

〔終決〕 $\angle A_1>A_2$.

〔證〕 比較 $\angle A_1$, A_2 之大小僅有三種如下:

$$\angle A_1>A_2,\quad \angle A_1=A_2,\quad \angle A_1<A_2;$$

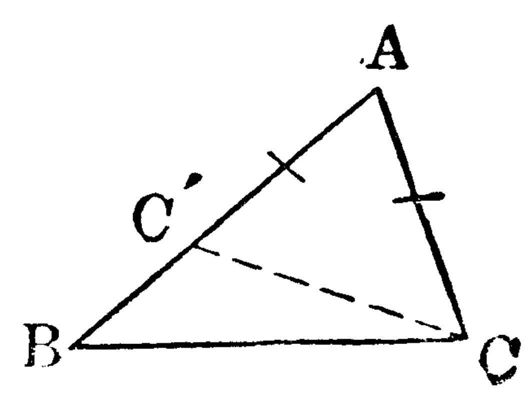
如 $\angle A_1=A_2$, 則從定理二十二(二), $B_1C_1=B_2C_2$;

如 $\angle A_1<A_2$, 則從定理二十四(一), $B_1C_1<B_2C_2$;

此皆不合於假設; 故僅能 $\angle A_1>A_2$.

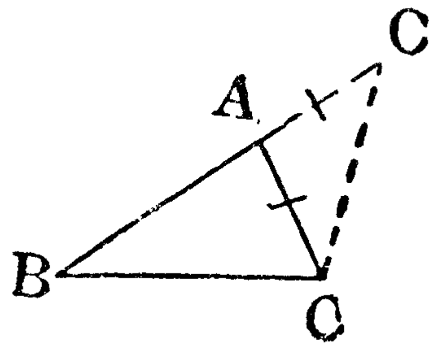
例題十一 (定理)

(1) $\triangle ABC$ 中 $AB>AC$, 在 AB 上取 C' 使 $AC'=AC$, 聯 $C'C$, 由是用定理十九系八證定理二十三(一).

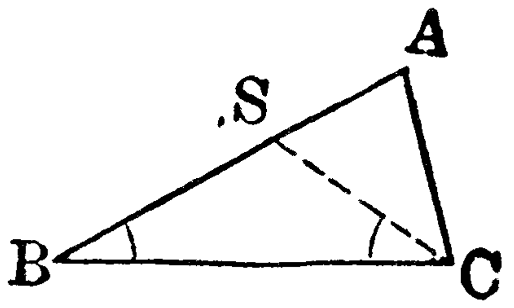


(2) 用窮舉證法證定理二十三(二).

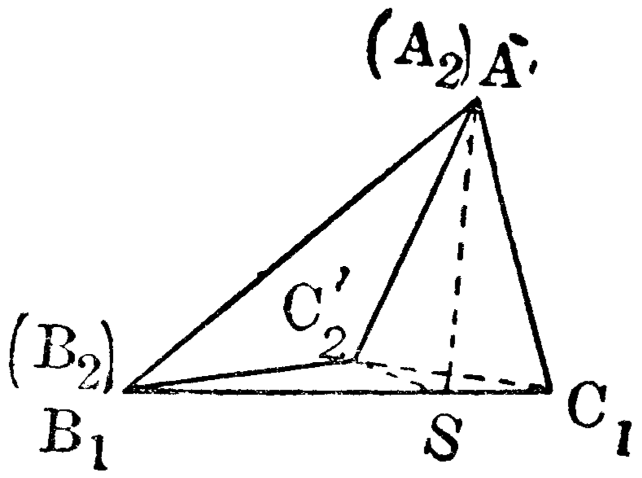
(3) 延長 $\triangle ABC$ 一邊 BA 至 C' 令 $AC'=AC$, 聯 $C'C$, 由是用定理二十三 (二) 證其系六。



(4) $\triangle ABC$ 中 $\measuredangle C>B$, 引 CS 令 $\measuredangle SCB=B$, 由是用幾何公理五證定理二十三(二)。



(5) 已知定理十三系四及定理二十三系八,用窮舉證法證定理二十三系九。



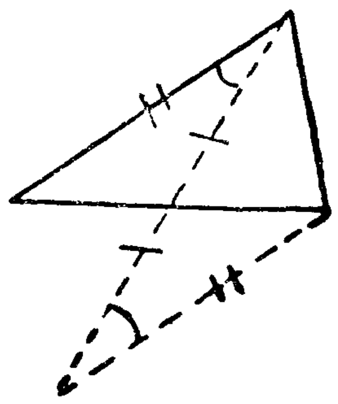
(6) 以定理二十四中二圖如右疊置以證之.

(7) 三角形之各邊比三邊之半和小.

(8) 聯三角形內任意一點至各頂點引線分,則此三個線分之和比三角形之周小而比半周大.

(9) 凸四邊形二對角線之和(a),比任意一雙對邊之和大;(b)比周小而比其半大.

(10) 從直線外一點至直線所引相等之斜線有二個而僅有二個.

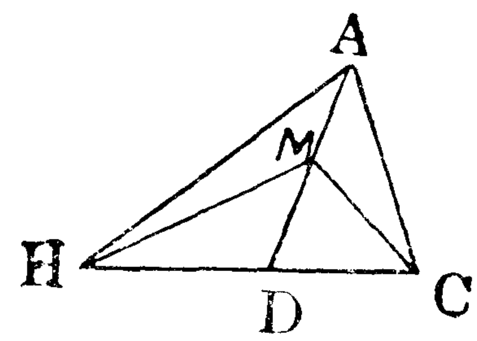


(11) 三角形二邊不等,則對於第三邊之中線與小邊所成之角大而與大邊所成之角小。

(12)　三角形二邊不等,則對於第三邊之垂線與小邊所成之角小而與大邊所成之角大.

(13)　從三角形不等二邊所夾角之頂點至對邊引中線垂線及此角之等分線,則等分線夾於中線及垂線之間

(14)　AD 爲 $\triangle ABC$ 中對邊 BC 之中線. M 爲 AD 中任意一點,若 $AB>AC$, 則 $MB>MC$.



(15)　在前題中, M 在 AD 之延線上,則決變至若何? 證之.

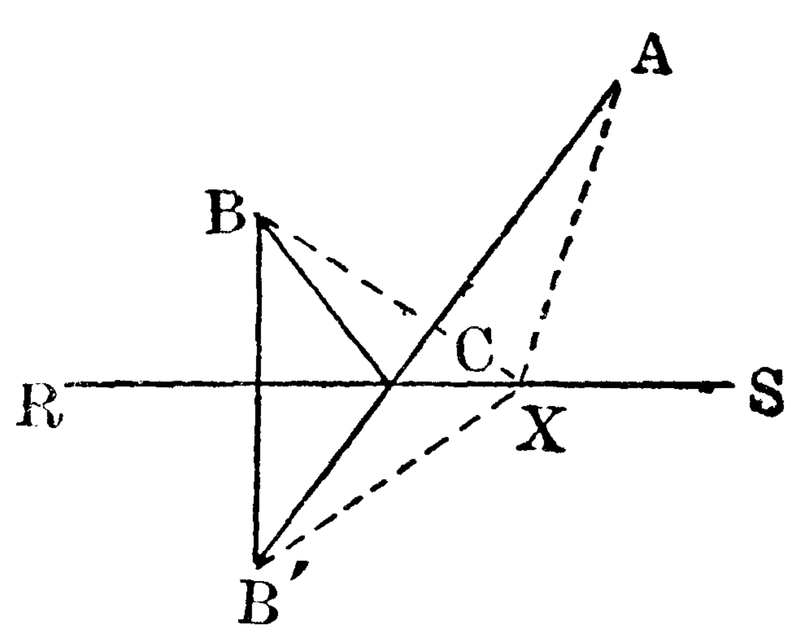
(16)　四角形 $ABCD$ 中 AB 爲最大邊, CD 爲最小邊, 則 $\angle C>A$, 又 $\angle D>B$

42.　定理二十五.

二點在一直線之同旁,從第一點聯至第二點關於直線之對稱點,此聯線與直線得一交點,則

(一)　從二點至此交點之聯與直線成等角;

(二)　二點至此交點距離之和,比至直線上任意點距離之和小.

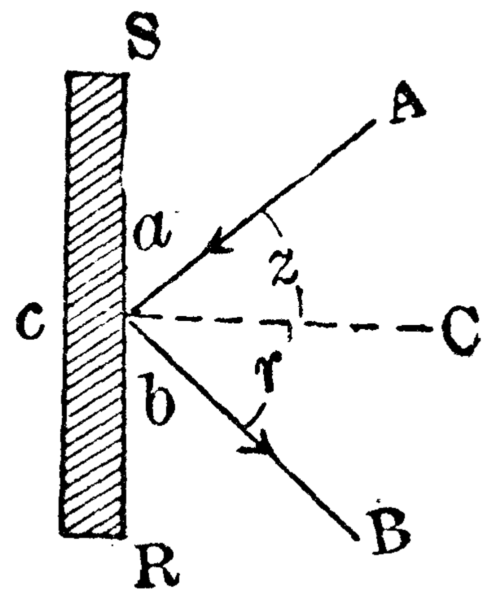


〔假設〕　二點 A, B 在直線 RS 之同旁, B' 爲 B 關於 RS 之對稱點, AB' 交 RS 於 C, X 爲 RS 上 C 外之任意點.

〔終決〕 (一)$\measuredangle ACS=BCR$, (二)$AC+BC<AX+BX$.

〔證〕 $B \wedge B'$, 故 $BC \wedge B'C$, $BX \wedge B'X$.	定理十.
$\measuredangle BCR=B'CR$;	
$\therefore$ (一)$\measuredangle ACS=B'CR=BCR$ .Q. E. D.	定理八.
(二) $AC+BC=AC+B'C=$	定理二十三系六.
$AB'<AX+B'X$	
即 $AC+BC<AX+BX$ Q.E D	

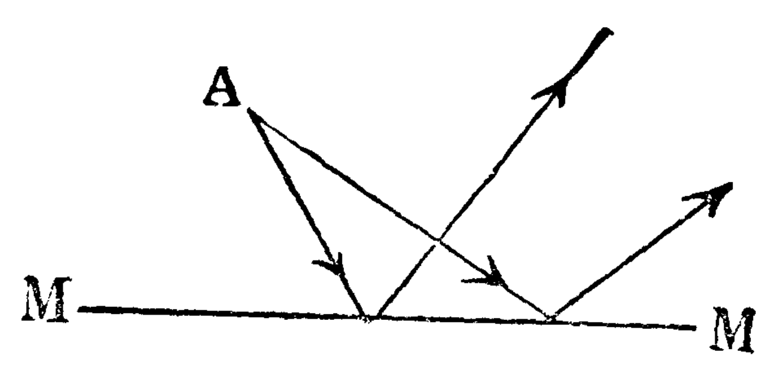
〔注意〕 A 爲一發光點,光之射線 AC 遇一鏡 SR 於 C, 其折線爲 CB, 若 $CC'\perp SR$, 則 $\measuredangle ACC'$ 爲投射角(Angle of incidence), $\measuredangle C'CB$ 爲折射角 (angle of reflection).依物理定律,折射角與投射角相等,即 $\measuredangle i=r$; 從定理七, $\measuredangle a=b$, 即 $\measuredangle ACS=BCR$.



聲浪之反折,彈力之反彈,等皆與此同.

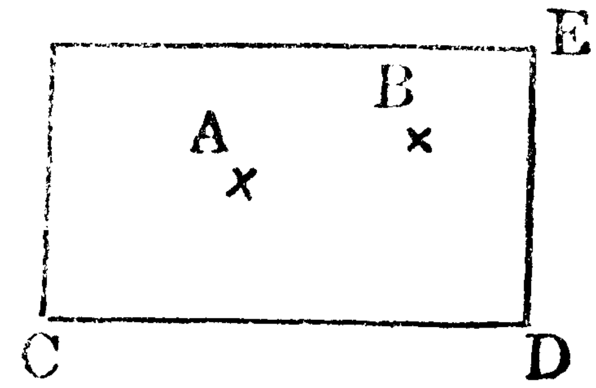
例題十二 (實用)

(1) 從一點 A 發諸光線用鏡 MM' 折之,今以一直線表鏡面,作其諸投射線及折射線.



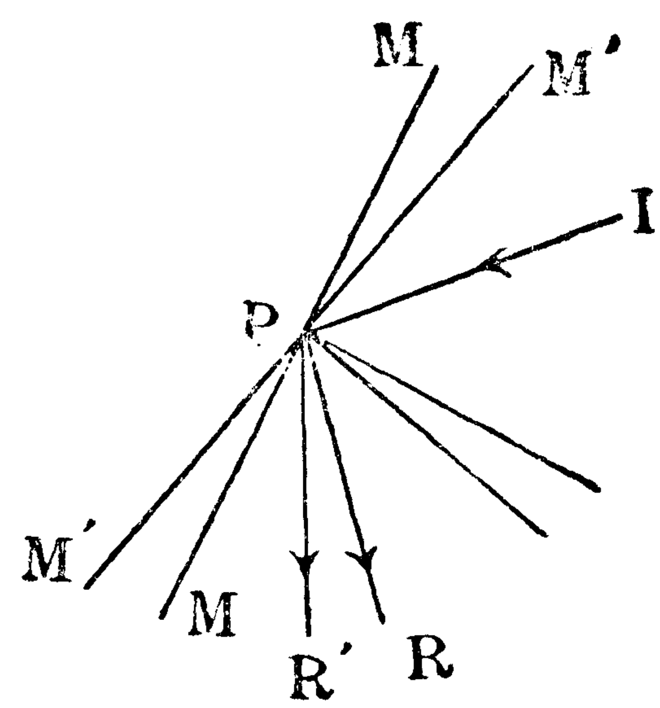
(2) 以矩形表一彈子臺如圖, A 及 B 爲二枚彈子.

今欲打一彈子 A 使其撞臺邊 CD 於 P 返折而撞 B　求 P 之位置.



(3)　在前題中欲使 A 先撞 CD, 次撞 DE, 再還撞 B 求此彈子所行之路.

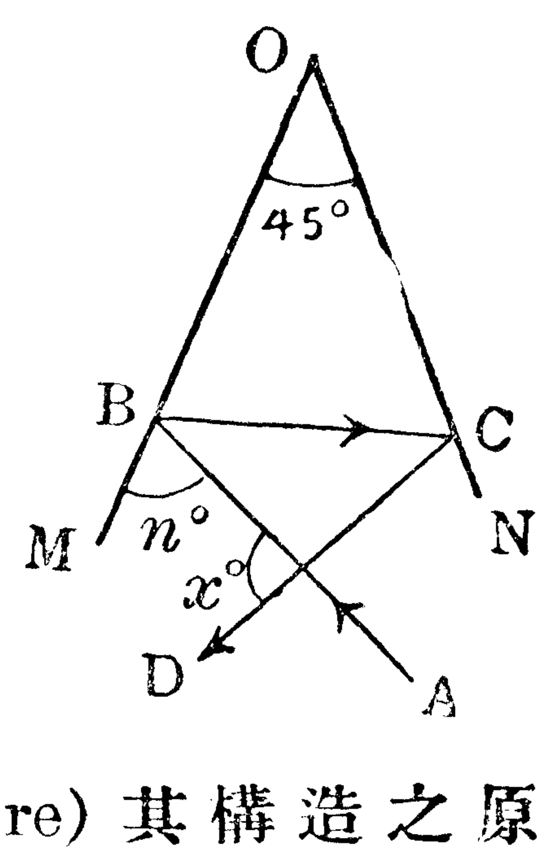
(4)　右圖 IP 爲一光之投射線, 爲鏡 $M'M'$ 反折於方向 PR 中. 若以鏡轉過 $10°$ 至 $M'M'$, 則 IP 之折線爲 PR'.　求 $\measuredangle RPR'$ 之度數.



(5)　若 $\measuredangle MPM'$ 爲 $n°$, 則 $\measuredangle RPR'$ 之大小若何?

〔註〕　水手所用量角之六分儀 (Sextant) 乃根據本題而作者.

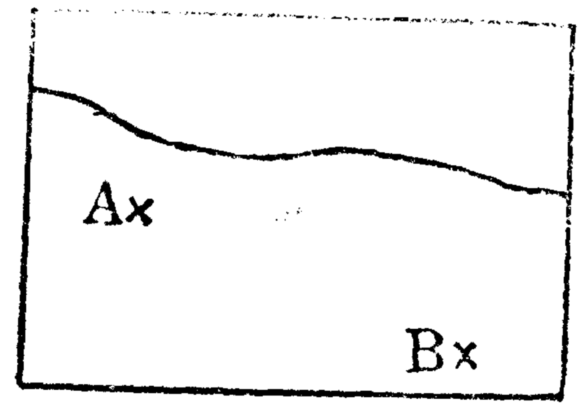
(6)　在右圖中, 二鏡 OM, ON 在 O 成一 $45°$ 之角. 若一射線 AB 折於方向 BC 中, 而 BC 又折於方向 CD 中. (一) 設 $\measuredangle ABM=70°$, (二) $\measuredangle ABM=n°$, 求首末二射線所成之角(卽 $\measuredangle x$).



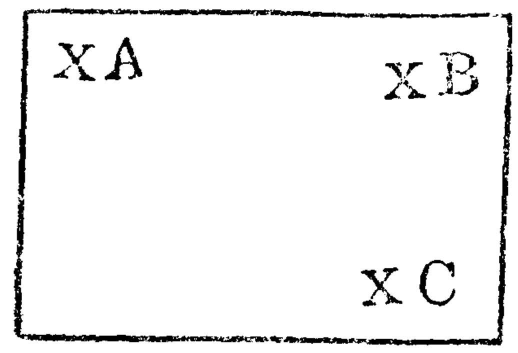
〔註〕　量直角之折光矩 (Optical Square) 其構造之原理卽爲本題.

下二題爲定理十二及十三系五之應用.

(7)　右圖表一地圖, A 及 B 爲二市, CD 爲鐵路. 欲作一站.須離 A 及 B 等遠. 求此站之位置.



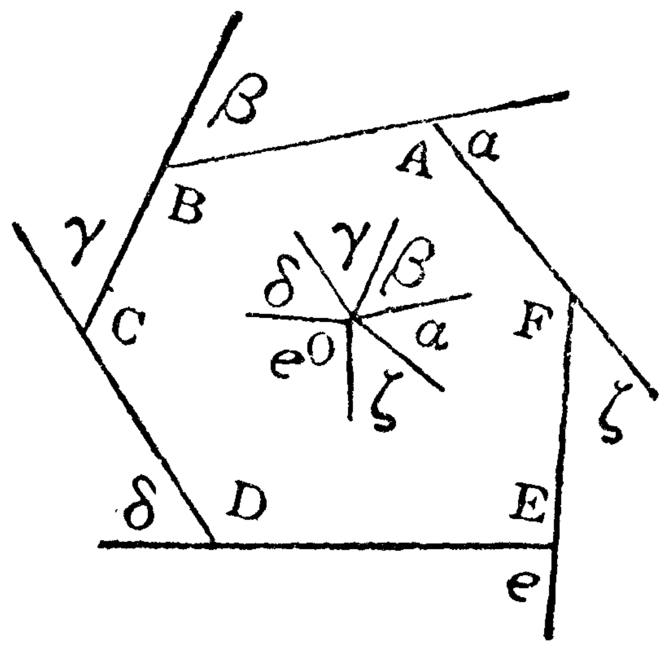
(8)　如圖, A, B, C 表三市之位置. 欲公立一學校,校舍須離此三市等遠. 求此校舍之位置.



第四章　多角形

43. 定理二十六.

順次延長凸多角形諸邊所得諸外角之和等於四直角.



〔假設〕　$ABC\cdots F$ 爲任意凸多角形,順次延長其諸邊得諸外角 $\alpha, \beta, \gamma, \cdots \varsigma$.

〔終決〕　$\measuredangle \alpha+\beta+\gamma+\cdots+\varsigma=4R\measuredangle$.

〔證〕　在形內或外任意取一點 O, 以 $\measuredangle \alpha, \beta, \gamma, \cdots, \zeta$ 各沿 $AO, BO, CO, \cdots, FO$ 平行移動至 O, 則在 O 之諸角 $\measuredangle \alpha, \beta, \gamma, \cdots, \zeta$ 與在原位置時大小及方向,皆不變; 因第一角 α 第一邊 AF 之方向與末一角 ζ 末一邊之方向合,故移至 O 時亦然,而諸角　　定理二十一(三)

在 O 恰充滿 O 之周圍;

故　$\measuredangle \alpha+\beta+\gamma+\cdots+\zeta=4R_{\measuredangle}$　　Q. E. D.　定理五

系一. n 邊凸多角形內角之和等於 $2(n-2).R_{\measuredangle}$.

在多角形每一角頂一內角與一外角之和爲 $2R_{\measuredangle}$(定理五系), 故 n 邊多角形所有內角,與所有順次延長各邊所得外角之和爲 $2nR_{\measuredangle}$;

已知其中諸外角和爲 $4R_{\measuredangle}$ (本定理), 故諸內角和當爲 $2nR_{\measuredangle}-4R_{\measuredangle}$, 卽 $2(n-2)R_{\measuredangle}$.

系二. 正多角形各內角等於 $\frac{2(n-2)n}{n}R_{\measuredangle}$ (系一)

系三. 正多角形各外角等於 $\frac{4}{n}R_{\measuredangle}$ (本定理).

系四. 四角形內角之和等於 $4R_{\measuredangle}$ (系一).

系五. 凸多角形內角中無四個以上爲銳角者.

因如此則外角和將大於 $4R_{\measuredangle}$ 而背於本定理故也.

系六. 正三角形之各內角等於 $\frac{2}{3}R_{\measuredangle}$ (系二).

例題十三　(計算題)

(1)　計算正五角,六角,八角,十角,十二角,十五角,二十角形各內角之大小.

(2)　一正多角形各內角爲 $\frac{5}{3}R_{\measuredangle}$. 求此形之邊數.

(3)　一正多角形之內角等於其外角,求其邊數.

以下各題立代數式以解之*.

(4)　三角形三個內角成等差級數,而大角等於小角之二倍. 求此各內角.

(5)　三角形二個內角相等,而第三角等於等角之半. 求各角.

(6)　三角形三個內角成等比級數,而最大角之三倍與次一角之和恰為四直角. 求此各內角.

(7)　一正多角形各內角恰為其各外角之三倍. 求此形之邊數.

(8)　第一正多角形一內角等於第二正多角形一外角之 2 倍,而等二正多角形一內角第於第一正多角形一外角之 $\frac{5}{4}$ 倍. 求此二個正多角形之邊數.

(9)　第一正多角形一內角等於第二正多角形一內角之 $\frac{3}{2}$,而第二正多角形之一外角等於第一正多角形一外角之 2 倍. 求二形之邊數.

(10)　以一種正多角形之練磚鋪地,恰能平伏妥貼絲毫無縫. 此種正多角形為幾角形?每幾塊聚於一點? 設以 n 表正多角形之邊數, x 表聚於一點之塊數,則使方程式 $x=\dfrac{2n}{n-2}$ 中 x 之值為正整數者係解答. 求各種可起之解答,且述此方程式何自而來.

---

*學生代數學之學力未足解此者可略去不作.

第五章　四邊形

44. 定理二十七.

在平行四邊形中,(一)對邊相等;(二)對角相等;(三)對角線互相等分;(四)一對角線分爲二個全等三角形.

從定理十五系九,定理十六,及定理二十二(三)可知.

系一　在一四邊形中,(一)二雙對邊各相等;(二)二雙對角各相等;(三)二對角線互相等分;(四)一雙對邊相等而且平行;則此形爲平行四邊形〔從定理二十二(三),定理二十六系四,及定理十四(二)可知〕

系二.　二等邊梯形之二底角相等

系三.　平行四邊形爲有中心圖,二等邊梯形爲有軸圖.

45. 定理二十八

菱形關於其二個對角線爲對稱.

從定理十二系五及定理十系三可知.

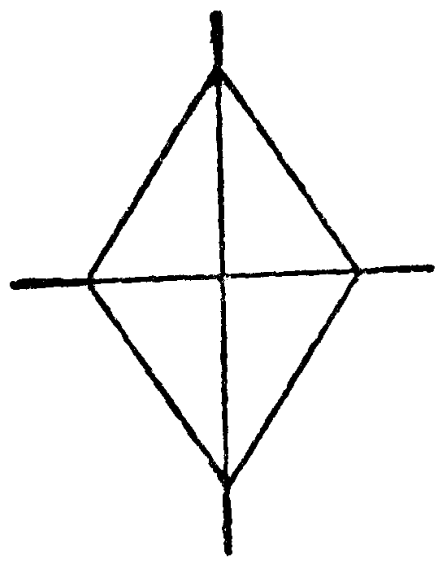
系一.　菱形各對角線等分一雙對角.

定理二十九.

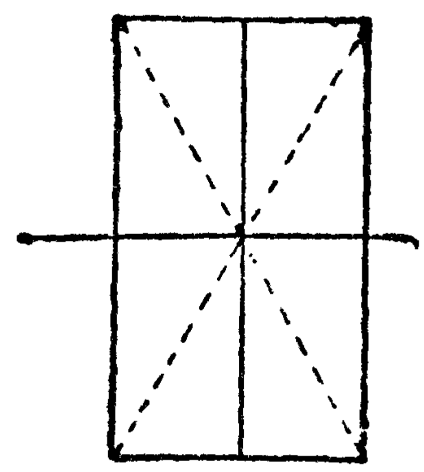
矩形關於其二雙對邊中點之聯線爲對稱.

從定理十六系三系四,定理十五系七,定理十系三,系五可知.

系一.　矩形各邊之垂直等分線垂直等分其對邊.



系二. 菱形二對角線互相垂直.



系二. 矩形二對角線互相等分.

系三. 關於直交二軸爲對稱之圖,關於此二軸之交點亦爲對稱(此爲軸對稱與中心對稱之關係).

系四. 矩形之二對角線相等而互相等分. (二雙軸對稱及中心對稱點之距離).

系五. 直角三角形斜邊中點與三個角頂等距(系四).

系六. 正方形二對角線相等,等分各角且互相垂直等分(系二及五).

系七. 菱形,矩形,正方形皆有中心及直交二軸.

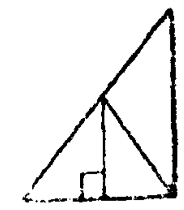
例題十四 (定理)

(1) 詳述定理二十六之證.

(2) 詳述定理二十六系一之證.

(3) 用二個全等直角三角形,證定理二十七系四.

(4) 如右圖,從直角三角形斜邊中點至一直角邊引垂線以證定理二十七系五.



(5) 平行四邊形之二對角線相等者爲矩形.

(6) 平行四邊形之二對角線互相直交者爲菱形.

(7) 平行四邊形二對角線相等而直交者爲正方形.

(8) 二等邊梯形之二對角線相等.

(9) 四邊形之一雙對邊平行,第二雙對邊相等者,或爲平行四邊形或爲二等邊梯形,二者必居其一.

(10) 四邊形之一雙對邊平行,一雙對角線相等者,或爲矩形或爲二等邊梯形二者必居其一.

第六章 三角形之心

46. 定理三十.

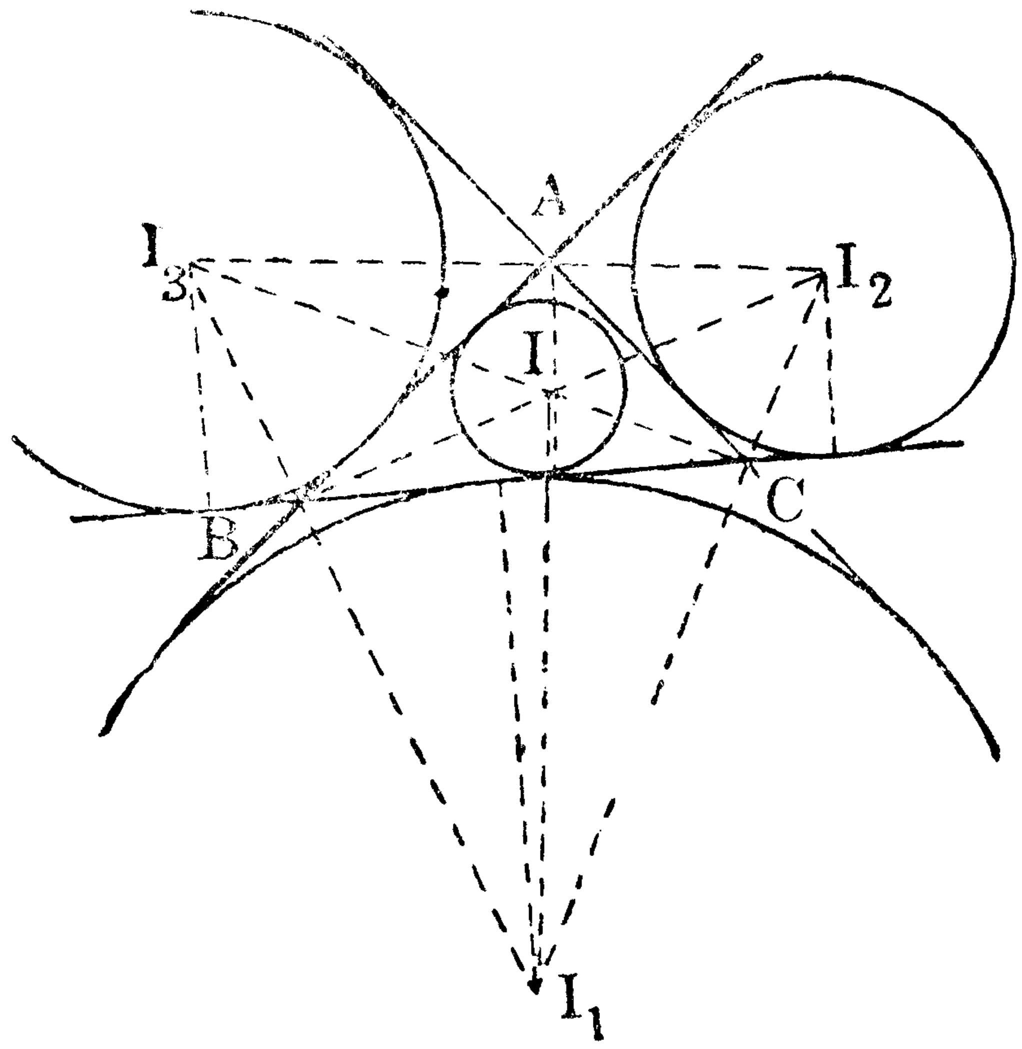
在一個三角形中.

(一) 三角之內等分線交於一點,此點與三邊等距.

(二) 一角之內等分線與他二角之外等分線共點,此點與三角形一邊及他二邊之延線等距.

先用定理十八或其系:可證此中之二線必相交;再用定理二十二系七及系六,可證此交點在第三線上.

〔注意〕 以此所共之點作中心,自此至一邊之距離作



半徑畫圓則三角形之三邊皆爲所畫圓之切線．此事至次編卽可知．

47. 定義十九．

三角形三角內等分線所共之點爲三角形之內心(In-center)．一角內等分線他二角外等分線所共之點爲三角形之旁心(Ex-centr)．三角形有一個內心三個旁心．

三角形之內心恒以 I 表之，旁心在 $\measuredangle A, B, C$ 內者各以 I_1, I_2, I_3 表之．

48. 定理三十一．

三角形三邊之垂直等分線共點，此點與三個角頂等距．

因二邊之垂直等分線必相交〔例題六(4)〕，而此交點在第三線上〔定理十三系五及定理十二系五〕故也．

系.* 從三角形各角頂至對邊之三個垂線爲共點.

過三角形各角頂引對邊之平行線得一新三角形,原三角形之三垂線爲新三角形三邊之垂直等分線〔例題五(7)及定理十五系七〕,故歸於本定理.

〔注意〕　以三角形三邊垂直等分線所共之點作中心,自此至一角頂之距離作半徑畫圓,則可過其餘二角頂.

49.　定義二十.

三角形三邊垂直等分線所共之點爲三角形之外心 (Circum-center), 三垂線所共之點爲三角形之垂心 (Ortho-center).

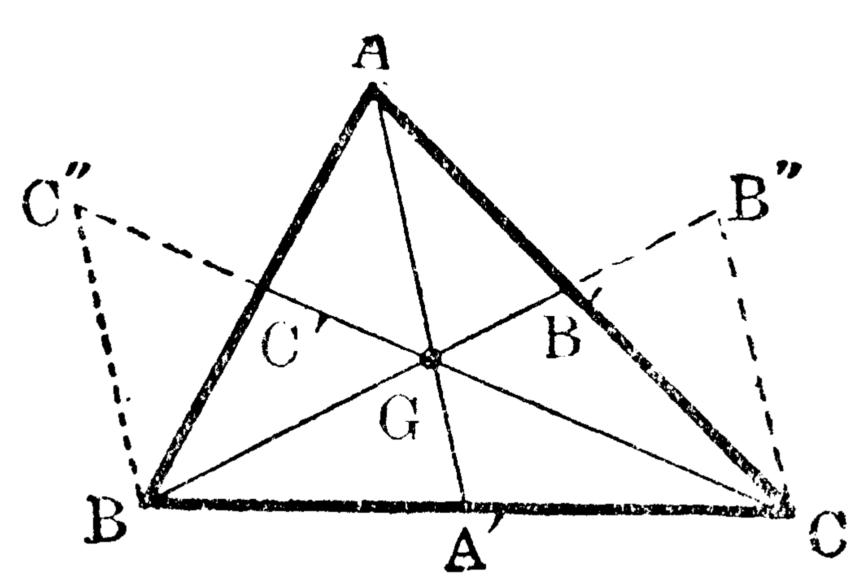
三角形之外心恒以 O 記之,垂心恆以 H 記之.

50.　定理三十二.

三角形之三個中線共點,此點與各角頂之距離等於其全中線之 $\frac{2}{3}$.

〔假設〕　AA', BB', CC' 爲 $\triangle ABC$ 之三中線.

〔終決〕　BB', CC', 交於 G, 則 G 又在 AA' 上;而 $AG=\frac{2}{3}AA'$, $BG=\frac{2}{3}BB'$, $CG=\frac{2}{3}CC'$



*本定理之發見者爲希臘之 Archimedes 氏〔西曆紀元前 287－212〕, 證明者爲德國之 Gauss 氏〔西曆 1777－1855〕.

〔證〕　聯 AG, 從 B 及 C 各引 AG 之平行線與 CC' 及 BB' 之延線各交於 C'' 及 B'';	
然則關於 C', $BC'' |\!/\!| AG$; 關於 B', $CB'' |\!/\!| AG$;	定理十五及定理十四系三.
由是　$BC'' \underline{\parallel} AG \underline{\parallel} CB''$;	定理十四(二)及公設五(b)
故 G 爲 BB'' 及 CC'' 之對稱中心而等分 BB'' 及 CC'';	定理十五及定理十四系四.
故 AG 必過 BC 之中點 A' 而爲第三中線;	定理二十系四.
故三中線共點.　$Q.E.D$	
次, $GA' = \frac{1}{2}BC'' = \frac{1}{2}AG$.	定理二十(二)及本題.
$GB' = \frac{1}{2}GB'' = \frac{1}{2}BG$,	本定理之證.
$GC' = \frac{1}{2}GC'' = \frac{1}{2}CG$;	
$\therefore\ AG = \frac{2}{3}AA'$, $BG = \frac{2}{3}BB'$, $CG = \frac{2}{3}CC'$.　$Q.E.D$	

51.　定義二十一.

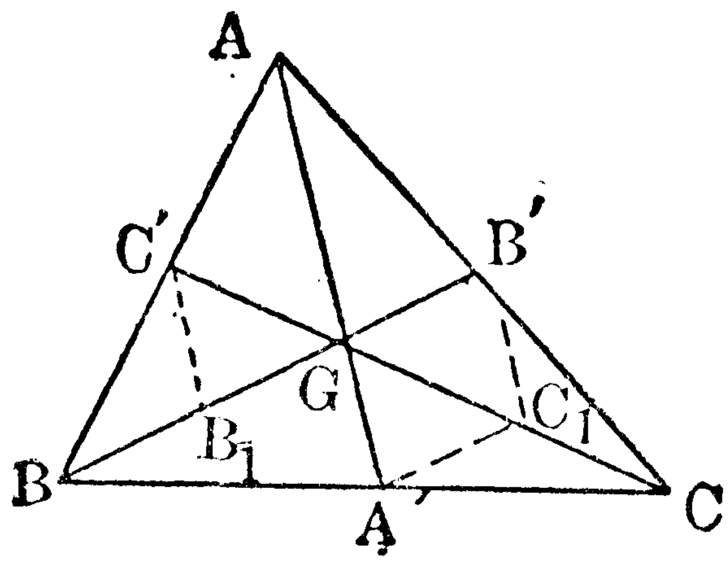
三角形三中線所共之點曰三角形之重心(Center of Gravity), 在力學中占一重要位置者也.

三角形之重心恆以 G 表之.

52.　解析證法.

證定理之方法,由假設逐節推闡以達於終決者曰綜合證法 (Synthetic Demonstration), 由終決逐節倒推而得假設者曰解析證法 (Analytic Demonstration).

綜合證法敍述時簡潔明淨,故證定理恆用之. 解析證法敍述殊繁,然實吾人思索探究之路徑,欲證較繁難之題時此殆爲必由之道;學者雖可不用而不可不知. 今爲舉例以明之.



例. 不用 §50 之證法證定理三十一.

已知 $\triangle ABC$ 之二中線 BB', CC' 交於 G.

注意終決中之 $BG=\frac{2}{3}BB'$, $CG=\frac{2}{3}CC'$;

吾人卽可思:苟能是,則必 $GB'=\frac{1}{3}BB'$, $GC'=\frac{1}{3}CC'$, 而 GB' 當爲 BG 之半, GC' 當爲 CG 之半;

欲證此事,有二路可行:(第一)證 BG 之半等於 GB', CG 之半等於 GC'; (第二)證 GB' 之倍等於 BG, GC' 之倍等於 CG;

吾人先行第一路:

〔第一〕　取 BG 之中點 B_1, CG 之中點 C_1, 則 B_1G 爲 BG 之半, C_1G 爲 CG 之半;　若如終決所言,則當 $B_1G=GB'$, $C_1G=GC'$; 於是從定理二十七系一, $B'C'B_1C_1$ (三)當成一平行四邊形,之對邊,卽當相等而且平行.

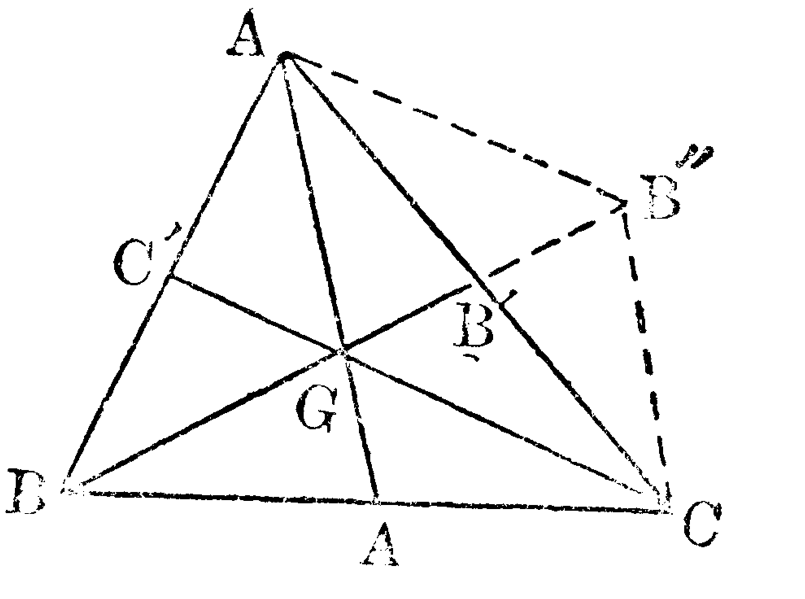
然吾人已知 B', C', B_1, C_1, 各為 CA, BA, BG, CG 之中點,故從定理二十一(二),知若聯 AG, 則 $B'C_1 \perp\!\!\!\!\perp \frac{1}{2}AG$, $C'B_1 \perp\!\!\!\!\perp \frac{1}{2}AG$, $\therefore B'C_1 \perp\!\!\!\!\perp C'B_1$. 於是第一層之目的已達.

次思 AA' 若過 G, 則 AG, GA' 當合成一直線;頃已知 $AG // B'C_1$, 故若能證明 $GA' // B'C_1$, 則從公設四,即可達此目的;

今圖中 GA' 及 $B'C_1$ 為四邊形 $GA'C_1B'$ 之一雙對邊,故若能證明此四邊形為▱,則 GA' 即能平行於 $B'C_1$; 欲證此四邊形為▱,宜證 $A'C_1 \perp\!\!\!\!\perp GB'$; 然已知 A', C_1 各為 CB 及 CG 之中點,從定理二十(二),知 $A'C_1 \perp\!\!\!\!\perp BG$, 即 $A'C_1 \perp\!\!\!\!\perp B_1G$; 於是 $A'C_1 \perp\!\!\!\!\perp GB'$, 所欲證者又已得矣.

尚餘一事,則已可不假思索而得之,蓋吾人已知 $B'C_1 = \frac{1}{2}AG$, 又知 $B'C_1 = GA'$ (平行四邊形對邊),則 $\frac{1}{2}AG = GA'$ 不勞而獲矣.

吾人試更進行第二路:



〔第二〕 延長 GB' 至 B'', 令 $B'B'' = GB'$, 則 $GB'' = 2GB'$; 故終決若果不誤,則當 $BG = GB''$, 即 G 當為 BB'' 之中點;因 C' 為 BA 之中點,故此說果確,則當 $AB'' // C'G$, 即當 $AB'' // GC$〔定理二十(二)〕

今因 $AB'=B'C$(假設), $GB'=B'B''$, 故從定理二十四系一(三), $AB''\underline{\parallel}GC$, 由是不但證實前說,且得 $B''C\underline{\parallel}AG$.

如終決所言, AA' 過 G, 則當 $GA'//B''C$; 然已知 G, A' 各爲 BB'', BC 之中點,故所欲證者又已如願.

餘事, $AG=B''C=2GA'$, $CG=B''A=2GC'$, 指顧可定.

以上二法,學者宜再寫成綜合證法,蓋解析不過爲用思想之方法,若表而出之,仍以綜合法爲宜.

解析之根據,在已習過之定理等熟而能化;致此之道,初雖借徑於記憶,然尤要在多加磨練,若徒恃熟讀成誦,則以生人而習死法,吾人固有之睿智反將緣此而日絀矣.

例題十五 (定理)

(1) 詳述定理二十九之證.

(2) 詳述定理三十之證.

(3) 詳述定理三十系之證.

(4) 以三角形三個旁心爲頂點作一新三角形,則原三角形之內心爲新三角形之垂心.

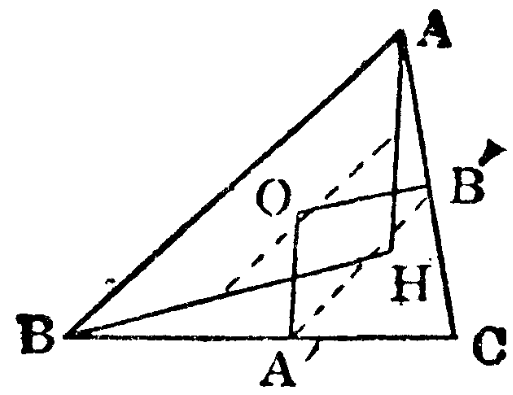
(5) 以三角形任意二個旁心及內心爲頂點作一新三角形,則第三個旁心爲此新三角形之垂心.

(6) 以三角形三邊中點兩兩之聯爲邊作一新三角形,則原三角形之外心爲新三角形之垂心.

(7)　定理三十系除上所述之證法外試再舉一證法.

(8)　從三角形各角頂及重心至形外任意一線引垂線,則前三垂線之和等於後一垂線之 3 倍.

(9)　H, O 各爲 $\triangle ABC$ 之垂心及外心, A' 及 B' 各爲邊 BC, CA 之中點,則 $HA=2\,OA', HB=2\,OB'$



(10)　銳角三角形之垂心在形內,鈍角三角形之垂心在形外,直角三角形之垂心爲直角頂點.

第七章　證法及雜例

52. 證題之方法.

證題之法,變化多端,言不能盡;玆僅能略舉大要,神而明之,存乎其人.

〔第一〕　欲證線分或角之相等: (一) 可證其爲全等三角形之對應邊或對應角; (二) 可證其爲二等邊三角形之等邊或等角;(三)可證其關於一軸或一中心爲對稱;(四)可證其爲平行四邊形之對邊或對角;等.

〔第二〕　欲證線分或角之不等; (一) 利用有不等二邊或不等二角之三角形; (二) 利用有二雙邊相等而其夾角或第三邊不等之二個三角形;(三)利用公理五;(四)利用從一點至一直線所引之不等斜線;等.

〔第三〕　欲證一角爲直角:(一)證其與一已知之直角相等;(二)證其與隣補角相等;等.

〔第四〕　欲證二線平行;(一)證其與一定直線所成之一雙錯角相等,或一雙同位角相等,或一雙同旁內角互爲補;(二)證其爲平行四邊形之一雙對邊;(三)證一直線通過以又一直線爲一邊之三角形他二邊之中點;等.

〔第五〕　欲證第一線分或角爲第二線分或角之倍:(一)可證第一線分或角之半等於第二線分或角;(二)可證第二線分或角之倍等於第二線分或角.

〔第六〕　欲證二線分或角之和等於一線分或角;(一)可作出前二者之和而證其等於後一者;(二)可從後一者中減去前二者之一而證其餘與前二者之又一相等;等.

〔第七〕　欲證三線共點;(一)證其二線之會在第三線上;(二)若有一爲線分,可證其兩端與他二線之會共線;(三)在三線上各覓一點爲三角形角頂使所證之題可合於第五章中諸定理之一;(四)可證兩兩之會合一;等.

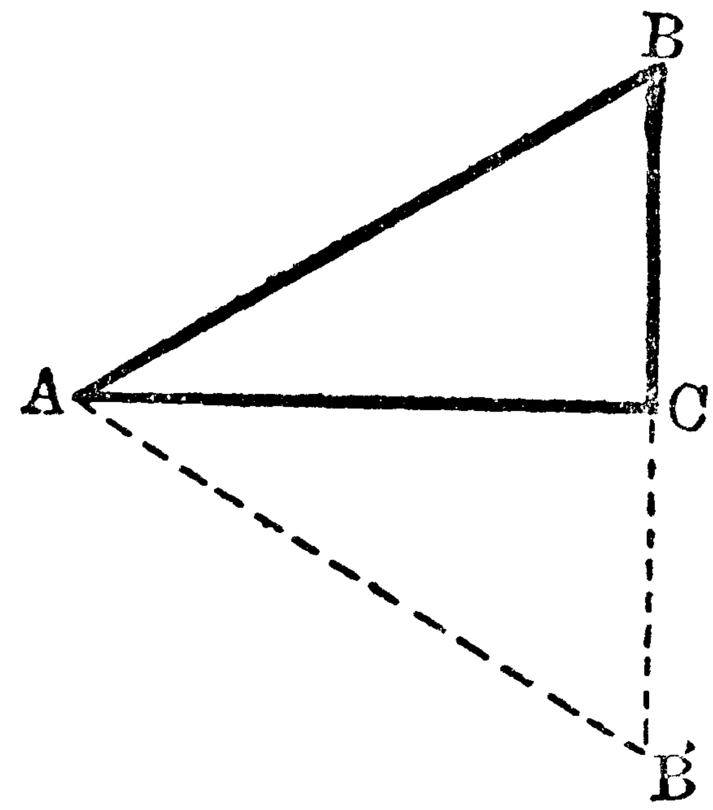
〔第八〕　欲證三點共線;(一)作兩兩之聯而證二聯線合一,或成一直線角;(二)證兩兩之聯各與同一之定直線成同向相等之角;(三)證兩兩之聯各與同一定直線平行;等.

〔第九〕　關於三角形之設題能推知其角之大小者,可

用代數計算以證之.

以上證法,除最簡之設題外,大都未必能直接應用,宜加補助線(Additional Lines)以導之.

*例一. 直角三角形之一銳角爲 $\frac{2}{3}R_\angle$, 則其最小邊等於斜邊之半. 倒定理亦成立. (第五及第九之例)



〔假設〕 $\triangle ABC$ 中 $\measuredangle C=R_\angle$,

(一) $\measuredangle B=\frac{2}{3}R_\angle$; (二) $BC=\frac{1}{2}AB$.

〔終決〕 (一) $BC=\frac{1}{2}AB$; (二) $\measuredangle B=\frac{2}{3}R_\angle$

〔證〕 延長 BC 至 B' 令 $CB'=BC$, 聯 AB', 則

$\triangle ABC \cong AB'C$, 而 $\measuredangle B'=B$, $AB'=AB$; 何故?

(一) $\measuredangle BAB'=2R_\angle-\dfrac{2\times 2}{3}R_\angle=\frac{2}{3}R_\angle=B=B'$; 何故?

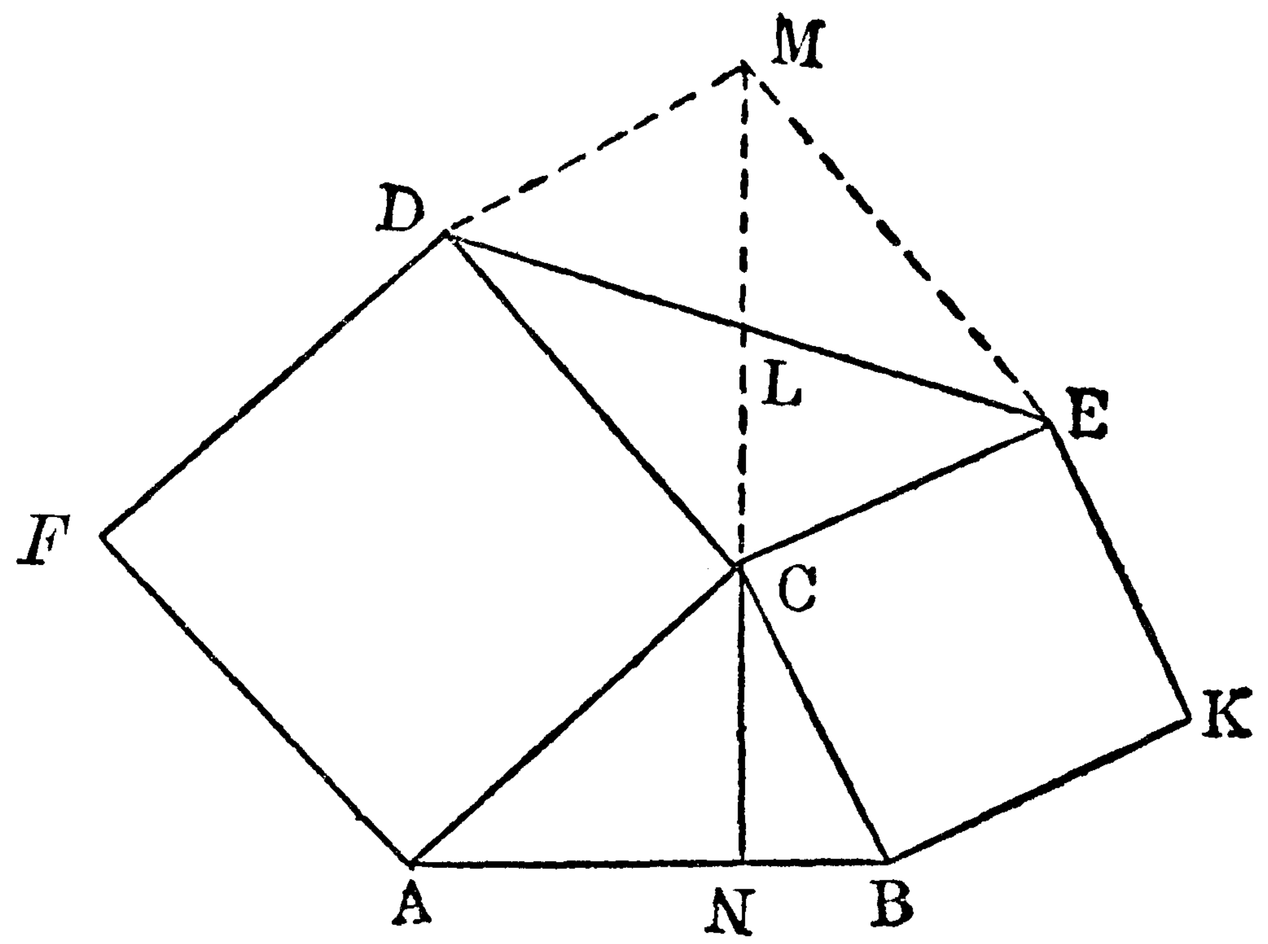
故 $BB'=AB$, 而 $BC=\frac{1}{2}AB$ Q. E. D.

(二) $BB'=AB=AB'$, $\measuredangle B=\frac{2}{3}R_\angle$ Q. E. D. 何故?

例二. ABC 爲不等邊三角形,以 AC 及 BC 爲正方形一邊各向三角形外作正方形 $ACDF$, $BCEK$, CN 爲從 C 至 AB 之垂線,則 NC 之延線必過 DE 之中點;且從 C 至 DE 中點之距離等於 AB 之半. (第一及第五之例)

---

*本書以限於篇幅,不能以諸法逐一舉例,今僅略[illegible]而已.



〔證〕　延長 NC 至 M 令 $CM=AB$,

聯 EM, DM.

因 $\measuredangle ECM=CBA=NCB$ 之餘角（何故?）

故 $\triangle ECM\cong CBA$,　　$(s.a.s.=s.a.s.)$

而　　$CM=BA$ (1),　$\measuredangle MEC=ACB$ (2);

因 $\measuredangle ECD$ 爲 ACB 之補角（何故?），故從 (2)，又爲 MEC 之補角，而 $ME//DC$（何故?）；

又　　　　　$ME=AC=DC$,

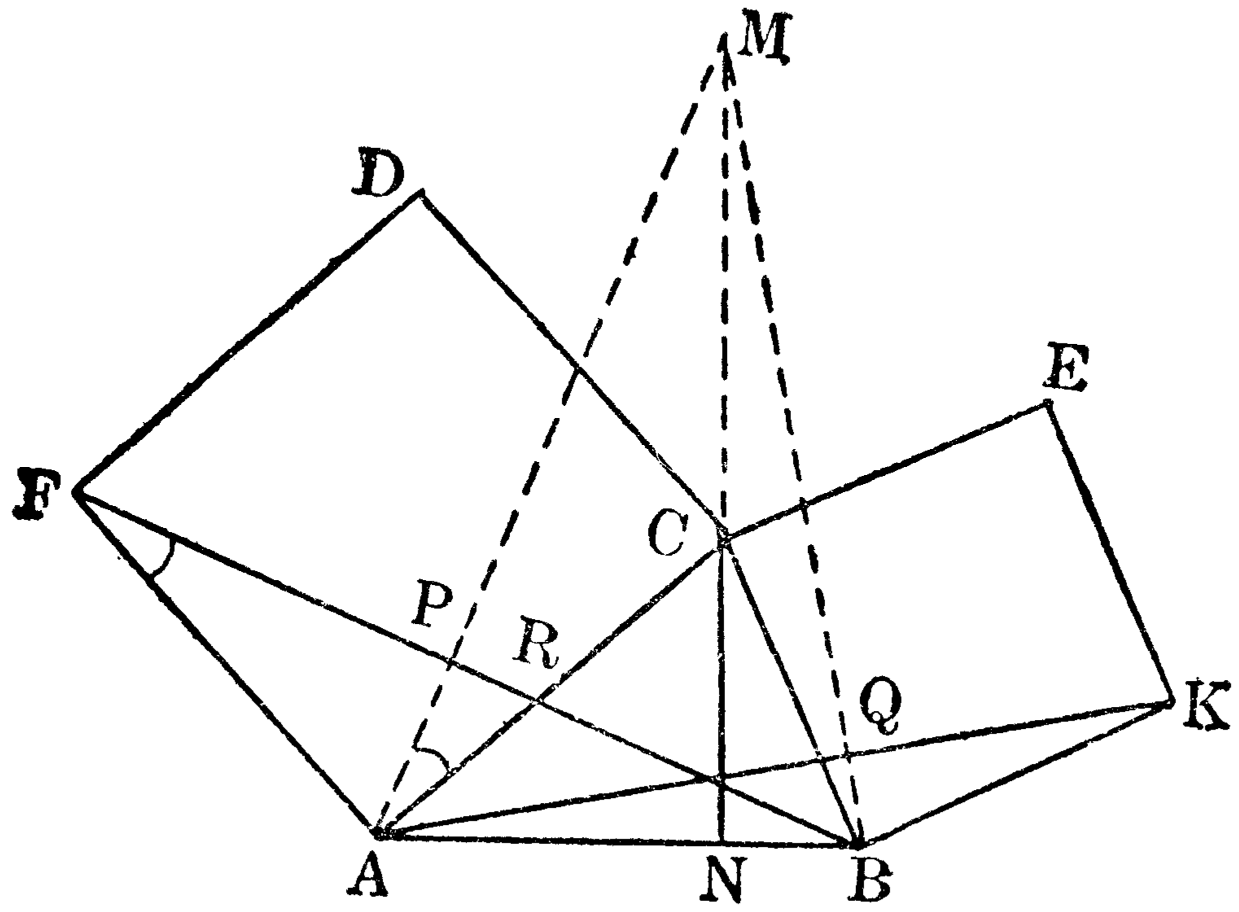
$\therefore CDME$ 爲平行四邊形（何故?）

於是 DE, CM 互相等分（何故?），卽 NC 之延線過 DE 之中點.　　　　$Q.E.D.$

次，從上，知 $CL=\frac{1}{2}CM=\frac{1}{2}BA$（從(1)）.　　　　$Q.E.D.$

例三.　ABC 爲任意三角形，以 AC 及 BC 爲正方形一邊,

各向三角形外,作正方形 $ACDF$ 及 $BCEK$, CN 爲從 C 至 AB 之垂線,則 AK, BF, CN 三線共點.(第七之例).



〔證〕 延長 NC 至 M, 令 $CM=AB$, 聯 AM, BM. AM, BF 交於 P; BM, AK 交於 Q.

因 $\triangle ACM \cong BAF$ (何故?), 而 $\measuredangle MAC=AFB$; BF 交 AC 於 R, 則在 ⓢPAR, AFR 中, $\measuredangle R$ 公有, $\measuredangle PAR=AFR$,

∴ $\measuredangle RPA=RAF=R_{\measuredangle}$ (何故?), 而 $BF \perp AM$; 同理,可證 $AK \perp BM$;

由是 AK, BF, CN 爲 $\triangle MAB$ 之三垂線,故共點(定理三十一系).

53. 作補助線法.

作補助線之法,至要亦至難:學者能得此中三昧,則於幾何題可目無全牛,迎刃而解,否則正面牆而立,不能寸進矣,其要若此;顧古今中外無一人詳言其法者,非不欲言,無從

言也,可言者惟一語,曰,'宅相何宜卽作何線',此語茫無邊際,於初學者毫無益處,然一落邊際,卽有罣一漏萬之病,是以寧默而不言,故曰至難.

今不佞爲初學計,寧招罣一漏萬之誚而略示端倪,語固至略,然憤悱之學者,能卽一隅以反其三,則能力當潛滋而突長,幾何學中奧妙之府不難漸啟其扃矣.

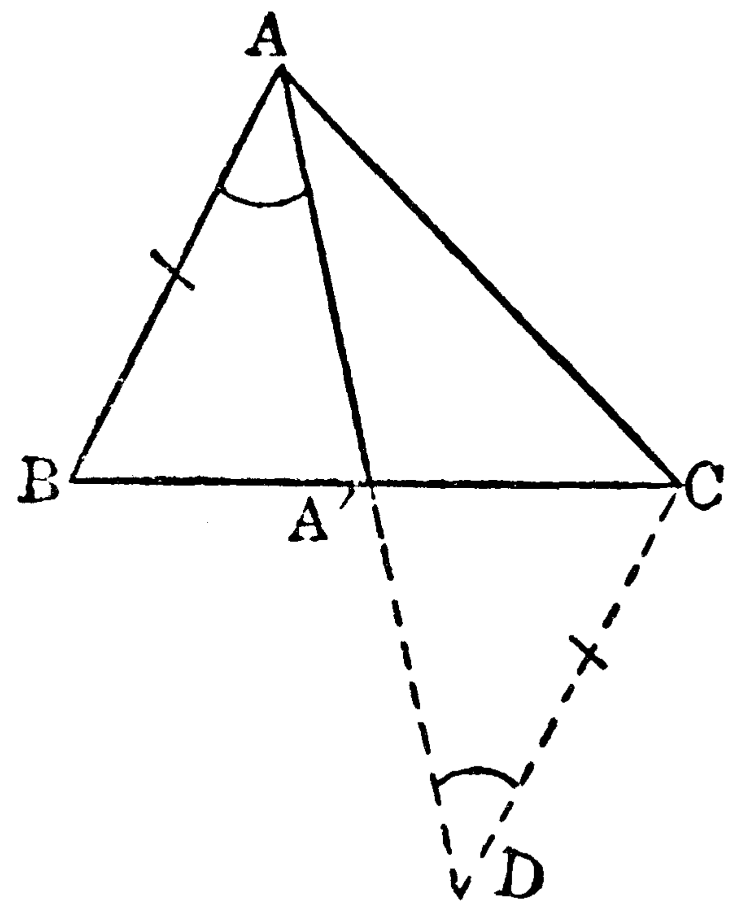
作補助線之標準有三:(一)使欲證者與已知者發生密切之關係;(二)使已知者聚於一處,吾人可得下手之地;(三)使欲證者聚於一處(欲證者不止一事時)便於吾人之比較取用. 無標準之線不宜妄作,妄作則圖中紛如亂絲,吾人目爲之眩矣.

作補助線之大要;(一)以欲證或已知之線平行移動令其一端至一已知點;(二)從已知點向已知線或欲證線引直線使成一已知之角;(三)有一角,則試作此角之等分線;(四)有一角及等分線,則從等分線上已知點至角之二邊引垂線,或由邊上已知點作等分線之垂線;(五)關於一已知點或線作圖中一部分之對稱圖;(六)題設三角形及一邊之中線,則就其重心觀察,或延長中線使等於其本身;(七)題設線分之和或差者,試截長補短而比較之.

以下數例,略示作補助線之路徑,以限於篇幅,證皆甚略,學者宜自行補足,更察以何因緣而達此途,擴而充之,思路

自開矣.*

例一. $\triangle ABC$ 中 $AB<AC$, AA' 爲對於 BC 之中線,則 $\measuredangle BAA'$ 比 $A'AC$ 大.



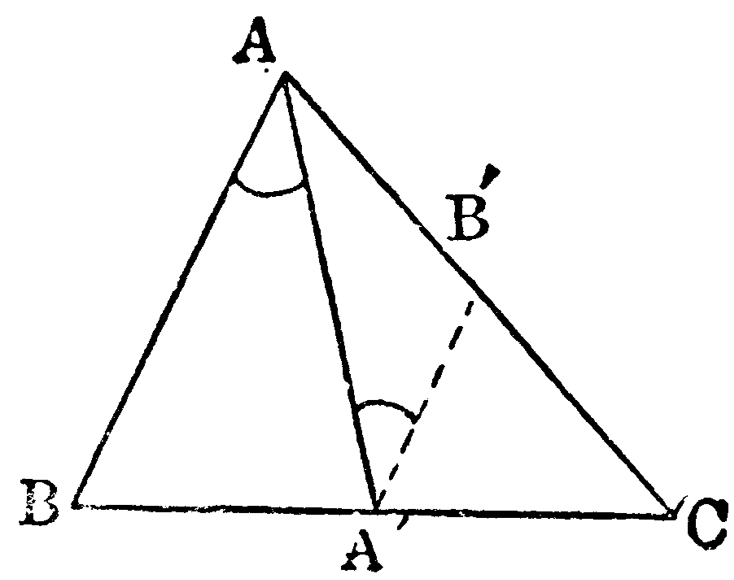
〔第一證〕 延長 AA' 至 D, 使 $A'D=AA'$,

則 $\triangle BAA' \cong CDA'$,

而 $\measuredangle BAA'=CDA'$, $AB=DC$;

因 $AB<AC$, 故 $\measuredangle A'AC<CDA'$;

由是 $\measuredangle BAA'>A'AC$.



〔第二證〕 B' 爲 CA 之中點, 聯 $A'B'$,

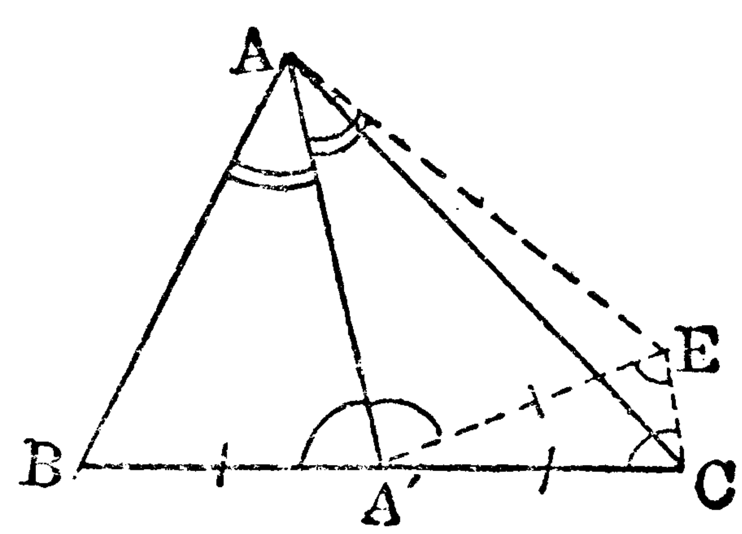
則 $A'B' \,\underline{\parallel}\, \frac{1}{2}AB$,

且 $\measuredangle BAA'=B'A'A$;

因 $AB'=\frac{1}{2}AC$, 及 $AB<AC$, 故 $B'A'<B'A$;

由是 $\measuredangle A'AB'<B'A'A$,

而 $\measuredangle BAA'>A'AC$



〔第三證〕 關於 AA' 取 B 之對稱點 E, 聯 AE, $A'E$, 及 CE

$\triangle ABA' \cong AEA'$, 而 $\measuredangle BAA'=A'AE$,

*此處諸例,以開發思路爲主,證法工拙在所不計.

$\measuredangle AA'B = AA'E = R_{\measuredangle} - \frac{1}{2}EA'C$, $A'B = A'E$;

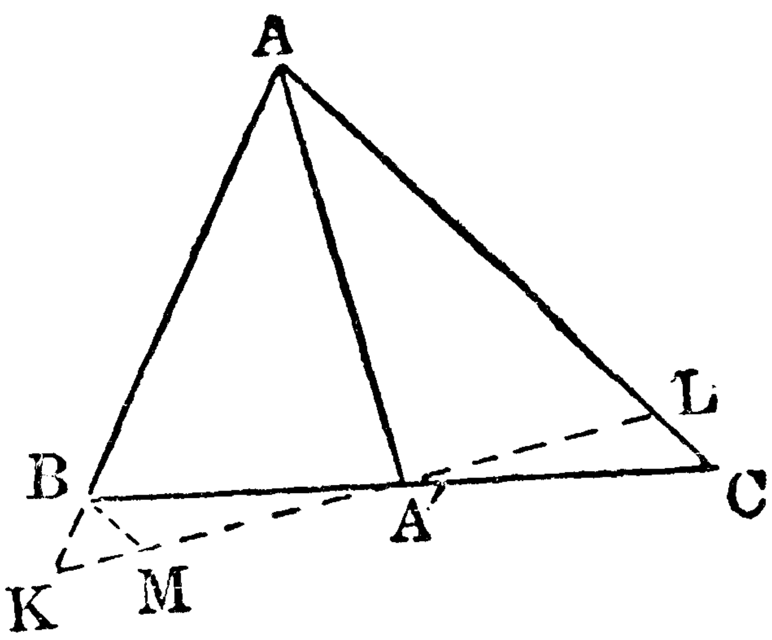
由是 $A'C = A'E$, 而 $\measuredangle CEA' = A'CE = R_{\measuredangle} - \frac{1}{2}EA'C$;

故 $CE \parallel A'A$, 而 E 在 $\triangle ABC$ 外,即 AE 在 $\measuredangle A'AC$ 之外;

故 $\measuredangle A'AE > A'AC$, 而 $\measuredangle BAA' > A'AC$.

($A'E$ 必在 $\measuredangle AA'C$ 之內,學者試自證之)。

〔第四證〕　在 △s ABA', ACA' 中, AA' 公有, $A'B = A'C$, $AB < AC$, 故 $\measuredangle AA'B < AA'C$, 而 $\measuredangle AA'B < R_{\measuredangle}$, $\measuredangle AA'C > R_{\measuredangle}$; 過 A' 引 AA' 之垂線交 AB 於 K, AC



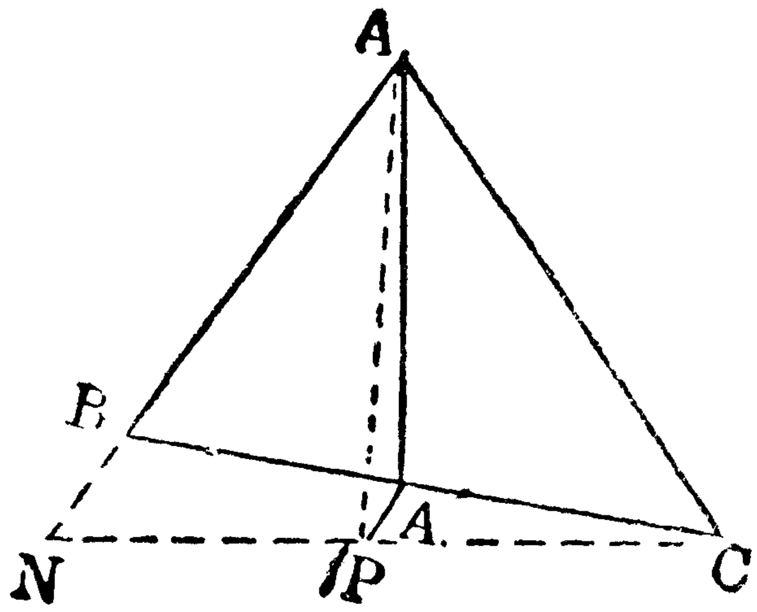
於 L, 則因 $\measuredangle AA'K > AA'B$, $\measuredangle AA'L < AA'C$, 而 K 在 AB 之延線上, L 在 A, C 之間;

從 B 引 AC 之平行線,交 KL 於 M, 則 M 在 K, A' 之間,而 $A'M = A'L$;

由是 $A'K > A'L$;

故 $\measuredangle KAA' > A'AL$

即 $\measuredangle BAA' > A'AC$.



〔第五證〕　在 AB 上取 N 令 $AN = AC$, 因 $AB < AC$, 故 N 在 AB 之延線上;

聯 NC, 從 A' 引 BN 之平行線交 NC 於 P, 則 $A'P$ 與 BN 在

AA' 之同旁;

由是聯 AP, 則 AP 與 AN 在 AA' 之同旁,故 $\measuredangle BAA'>BAP$,

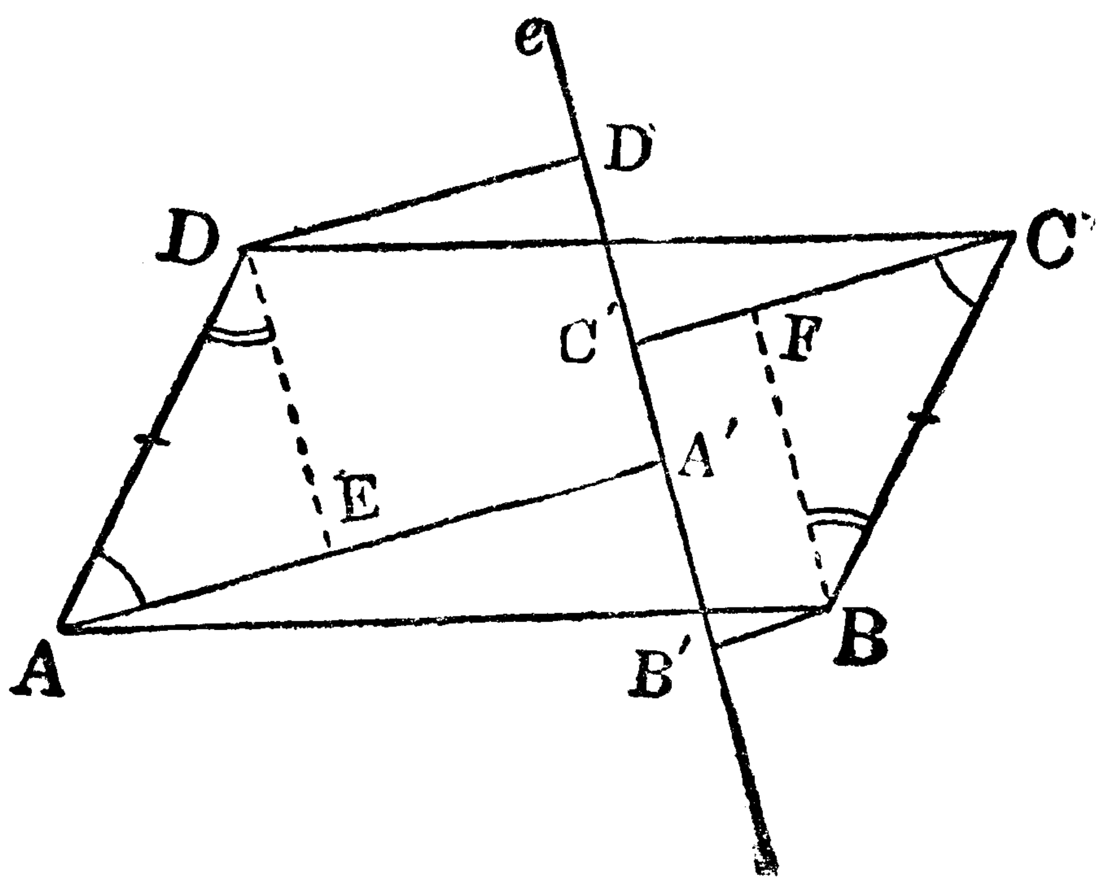
然因 P 爲 NC 之中點而 $\measuredangle BAP=\frac{1}{2}BAC$,

$$\therefore\ \measuredangle BAA'>\tfrac{1}{2}BAC>A'AC.$$

<u>例二.</u> $ABCD$ 爲一平行四邊形, l 爲交 AB, CD 之一直線,從各角頂至 l 各引垂線 AA', BB', CC', DD', 則

$$AA'\sim CC'=DD'\sim BB'.$$

(設 $AA'>CC'$, $DD'>BB'$.)



〔第一證〕　從 D 及 B 引 l 之平行線各交 AA', CC' 於 E, F, 則 $DEA'D'$ 及 $BFC'B'$ 各爲矩形而 $EA'=DD'$, $FC'=BB'$;

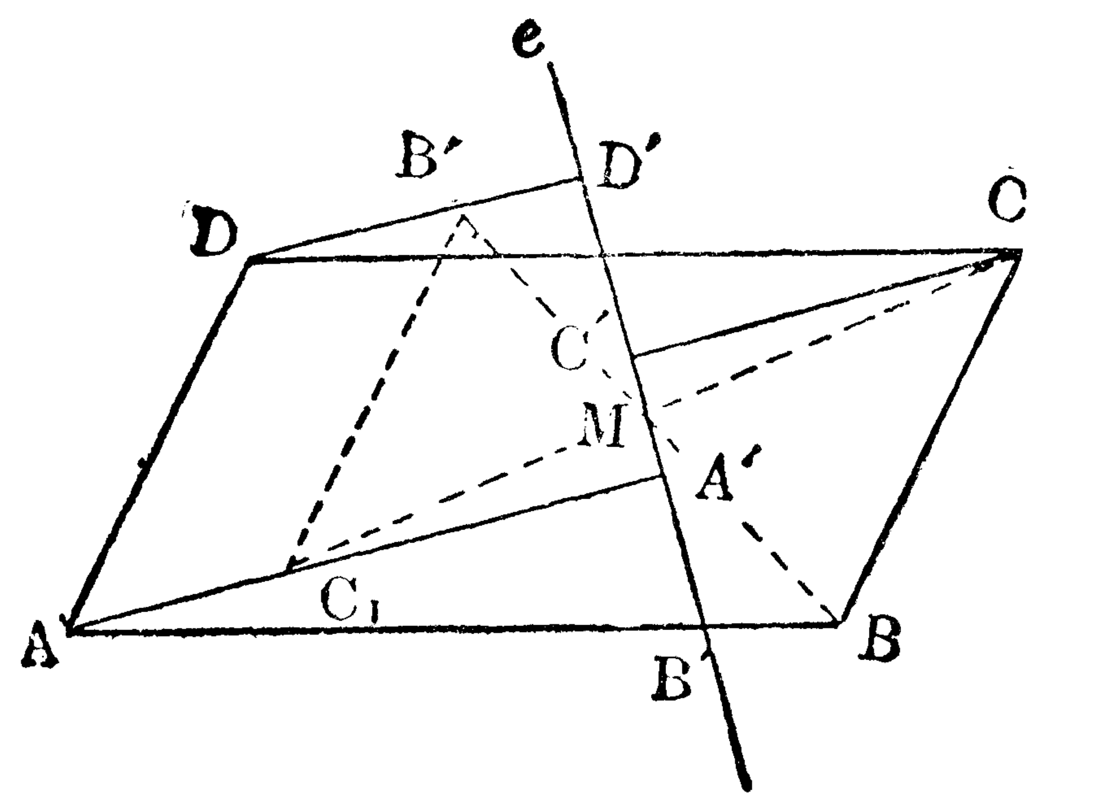
因 $\triangle AED\cong BCF$, 而 $AE=CF$;

由是　$AA'\sim CC'=EA'\sim FC'=DD'\sim BB'$

〔第二證〕　在 AA' 上取 C_1 令 $C_1A'=CC'$,

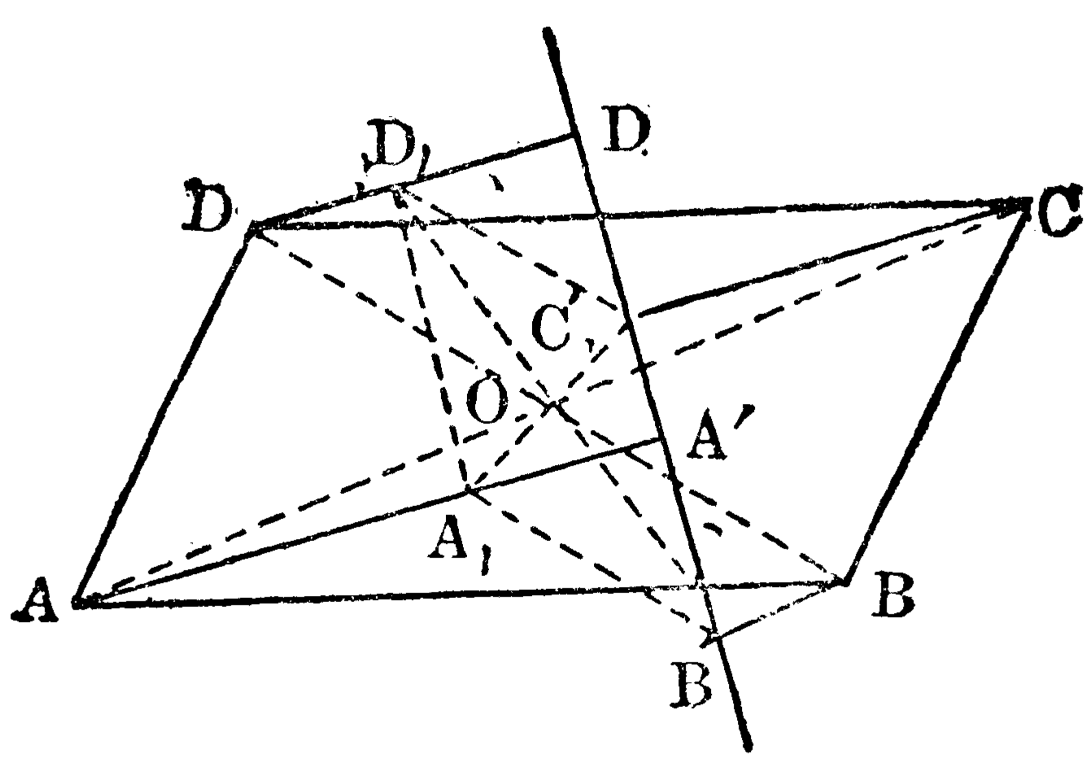
則 $AC_1=AA'\sim CC'$;

從C_1引AD之平行線，交DD'於B_1，則$C_1A' \underline{\parallel} CC'$，$C_1B_1 \underline{\parallel} AD \underline{\parallel} BC$，故 BB_1，CC_1交於M，則M為BB_1，CC_1之中點，亦即為$A'C'$之中點；



由是 $\triangle MB_1D' \cong MBB'$，而$B_1D'=BB'$；故$DB_1=DD'\sim BB'$；

因 $AC_1 \underline{\parallel} DB_1$，故 $AA'\sim CC'=DD'\sim BB'$；



〔第三證〕　在AA'及DD'上各取A_1及D_1令$AA_1=CC'$，$DD_1=BB'$，聯A_1D_1，A_1B'，D_1C'，A_1C'，D_1B'，AC，及BD.

因 $AA_1 \underline{\parallel} CC'$，故$AC$，$A_1C'$之交點$O$為$AC$，$A_1C'$之中點；

因 $AD \underline{\parallel} BC$，故$O$又為$BD$之中點；

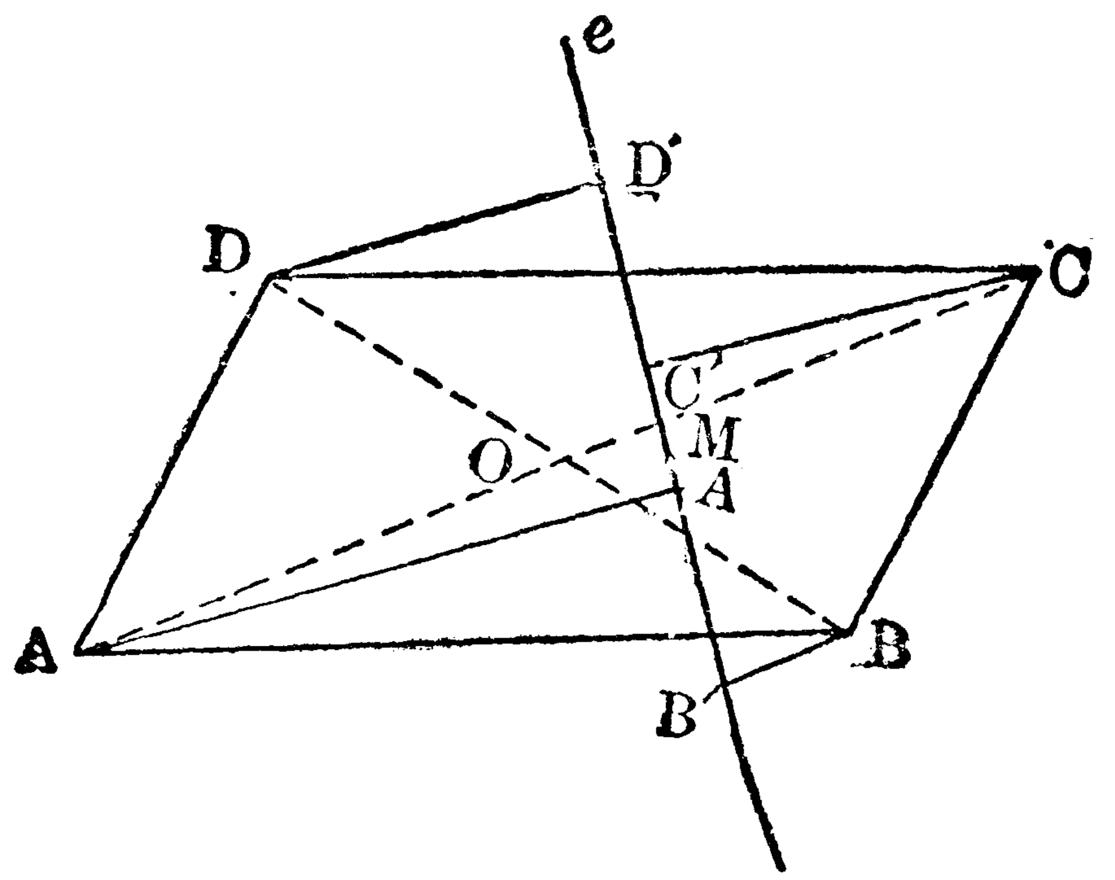
因 $BB' \underline{\parallel} DD_1$，故$O$又為$D_1B'$之中點；

由是A_1C'及D_1B'互相等分，故$A_1D_1C'B'$為平行四邊形，

而 $A_1D_1//B'C'$;

又因 $A_1A'//D_1D'$ 而 $A_1D_1D'A'$ 為矩形,故 $A_1A'=D_1D'$;

於是 $AA'\sim CC'=A_1A'=D_1D'=DD'\sim BB'$.



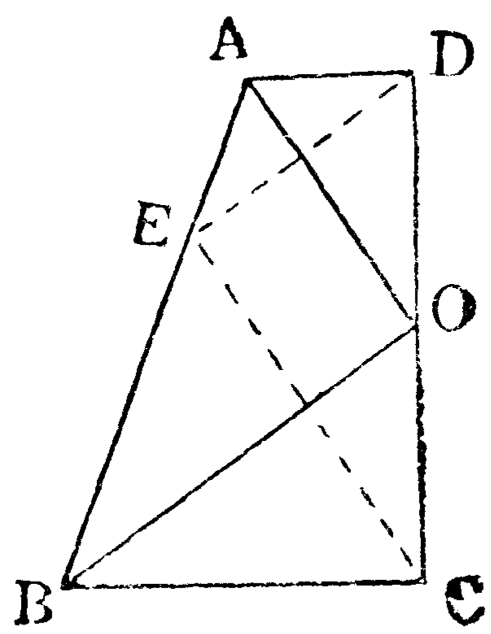
〔第四證〕 AC,BD 之交點 O 為此二線之中點;

從 O 至 l 引垂線 OM,則從定理二十系三及系二,

$2\,OM=AA'\sim CC'$, $2\,OM=DD'\sim BB'$;

$$\therefore AA'\sim CC'=DD'\sim BB'.$$

例三. 梯形 $ABCD$ 中二底 BC, AD 之和等於一邊 AB, 則 $\measuredangle A, B$ 之等分線與 CD 共點.



〔第一證〕 在 AB 上取點 E, 使 $AE=AD$, 則 $BE=BC$

聯 ED 及 EC, 則 $\triangle ADE, BCE$ 皆為二等邊三角形,而

$\measuredangle AED=R\measuredangle-\frac{1}{2}DAB$, $\measuredangle BEC=R\measuredangle-\frac{1}{2}ABC$;

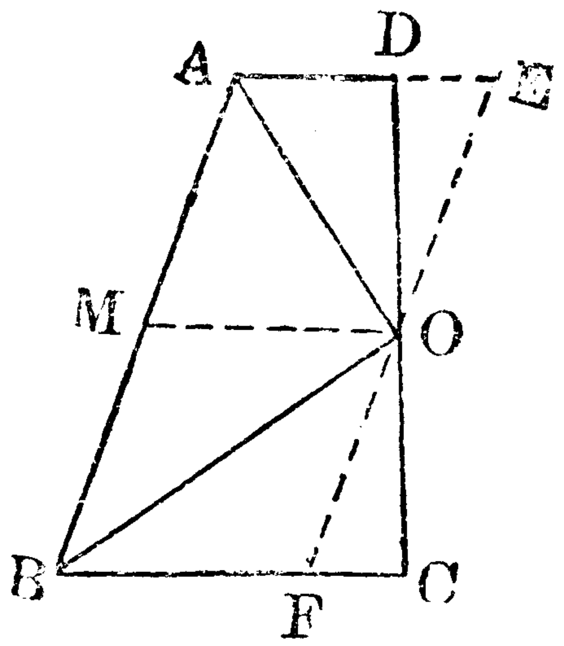
$\therefore \measuredangle AED+BEC=2R_{\measuredangle}-\frac{1}{2}(DAB+ABC)=2R_{\measuredangle}-R_{\measuredangle}=R_{\measuredangle}$,

而 $\measuredangle DEC=R_{\measuredangle}$;

$\measuredangle DAB$之等分線爲DE之垂直等分線,故過CD之中點O;

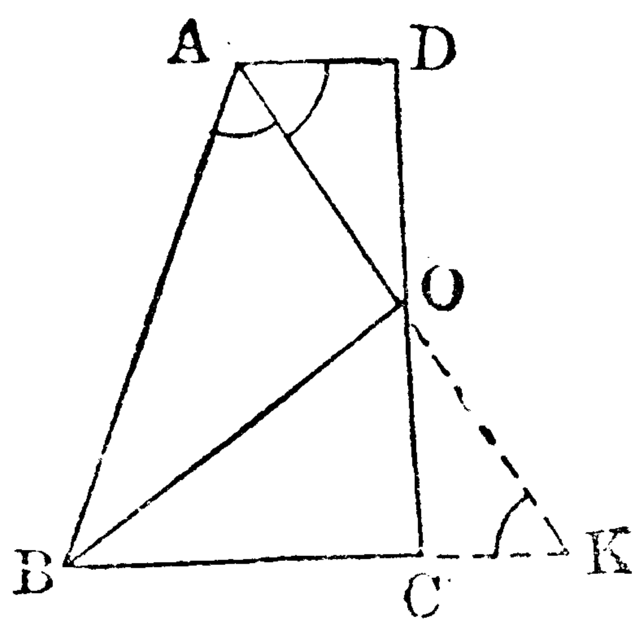
同理,可證$\measuredangle ABC$之等分線亦過CD之中點O;

故$\measuredangle A, B$之等分線與CD共點.



〔第二證〕　在AD及BC上各取點E及F,使$AE=BF=\frac{1}{2}AB$,設$AD<BC$,則E在A, D之外,F在B, C之間,而$DE=FC$, $EF//AB$;

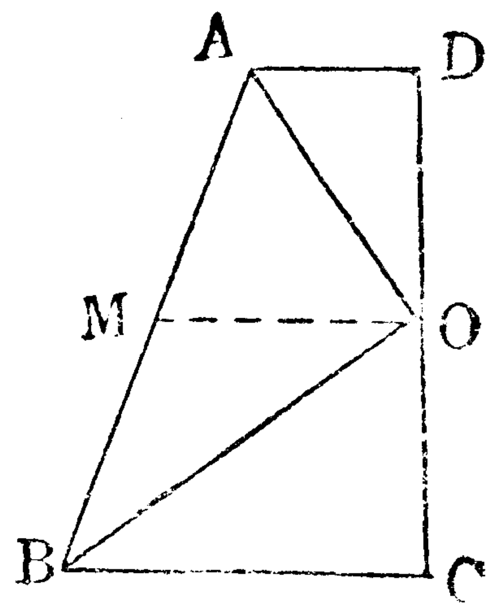
CD, EF互相等分於O;故M爲AB之中點,則$AMOE$及$BMOF$皆爲菱形,而OA, OB各等分$\measuredangle EAB$及ABC;



故$\measuredangle A, B$之等分線皆會CD於其中點O.

〔第三證〕　延長BC至K,令$CK=AD$,則AK, CD共有中點O,且

$$BK=BA;$$



由是$\measuredangle OAB=K=OAD$,而AO等分$\measuredangle A$;

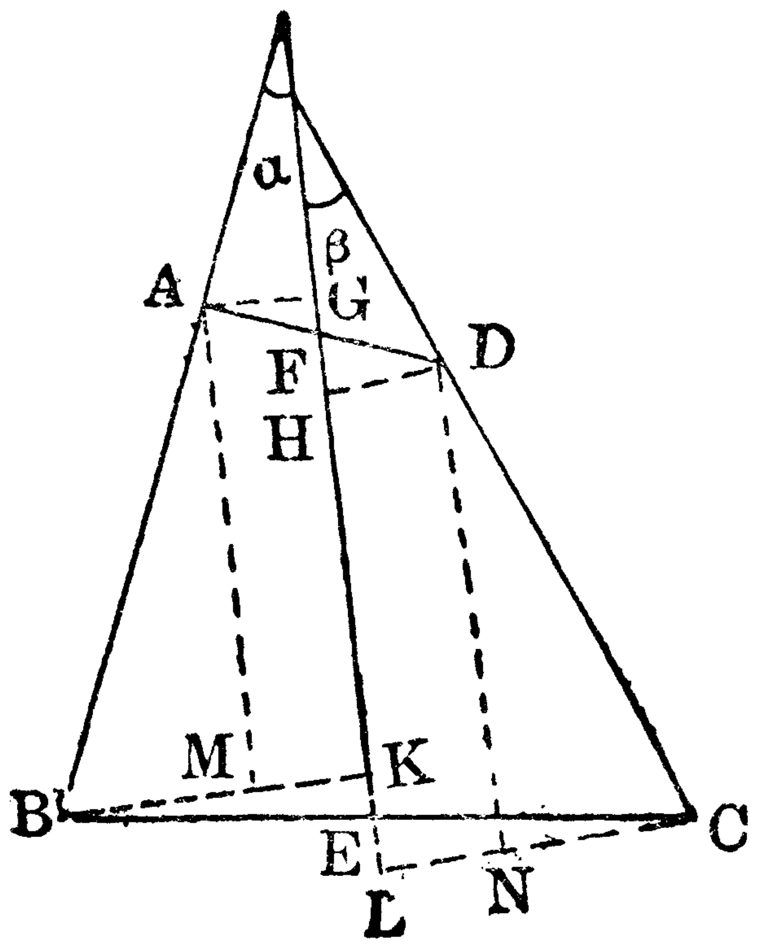
聯BO,則BO等分$\measuredangle B$;故如題言.

〔第四證〕　M, O各爲AB, CD之中點,聯MO,

則 $MO=\frac{1}{2}(AD+BC)=AM=BM$, 且 $MO//AD//BC$;

由是 $\measuredangle MAO=MOA=OAD$, $\measuredangle MBO=MOB=OBC$; 故如題言.

例四. 四邊形 $ABCD$ 中, $AB=DC$, E 及 F 各爲 BC 及 AD 之中點, AB 及 FE 之交角爲 α, CD 及 EF 之交角爲 β, 則 $\measuredangle\alpha=\beta$.



本題中 AD 及 BC 若相平行, 則四邊形 $ABCD$ 或爲平行四邊形,或爲二等邊梯形;前者 AB 及 CD 皆與 EF 平行不能得 $\measuredangle\alpha$, β, 後者 AB 及 CD 關於 EF 爲對稱,題中所欲證者不必證而可知.

故本題僅須證 AD 及 BC 不平行者.

〔第一證〕 從 A, B, C, D 至 EF 各引垂線 AG, BK, CL, DH, 又從 A 及 D 引 EF 之平行線,各會 BK, CL 於 M, N, 則 $AGKM$, $DHLN$ 各爲▭;

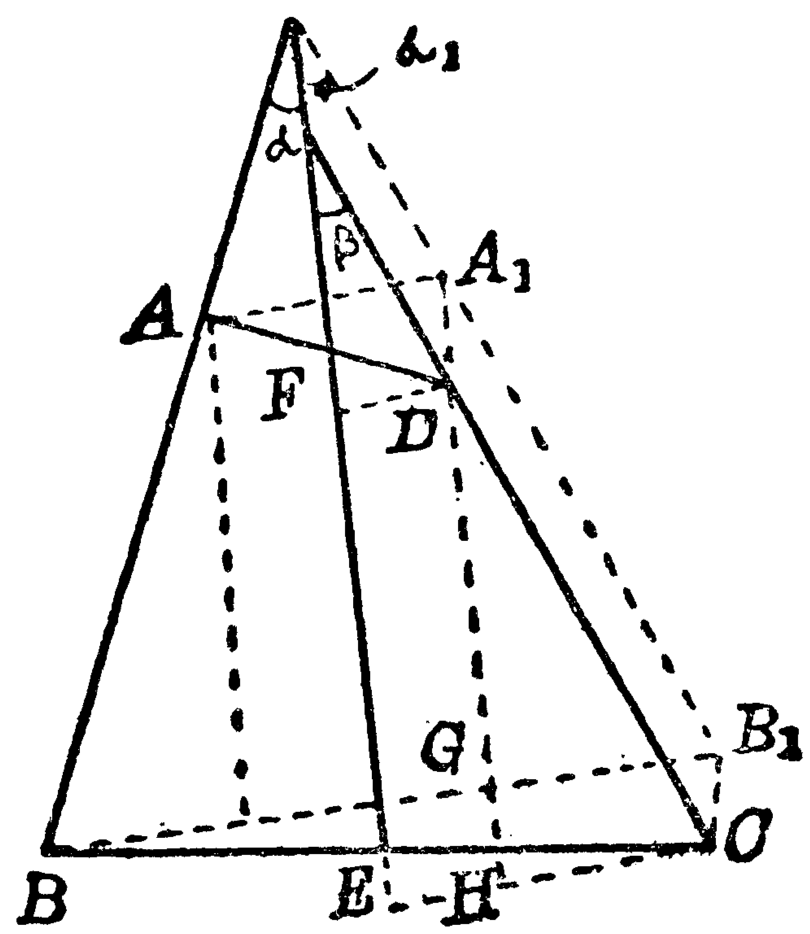
因 $\triangle AGF\cong DHF$, $\triangle BKE\cong CLE$, 而 $AG=DH$, $BK=CL$;

因 $MK\perp\!\!\!\!\!=AG$, $NL\perp\!\!\!\!\!=DH$, 而 $BM\perp\!\!\!\!\!=CN$;

又從 $AB=DC$, 而 $\triangle ABM\cong DCN$;

故 $\measuredangle\alpha=MAB=NDC=\beta$.

〔第二證〕 關於 EF 取 A 及 B 之對稱點 A_1 及 B_1, 則 $A_1B_1\wedge AB$, 而 A_1B_1 與 EF 所成之角 α_1 等於 α; 故能證明



$A_1B_1 // DC$ 斯可矣:

因 EF 爲 AA_1 及 BB_1 之垂直等分線,且過 AD 及 BC 之中點,

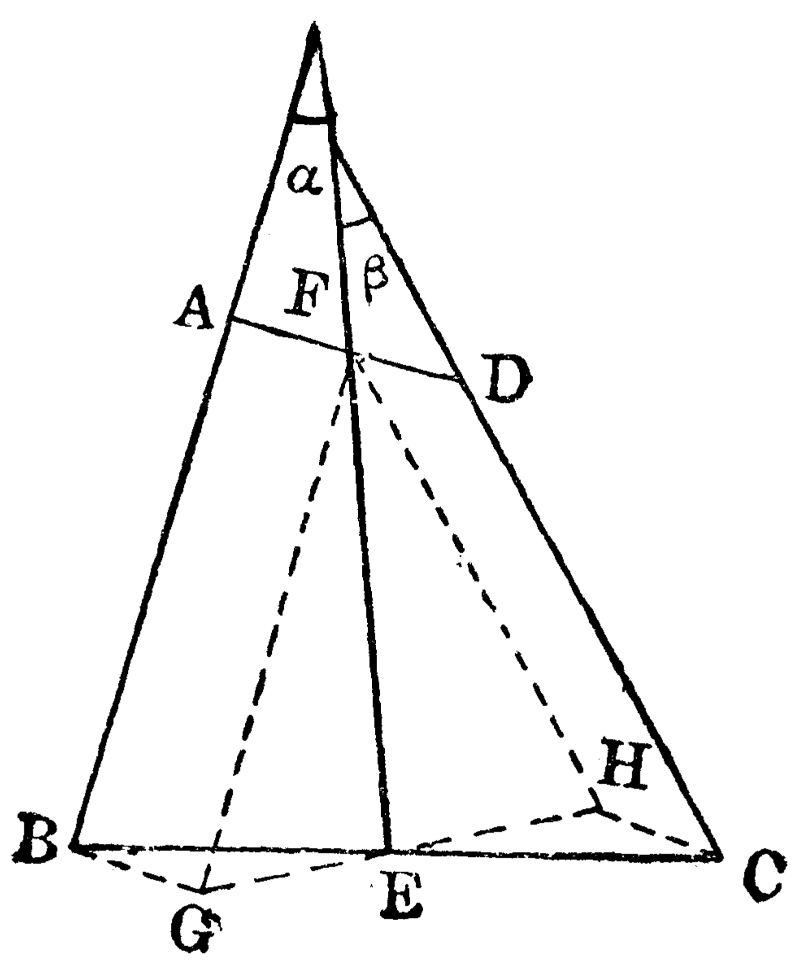
$\therefore\ A_1D // FE // B_1C$;

延長 A_1D 會 BB_1 於 G, 會從 C 所引 BB_1 之平行線於 H, 則 $B_1G \perp\!\!\!= CH$;

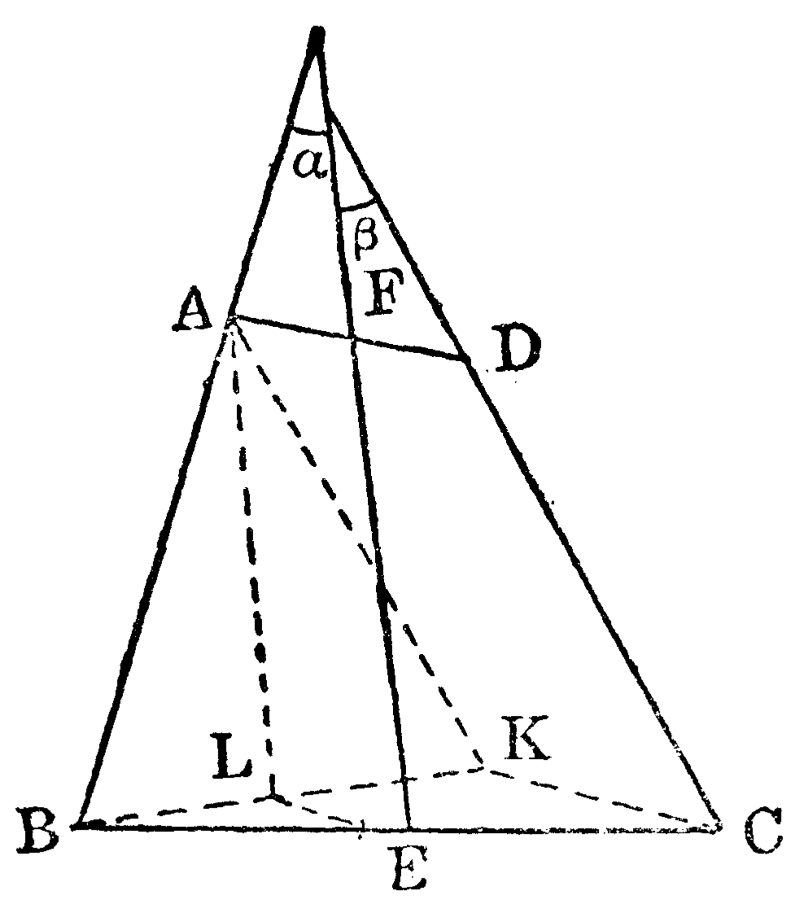
又因 $A_1B_1 = AB = DC$, $\measuredangle G = H = R_{\measuredangle}$,

$\therefore\ \triangle A_1B_1G \cong DCH$, 而 $\measuredangle A_1B_1G = DCH$;

故 $A_1B_1 // DC$, 而 $\measuredangle \beta = \alpha_1 = \alpha$



第　三　證



第　四　證

〔第三證〕　以 AB 平行移動至 FG, DC 平行移動至 FH, 則 $BG \perp\!\!\!= AF \perp\!\!\!= FD \perp\!\!\!= HC$, 故 BC, GH 互相等分於 E;

因 $FG=AB=DC=FH$, 而 E 爲 GH 之中點,故

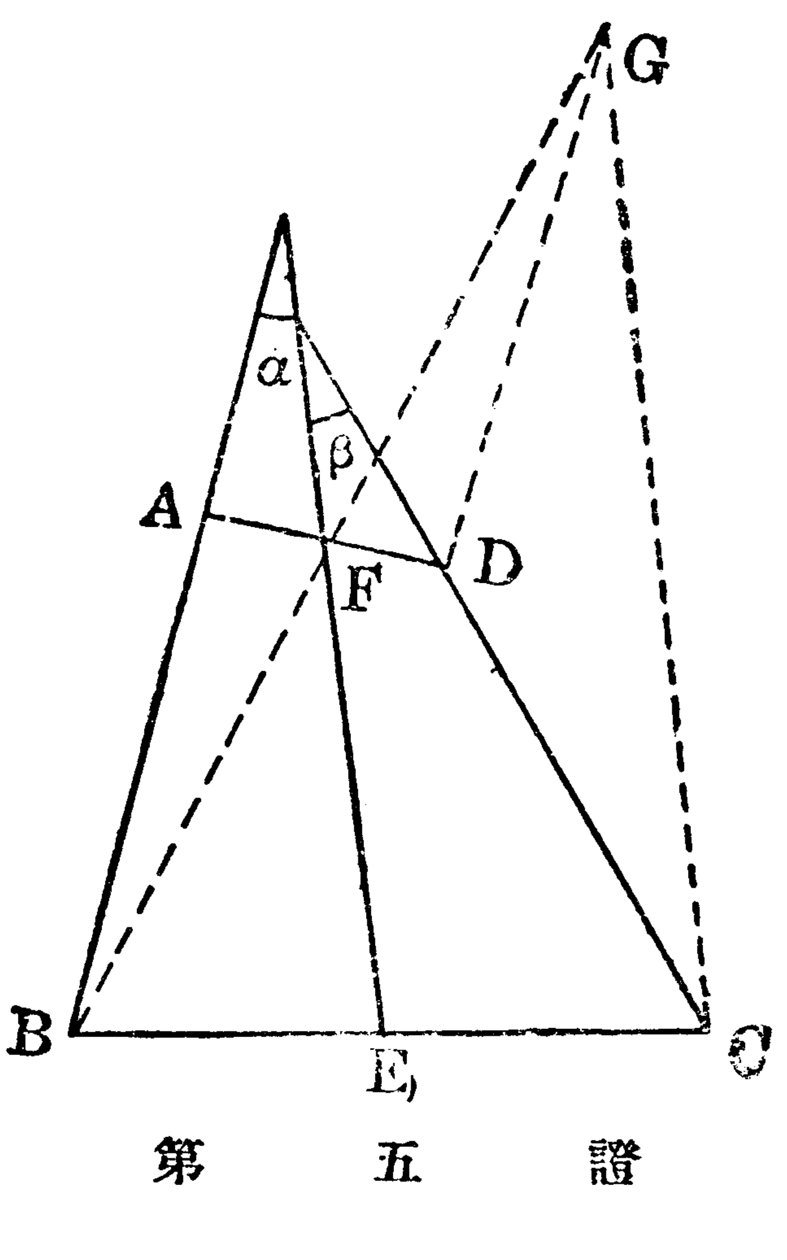
$$\measuredangle \alpha=GFE=EFH=\beta.$$

〔第四證〕　以 LC 平行移動至 AK, 則 $KC \perp\!\!\!\!\perp AD$;

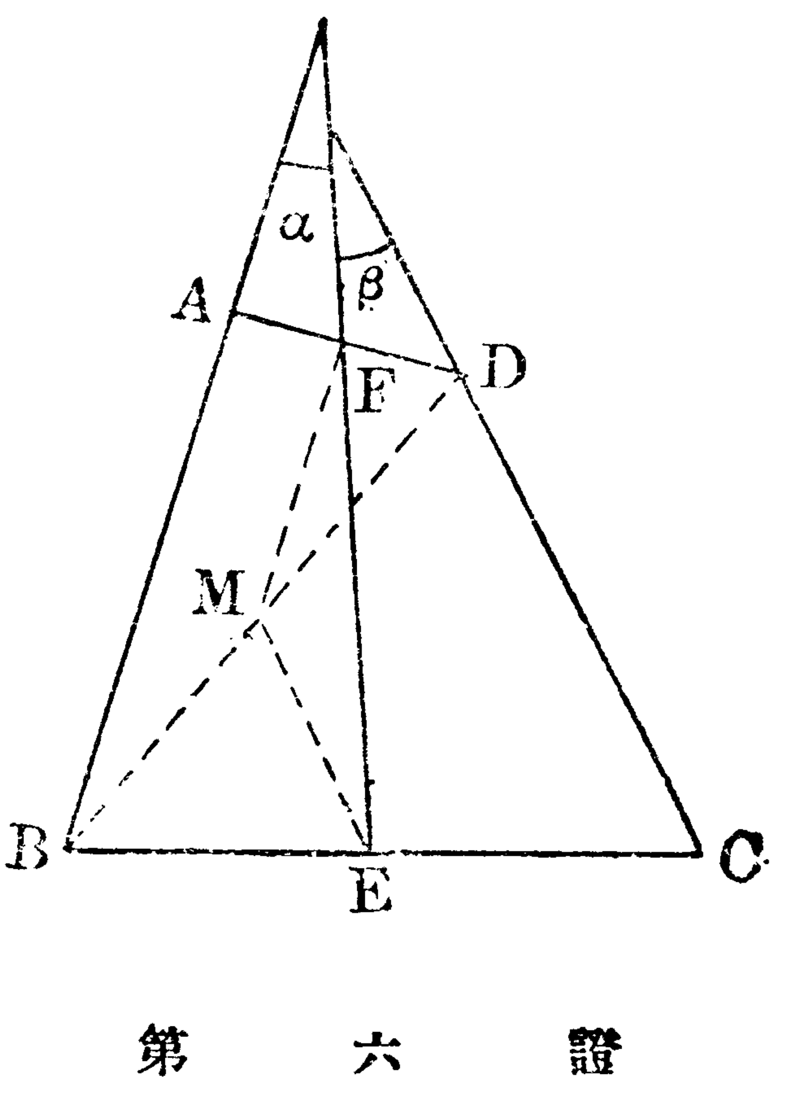
L 爲 BK 之中點,則 $LE \perp\!\!\!\!\perp \frac{1}{2}KC \perp\!\!\!\!\perp AF$,　$AL \perp\!\!\!\!\perp FE$;

因 AL 爲二等邊三角形對底之中線, $\therefore \measuredangle BAL=LAK$;

由是 $\measuredangle \alpha=BAL=LAK=\beta$.



第　五　證



第　六　證

〔第五證〕　以 AB 平行移動至 GD, 則 AD, BG 互相等分於 F;

EF 過 $\triangle BCG$ 二邊 BC, BG 之中點,故 $GC//FE$, 而

$\measuredangle DGC=\alpha$, $\measuredangle DCG=\beta$;

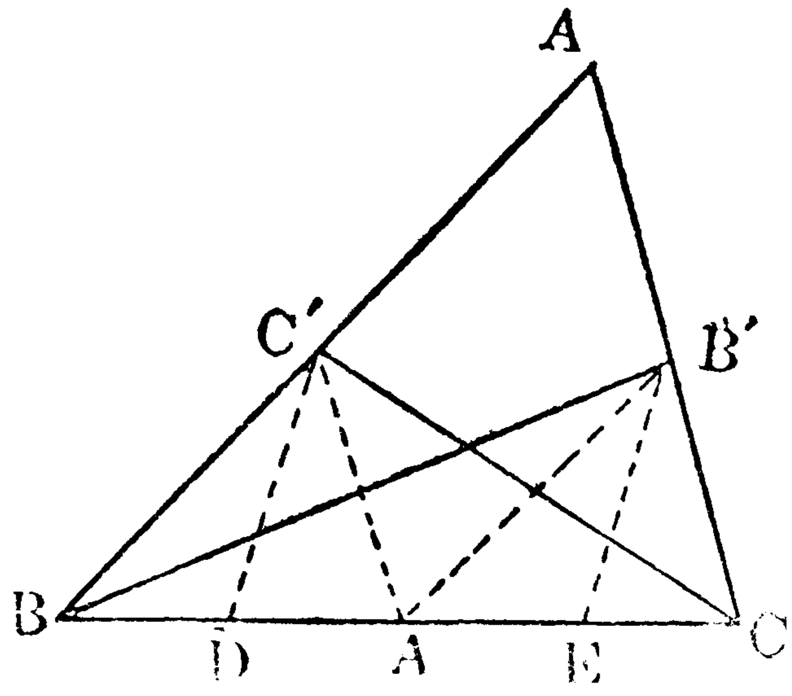
因 $DG=AB=DC$, $\therefore \measuredangle \alpha=\beta$

〔第六證〕　對角線 BD 之中點為 M, 聯 ME 及 MF, 則

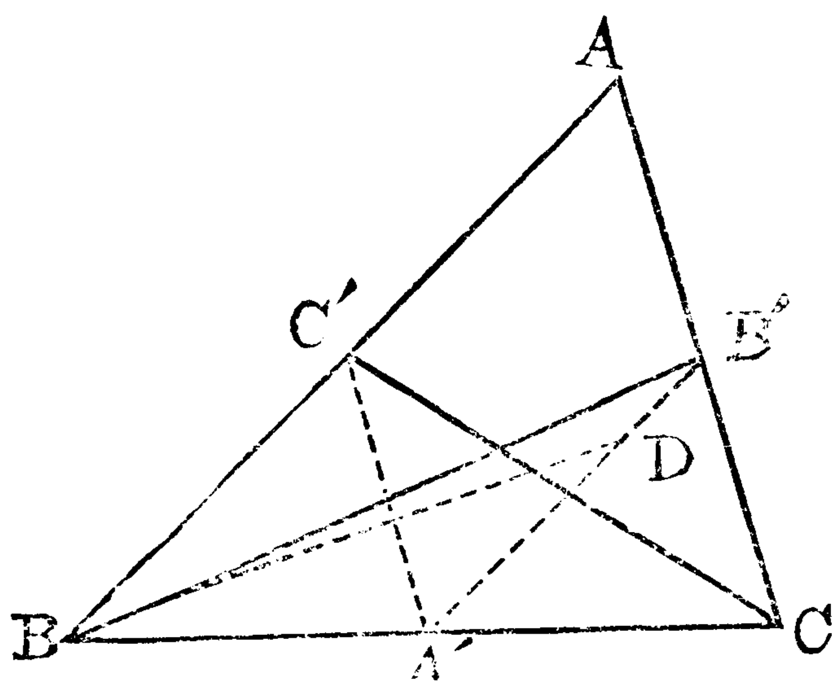
$$ME \stackrel{\parallel}{=} \tfrac{1}{2}DC,\quad MF \stackrel{\parallel}{=} \tfrac{1}{2}AB;$$

故 $\measuredangle MFE = \alpha$, $\measuredangle MEF = \beta$, 且 $ME = MF$;　　$\therefore \measuredangle \alpha = \beta$.

<u>例五.</u>　$\triangle ABC$ 中, $AB > AC$, BB' 及 CC' 各為 AC, AB 之中線, 則 $BB' > CC'$.



第　一　證



第　二　證

〔第一證〕　A' 為 BC 之中點, D 及 E 各為 BA' 及 $A'C$ 之中點,聯 $C'D$, $C'A'$, $B'A'$, $B'E$, 則 $B'A' \stackrel{\parallel}{=} C'B$, $C'A' \stackrel{\parallel}{=} B'C$, 而 $\triangle C'BA' \cong B'A'C$, $C'D \stackrel{\parallel}{=} B'E$;

在 $\triangle$s $C'DB$, $C'DA'$ 中, $C'D$ 公有, $DB = DA'$, $C'B > C'A'$,

故 $\measuredangle C'DB > C'DA$, 而 $\measuredangle B'EB = C'DB > C'DC$;

在 $\triangle$s $BB'E, CC'D$ 中, $EB = \tfrac{3}{4}BC = DC$, $B'E = C'D$, $\measuredangle B'EB > C'DC$, $\therefore BB' > CC'$.

〔第二證〕　A' 為 BC 之中點,則 $A'B' = \tfrac{1}{2}AB$, $A'C' = \tfrac{1}{2}AC$, $\therefore A'B' > A'C'$;

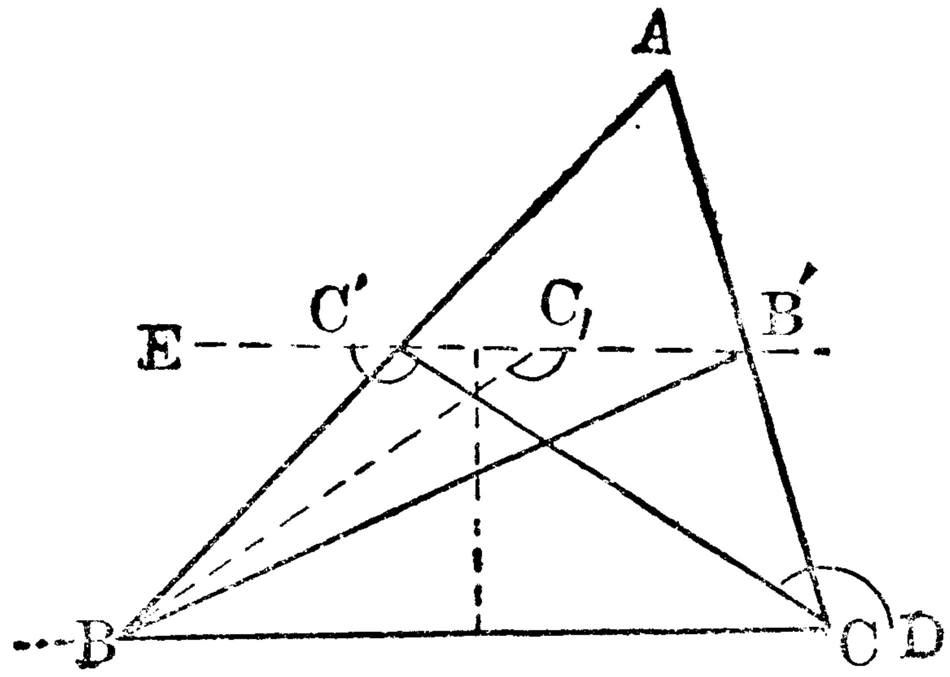
在 $A'B'$ 上取點 D, 令 $A'D=A'C'$, 則 D 在 $A'B'$ 之間;

因 $BA'=CA'$, $A'D=A'C'$, $\measuredangle BA'D(=st_{\measuredangle}-B)>CA'C'(=st_{\measuredangle}-C)$,

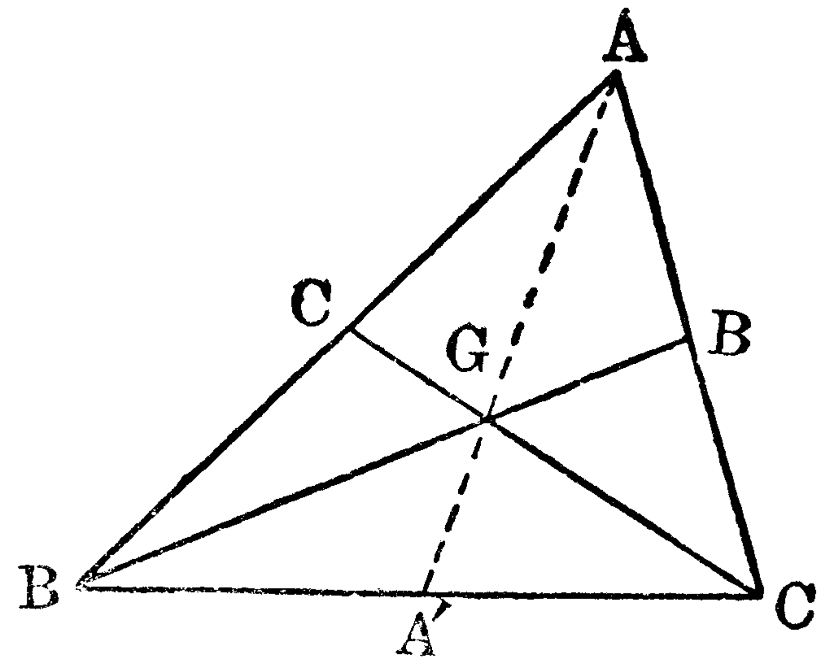
故 $BD>CC'$;

因 $\measuredangle B<C$, 故 $\measuredangle B$ 爲銳角,而 $\measuredangle BA'D=st_{\measuredangle}-B$ 爲鈍角.

由是 $\measuredangle BDB'$ 爲鈍角,而 $BB'>BD>CC'$.



第 三 證



第 四 證

〔第三證〕 關於 BC 之垂直等分線作 CC' 之對稱線 BC_1, 則 $C'C_1//BC$, 然 $C'B'//BC$, 故 C',C_1 及 B' 共在 BC 之平行線上;

延長 BC 至 D, $B'C'$ 至 E, 則 $\measuredangle BC_1B'=CC'E=C'CD$, 又 $\measuredangle BB'C_1=CBB'$;

因 $\measuredangle C'CD>CBB'$, 而 $\measuredangle BC_1B'>BB'C_1$, 故 $BB'>BC_1$, 即 $BB'>CC'$.

〔第四證〕 BB', CC' 之交點爲 $\triangle ABC$ 之重心 G.

故 AG 爲第三中線,過 BC 之中點 A';

在 $\triangle AA'B$, $AA'C$ 中, AA' 公有, $A'B=A'C$, $AB>AC$,

故 $\measuredangle AA'B>AA'C$, 卽 $\measuredangle GA'B>GA'C$;

在 $\triangle GA'B$, $GA'C$ 中, GA' 公有, $A'B=A'C$, $\measuredangle GA'B>GA'C$,

故 $GB>GC$;

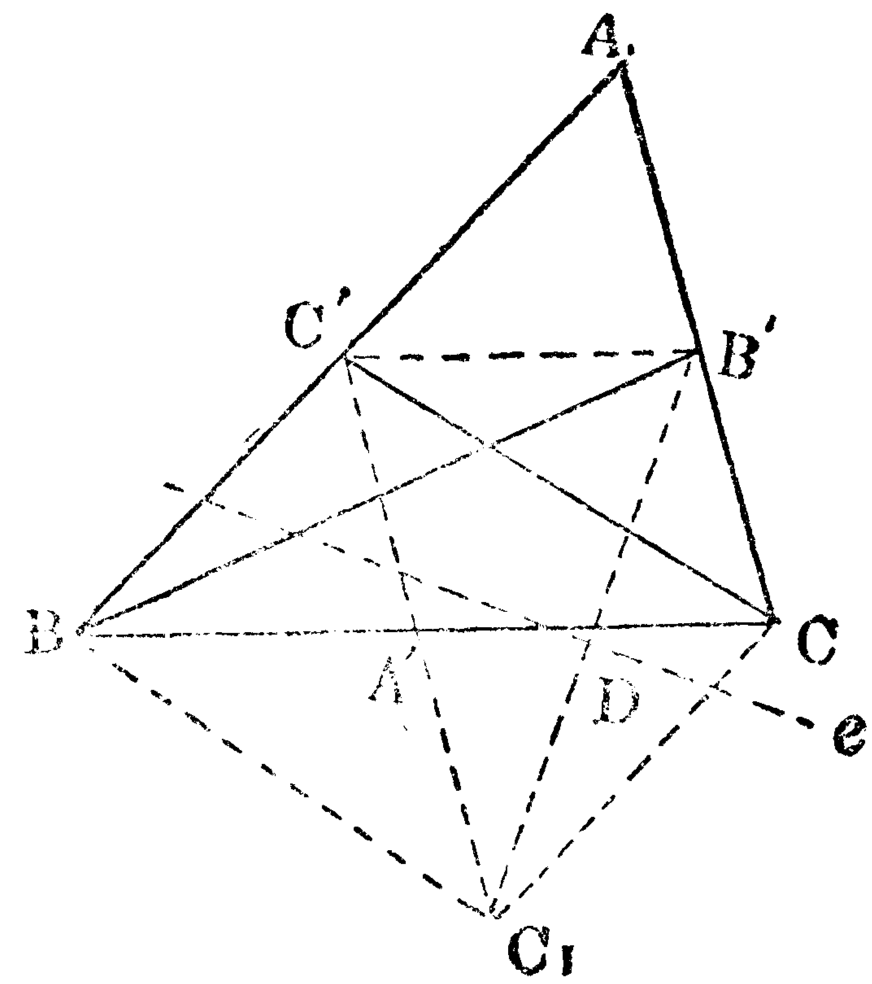
因 $GB=\frac{2}{3}BB'$, $GC=\frac{2}{3}CC'$, 故 $BB'>CC'$.

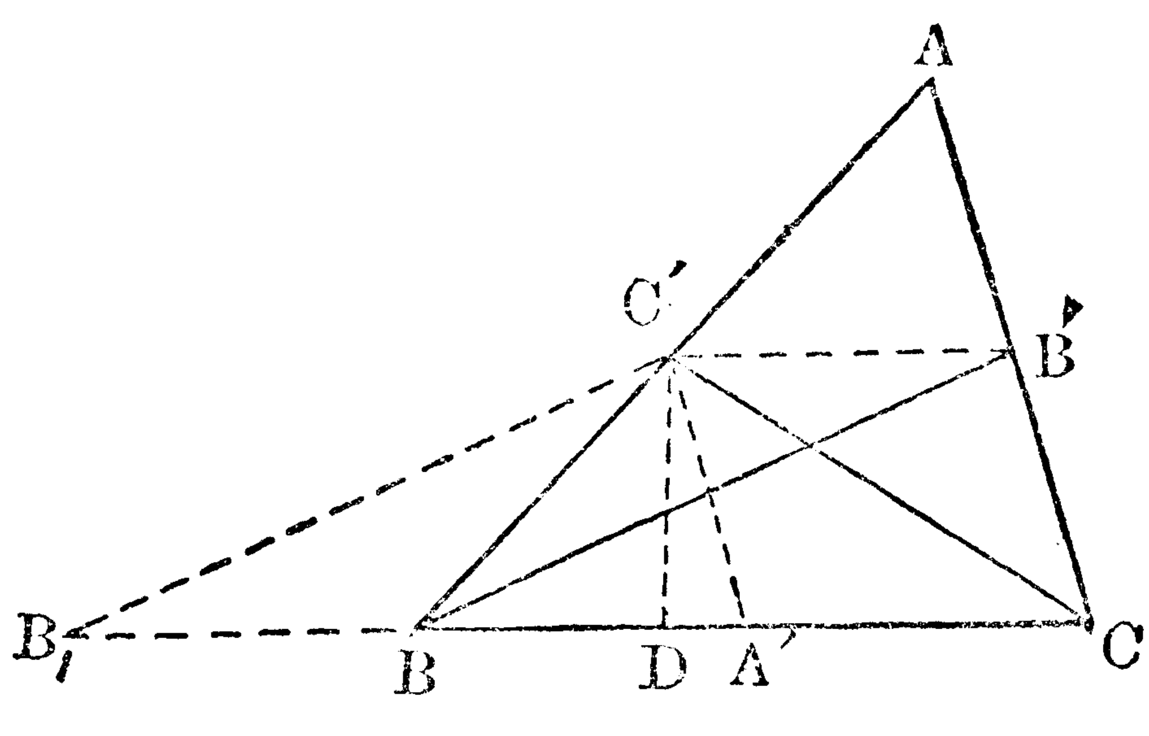
〔第五證〕　以 $C'C$ 平行移動至 BC_1, 則 BC 及 $C'C_1$ 互相等分於 A';

因 $C'B'//BC$, 故 BC 等分 $B'C_1$ 於 D;

從 D 引 $B'C_1$ 之垂線 l, 因 $CC_1=BC'>CB'$, 故 l 與 CC_1 交, 由是與 BC' 交, 因而與 BB' 交;

故 $BB'>BC_1$, 卽 $BB'>CC'$.





〔第六證〕　以 $B'B$ 平行移動至 $C'B_1$, 則 $BB' \mathrel{\underline{\parallel}} B_1C'$, 然

$BC//B'C'$, 故 B_1, B, C 共線;

從 C' 至 B_1C 引垂線 $C'D$, A' 爲 BC 之中點,

則 $C'B(=\frac{1}{2}AB)>C'A'(=\frac{1}{2}AC)$, $\therefore BD>A'D$;

因 $B_1B \perp\!\!\!\!= C'B' \perp\!\!\!\!= A'C$, 故 $B_1D>CD$; 由是 $C'B_1>C'C$, 即 $BB'>CC'$.

〔注意〕 初等幾何學題,除至簡或甚難者外,每題解法大都不止一種,學者能時從各方面一一搜討,則非特能力日充,樂趣亦環生矣.

54. 廣義間接證法及倒定理.

廣義間接證法,包舉尋常間接證法,歸謬證法,窮舉證法,及同一證法而言,解析證法亦可列於其中,蓋凡從終決倒推假設者皆可謂爲間接證法也.

凡一定理其假設及終決之範圍不相包容者,其倒定理必與本定理同時眞確,恒可用同一證法證之.

一定理中假設之範圍包含於終決範圍內者,其倒定理必不成立.

一定理中,假設不止一事,或終決不止一事,則於二者中任取一事對調,所得新定理皆爲本定理之倒定理. 故遇有複假設或複終決定理,其倒定理不止一個,如是諸倒定理中有成立有不成立,不能一例而言.

凡關於某圖存在之定理恆能以歸謬證法證之.

解析證法無題不可用,惟不如綜合證法之簡潔.

解析及同一二證法,皆假定終決成立以推假設之亦能成立;尋常間接,歸謬,及窮舉三種證法,皆假定終決不能成立,於是一則推至假設亦不成立,一則推至假設成立時必與已知之定理或公理相矛盾,一則推至與假設相矛盾.

一切間接證法,在初學時固必當練習;迨至能用以後,非不得已則宜避之.

綜合證法有時亦曰直接證法. 直接證法中之疊置法,除證基礎定理,關於某圖存在定理,等不得不用者以外,能避亦宜避之.

55. 記號.

爲欲敍述之簡明,用記號及代數式以代言語;惟關於幾何量間關係有與代數公式(例如乘法公式)相類者,在未經幾何證明以前,不能取便應用,以破壞幾何學之精確.

幾何中所用記號,前文大抵已經分舉,今更彙舉於下以便檢閱:

$+$ 加.	$-$ 減.	$=$ 等於,或等積於.
$\neq$ 不等於.	$>$ 大於.	$<$ 小於.
$\wedge$ 軸對稱於.	И 中心對稱於.	$\#$ 平行移動關係.
$\backsim$ 相似於.	$\cong$ 全等於.	$//$ 平行於,或平行線.
$\perp$ 垂直於,或垂線.	$\underline{\parallel}$ 平行相等於.	$\measuredangle$ 角.
$\measuredangle s$ 諸角.	$\triangle$ 三角形.	$\triangle s$ 諸三角形.

▱ 平行四邊形.	◈ 諸平行四邊形.	▭ 矩形.
▣ 諸矩形.	□ 正方形.	Ⓢ 諸正方形.
$R\measuredangle$,或 $rt\measuredangle$ 直角.	$st\measuredangle$ 直線角.	⊙ 圓.
Ⓢ 諸圓.	⌢ 弧.	∵ 因,
∴ 故.	$\bar{a}$ 線分 a.	a. 數 a.
≡ 恆等於.	$Q.E.D.$ 已經證明.	$Q.E.F.$ 已經解得.
義 3 定義三.	理 20. 定理二十.	II 第二編.
§5 第五款.	∼ 差.	H. 三角形之垂心.
O 三角形之外心.	I 三角形之內心.	I_1, I_2, I_3, 三個旁心.

例題十六 (定理)

(1) 過 $\triangle ABC$ 之內心 I 引底 BC 之平行線,交 AB 於 M, AC 於 N 則 $BM+CN=MN$.

(2) 若前題中之 I 易爲 $\measuredangle B$ 內之旁心 I_2 則何如?

(3) (1)題中之 I 易爲 $\measuredangle A$ 內之旁心 I_1 則若何?

(4) ABC 爲不等邊三角形,向形外在各邊上作正三角形 BCD, CAE, ABF, 則 $AD=BE=CF$.

(5) 三角形之一角比他二角和或大或小或等,則此角爲鈍角或銳角或直角.

(6) 三角形 ABC 一中線 AD 比 BC 之半或大或小或等,則 $\measuredangle A$ 爲銳角或鈍角或直角.

(7)　$\triangle ABC$ $\measuredangle A$ 之等分線交 BC 於 D, 則 $BD-DC<AB-AC$ 但 $AB>AC$.

(8)　二點 A, B 在直線 RS 之兩旁. 在 RS 上求一點 X, 使二線分 AX, BX 之差為最大 (卽若 Q 為 RS 上之他一點,則 $AX-BX>AQ-BQ$).

(9)　諸三角形公有底 BC, 其頂點皆在 BC 之一平行線上,則其中以二等邊三角形之周圍為最小.

(10)　D 為 $\triangle ABC$ 邊 BC 上之一點.若 AB 不比 BD 大, 則 $AC>CD$.

(11)　三角形二角外等分線所成之角等於第三角之半外角.

(12)　三角形一角內等分線與第二角外等分線所成之角等於第三角之半.

(13)　$ABCD$ 為一正方形,從其一對角 BD 上,取 BE 令等於 BC. 從 E 引 BE 之垂線交 CD 於 F, 則 $DE=EF=FC$

(14)　以一任意五角形各邊延長成一星形,則此星形在外五角之和等於二直角.

(15)　凸四角形各角內等分線所成新四角形之二雙對角互為補. 又各角外等分線所成新四角形之對角若何?

(16)　四角形一雙對角等分線所成之角等於他一雙

對角之半差。

(17) 從二等邊三角形底上任意點,至二等邊距離之和一定。

(18) 從二等邊三角形底之延線上任意點,至二等邊距離之差一定。

(19) 從等邊三角形內任意點,至三邊距離之和一定。

(20) $ABCD$ 爲平行四邊形,E 及 F 各爲一雙對邊 AD, BC 之中點,則 AE, CF 三等分 BD

(21) 從直角三角形直角頂至斜邊引中線及垂線,則此二線所成之角等於二銳角之差。

(22) D 爲直角三角形 ABC 中斜邊 BC 之中點,從 D 引 BC 之垂線與 $\angle A$ 之等分線交於 E, 則 DAE 爲二等邊三角形。

(23) 不平行四邊形各邊中點順次之聯成一平行四邊形.

(24) 三角形三中線之和比周小而比周之 $\frac{3}{4}$ 大。

(25) 一直線 l 與 $\triangle ABC$ 二邊 AB, AC 交而不過其重心 G. 從各角頂 A, B, C, 及重心 G 至 l 引平行線 AA', BB', CC', 及 GG', 則 $BB'+CC'=AA'+3GG'$.

(26) 一平行四邊形之角頂各在他一平行四邊形之一邊上,則此二形之諸對角線爲共點。

(27) 不平行四邊形二雙對邊中點之聯及二對角線中點之聯三者共點.

(28) 三角形之二邊不等,則對大邊之垂線比對小邊之垂線小.

(29) 三角形之二角不等,則從大角頂所引等分線比從小角頂所引等分線小.

(30) 三角形之垂心,重心,及外心共線.

第三編
圓

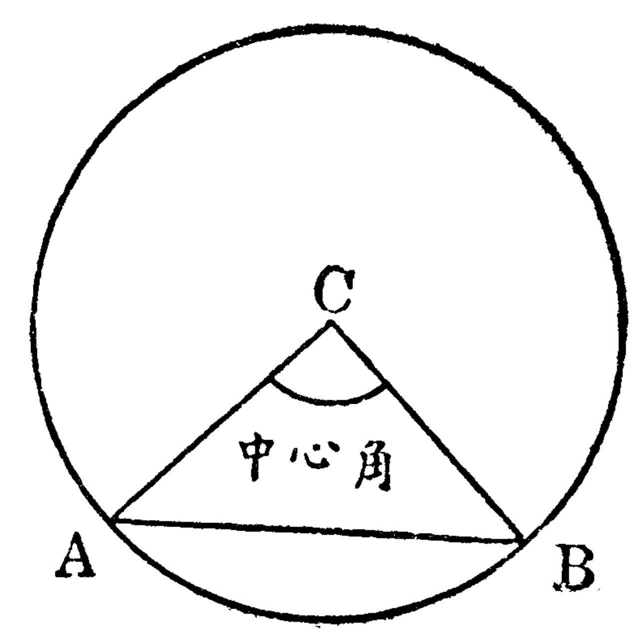
第一章 圓之基礎性質

1. 定義一.

合成一圓周之優劣二弧曰相屬弧 (Conjugate Arcs).

2. 定義二.

二半徑所成之角曰中心角 (Central Angle). 此角二邊截 (to intercept) 一弧卽二邊所夾之弧而謂此弧張 (to subtend) 此角,聯弧兩端之弦,謂之爲張 (to subtend) 此弧.



3. 定義三.

二半徑及其所截弧圍一封閉圖曰扇形(Sector), 一弦及其所張弧圍一封閉圖曰弓形 (Segment of Circle).

4. 簡單之定理.

定理一. 同圓或等圓之半徑相等.

系一. 直徑爲半徑之倍.

系二. 同圓或等圓之直徑相等.

系三. 等半徑之二圓爲全等形.

定理二. 直徑分圓爲全等二部分,直交二直徑分圓爲

全等四部分.

定理三. 一點在圓周上,或外,或內,則此點與圓心之距離等於半徑,或大於半徑,或小於半徑.

系一. 一點與一圓中心之距離等於半徑,或大於半徑,或小於半徑,則此點在圓周上,或在圓外,或在圓內. (窮舉證法).

系二. 弦上所有點除兩端外皆在圓內.

5. 定理四.

圓關於其各直徑爲對稱. (理 2.)

系. 圓關於其中心爲對稱. (*II*. 理 27. 系 3.)

6. 定義四.

疊置同圓或等圓中之二弧,令其一端相合,若第一弧之第二端,合於第二弧之第二端,或落於第二弧上,或落於第二弧之相屬弧上,則曰第一弧等於第二弧,或曰小於第二弧,或曰大於第二弧.

7. 定理五.

在同圓或等圓中,(一)等中心角截等弧;(二)不等中心角截不等弧,大中心角所截弧大.*

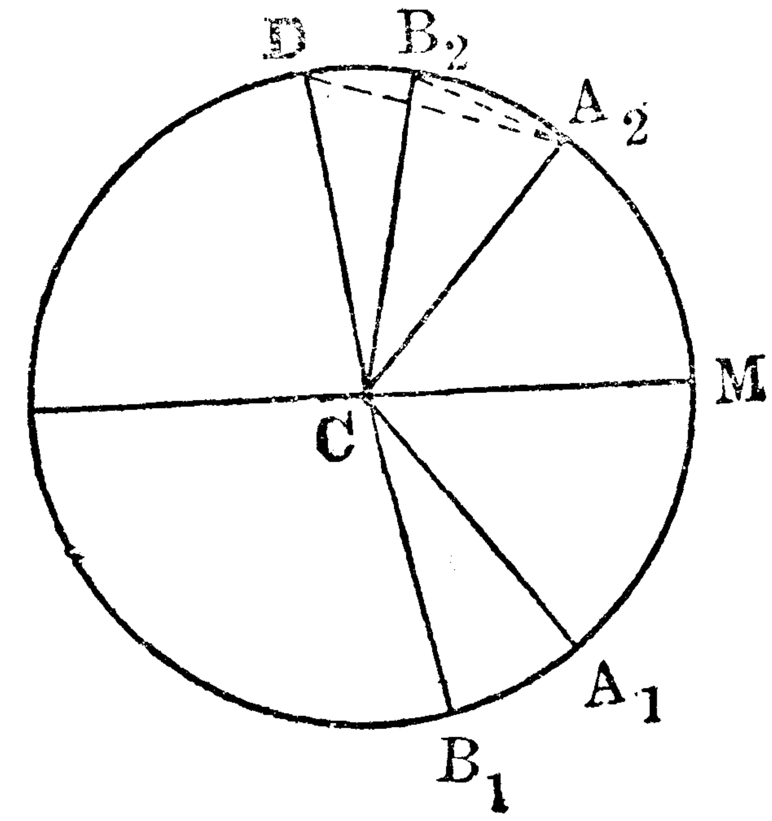
等圓一類可用疊置法證之. 今示同圓一類.

---

*本編中僅言弧者謂劣弧.

**爲省篇幅起見,略去假設及終決,學者宜自補之嗣後亦然.

**〔證〕 (一) A_1CB_1, A_2CB_2 爲同圓 C 中二等中心角.



引 $\measuredangle A_1CA_2$ 之等分線 CM, 則 CM 又等分 $\measuredangle B_1CB_2$;

故以 CM 爲軸行半軸轉時, A_1 及 A_2, B_1 及 B_2 各相合,而 $\frown A_1B_1$ 與 $\frown A_2B_2$ 合,故 $\frown A_1B_1 = \frown A_2B_2$ (理 4.) *Q. E. D.*

(二) A_1CB_1, A_2CD 爲同圓 C 中二個不等中心角,而

$$\measuredangle A_2CD > A_1CB_1.$$

如上,引 CM, 關於 CM 取 CB_1 之對稱線分 CB_2, 則 $\frown A_2B_2 = \frown A_1B_1$ (本題);

因 CD 在 $\measuredangle A_2CB_2$ 之外 (I.§26), 而 D 在 $\frown A_2B_2$ 之外;

故 $\frown A_2D > \frown A_2B_2$, 卽 $\frown A_2D > \frown A_1B_1$. (義 4.) *Q. E. D.*

系一. 在等圓或同圓中,(一)等弧張等中心角;(二)不等弧張不等中心角,而大弧張大角. (窮舉證法)

系二. 在等圓或同圓中,(一)等弧之弦相等;(二)不等弧之弦不等,而大弧爲大弦所張. (證法與本定理全同)

系三. 在等圓或同圓中,(一)等弦張等弧;(二)不等弦張不等弧,而大弦張大弧.

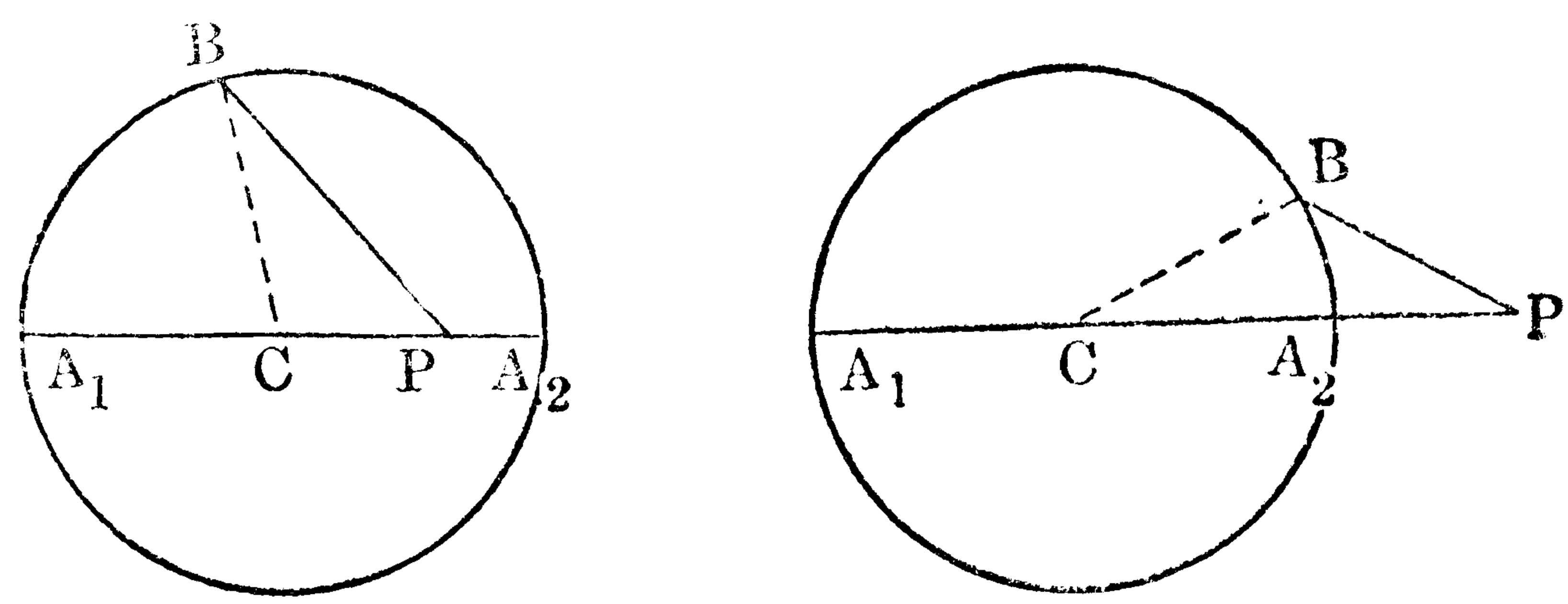
系四. 在等圓或同圓中,(一)等中心角夾等弦;(二)不等

中心角夾不等弦,而大角所夾之弦大.(從本定理及系二可知).

系五. 在等圓或同圓中,(一)等弦張等中心角;(二)不等弦張不等中心角,而大弦張大角.

8. **定理六.**

從一點至一圓周引諸線分,在此諸線分中,(一)過中心者最大;(二)延線過中心者最小.



〔證〕 P 爲 $\odot C$ 内或外之任意一點,從 P 至 $\odot C$ 引過中心 C 之線分 CA_1, 及延線過 C 之線分 PA_2, 再引任意線分 B, 則

$PA_1=CA_1+PC=CB+PC>PB,\ PA_2=CA_2\sim PC=CB\sim PC<PB,$

(II. 理 23. 系 6), 故如題言.

例題一　(定理)

(1)　用第二編定理二十二(二)證定理五系四(一).

(2)　用第二編定理二十四(一)證定理五系四(二).

(3)　用第二編定理二十二(三)證定理五系五(一).

(4)　用第二編定理二十四(二)證定理五系五(二).

(5)　矩形之四個頂點在同一圓周上.

(6)　諸直角三角形共有一斜邊,則其諸角頂在同圓周上.

(7)　菱形四邊之中點在同圓周上.

(8)　以三角形外心爲中心,從外心至任意一角頂之距離爲半徑,畫圓,則此圓過其餘二角頂.

(9)　二等邊梯形之四個角頂在同圓周上.

(10)　二圓之半徑不等,則半徑大者圓亦大.

(11)　一點在一圓之內或外,引此點及中心之聯線,又從此點引二線令與圓周交而與前一線成等角,則此後二線爲圓所截之二弦相等.

(12)　一平面圖關於過一定點所有諸直線皆爲對稱,則此圖爲一圓.

9.　定義五.

四點以上在同圓周上,則曰此諸點共圓(Concyclic).

10.　定義六.

從一點至一圓周所引最小之線分爲此點與圓周之距離.

例題二　(定理)

(1)　從二個同心圓中一圓上任意點至他圓周之距離相等

(2)　一點非圓之中心,則從此點至圓周僅能引二個等長之線分.

(3)　與圓周上三點等距之點爲圓之中心.

(4)　AB 爲 $\odot C$ 之直徑, AD 爲弦, CE 爲半徑. 若 $\measuredangle BCE=2\,BAD$, 則 B 爲 $\frown DE$ 之中點.

(5)　$\odot C$ 之直徑 AB 等分二弦 AD, AE 所成角 DAE, 則 B 爲 $\frown DE$ 之中點.

(6)　交一圓之二平行線在圓周上截取二等弧.

(7)　在同圓中,一弧爲第二弧之 2 倍,則第一弧之弦比第二弧弦之 2 倍小.

(8)　在同圓中,一弦爲第二弦之 2 倍,則第一弦所張之弧不爲第二弦所張弧之 2 倍.

(9)　三等分一弦之二半徑決不三等分此弦所張之弧.

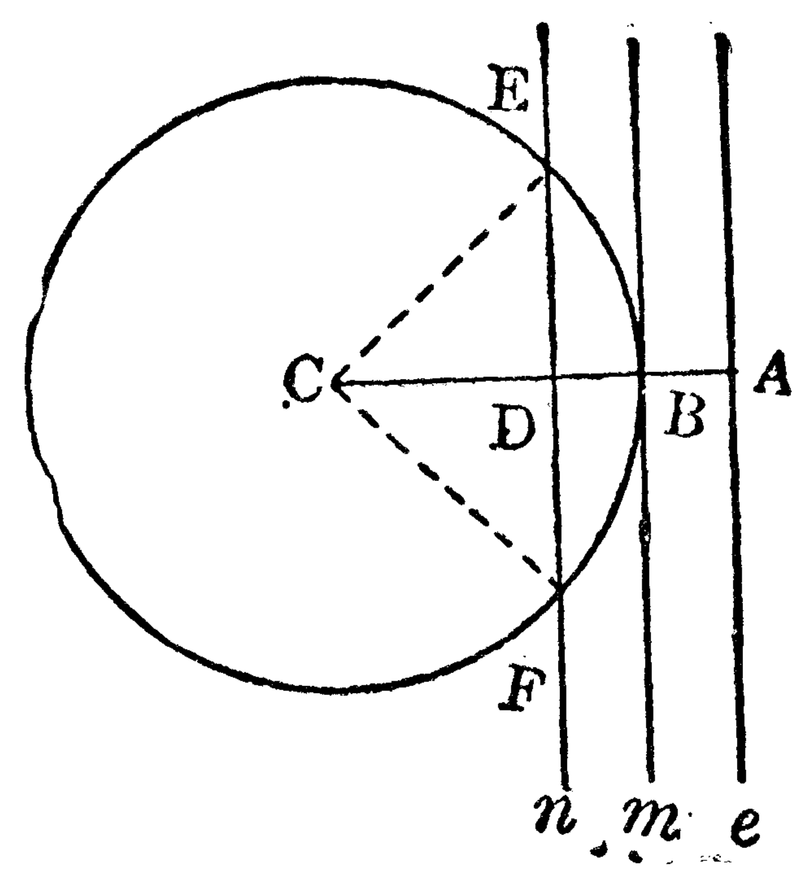
(10)　三等分一弧之二半徑決不三等分此弧之弦.

第二章　圓及直線之關係

11. 定理七.

一直線與一圓中心之距離（一）比半徑大,則直線全在圓外;（二）等於半徑,則直線為圓之切線;（三）比半徑小,則直線為圓之割線.

〔證〕　圓心 C 至直線 l 之距離為 CA, 至 m 之距離為 CB, 至 n 之距離為 CD, 圓之半徑為 r;



（一）$CA>r$, 則因 l 上 A 外諸點與 C 之距離皆比 CA 大（II. 理 11. 系）, 而諸點皆在 ⊙C 外（理 3 系一）, 故 l 全在圓外.

（二）$CB=r$, 則 B 在 ⊙C 上,而 m 上 B 外諸點皆在 ⊙C 外（理由同上）,故 m 為 ⊙C 之切線,而 B 為切點.

（三）$CD<r$, 則 D 在 ⊙C 內,而 n 上 D 外諸點離 D 遠則與 C 之距離較大（II.理 23.系 8.）, 故有與 C 距離等於 r 之二點 E 及 F;而 EF 延線上之諸點與 C 之距離大於 r（理同上）, 即皆在圓外（理 3 系 1）; 故 n 為 ⊙C 之割線.

系一.　一直線全在圓外,或切於圓,或交圓於二點,則中心與直線之距離大於半徑,或等於半徑,或小於半徑.（窮舉證法）

系二. 切線與圓之切點爲從中心至切線所引垂線之足.

系三. 從半徑一端所引半徑之垂線爲切線.(系二).

系四. 過中心及切點之線垂直於切線.(系二).

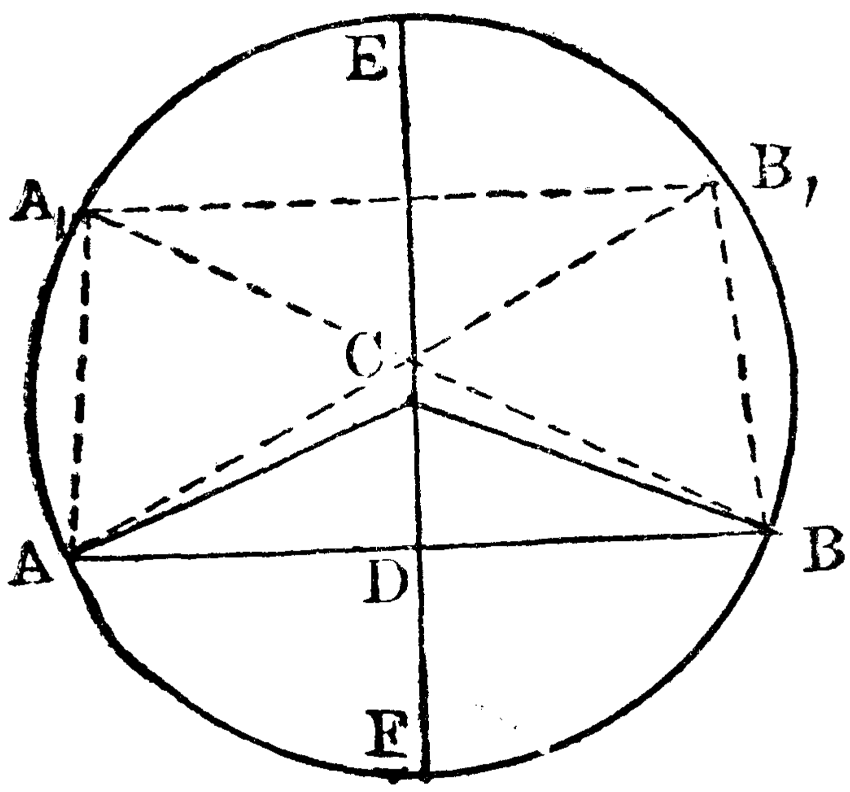
系五. 從切點所引切線之垂線過圓之中心. (同一證法).

系六. 從半經一端所引半徑之斜線爲割線. (本定理證).

系七. 圓周與直線之交點多不過二(系六).

12. 定理八.

垂直於一弦之直徑,(一)等分此弦;(二)等分此弦張於中心之角;(三)等分此弦所張之二個相屬弧.



〔證〕 ⊙C之直徑EF直交弦AB於D, 則以EF爲對稱軸時, $DA \wedge DB$, $\frown EAF \wedge EBF$, (理 4), 由是 A $\wedge B$ (II. 理 10. 五);

$DA = DB$ (II. 理 10. 二);

$\measuredangle$ $CD = BCD$(II. 理 10. 系 2);

$\frown AE = BE$, $\frown AF = BF$(理 5 系 1).

系一 弦之垂直等分線過中心及其所張二弧之中點.

系二. 過弦之中點及中心之直線垂直於此弦.(同一證法).

系三. 平行諸弦之中點在一直徑上.(系一及二).

系四. 垂直於一直徑之諸弦皆以與此直徑之交點爲其中點(本定理一).

系五. 中點在一直徑上之諸弦平行(系二).

系六. 平行二弦間之弧相等(本定理(三)).

系七. 平行二弦間之弦相等(系五及理5.系2).

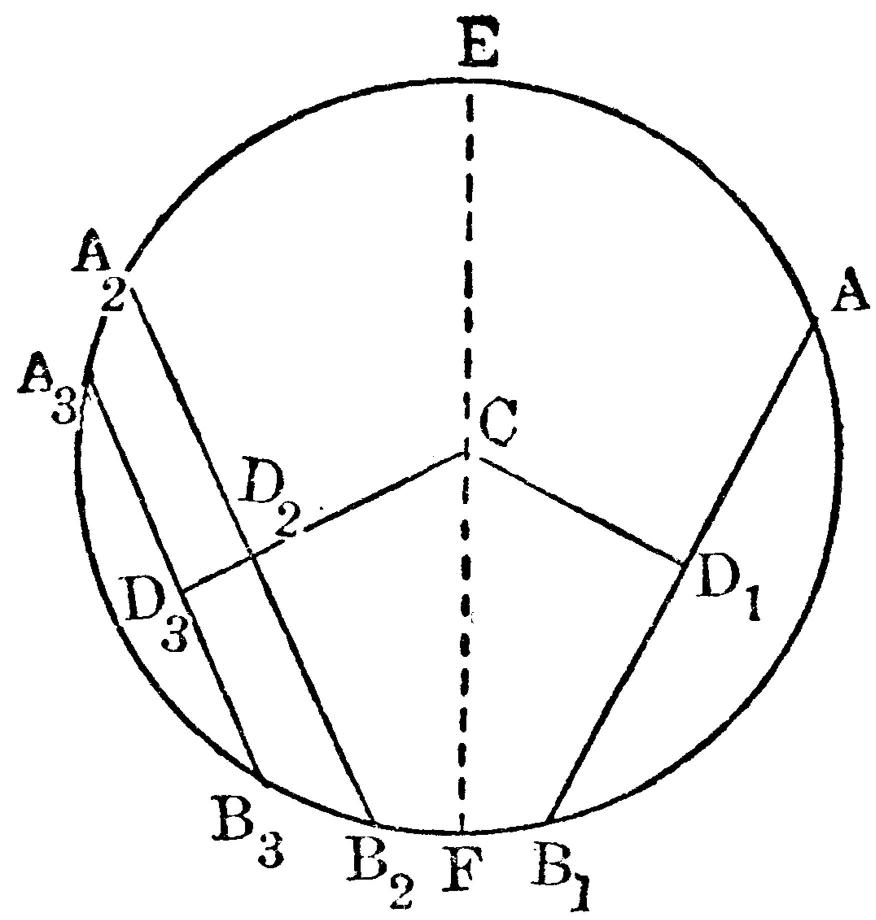
系八. 二弧,或二弦相等者在平行二弦之間.

如上圖,$\frown A_1A=B_1B$, 取 $\frown A_1B_1$, AB 之中點 E, F 聯之作對稱軸,則 $A_1 \wedge B_1$, $A \wedge B$ 故如題言.

13. 定理九.

在同圓或等圓中,(一)與中心等距之弦相等;(二)與中心不等距之弦不等,離中心近者較大.

〔證〕 就等圓一類可用疊置法證之,今證在同圓中者:



CD_1, CD_2, CD_3 各爲中心 C 與弦 A_1B_1, A_2B_2, A_3B_3 之距離,即 $CD_1 \perp A_1B_1$, $CD_2 \perp A_2B_2$, $CD_3 \perp A_3B_3$, 則從前一定理,

知 D_1, D_2, D_3 各爲 A_1B_1, A_2B_2, A_3B_3 之中點。

引直徑 EF 等分 $\measuredangle D_1CD_2$, 或 $\measuredangle D_1CD_3$;

(一) $CD_1=CD_2$, 則關於 EF, $D_1 \wedge D_2$; 因 $A_1B_1 \perp CD_1$, $A_2B_2 \perp CD_2$,

$\therefore A_1B_1 \wedge A_2B_2$; 然 $\frown EA_1B_1F \wedge EA_2B_2F$, $\therefore A_1 \wedge A_2$, $B_1 \wedge B_2$;

$\therefore A_1B_1=A_2B_2$.

(二) $CD_1<CD_3$, 則在 CD_3 上取 D_2 令 $CD_2=CD_1$, 過 D_2 垂直於 CD_3 引弦 A_2B_2;

因 D_2 在 C 及 D_3 之間, 故 A_2B_2 在 C 及 A_3B_3 之間;

由是 $\frown A_2B_2>A_3B_3$;

故弦 $A_2B_2>A_3B_3$

(證中所用以前之定理學者宜一一述明)

系一. 在同圓或等圓中, (一)等弦與中心等距; (二)不等弦與中心不等距, 而大弦離中心較近. (窮舉證法).

系二. 一圓內一組等弦之中點在一個共心圓周上. (系一).

系三. 共心二圓內圓周上各點爲外圓一組等弦之中點(本定理).

例題三 (定理)

(1) 用第二編定理十二系四證定理八(一).

(2) 用第二編定理二十二系四證定理八(一).

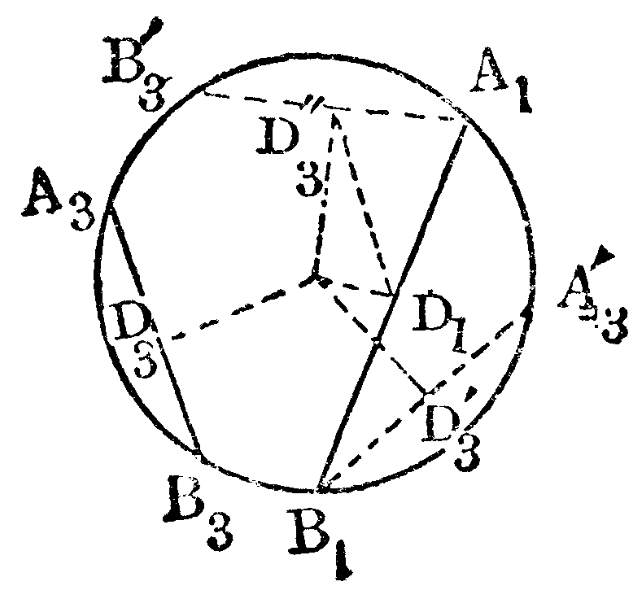
(3) 用第二編定理十三系一證定理八系(一).

(4) 用第二編定理二十二(三)證定理八系(二).

(5) 在定理九之圖中證 $\triangle CA_1D_1 \cong CA_2D_2$ 以證定理九(一).

(6) 在 §13 之圖中證 $\triangle CA_1D_1 \cong CA_2D_2$ 以證定理九系一(一).

(7) 如右圖,移 A_3B_3 至 $A_3'B_1$ 以證定理九系一(二).



(8) 如右圖,移 A_3B_3 至 $A_1B'_3$ 以證定理九(二).

(9) 用前題之圖以證定理九系一(二).

(10) AB 為 $\odot C$ 之一弦, EF 為其任意直徑. 從 A 及 B 所引 AB 之垂線各交 EF 於 K 及 L, 則 $EK=FL$.

(11) 直線 l 割一圓 C 於 A 及 B, EF 為圓之任意一直徑. 從 E 及 F 至 l 各引垂線 EK 及 FL, 則 $AK=BL$.

(12) 平行二切線之切點與中心為共線.

(13) m, n 為 $\odot C$ 之平行二切線, 一直線 l 通過中心 C 而與 m, n 各交於 A, B, 與圓周交於 E, F, 則 $AE=BF$.

(14) m, n 為 $\odot C$ 之一雙平行切線, E_1F_1, E_2F_2 為任意二直徑. E_1E_2, F_1F_2 各交 m 於 A_1, A_2, 交 n 於 B_1, B_2, 則 A_1B_2

及 A_2B_1 皆過中心 C.

(15)　平行二切線間所夾之二弧相等.

(16)　一弦與一切線平行,則其間之二弧相等.

(17)　一弦交共心二圓,則其夾於二圓間之二部分相等.

(18)　引一圓之諸切線,從切點起在各切線上截取等長之部分,則其止點在原圓之共心圓上.

(19)　二等弦交角之等分線過圓之中心.

(20)　平行二弦各端之聯線交於直交此二弦之直徑上.

(21)　直徑為最大弦.

(22)　過圓內一定點之諸弦中,以此點作中點者最小.

(23)　相交二等弦為其交點分成二雙互相等之部分.

(24)　AD 切 $\odot C$ 於 A, CB 為任意半徑其延線交 AD 於 D, 從 A 至 CD 引垂線 AE, 則 AB 等分 $\measuredangle DAE$.

(25)　從圓外一點至圓周引二個相等線分,則此二線分夾角之等分線過圓之中心.

(26)　過圓內一點之二弦若與過此點之半徑成不等角,則此二弦不等.

第三章 內接形及外接形

14. 定義七.

一角,頂點在一圓周上而其二邊爲弦者,曰圓周角(Angle at the circumference). 圓周角立於(standing on)其二邊所夾弧上.

15. 定義八.

從弓形弧上任意點聯其弦兩端之二直線所成之角曰弓形角(Angle in a segment).

16. 定義九.

一圓之切線與從其切點所引弦二者所成之角曰切線角.

17. 定義十.

一多角形其諸角頂皆在一圓周上,則曰此多角形內接於圓(inscribed in a circle), 謂圓爲外接於多角形(circumscribed about the polygon).

18. 定義十一.

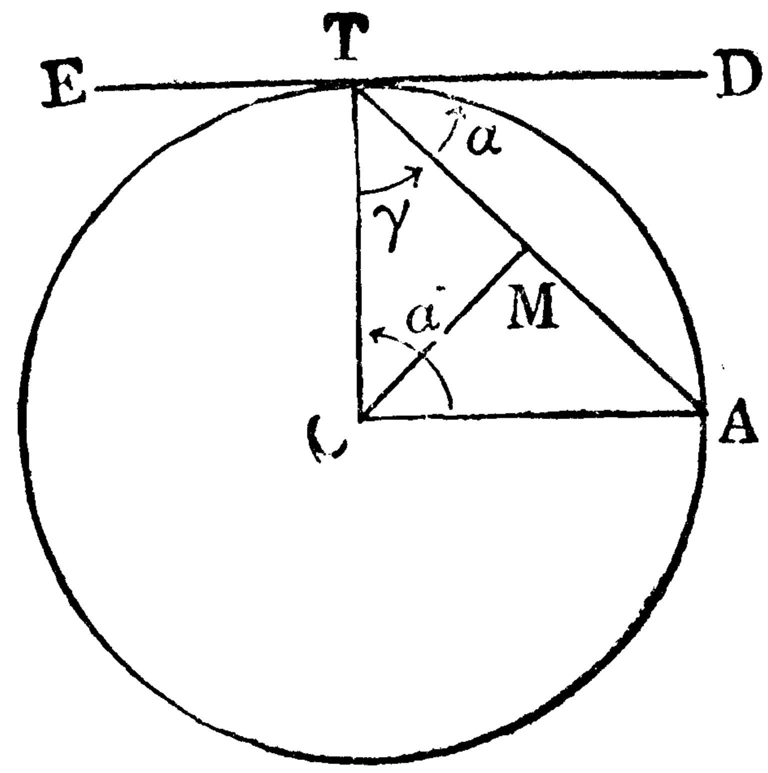
一圓,其周爲一多角形諸邊所切,則曰此圓內接於多角形(inscribed in a polygon), 而謂多角形外接於圓(circumscribed about a circle).

19. 定義十二

一圓切三角形之一邊及他二邊之延線者曰三角形之旁接圓(escribed circle).

20.　定理十.

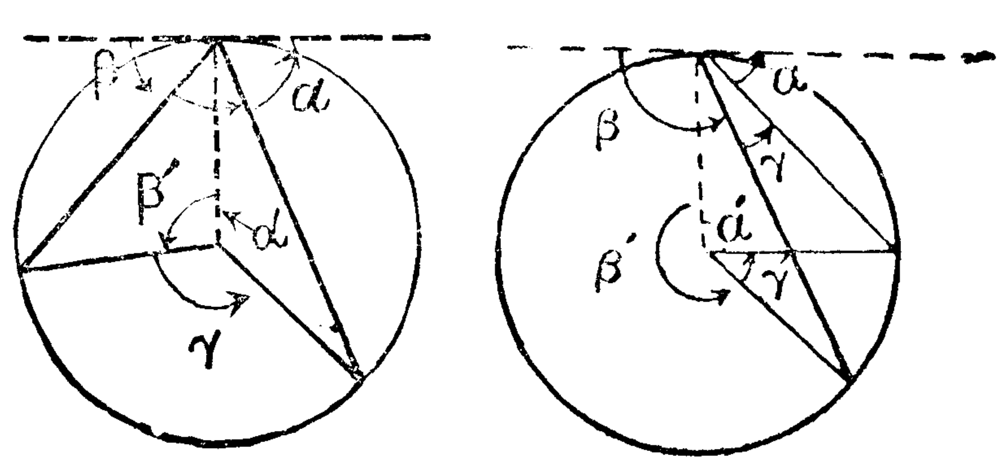
切線角等於立其所夾弧上中心角之半.



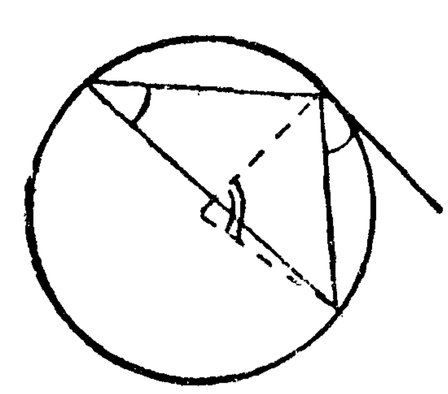
〔證〕　切線 TD 切 $\odot C$ 於 T, 命切線角 ATD 爲 α, 立於 $\frown AT$ 上之中心角爲 α', 從 C 至 AT 引垂線 CM, 則 $\measuredangle TCM=\frac{1}{2}\alpha'$, 再命 $\measuredangle MTC$ 爲 γ,

由是　$\measuredangle\alpha+\gamma=R_{\measuredangle}$ (理 7; 系 3) $=\frac{1}{2}\alpha'+\gamma$ (II.理 19. 系 4);

$\therefore\ \measuredangle\alpha=\frac{1}{2}\alpha'$;



系一.　立於一弧上之圓周角等於此弧所張中心角之半.



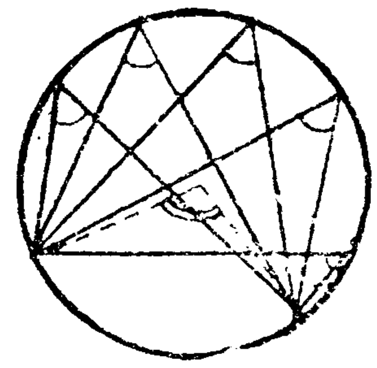
如右圖,過圓周角頂點引切線,則得

$\measuredangle\alpha+\beta+\gamma=2R_{\measuredangle}=\frac{1}{2}(4R_{\measuredangle})=\frac{1}{2}(\alpha'+\beta'+\gamma')$ (II. 理 5.);

然 $\measuredangle\alpha=\frac{1}{2}\alpha'$, $\measuredangle\beta=\frac{1}{2}\beta'$, (本 定 理),　$\therefore\measuredangle\gamma=\frac{1}{2}\gamma'$.

系二.　切線角與立於其所夾弧上之圓周角相等因皆等於同弧所張中心角之半故也.

系三.　立於同弧上之圓周角相等;立於等弧上之圓周



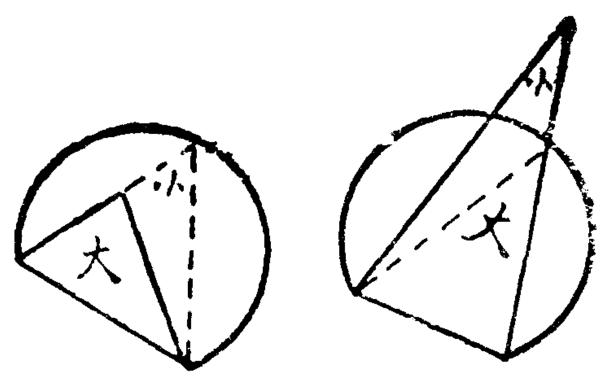
相等.(因其爲同中心角或等中心角之半故也).

系四. 在同圓或等圓中,立於等弦上之圓周角相等.

系五.* 凡同弓形角皆相等(系四).

系六. 一圓周角立於優弧上,或劣弧上,或半圓周上,則此角爲鈍角,或銳角,或直角(系三).

系七. 一圓周角爲鈍角,或銳角,或直角,則其所立之弧爲優弧,或劣弧,或半圓周.



系八. 一角二邊過弓形弦之兩端,(一)角之頂點在弓形內,則此角比弓形角大;(二)角之頂點在弓形外,則此角比弓形角小〔*II.* 理 19. 系 8.〕.

系九. 一角二邊過弓形弦之兩端,若此角比弓形角大,或小,或等,則此角之頂點在弓形內,或外或弓形弧上.(窮舉證法).

系十. 諸三角形共有一底而皆在底之同旁,若其頂角皆相等,則其頂點皆在一弓形弧上,其共有之底爲此弓形之弦.(系九).

---

*此定理爲 Huppocrates (西曆紀元前 570) 所發明.氏蓋始著初等幾何學者也.

系十一. 二三角形底及頂角各相等,則其外接圓相等(系十).

系十二. 從弓形弦一端引一半射線令其與弓形分居弦之兩旁,而與弦所成之角等於弓形角,則此半射線切於有此弓形之圓(系二).

系十三. 共有一斜邊諸直角三角形之直角頂點在以斜邊作直徑之一圓周上(系十及系七).

系十四. 相交二直線各繞其上一定點旋轉而其交角恆一定,則其交點描寫一弓形弧(系十).

〔注意〕 系十二中二定點可視作二個線束之中心,相交二直線之各位置可視作二束中各雙對應射線,二個動射線以同向等速旋轉所得二束曰等束,於是系十二可述之如下:

二個同向等束追跡一圓周.

二定點之聯可視作屬於任意一線束,他束中對應於此之射線爲從其中心所引圓之切線.

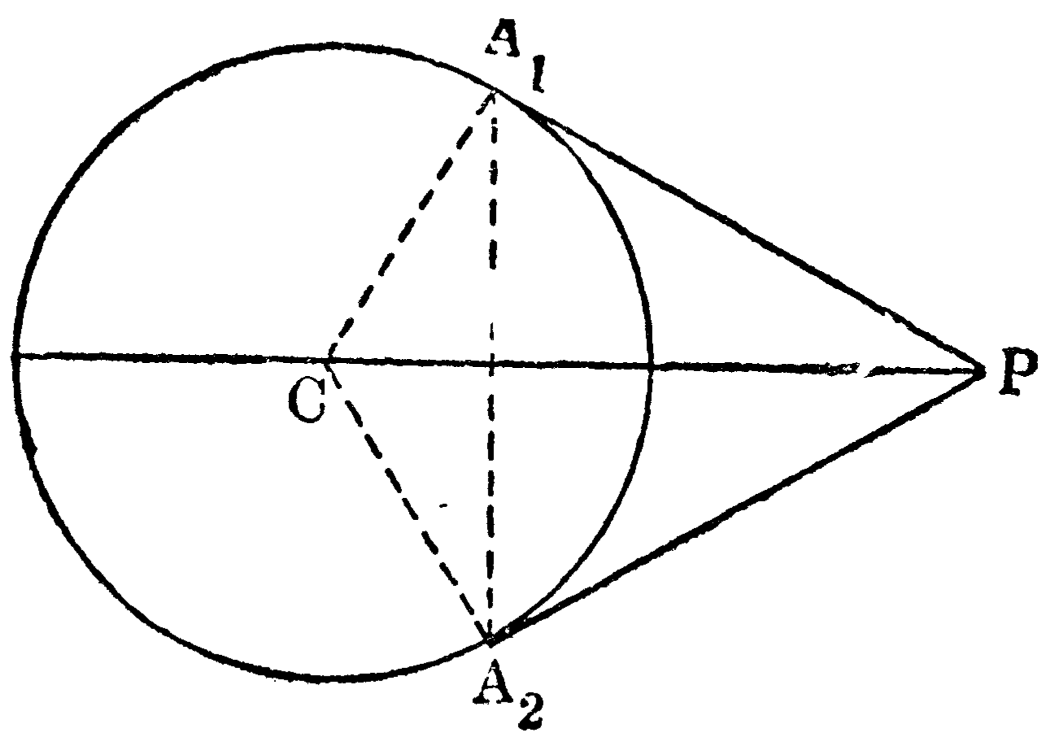
21. 定義十三.

從圓外一點引圓之切線,此切線介於此點及切點間之部分曰切線之長.聯二切點之弦曰切點弦(Chord of Contact).

22. 定理十一.

從圓外一點至圓引二切線及一中心線,則二切線及

<u>切點關於此中心線爲對稱.</u>



〔證〕 從點 P 至 $\odot C$ 引二切線 PA_1, PA_2 及中心線 PC, 聯 CA_1 及 CA_2, 則 $\measuredangle A_1=A_2=R\measuredangle$, $CA_1=CA_2$, $CP\equiv CP$,

$\therefore \triangle CA_1P\cong\triangle CA_2P$, 而 $A_1P\wedge A_2P$, $A_1\wedge A_2$.

<u>系一. 從圓外一點至圓所引二切線等長.</u>

<u>系二. 圓外一點與中心之聯等分,從此點所引二切線之夾角過二切點所分二弧之中點,且垂直等分切點弦.</u>

<u>系三. 相交二切線之交角與過其切點二半徑之中心角互爲補.</u>(因二角各爲互爲餘之二角之倍故也).

<u>系四. 從三角形一個角頂至在其邊上,內接圓切點之距離等於從半周減對邊之差</u>(系一).

<u>系五. 從三角形一個角頂至對邊外旁接圓在其一邊延線上切點之距離等於此三角形之半周.</u>(系一).

<u>系六. 分居三角形一邊兩旁之內接圓及旁接圓其切</u>

點分此邊所得二部分互相等;而二切點間之距離等於他二邊之差(系一)。

系七. 居三角形一邊同旁之內接圓及旁接圓其切點間之距離等於切此二圓他一邊之長(系一)。

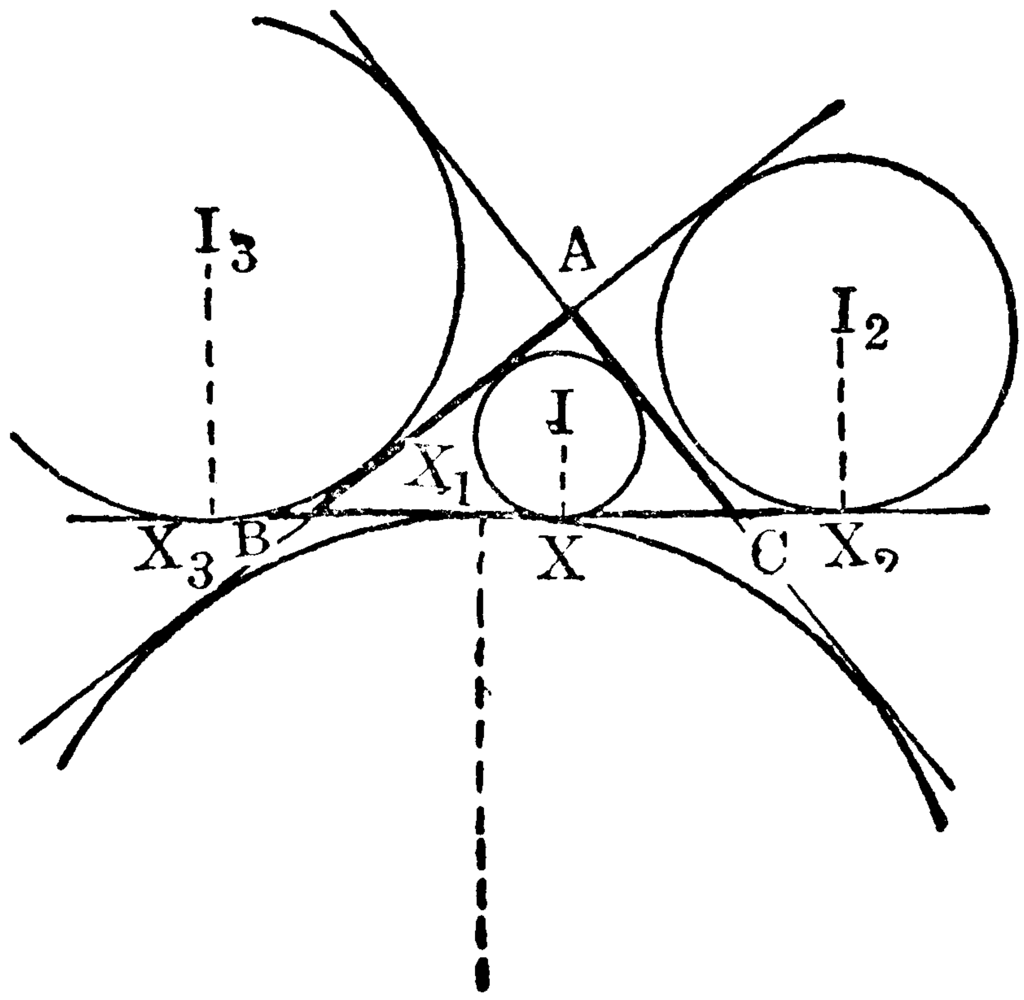
如圖,名 BC 爲 a, CA 爲 b, AB 爲 c, $\frac{1}{2}(a+b+c)=s$, 則

$BX=s-b$, $CX=s-c$ (系四);

$BX_2=CX_3=s$ (系五);

$BX_1=CX=s-c$;

$CX_1=BX=s-b$, $XX_1=c-b$ (系六);



$XX_2=b$, $XX_3=c$ (系七)。

系八. 從圓外一點至圓僅能引二切線(本定理),此點,中心,及二切點共圓而以此點與中心之距離爲直徑. (理10. 系12)。

23. 定義十四.

四角形之二雙隣邊各相等者曰鳶形(Kite).

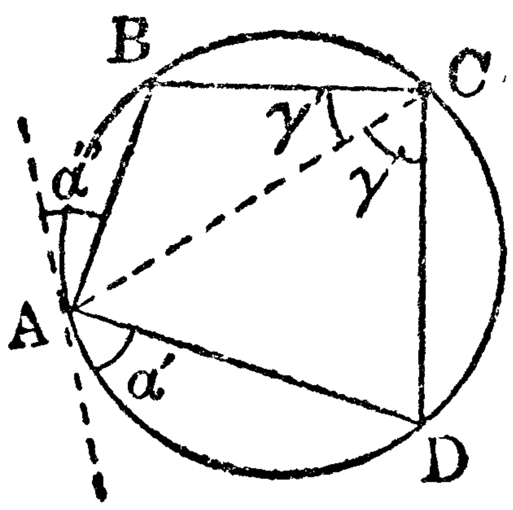
24. 定理十二.

(一) 圓內接四角形二雙對角之和各等於二直角;

定理十三.

(一) 圓外接四邊形二雙對邊之和相等; (二) 四邊形

(二) 四角形之二雙對角和各等於二直角者可內接於圓.



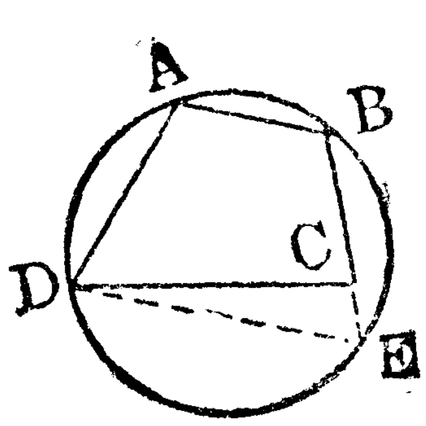
〔證〕 (一)四角形 $ABCD$ 內接於圓,如圖,過 A 引圓之切線,且引對角線 AC, 則 (理10系2).

$$\measuredangle \alpha'=\gamma', \quad \measuredangle \alpha''=\gamma'',$$

$$\therefore \measuredangle \gamma'+\gamma''+A=\alpha'+\alpha''+A$$

$$=2R_{\measuredangle},$$

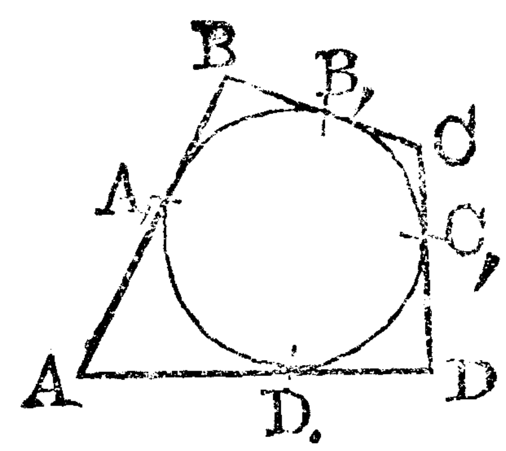
即 $\measuredangle \quad +C=2R_{\measuredangle}$.



(二) 如圖,

$\measuredangle BCD+DAB=2R_{\measuredangle}$.

之二雙對邊和相等者可外接於圓.



〔證〕 (一)四邊形 $ABCD$ 外接於圓,如圖,切點為 A_1, B_1, C_1, D_1, 則(理11系1)

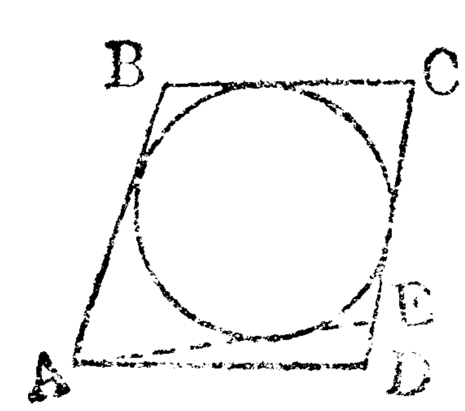
$$AA_1=AD_1, \quad A_1B=B_1B,$$

$$CC_1=CB_1, \quad C_1D=D_1D,$$

$$\therefore AA_1+A_1B+CC_1+C_1D$$

$$=AD_1+D_1D+CB_1+B_1B;$$

即 $AB+CD=AD+CB$.



(二) 如圖,

$AB+CD=BC+DA$.

過 D, A, B 畫圓,若此圓不截 BC 於 C 而截之於 E,

則當 $\measuredangle BED+DAB=2R_{\measuredangle}$, (一)

由是 $\measuredangle BED=BCD$,

此爲不可能之事,故如題言.

系一. 圓內接平行四邊形爲矩形.

系二. 二等邊梯形可內接於圓.

系三. 矩形二對角線之交點爲外接圓之中心. (理3系).

切 AB, BC, CD 畫圓,若此圓不切 AD 而切 AE,

則當 $AB+CE=BC+EA$, (一)

由是 $CD-CE=DA-EA$,

卽 $ED=DA-EA$, 此爲不可能之事,故如題言.

系一. 圓外接平行四邊形爲菱形.

系二. 鳶形可外接於圓

系三. 菱形二對角線之交點爲內接圓之中心. (理11. 系二).

系四. 正方形二對角線之交點爲其內接圓及外接圓之公共中心(系三).

系五. 正方形可內接於一圓,同時可外接於一圓.

系六. 圓內接四角形之一外角等於其內對角.

因爲同角之補角故也.

系七. 四角形之一外角等於其內對角,則此形可內接於圓.(因於此四角形二雙對角之和各等於二直角故也).

例 題 四 （定 理）

(1) 用第二編定理十九系二證定理十系一.

(2) 在定理十之圖中延長 TC 至與圓周交,聯此交點及 A,用以證其系二.

(3) 用定理十系七證第二編定理八,九,系五.

(4) 用第二編定理八,九系五證定理十系十三.

(5) 詳述定理十一系四之證.

(6) 詳述定理十一系五之證.

(7) 詳述定理十一系六之證.

(8) 詳述定理十一系七之證.

(9) 用定理十系一證定理十二(一).

(10) 用定理十系十證定理十二(二).

(11) 用定理十二(二)證第二編定理三十一系.

(12) 一角之二邊皆爲圓之割線而角之頂點在圓外,則此角等於立其所夾二弧差上之一圓周角.

(13) 一角之二邊皆爲圓之割線而角之頂點在圓內,則此角等於立其所夾弧及其對頂角所夾弧上二圓周角之和.

(14) 一圓二切線之交點與中心之距離等於圓之直徑,則此二切線之交角等於正三角形之一角.

(15) M爲$\frown AB$之中點,引二弦 MX 及 MY,與弦 AB 各交於 X_1 及 Y_1 而 X_1 近 A,聯 XY,則 $\measuredangle BY_1Y=X$, $\measuredangle AX_1X=Y$.

(16) 過圓內一點任意引直交二弦分圓周爲四分,則其相隔二弧之和等於半圓周.

(17) 諸同弓形角之等分線共點.

(18) 從圓周上一點引此圓之諸弦,則此諸弦之中點共圓.

(19) 以三角形二邊爲直徑畫圓,則此二圓交於第三邊或其延線上.

(20) 過三角形垂心及任意二角頂之圓等於三角形之外接圓.

(21) 二弓形之弦及其所含角之大小各相等,則二弓形全等.

(22) 圓內接六角形間隔三角之和等於四直角.

(23) 二圓相交,過各交點引直線,則此二直線在各弧上截取二弧之弦平行.

(24) 聯一三角形三垂線之足得一新三角形,則原三角形之垂線爲新三角形各角之內等分線.

(25) 四邊形 $ABCD$ 內接於圓,延長二雙對邊,至 AB, DC 會於 E, AD, BC 會於 F,則 $\triangle\!\!\!\triangle$ BCE, CDF 之外接圓交於 EF 上.

(26) 引$\odot C$周上一點T之切線,從任意直徑AB之一端A至此切線引垂線AD,則AT等分$\measuredangle BAD$.

(27) 過相切二圓之切點任意引二割線,此二線在各圓上所截二弧之弦平行.

(28) 從圓內接三角形ABC頂點A引圓之切線,從B引此切線之平行線與AC或其延線交於D,則$\triangle BCD$之外接圓切於AB.

(29) 在(25)題中,$\measuredangle E$及F之等分線互相直交.

(30) $\triangle ABC$中A為直角,以AB為直徑之圓交BC於D,則從D所引此圓之切線過AC之中點.

25. 定義十五.

聯三角形三垂線足所成之三角形曰垂足三角形(Pedal or Orthocentric Triangle).

第四章 二圓之關係

26. 定義十六.

同時切二圓之直線為此二圓之公切線(Common Tangent),二圓若在其兩旁,則名之曰內公切線 (Common Internal Tangent);在其同旁,則曰外公切線 (Common External Tangent).

公切線之長謂其介於二切點間線分之長.

27. **定義十七.**

從相交二圓之交點引各圓之切線,名此二切線之交角爲二圓周於此點之交角 (The angle at which two circles intersect).

交於直角之二圓曰直交圓 (Orthogonal Circles).

23. **定理十四.**

二圓之中心線爲此二圓之對稱軸(理 2).

系一. 二圓周有一公共點不在中心線上,則必又有一公共點爲前一公共點關於中心線之對稱點〔*II.* 理 10(三)〕.

系二. 二圓周有一公共點在中心線上,則更無他公共點.

因若有他公共點,則二雙對稱線之會不對稱,是不合理,故必無.

系三. 二圓周之公共點至多有二個.

若有三個公共點而其中二點在中心線之同旁,事則其垂直等分線不能同時過二圓之中心(非對稱軸),此不合理,故不可.

系四. 相交二圓之中心線爲其公共弦之垂直等分線(系一).

系五. 相切二圓之切點在其中心線上(系二).

系六. 二圓相切,則可於其切點引公切線(系五).

29. 定理十五.

二圓之半徑爲 r_1, r_2, 其中心線分爲 d,

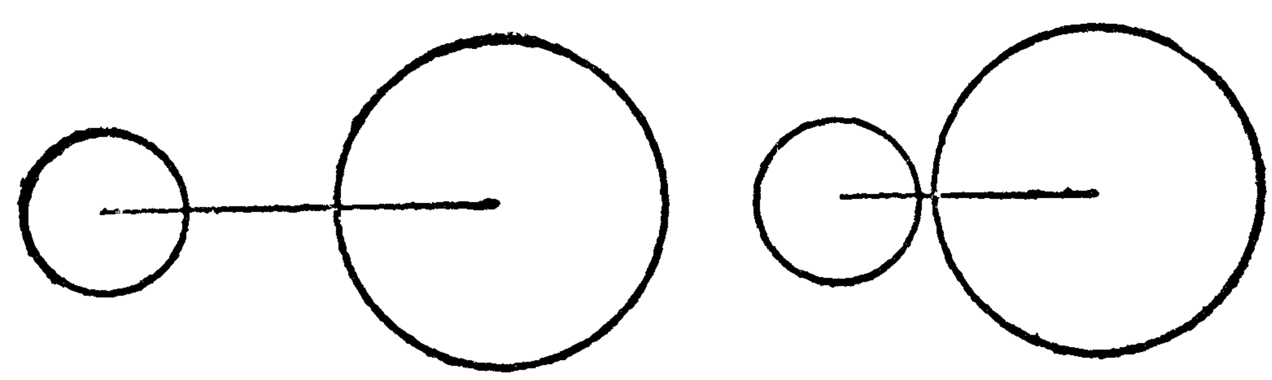
(一)各圓全在他圓之外,則 $d>r_1+r_2$; (通普公理七).

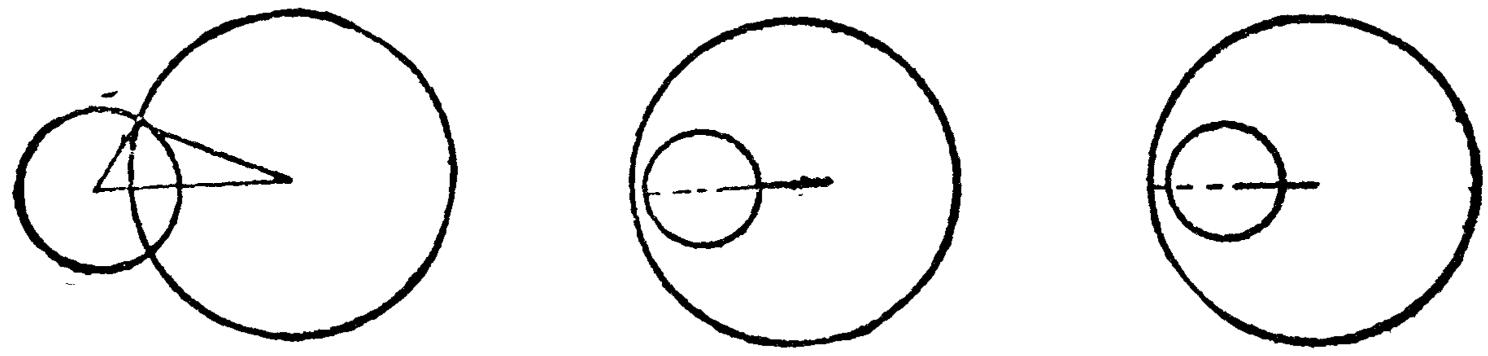
(二)互相外切,則 $d=r_1+r_2$; (I. §24)

(三)相交,則 $r_1+r_2>d>r_1\sim r_2$; (II. 理 23. 系 6)

(四)內切,則 $d=r_1\sim r_2$; (I. §24)

(五)各圓全在他圓之內,則 $d<r_1\sim r_2$. (普通公理七)





系. 二圓之半徑爲 r_1, r_2 其中心線分爲 d,(一) $d>r_1+r_2$, 則各圓全在他圓之外; (二) $d=r_1+r_2$, 則二圓外切;(三) $r_1+r_2>d>r_1\sim r_2$, 則二圓相交;(四) $d=r_1\sim r_2$, 則二圓內切;(五) $d<r_1\sim r_2$, 則各圓全在他圓之內. (窮舉證法)

例題五　(定理)

(1)　相離二圓二個外公切線之長相等.

(2)　過二等圓中心線分中點引任意二線交此二圓得二雙對應點,則此四點爲一平行四邊形之四個角頂.

(3)　二等圓關於其中心線分之垂直等分線爲對稱.

(4)　與二等圓中心線平行之一直線交二圓於四點,則此四點兩兩之距離等於中心線分.　又於此四點所引二雙切線交點之聯線平行於中心線.

(5)　從相交二圓一交點引各圓之直徑,則此二徑之他端與又一交點共線.

(6)　從相交二圓一交點引任意直線於二圓周上得二個交點,此二點與二圓之第二交點爲一二等邊三角形之三個角頂.

(7)　相離二圓內公切線在二個外公切線間之部分等於外公切線之長.

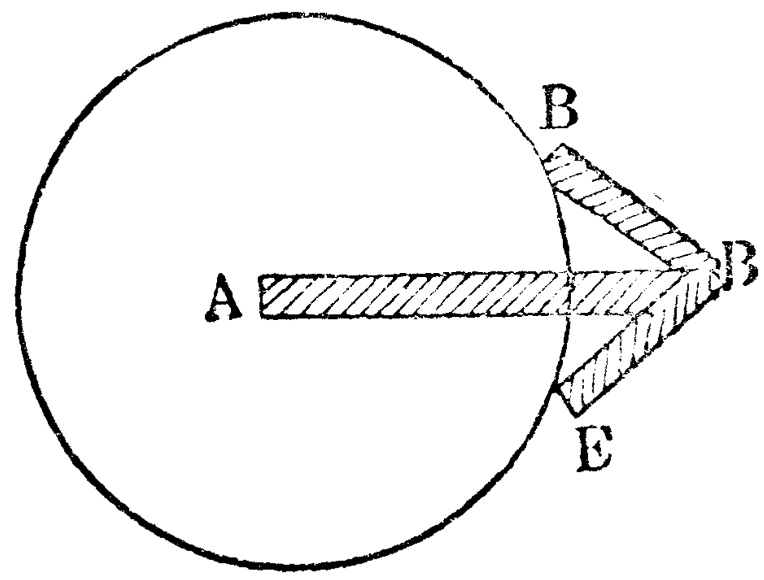
(8)　過相切二圓切點引任意割線,從其割圓之點引各圓之半徑,則此所引二半徑平行.

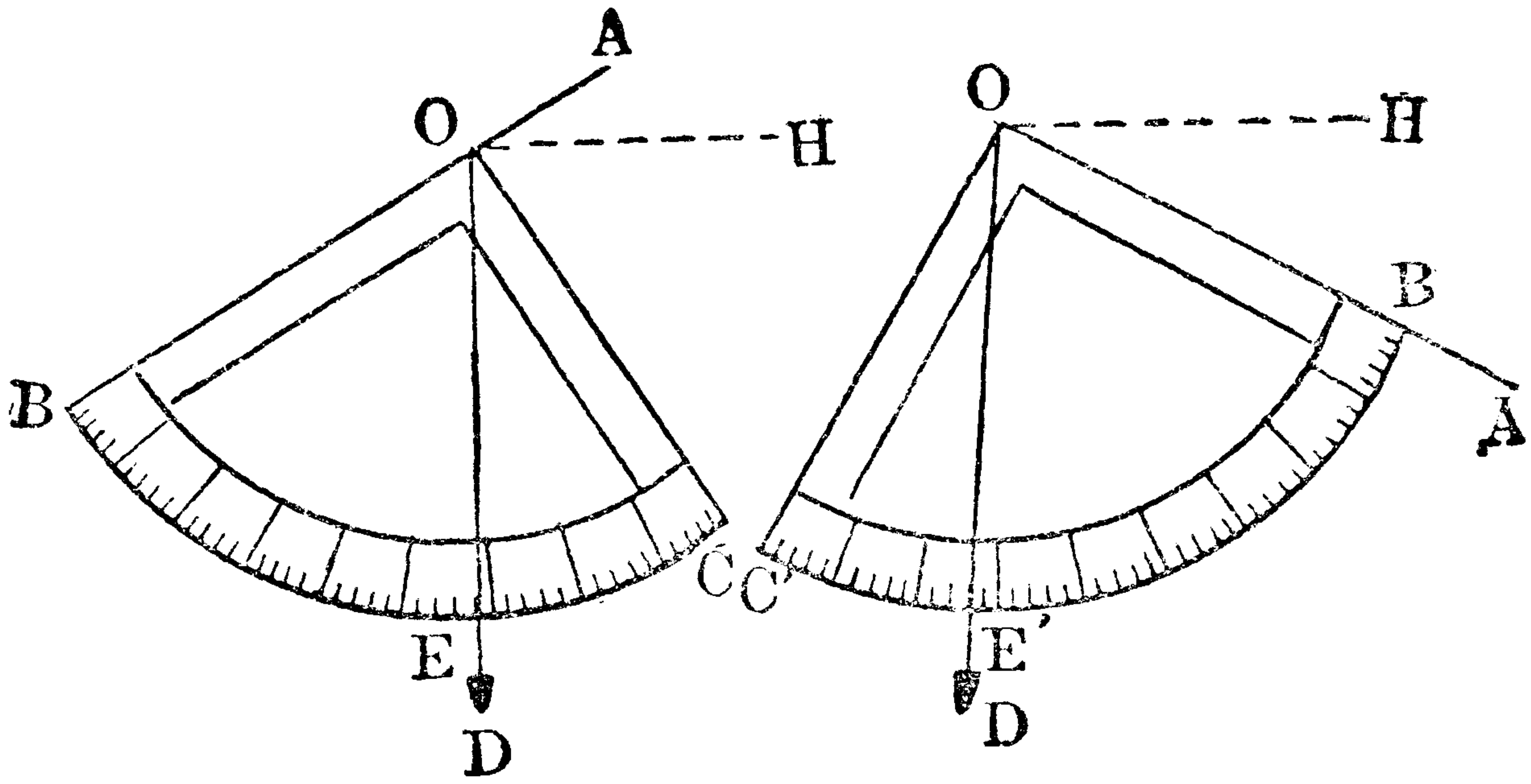
(9)　相切二圓平行直徑之端與切點共線.

(10)　切二定圓之任意圓其中心與二定圓中心距離之和或差不變.

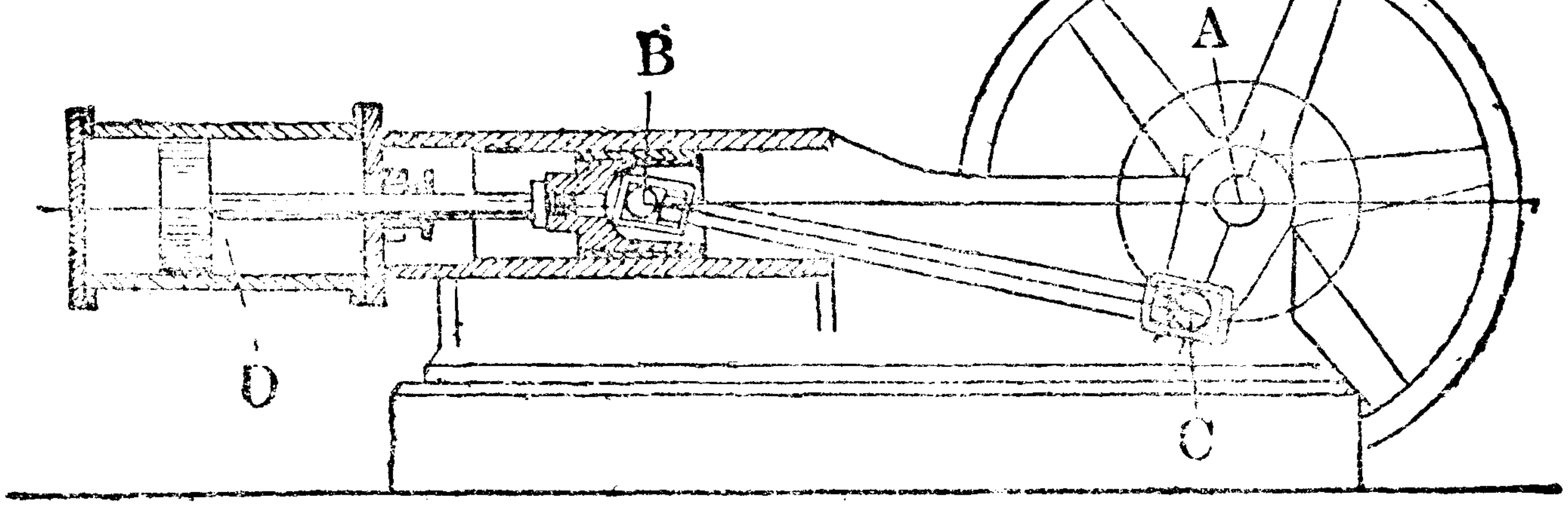
例題六 (實用)

(1) 右圖示一求圓心器,聯三木條所成,稜 AB 等分 BD 及 BE 所成之角,而 BD 及 BE 相等. 證 AB 過圓之中心,且言求中心之法.

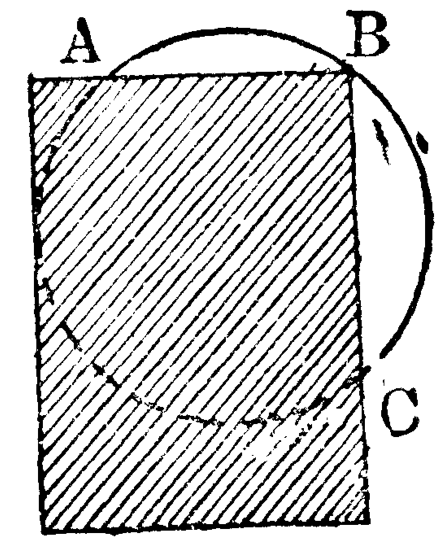




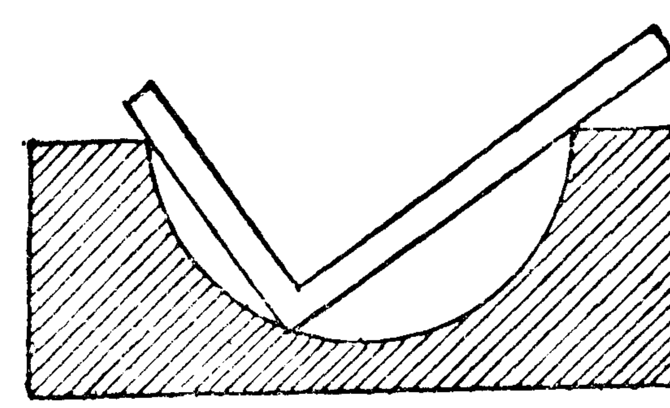
(2) 求仰角或俯角之簡法,置一象限規於直立之位置,如圖,以目正對 BO, 使 OP 之延線過目標 A, 在 O 懸一錘, 使鉛垂線 OD 交弧 BC 於 E, 則仰角視弧 EC 可知,俯角視弧 $C'E'$ 可知. 述其理由.



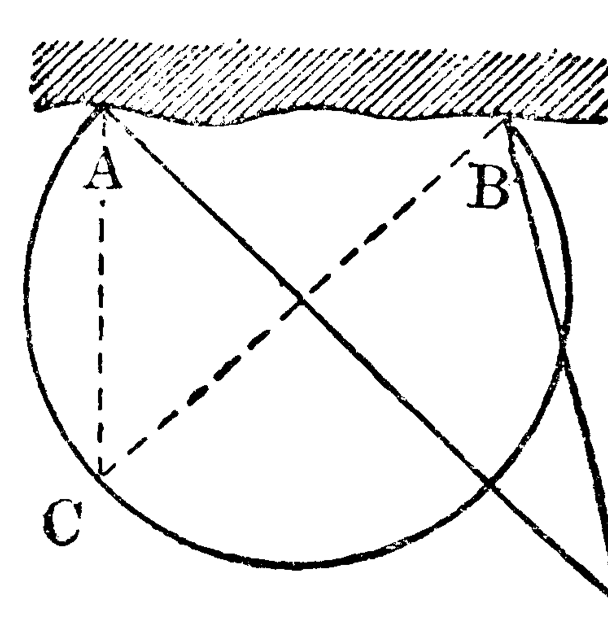
(3)　上圖表一汽機聯桿之構造. BC 表一聯桿, CA 表曲柄, BD 表活塞桿,活塞桿 BD 使 B 沿一直線往復移動時, C 描一以 A 爲中心之圓. $\triangle ABC$ 之底 AB 時時變遷, B 之極端位置曰死點(Dead points). 若 BC 長 a 尺, AC 長 b 尺,則 AB 長短變化之範圍若何?



(4)　欲從 引一圓板之徑,置一方板,使其一頂點 B 在圓周上而一邊過 A, 又一邊過 C, 則 C 爲徑之又一端. 證之.



(5)　欲知一圓孔是否眞圓,可如圖以木匠所用曲尺驗之. 若二股各緊着半孔之兩端而頂達孔邊,且任意滑動皆然,則孔爲眞圓. 何故?



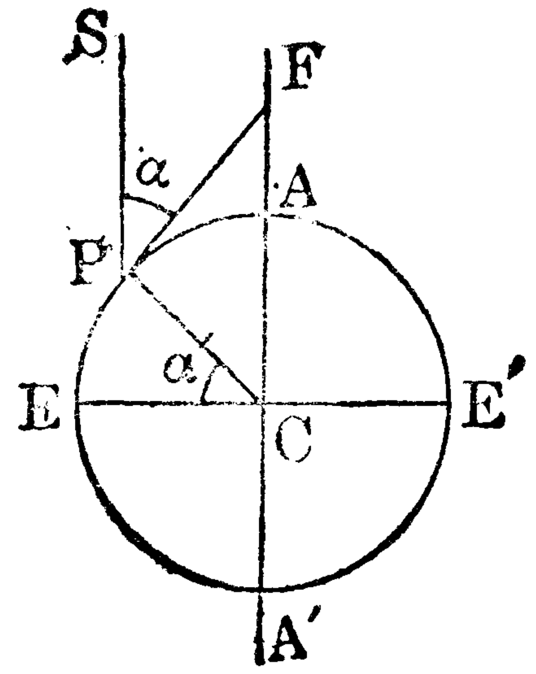
(6)　A, B 爲二燈塔,圓內皆礁石,圓外皆可航行. 證船在 S 地位而 $\angle S < C$, 則此船絕無危險.

(7)　以一繞帶聯二輪, (a) 欲使此二輪轉於同方向中, (b) 欲使二輪轉於異方向中,則聯之之法各若何?

(8)　右圖表考察北極星以定一地緯度之法. 圖中

EE'表赤道，AA'表地球之軸.

P表緯度未知之地，PF表切地球於P之一平面(地平線)，PS表北極星之視察線. $\measuredangle a$為北極星之仰角，$\measuredangle a'$表緯度. 欲圖簡便，姑假定$AA'//PS$. 證$\measuredangle a=a$



第五章 軌跡

30. 定義十八.

某圖中之所有點皆有某性質，此外之點皆無此性質，則此圖為有此性質之點之軌跡(Locus).*

31. 證軌跡之方法.

依定義證一圖為有某性質之點之軌跡必證其二方面:

(一) 圖中所有點皆有所設性質;

(二) 圖外所有點皆無所設性質.

(一) 可以其倒否定理代之，即:

(三) 無所設性質之點皆不在此圖中.

(二) 亦可以其倒否定理代之，即:

(四) 有所設性質之點在此圖中.

*一動點服從一規則而運動，則其所行之路徑恆成一圖，此圖即動點之軌跡，其所服從之規則，即賦與動點之性質.

普通所常用者爲(一)與(二),或(四)與(一);後者在求軌跡時用之尤宜.

32. 軌跡之定理. 定理十六至二十一.

定理十六. 一動點與一定點之距離恆一定,則此動點之軌跡爲以定點作中心定距離作半徑之圓周.

此定理宜證之二方面已包括於定理三中.

定理十七. 一動點與一定直線之距離恆一定,則此動點之軌跡爲在定直線兩旁之一雙平行直線〔II. 理16. 系5〕

系. 半徑一定之圓恆切一定直線,則其中心之軌跡爲在此定直線兩旁之一雙平行直線.

定理十八. 一動點恆與二定點等距,則此動點之軌跡爲此二定點間線分之垂直等分線(II. 理 12 系 5, 理 13 系 5).

系. 一動圓恆過二定點,則其中心之軌跡爲此二定點間線分之垂直等分線.

定理十九. 一動點恆與平行二直線等距,則此動點之軌跡爲過其公共垂線中點之第三平行直線〔II. 理 16. 系 3 及系 4〕.

定理二十. 一動點恆與相交二直線等距,則此動點之軌跡爲等分二直線所成二雙對頂角之一雙直線〔II. 理 22 系 6 及系 7〕.

系. 一動圓恆切一角之二邊,則其中心之軌跡爲此角

之等分線.

定理二十一. 一三角形,底爲一定線分,頂角大小一定而位置不定,則其頂點之軌跡爲在底兩旁之二個弓形弧(理10系5及系8).

系. 直角三角形斜邊爲所設線分,則其直角頂點之軌跡爲以斜邊作直徑之一圓周.

例題七 (實用)

初學者對於軌跡不易明瞭,今特設問答題以明定其觀念.

(1) 一馬繫一樹上,繫馬之繩長一丈,此馬欲脫羈而狂奔,則其所行之路若何? 此與軌跡中定理幾相類?

(2) 一摩托車直往前進,道平如砥,其直如矢,一飛機追之,機恆在車之頂上,相離1哩. 此飛機所行之路若何? 與軌跡中定理幾相類?

(3) 一河兩岸平行,潮平岸直,一舟容與中流,此舟所行之路若何? 此與軌跡中定理幾相類?

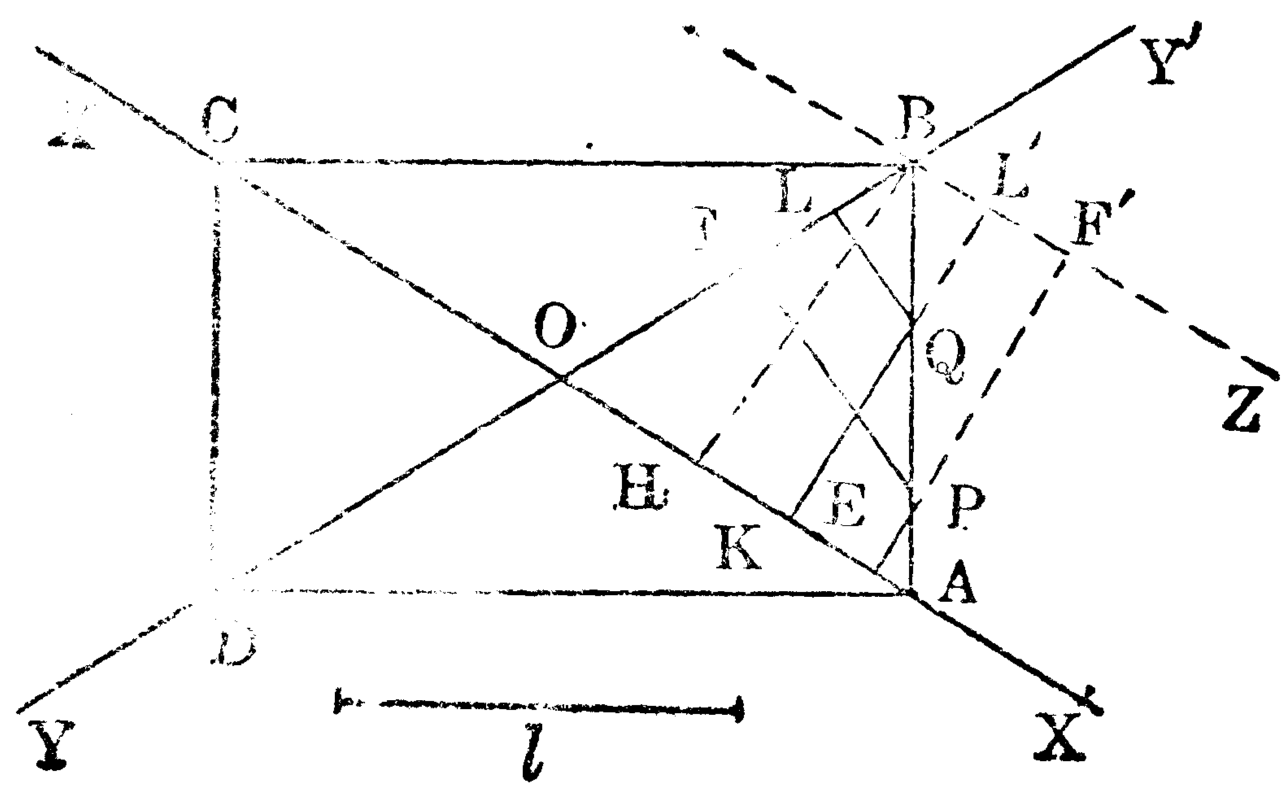
(4) 甲乙二人各居一地,二人在一夜中同時見一車燈自遠疾馳而近,而燈光之強弱兩人觀之相同.此車所行之路若何? 此與軌跡中定理幾相類?

(5) 二人於交叉二路上逐一野兔,兔不敢近此二路

之一,乃狂奔於與二路等距之荊棘中. 此兔所行之路若何? 此與軌跡中定理幾相類?

(6) 海中有礁石處設二燈塔以阻行舟入險. 已知此二燈塔在有暗礁處周圍邊界上任意點張相等之角. 此暗礁之範圍若何? 此與軌跡中定理幾相類?

33. 證軌跡之範式. 定理二十二.



定理二十二. <u>一動點與相交二定直線距離之和一定,則此動點之軌跡爲一矩形之四邊,此矩形以二定直線之部分爲對角線,而從一對角線上一角頂至他對角線之距離等於所設二距離之和.</u>

〔軌跡之條件〕 XX', YY' 爲相交二定直線, l 爲定長. 一動點 P 與 XX', YY' 之距離各爲 PE, PF, 而 $PE+PF=l$.

〔軌跡〕 P 之軌跡爲矩形 $ABCD$. 此矩形之二對角線 AC, BD 各爲 XX', YY' 之部分,而從 B 至 AC 之距離 BH 等於 l.

〔二〕 XX', YY' (卽 AC, BD) 交於 O, 則 $OA=OB$ (II. 理 28, 29 系 4); 而 $\measuredangle OAB=OBA$; 過 B 引 XX' 之平行線 BZ, 則 BZ 與 XX' 處處距離皆等於 l (理 17), 且 $\measuredangle ZBA=OAB=OBA$, 卽 BA 爲 $\measuredangle OBZ$ 之等分線; 由是:

(第一) 證合於所設條件之點皆在矩形 $ABCD$ 之邊上;

設 P 爲合於所設條件之點, 卽其與 OA, OB 之距離爲 PE, PF 時, $PE+PF=l$;

延長 EP, 會 BZ 於 F', 則 $EF'=l$ (理 17), 卽 $PE+PF'=l$;

由是 $PF'=PF$, 而 P 在 $\measuredangle OBZ$ 之等分線上, 卽在 AB 上 (理 20).

(第二) 證在矩形 $ABCD$ 各邊 (例如 AB) 上之點皆合於所設條件:

在 AB 上任意取一點 Q, 從 Q 至 OA, OB 之距離各爲 QK, QL;

延長 KQ, 會 BZ 於 L', 則 $KL'=l$, 卽 $QK+QL'=l$ (理 17); 且 $QL'\perp BZ$; 然因 Q 在 $\measuredangle OBZ$ 等分線 AB 上, 故 $QL=QL'$ (理 20), 而 $QK+QL=QK+QL'=l$.

由此二方面, 可知 AB 爲軌跡之一部分.

同理, 可證 BC, CD, DA 皆爲軌跡之一部分; 合之得完全之軌跡,

例題八 (定理)

(1) 依證軌跡之範式詳述定理十六至定理二十一之證.

(2)　一小圓沿一大圓周而滾(在大圓外或內),求其中心之軌跡.

(3)　一動點與一圓周之距離一定,則此動點之軌跡為定圓之二個同心圓周.

(4)　一定半徑之圓恆切一定直線,則其中心在此直線之平行線上.

(5)　一定半徑之圓恆切一定圓,則其中心在此圓之同心圓周上.

(6)　一圓恆切一定直線於其上之一點,則其中心在由此點所引定直線之垂線上.

(7)　一圓恆切一定圓於其上之一點,則其中心在過此點所引定圓之中心線上.

(8)　一動圓半徑一定且恆過一定點,求其中心之軌跡.

(9)　一三角形底之大小位置皆一定,對底之高大小亦一定,則其頂點之軌跡為底之二個平行直線.

(10)　一三角形底之大小位置皆一定,對底之中線大小亦一定,則其頂點之軌跡為一圓周.

(11)　求在一定圓中一組平行弦中點之軌跡.

(12)　求在一定圓中一組等弦中點之軌跡.

(13)　從圓內或圓外一定點至此圓引動線分,則此動

線分中點之軌跡爲一圓周.

(14) 從一定點至一定直線引動線分,則此動線分之軌跡爲定直線之一平行直線.

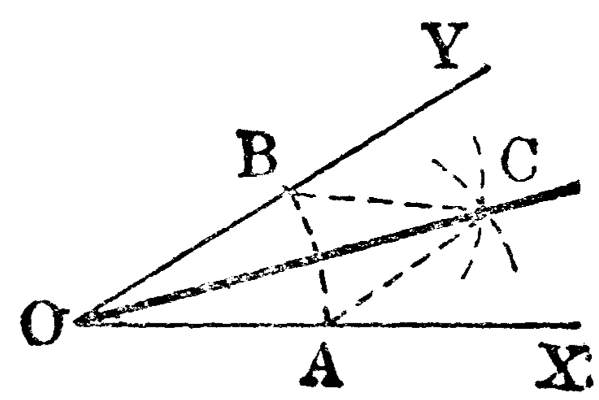
(15) 一三角形底之大小位置皆一定,頂角之大小,亦一定,則其內心之軌跡爲二個圓弧.

(16) 一三角形底之大小位置皆一定,頂角之大小亦一定,則其垂心之軌跡爲二個圓弧.

第六章 作圖題

34. **問題一.**

作所設角之等分線.



〔所設條件〕 設一角 XOY.

〔求作〕 作其等分線.

〔解法〕 以 O 爲中心,用任意半徑規弧,各交 OX, OY 於 A, B; (公設三)

以 A 及 B 各爲中心,用相等半徑規二弧,交於 C;(公設三)

聯 OC, 則此 OC 卽爲 $\measuredangle XOY$ 之等分線. (公設一)

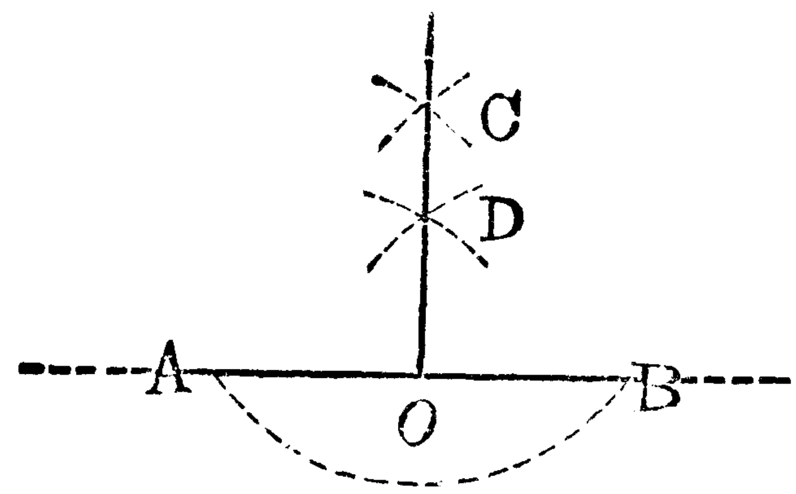
〔證〕 聯 AC, BC, 則 $\triangle OAC \cong OBC$ (從解法知 $s.s.s.=s.s.s.$),

$$\therefore \measuredangle COA = COB.$$

〔討論〕 本題恆能作圖,且僅有一個解答. (嗣後凡類此之討論恆略去不載以省篇幅).

系一. 作一線分之垂直等分線.

以線分視作直線角,如上求C之法求得C及D,聯之.



系二. 求一線分之中點(解法同系一).

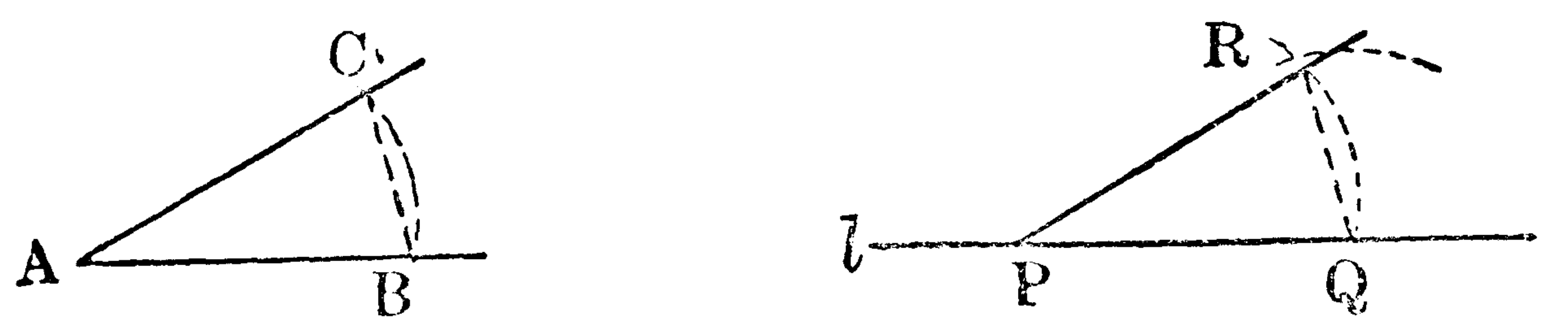
系三. 從一直線上一點作此直線之垂線(解法同本題).

系四. 從一直線外之一點作此直線之垂線.

以所設點C作中心,規弧,交所設直線於A及B,由是歸至系一.

35. 問題二.

從定直線上一定點作一半射線,令與定直線所成之角等於所設角.



〔所設條件〕　有一角A,一直線l及其上之一定點P.

〔求作〕　從P作一半直線,使與l所成之角等於$\measuredangle A$.

〔解法〕　以A爲中心用任意半徑規一弧,交角之二邊於B及C; 次以P爲中心用此同半徑規一弧,交l於Q;

(公設三)

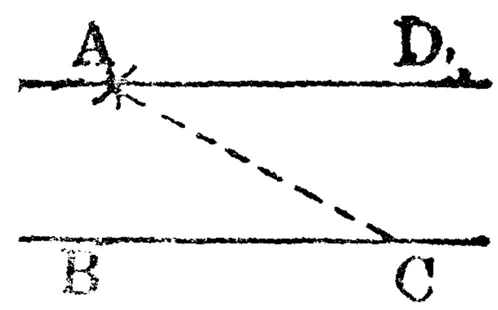
再以Q爲中心用等於BC之半徑規弧,交前一弧於R;

(公設三)

聯RP;則此RP爲所求作之半直線. (公設一)

〔證〕 從解法,知$\triangle PQR \cong ABC(s.s.s.=s.s.s.)$, $\therefore \measuredangle QPR = A$.

〔討論〕 本題恆能成立. 題中不言明所作半射線宜在l之何旁(在上或在下)或何向(向左或向右),則當有四個解答;若言明一事,則當有二個解答.



系一. 過一定點作一定直線之平行直線.

如右圖,從定點A至定線BC任意作線分AC,從A作AD令與AC所成角DAC等於$\measuredangle ACB$,歸於本題之解法.

系二. 設三角形之二角及其頂點間之邊,作此三角形

(本題)

系三. 設三角形之二角,作其第三角(系二).

系四. 設三角形之二角及此中一角之對邊,作此三角形(系三及系二).

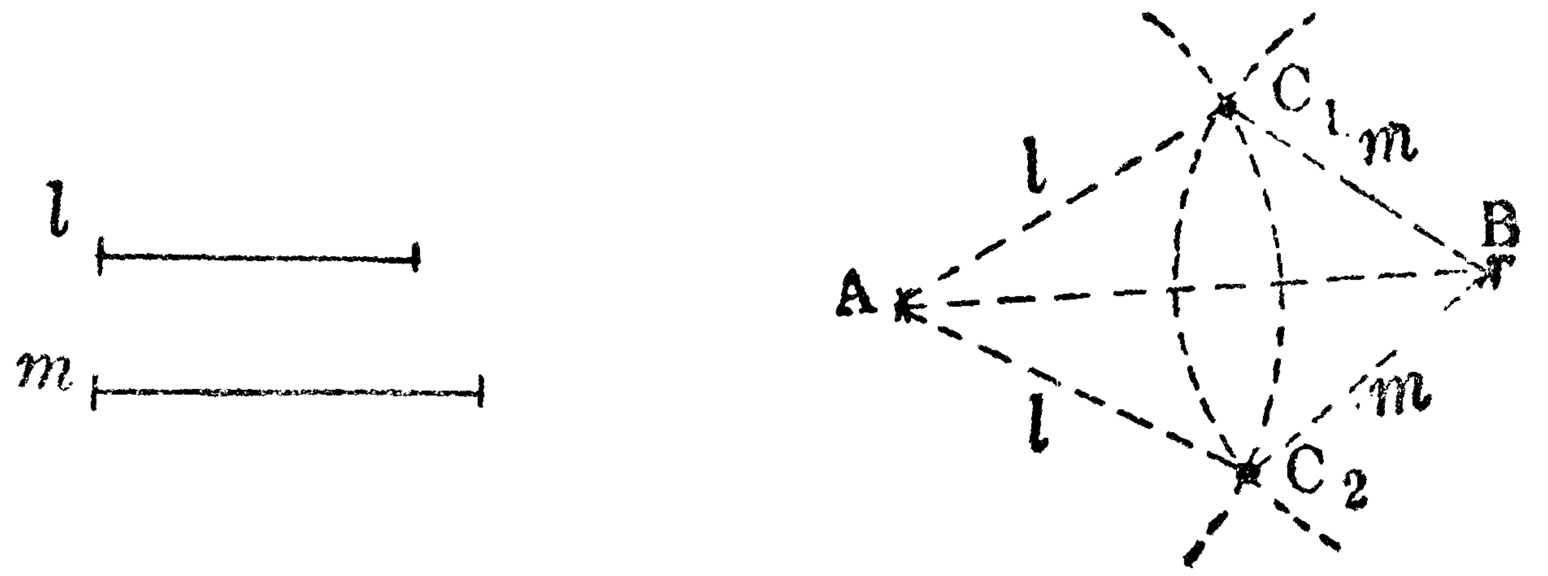
系五. 設三角形之二邊及其所夾之角,作此三角形(本題)

系六. 分一線分成n等部分.

法視第一編例題四(20)題. 學者自證之.

36.* 問題三.

設二點,更求第三點令與此二點之距離各爲一定長.



〔解法〕 以所設二點 A, B 爲中心各用定長 l, m 爲半徑規弧,得交點 C_1 及 C_2 皆爲所求第三點.

〔證〕 學者自證之.

〔討論〕 $l+m>AB$, 則解答有二個; $l+m=AB$, 則解答有一個, $l+m<AB$, 則無解答,卽本題不成立.

系. 設三角形之三邊,作此三角形.

解法同上,學者宜自討論之.

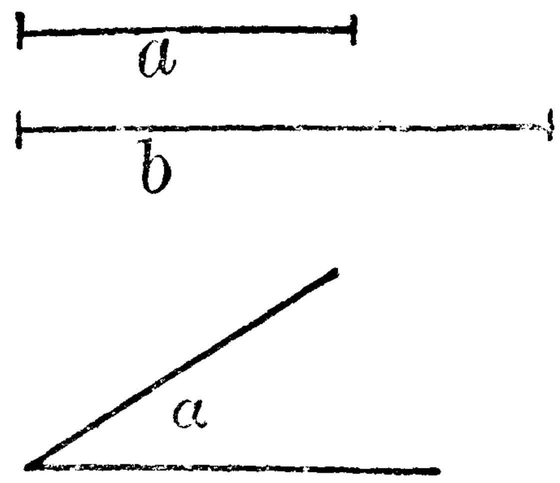
37. 問題四.

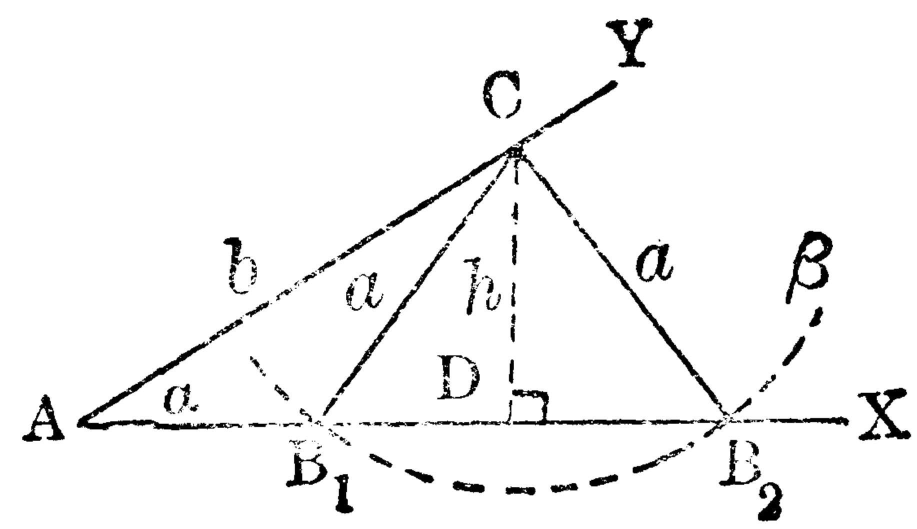
設三角形二邊及對此中一邊之角作此三角形.

〔解法〕 作一角 XAY 令等於所設角 α (題2). 在 AY 上取 C 令 AC 等於所設長 b. 以 C 爲中心以所設長 a 爲半徑,規弧 ,交 AX 於 B_1 及 B_2, 則 $\triangle AB_1C$, AB_2C 爲所求作之三角形.

---

*自此以後所設條件及求作二事不再分別標明以省篇幅. 學者自解題時宜標明之.





〔證〕 學者自證之.

〔討論〕 (第一) $\measuredangle\alpha<R_{\measuredangle}$; 名自 C 至 AX 之距離 CD 爲 h.

(1) $a\geqq b$, 則弧 β 僅交半射線 AX 於 A 外一點,故有一個解答.

(2) $b>a>h$, 則 $\frown\beta$ 交 AX 於二點 B_1 及 B_2, 故有二個解答.

(3) $a=h$, 則 $\frown\beta$ 切 AX 於一點 D, 故僅有一個解答.

(4) $h>a$, 則 $\frown\beta$ 不會 AX, 故無解答;問題於此不成立.

(第二) $\measuredangle\alpha\gtreqless R_{\measuredangle}$:

(1) $a>b$, 則 $\frown\beta$ 交 AX 於一點,故有一個解答.

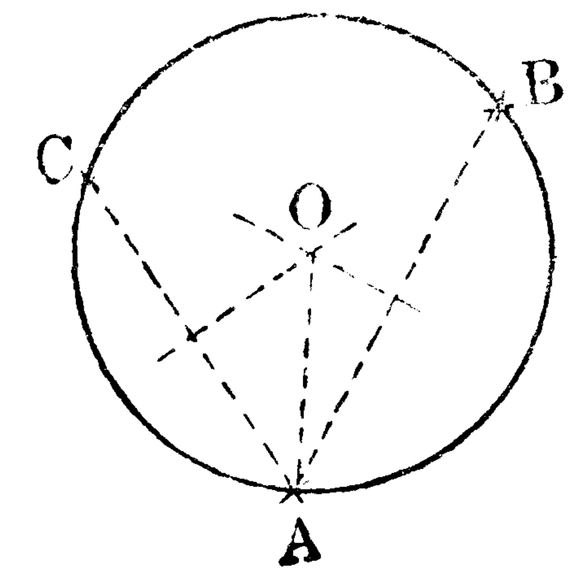
(2) $a\lesseqgtr b$,則無解答.

38. 問題五.

過三個定點作圓.

〔解法〕 A, B, C 爲三個定點. 以此爲三角形之三個

角頂求得其外心（AB 及 AC 垂直等分線之交點）O, 以 O 作中心 OA 作半徑規圓,則此圓過 A, B, 及 C 而爲所求之圓.



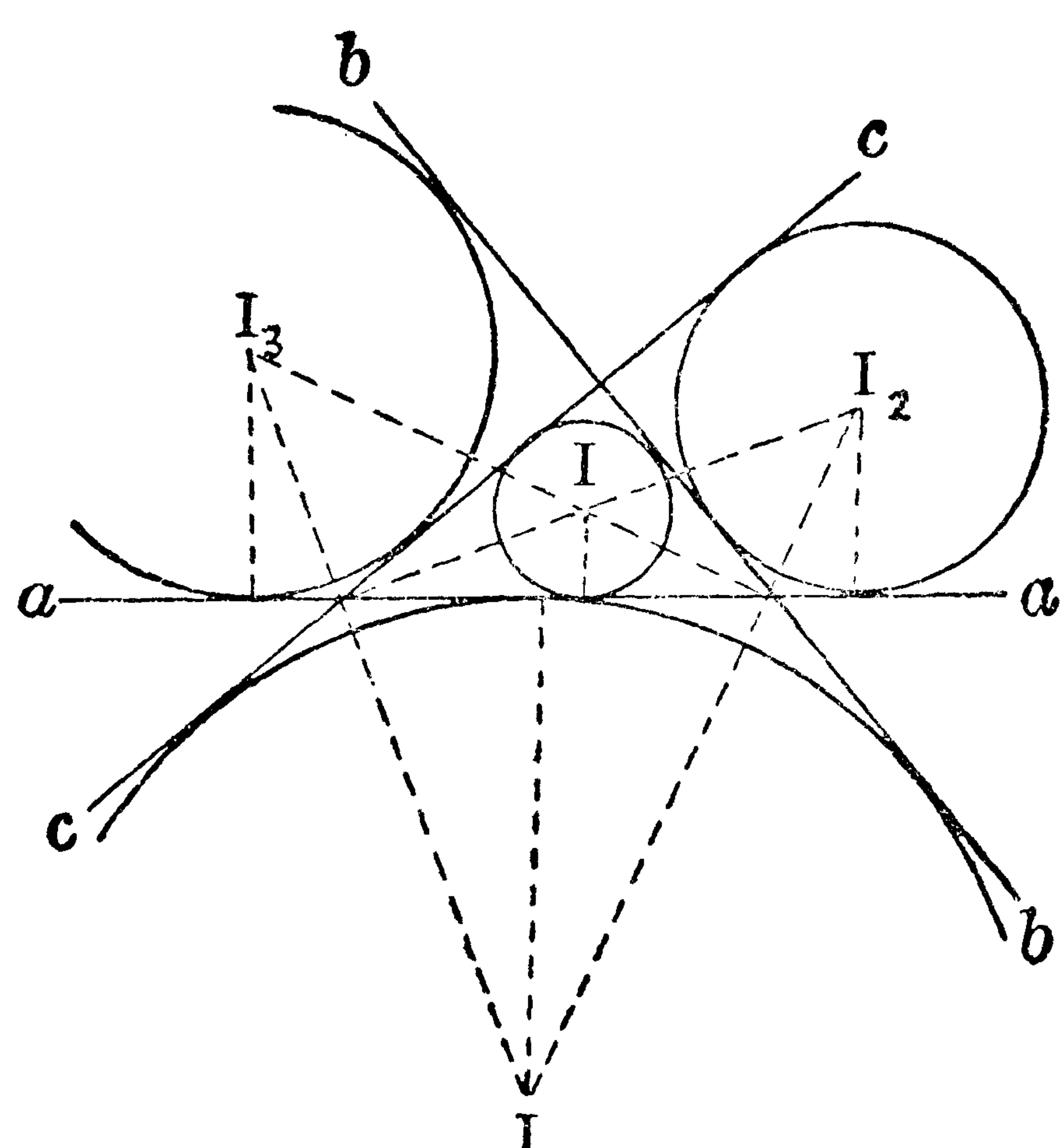
〔證〕　觀 2 編 理 31 及 理 3. 系 1

系一.　過三點之圓周有一無二.

系二.　圓之中心有一無二.

問題六.

切三個定直線作圓.

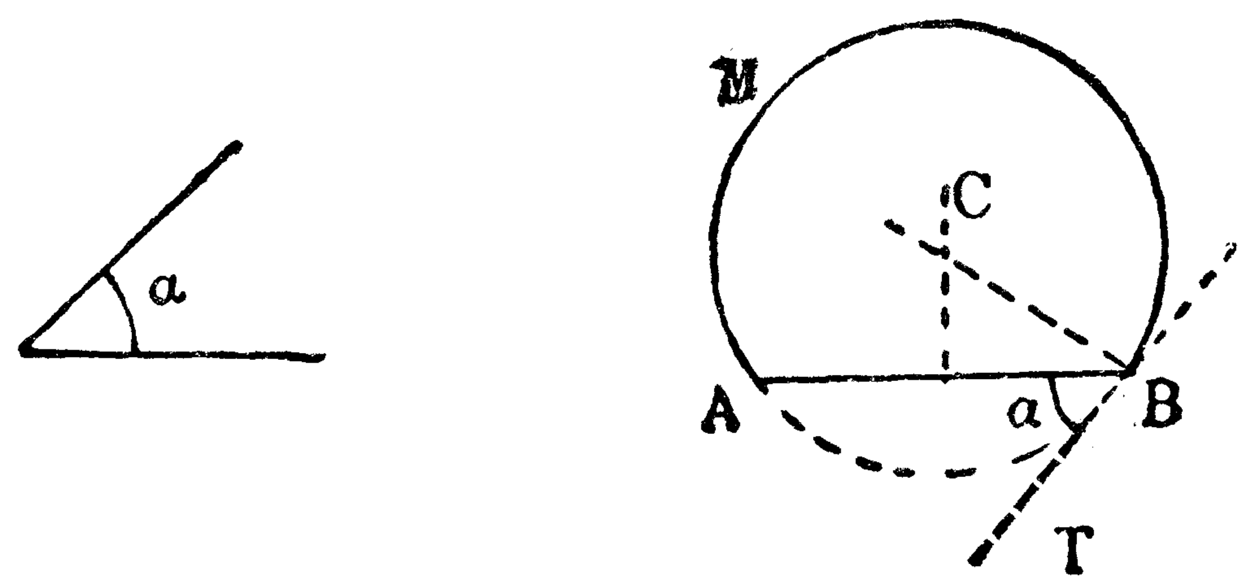


〔解法〕　a, b, c 爲三個定直線. 作 a, b 交角之等分線及 a, c 交形之等分線,得四點 I, I_1, I_2, I_3; 以此各點作中心自此至 a 之距離作半徑規圓,卽得切於 a, b, 及 c 之圓.

〔證〕　觀2編.理30及理7系3.

39. 問題七.

在一定線分上作一弓形令其內容之角等於一定角.



〔解法〕　從定線分AB之一端B作一直線BT令$\angle ABT$等於所定角α(題2);

從B作BT之垂線(題1系3),再作AB之垂直等分線(題1系1),二線交於C;

以C爲中心CB爲半徑規圓,得$\frown AMB$爲所求.

〔證〕　從理18,知$CA=CB$;從理3系1,知所作弧必過A;從理7系3及解法,知BT切於$\odot C$;　故AMB弓形角$=\alpha$.(理10系2).

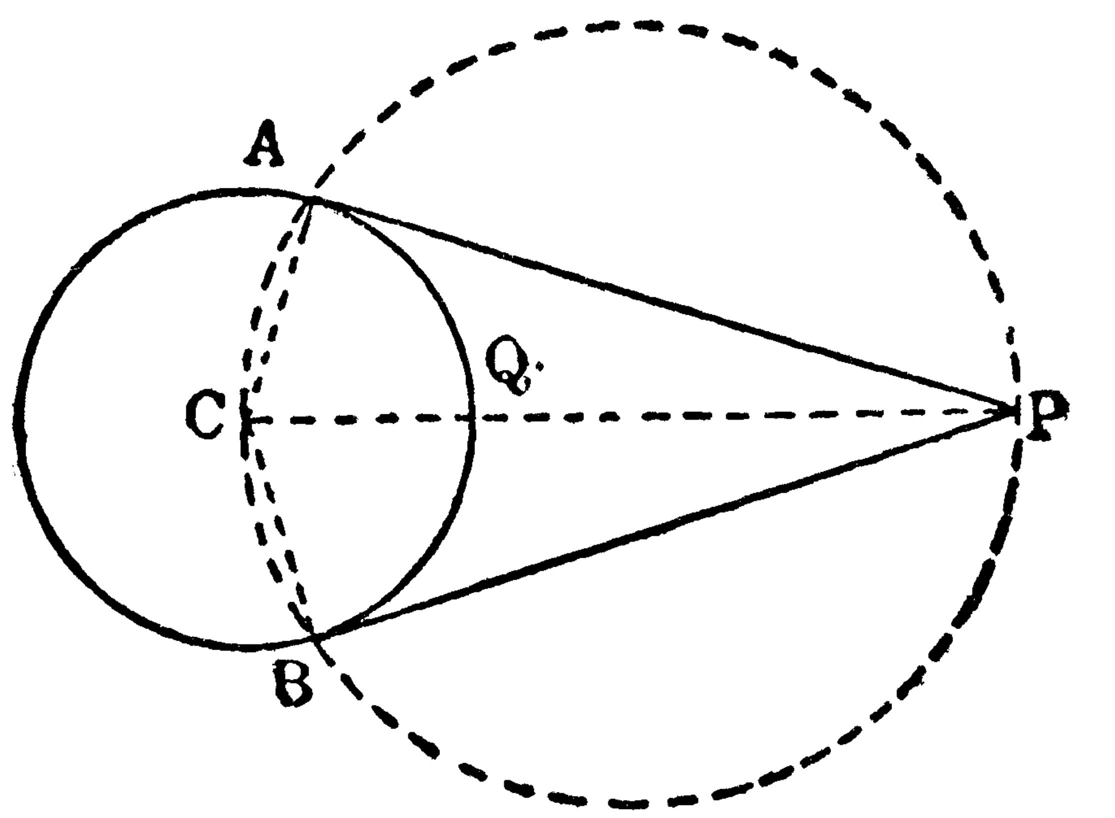
〔討論〕　本題恆成立.　在定線分兩旁各有一解答.

40, 問題八.

從一定點作一定圓之切線.

〔解法〕　聯定點P至定圓中心C作線分(公設一),以此爲直徑畫圓(公設三),交$\odot C$於A及B;

聯 AP, BP, 則此二直線為所求之切線.



〔證〕 CAP, CBP 各為半圓周(解法),故 $\measuredangle CBP = CAP = R\measuredangle$ (理 10 系 6);

故 AP, BP 各為 $\odot C$ 之切線(理 7 系 3).

〔討論〕 (第一) P 在 $\odot C$ 外,則 $\odot CAP$ 與 $\odot C$ 相交,故本題有二個解答.

(第二) P 在 $\odot C$ 上,如 Q, 則 $\odot CAP$ 與 $\odot C$ 相內切,此時 A, B, 及 P 皆合於 Q, 從 Q 所作 CQ 之垂線為切線;本題於此僅有一個解答.

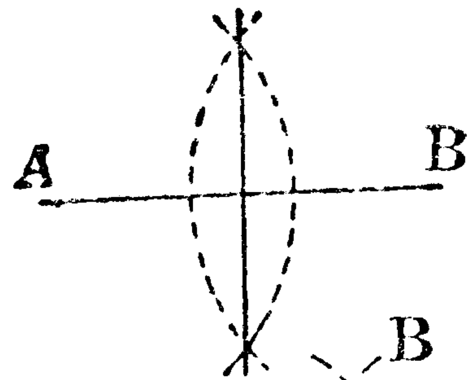
(第三) P 在 $\odot C$ 內,則 $\odot CAP$ 與 $\odot C$ 不相會;故無解答,卽本題於此不能成立.

例題九(作圖題)

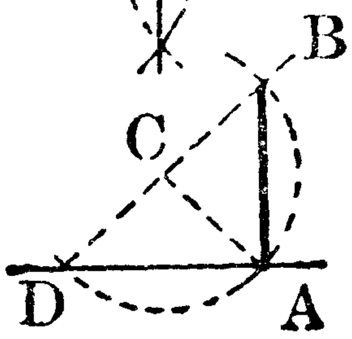
(1) 問題一系一可如右圖解之,試述解法及證.

(2) 問題一系三可如右圖解之;但 A 為定點, C 為任

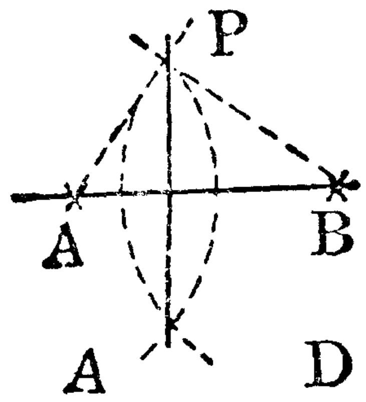
意所取點. 述此解法及證.



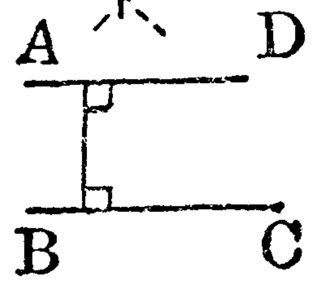
(3) 問題一系四可如上題之圖解之;但 B 爲定點, D 爲任意所取點. 述此解法及證.



(4) 問題一系四又可如下圖解之;但 P 爲定點 A 及 B 皆爲任意所設點. 述此解法及證.



(5) 問題二系一可用問題一系四及系三之法解之,如右圖. 述此解法及證.



(6) 問題二系三可如右圖解之. 述此解法及證.

(7) 等分一弧. (8) 設二邊,作一矩形.

(9) 四等分一角.

(10) 在一定線分上作一正方形.

(11) 設平行二直線及一點,過此點作一直線令其爲二平行線截取之部分,等於一定長.

(12) 設一邊作一正三角形. (13) 三等分一直角.

(14) 設平行四邊形之二邊及其所夾之角,作此形.

(15) 以一線分爲斜邊,在其上作一二等邊直角三角形.

(16)　問題二之系二及系四中所設條件,有何種情形,則問題不能成立.

(17)　設一圓,求其中心.

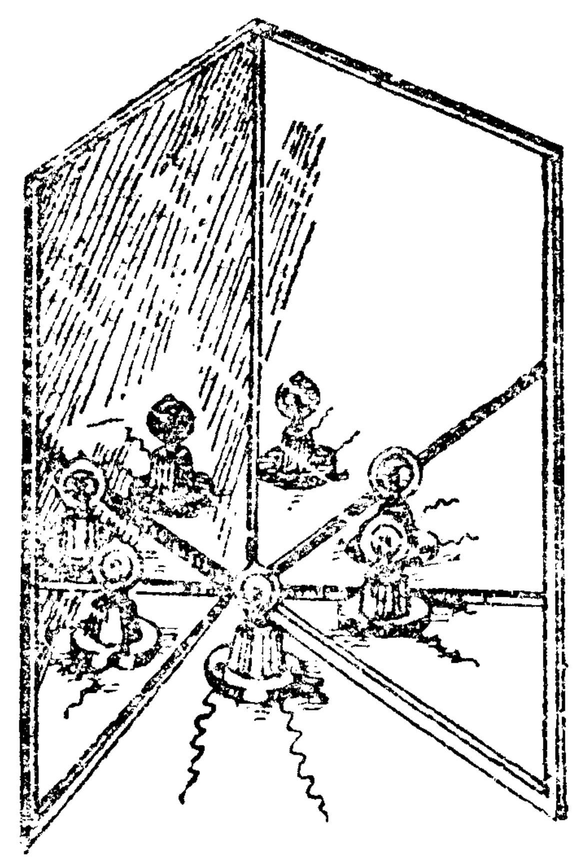
(18)　設一圓及一直線,作圓之切線,令與定直線所成之角等於一所設角.

(19)　從一定圓截取一弓形,令其所含之角等於所設角.

(20)　設一圓,作其內接正三角形及外接正三角形.

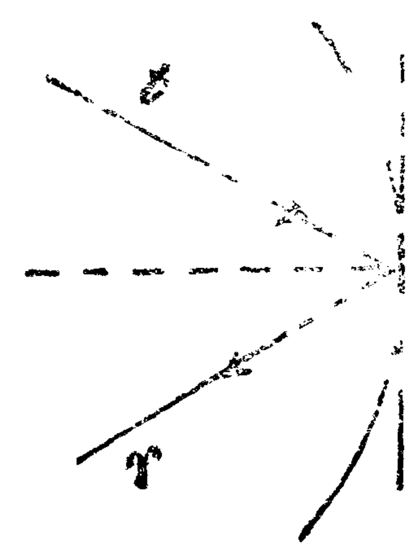
例題十　(實用)

(1)　一物映入平面鏡中,其像離鏡面之遠與物離鏡面之遠相等.　若二平面鏡位置成一斜角,以一物置其角內,則在二鏡中必有此物之諸像,而此諸像之位置在一圓周上.　何故?

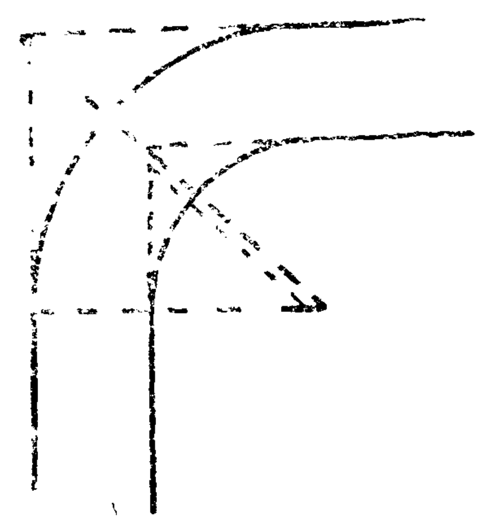


(2)　一光之射線射至一球面鏡上,其橫截面以一圓表之,則於投射點作圓之切線,且從此點引切線之垂線,可得投射角(如圖 t).　投射線關於垂線之對稱線爲折射線,折射線與垂線所成之角爲折射角(如圖 r).　投射角與折射角恆相等.　聲浪之傳佈線亦然.

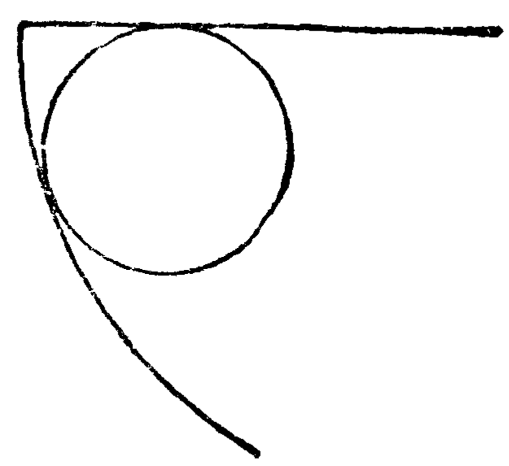
倫敦聖保羅屋頂上之圓閣名曰密談閣 (Whispering Gallery), 蓋因近牆一點所發之微聲可於閣內近牆處聞之,他處則不能聞也. 此聲浪所及之範圍是否爲與圓牆共心之一圓周? 其故何在?



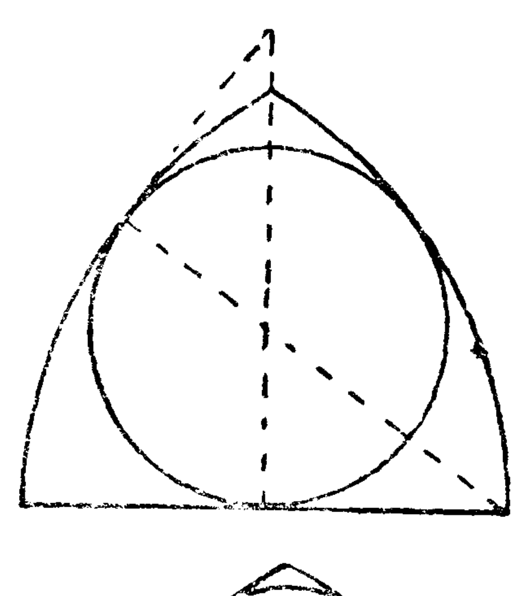
(3) 直交二直街其闊不等. 今欲於其相交處作一圓形路聯之. 此曲路之兩邊須切於原二街,則此曲路當如何作法? 試述其故(何故如此作)



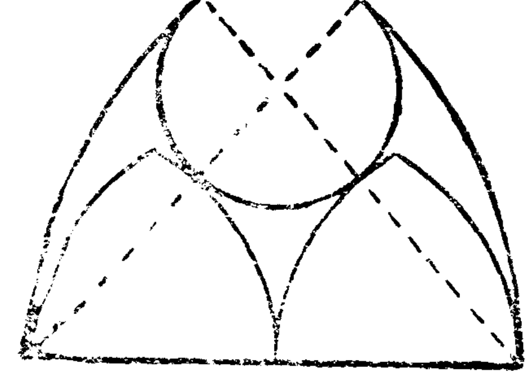
(4) 一直街接一圓街,今欲於此二街間闢一散步之草地,地須正圓而切二街. 已定有此圓草地一定之半徑,則其位置當若何定之?



(5) 建築圖中所常見者爲等邊哥德式穹 (Gothic arch). 其作法,以正三角形二邊爲弦,一邊爲半徑作二弧如圖所示. 今欲在穹中內接一圓,此圓之作法若何?

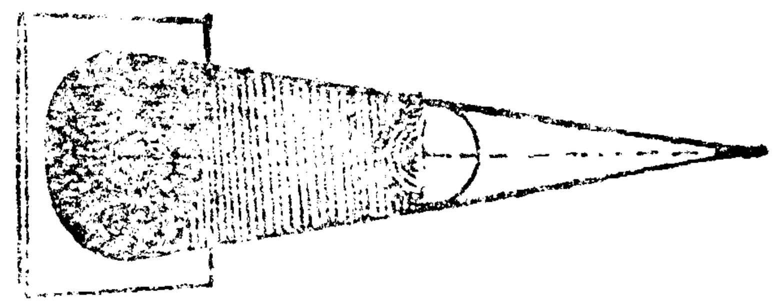


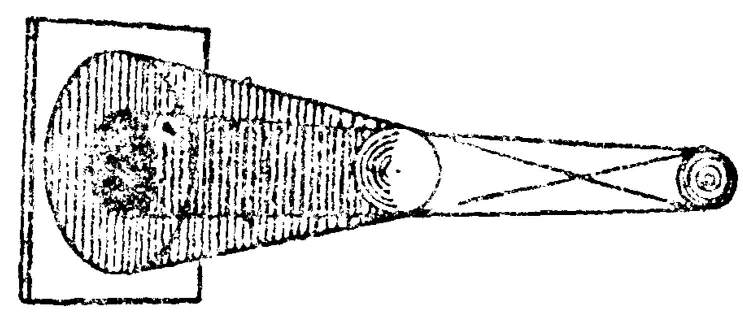
(6) 窗之構造,恆於一圓或數圓聯合等邊哥德式穹爲之;其簡單者如



右圖. 述此圖如何作法?

(7) 光線射至一不透明之物體上,則物體後必有一光所不及之黑暗處,是名爲影. 若以一幕正對光源而置於物後,則幕上必有一橫截面之黑影.





光源若極小,如弧光燈等,則可視作幾何學上之點. 如此一種,幕上影邊極其清晰. 設想不透明體爲一球,過球心及光源作一剖平面,則在此平面中影之界限,可從光源至球所剖成之圓作二切線以定之.

光源若大,則影爲二部分所成,一爲陰影(Unbra),即光所完全不及處,一爲半影(Penumbra),爲光之半不及處.

說明陰影半影之界限如何定法. 若光源與不透明體距離變更,則陰影及半影所受影響若何? 若光源甚大於物體,如日與地球則陰影之象若何? 試繪日蝕及月蝕時之種種位置.

(8) 一直徑16寸之盆滿貯以水,以一長12寸之棍置於水面,則此棍因其兩端爲盆緣所格,而其中點有不能達之地位. 試在水面上確定其難達之界限.

(9) 以一平面鏡繞一直立軸旋轉,則離軸一尺遠之

物在鏡中所映像之軌跡若何?

(10) 歐洲大戰爭時,德國礮位皆藏於戰壕中,聯軍不能探得,苦於無從還擊,乃用聲浪之速率定其藏礮之所在。今設有甲乙二處相距50哩,甲處已測得敵礮發後 2分鐘聞礮聲,乙處測得發礮後15分鐘聞礮聲,則敵礮位置何在當用何法定之? 但聲浪之速率每秒時1100呎.

第七章 證題作圖方法及雜例

41. 證題之方法

學者至此,已可知證題之方法不過熟識定理而善於活用之,今姑更略述數事於下,以便學者.

〔第一〕 欲證二弧相等:(一)可證其所張中心角相等;(二)可證其弦相等.

〔第二〕 欲證二弦相等:(一)可證其張等弧;(二)可證其與中心等距.

〔第三〕 欲證二弦不等:(一)可證其張不等弧;(二)可證其與中心不等距.

〔第四〕 欲證四點共圓:(一)聯四點成立於同底上之二個三角形而證其頂角相等;(二)聯四點成四邊形而證其對角互爲補,或證其一外角等於內對角;(三)覓得與此四點等距之一點.

〔第五〕　欲證諸點共圓:(一)證其中四點共圓,乃去四點之一易以別一點更證之,累用此法至諸點悉用而止;(二)覓得與諸點等距之點.

〔第六〕　欲證諸圓共點:(一)證其點有一特性因而決定其點在各圓上;(二)證二圓之交點在其他各圓上.

〔第七〕　欲證一直線切一圓:(一)證從公共點所引直線之垂線過圓心;(二)證切線角等於立其所夾弧上之圓周角.

〔第八〕　欲證二圓之相切:(一)證其共有點在中心線上;(二)證二中心之距離等於二半徑之和或差.

證軌跡之方法:軌跡已知者,證法與尋常定理相類;軌跡未知而須求者,最普通之法,可依題中所設性質作出軌跡上之若干點而見出其軌跡爲何種線;其各種特別方法不能詳述於此小册中,學者如有志研究,可就不佞所輯初等幾何學軌跡問題研究之.

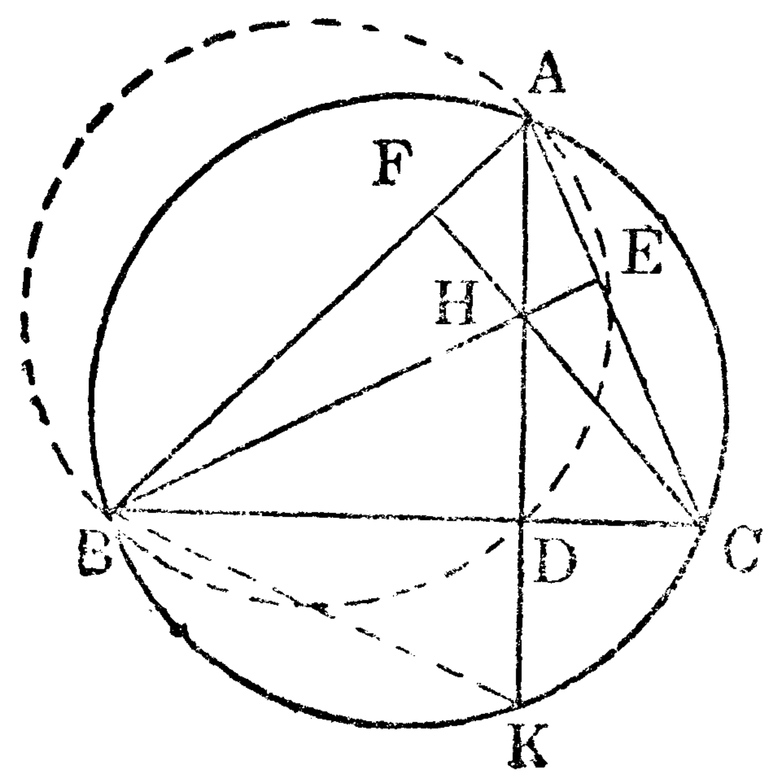
42. 作補助線法.

作補助線之標準,除前編中所言者外,恆藉圓之助使已知角及未知角之間發生關係.故用圓之定理作補助線者,大抵在視察圓周角,切線角,及中心角等.

由是作補助線之大要:(一)題設直線或直線形及圓,則從中心至直線或直線形之邊作垂線,或作平行線;(二)直

線或直線形與圓有公共點者,恆就此點作圓之切線,或聯此點及圓心,或從此點作平行於已知線之割線而聯其與圓之交點及中心;(三)題設點及圓者,恆聯此點及中心,或從此點作圓之切線或割線;(四)題設四邊形者,恆就二對角線之交點或就二對邊延線之交點行(三)中之考察;(五)題設二圓者,作其中心線或公切線,過其公共點引弦,相交者過一交點引弦或作切線,作交點之半徑,作公共弦而從其上一點作切線;(六)題設圓及弦者於弦端作切線,設二弦者交互聯其各端;等. 無論何種設題,已知諸點有共圓者,或作補助線後所得交點及已知點有共圓者,急宜畫出此圓為補助圓. 前編第六章中所言作補助線之標準及方法仍宜隨在注意.

例一. 延長三角形之一垂線至與外接圓會,則其延長部分等於垂心與此線在邊上垂足間之部分.



〔證〕 H 為 $\triangle ABC$ 三垂線 AD, BE, CF 之交點,即垂心,延長 AD,交外接圓於 K.

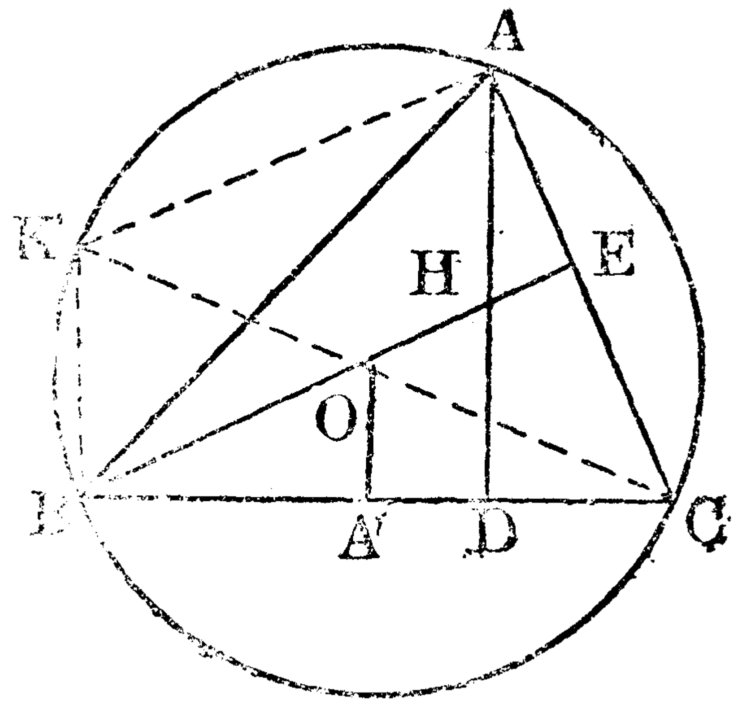
因 $\measuredangle AEB = ADB = R\measuredangle$, $\therefore A, E, D, B$ 共圓;

聯 BK, 則 $\measuredangle KBD = DAE$(同立⌒KC上)$=DBH$(同立⌒E上);

$\therefore \triangle KBD \cong HBD$ (a. s. a = a. s. a)，而 $KD=HL$.

例二. 從三角形一角頂至垂心之距離二倍於從外心至此角對邊之距離.*

〔證〕 H, O 各為 $\triangle ABC$ 之垂心及外心，A' 為邊 BC 之中點，AD, BE 各為 BC, CA 之垂線；



聯 CO 延長之交外接圓 O 於 K；聯 AK, BK，則

$\measuredangle KAC = KBC = R_\measuredangle$ (理 10 系 6)；

$\therefore KA \parallel BH, KB \parallel AH$ (II. 理 15 系 6)，而 $AH=KB$ (II. 理 27 (一))；

然 $KB=2OA'$ (II. 理 20 (二))，故 $AH=2OA'$.

〔注意〕 前二題證較繁之題時恆用之.

例三. 從三角形外接圓周上任意點至三邊引垂線，則其三個垂足共線.

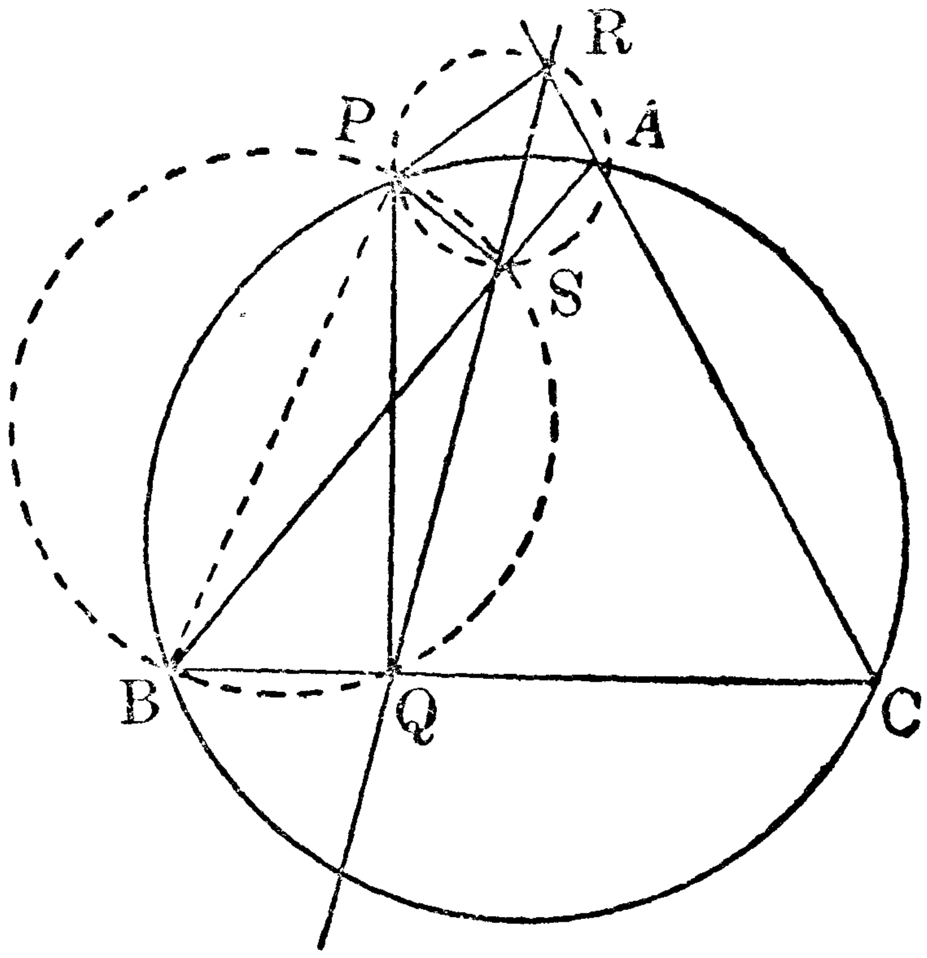
〔證〕 P 為 $\triangle ABC$ 外接圓周上任意一點 $PQ \perp BC$，$PR \perp CA$，$PS \perp AB$，則

$\measuredangle PRA + PSA = 2R_\measuredangle$，$\measuredangle PSB = PQB = R_\measuredangle$，

故 P, R, A, S 及 P, S, Q, B 各共圓；

聯 PA, PB, RS, SQ，則 $\measuredangle PSR = PAR = PBQ$；

*本定理之發見者為印度 Brahmoguhta 氏〔西曆 598〕



$\therefore \measuredangle PSR + PSQ = \measuredangle PBQ + PSQ = 2R_{\measuredangle}$, 而 R, S, Q 共線.

〔注意〕 此所共之線名曰 Simson 線,以其為 Simson 氏所發見故也;惟據 McCay 氏所言,則發明此定理者初非 Simson 氏而實為 Wallace 氏.

例四. 兩兩相交之四直線中,去其任意一線,則餘三線可成一三角形,如是所得四個三角形之外接圓共點.

〔證〕 兩兩相交四直線成四個三角形 BCE, CDF, FAB, AED

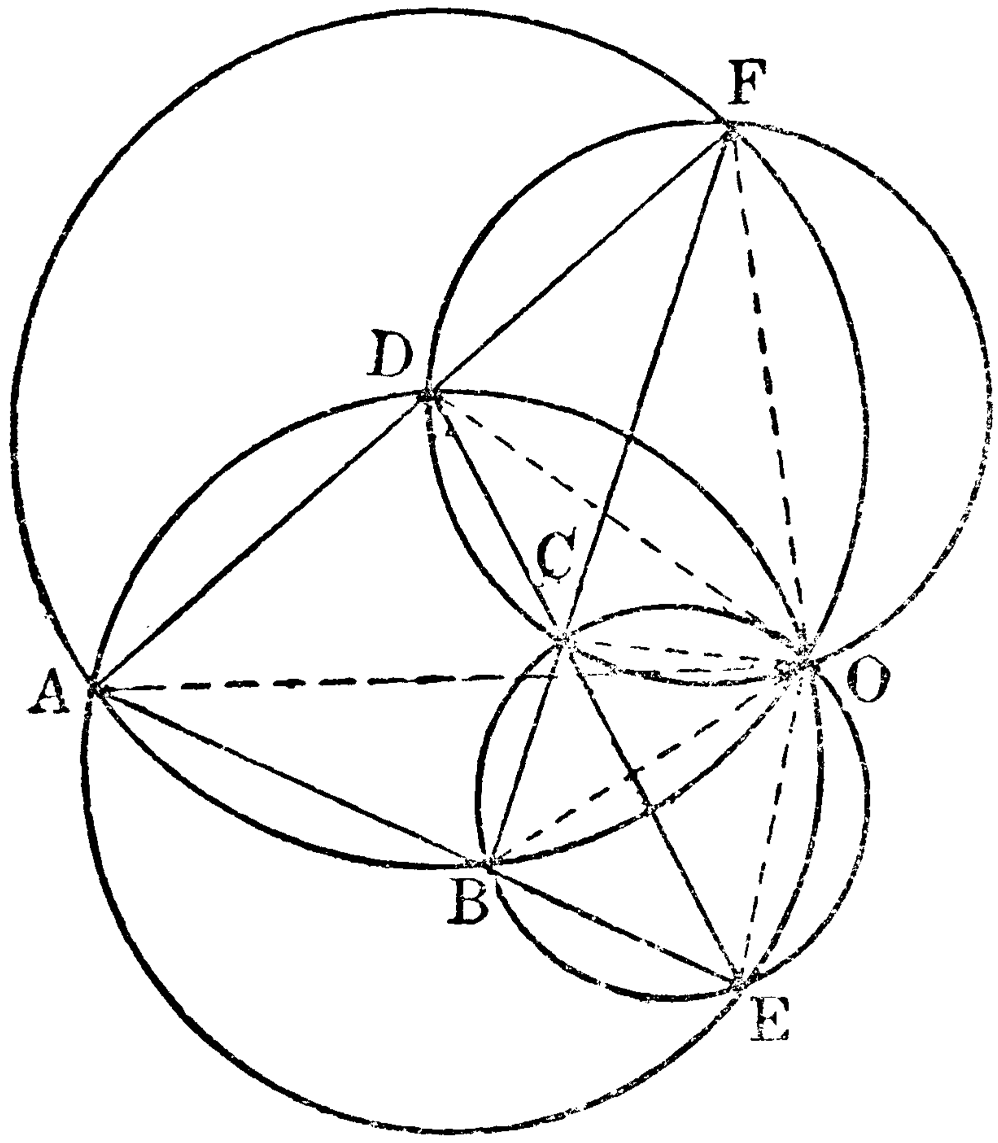
二三角形 BCE, CDF 之外接圓交於 O, 則

$\measuredangle AEO = FCO = FDO$,

故 $\measuredangle AEO + ADO = FDO + ADO = 2R_{\measuredangle}$, 而 D, A, E, O 共圓;

又 $\measuredangle EBO = ECO = AFO$,

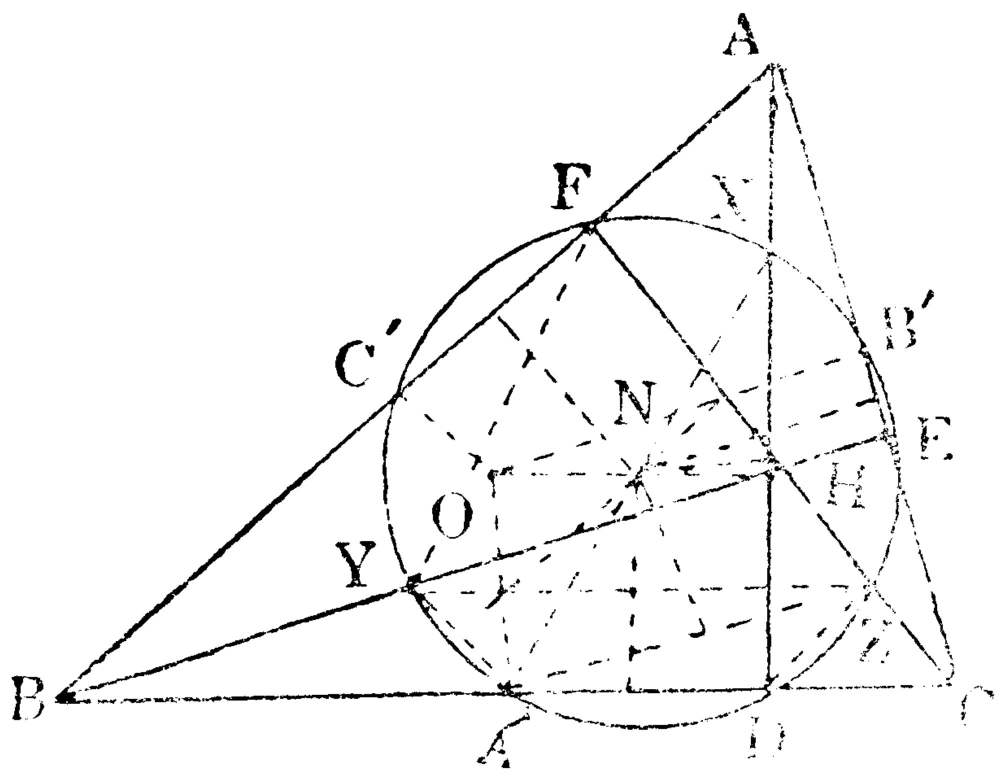
故 $\measuredangle ABO + AFO = ABO + EBO = 2R_{\measuredangle}$, 而 F, A, B, O 共圓;



由是 ⓈDAE, FAB 皆過 ⓈBCE, CDF 所共之點,卽此四圓共點.

〔注意〕　此所共之點名曰 Miquel 點.

<u>例五.</u>　<u>一三角形三邊中點,三邊上垂足,及垂心與三個角頂間之中點凡九點共圓.</u>*



*此定理係法人 Poucelet 氏 (西曆 1788—1867) 所發見.

本題證法細案之有二十餘種,今舉二三種於下:

設 D, E, F 爲 $\triangle ABC$ 中三垂線之足; A', B', C' 爲三邊之中點, H 爲垂心, X, Y, Z 各爲 HA, HB, HC 之中點. 欲證 A', B', C', D, E, F, X, Y, Z 九點共圓.

〔第一證〕 O 爲 $\triangle ABC$ 之外心,則 $OA' \perp BC$, $OB' \perp CA$, $OC' \perp AB$, 故聯 OH, 則 $OA'DH$, $OB'EH$, $OC'FH$, 則皆爲梯形;

由 $A'D$, $B'E$, $C'F$ 引其垂直等分線皆過 OH 之中點 N (2 編. 理 20 系 3); (1)

然 $XA'D$ 爲直角三角形,故 $A'D$, DX 之垂直等分線交於斜邊 XA' 之中點〔2 編. 理. 20 (一)〕; 又因 $XH \mathbin{\underline{\parallel}} OA'$ (例二), 而 XA', OH 互交於其中點〔2 編. 理. 27 (三)〕;

故 XD 之垂直等分線亦過 OH 之中點; (2)

同理,可證 YE, ZF 之垂直等分線皆過 OH 之中點; (3)

又因 $A'Z = YH$〔2 編. 理 20 (二)〕$= YF$ (2 編. 理 28 系 5), $A'Y = ZH = ZD$, 且 $A'Y \parallel ZF$, $YZ \parallel A'D$, 而 $A'YFZ$ 及 $A'YZD$ 皆爲二等邊梯形;

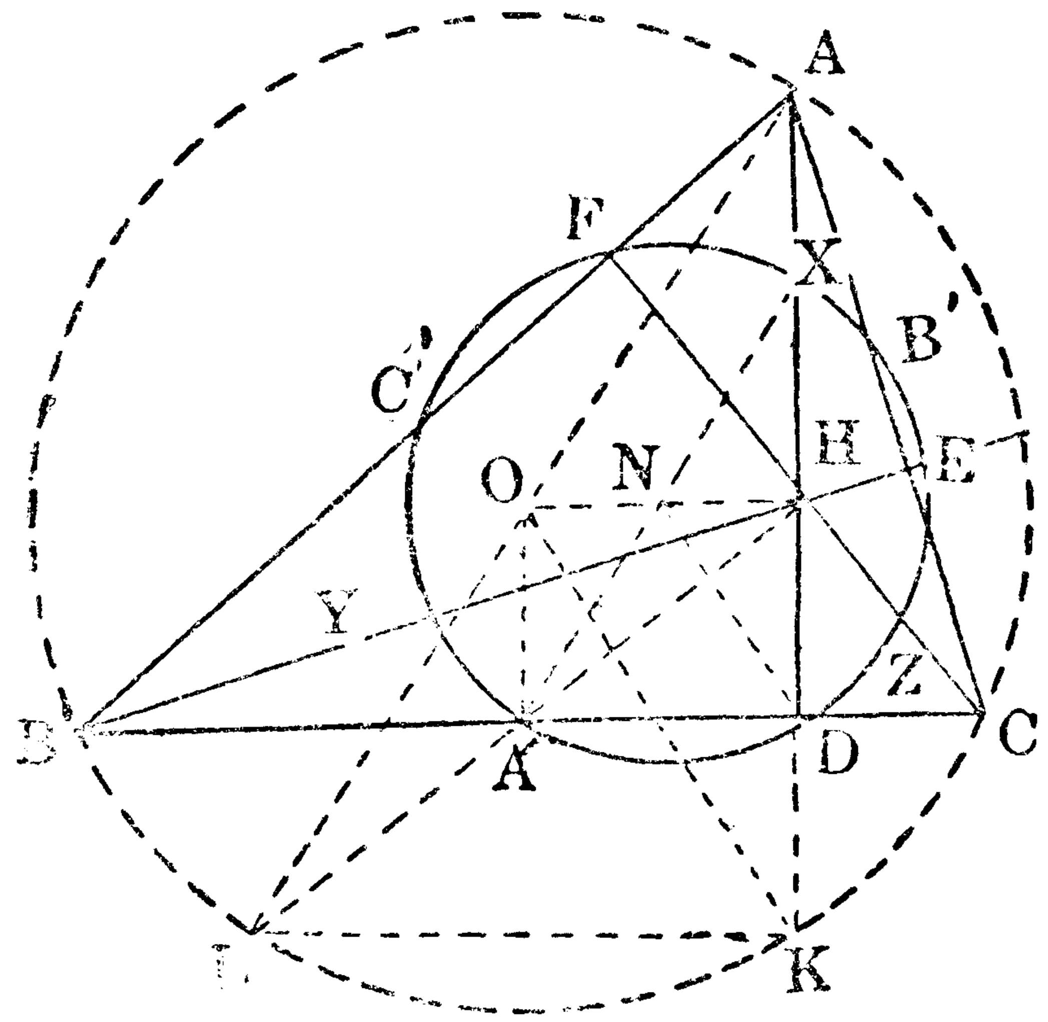
由是 $A'Y$ 及 ZF 共有一垂直等分線, $A'D$ 及 YZ 亦然 (2 編. 理 27 系 3),

故 $A'Y$, YZ, ZA', 之垂直等分線皆過 N (2 編. 理. 31); (4)

$\therefore$ $NX = ND = NA'$〔(1) 及 (2)〕$= NY$〔(4)〕$= NE = NB'$〔(1) 及 (3)〕

$= NZ$〔(4)〕$= NF = NC'$; (定理十八)

故 $A', B', C', D, E, F, X, Y, Z$ 九點共圓(定理16).



〔第二證〕 作 $\triangle ABC$ 之外接圓 O,名其半徑為 R 聯 OA, OH, OA',延長 AD, AO,各會⊙O於 K, L. OH 之中點為 N. 聯 OK, ND, NA', NX, LK, HL

因 D 為 HK 之中點,而 $DA'//KL$. O 為 AL 之中點,而 $OA'//AH$〔例一,2編.理.15系6〕,

故 OA', DA' 之交點 A' 當為 HL 之中點〔2編.理.20(一)〕;

由是 $NA'=\frac{1}{2}OL=\frac{1}{2}R$〔2編.理20(二)〕;

同理,可證 $NB'=\frac{1}{2}R$, $NC'=\frac{1}{2}R$;

次,因 N 及 D 各為 OH 及 HK 之中點,而 $ND=\frac{1}{2}OK=\frac{1}{2}R$〔2編.理.20(二)〕;

同理,可證 $NE=\frac{1}{2}R$, $NF=\frac{1}{2}R$;

又,因 N 及 X 各為 OH 及 HA 之中點而 $NX=\frac{1}{2}OA=\frac{1}{2}R$;

同理,可證 $OY=\frac{1}{2}R$, $OZ=\frac{1}{2}R$;

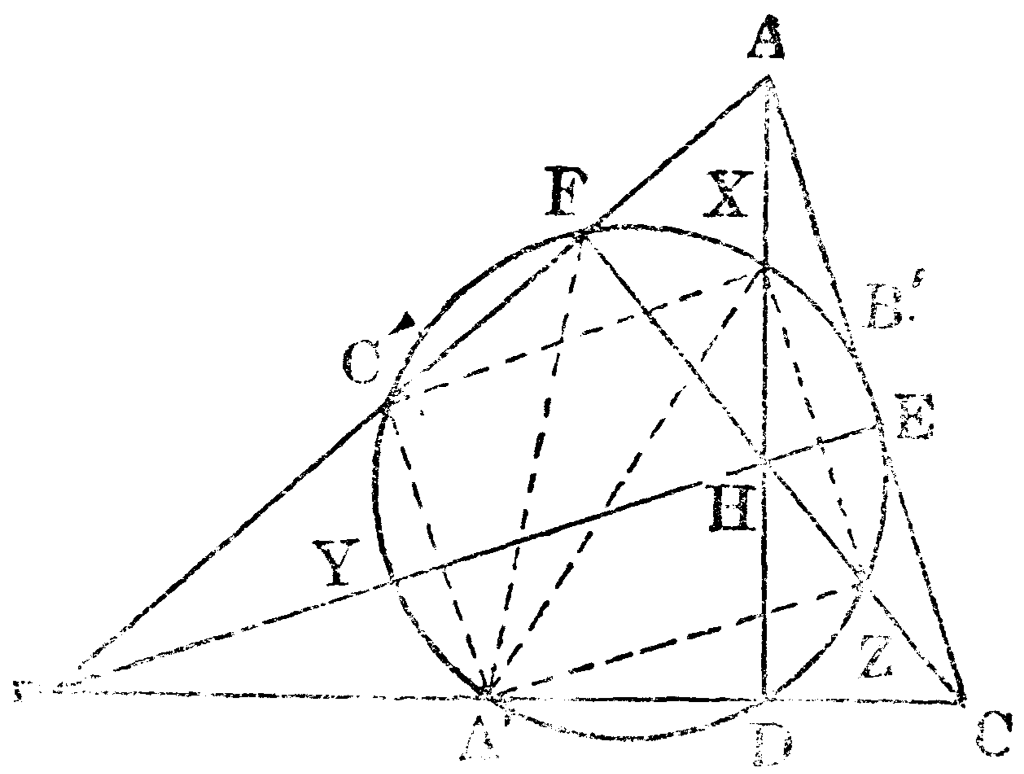
故 $A', B', C', D, E, F, X, Y, Z$ 共圓,此圓之中心爲 OH 之中點 N, 半徑爲 $\frac{1}{2}R$.

〔注意〕 此所共之圓名曰九點圓(Nine-Points Circle)爲 Fenerbach 氏所發見.

系一. 三角形之外心,垂心,及九點圓心共線而九點圓心等分外心及垂心之距離.

系二. 九點圓之半徑等於外接圓半徑之半.

〔第三證〕 聯 $A'X$, 則 $\measuredangle A'DX=R_{\measuredangle}$;



聯 $A'F$, FX, 則因 $A'F=A'C$ 而 $\measuredangle A'FC=DCH$, 因 $FX=XH$ 而 $\measuredangle CFX=XHF=CHD$, 故

$\measuredangle A'FX=A'FC+CFX=DCH+CHD=R_{\measuredangle}$;

同理,可證 $\measuredangle A'EX=R_{\measuredangle}$,

聯 $A'C'$, $C'X$, 則因 $A'C' \mathrel{\underline{\underline{\parallel}}} \frac{1}{2}CA$, $C'X \mathrel{\underline{\underline{\parallel}}} \frac{1}{2}BH$, 故

$$\measuredangle A'C'X=BEA=R_{\measuredangle}$$

同理,可證 $\measuredangle A'B'X=R_{\measuredangle}$,

聯 $A'Z$, ZX, 則因 $A'Z \perp\!\!\!\!\parallel \frac{1}{2}BH$, $ZX \perp\!\!\!\!\parallel \frac{1}{2}CA$, $\therefore \measuredangle A'ZX=BEA=R_{\measuredangle}$;

同理,可證 $\measuredangle A'YX=R_{\measuredangle}$,

故 A', B', C', D, E, F, X, Y, Z 九點共在以 $A'X$ 作直徑之圓上〔理. 21. 系〕.

43. 作圖題中所設條件之數.

解作圖題,有若解代數應用問題然:所設條件不足則不定;不獨立亦不定;過多或不合理則不成立. 不定者解答可有無數,不成立者無一解答. 今舉定各種圖所需獨立條件之數如下:

n 邊形 $2n-3$;	三角形 3;	二等邊三角形 2;
直角三角形 2;	正三角形 1;	平行四邊形 3;
矩形 2;	菱形 2;	不平行四邊形 5;
正方形 1;	梯形 4;	五角形 7;
圓 3;		

44. 作圖方法一. 軌跡交截法.

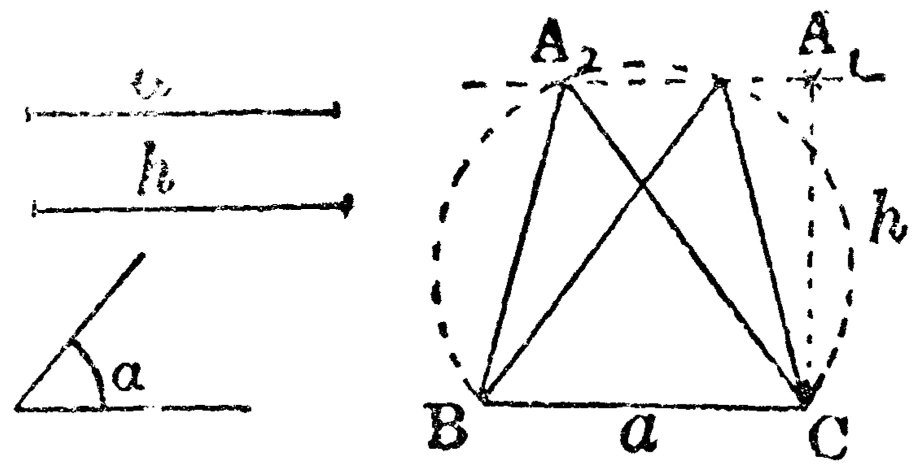
此類方法能用之題甚多,所困難者初學之人軌跡之智識薄弱,解題遂多捍格耳.

凡作圖題能歸於決定一點者,皆可用軌跡交截法解之. 其法,先從所設諸條件中取去一個,則問題不定,適合其餘諸條件之點爲動點而可得某一軌跡. 於是歸還前所去

之條件而別去一個,則又得一軌跡. 此二軌跡之交點卽爲所求之點. 交點之數多,則解答之數亦多. 若不得交點,則題無解答.

例一. 設三角形之底 a, 高 h, 頂角 α. 作此三角形.

〔解法〕 作 $AB=a$. 以 AB 爲弦在其上作弓形令含 $\measuredangle\alpha$ (題7), 則此弓形弧爲頂點之第一軌跡.



再作 BC 之平行線令與 BC 之距離爲 h (題2系1), 則此線爲頂點之第二軌跡. 此二軌跡之交爲所求頂點. (學者自證之)(討論略,可視上文).

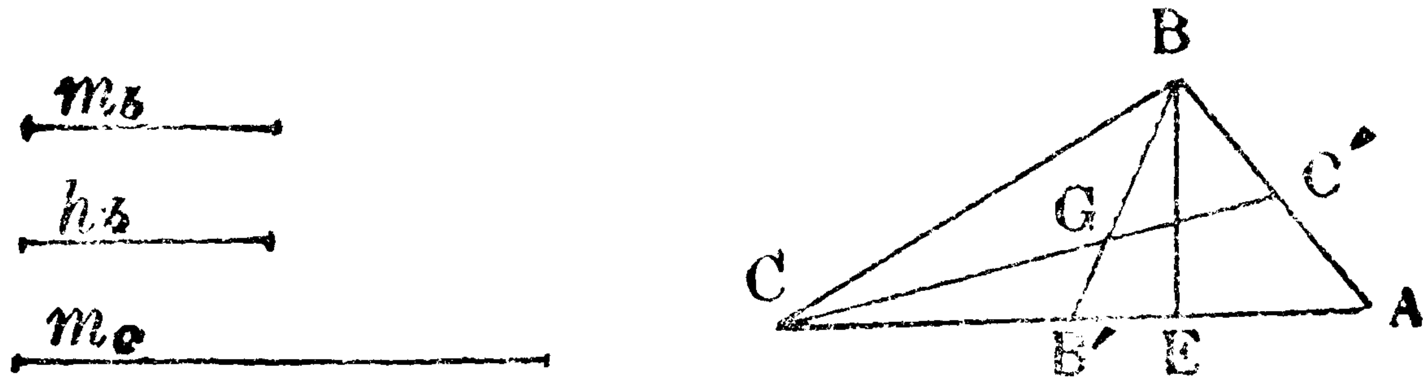
45. 作圖方法二. 解析法

作圖與證題相同,亦可用解析法考察. 法先假定所求之圖爲可作者,任作一圖視之爲所求之圖,乃作補助之直線或圓,精密考察圖中已知者及求作者之關係,至發見解法,或可歸之已解之問題,是爲解析. 本解析所得倒退而作出解法,是曰綜合. 前者明進行之路,後者實作所求之圖,不可缺一.

解析法無題不可用,惟最簡者不需之.

教科書中,一題既經解析,往往略去解法或證;此係欲省篇幅而然,學者不宜做效.

例二. 設三角形中對於一邊之中線 m_b 及高 h_b, 又設對又一邊之中線 m_c. 作此三角形.



〔解析〕 假定 ABC 為所求三角形.

已知中線 $BB'=m_b$, $CC'=m_c$, 及高 $BE=h_b$.

直角三角形 $BB'E$ 中已知其二邊,故此形能作出,而 B 及 CA 之位置皆可定;

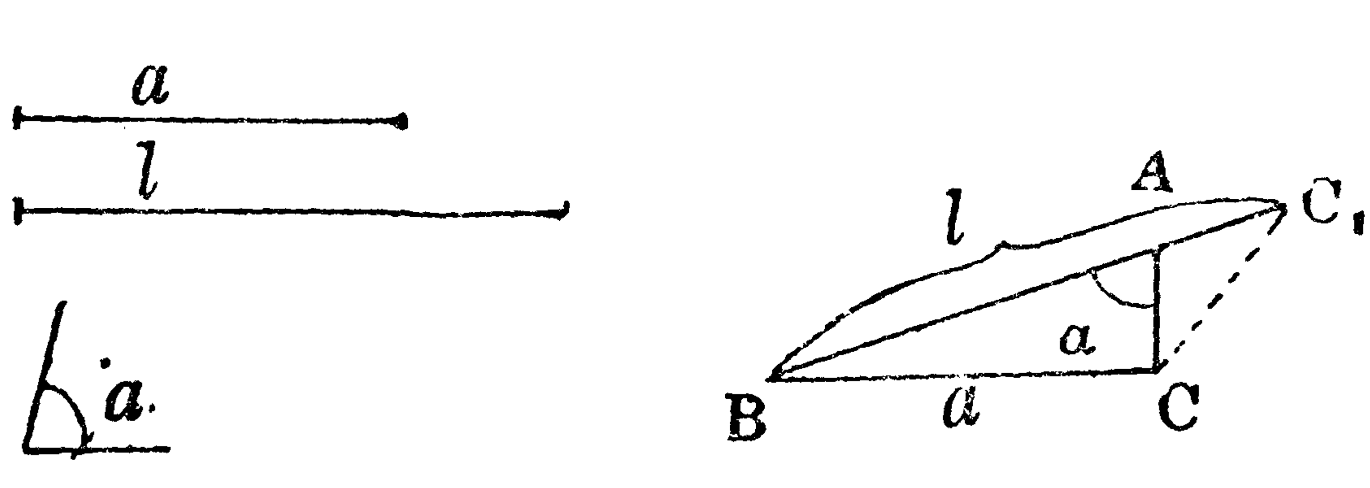
G 為重心,則 $BG=\frac{2}{3}BB'=\frac{2}{3}m_b$, 故 G 之位置可定;

$GC=\frac{2}{3}m_c$, 故 C 之軌跡為一圓,因 CA 之位置已定,故 C 點可定;

$GC'=\frac{1}{3}m_c$ 故 C'之位置可定,由是 BC' 一定而 A 可得矣.

解法及證學者可自作之.

例三. 設三角形底 a, 頂角 α, 及他二邊和 l, 作此三角形.



〔解析〕 假定 ABC 為所求三角形. 延長 BA 至 C_1 令 $BC_1=l$, 則 $AC_1=AC$,

而 $\measuredangle C_1 = ACC_1 = \frac{1}{2}BAC = \frac{1}{2}a$;

又因 $BC = a$, 故 C_1 之軌跡為一弓形弧(理21);

$BC_1 = l$, 故 C_1 之第二軌跡為一圓周(理16); 二者之交得 C_1.

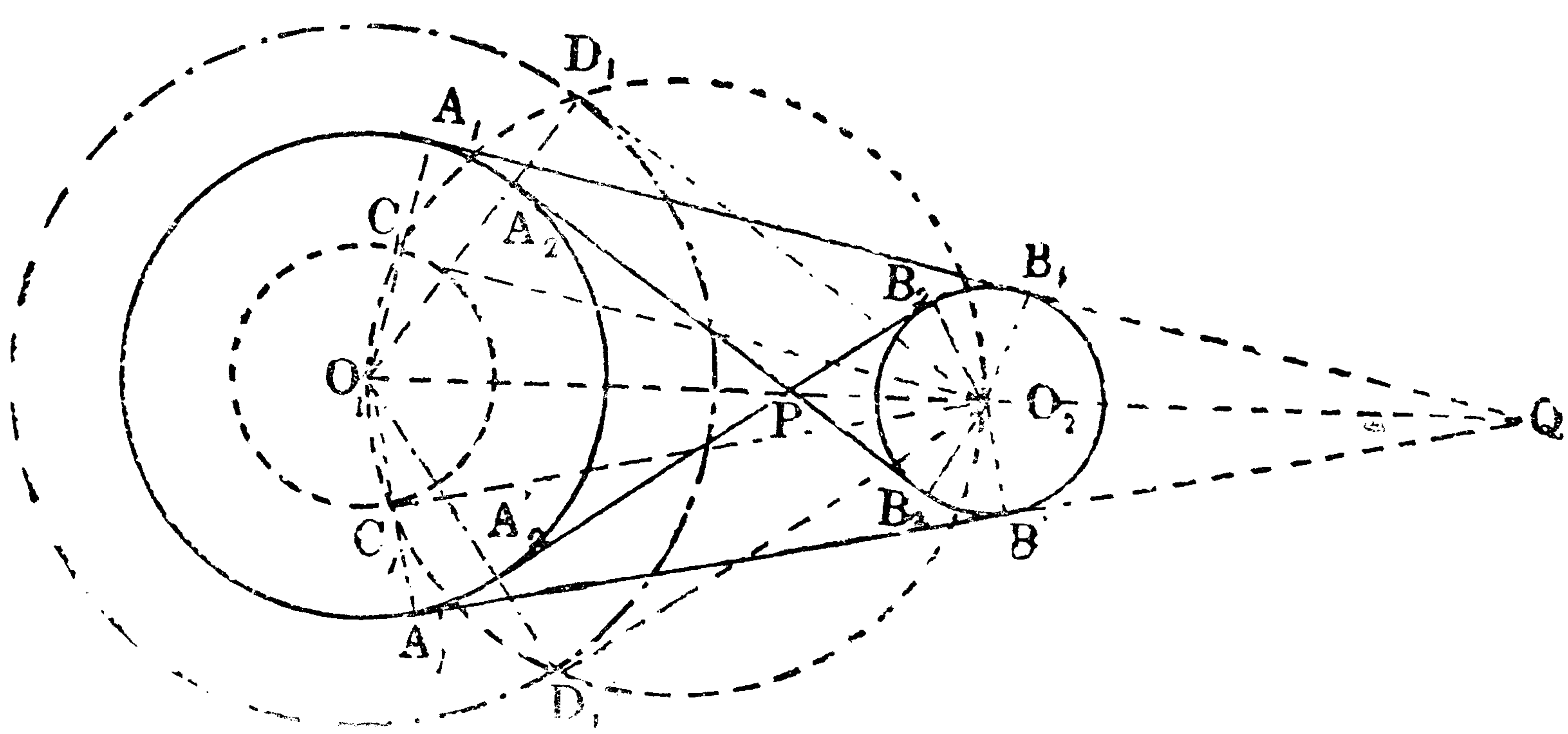
於是 $\triangle BCC_1$ 可作出;

因 $\measuredangle ACC_1 = C_1$, 故 CA 亦能作出(題2).

解法及證學者可自作之.

46. 問題九.

設二圓,作其內外公切線.



〔解析〕　假定問題可解. A_1B_1 為 ⓢO_1, O_2 之外公切線, A_2B_2 為內公切線,則 O_1A_1, O_2B_1 皆垂直於 A_1B_1, 而 O_1A_2, O_2B_2 皆垂直於 A_2B_2, 故

$$O_1A_1 // O_2B_1, \qquad O_1A_2 // O_2B_2;$$

從 O_2 引 B_1A_1 及 B_2A_2 之平行線,各交 O_1A_1 及 O_1A_2 之延線於 C_1 及 D_1, 則 $O_2C_1A_1B_1$ 及 $O_2D_1A_2B_2$ 皆為矩形,而

$$\measuredangle O_1C_1O_2=O_1D_1O_2=R\measuredangle,$$

今設ⓈO_1, O_2之半徑各爲r_1, r_2,則$O_1C_1=r_1-r_2, O_1D_1=r_1+r_2$,故以$r_1-r_2$及$r_1+r_2$爲半徑畫⊙$O_1$之同心圓,則$O_2C_1, O_2D_1$各切一圓.

由是得解法如下:

〔解法〕　以二圓半徑之差及和作半徑畫大圓之同心圓,從小圓之中心作此二圓之切線(問題八);

引所畫二圓之切點半徑,在大圓周上得交點,由此交點作大圓之切線,得所求公切線.

〔證〕　學者可自證之.

〔討論〕　名O_1, O_2之距離爲d,則從§40,知$d>r_1-r_2$, $d=r_1-r_2$, $d<r_1-r_2$時外公切線各有二個,一個,及無;$d>r_1+r_2$, $d=r_1+r_2$, $d<r_1+r_2$時,內公切線各有二個,一個,及無.故

兩圓互在外,則有外公切線 2,內公切線 2;

兩圓外切,則有外公切線 2,內公切線 1;

兩圓相交,則有外公切線 2,無內公切線;

兩圓內切,則有外公切線 1,無內公切線;

一圓全在又一圓內,則內外公切線皆無.

兩圓相等者,以r_1-r_2爲半徑之同心圓縮成一點O_1而O_1A_1, O_1A_1'皆垂直於中心線O_1O_2,此外與上全同.

系. 相離二圓內外公切線交點與二中心共線.

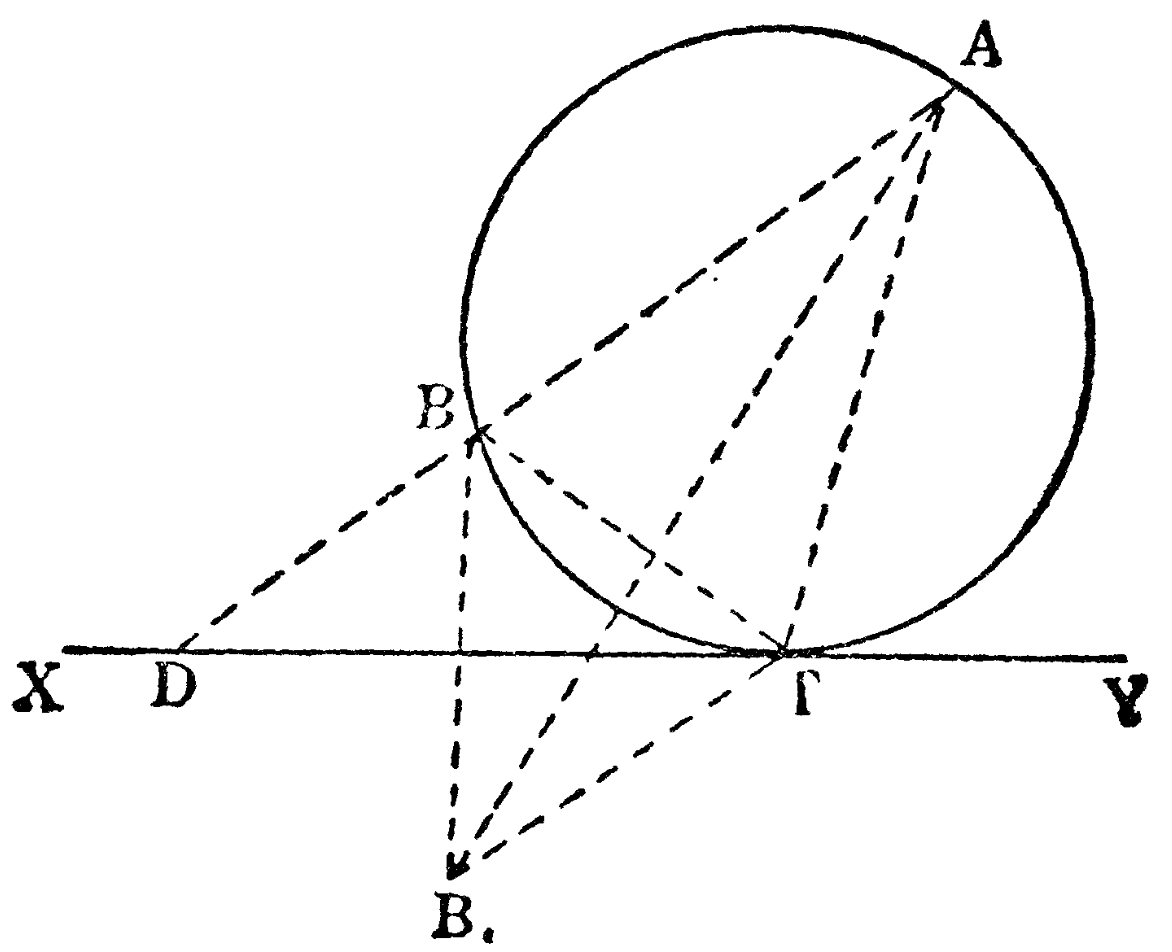
如內公切線交於P,外公切線交於Q,則圓O_1及O_2皆在$\measuredangle A_2PA_2'$之等分線上,故O_1, O_2, P共線;又O_1, O_2皆在$\measuredangle A_1QA_1'$之等分線上,故O_1, O_2, Q共線;由是從幾何公理三(b)知P, Q, O_1, O_2共線.

47. 作圖方法三. 變更圖形法.

用以前所言半軸轉,半旋轉,平行移動等諸運算,可變更圖中一部分之位置而得一新圖,由此新圖解析,可得解法.

就切於圓或切於直線之圓,恆用一種特別之平行移動法,使一圓之半徑漸次縮小而至於O,同時切此圓之直線方向不變,切此圓之圓中心位置不變. 如是,則題中一切條件可不缺而一圓化成一點,題可化成較簡之題.

例一. 設二點A, B及一直線XY.作一圓,命過A, B,而切於XY.



〔解析〕　以 XY 爲軸取 B 之對稱點 B_1, 則 B_1 之位置一定而 AB_1 之大小及位置皆一定;

假定所作圓切 XY 於 T, 聯 AB 交 XY 於 D, 則 $\measuredangle XDA$ 一定, 而 $\measuredangle B_1TD = DTB = DAT$;

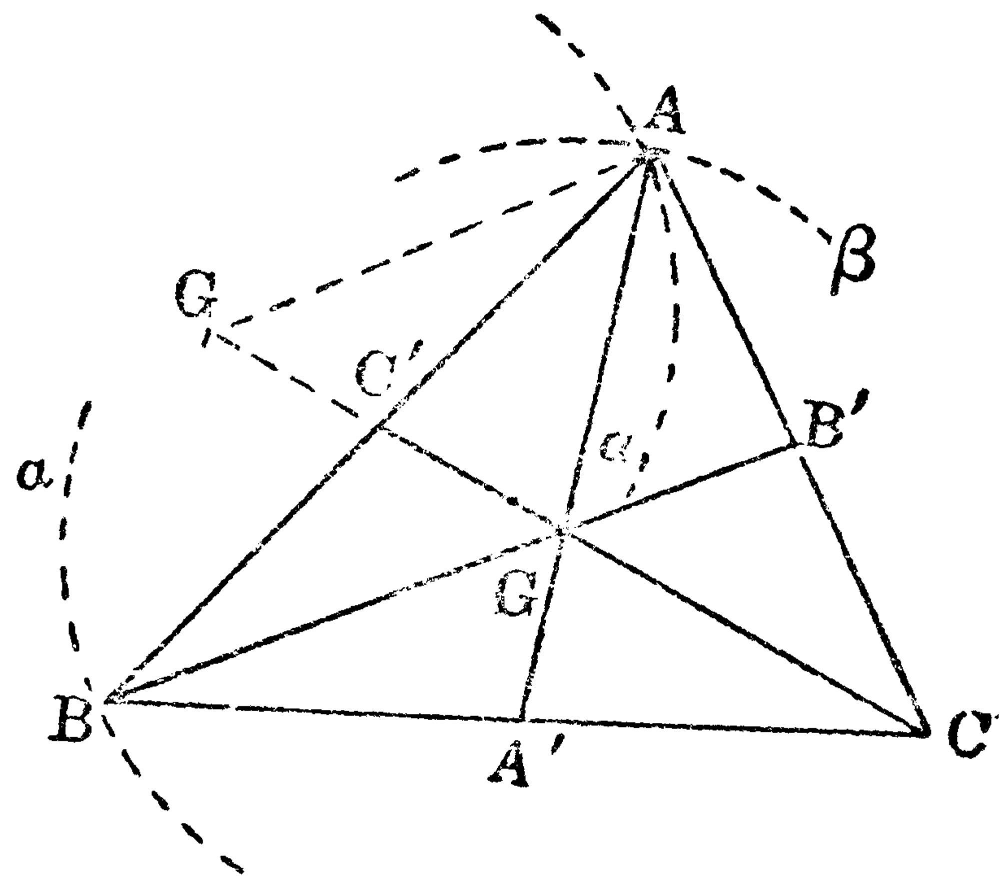
由是 $\measuredangle B_1TA = B_1TD + DTA = DAT + DTA = XDA$;

故 B_1A 及 $\measuredangle B_1TA$ 皆一定而 T 之軌跡爲一弓形弧(理 21);

因 T 又在 XY 上, 故 T 可定;本題乃歸於過三點 A, B, T 作圓(題5).

證及討論學者可自爲之.

例二. 設三角形中對三邊之中線 m_a, m_b, m_c. 作此三角形.



〔解析一〕　設 $\triangle ABC$ 爲所作三角形,中線 $AA' = m_a$, $BB' = m_b$, $CC' = m_c$, G 爲重心先定 CC' 之位置,於是 G 之位置可定;

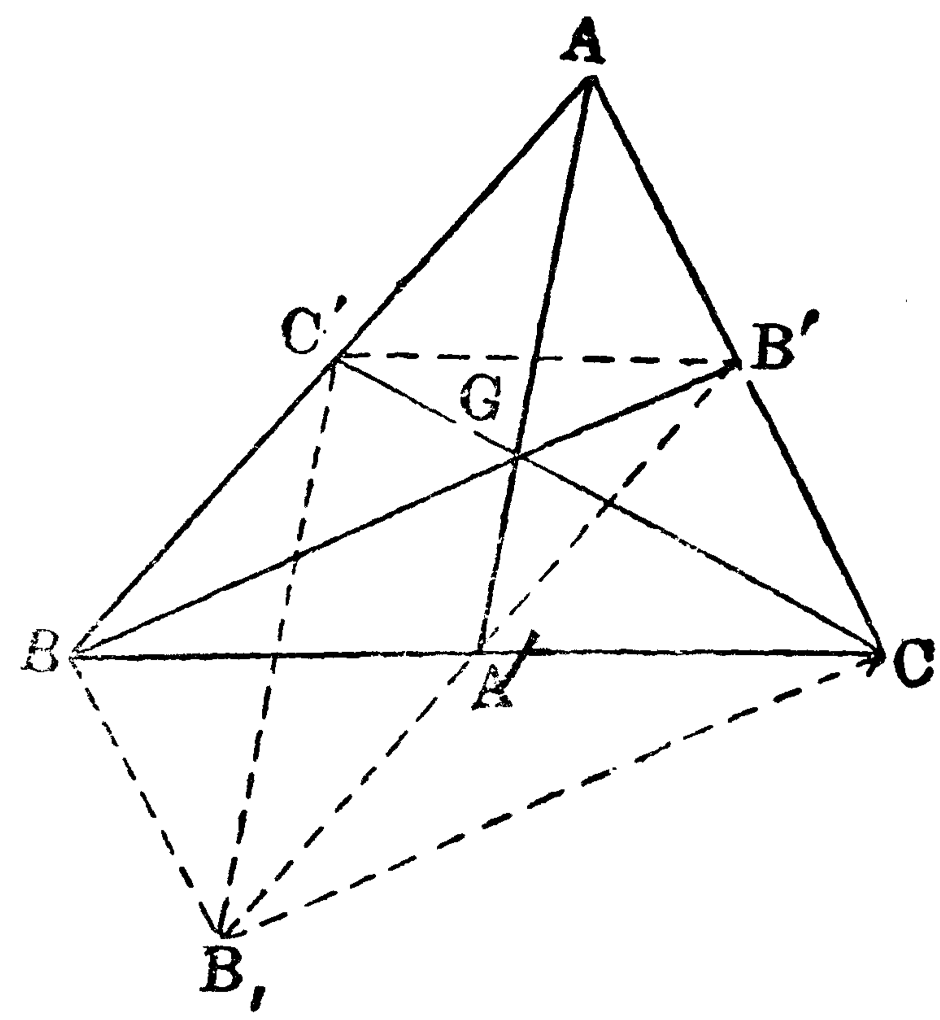
以 G 爲中心 $\frac{2}{3}m_b$ 爲半徑規弧 α, 得 B 之軌跡;以 C' 作旋轉中心行半徑旋轉,則 G 至 G_1, B 至 A, $\frown\alpha$ 至 $\frown\alpha_1$,

因 C', G_1 皆定,而 $\frown\alpha$ 可作出,故 $\frown\alpha_1$ 可作出,而爲 A 之第一軌跡;

又以 G 爲中心 $\frac{2}{3}m_a$ 爲半徑規弧 β, 得 A 之第二軌跡;

二軌跡定 A. 因 $C'B=AC'$, 故由此可定 B

〔解析二〕 以 $B'B$ 平行移至 CB_1, 則 $CB_1 \mathrel{\underline{\parallel}} B'B$ 而 $BB_1 \mathrel{\underline{\parallel}} B'C \mathrel{\underline{\parallel}} AB'$, 故 ABB_1B' 爲平行四邊形而 $B_1A' \mathrel{\underline{\parallel}} C'A$;



由是 $C'B_1 \mathrel{\underline{\parallel}} AA'$;

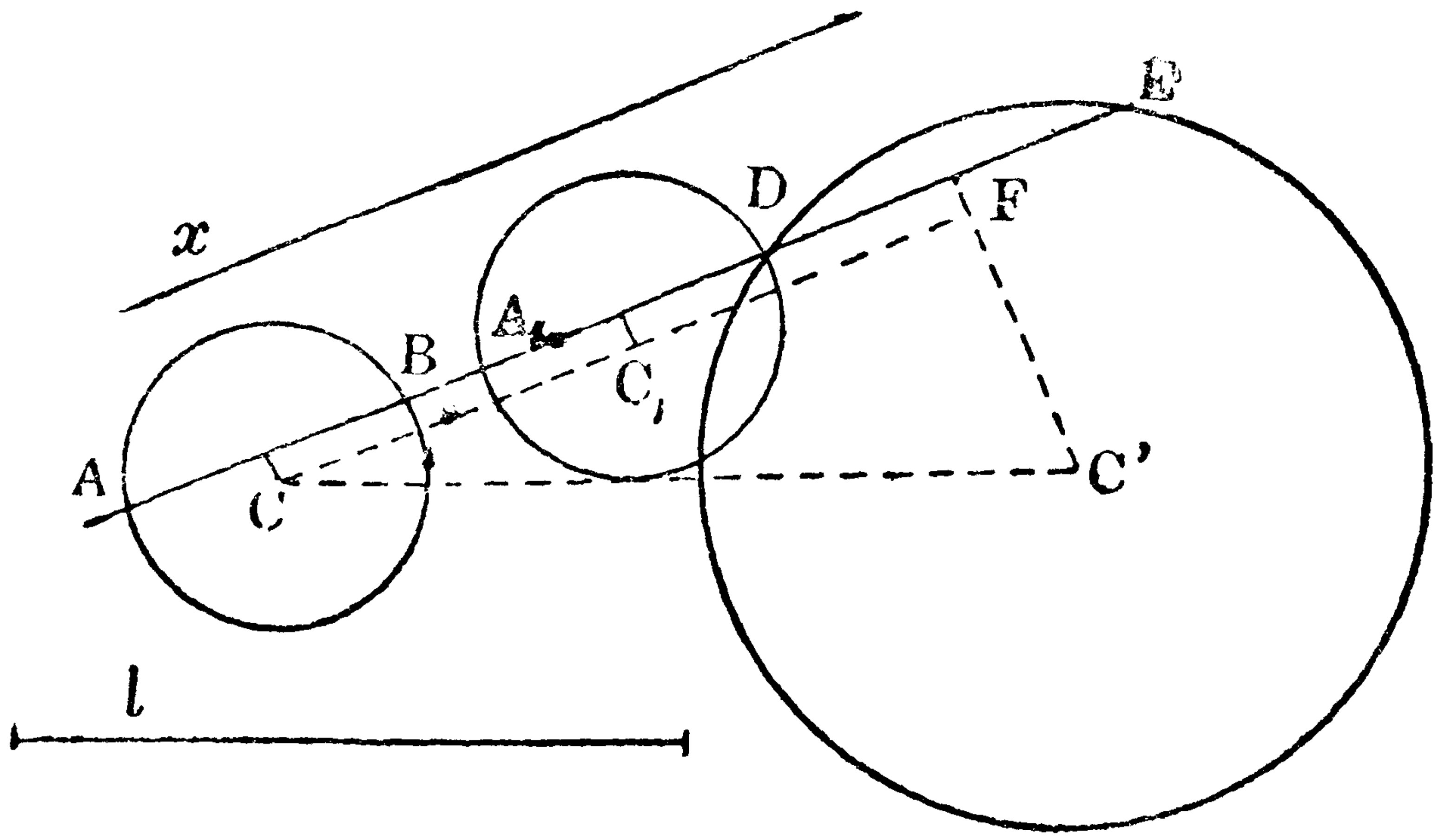
故 $\triangle CC'B_1$ 三邊各爲 m_a, m_b, m_c 而此形可作;

次,因 BC, $B'B_1$ 互相等分而 A' 爲 B_1B' 之中點;

因 B_1B' 過 BC 中點而平行於 BC', CB 過 B_1B' 中點而平行於 $B'C'$, 故 CB. B_1B' 爲 $\triangle CC'B'$ 之二中線而 A' 爲此三角形之重心,可以作出;

由是 $A'A'$ 可作, B_1B' 可作,且 CB 之位置可定,而本題又可解矣.

此二解析所得之解法及證學者可自爲之.



例三. 作一直線令有一定方向 x 而爲二定圓 C, C' 所割二弦之和等於定長 l.

〔解析〕 假定 $ABDE$ 爲所作之直線. 以 $\odot C$ 平行移至 $\odot C_1$ 令 B 合於 D, A 落於 A_1, 則 $A_1E=l$;

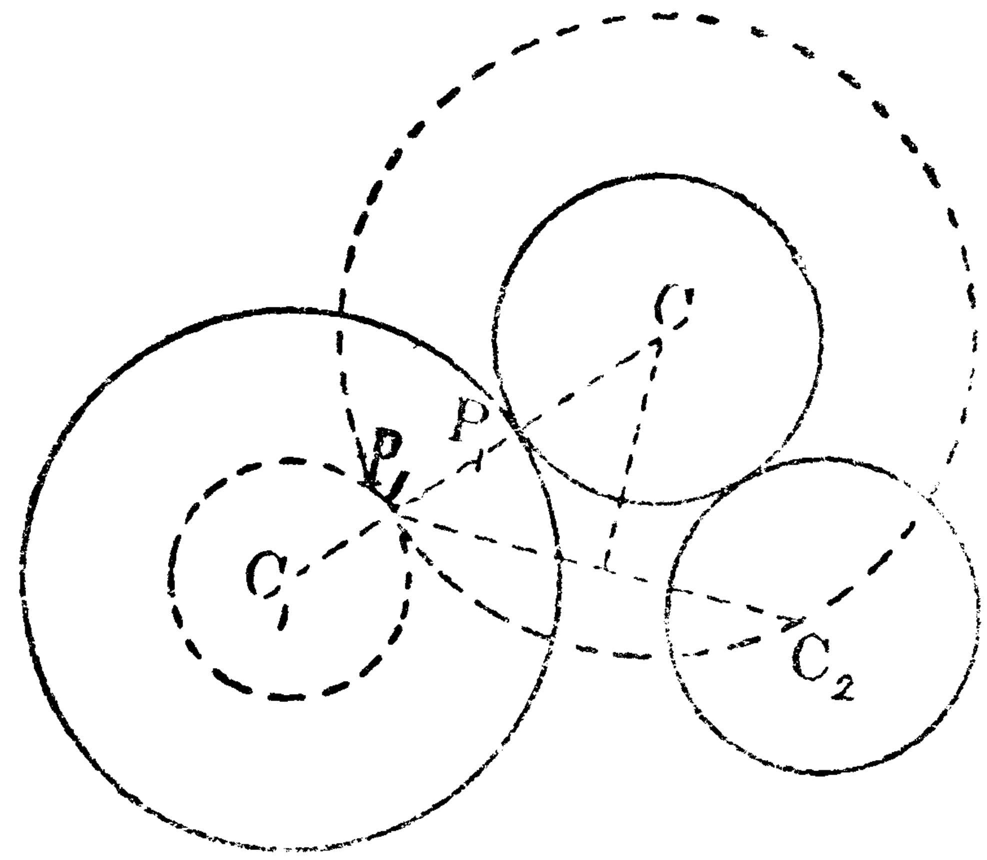
從 C' 引 DE 之垂線 $C'F$, 從 C 引 AE 之平行線 CF, 則在直角三角形 $CC'F$ 中, CC' 之位置大小皆一定, $C'F$ 之方向一定,故此三角形可作出;

因 $FC_1=\frac{1}{2}l$ 而 C_1 可定,由是可作 $\odot C_1$ 而得 D; 本題之解法得矣.

解法及證學者自爲之.

例四. 作一圓 C, 令其切一定圓 C_1 於其上之一定點 P, 且切又一定圓 C_2.

〔解析〕 以 $\odot C_2$ 平行移動縮成一點 C_2, 則 $\odot C$ 平行擴



張至過 P_1 及 C_2, 而 $\odot C_1$ 平行縮小至過 P_1;

設 ⓈC_1,C_2 之半徑各為 r_1, r_2, 則 $C_1P_1=r_1-r_2$, 而 P 在 C_1P 上, 故 P_1 可定;

過 P_1,C_2 之圓其中心在 P_1C_2 之垂直等分線上,同時又在 C_1P 之延線上,故所求圓心 C 可定.

解法,證,及討論學者自為之.

48. 記號之續.

特別點及線分恆以下諸文字表之,以省言語之繁冗.

A, B, C	三角形之角頂.	a, b, c	對 A, B, C 之邊
A', B', C'	a, b, c 之中點.	D, E, F	a, b, c 上之垂足.
I	內心.	X, Y, Z	內接圓之切點.
I_1, I_2, I_3	旁心.	$X_1, Y_1, Z_1; X_2, Y_2, Z_2; X_3, Y_3, Z_3$	
H	垂心.	傍接圓在 a, b, c 上切點.	
G	重心.	O	外心.

s	半周$(2s=\overline{a}+\overline{b}+\overline{c})$,	R	外接圓半徑.
r	內接圓半徑.	r_1, r_2, r_3	旁接圓半徑.
h_c, h_b, h_c	三垂線.	m_c, m_b, m_c	三中線.
u_a, u_a, u_c	三等分線.	$\triangle$	三角形面積.
C	圓周.	N	九點圓中心.

例題十一　(定理)

(1)　一圓內非直徑之二弦決不能互相等分.

(2)　過圓內一定點之諸弦中以垂直於過此點之直徑者爲最小.

(3)　二等邊三角形頂角等於正三角形一外角,則其外接圓之半徑等於其等邊之一.

(4)　AB 爲定圓 C 之弦.延長 AB 至 D 令 $BD=CB$, 聯 DC 延長之,交 $\odot C$ 於 E, 則 $\measuredangle BCD=\frac{1}{3}ACE$

(5)　從 $\triangle ABC$ 外心 O 至 BC 引垂線 OK, 則 $\measuredangle BOK$ 或等於 $\measuredangle A$, 或等於 A 之補角.

(6)　大小二圓 C_1, C_2 交於二點 A, B, 在小圓 C_2 上取一點 L, 使 BL 等於小圓半徑.聯 LA 延長之交大圓 C_1 於 E, 則 EL 等於大圓之半徑.

(7)　正五邊形 $ABCDE$ 之二對角線 AC, BE 交於 F, 則 $AC=AB+BF$.

(8) 從正三角形一角頂至對邊外劣弧上任意一點之距離等於此點與他二頂點距離之和.

(9) 圓內接四邊形二之對角線直交,則過其交點所引一邊之垂線等分對邊.

(10) 延長圓內接四邊形 $ABCD$ 之二雙對邊至相交,若 AB, DC 交於 E; BC, AD 交於 F; 而 B, E, F, D 共圓;則 AC 爲第一圓之直徑, EF 爲第二圓之直徑.

(11) A, B 爲 Ⓢ C_1, C_2 之交點,今從 $\odot C_1$ 上任意點 P 引二直線 PA, PB, 各交 $\odot C_2$ 於 D, E, 則 $\frown DE$ 之大小一定.

(12) 從 $\frown BC$ 之中點 A 任意引弦 AD, AE, 各交弦 BC 於 F, G, 則 D, E, G, F 共圓.

(13) 圓內接四角形一外角之等分線與其內對角之等分線會於圓周上.

(14) 從所設圓心 C 至任意直線 XY 引垂線,從其垂足引圓之任意割線割圓周於 P 及 Q, 從 P 及 Q 各引圓之切線,各交 XY 於 D 及 E, 則 $AD=AE$

(15) 一直線與圓內接四角形一雙對邊之交角相等,則與又一雙對邊之交角亦等,而與二對角線之交角亦等.

(16) 圓內接四角形任意二邊與一對角線所成四個三角形之垂心爲又一四角形之四個角頂,此新四角形與原四角形全等.

(17)　$\triangle ABC$ 垂心 H 與邊 BC 中點 A' 及從 A 所引外接圓直徑之又一端共線.

(18)　三角形一角之等分線與其對邊之垂直等分線交於形外;從其交點至角之二邊引垂線,則二個垂足一在邊上,一在邊之延線上.

(19)　$\odot O$ 外接於 $\triangle ABC$, P 爲 $\frown BC$ 之中點.從 P 至 AB 引垂線 PQ, 至 AC 引垂線 PR, 則

$AQ=AR=\frac{1}{2}(AB+AC)$, $BQ=CR=\frac{1}{2}(AB\sim AC)$.

(20)　在前題中,若 P 爲 $\frown BAC$ 之中點,則

$$AQ=AR=\tfrac{1}{2}(AB\sim AC),\quad BQ=CR=\tfrac{1}{2}(AB+AC).$$

(21)　過二圓公共一點引任意割線,從二圓中心至此割線引垂線,則其二垂足之距離等於割線在二圓周間線分之半.

(22)　從三角形外一點至各邊或延線引垂線,若由此所得三個垂足共點,則此點在三角形之外接圓周上.

(23)　三角形之外心,重心,垂心,九點圓中心共線.

(24)　$ABCD$ 爲圓內接四邊形,其二對角線 AC, BD 交於 E, 從 E 引 $\triangle ABE$ 外接圓之切線,則此切線平行於四邊形之一邊.

(25)　A, B 爲一圓周上二定點, M 爲周上任意點,從 A, B, M 各引圓之切線,前二切線交於 C, 從 C 引後一切線之

平行線 l, AM, BM 各交 l 於 P 及 Q, 則 PQ 之長一定.

(26) 二圓外切於 T, 其外公切線之切點為 A 及 B, 則 $\measuredangle ATB$ 為直角.

(27) 過相交二圓之一交點 E 引任意二割線 APB, CPD, 聯線 AC, BD 交於 E, 則 $\measuredangle E$ 之大小一定.

(28) 從半圓周上任意一點至直徑引垂線,切此半圓周及垂線作任意圓,則其二切點之聯線必過直徑之一端.

(29) 三角形內心,一個旁心及二個角頂共圓,圓之中心為此內心旁心之聯線與外接圓 O 之交點.

(30) 三角形二旁心與二個角頂共圓,圓之中心為此二旁心聯線與外接圓 O 之交點.

(31) 三角形之外接圓為以三個旁心作角頂所成三角形之九點圓.

例題十二 (軌跡定理)

(1) A, B, C, D 順次為共線四點,而 $AB=CD$. P 為一動點, $\measuredangle APB$ 恆等於 $\measuredangle CPD$. 求 P 之軌跡.

(2) 一動平行四邊形,其一角頂合於一定三角形 ABC 之角頂 A, 此角二邊各與 AB, AC 相重, A 之對角頂在 BC 上運動求其二對角線形點之軌跡.

(3) 一平行四邊形周圍一定,一角之大小及位置亦

一定,則此角對角頂點之軌跡爲一線分.

(4)　一動點與交相二直線距離之差一定,則此動點之軌爲八個半射線,此諸半射線爲一矩形各邊之延線(參觀理22).

(5)　一定長之線分兩端各在直交二定直線之一上運動.求其中點之軌跡.

(6)　一動線分方向及長短皆一定,其一端沿一定圓周運動求其他端之軌跡.

(7)　圓內一動弦(或其延線)恆過一定點求此動弦中點之軌跡.

(8)　從一定點至一組同心圓引諸切線,求此諸切線中點之軌跡.

(9)　AB 爲一弓形弦,P 爲弧上之一動點.聯 AP,延長至 Q,令 $PQ=PB$.　求 Q 之軌跡.

(10)　$\measuredangle BAC$ 之位置及大小皆一定,B 及 C 爲二動點,各在此角之一邊上而 $AB+AC=$ 定長 l.　求 $\triangle ABC$ 外接圓中心之軌跡.

(11)　在題(10)中改設 $AB\sim AC=$ 定長 m,則所求之軌跡若何?

(12)　在題(10)中改求 BC 中點之軌跡.

例題十三 (作圖題)

(1) 設二平行線,一定點,及一定長. 作直線令過定點,且夾於二平行線間之部分為定長.

(2) 在$\triangle ABC$邊AB上求一點P,令從P至AC之距離等於BP.

(3) 作一直線令與$\triangle ABC$一邊BC平行,而其介於他二邊間之部分$PQ=BP+CQ$.

(4) 在前題中所設條件改作$PQ=BP\sim CQ$,作此直線.

(5) 設二點A, B分居一所設直線XY之兩旁;在XY上求一點P,令$\measuredangle APX=BPX$.

(6) 設一角A及角內一點P,過P作一直線,令與角之二邊各交於B, C,而$BP=2PC$.

(7) 作一正方形令其一邊與一對角線之和等於一定長.

作三角形,令合於以下各題中所設之條件〔(8)—(27)〕

(8) b, c, m_a.

(9) a, m_b, m_c.

(10) $\measuredangle A$, c, h_a,

(11) $\measuredangle B$, $\measuredangle C$, m_a.

(12) $\measuredangle B$, $\measuredangle C$, m_b.

(13) $\measuredangle B$, $\measuredangle C$, h_a

(14) $\measuredangle B$, $\measuredangle C$, h_b.

(15) a, h_a, m_b.

(16) a, h_a, R.

(17) $\measuredangle$, $\measuredangle B$, $b+c$.

(18)　a, $\measuredangle B$, $b+c$.　　(19)　a, $\measuredangle B$, $b\sim c$.

(20)　a, $\measuredangle B\sim\measuredangle C$, $b\sim c$.　　(21)　a, $\measuredangle A$, m_a.

(22)　a, $\measuredangle A$, $b\sim c$.　　(23)　$\measuredangle B$ $\measuredangle C$, s.

(24)　$\measuredangle A$, s, h_a.　　(25)　h_a, m_a, v_a.

(26)　D, E, F 之位置.　　(27)　I_1, I_2, I_3 之位置.

(28)　作一三角形令內接於一所設圓而與一所設三角形互相等角.

(29)　過相交二圓一交點作一直線,令二圓在此線所截之二弦相等.

(30)　過相交二圓一交點作一線分,令其兩端各在一圓周上而爲最大.

(31)　作一圓,令過一定點,且切一定直線於其上之一定點.

(32)　作一圓,令其半徑爲定長,且切一定直線及一定圓.

(33)　以一定點爲中心,作一圓,令與一定圓之交角爲直角.

(34)　作一圓,令切一定直線於其上一定點,且切一定圓.

(35)　以三個所設點爲中心作互相切之三圓.

大同大學叢書叢刊編輯部

胡敦復　朱香晚　華綰言　郁少華

葉上之　吳在淵　曹梁廈　胡憲生

胡明復　胡剛復　葉元龍

中華民國十五年二月初版

中華民國十九年二月四版

大同大學叢書

近世初等幾何學二冊

(上冊)定價大洋壹圓貳角　外埠酌加運費匯費

編著者　武進　吳在淵　胡敦復

校訂者　無錫　胡明復　華綰言

發行者　商務印書館

上海北河南路北首寶山路

印刷所　商務印書館

上海棋盤街中市

總發行所　商務印書館

分售處　北平天津保定瀋陽吉林龍江濟南太原開封西安南京杭州蘭谿安慶蕪湖南昌漢口長沙常德衡州成都重慶廈門福州廣州潮州香港梧州雲南貴陽張家口新嘉坡

商務印書分館

N二一六九白