19 Sistemi di equazioni

19.1 Equazione lineare in due incognite

Definizione 19.1. Una equazione di primo grado (in n incognite) si chiama *equazione lineare*.

Problema 19.1. Determinare due numeri naturali la cui somma sia 16.

Soluzione L'ambiente del problema è l'insieme $\mathbb{N}$ dei numeri naturali. Indicati con x e y i due numeri richiesti dal quesito, il problema si formalizza con l'equazione $x + y = 16$, equazione in due incognite, di primo grado.

Determiniamo l'Insieme Soluzione del problema proposto. L'obiettivo è trovare $x \in \mathbb{N}$ e $y \in \mathbb{N}$ tali che $x + y = 16$ oppure $(x; y) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} \mid x + y = 16$. Le coppie di numeri naturali che sono soluzioni dell'equazione sono facilmente determinabili e sono tutte quelle riportate nella tabella seguente.

x	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16
y	16	15	14	13	12	11	10	9	8	7	6	5	4	3	2	1	0

L'Insieme Soluzione del problema posto è dunque formato dalle 17 coppie di numeri naturali sopra elencate. Riformuliamo il problema cercando coppie di numeri razionali la cui somma sia 16. In simboli scriviamo $x \in \mathbb{Q}$ e $y \in \mathbb{Q}$ tali che $x + y = 16$ oppure $(x; y) \in \mathbb{Q} \times \mathbb{Q} \mid x + y = 16$.

Possiamo subito dire che tutte le coppie precedenti sono soluzione del problema, ma ce ne sono infinite altre, ad esempio la coppia $(-7; +23)$ è soluzione del problema perché sostituendo a x il valore -7 e a y il valore $+23$ si ha $(-7) + (+23) = 16$. Dal procedimento si capisce che anche la coppia $(+23; -7)$ è soluzione del problema perché $(+23) + (-7) = 16$.

Se attribuiamo un valore arbitrario a x, l'altro elemento della coppia soluzione si può ottenere sottraendo da 16 il valore di x: $y = 16 - x$.

Completa tu:

- se $x = -3$ allora $y = 16 - (-3) = \ldots\ldots$ e la coppia $(\ldots; \ldots)$ è soluzione dell'equazione;
- se $x = \frac{3}{2}$ allora $y = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$, la coppia $(\ldots\ldots; \ldots\ldots)$ è soluzione dell'equazione;
- se $x = \ldots\ldots\ldots$ allora $y = \ldots\ldots\ldots$, la coppia $(\ldots\ldots; \ldots\ldots)$ è soluzione dell'equazione;
- se $x = \ldots\ldots\ldots$ allora $y = \ldots\ldots\ldots$, la coppia $(\ldots\ldots; \ldots\ldots)$ è soluzione dell'equazione.

Quindi, se l'ambiente del problema è l'insieme $\mathbb{Q}$, troviamo infinite coppie di numeri razionali che soddisfano il problema. E ancora, se formuliamo il problema nell'insieme dei numeri reali $\mathbb{R}$, troveremo tutte le infinite coppie soluzione del problema: basta assegnare all'incognita x valori reali arbitrari e determinare di conseguenza il corrispondente valore di $y = 16 - x$.

Se $x = \sqrt{2} \Rightarrow y = 16 - \sqrt{2}$, quindi la coppia $\left(\sqrt{2}; 16 - \sqrt{2}\right)$ è soluzione dell'equazione.

Completa:

- se $x = -2\sqrt{3}+1$ allora $y = \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$
- se $x = 16 + \frac{3\sqrt{5}}{2}$ allora $y = \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$

♦

Definizione 19.2. Si chiama *Insieme Soluzione* (I. S.) di un'equazione di primo grado in due incognite x e y, l'*insieme delle coppie ordinate* di valori che sostituiti rispettivamente a x e a y rendono vera l'uguaglianza.

✍ *Esercizi proposti:* 19.1, 19.2, 19.3

19.1.1 Rappresentazione di un'equazione lineare sul piano cartesiano

---

Esempio 19.2. Determinare l'insieme soluzione dell'equazione $3y - x + 1 = 0$ con $x \in \mathbb{R}$ e $y \in \mathbb{R}$.

Osserviamo che l'equazione assegnata ha due incognite ed è di primo grado; l'insieme soluzione sarà formato dalle infinite coppie ordinate $(x; y)$ di numeri tali che $3y - x + 1 = 0$.

Possiamo verificare che la coppia $(1; 0)$ è soluzione dell'equazione, ma come facciamo a determinare tutte le coppie che soddisfano quella equazione?

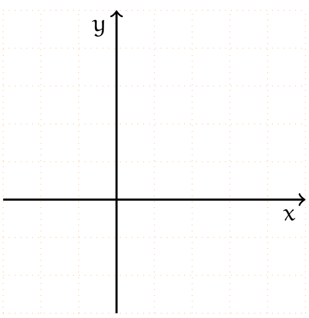
Fissiamo l'attenzione sull'incognita y, pensiamo l'equazione come un'equazione nella sola y, ricaviamo y come abbiamo fatto nelle equazioni di primo grado ad una sola incognita, applicando i principi di equivalenza delle equazioni:

$$3y - x + 1 = 0 \Rightarrow 3y = x - 1 \Rightarrow \frac{3y}{3} = \frac{x-1}{3} \Rightarrow y = \frac{1}{3}x - \frac{1}{3}.$$

Dunque, al variare di x in $\mathbb{R}$, si ottengono tutte le infinite soluzioni dell'equazione assegnata. Prova a determinarne alcune:

x	y	coppia
0	$\dots\dots$	$(0;\dots\dots)$
1	$\dots\dots$	$(1;\dots\dots)$
-1	$\dots\dots$	$(-1;\dots\dots)$

In verità non possiamo elencare tutte le infinite coppie che risolvono quella equazione, ma possiamo darne una rappresentazione grafica.



La formula

$$y = \frac{1}{3}x - \frac{1}{3}$$

rappresenta una funzione lineare; riportiamo le coppie trovate in un riferimento cartesiano ortogonale e tracciamo la retta che rappresenta la funzione.

Una qualunque equazione lineare $ax + by + c = 0$ ammette infinite soluzioni, costituite da coppie ordinate di numeri reali; esse sono le coordinate cartesiane dei punti della retta grafico della funzione $y = -\frac{a}{b}x - \frac{c}{b}$. La formula $y = -\frac{a}{b}x - \frac{c}{b}$ si chiama *equazione esplicita della retta*.

Esempio 19.3. Risolvi graficamente l'equazione $y + \frac{2}{3}x - 2 = 0$, con $x \in \mathbb{R}$ e $y \in \mathbb{R}$.

L'equazione assegnata è in due incognite, di primo grado, è cioè una equazione lineare. Nel riferimento cartesiano ortogonale essa rappresenta una retta.

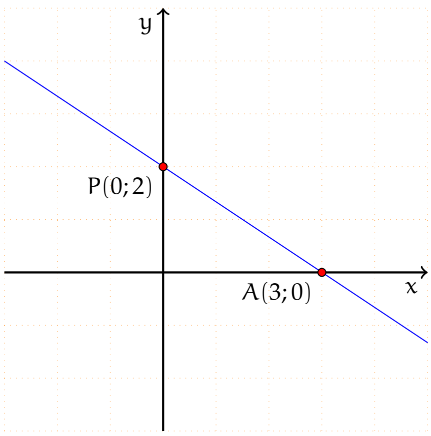
Troviamo l'equazione esplicita della retta:

$$y + \frac{2}{3}x - 2 = 0 \Rightarrow y = -\frac{2}{3}x + 2.$$

Individuiamo l'ordinata del punto di intersezione della retta con l'asse y: $q = 2$, quindi $P(0;2)$ è un punto della retta.

Troviamo un altro punto appartenente alla retta: se $x = 3$ allora $y = 0$, quindi $A(3;0)$ è un punto della retta.

Disegniamo la retta nel piano cartesiano: le coppie $(x;y)$, coordinate dei punti della retta tracciata, sono le infinite soluzioni dell'equazione assegnata.



✍ *Esercizi proposti:* 19.4, 19.5, 19.6

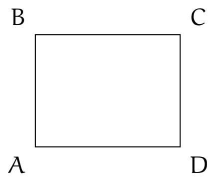
19.2 Risoluzione di sistemi di equazioni lineari

Problema 19.4. Nel rettangolo $ABCD$, la somma del doppio di $\overline{AB}$ con la metà di $\overline{BC}$ è di 98m; aumentando $\overline{AB}$ di 3m e $\overline{BC}$ di 2m, il perimetro del rettangolo diventa di 180m. Determinare l'area in m^2 del rettangolo.

Dati:

$$2\overline{AB} + \frac{1}{2}\overline{BC} = 98\text{m},$$
$$2(\overline{AB} + 3 + \overline{BC} + 2) = 180\text{m}.$$

Obiettivo: Area



Soluzione Per determinare l'area del rettangolo dobbiamo moltiplicare le misure delle sue dimensioni Area $= \overline{AB} \cdot \overline{BC}$ che però non conosciamo; il problema ha quindi due incognite.

Analizzando i dati possiamo osservare che ci sono fornite due informazioni che legano le grandezze incognite. Se poniamo $\overline{AB} = x$ e $\overline{BC} = y$ otteniamo le due equazioni:

$$2x + \frac{1}{2}y = 98; \qquad 2(x + 3 + y + 2) = 180$$

che dovranno risultare soddisfatte per una stessa coppia di numeri reali.

♦

Definizione 19.3. Si definisce *sistema di equazioni* l'insieme di più equazioni, in due o più incognite, che devono essere verificate contemporaneamente. La scrittura formale si ottiene raggruppando le equazioni mediante una parentesi graffa.

Analizzeremo in particolare i sistemi in due equazioni e due incognite.

Definizione 19.4. L'Insieme Soluzione (I. S.) di un sistema di equazioni in due incognite è formato da tutte le coppie di valori che rendono contemporaneamente vere tutte le equazioni del sistema.

Definizione 19.5. Si chiama *grado di un sistema* il prodotto dei gradi delle equazioni che lo compongono. In particolare, se le equazioni che lo compongono sono di primo grado, il sistema si chiama *sistema lineare*.

La *forma normale* o *canonica* di un sistema lineare è:

$$\begin{cases} a_1x + b_1y = c_1 \\ a_2x + b_2y = c_2 \end{cases} \text{, con } a_1, b_1, c_1, a_2, b_2 \text{ e } c_{21} \text{ numeri reali.}$$

Il problema 19.4 si formalizza dunque con il sistema

$$\begin{cases} 2x + \dfrac{1}{2}y = 98 \\ 2(x+3+y+2) = 180 \end{cases}$$

composto da due equazioni in due incognite di primo grado e pertanto il suo grado è 1 (è un sistema lineare). La sua forma canonica si ottiene sviluppando i calcoli nella seconda equazione

$$\begin{cases} 2x + \dfrac{1}{2}y = 98 \\ 2x + 2y = 170 \end{cases}.$$

19.2.1 Procedimento per ottenere la forma canonica di un sistema

La forma canonica di un sistema lineare di due equazioni in due incognite è, come abbiamo visto,

$$\begin{cases} a_1x + b_1y = c_1 \\ a_2x + b_2y = c_2 \end{cases}$$

con a_1, b_1, c_1, a_2, b_2 e c_2 numeri reali.

Esempio 19.5. Scrivere in forma canonica il sistema:

$$\begin{cases} 4x^2 - (y+2x)^2 = x + 1 - y(4x + y - 1) \\ \dfrac{x-2}{2} + \dfrac{y+3}{3} = 0 \end{cases}.$$

Eseguiamo i calcoli nella prima equazione e riduciamo allo stesso denominatore la seconda equazione:

$$\begin{cases} 4x^2 - y^2 - 4x^2 - 4xy = x + 1 - 4xy - y^2 + y \\ 3x - 6 + 2y + 6 = 0 \end{cases}.$$

Per mezzo del primo principio di equivalenza delle equazioni portiamo le incognite al primo membro e sommiamo i termini simili, ottenendo

$$\begin{cases} x + y = -1 \\ 3x + 2y = 0 \end{cases}$$

che è la forma canonica cercata.

19.2.2 Metodo di sostituzione

Risolvere il sistema significa determinare tutte le coppie di numeri reali che soddisfano contemporaneamente le due equazioni.

Analizziamo i diversi metodi che permettono di ottenere l'Insieme Soluzione, cominciamo dal *metodo di sostituzione*.

Esempio 19.6. $\begin{cases} -3x + y = 2 \\ 5x - 2y = 7 \end{cases}.$

Il sistema si presenta già in forma canonica. Il metodo di sostituzione si svolge nei seguenti passi:

Passo I scegliamo una delle due equazioni e una delle due incognite da cui partire. Applicando i principi d'equivalenza delle equazioni, ricaviamo questa incognita. Nel nostro esempio, partiamo dalla prima equazione e ricaviamo l'incognita y

$$\begin{cases} -3x + y = 2 \\ 5x - 2y = 7 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = 2 + 3x \\ 5x - 2y = 7 \end{cases}.$$

Passo II sostituiamo nella seconda equazione, al posto dell'incognita trovata, l'espressione a cui essa risulta uguale dalla prima equaizone. Nel nostro esempio abbiamo

$$\begin{cases} y = 2 + 3x \\ 5x - 2y = 7 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = 2 + 3x \\ 5x - 2(2 + 3x) = 7 \end{cases}.$$

Passo III svolgiamo i calcoli nella seconda equazione. Nel nostro esempio

$$\begin{cases} y = 2 + 3x \\ 5x - 4 - 6x = 7 \end{cases}.$$

Passo IV risolviamo la seconda equazione, che ora è un'equazione di primo grado in una sola variabile. Nel nostro esempio, ricaviamo x dalla seconda equazione

$$\begin{cases} y = 2 + 3x \\ 5x - 4 - 6x = 7 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = 2 + 3x \\ -x = 7 + 4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = 2 + 3x \\ x = -11 \end{cases}.$$

Passo V sostituiamo nella prima equazione il valore numerico dell'incognita trovata e avremo un'equazione di primo grado nell'altra incognita. Risolviamo quest'ultima equazione. Nel nostro esempio

$$\begin{cases} y = 2 + 3x \\ x = -11 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = -31 \\ x = -11 \end{cases}.$$

Passo VI possiamo ora scrivere l'insieme soluzione. Nel nostro esempio $\text{I. S.} = \{(-11; -31)\}$.

In conclusione, il sistema è *determinato*, la coppia ordinata $(-11; -31)$ verifica contemporaneamente le due equazioni del sistema.

Esempio 19.7. $\begin{cases} \frac{1}{2}(x-1) + 3\left(y + \frac{1}{3}\right) = \frac{1}{6} \\ y\left(1 + \frac{2}{5}\right) - 2 = \frac{4}{5} - \frac{x-1}{5} \end{cases}.$

a) Il sistema non si presenta nella forma canonica. Svolgiamo i calcoli e portiamo il sistema in forma canonica:

$$\begin{cases} 3x + 18y = -2 \\ x + 7y = 15 \end{cases};$$

b) ricaviamo x dalla seconda equazione:

$$\begin{cases} 3x + 18y = -2 \\ x = 15 - 7y \end{cases};$$

c) abbiamo fatto questa scelta perché possiamo ottenere il valore di x con facilità e senza frazioni. Sostituiamo nella prima equazione al posto di x l'espressione trovata:

$$\begin{cases} 3 \cdot (15 - 7y) + 18y = -2 \\ x = 15 - 7y \end{cases};$$

d) risolviamo la prima equazione che è di primo grado nella sola incognita y:

$$\begin{cases} -3y = -47 \\ x = 15 - 7y \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = \frac{47}{3} \\ x = 15 - 7y \end{cases};$$

e) sostituiamo il valore di y nella seconda equazione:

$$\begin{cases} y = \frac{47}{3} \\ x = 15 - 7\left(\frac{47}{3}\right) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = -\frac{284}{3} \\ y = \frac{47}{3} \end{cases}.$$

Possiamo scrivere l'insieme delle soluzioni:

$$\mathrm{I.\,S.} = \left\{\left(-\frac{284}{3}; \frac{47}{3}\right)\right\}.$$

In conclusione, il sistema è *determinato*; la coppia ordinata $\left(-\frac{284}{3}; \frac{47}{3}\right)$ verifica contemporaneamente le due equazioni del sistema.

Esempio 19.8. $\begin{cases} \dfrac{1}{y} = 2\left(\dfrac{x}{y} - \dfrac{1}{2}\right) \\ \dfrac{5x+4y+19}{x} = -2 \end{cases}$.

Il sistema è fratto poiché in ciascuna equazione compare l'incognita al denominatore; per poter applicare il secondo principio di equivalenza delle equazioni eliminando i denominatori, dobbiamo porre le C. E. e individuare il Dominio $\mathcal{D}$ del sistema assegnato, cioè l'insieme in cui si troverà C. E. : $y \neq 0$ e $x \neq 0$ per cui $\mathcal{D} = \mathbb{R}_0 \times \mathbb{R}_0$.

Portiamo a forma canonica applicando i principi di equivalenza delle equazioni:

$$\begin{cases} \dfrac{1}{y} = 2\left(\dfrac{x}{y} - \dfrac{1}{2}\right) \\ \dfrac{5x+4y+19}{x} = -2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \dfrac{1}{y} = \dfrac{2x}{y} - 1 \\ 5x+4y+19 = -2x \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2x - y = 1 \\ 7x + 4y = -19 \end{cases}.$$

Applichiamo il metodo di sostituzione:

$$\begin{cases} 2x - y = 1 \\ 7x + 4y = -19 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = 2x - 1 \\ 7x + 4y = -19 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = 2x - 1 \\ 7x + 4(2x-1) = -19 \end{cases}$$
$$\Rightarrow \begin{cases} y = 2x - 1 \\ 15x = -15 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = 2(-1) - 1 \\ x = -1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = -3 \\ x = -1 \end{cases}.$$

La soluzione $(-1; -3)$ è compatibile con le condizioni di esistenza.

✍ *Esercizi proposti:* 19.7, 19.8, 19.9, 19.10, 19.11, 19.12, 19.13, 19.14, 19.15

19.2.3 Metodo del confronto

Esempio 19.9. $\begin{cases} -3x + y = 2 \\ 5x - 2y = 7 \end{cases}$.

Passo I ricaviamo da entrambe le equazioni la stessa incognita. Nel nostro esempio ricaviamo la y contemporaneamente da entrambe le equazioni:

$$\begin{cases} y = 2 + 3x \\ y = \dfrac{5x-7}{2} \end{cases}.$$

Passo II poiché il primo membro delle equazioni è lo stesso, possiamo uguagliare anche i secondi membri, ottenendo un'equazione in una incognita. Nell'esempio $2 + 3x = \dfrac{5x-7}{2}$.

Passo III risolviamo l'equazione trovata e determiniamo il valore di una delle due incognite. Nel nostro esempio $4 + 6x = 5x - 7 \Rightarrow x = -11$.

Passo IV si sostituisce il valore trovato dell'incognita in una delle due equazioni e ricaviamo l'altra incognita. Nel nostro esempio:

$$\begin{cases} x = -11 \\ y = 2 + 3x \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = -11 \\ y = -31 \end{cases}.$$

Passo V possiamo ora scrivere l'insieme soluzione. Nel nostro esempio: $\text{I. S.} = \{(-11; -31)\}$.

In conclusione, il sistema è determinato, la coppia ordinata $(-11; -31)$ verifica contemporaneamente le due equazioni del sistema.

✍ *Esercizi proposti:* 19.16, 19.17, 19.18, 19.19

19.2.4 Metodo di riduzione

Il metodo di riduzione si basa sulla seguente osservazione: se un sistema è formato dalle equazioni $A = B$ e $C = D$, possiamo dedurre da queste la nuova equazione $A + C = B + D$ ad esse equivalente.

$$\begin{cases} A = B \\ C = D \end{cases} \Rightarrow A + C = B + D.$$

L'equazione ottenuta potrebbe presentarsi in una sola incognita e quindi potrebbe essere facile trovare il valore di quella incognita.

Esempio 19.10. $\begin{cases} 3x - 5y = 1 \\ 2x + 5y = -4 \end{cases}.$

Sommando membro a membro le due equazioni otteniamo $(3x - 5y) + (2x + 5y) = 1 - 4$. I termini in y si eliminano perché opposti. Sommando i monomi simili si ha $5x = -3 \Rightarrow x = -\frac{3}{5}$.

Questo metodo, applicato semplicemente sommando membro a membro le equazioni, funziona solo se i coefficienti di una delle due incognite sono opposti. Solo in questo caso sommando le equazioni una delle due incognite "sparisce". Tuttavia con qualche accorgimento è possibile applicarlo in ogni caso.

Sfruttiamo il secondo principio di equivalenza delle equazioni che ci permette di moltiplicare ambo i membri di un'equazione per uno stesso numero diverso da zero. In questo modo possiamo sempre trasformare le due equazioni affinché l'incognita x appaia con coefficienti opposti nella prima e nella seconda equazione.

Esempio 19.11. $\begin{cases} 3x - 5y = 1 \\ 5x - 4y = -4 \end{cases}.$

Nel nostro esempio possiamo moltiplicare la prima equazione per 5 e la seconda per -3, ottenendo:

$$\begin{matrix} +5 \\ -3 \end{matrix} \begin{cases} 3x - 5y = 1 \\ 5x - 4y = -4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 15x - 25y = 5 \\ -15x + 12y = 12 \end{cases};$$

sommando membro a membro abbiamo

$$(15x - 25y) + (-15x + 12y) = 5 + 12 \quad \Rightarrow \quad -13y = 17 \quad \Rightarrow \quad y = -\frac{17}{13}.$$

Dopo aver determinato il valore di una incognita possiamo sostituirlo in una qualsiasi equazione del sistema e determinare il valore dell'altra incognita o ripetere il procedimento per l'altra incognita moltiplicando come segue:

$$\begin{array}{c} +4 \\ -5 \end{array} \left\{ \begin{array}{l} 3x - 5y = 1 \\ 5x - 4y = -4 \end{array} \right. \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} 12x - 20y = 4 \\ -25x + 20y = 20 \end{array} \right. .$$

Sommando le due equazioni otteniamo $-13x = 24 \Rightarrow x = -\frac{24}{13}$.

Abbiamo così determinato la coppia soluzione del sistema $\left(-\frac{24}{13}; -\frac{17}{13}\right)$.

Generalizzazione del metodo di riduzione

Assegnato il sistema lineare $\left\{ \begin{array}{l} a_1x + b_1y = c_1 \\ a_2x + b_2y = c_2 \end{array} \right.$ con $a_1, b_1, c_1, a_2, b_2, c_2$ numeri reali.

Passo I per eliminare y moltiplichiamo la prima equazione per b_2 e la seconda per $-b_1$:

$$\left\{ \begin{array}{l} a_1b_2x + b_1b_2y = c_1b_2 \\ -a_2b_1x - b_1b_2y = -b_1c_2 \end{array} \right. .$$

Passo II sommiamo le due equazioni:

$$a_1b_2x - a_2b_1x = c_1b_2 - b_1c_2 \quad \Rightarrow \quad (a_1b_2 - a_2b_1)x = c_1b_2 - b_1c_2.$$

Passo III ricaviamo l'incognita x:

$$x = \frac{c_1b_2 - b_1c_2}{a_1b_2 - a_2b_1}, \text{ con } a_1b_2 - a_2b_1 \neq 0.$$

Passo IV per eliminare x moltiplichiamo la prima equazione per $-a_2$ e la seconda per a_1:

$$\left\{ \begin{array}{l} -a_1a_2x - a_2b_1y = -a_2c_1 \\ a_1a_2x + a_1b_2y = a_1c_2 \end{array} \right.$$

Passo V sommiamo le due equazioni

$$-a_2b_1y + a_1b_2y = -a_2c_1 + a_1c_2 \quad \Rightarrow \quad (a_1b_2 - a_2b_1)y = a_1c_2 - a_2c_1.$$

Passo VI ricaviamo l'incognita y:

$$y = \frac{a_1c_2 - a_2c_1}{a_1b_2 - a_2b_1}, \text{ con } a_1b_2 - a_2b_1 \neq 0.$$

La soluzione è

$$\left(\frac{c_1b_2 - b_1c_2}{a_1b_2 - a_2b_1}; \frac{a_1c_2 - a_2c_1}{a_1b_2 - a_2b_1}\right), \text{ con } a_1b_2 - a_2b_1 \neq 0.$$

✍ *Esercizi proposti:* 19.20, 19.21, 19.22, 19.23

19.2.5 Metodo di Cramer

Definizione 19.6. Si chiama *matrice del sistema lineare* di due equazioni in due incognite la tabella

$$\begin{bmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{bmatrix}$$

in cui sono sistemati i coefficienti delle incognite del sistema posto in forma canonica; si chiama *determinante della matrice* il numero reale

$$D = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} = a_1 \cdot b_2 - b_1 \cdot a_2$$

ad essa associato.

Dalla generalizzazione del metodo di riduzione, abbiamo visto che la soluzione del sistema è data da

$$\left(\frac{c_1b_2 - b_1c_2}{a_1b_2 - a_2b_1}; \frac{a_1c_2 - a_2c_1}{a_1b_2 - a_2b_1} \right), \text{ con } a_1b_2 - a_2b_1 \neq 0$$

ovvero

$$\left(\frac{c_1b_2 - b_1c_2}{D}; \frac{a_1c_2 - a_2c_1}{D} \right), \text{ con } D \neq 0$$

quindi possiamo dedurre che: un *sistema lineare* è *determinato*, ammette cioè una sola coppia soluzione, *se il determinante della matrice del sistema è diverso da zero*.

✍ *Esercizi proposti:* 19.24, 19.25

La *regola di Cramer*[1] (o *metodo do Cramer*) ci permette di stabilire la coppia soluzione di un sistema lineare di due equazioni in due incognite, costruendo e calcolando tre determinanti:

a) D il determinante della matrice del sistema:

$$D = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} = a_1 \cdot b_2 - b_1 \cdot a_2;$$

b) D_x il determinante della matrice ottenuta sostituendo agli elementi della prima colonna di D i termini noti.

$$D_x = \begin{vmatrix} c_1 & b_1 \\ c_2 & b_2 \end{vmatrix} = c_1 \cdot b_2 - b_1 \cdot c_2;$$

c) D_y il determinante della matrice ottenuta sostituendo agli elementi della seconda colonna di D i termini noti.

$$D_y = \begin{vmatrix} a_1 & c_1 \\ a_2 & c_2 \end{vmatrix} = a_1 \cdot c_2 - c_1 \cdot a_2.$$

Se $D \neq 0$ il sistema è determinato e la coppia soluzione è

$$\left(\frac{D_x}{D}; \frac{D_y}{D} \right).$$

[1] dal nome del matematico svizzero Gabriel Cramer (1704 - 1752).

Esempio 19.12. $\begin{cases} 2x+3y=4 \\ 4x-3y=2 \end{cases}$.

Calcoliamo i determinanti D, D_x e D_y.

$$D=\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}=a_1\cdot b_2-b_1\cdot a_2 \Rightarrow D=\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 4 & -3 \end{vmatrix}=2\cdot(-3)-3\cdot 4=-6-12=-18.$$

Poiché $D\neq 0$ il sistema è determinato.

$$D_x=\begin{vmatrix} c_1 & b_1 \\ c_2 & b_2 \end{vmatrix}=c_1\cdot b_2-b_1\cdot c_2 \Rightarrow D_x=\begin{vmatrix} 4 & 3 \\ 2 & -3 \end{vmatrix}=4\cdot(-3)-3\cdot 2=-12-6=-18,$$

$$D_y=\begin{vmatrix} a_1 & c_1 \\ a_2 & c_2 \end{vmatrix}=a_1\cdot c_2-c_1\cdot a_2 \Rightarrow D_y=\begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 4 & 2 \end{vmatrix}=2\cdot 2-4\cdot 4=4-16=-12.$$

$$x=\frac{D_x}{D}=\frac{-18}{-18}=1;\quad y=\frac{D_y}{D}=\frac{-12}{-18}=\frac{2}{3}.$$

✍ *Esercizi proposti:* 19.26, 19.27, 19.28, 19.29, 19.30, 19.31, 19.32

19.2.6 Classificazione dei sistemi rispetto alle soluzioni

Dato un sistema in forma canonica $\begin{cases} a_1x+b_1y=c_1 \\ a_2x+b_2y=c_2 \end{cases}$ ricordando che:

$$D=\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}=a_1\cdot b_2-b_1\cdot a_2;$$

$$D_x=\begin{vmatrix} c_1 & b_1 \\ c_2 & b_2 \end{vmatrix}=c_1\cdot b_2-b_1\cdot c_2;$$

$$D_y=\begin{vmatrix} a_1 & c_1 \\ a_2 & c_2 \end{vmatrix}=a_1\cdot c_2-c_1\cdot a_2;$$

- se $D\neq 0$ il sistema è *determinato*: esiste una sola coppia soluzione $x=\frac{D_x}{D}$, $y=\frac{D_y}{D}$;
- se $D=0$ si possono verificare due casi:
  - 1° caso: se $D_x=0$ e $D_y=0$ il sistema è *indeterminato*: ogni coppia di numeri reali che verifica un'equazione, verifica anche l'altra;
  - 2° caso: se $D_x\neq 0$ e $D_y\neq 0$ il sistema è *impossibile*: non esiste alcuna coppia di valori che soddisfa entrambe le equazioni, cioè $\text{I. S.}=\emptyset$.

Esempio 19.13. $\begin{cases} 2x-3y=1 \\ 4x-3y=2 \end{cases}$.

$$D=\begin{vmatrix} 2 & -3 \\ 4 & -3 \end{vmatrix}=2\cdot(-3)+3\cdot(4)=-6+12=6\neq 0;$$

il sistema è determinato.

Esempio 19.14. $\begin{cases} 8x - 6y = 2 \\ 4x - 3y = 1 \end{cases}$.

$$D = \begin{vmatrix} 8 & -6 \\ 4 & -3 \end{vmatrix} = 8 \cdot (-3) + 6 \cdot (4) = -24 + 24 = 0;$$

il sistema è indeterminato o impossibile.

$$D_x = \begin{vmatrix} 2 & -6 \\ 1 & -3 \end{vmatrix} = 2 \cdot (-3) - (-6) \cdot 1 = -6 + 6 = 0;$$

$$D_y = \begin{vmatrix} 8 & 2 \\ 4 & 1 \end{vmatrix} = 8 \cdot 1 - 2 \cdot 4 = 8 - 8 = 0.$$

Il sistema è indeterminato.

Esempio 19.15. $\begin{cases} 8x - 6y = 1 \\ 4x - 3y = 2 \end{cases}$.

$$D = \begin{vmatrix} 8 & -6 \\ 4 & -3 \end{vmatrix} = 8 \cdot (-3) - 4 \cdot (-6) = -24 + 24 = 0;$$

il sistema è indeterminato o impossibile.

$$D_x = \begin{vmatrix} 1 & -6 \\ 2 & -3 \end{vmatrix} = 1 \cdot (-3) - (-6) \cdot 2 = -3 + 12 = 9;$$

$$D_y = \begin{vmatrix} 8 & 1 \\ 4 & 2 \end{vmatrix} = 8 \cdot 2 - 1 \cdot 4 = 16 - 4 = 12.$$

Il sistema è impossibile.

Osserviamo che se $D = 0$ si ha

$$a_1 \cdot b_2 - b_1 \cdot a_2 = 0 \quad \Rightarrow \quad a_1 \cdot b_2 = b_1 \cdot a_2 \quad \Rightarrow \quad \frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2}.$$

Ciò significa che, se i coefficienti delle incognite della prima equazione sono proporzionali ai coefficienti delle incognite della seconda equazione allora il sistema è indeterminato o impossibile.

In particolare, se poi $D_x = 0$ si ha

$$c_1 \cdot b_2 - b_1 \cdot c_2 = 0 \quad \Rightarrow \quad c_1 \cdot b_2 = b_1 \cdot c_2 \quad \Rightarrow \quad \frac{c_1}{c_2} = \frac{b_1}{b_2}.$$

Quindi se anche i termini noti delle due equazioni sono nella stessa proporzione, cioè se

$$\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} = \frac{c_1}{c_2}$$

il sistema è indeterminato.

Se invece $D_x \neq 0$, cioè

$$\frac{c_1}{c_2} \neq \frac{b_1}{b_2}$$

il sistema è impossibile.

✍ *Esercizi proposti:* 19.33, 19.34, 19.35, 19.36, 19.37, 19.38, 19.39, 19.40

19.2.7 Il metodo grafico

Il problema della ricerca dell'Insieme Soluzione di un'equazione lineare ci ha condotto ad un proficuo collegamento tra concetti algebrici e concetti geometrici; in particolare abbiamo visto che:

Concetto algebrico	Concetto geometrico
Coppia ordinata di numeri reali	Punto del piano dotato di riferimento cartesiano
Equazione lineare	Retta
Coppia soluzione dell'equazione $ax + by + c = 0$	Punto della retta di equazione $y = -\frac{a}{b}x - \frac{c}{b}$

Vedremo ora come sia possibile sfruttare questi collegamenti per risolvere un sistema lineare di due equazioni in due incognite.

Problema 19.16. Determina due numeri reali di cui si sa che la loro somma è 6 e il doppio del primo aumentato della metà del secondo è ancora 6.

Soluzione Indichiamo con x e y i due numeri incogniti; il problema si formalizza con due equazioni: $x + y = 6$ e $2x + \frac{1}{2}y = 6$.

Dobbiamo individuare una coppia di numeri reali che sia soluzione dell'una e dell'altra equazione.

Il punto di vista algebrico La coppia di numeri reali x e y che risolve il problema è quella che risolve il sistema

$$\begin{cases} x + y = 6 \\ 2x + \dfrac{1}{2}y = 6 \end{cases}.$$

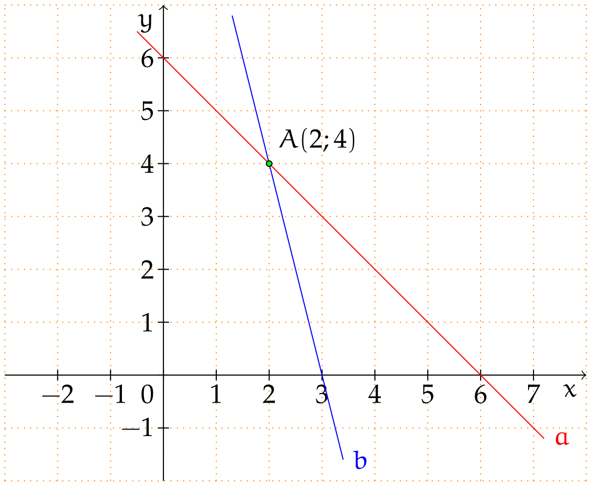
Applicando uno qualunque dei metodi algebrici esposti si ottiene $x = 2$ e $y = 4$.

Il punto di vista geometrico Il problema si può spostare in ambiente geometrico: la coppia soluzione rappresenta un punto che appartiene sia alla retta rappresentata dalla prima equazione, sia alla retta rappresentata dalla seconda equazione. Quindi rappresenta il punto di intersezione delle due rette.

Si rappresenta il sistema di rette nel riferimento cartesiano ortogonale. La retta a è quella di equazione $x + y = 6$, che passa per i punti $(6; 0)$ e $(0; 6)$.

La retta b è quella di equazione $2x + \frac{1}{2}y = 6$, che passa per i punti $(3; 0)$ e $(0; 12)$.

Il punto $A(2; 4)$ è il punto di intersezione delle due rette, le sue coordinate formano la coppia soluzione del sistema e di conseguenza sono i due numeri che stiamo cercando nel problema.



♦

Esempio 19.17. $\begin{cases} 2x-3y=7 \\ x+y+6=5(x-y) \end{cases}$.

Il punto di vista algebrico Portiamo in forma canonica il sistema, ottenendo:

$$\begin{cases} 2x-3y=7 \\ x+y+6=5(x-y) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2x-3y=7 \\ x+y+6=5x-5y \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2x-3y=7 \\ -4x+6y=-6 \end{cases}.$$

Si può notare che il sistema ha i coefficienti delle incognite in proporzione:

$$\frac{a_1}{a_2}=\frac{2}{-4}=-\frac{1}{2} \quad \text{e} \quad \frac{b_1}{b_2}=\frac{-3}{+6}=-\frac{1}{2},$$

mentre i termini noti non sono nella stessa proporzione

$$\frac{c_1}{c_2}=\frac{7}{-1},$$

quindi il sistema è impossibile: $\text{I. S.}=\emptyset$.

Il punto di vista geometrico Determiniamo le equazioni esplicite delle rette rappresentate dalle due equazioni lineari del sistema assegnato. Si ha:

$$\begin{cases} y=\dfrac{2}{3}x-\dfrac{7}{3} \\ y=\dfrac{2}{3}x-1 \end{cases}.$$

Le due rette (figura 19.1) hanno lo stesso coefficiente angolare (il coefficiente della x) e quindi hanno la stessa inclinazione, pertanto sono parallele. Non hanno quindi nessun punto di intersezione $r_1 \cap r_2 = \emptyset$, il sistema è impossibile: $\text{I. S.}=\emptyset$.

Esempio 19.18. $\begin{cases} 2x+3y+1=0 \\ y+\dfrac{1}{3}=-\dfrac{2}{3}x \end{cases}$.

Il punto di vista algebrico Scriviamo in forma canonica il sistema $\begin{cases} 2x+3y=-1 \\ 2x+3y=-1 \end{cases}$.

Osserviamo che sono due equazioni identiche, pertanto il rapporto tra i coefficienti delle incognite e il rapporto tra i termini noti è sempre 1. Il sistema è indeterminato. D'altra parte, se le due equazioni sono identiche significa che tutte le infinite coppie $(x;y)$ che rendono vera la prima equazione, verificano anche la seconda.

Il punto di vista geometrico Rappresentiamo nel riferimento cartesiano ortogonale (figura 19.2) le due rette aventi come equazioni le equazioni del sistema. È semplice rendersi conto che le due rette coincidono; tutti i punti di una coincidono con tutti i punti dell'altra: $r_1 \cap r_2 = r_1 = r_2$.

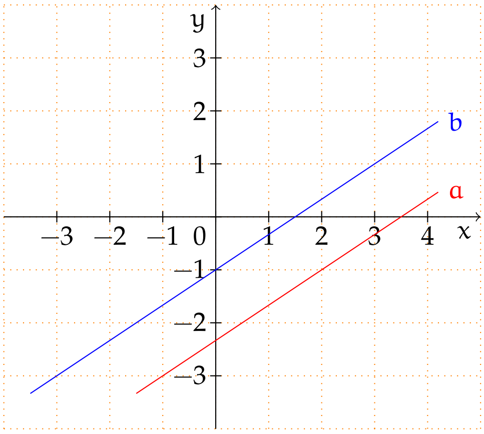


Figura 19.1: Esempio 19.17

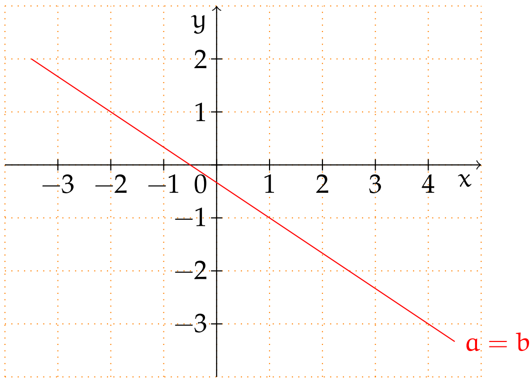


Figura 19.2: Esempio 19.18

✍ *Esercizi proposti:* 19.41, 19.42, 19.43, 19.44, 19.45

19.3 Sistemi frazionari o fratti

Nel seguente sistema

$$\begin{cases} \dfrac{2}{x+1} - \dfrac{3}{y-2} = \dfrac{2x-5y+4}{xy+y-2-2x} \\ 3y+2(x-y-1) = 5x-8(-x-2y+1) \end{cases}$$

di due equazioni in due incognite, la prima equazione presenta le incognite anche al denominatore.

Definizione 19.7. Si chiama *sistema frazionario* o *fratto* un sistema in cui almeno in una delle equazioni che lo compongono compare l'incognita al denominatore.

Poiché risolvere un sistema significa determinare tutte le coppie ordinate che verificano entrambe le equazioni, nel sistema fratto dovremo innanzi tutto definire il Dominio o Insieme di Definizione nel quale individuare le coppie soluzioni.

Definizione 19.8. Si chiama *Dominio* ($\mathcal{D}$) o *Insieme di Definizione* (ID) del sistema fratto, l'insieme delle coppie ordinate che rendono diversi da zero i denominatori che compaiono nelle equazioni.

Esempio 19.19. $\begin{cases} \dfrac{2}{x+1} - \dfrac{3}{y-2} = \dfrac{2x-5y+4}{xy+y-2-2x} \\ 3y+2(x-y-1) = 5x-8(-x-2y+1) \end{cases}.$

Passo I Scomponiamo i denominatori nella prima equazione per determinare il mcm.

$$\begin{cases} \dfrac{2}{x+1} - \dfrac{3}{y-2} = \dfrac{2x-5y+4}{(x+1)(y-2)} \\ 3y+2(x-y-1) = 5x-8(-x-2y+1) \end{cases} \Rightarrow \text{mcm} = (x+1)(y-2).$$

Passo II Poniamo le Condizioni di Esistenza da cui determineremo il Dominio del sistema:

$$\text{C. E.}: \begin{cases} x \neq -1 \\ y \neq 2 \end{cases} \Rightarrow \mathcal{D} = \text{ID} = \{(x;y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \mid x \neq -1 \text{ e } y \neq 2\}.$$

Passo III Riduciamo allo stesso denominatore la prima equazione e svolgiamo i calcoli nella seconda per ottenere la forma canonica: $\begin{cases} -5x+7y = 11 \\ 11x+15y = 6 \end{cases}.$

Passo IV Risolviamo il sistema e otteniamo la coppia soluzione $\left(-\frac{123}{152}; \frac{151}{152}\right)$ che è accettabile.

Esempio 19.20. $\begin{cases} \dfrac{3x+y-1}{x} = 3 \\ \dfrac{2x+3y}{y-1} = 7 \end{cases}.$

Passo I Per la prima equazione si ha mcm $= x$; per la seconda mcm $= y-1$.

Passo II Poniamo le Condizioni di Esistenza da cui determineremo il Dominio:

$$\text{C. E.}: \begin{cases} x \neq 0 \\ y \neq 1 \end{cases} \Rightarrow \mathcal{D} = \text{ID} = \{(x;y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \mid x \neq 0 \text{ e } y \neq 1\}.$$

Passo III Riduciamo allo stesso denominatore sia la prima che la seconda equazione:

$$\begin{cases} 3x+y-1 = 3x \\ 2x+3y = 7y-7 \end{cases}.$$

Passo IV Scriviamo il sistema in forma canonica:

$$\begin{cases} y-1 = 0 \\ 2x-4y = -7 \end{cases}.$$

Passo V Determiniamo con un qualunque metodo la coppia soluzione $\left(-\frac{3}{2};1\right)$ che non è accettabile poiché contraddice la C. E. e quindi non appartiene al dominio $\mathcal{D}$. Il sistema assegnato è quindi impossibile I. S. $= \emptyset$.

✍ *Esercizi proposti:* 19.46, 19.47, 19.48, 19.49, 19.50, 19.51

19.4 Sistemi letterali

Definizione 19.9. Si chiama *sistema letterale* il sistema in cui oltre alle incognite, solitamente indicate con x e y, compaiono altre lettere, dette parametri.

Distinguiamo tre casi distinti di discussione.

Le equazioni sono lineari e il parametro si trova solo al numeratore

---

Esempio 19.21. $\begin{cases} 2ax-(a-1)y=0 \\ -2x+3y=a \end{cases}$.

È un sistema letterale in quanto, reso in forma canonica, presenta un parametro nei suoi coefficienti. Esso è lineare, pertanto la coppia soluzione, se esiste, dipenderà dal valore del parametro.

Per *discussione del sistema letterale* s'intende l'analisi e la ricerca dei valori che attribuiti al parametro rendono il sistema determinato (in tal caso si determina la soluzione) ma anche scartare i valori del parametro per cui il sistema è impossibile o indeterminato. Per discutere il sistema usiamo il metodo di Cramer.

Passo I Calcoliamo il determinante del sistema:

$$D = \begin{vmatrix} 2a & -(a-1) \\ -2 & 3 \end{vmatrix} = 4a+2.$$

Passo II Determiniamo il valore del parametro che rende D diverso da zero: $4a+2 \neq 0 \Rightarrow a \neq 0-\frac{1}{2}$. Quindi se $a \neq -\frac{1}{2}$ il sistema è determinato.

Passo III Calcoliamo i determinanti D_x e D_y per trovare la coppia soluzione.

$$D_x = \begin{vmatrix} 0 & -(a-1) \\ a & 3 \end{vmatrix} = a\cdot(a-1); \quad D_y = \begin{vmatrix} 2a & 0 \\ -2 & a \end{vmatrix} = 2a^2.$$

Quindi $x = \dfrac{a\cdot(a-1)}{4a+2}$ e $y = \dfrac{a^2}{2a+1}$.

Passo IV Il determinante è nullo se $a = -\frac{1}{2}$; poiché per questo valore di a i determinanti D_x e D_y sono diversi da zero si ha che per $a = -\frac{1}{2}$ il sistema è impossibile.

Riassumendo si ha:

Condizioni sul parametro	Insieme Soluzione	Sistema
$a \neq -\frac{1}{2}$	$\left(\frac{a\cdot(a-1)}{4a+2}; \frac{2a^2}{4a+2}\right)$	determinato
$a = -\frac{1}{2}$	$\emptyset$	impossibile

Il parametro compare al denominatore in almeno una equazione del sistema

Esempio 19.22. $\begin{cases} \dfrac{y+a}{3} - \dfrac{a-x}{a-1} = a \\ \dfrac{x+2a}{a} - 3 = \dfrac{y}{2} - a \end{cases}$.

Il sistema non è fratto pur presentando termini frazionari nelle sue equazioni; la presenza del parametro al denominatore ci obbliga ad escludere dall'insieme $\mathbb{R}$ quei valori che annullano il denominatore. Se $a = 1$ oppure $a = 0$ ciascuna equazione del sistema è priva di significato, pertanto lo è anche il sistema. Con le condizioni di esistenza C. E. : $a \neq 1$ e $a \neq 0$ possiamo ridurre allo stesso denominatore ciascuna equazione e condurre il sistema alla forma canonica: $\begin{cases} 3x + (a-1)y = 2a^2 + a \\ 2x - ay = 2a - 2a^2 \end{cases}$

Passo I Calcoliamo il determinante del sistema: $D = \begin{vmatrix} 3 & a-1 \\ 2 & -a \end{vmatrix} = 2 - 5a$.

Passo II Determiniamo il valore del parametro che rende D diverso da zero: $2 - 5a \neq 0 \Rightarrow a \neq \frac{2}{5}$. Quindi se $a \neq \frac{2}{5}$ il sistema è determinato.

Passo III Calcoliamo i determinanti D_x e D_y per trovare la coppia soluzione:

$$D_x = \begin{vmatrix} 2a^2 + a & a-1 \\ 2a - 2a^2 & -a \end{vmatrix} = a \cdot (2a - 5); \quad D_y = \begin{vmatrix} 3 & 2a^2 + a \\ 2 & 2a - 2a^2 \end{vmatrix} = 2a \cdot (2 - 5a).$$

Quindi $x = \dfrac{a \cdot (2-5a)}{2-5a}$ e $y = \dfrac{2a \cdot (2-5a)}{2-5a}$ che, semplificando divenano $(a; 2a)$.

Passo IV Il determinante è nullo se $a = \frac{2}{5}$; poiché in tal caso anche i determinanti D_x e D_y si annullano, per $a = \frac{2}{5}$ il sistema risulta indeterminato.

Riassumendo si ha:

Condizioni sul parametro	Insieme Soluzione	Sistema
$a = 0 \vee a = 1$	$\emptyset$	privo di significato
$a \neq \frac{2}{5} \wedge a \neq 1 \wedge a \neq 0$	$\{(a; 2a)\}$	determinato
$a = \frac{2}{5}$	$\{(x; y) \in \mathbb{R}^2 \mid 3x - \frac{3}{5}y = \frac{18}{25}\}$	indeterminato

Il sistema è frazionario

Esempio 19.23. $\begin{cases} \dfrac{y-a}{x} = \dfrac{2}{a} \\ x+y=1 \end{cases}$.

Il sistema letterale è fratto poiché al denominatore di una delle equazioni oltre al parametro compare l'incognita x. Se $a = 0$ la prima equazione, e di conseguenza tutto il sistema, è privo di significato. Per poter procedere alla ricerca dell'Insieme Soluzione poniamo sul parametro la condizione di esistenza:

$$\text{C. E.}: a \neq 0. \tag{19.1}$$

Trattandosi di un sistema fratto, dobbiamo anche stabilire il Dominio del sistema:

$$\mathcal{D} = \{(x; y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \mid x \neq 0\}. \tag{19.2}$$

Passo I Portiamo nella forma canonica: $\begin{cases} -2x + ay = a^2 \\ x+y=1 \end{cases}$ con $a \neq 0$ e $x \neq 0$.

Passo II Calcoliamo il determinante del sistema: $D = \begin{vmatrix} -2 & a \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = -2 - a = -(2+a)$.

Passo III Determiniamo il valore del parametro che rende D diverso da zero: $-2 - a \neq 0 \Rightarrow a \neq -2$. Quindi se $a \neq -2$ il sistema è determinato.

Passo IV calcoliamo i determinanti D_x e D_y per trovare la coppia soluzione:

$$D_x = \begin{vmatrix} a^2 & a \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = a \cdot (a-1); \quad D_y = \begin{vmatrix} -2 & a^2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = -2 - a^2 = -(2+a^2).$$

Quindi $x = -\dfrac{a \cdot (a-1)}{2+a}$ e $y = \dfrac{a^2+2}{2+a}$ è la coppia soluzione, che risulta accettabile se $x = -\dfrac{a \cdot (a-1)}{2+a} \neq 0$ per quanto stabilito nella 19.2. Essendo $a \neq 0$ per la 19.1, e $a \neq -2$ poiché il sistema risulti determinato, la coppia soluzione è accettabile se si pone anche la condizione $a \neq 1$.

Passo V Se $a = -2$ il determinante D è nullo ed i determinanti D_x e D_y risultano diversi da zero, quindi il sistema risulta impossibile.

Riassumendo si ha:

Parametro	Incognite	Insieme Soluzione	Sistema
	$x \neq 0$		
$a = 0$			privo di significato
$a \neq 2 \wedge a \neq 0$		$\left(-\frac{a\cdot(a-1)}{2+a}; \frac{a^2+2}{2+a}\right)$	determinato
$a \notin \{-2, 0, 1\}$		accettabile	
$a = -2$			impossibile

✍ *Esercizi proposti:* 19.52, 19.53, 19.54, 19.55, 19.56, 19.57, 19.58

19.5 Sistemi lineari di tre equazioni in tre incognite

In maniera analoga a quanto abbiamo visto per i sistemi di equazioni lineari di due equazioni in due incognite si possono avere sistemi lineari con più di due equazioni in altrettante incognite. Prendiamo in esame il caso di tre equazioni in tre incognite.

Problema 19.24. Determinare tre numeri reali x, y, z (nell'ordine) tali che il doppio del primo uguagli l'opposto del secondo, la differenza tra il primo e il triplo del terzo sia nulla e la somma del secondo con il terzo superi il primo di 4 unità.

Soluzione Formalizziamo le condizioni espresse nel testo attraverso equazioni lineari:

a) il doppio del primo uguagli l'opposto del secondo: $2x = -y$;
b) la differenza tra il primo e il triplo del secondo sia nulla: $x - 3z = 0$;
c) la somma del secondo con il terzo superi il primo di 4 unità: $y + z = x + 4$.

Le tre condizioni devono essere vere contemporaneamente, quindi i tre numeri sono la terna soluzione del sistema di primo grado di tre equazioni in tre incognite:

$$\begin{cases} 2x = -y \\ x - 3z = 0 \\ y + z = x + 4 \end{cases} .$$

Si può ricavare la y dalla prima equazione e sostituire nelle altre due:

$$\begin{cases} y = -2x \\ x - 3z = 0 \\ -2x + z = x + 4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = -2x \\ x - 3z = 0 \\ -3x + z = 4 \end{cases} .$$

Dalla seconda equazione ricaviamo x in funzione di z e sostituiamo il valore di x nell'ultima equazione

$$\begin{cases} y = -2x \\ x = 3z \\ -3x + z = 4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = -2x \\ x = 3z \\ -3(3z) + z = 4 \end{cases} .$$

Risolviamo l'ultima equazione che è di primo grado in una sola incognita e sostituiamo il valore ottenuto di z nella seconda equazione:

$$\begin{cases} y = -2x \\ x = 3z \\ z = -\frac{4}{8} = -\frac{1}{2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = -2x \\ x = 3\left(-\frac{1}{2}\right) = -\frac{3}{2} \\ z = -\frac{4}{9} \end{cases} .$$

Infine sostituiamo il valore ottenuto di x nella prima equazione:

$$\begin{cases} y = 3 \\ z = -\frac{1}{2} \\ x = -\frac{3}{2} \end{cases} .$$

♦

Esempio 19.25. $\begin{cases} 3x+y-z=7 \\ x+3y+z=5 \\ x+y-3z=3 \end{cases}$.

Procediamo con il metodo di riduzione. Sommiamo le prime due equazioni: $4x+4y=12$. Moltiplichiamo la seconda equazione per 3 e sommiamo con la terza: $3(x+3y+z)+x+y=3\cdot5+3=4x+10y=18$. Costruiamo il sistema di queste due equazioni nelle sole due incognite x e y: $\begin{cases} 4x+4y=12 \\ 4x+10y=18 \end{cases}$.

Moltiplichiamo la seconda equazione per -1 e sommiamo le due equazioni:

$$\begin{cases} 4x+4y=12 \\ -4x-10y=-18 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 4x+4y=12 \\ -4x-10y+4x+4y=-18+12 \end{cases}$$
$$\Rightarrow \begin{cases} 4x+4y=12 \\ -6y=-6 \Rightarrow y=1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=2 \\ y=1 \end{cases}.$$

Sostituendo nella prima equazione del sistema ricaviamo la terza incognita: $\begin{cases} x=2 \\ y=1 \\ z=0 \end{cases}$.

La terna soluzione del sistema assegnato è $(2;1;0)$.

✍ *Esercizi proposti:* 19.59, 19.60, 19.61, 19.62, 19.63, 19.64, 19.65

19.6 Sistemi da risolvere con sostituzioni delle variabili

Nella realtà, non sempre i sistemi di equazioni che descrivono delle relazioni tra variabili risultano lineari. Ma alcune volte essi possono essere ricondotti a sistemi lineari per mezzo di sostituzioni delle variabili.

Esempio 19.26. $\begin{cases} \dfrac{1}{x}+\dfrac{2}{y}=3 \\ \dfrac{2}{x}-\dfrac{4}{y}=-1 \end{cases}$.

Innanzi tutto il sistema considerato perde di significato se $x=0$ oppure $y=0$, per cui $\text{C. E.} = x\neq 0 \wedge y\neq 0$. Inoltre esso non risulta lineare nelle variabili x e y, ma con la seguente sostituzione di variabili

$$\begin{cases} u=\dfrac{1}{x} \\ v=\dfrac{1}{y} \end{cases} \tag{19.3}$$

il sistema può essere scritto in forma lineare

$$\begin{cases} u+2v=3 \\ 2u-4v=-1 \end{cases}.$$

Per risolverlo possiamo moltiplicare per 2 la prima equazione:

$$\begin{cases} 2u + 4v = 6 \\ 2u - 4v = -1 \end{cases}$$

e sommando membro a membro abbiamo $4u = 5$ dalla quale possiamo determinare $u = \dfrac{5}{4}$.

Per ricavare l'incognita v moltiplichiamo la prima equazione per -2, ottenendo

$$\begin{cases} -2u - 4v = -6 \\ 2u - 4v = -1 \end{cases}$$

e sommando membro a membro abbiamo

$$-8v = -7 \quad \Rightarrow \quad v = \frac{7}{8}.$$

Avendo trovato i valori delle incognite u e v possiamo ricavare x e y sostituendo i valori trovati nella 19.3:

$$\begin{cases} \dfrac{5}{4} = \dfrac{1}{x} \\ \dfrac{7}{8} = \dfrac{1}{y} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = \dfrac{4}{5} \\ y = \dfrac{8}{7} \end{cases}$$

che, per quanto imposto dalla C. E., risultano valori accettabili come soluzione.

✍ *Esercizi proposti:* 19.66, 19.67, 19.68