Funzioni 8

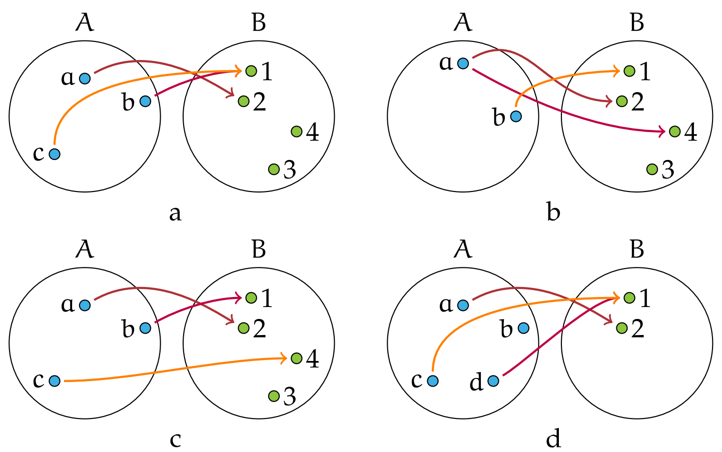
8.1 Funzioni

Diamo la seguente definizione

Definizione 8.1. Dati due insiemi A e B non vuoti, una *funzione* f è una *legge* che associa a ogni elemento di A un ben elemento definito di B.

In altre parole ogni elemento del dominio A è in corrispondenza con un solo elemento del codominio B.

Esempio 8.1. Analizziamo le relazioni rappresentate con grafico sagittale:



Le corrispondenze rappresentate nelle figure a e c sono funzioni da A in B poiché in tali casi tutti gli elementi del dominio A hanno un corrispondente nel codominio B.

La corrispondenza della figura b non rappresenta una funzione da A in B perché l'elemento $a \in A$ è in corrispondenza con due elementi di B, il 2 e il 4, quindi la corrispondenza non è univoca. Anche la corrispondenza della figura d non è una funzione da A in B perché il dominio non coincide con l'insieme A.

I termini funzione o applicazione sono sinonimi, tuttavia si preferisce usare il termine "funzione" quando i due insiemi A e B sono insiemi numerici. Solitamente una funzione viene indicata con la lettera f. Per indicare che la funzione f trasforma elementi dell'insieme A in elementi dell'insieme B usiamo una delle seguenti scritture

$$f : A \to B \quad \text{oppure} \quad A \xrightarrow{f} B$$

Definizione 8.2. L'elemento y di B, corrispondente di un elemento x del dominio, viene detto *immagine di* x *nella funzione* f e si scrive $y = f(x)$ che si legge "y uguale a effe di x".

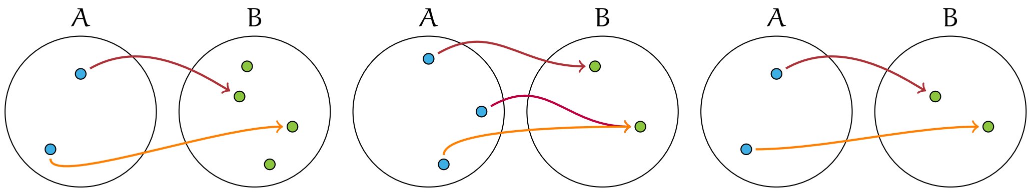
L'insieme A si chiama *dominio*, l'insieme B *codominio*.

Il sottoinsieme proprio o improprio del codominio B formato dagli elementi che sono immagini degli elementi del dominio $\mathcal{D}$ secondo la funzione f si chiama *insieme immagine* e si scrive $\text{IM.} = f(\mathcal{D})$. Osserviamo che non necessariamente ogni elemento del codominio è immagine di un elemento del dominio per cui $\text{IM.} \subseteq \mathcal{C}$.

✍ *Esercizi proposti:* 8.1, 8.2, 8.3

8.1.1 Funzioni iniettive, suriettive, biunivoche

Esempio 8.2. Nella figure sottostanti sono rappresentate alcune funzioni:



a b c

Nella figura a si ha $\text{IM.} \subset B$: elementi distinti del dominio A hanno immagini distinte nel codominio B, ma non tutti gli elementi di B sono corrispondenti di un elemento di A.

Nella figura b si ha $\text{IM.} = B$ ma alcuni elementi distinti del dominio A hanno la stessa immagine nel codominio B.

Nella figura c si ha $\text{IM.} = B$ ed elementi distinti del dominio A hanno immagini distinte nel codominio B.

I tre esempi precedenti (a, b, c) illustrano tre tipi diversi di funzioni:

Definizione 8.3. Si dice *iniettiva* una funzione per la quale elementi distinti del dominio $\mathcal{D}$ hanno immagini distinte nel codominio $\mathcal{C}$: $\forall x_1, x_2 \in \mathcal{D} \mid x_1 \neq x_2 \Rightarrow f(x_1) \neq f(x_2)$.

Definizione 8.4. Si dice *suriettiva* una funzione per la quale $\text{IM.} = \mathcal{C}$.

Definizione 8.5. Si dice *biunivoca* o *biiettiva* una funzione che sia contemporaneamente iniettiva e suriettiva.

Pertanto nella figura a è rappresentata una funzione iniettiva, nella figura b una funzione suriettiva e nella c una funzione biunivoca.

✍ *Esercizi proposti:* 8.4, 8.5

8.2 Funzioni tra insiemi numerici

Analizziamo alcune corrispondenze definite tra gli insiemi numerici. In questo caso la funzione f può essere espressa tramite una formula o scrittura analitica, una tabella, un algoritmo, oppure semplicemente con linguaggio comune, purché in modo preciso e inequivocabile. Il generico elemento x del dominio si chiama *variabile indipendente* e il corrispondente elemento $y = f(x)$ si chiama *variabile dipendente*.

Esempio 8.3. Consideriamo la corrispondenza **K**: "essere il valore assoluto di" tra l'insieme $\mathbb{N}_0$ dei naturali diversi da zero e l'insieme $\mathbb{Z}_0$ degli interi relativi diversi da zero.

Questa corrispondenza non è una funzione in quanto non è una corrispondenza univoca: ogni elemento di $\mathbb{N}_0$ ha due immagini poiché ogni numero naturale è valore assoluto di due interi opposti, come rappresentato dalla figura 8.1.

Esempio 8.4. Consideriamo la corrispondenza **K** che associa ad ogni numero razionale il suo quadrato.

Essa è una funzione di dominio $\mathbb{Q}$ e codominio $\mathbb{Q}$: di ogni numero razionale si può determinare il quadrato che è unico; poiché numeri opposti hanno lo stesso quadrato la funzione in esame *non* è *iniettiva*, come rappresentato dalla figura 8.2.

L'immagine y di ogni x appartenente a $\mathbb{Q}$ è il suo quadrato: in simboli matematici scriviamo la funzione tramite una formula $f : y = x^2$.

Per quanto riguarda l'insieme immagine della funzione esso è un sottoinsieme proprio di $\mathbb{Q}$: ad esempio, il numero razionale $+\frac{3}{4}$ non è quadrato di nessun razionale e neppure -25, razionale negativo, è quadrato di un numero razionale, quindi IM. $\subset \mathbb{Q}^+ \cup \{0\}$, pertanto la funzione da $\mathbb{Q}$ in $\mathbb{Q}$ non è suriettiva.

Esempio 8.5. Analizziamo la corrispondenza che associa ad ogni intero il suo valore assoluto.

Sappiamo che il valore assoluto di un intero è un numero naturale, e ogni intero ha un solo valore assoluto. La corrispondenza è univoca e il dominio coincide con l'insieme $\mathbb{Z}$, pertanto è una funzione: $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{N}$ che è rappresentata in forma analitica con la scrittura $y = |x|$ con $x \in \mathbb{Z}$ e $y = f(x) \in \mathbb{N}$.

$x \in \mathbb{Z}$	0	+1	−1	−2	+2	+3	−3	...
$y \in \mathbb{N}$	0	1	1	2	2	3	3	...

Nella tabella sono rappresentati alcuni elementi del dominio con le rispettive immagini: da cui si deduce che tale funzione non è iniettiva.

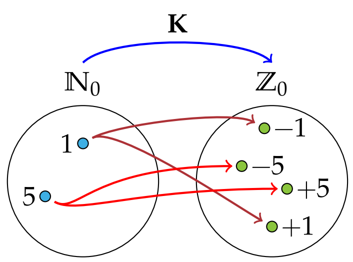


Figura 8.1

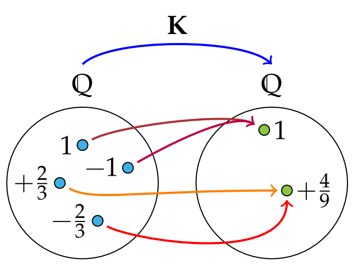


Figura 8.2

Esempio 8.6. È assegnata la funzione $f : x \in \mathbb{N} \to (x-2) \in \mathbb{Z}$. In questo caso la funzione associa ad ogni numero naturale x il numero intero ottenuto sottraendogli 2. L'espressione analitica della funzione f è: $y = x - 2$. La legge così espressa si può descrivere anche attraverso una tabella.

$x \in \mathbb{N}$	0	1	2	3	4	5	6	...
$(x-2) \in \mathbb{Z}$	-2	-1	0	$+1$	$+2$	$+3$	$+4$	...

Ogni elemento dell'insieme $\mathbb{N}$ trova il corrispondente in $\mathbb{Z}$; elementi diversi del dominio hanno immagini diverse pertanto la funzione è *iniettiva*; l'insieme immagine è un sottoinsieme proprio del codominio $\mathbb{Z}$ e precisamente $IM = \{y \in \mathbb{Z} \mid y \geqslant -2\} \subset \mathbb{Z}$, pertanto la funzione da $\mathbb{N}$ a $\mathbb{Z}$ non è suriettiva.

Esempio 8.7. Analizziamo la corrispondenza: $f_1 : x \in \mathbb{N} \to (x-2) \in \mathbb{N}$ e costruiamo la relativa tabella:

$x \in \mathbb{N}$	0	1	2	3	4	5	6	...
$(x-2) \in \mathbb{N}$			0	1	2	3	4	...

Vediamo che nella corrispondenza assegnata né 0 né 1 hanno l'immagine in $\mathbb{N}$.

Fissiamo allora come dominio $\mathcal{D}$ un sottoinsieme di $\mathbb{N}$ e precisamente $\mathcal{D} = \mathrm{I.D.} = \mathbb{N} - \{0, 1\}$; in questo modo possiamo procedere nell'analisi della funzione $f_1 : y = x - 2$.

Esempio 8.8. Consideriamo la corrispondenza che associa ad ogni numero razionale il suo inverso (o reciproco).

Sappiamo che "fare l'inverso" di un numero razionale x significa scrivere il numero razionale $\frac{1}{x}$, ma questa operazione ha significato solo se x è diverso da 0; operiamo dunque una restrizione su $\mathbb{Q}$ e fissiamo $\mathcal{D} = \mathrm{I.D.} = \mathbb{Q}_0$. La corrispondenza è una funzione $f : y = \frac{1}{x}$ da $\mathbb{Q}_0$ in $\mathbb{Q}$.

✍ *Esercizi proposti:* 8.6, 8.7, 8.8, 8.9, 8.10, 8.11

8.2.1 Funzioni inverse

È assegnata la funzione $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ descritta mediante le istruzioni

prendi $x \in \mathbb{R}$ ⟶ moltiplica per 2 ⟶ aggiungi 1 ⟶ scrivi y

La forma algebrica è $y = 2 \cdot x + 1$; essa è definita per qualunque numero reale, quindi $\mathcal{D} = \mathbb{R}$ e l'insieme immagine coincide con il codominio, $IM. = \mathcal{C} = \mathbb{R}$. Scelto arbitrariamente un valore per la variabile indipendente come $x = -2$ otteniamo la sua immagine $y = f(-2) = -3$, risultato delle operazioni descritte nelle istruzioni.

Preso ora $y = 4$, elemento dell'insieme immagine della funzione, quali istruzioni dobbiamo seguire per determinarne la controimmagine? Cioè di quale elemento di $\mathcal{D}$ è immagine il valore 4? Per quale valore di x aggiungendo 1 al suo doppio si ottiene 4? La questione è rappresentata nel diagramma di Eulero-Venn della figura 8.3 e percorrendo le istruzioni con le operazioni inverse otteniamo il valore di x sottraendo 1 al valore dato per y e dividendo il risultato per 2. Le istruzioni da eseguire per determinare la controimmagine sono quindi:

In formula $x = (y-1) : 2$. La funzione così ottenuta si chiama *funzione inversa* di $f(x)$, che è quella che dato un elemento di IM. ci fornisce l'elemento di $\mathcal{D}$ di cui è l'immagine. Questo è possibile poiché la funzione assegnata è iniettiva, e pertanto ci rendiamo subito conto che è invertibile, cioè che per ogni $y \in$ IM. possiamo determinare la sua controimmagine $x \in \mathcal{D}$.

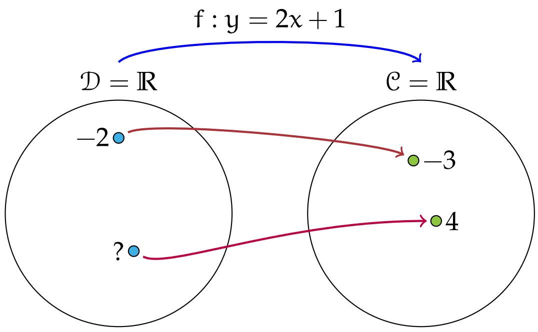


Figura 8.3: Funzioni inverse.

Definizione 8.6. Data una funzione iniettiva $f : \mathcal{D} \to \mathcal{C}$ tale che $y = f(x)$ si definisce la sua *funzione inversa* f^{-1} : IM. $\to \mathcal{D}$ come quella che permette di determinare la controimmagine di un qualunque elemento di IM., ovvero $x = f^{-1}(y)$.

Osserviamo che $\mathcal{D}\left(f^{-1}\right) =$ IM.(f) e IM. $\left(f^{-1}\right) = \mathcal{D}(f)$.

✍ *Esercizio proposto:* 8.12

8.3 Funzioni composte

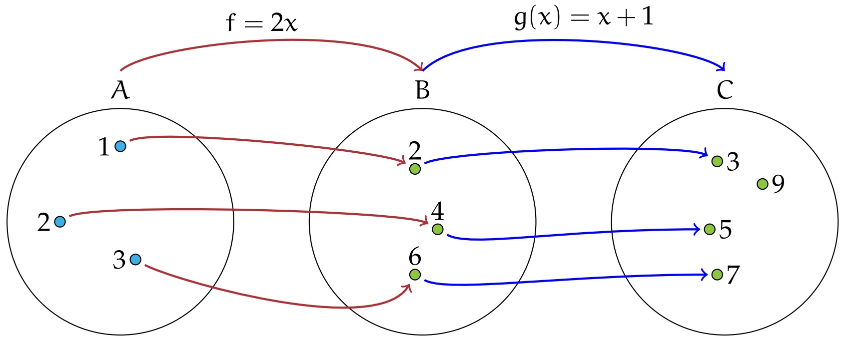
Definizione 8.7. Date due funzioni $f : A \to B$ e $g : B \to C$ si definisce la *funzione composta*

$$g \circ f : A \to C$$

una funzione che a un elemento $a \in A$ associa prima l'elemento $b = f(a) \in B$ e poi l'elemento $c = g(b) \in C$. In un'unica formula si può scrivere $g(f(a)) = c$.

Esempio 8.9. Data la funzione $f(x) = 2x$ e la funzione $g(x) = x^2 + 1$, determina l'espressione analitica della funzione composta.

Prima agisce la funzione f che raddoppia il valore di x. Al valore così ottenuto, che è $2x$, si applica la g che lo eleva al quadrato e gli aggiunge 1. Pertanto la funzione composta quadruplica il quadrato di x e poi aggiunge 1. L'espressione è $g(f(x)) = (2x)^2 + 1 = 4x^2 + 1$.



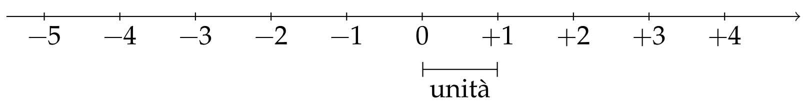
Osserva che la composizione di funzioni non è commutativa. Infatti, nell'esempio precedente, la funzione $f(g(x))$ si ottiene facendo agire prima la $g(x)$ che eleva al quadrato il valore della variabile e lo aumenta di 1 e poi la $f(x)$ che raddoppia il valore di quanto ottenuto; allora $f(g(x)) = 2(x^2 + 1) = 2x^2 + 2$.

✍ *Esercizi proposti:* 8.13, 8.14, 8.15, 8.16

8.4 La retta e gli insiemi numerici

Nello studio degli insiemi numerici abbiamo visto come si possono depositare su una semiretta i numeri naturali; la legge costruttiva di questa rappresentazione genera tra l'insieme $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, 4, \dots\}$ e i punti della semiretta una corrispondenza avente come dominio $\mathbb{N}$ e come codominio i punti della semiretta. Ad ogni numero naturale possiamo far corrispondere un punto della semiretta, ma non tutti i punti della semiretta sono immagine di un numero naturale: la corrispondenza non è biunivoca.

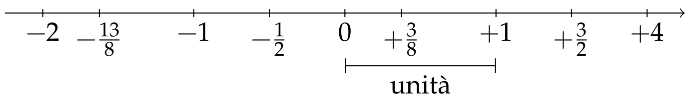
Lo stesso fatto avviene se consideriamo l'insieme $\mathbb{Z}$ come dominio e i punti di una retta orientata come codominio; nella figura seguente viene rappresentata la corrispondenza generata con la legge costruttiva già enunciata nel capitolo dei numeri interi $\mathbb{Z}$.



Ad ogni numero intero possiamo far corrispondere un punto della retta orientata, ma non tutti i punti della retta sono immagine di un numero intero: l'insieme immagine non coincide con il codominio e la corrispondenza non è biunivoca.

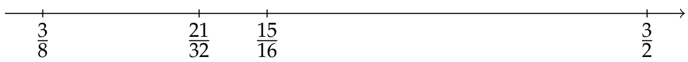
Gli insiemi $\mathbb{N}$ e $\mathbb{Z}$ sono infiniti e la loro caratteristica comune è che tra due naturali consecutivi o tra due interi consecutivi non possiamo trovarne un altro. Si dice che $\mathbb{N}$ e $\mathbb{Z}$ sono due *insiemi discreti*.

Consideriamo ora l'insieme $\mathbb{Q}$ dei numeri razionali; sappiamo che anche questi numeri, rappresentati da frazioni, possono essere disposti su una retta orientata come mostrato nella figura sottostante.



L'insieme $\mathbb{Q}$ rispetto agli insiemi $\mathbb{N}$ e $\mathbb{Z}$ presenta un'altra caratteristica: è *denso*, cioè tra due numeri razionali ci sono infiniti altri numeri razionali. Come possiamo confermare questa affermazione?

Osserviamo la figura precedente: fra $\frac{3}{8}$ e $\frac{3}{2}$ si trova certamente il numero 1. Costruiamo il numero $q = \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{3}{8} + \frac{3}{2}\right)$ ottenuto dividendo per due la somma dei due numeri estremi dell'intervallo considerato, si ottiene $q = \frac{15}{16}$ che è minore di 1 e, a maggior ragione, minore di $\frac{3}{2}$, ma maggiore di $\frac{3}{8}$, come si può verificare trasformando la frazione in una equivalente con denominatore 16. Con lo stesso procedimento possiamo determinare $q_1 = \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{3}{8} + \frac{15}{16}\right) = \frac{21}{32}$ che risulta maggiore di $\frac{3}{8}$ e minore di q. Con questo procedimento, che non ha mai termine, possiamo determinare infiniti altri numeri razionali compresi tra $\frac{3}{8}$ e $\frac{3}{2}$.



Questa possibilità ci fa supporre che tutti i punti della retta orientata possano essere immagine di un numero razionale, cioè che esista una corrispondenza biunivoca tra l'insieme $\mathbb{Q}$ e i punti della retta. Invece, no! Benché l'insieme $\mathbb{Q}$ sia infinito e denso, quando pensiamo di aver disposto sulla retta tutti i suoi elementi su quest'ultima rimangono ancora altri punti liberi (es. $\sqrt{2}$). La retta geometrica sembra avere "più punti" di quanti siano i numeri razionali: gli infiniti punti lasciati scoperti dai razionali sono immagine di numeri irrazionali $\mathbb{J}$.

L'insieme $\mathbb{R} = \mathbb{Q} \cup \mathbb{J}$ è l'insieme dei numeri reali, cui Cantor attribuì la cardinalità (o potenza) del *continuo* $\aleph_1$ (superiore a quella *numerabile* dei numeri naturali $\aleph_0$). La retta geometrica orientata è in corrispondenza biunivoca con $\mathbb{R}$, quindi ad ogni numero reale corrisponde un punto sulla retta orientata e un punto della retta è immagine di un solo numero reale (razionale o irrazionale).

Definizione 8.8. Si chiama *ascissa di un punto* sulla retta reale il numero reale α che è la sua immagine nella corrispondenza biunivoca.

$$\overline{OD}^2 = (\sqrt{2})^2 + 1^2 = 2 + 1 = 3 \Rightarrow \overline{OD} = \sqrt{3}.$$

✍ *Esercizi proposti:* 8.17, 8.18, 8.19

8.5 Il metodo delle coordinate cartesiane

Abbiamo definito prodotto cartesiano di due insiemi non vuoti A e B l'insieme formato da tutte le coppie ordinate tali che il primo elemento appartenga ad A e il secondo a B. Mediante proprietà caratteristica si scrive: $A \times B = \{(a; b) \mid a \in A \text{ e } b \in B\}$.

Esempio 8.10. Il prodotto cartesiano dei due insiemi $A = \{1, 2, 3\}$ e $B = \{x, y\}$ è

$$A \times B = \{(1; x), (1; y), (2; x), (2; y), (3; x), (3; y)\}$$

e graficamente si può rappresentare con un diagramma cartesiano come nella figura 8.4.

Sappiamo che una retta orientata, fissata una unità di misura arbitraria, è l'immagine geometrica dell'insieme dei numeri reali: ad ogni numero reale corrisponde un punto della retta e un qualunque punto della retta è immagine di un solo numero reale.

8.5.1 Introduzione al sistema di riferimento cartesiano ortogonale

Preso l'insieme $\mathbb{R}$ dei numeri reali, costruiamo il prodotto cartesiano $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$: esso è costituito dall'insieme delle coppie ordinate tali che il primo elemento sia un numero reale come pure il secondo elemento. In $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ avremo coppie il cui primo elemento è 0, coppie il cui primo elemento è un numero positivo e infine coppie il cui primo elemento è un numero negativo, coppie che possiamo sinteticamente rappresentare nel seguente modo:

$$\mathbb{R} \times \mathbb{R} = \{(0; 0), (0; +), (0; -), (+; 0), (-; 0), (+; +), (+; -), (-; +), (-; -)\}.$$

È possibile dare una rappresentazione grafica di questo insieme di infiniti elementi?

Consideriamo sul piano una coppia di rette perpendicolari, indichiamo con O il loro punto di intersezione, fissiamo convenzionalmente un verso di percorrenza su ciascuna retta (convenzionalmente sull'orizzontale da sinistra a destra e sulla verticale dal basso all'alto) e infine scegliamo un segmento arbitrario come unità di misura. Indichiamo con x l'asse orizzontale che chiamiamo *asse delle ascisse* e con y l'asse verticale che chiamiamo *asse delle ordinate* (figura 8.5).

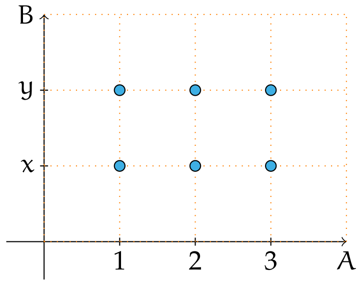


Figura 8.4

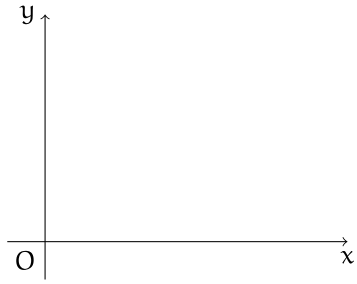


Figura 8.5: Il piano cartesiano.

Definizione 8.9. Si chiama *riferimento cartesiano ortogonale monometrico* la coppia di rette orientate, perpendicolari, dotate di unità di misura.

Gli assi dividono il piano in quattro zone chiamate *quadranti* che sono numerati come in figura 8.6. Ogni punto dell'asse delle ascisse è immagine di un numero reale: O è l'immagine di zero, i punti alla sua destra rappresentano i numeri reali positivi, quelli alla sua sinistra tutti i numeri reali negativi; analogamente sull'asse delle ordinate il punto O è l'immagine dello zero, sopra di questo si collocano i numeri positivi e sotto i numeri negativi (figura 8.7).

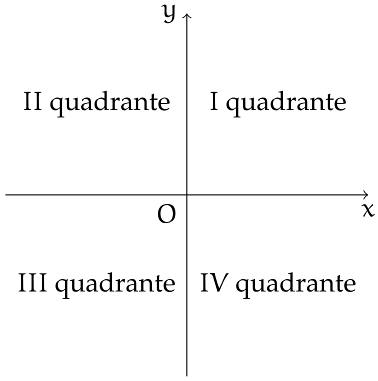


Figura 8.6: I quattro quadranti del piano cartesiano.

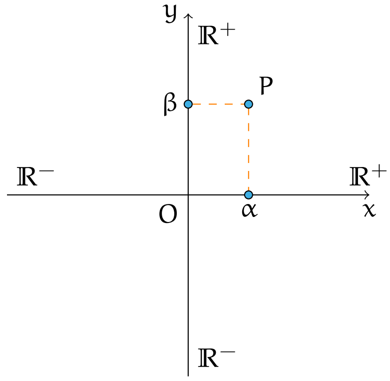


Figura 8.7: Numeri positivi e negativi sul piano cartesiano.

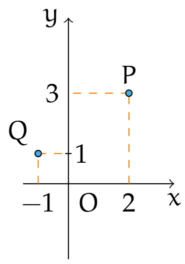


Figura 8.8

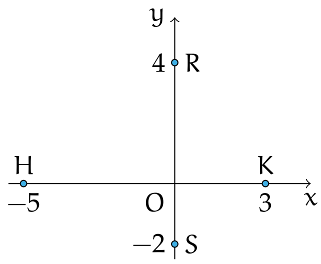


Figura 8.9

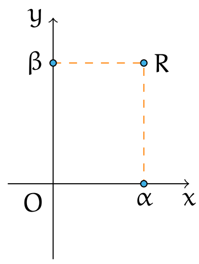


Figura 8.10: Ascissa e ordinata di un punto.

Per rappresentare gli elementi di $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ cioè le coppie ordinate di numeri reali $(\alpha; \beta)$ procediamo nel seguente modo:

- determiniamo sull'asse x il punto A immagine del numero reale α;
- da A tracciamo la retta parallela all'asse y;
- determiniamo sull'asse y il punto B immagine del numero reale β;
- da B tracciamo la retta parallela all'asse x.

Il punto P, intersezione delle rette tracciate, è l'immagine della coppia ordinata $(\alpha; \beta)$ (figura 8.7). Il punto O, immagine della coppia $(0; 0)$, è chiamato *origine* del sistema di riferimento.

Esempio 8.11. Determiniamo l'immagine delle coppie ordinate $(2; 3)$ e $(-1; 1)$.

Nella figura 8.8 è tracciata la costruzione descritta sopra: P è il punto del piano immagine della coppia $(2; 3)$ e Q è il punto immagine della coppia $(-1; 1)$. Rappresenta le coppie $(4; -1)$ e $(-4; 1)$. Quali punti rappresentano le coppie con un elemento uguale a zero?

Esempio 8.12. Determiniamo l'immagine delle seguenti coppie: $(0; 4)$, $(0; -2)$, $(-5; 0)$, $(3; 0)$.

Osserviamo nella figura 8.9 che il punto immagine dello zero sull'asse x coincide con O, quindi la coppia $(0; 4)$ sarà associata al punto R dell'asse y e la coppia $(0; -2)$ al punto S dello stesso asse. Analogamente, poiché il punto immagine dello zero sull'asse y coincide con O, le coppie $(-5; 0)$ e $(3; 0)$ sono associate rispettivamente ai punti H e K dell'asse x.

Prima conclusione: ogni coppia di numeri reali è rappresentata da un punto del piano dotato di riferimento cartesiano ortogonale monometrico.

Prendiamo ora un punto R (figura 8.10 a pagina 221) del piano sul quale sia stato fissato un riferimento cartesiano ortogonale monometrico e tracciamo da R la parallela all'asse y che interseca l'asse x nel punto A. A questo punto è associato un numero reale α. Analogamente da R tracciamo la parallela all'asse x che interseca l'asse y nel punto B immagine di un numero reale β. Al punto R associamo la coppia di numeri reali $(\alpha; \beta)$.

Diremo che R è il punto di coordinate $(\alpha; \beta)$, α si chiama *ascissa* del punto R e β *ordinata* del punto R. Spesso le coordinate del punto R sono indicate con $(x_R; y_R)$.

Seconda conclusione: ogni punto del piano dotato di riferimento cartesiano ortogonale monometrico individua una coppia ordinata di numeri reali.

In conclusione, esiste una corrispondenza biunivoca tra l'insieme $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ e l'insieme dei punti del piano dotato di riferimento cartesiano ortogonale monometrico. Possiamo dunque "confondere" coppia di numeri reali con punto del piano e diremo, secondo gli esempi precedenti, "P è il punto $(2; 3)$" o "P è il punto immagine della coppia $(2; 3)$" o ancora "P è il punto di coordinate $(2; 3)$".

Un po' di storia

Nel II secolo a.C. Ipparco[1] compilò il primo catalogo stellare in cui precisò la posizione di circa 850 stelle sulla sfera celeste mediante due numeri: latitudine e longitudine. La posizione di un punto era dunque individuata attraverso una coppia di numeri. Ancora oggi attraverso latitudine e longitudine viene individuato un punto sulla superficie terrestre. I romani, nel fondare una città, segnavano due solchi perpendicolari (cardo e decumano) ai quali riferivano la posizione di case, monumenti, strade.

Nel XVII secolo con le opere di Pierre de Fermat[2] e di René Descartes[3] il metodo di rappresentare punti con coppie di numeri divenne un procedimento matematico per descrivere enti geometrici attraverso numeri, equazioni, disequazioni e tradurre le relazioni tra elementi della geometria in relazioni tra enti dell'algebra.

La geometria analitica tratta quindi questioni geometriche con metodi di tipo algebrico.

✍ *Esercizio proposto:* 8.20

8.5.2 Distanza tra due punti

Assegnato nel riferimento cartesiano ortogonale il punto $P(\alpha; \beta)$, il numero reale $|\alpha|$ rappresenta la misura della distanza del punto P dall'asse y e il numero reale $|\beta|$ rappresenta la misura della distanza di P dall'asse x.

[1] noto anche come Ipparco di Nicea o di Rodi, è stato un astronomo, matematico e geografo della Grecia antica (190 a.C.- 120 a.C.).
[2] matematico e magistrato francese (1601 - 1665).
[3] filosofo e matematico francese noto anche con il nome italianizzato Renato Cartesio (1596 - 1650).

Esempio 8.13. Determinare la misura della distanza dagli assi coordinati dei punti $P(+1;-3)$, $Q(+5;+5)$, $R(-2;+3)$, $S(-5;-1)$ (figura 8.11).

Dati: $P(+1;-3)$.

Obiettivo: $PH \perp$ asse x, il segmento PH è la distanza di P dall'asse x; $PK \perp$ asse y, il segmento PK è la distanza di P dall'asse y.

Per quanto detto sopra si ha $\overline{PH} = |-3| = -(-3) = 3$; $\overline{PH} = |+1| = 1$. Completate la soluzione dell'esempio, seguendo la traccia.

Vogliamo ora determinare la misura $\overline{AB}$ di un segmento AB, inserito in un riferimento cartesiano ortogonale monometrico O_{xy}, conoscendo le coordinate degli estremi A e B del segmento stesso.

Caso I i due punti hanno la stessa ascissa. Il segmento AB è parallelo all'asse y e può presentarsi in diverse posizioni rispetto all'asse x (figura 8.12).

Esempio 8.14. Determinare la misura della distanza tra i punti $A(2;7)$ e $B(2;3)$.

Dati: $A(2;7)$, $B(2;3)$.

Obiettivo: $\overline{AB}$.

Procedura risolutiva: $\overline{AB} = \overline{AH} - \overline{BH} = y_A - y_B = 7 - 3 = 4$.

Esempio 8.15. Determinare la misura della distanza tra i punti $A(5;5)$ e $B(5;-3)$.

Dati: $A(5;5)$, $B(5;-3)$.

Obiettivo: $\overline{AB}$.

Procedura risolutiva: $\overline{AB} = \overline{AF} + \overline{BF} = y_A + (-y_B) = y_A - y_B = 5 - (-3) = 8$.

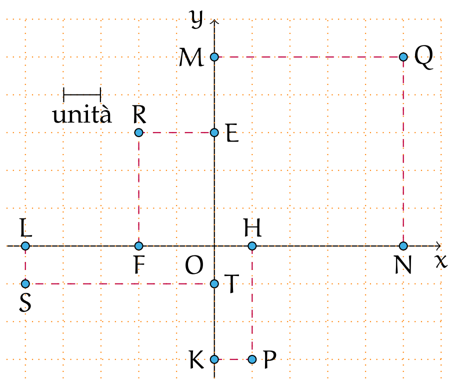


Figura 8.11

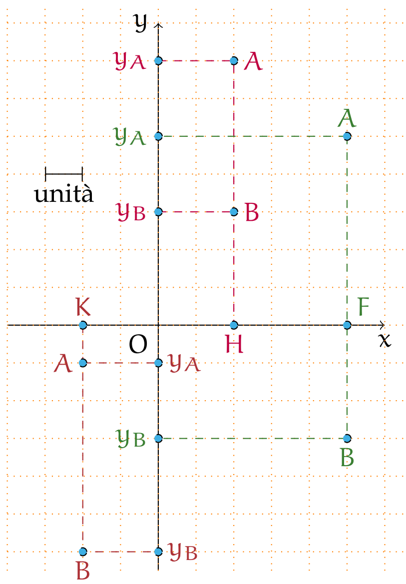


Figura 8.12

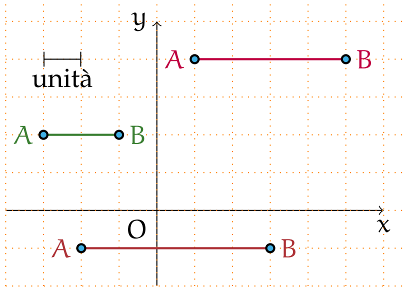


Figura 8.13: I due punti hanno la stessa ordinata.

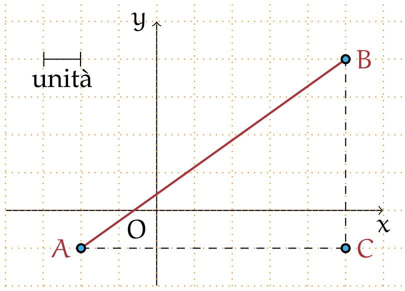


Figura 8.14: Il segmento ha una direzione diversa da quella degli assi coordinati.

Esempio 8.16. Determinare la misura della distanza tra i punti $A(-2;-1)$ e $B(-2;-6)$.

Dati: $A(-2;-1)$, $B(-2;-6)$.

Obiettivo: $\overline{AB}$.

Procedura risolutiva: $\overline{AB} = \overline{BK} - \overline{AK} = -(y_B) - (-y_A) = y_A - y_B = -1 + 6 = 5$.

Osserviamo che in ogni caso abbiamo sottratto dall'ordinata maggiore l'ordinata minore; generalizzando possiamo concludere: la misura del segmento AB parallelo all'asse delle ordinate è $\overline{AB} = |y_A - y_B|$ indipendentemente da quale estremo abbia ordinata maggiore.

Caso II i due punti hanno la stessa ordinata. Il segmento AB (figura 8.13) è parallelo all'asse x e può presentarsi in diverse posizioni rispetto all'asse y.

Seguendo il procedimento applicato nel primo caso, dopo aver rilevato le coordinate degli estremi del segmento AB nella figura 8.13, verifica che in ogni caso $\overline{AB} = |x_A - x_B|$.

La misura del segmento AB parallelo all'asse delle ascisse è $\overline{AB} = |x_A - x_B|$ indipendentemente da quale estremo abbia ascissa maggiore.

Caso III è questo il caso generale: il segmento ha una direzione diversa da quella degli assi coordinati (figura 8.14).

Dati: $A(x_A;x_B)$, $B(y_A;y_B)$.

Obiettivo: $\overline{AB}$.

Procedura risolutiva: tracciando da A la parallela all'asse x e da B la parallela all'asse y si determina il vertice C del triangolo rettangolo ABC di cui AB è l'ipotenusa. Per il teorema di Pitagora si ottiene: $\overline{AB} = \sqrt{\overline{AC}^2 + \overline{BC}^2} = \sqrt{(x_A - x_C)^2 + (y_C - y_B)^2}$. Poiché $x_C = x_B$ e $y_C = y_A$ sostituendo si ha: $\overline{AB} = \sqrt{(x_A - x_B)^2 + (y_A - y_B)^2}$.

La misura del segmento AB, note le coordinate dei suoi estremi, è quindi:

$$\overline{AB} = \sqrt{(x_A - x_B)^2 + (y_A - y_B)^2}.$$

✍ *Esercizi proposti:* 8.21, 8.22, 8.23, 8.24, 8.25, 8.26, 8.27, 8.28, 8.29, 8.30, 8.31, 8.32, 8.33

8.5.3 Punto medio di un segmento

Ricordiamo il teorema di Talete:

Teorema 8.1 (di Talete)**.** *Un fascio di rette parallele tagliato da due trasversali* r *e* r' *determina su esse segmenti che mantengono tra loro le proporzioni, cioè* $\overline{AB} : \overline{A'B'} = \overline{BC} : \overline{B'C'}$.

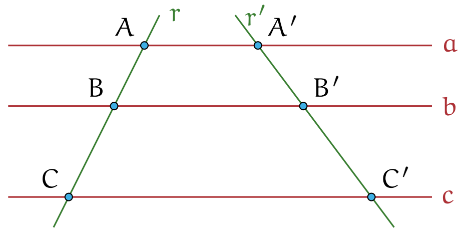


Figura 8.15: Il teorema di Talete.

Richiamiamo anche la definizione di punto medio di un segmento:

Definizione 8.10. Il *punto medio di un segmento* AB è il punto M interno al segmento che lo divide in due parti congruenti: $\overline{AM} = \overline{MB}$.

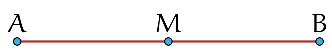


Figura 8.16: Il punto medio.

Se si conoscono le coordinate degli estremi $A(x_A; y_a)$ e $B(x_B; y_B)$ di un segmento possiamo determinare le coordinate del suo punto medio $M(x_M; y_M)$ (figura 8.17).

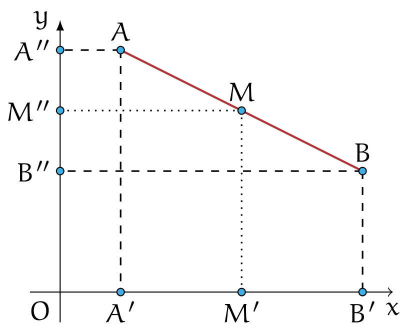


Figura 8.17: Le coordinate del punto medio.

Essendo $\overline{AM} = \overline{MB}$ per il teorema di Talete $\overline{A'M'} = \overline{M'B'}$; si ha inoltre $A'(x_A; 0)$, $B'(x_B; 0)$, $M'(x_M; 0)$ e quindi $x_M - x_A = x_B - x_M$ da cui $2x_M = x_A + x_B$ e dunque $x_M = \dfrac{x_A + x_B}{2}$.

Con ragionamento analogo, tracciando dai punti A, B, M le parallele all'asse x, si ricava $y_M = \dfrac{y_A + y_B}{2}$.

Le coordinate del punto medio M di un segmento AB, con $A(x_A; x_B)$ e $B(x_B; y_B)$ sono quindi:

$$x_M = \frac{x_A + x_B}{2}; \quad y_M = \frac{y_A + y_B}{2}.$$

Esempio 8.17. Dato il segmento di estremi $A\left(-\frac{3}{4}; 1\right)$, $B\left(2; -\frac{1}{2}\right)$ determinare le coordinate del suo punto medio M.

Dati: $A\left(-\frac{3}{4}; 1\right)$, $B\left(2; -\frac{1}{2}\right)$, $\overline{AM} = \overline{MB}$.

Obiettivo: $M(x_M; y_M)$.

Procedura risolutiva: $x_M = \frac{x_A + x_B}{2} = \frac{-\frac{3}{4}+2}{2} = \frac{5}{8}$; $y_M = \frac{1+\left(-\frac{1}{2}\right)}{2} = \frac{1}{4}$ quindi $M\left(\frac{5}{8}; \frac{1}{4}\right)$.

✍ *Esercizi proposti:* 8.34, 8.35, 8.36, 8.37, 8.38

8.6 Il grafico di una funzione

Ricordiamo le definizioni 8.1 e 8.2. Una funzione f è una corrispondenza univoca tra due insiemi non vuoti: ad ogni elemento x (variabile indipendente) del dominio associa uno e un solo valore y del codominio (variabile dipendente). L'elemento y, corrispondente di un elemento x del dominio, viene detto immagine di x nella funzione f e si scrive $y = f(x)$.

Le funzioni numeriche, cioè aventi per dominio e codominio insiemi numerici, possono essere espresse:

- con *linguaggio comune*, purché in modo preciso e inequivocabile (esempio: La funzione f "associa ad ogni numero razionale il suo triplo");
- attraverso un *algoritmo* (figura 8.18), cioè una serie di istruzioni per trasformare il valore della variabile indipendente (in ingresso) nel valore della variabile dipendente (in uscita);

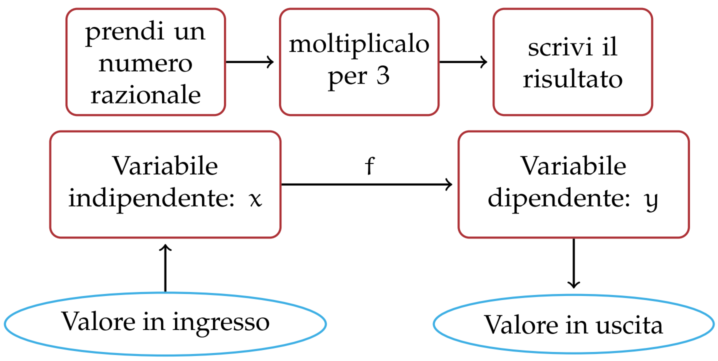


Figura 8.18: Funzione numerica espressa tramite un algoritmo.

- mediante una *tabella*:

x	-2	0	3	7	10
y	-6	0	9	21	30

- con una *formula* che indica il calcolo che si effettua sulla variabile indipendente per determinare in modo univoco il valore della variabile dipendente. Per esempio: $y = 3x$.

Esempio 8.18. Traccia su un piano quadrettato un riferimento cartesiano ortogonale monometrico. Completa la tabella per la funzione $y = 2x$ avente come dominio e codominio l'insieme $\mathbb{R}$ dei numeri reali.

x	0		$1/2$	2	-3	
y		2				5

Ogni coppia $(x; y)$ determina nel riferimento cartesiano un punto; rappresenta i punti le cui coordinate sono le coppie ordinate contenute nella tabella. Puoi osservare che i punti trovati sono allineati su una retta passante per l'origine del riferimento.

Definizione 8.11. Si chiama *grafico di una funzione* l'insieme di tutti e soli i punti del piano cartesiano che rappresentano le coppie ordinate costruite tramite la funzione assegnata.

❑ **Osservazione** I pochi punti ottenuti dalla compilazione della tabella possono essere uniti con un tratto continuo perché assegnando alla variabile indipendente altri valori reali, ad esempio compresi tra 0 e 2, si potrebbero determinare infiniti punti che risulterebbero allineati con i precedenti.

✍ *Esercizi proposti:* 8.39, 8.40

8.6.1 Funzione di proporzionalità diretta

x	0	-1	$1/2$	2	-3	$-5/2$
y	0	2	-1	-4	6	5
y/x						

Compila la terza riga della tabella contenente il rapporto tra la variabile dipendente y e la variabile indipendente x. Cosa osservi? Completa: $\dfrac{y}{x} =$. . . . .

Definizione 8.12. Una funzione in cui risulta costante e diverso da zero il rapporto tra la variabile dipendente e la variabile indipendente si chiama *funzione di proporzionalità diretta*. In simboli, y direttamente proporzionale a $x \Leftrightarrow \dfrac{y}{x} = k$ con $k \in \mathbb{R}$ e $k \neq 0$ o anche $y = k \cdot x$.

Il grafico di una funzione di proporzionalità diretta è una *retta passante per l'origine*; la costante k si chiama *coefficiente angolare* della retta.

Nella figura 8.19 è rappresentata una retta passante per l'origine del riferimento; essa forma con l'asse orientato delle x un angolo α ; la costante k ci dà informazioni su tale angolo. In particolare se la costante di proporzionalità è *positiva*, l'angolo α è *acuto*, se la costante è *negativa* allora l'angolo α è *ottuso*. Se $k = 1$ l'angolo è di 45° e la retta è la bisettrice del I e III quadrante.

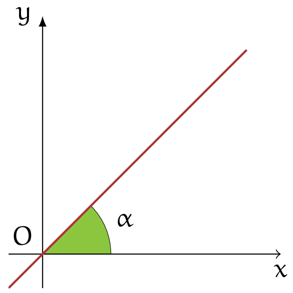


Figura 8.19: Coefficiente angolare di una funzione.

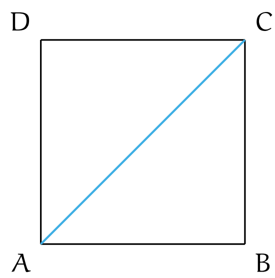


Figura 8.20

Problema 8.19. Nel quadrato $ABCD$ di figura 8.20 il cui lato misura x, determinare il perimetro e la diagonale.

Soluzione Abbiamo i dati: $\overline{AB} = x$ con $x > 0$ e l'obiettivo: $2p$, $\overline{AC}$.

$2p = 4 \cdot x$, al variare del lato varia il perimetro, che risulta essere dunque funzione del lato. Indicato con y il perimetro scriviamo $y = 4x$, funzione di proporzionalità diretta con $\mathcal{D} = \mathbb{R}^+$, coefficiente $k = 4$. La rappresentazione grafica di questa funzione è una semiretta contenuta nel primo quadrante, ma privata del suo punto origine (figura 8.21).

Determiniamo ora la diagonale: per il teorema di Pitagora si ha

$$\overline{AC}^2 = \overline{AB}^2 + \overline{BC}^2 = x^2 + x^2 = 2x^2$$
$$\Rightarrow \overline{AC} = \sqrt{2 \cdot x^2} = x \cdot \sqrt{2}.$$

Indicando con y la diagonale si ha la funzione di proporzionalità diretta $y = \sqrt{2} \cdot x$ con coefficiente $k = \sqrt{2}$, di dominio $\mathcal{D} = \mathbb{R}^+$. La rappresentazione grafica di questa funzione è una semiretta contenuta nel primo quadrante, ma privata del suo punto origine (figura 8.22).

♦

✍ *Esercizi proposti:* 8.41, 8.42, 8.43, 8.44, 8.45

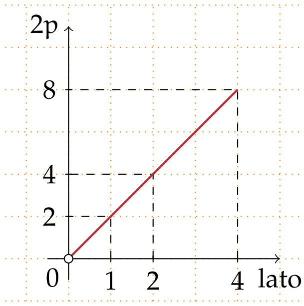


Figura 8.21: Il perimetro 2p in funzione del lato.

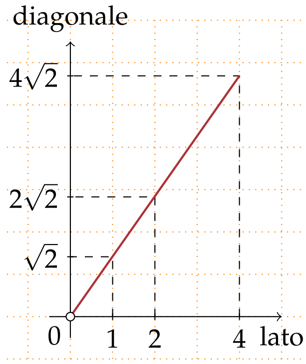


Figura 8.22: La diagonale in funzione del lato.

8.6.2 La funzione costante

La figura 8.23 rappresenta una funzione in cui $\mathcal{D} = \mathbb{R}$ e l'insieme IM. $= \{2\}$.

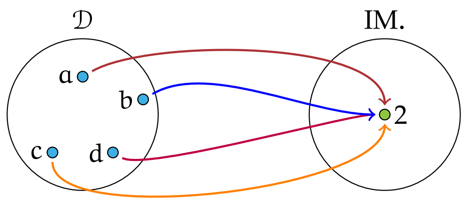


Figura 8.23: Funzione con $\mathcal{D} = \mathbb{R}$ e IM. $= \{2\}$.

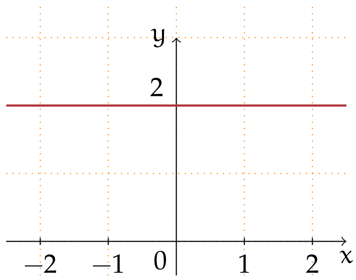


Figura 8.24: Funzione costante.

Definizione 8.13. Si chiama *funzione costante* la legge che associa ad ogni valore assunto dalla variabile indipendente sempre lo stesso valore della variabile dipendente; in simboli: $\forall x \in \mathbb{R} \Rightarrow f(x) = k, k \in \mathbb{R}$.

Rappresentiamo la funzione del grafo come formula, compiliamo la tabella e infine tracciamo il suo grafico nel riferimento cartesiano ortogonale.

Formula: $y = 2$.

Tabella:

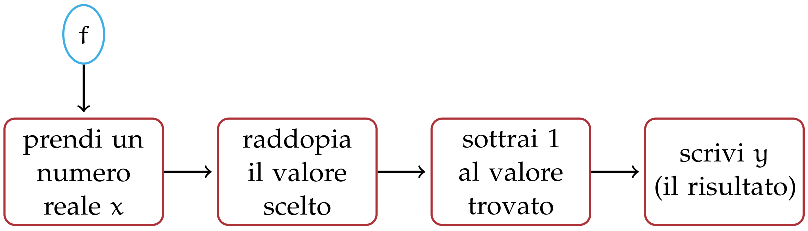
x	-2	0	-3	1	2
y	2	2	2	2	

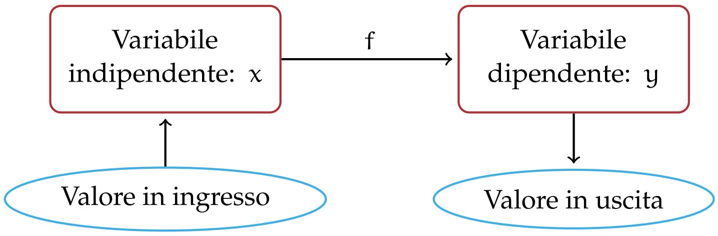
Il grafico di una funzione costante è una retta parallela all'asse delle ascisse (figura 8.24). Osserviamo che se k è positivo la retta sta nel semipiano delle ordinate positive (I e II quadrante); se k è negativo la retta sta nel semipiano delle ordinate negative (III e IV quadrante); se $k = 0$ allora la retta coincide con l'asse x delle ascisse.

✍ *Esercizi proposti:* 8.46, 8.47, 8.48, 8.49

8.6.3 La funzione lineare

Le seguenti istruzioni individuano una funzione:





Completa:

- la funzione data si esprime con linguaggio comune: "la differenza tra ....";
- la formula che indica il legame algebrico tra la variabile indipendente e la variabile dipendente è $y = $ ....

La tabella che ne rappresenta alcuni valori è:

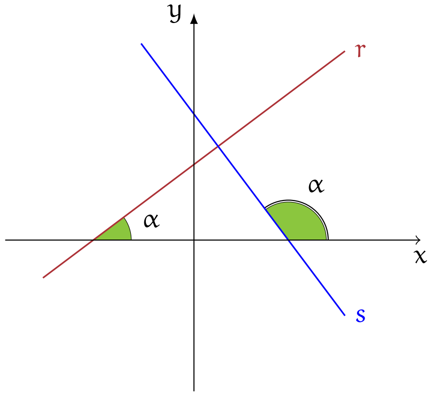
x	-2	0	
y			0

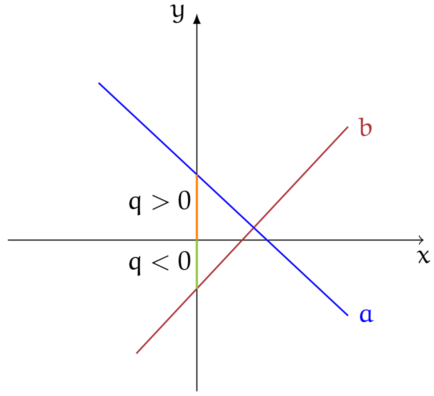
Rappresenta i punti del grafico in un riferimento cartesiano ortogonale. Rispondi: i punti trovati sono allineati? la funzione è una proporzionalità diretta?

Definizione 8.14. Una qualunque funzione espressa dalla formula $y = m \cdot x + q$ con m, $q \in \mathbb{R}$, il cui grafico è una retta, è detta *funzione lineare*.

Significato dei coefficienti m e q nella funzione lineare $y = mx + q$

- Se $m = 0$ la funzione è $y = q$, il suo grafico è una retta parallela all'asse x;
- se $m \neq 0$ esso è il coefficiente angolare della retta; ci dà informazioni sull'angolo che la retta forma con l'asse orientato delle ascisse: se $m > 0$ l'angolo formato con l'asse delle ascisse è un angolo acuto; se $m < 0$ l'angolo è ottuso;
- se $q = 0$ la funzione è $y = ax$, il suo grafico è una retta passante per l'origine;
- se $q \neq 0$ esso è l'ordinata del punto di intersezione della retta con l'asse delle ordinate (asse y).





❍ **Conclusione** la funzione costante e la funzione di proporzionalità diretta sono funzioni lineari.

Esempio 8.20. Riferendoti ai grafici precedenti, completa con uno dei segni $>$, $<$, $=$.

- nella formula della funzione avente r come grafico si ha $m \dots 0$ e $q \dots 0$;
- nella formula della funzione avente s come grafico si ha $m \dots 0$ e $q \dots 0$;
- nella formula della funzione avente a come grafico si ha $m \dots 0$ e $q \dots 0$;
- nella formula della funzione avente b come grafico si ha $m \dots 0$ e $q \dots 0$.

Assegnata una tabella di corrispondenza è possibile determinare la formula della funzione lineare.

Esempio 8.21. Stabilisci se la tabella assegnata rappresenta una funzione lineare e determina la formula che la descrive.

x	-2	-1	0	1	$2/3$
y	-8	-5	-2	1	0

Procedura risolutiva: segno nel riferimento cartesiano i punti corrispondenti alle coppie ordinate $(x; y)$ date dalla tabella e osservo che il grafico è una retta non passante per l'origine. Non si tratta dunque di una proporzionalità diretta (il rapporto y/x non è costante!). Per determinare la formula devo stabilire il valore di m (coefficiente angolare) e di q. Dalla tabella individuo il valore $q = -2$, infatti per $x = 0$ si ha $y = -2$. Per determinare m, sommo 2 (l'opposto di -2) a tutte le ordinate e trovo la tabella della proporzionalità diretta $y = 3x$.

x	-2	-1	0	1	$2/3$
y	-6	-3	0	3	2

Quindi la formula della funzione lineare cercata è $y = 3x - 2$. Questo procedimento è possibile perché nella tabella è già evidente il valore di q.

✍ *Esercizi proposti:* 8.50, 8.51, 8.52

8.6.4 La funzione di proporzionalità inversa

Problema 8.22. La base e l'altezza di un rettangolo $ABCD$ misurano rispettivamente 3cm e 4cm. Determina la sua area.

Soluzione ....

♦

Se le misure dei lati sono numeri interi, esistono altri rettangoli equivalenti a quello dato? Costruisci i rettangoli equivalenti, indicando accanto a ciascuno la misura dei lati. Se le misure fossero numeri reali, potresti determinare *tutti* i rettangoli equivalenti a quello assegnato?

Generalizziamo: i lati x e y di tutti i rettangoli equivalenti a quello dato sono legati dalla condizione $x \cdot y = 12$ con $x, y \in \mathbb{R}^+$.

x	6	8	10	1/3	4/3
y	2	3/2	6/5	36	9

Osserviamo che se fissiamo il valore di x il lato y vale $y = \frac{12}{x}$ come nella tabella. Rappresenta ora nel riferimento cartesiano ortogonale i punti individuati dalla tabella: essi si collocano nel primo quadrante perché .... Ti sembrano allineati?

Definizione 8.15. Una funzione in cui il prodotto tra la variabile dipendente e la variabile indipendente risulta costante e diverso da zero si chiama *funzione di proporzionalità inversa*. In simboli: y inversamente proporzionale a $x \Leftrightarrow x \cdot y = k$ con $k \in \mathbb{R}_0$ e $x \neq 0$ o anche $y = \dfrac{k}{x}$.

Il grafico di una funzione di proporzionalità inversa è una curva chiamata *iperbole*.

Analizziamo tale funzione e rappresentiamo il suo grafico a secondo dei valori della costante k.

Caso $k > 0$ Quando ci proponiamo di costruire una tabella di valori, le variabili x e y sono senz'altro concordi; al numero positivo x corrisponde il numero positivo $y = \frac{k}{x}$ dunque i punti nel riferimento cartesiano si collocano nel primo quadrante; al numero negativo x corrisponde il numero negativo $y = \frac{k}{x}$ dunque i punti nel riferimento cartesiano si collocano nel terzo quadrante.

Esempio 8.23. Rappresentare graficamente la funzione $y = \frac{2}{x}$. Per far questo assegniamo a x alcuni valori, positivi e negativi:

x	-3	-1	$-1/2$	1	4	1/2	3
y	$-2/3$	-2	-4	2	1/2	4	2/3

Riportiamo i punti nel riferimento cartesiano ortogonale. Essi si collocano nel primo e terzo quadrante come previsto, non sono allineati. Non possiamo attribuire alla variabile indipendente il valore zero perché non si può dividere per zero, né alcun valore di x potrà avere come immagine $y = 0$ in quanto un quoziente è zero se il dividendo è zero (in questo caso è 2). Il dominio è $\mathcal{D} = \mathbb{R}_0$ e l'insieme immagine è $IM. = \mathbb{R}_0$.

Il grafico di questa funzione (figura 8.25) non ha punti appartenenti agli assi coordinati. Questa curva è una *iperbole*; essa è formata da due rami che si collocano nel I e III quadrante.

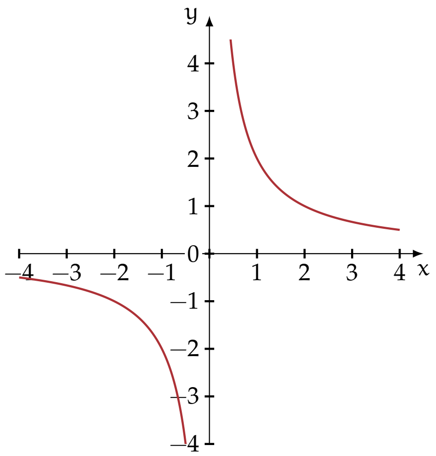


Figura 8.25: La funzione $y = \frac{2}{x}$.

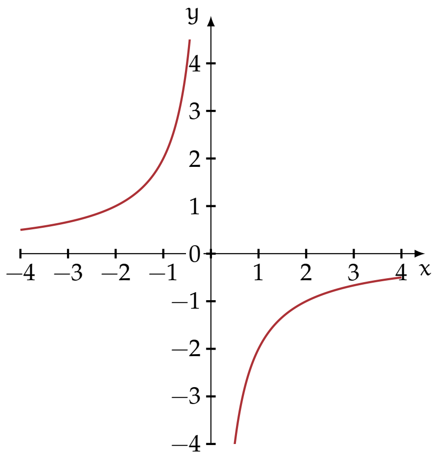


Figura 8.26: La funzione $y = -\frac{1}{2x}$.

Caso $k < 0$ Quando ci proponiamo di costruire una tabella di valori, le variabili x e y sono senz'altro discordi; al numero positivo x corrisponde il numero negativo $y = \frac{k}{x}$ dunque i punti nel riferimento cartesiano si collocano nel quarto quadrante; al numero negativo x corrisponde il numero positivo $y = \frac{k}{x}$ dunque i punti nel riferimento cartesiano si collocano nel secondo quadrante.

Esempio 8.24. Rappresentare graficamente la funzione $y = -\frac{1}{2x}$. Per far questo assegniamo a x alcuni valori, positivi e negativi.

x	-2	-1	$-1/2$	1	2	$1/2$	$3/2$
y	$1/4$	$1/2$	1	$-1/2$	$-1/4$	-1	$-1/3$

Riportiamo i punti nel riferimento cartesiano ortogonale. Essi si collocano nel secondo e quarto quadrante come previsto, non sono allineati. Non possiamo attribuire alla variabile indipendente il valore zero perché non si può dividere per zero, né alcun valore di x potrà avere come immagine $y = 0$ in quanto un quoziente è zero se il dividendo è zero, ma in questo caso è $-\frac{1}{2}$. Il dominio è $\mathcal{D} = \mathbb{R}_0$ e l'insieme immagine è IM. $= \mathbb{R}_0$.

Il grafico di questa funzione (figura 8.26) non ha punti appartenenti agli assi coordinati. Questa curva è una *iperbole*; essa è formata da due rami che si collocano nel II e IV quadrante.

✍ *Esercizi proposti:* 8.53, 8.54

8.6.5 La funzione di proporzionalità quadratica

È assegnata la tabella che esprime il legame tra due variabili reali; determina se essa rappresenta una funzione costante, una funzione lineare, una funzione di proporzionalità diretta, di proporzionalità inversa, oppure nessuno di questi tipi:

x	-2	-1	$1/2$	0	2	3	$3/2$
y	4	1	$1/4$	0	4	9	$9/4$

Come avrai notato dall'analisi delle coppie assegnate, la tabella associa ad ogni valore della variabile indipendente il suo quadrato. Il dominio di tale funzione è $\mathcal{D} = \mathbb{R}$, mentre l'immagine è $\mathrm{IM.} = \mathbb{R}^+ \cup \{0\}$. La formula con cui si esprime il legame algebrico delle due variabili è $y = x^2$. Costruiamo il suo grafico (figura 8.27), utilizzando i punti della tabella.

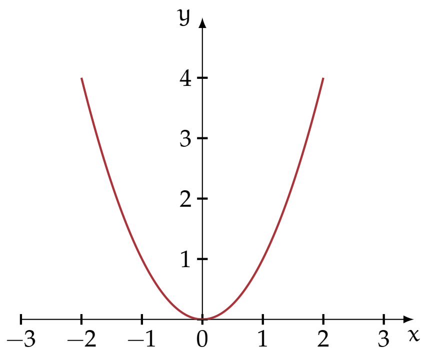


Figura 8.27: La funzione $y = x^2$.

Definizione 8.16. Una funzione in cui risulta costante e diverso da zero il rapporto tra la variabile dipendente e il quadrato della variabile indipendente si chiama *funzione di proporzionalità quadratica*. In simboli: y proporzionale a $x^2 \Leftrightarrow \frac{y}{x^2} = k$ con $k \in \mathbb{R}$ e $k \neq 0$ o anche $y = k \cdot x^2$.

Il grafico di una funzione di proporzionalità quadratica è una curva passante per l'origine, chiamata *parabola*. Il punto $O(0;0)$ si chiama *vertice* della parabola.

✍ *Esercizi proposti:* 8.55, 8.56, 8.57, 8.58, 8.59, 8.60, 8.61, 8.62

8.6.6 Funzione lineare a tratti

Problema 8.25. La ditta "Farvit" produce viti che vengono vendute a peso in imballaggi particolari il cui peso non supera i 10kg; la tabella dei prezzi esposta nel magazzino degli ordini è la seguente:

Peso	Costo (€)
peso $\leqslant$ 4kg	$1{,}5 \cdot \text{peso}$
4Kg $<$ peso $\leqslant$ 8kg	$0{,}5 \cdot \text{peso} + 4$
8Kg $<$ peso $\leqslant$ 10kg	12

Soluzione Pensando il peso come variabile indipendente che possa assumere qualunque valore reale positivo, possiamo rappresentare la tabella esposta con un grafico (figura 8.28).

Osserviamo che il punto C rappresenta il costo di un pacco di 8kg; il punto D è l'estremo di un segmento aperto a sinistra. Per un peso di $8{,}1$kg il costo è di € 10. Il grafico tracciato è formato da segmenti appartenenti a rette diverse: in questi casi si dice che la funzione è definita per casi.

Qual è il costo di una confezione di 3kg? Costo = ... Segnate il punto corrispondente sul grafico. Il punto E cosa rappresenta? .... Stabilite dominio e codominio della funzione Costo.

♦

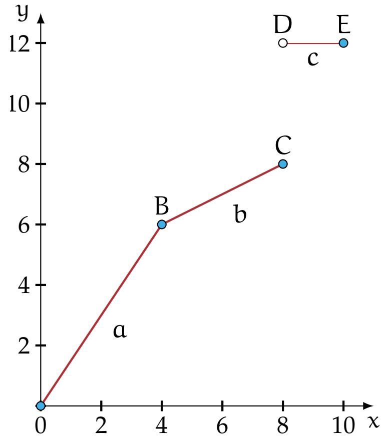


Figura 8.28

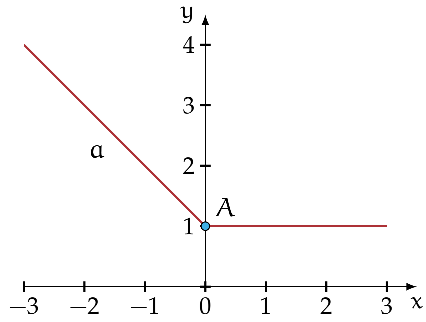


Figura 8.29

Definizione 8.17. Diciamo che una funzione è *definita per casi* quando è definita da espressioni diverse su sottoinsiemi diversi del dominio.

Esempio 8.26. Tracciate il grafico della funzione

$$f(x) = \begin{cases} f_1\colon \quad y = 1 - x & \text{per } x \leqslant 0 \\ f_2\colon \quad y = 1 & \text{per } x > 0 \end{cases}.$$

Passo I individuiamo il dominio che risulta dall'unione dei sottoinsiemi in cui è definita ciascuna espressione; quindi $\mathcal{D}_f = \mathcal{D}_{f_1} \cup \mathcal{D}_{f_2} = \mathbb{R}$.

Passo II f_1 è una funzione lineare, quindi determiniamo due punti per tracciarne il grafico: $A(0;1)$ e $B(-1;2)$; f_2 è una funzione costante.

Passo III tracciamo il grafico (figura 8.29) che risulta formato dall'unione di due semirette aventi la stessa origine $A(0;1)$.

❑ **Osservazione** I grafici dei due esempi precedenti hanno una notevole differenza: le due semirette del primo esempio hanno la stessa origine, il grafico si può tracciare senza sollevare la matita dal foglio, le semirette del secondo esempio hanno invece origine diversa e il grafico non può essere tracciato senza sollevare la matita dal foglio. Diciamo nel primo caso che la funzione è *continua* nel dominio, nel secondo caso che è *discontinua*.

✍ *Esercizio proposto:* 8.63

8.6.7 Funzione valore assoluto

Particolare importanza assume la funzione valore assoluto definita da $\mathbb{R}$ in $\mathbb{R}$:

$$f(x) = |x| = \begin{cases} y = x & \text{se } x \geqslant 0 \\ y = -x & \text{se } x < 0 \end{cases}$$

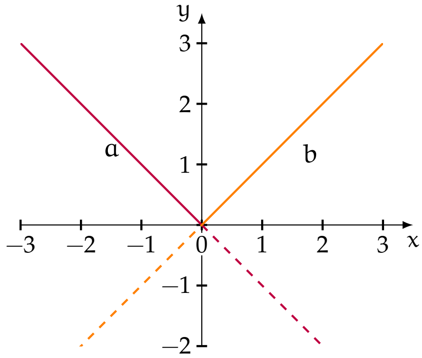


Figura 8.30: Metodo per ottenere il grafico della funzione di valore assoluto.

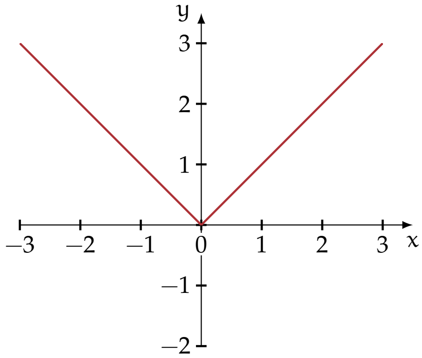


Figura 8.31: La funzione valore assoluto.

Vogliamo tracciarne il grafico. Nel riferimento cartesiano ortogonale tracciamo la retta $y = x$ e su di essa evidenziamo la semiretta b avente l'origine in O i cui punti appartengono al I quadrante; analogamente tracciamo la retta $y = -x$ e su di essa evidenziamo la semiretta a avente l'origine in O i cui punti appartengono al II quadrante. Nella figura 8.30 sono rappresentati i passi descritti e nella figura 8.31 il grafico della funzione valore assoluto come unione delle due semirette evidenziate.

❍ **Conclusione** il grafico della funzione valore assoluto di equazione $y = |x|$ è formato da due semirette aventi come origine l'origine del riferimento cartesiano. La funzione è continua, è nulla per $x = 0$ e positiva per ogni $x \in \mathbb{R} - \{0\}$, l'insieme immagine è $\text{IM.} = \{y \in \mathbb{R} \mid y \geqslant 0\}$.

✍ *Esercizi proposti:* 8.64, 8.65, 8.66