**Prof. Dr. H. Brenner** **Osnabrück WS 2015/2016**

# Analysis III

## Arbeitsblatt 62

### Aufwärmaufgaben

Aufgabe 62.1. Sei $(M, d)$ ein metrischer Raum. Zeige, dass in $M$ die sogenannte *Hausdorff*-Eigenschaft gilt, d.h. zu je zwei verschiedenen Punkten $x$ und $y$ gibt es offene Mengen $U$ und $V$ mit

$$x \in U \text{ und } y \in V \text{ und } U \cap V = \emptyset\,.$$

Aufgabe 62.2.*

Zeige, dass in einem Hausdorff-Raum $X$ jeder Punkt $x \in X$ abgeschlossen ist.

Aufgabe 62.3. Es sei $X$ ein topologischer Raum mit einer abzählbaren Basis. Zeige, dass dann auch jeder Unterraum $Y \subseteq X$ mit der induzierten Topologie eine abzählbare Basis besitzt.

Aufgabe 62.4. Es sei $X$ ein topologischer Raum mit einer abzählbaren Basis. Zeige, dass es zu jeder Überdeckung $U = \bigcup_{i \in I} U_i$ mit offenen Mengen $U_i$ eine abzählbare Teilüberdeckung gibt.

Aufgabe 62.5.*

Es sei $(X, \mathcal{T})$ ein topologischer Raum und sei $\mathcal{A}$ die davon erzeugte Mengenalgebra. Zeige, dass diese genau aus allen endlichen Vereinigungen

$$(U_1 \cap A_1) \cup (U_2 \cap A_2) \cup \ldots \cup (U_n \cap A_n)$$

mit offenen Mengen $U_1, \ldots, U_n$ und abgeschlossenen Mengen $A_1, \ldots, A_n$ besteht.

Aufgabe 62.6. Es sei $(M, \mathcal{A}, \mu)$ ein Maßraum. Zeige, dass die Menge der Nullmengen von $M$ ein Mengen-Präring ist.

Aufgabe 62.7. Es sei $(M, \mathcal{A}, \mu)$ ein Maßraum. Zeige, dass die Mengen

$$\{T \in \mathcal{A} | \, \mu(T) < \infty\} \ ,$$

einen Mengen-Präring, aber im Allgemeinen keine Mengen-Algebra bilden.

Aufgabe 62.8.*

Es sei $(X, \mathcal{B})$ ein Messraum und $\mu$ und $\nu$ seien Maße darauf.

a) Ist die durch

$$(\mu + \nu)(T) \, := \, \mu(T) + \nu(T)$$

für $T \in \mathcal{B}$ definierte Abbildung ein Maß?

b) Ist die durch

$$(\mu * \nu)(T) \, := \, \max \, (\mu(T), \nu(T))$$

für $T \in \mathcal{B}$ definierte Abbildung ein Maß?

Aufgabe 62.9. Es sei $(M, \mathcal{A}, \mu)$ ein Maßraum und $c \in \mathbb{R}_{\geq 0}$. Zeige, dass durch

$$\lambda(T) := c\mu(T)$$

ein Maß auf $M$ definiert ist.[1] Diskutiere insbesondere die Teilmengen mit $\mu(T) = \infty$.

Aufgabe 62.10. Es sei $(M, \mathcal{A})$ ein Messraum. Wir nennen ein Maß auf $M$ *explosiv*, wenn es lediglich die Werte 0 und $\infty$ annimmt.

a) Zeige, dass (für $T \in \mathcal{A}$) durch

$$\gamma(T) = \begin{cases} 0, \text{ falls } T = \emptyset \, , \\ \infty, \text{ falls } T \neq \emptyset \, , \end{cases}$$

ein Maß definiert ist.

b) Es sei $\mu$ ein Maß auf $(M, \mathcal{A})$. Zeige, dass durch

$$\lambda(T) = \begin{cases} 0, \text{ falls } \mu(T) = 0 \, , \\ \infty, \text{ falls } \mu(T) > 0 \, , \end{cases}$$

ebenfalls ein Maß definiert ist.

Aufgabe 62.11. Bestimme die Belegungsfunktion zu einem Dirac-Maß.

[1] Dieses Maß nennt man das mit $c$ *umskalierte Maß*.

Aufgabe 62.12. Man mache sich klar, dass die Maßtheorie auf den natürlichen Zahlen $\mathbb{N}$ „nahezu“ äquivalent ist zur Theorie der Reihen mit nichtnegativen reellen Summanden. Warum nur nahezu? Welches maßtheoretische Konzept korrespondiert dabei zur Konvergenz der Reihe?

Aufgabe 62.13. Der Messraum $(\mathbb{N}_+, \mathfrak{P}(\mathbb{N}_+))$ sei mit dem Maß versehen, bei der die Zahl $n$ den Wert $\mu(n) = \frac{1}{n}$ erhält. Bestimme für möglichst viele Teilmengen $T \subseteq \mathbb{N}_+$ den Wert $\mu(T)$.

## Aufgaben zum Abgeben

Aufgabe 62.14. (4 Punkte)

Es sei $(M, \mathcal{A})$ ein Messraum und sei

$$f_n \colon M \longrightarrow \mathbb{R}$$

eine Folge von messbaren Funktionen. Zeige, dass

$$\{x \in M \mid f_n(x) \text{ konvergiert}\}$$

messbar ist.

Aufgabe 62.15. (3 Punkte)

Zeige, dass es eine abzählbare Familie von offenen Bällen im $\mathbb{R}^n$ gibt, die eine Basis der Topologie bilden.

Aufgabe 62.16. (4 Punkte)

Es sei $X$ ein Hausdorff-Raum und es seien $T_1, T_2 \subseteq X$ zwei disjunkte endliche Teilmengen. Zeige, dass es offene Mengen $U_1, U_2 \subseteq X$ gibt mit $T_1 \subseteq U_1$, $T_2 \subseteq U_2$ und $U_1 \cap U_2 = \emptyset$.

Aufgabe 62.17. (4 Punkte)

Zeige, dass es auf jedem endlichdimensionalen reellen Vektorraum ein wohldefiniertes Konzept von *Borel-Mengen* gibt.

Aufgabe 62.18. (7 Punkte)

Zeige, dass die Menge der stetigen wachsenden Funktionen

$$f \colon \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$$

mit $f(\mathbb{Q}) \subseteq \mathbb{Q}$, mit $f(\mathbb{R}_{\leq 0}) = 0$ und $f(\mathbb{R}_{\geq 1}) = 1$ überabzählbar ist.