Prof. Dr. H. Brenner **Osnabrück WS 2014/2015**

Analysis I

Vorlesung 15

Cauchy-Produkt von Reihen

Definition 15.1. Zu zwei Reihen $\sum_{i=0}^{\infty} a_i$ und $\sum_{j=0}^{\infty} b_j$ komplexer Zahlen heißt die Reihe

$$\sum_{k=0}^{\infty} c_k \text{ mit } c_k = \sum_{i=0}^{k} a_i b_{k-i}$$

das *Cauchy-Produkt* der beiden Reihen.

Lemma 15.2. *Es seien*

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k \text{ und } \sum_{k=0}^{\infty} b_k$$

zwei absolut konvergente Reihen komplexer Zahlen. Dann ist auch das Cauchy-Produkt $\sum_{k=0}^{\infty} c_k$ *absolut konvergent und für die Summe gilt*

$$\sum_{k=0}^{\infty} c_k = \left(\sum_{k=0}^{\infty} a_k \right) \cdot \left(\sum_{k=0}^{\infty} b_k \right).$$

Beweis. Wir müssen für die Partialsummen

$$x_n = \sum_{i=0}^{n} a_i, \; y_n = \sum_{j=0}^{n} b_j \text{ und } z_n = \sum_{k=0}^{n} c_k$$

zeigen, dass z_n gegen den Limes der Folge $(x_n y_n)_{n \in \mathbb{N}}$ konvergiert. Es ist

$$\begin{aligned} |z_n - x_n y_n| &= \left| \sum_{k=0}^{n} c_k - \left(\sum_{i=0}^{n} a_i \right) \left(\sum_{j=0}^{n} b_j \right) \right| \\ &= \left| \sum_{0 \leq i,j \leq n,\, i+j > n} a_i b_j \right| \\ &\leq \sum_{0 \leq i,j \leq n,\, i+j > n} |a_i| \, |b_j| \\ &\leq \left(\sum_{n/2 < i \leq n} |a_i| \right) \left(\sum_{j=0}^{n} |b_j| \right) \\ &\quad + \left(\sum_{n/2 < j \leq n} |b_j| \right) \left(\sum_{i=0}^{n} |a_i| \right) \end{aligned}$$

$$\leq \left(\sum_{n/2<i\leq n} |a_i| \right) \left(\sum_{j=0}^{\infty} |b_j| \right) + \left(\sum_{n/2<j\leq n} |b_j| \right) \left(\sum_{i=0}^{\infty} |a_i| \right).$$

Da die beiden Reihen absolut konvergieren, und $\sum_{n/2<i\leq n} |a_i|$ und $\sum_{n/2<j\leq n} |b_j|$ Nullfolgen sind (siehe Aufgabe 9.15), ist die rechte Seite insgesamt eine Nullfolge. Daher konvergiert die Folge $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ gegen das Produkt der Grenzwerte. Die absolute Konvergenz folgt aus dem bisher Bewiesenen mit dem Majorantenkriterium aus der Abschätzung $|c_k| \leq \sum_{i=0}^{k} |a_i| \, |b_{k-i}|$. □

Potenzreihen

Definition 15.3. Es sei $(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge von komplexen Zahlen und z eine weitere komplexe Zahl. Dann heißt die Reihe

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n$$

die *Potenzreihe* in z zu den Koeffizienten $(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Durch Wahl geeigneter Koeffizienten kann man jede Reihe als Potenzreihe zu einer fixierten Zahl $z \in \mathbb{C}$, , ansehen. Bei Potenzreihen ist es aber wichtig, dass man z variieren lässt und dann die Potenzreihe im Konvergenzbereich eine Funktion in z darstellt.

Genauer spricht man von einer Potenzreihe mit Entwicklungspunkt 0. Eine Potenzreihe mit *Entwicklungspunkt* $a \in \mathbb{C}$ ist ein Ausdruck der Form

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n (z-a)^n .$$

Eine wichtige Potenzreihe haben wir schon in der neunten Vorlesung kennengelernt, nämlich die geometrische Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} z^n$, die für $|z| < 1$ konvergiert und dort die Funktion $1/(1-z)$ darstellt. Eine weitere besonders wichtige Potenzreihe ist die Exponentialreihe, die für jede komplexe Zahl konvergiert und zur komplexen Exponentialfunktion führt.

Die Exponentialreihe und die komplexe Exponentialfunktion

Definition 15.4. Für jedes $z \in \mathbb{C}$ heißt die Reihe

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}$$

die *Exponentialreihe* in z.

Dies ist also die Reihe

$$1 + z + \frac{z^2}{2} + \frac{z^3}{6} + \frac{z^4}{24} + \frac{z^5}{120} + \cdots .$$

Satz 15.5. *Für jedes $z \in \mathbb{C}$ ist die Exponentialreihe*

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}$$

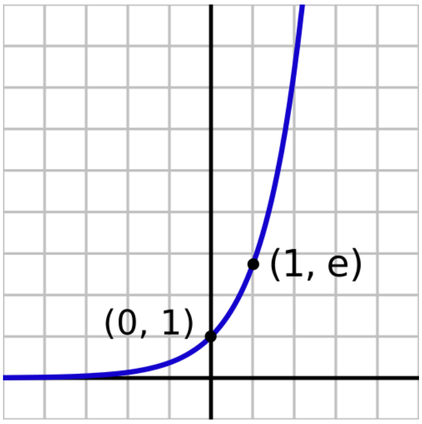
absolut konvergent.

Beweis. Für $z = 0$ ist die Aussage richtig. Andernfalls betrachten wir den Quotienten

$$\left| \frac{\frac{z^{n+1}}{(n+1)!}}{\frac{z^n}{n!}} \right| = \left| \frac{z}{n+1} \right| = \frac{|z|}{n+1}.$$

Dies ist für $n \geq 2|z|$ kleiner als $1/2$. Aus dem Quotientenkriterium folgt daher die Konvergenz. □

Aufgrund dieser Eigenschaft können wir die komplexe Exponentialfunktion definieren.



Der Graph der reellen Exponentialfunktion

Definition 15.6. Die Abbildung

$$\mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C},\ z \longmapsto \exp z := \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!},$$

heißt (komplexe) *Exponentialfunktion.*

Wir werden später sehen, dass diese Funktion für reelle Argumente die Exponentialfunktion zur Basis

$$\exp 1 = 1 + 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{6} + \frac{1}{24} + \frac{1}{120} + \cdots$$

ist, und dass exp 1 mit der früher eingeführten eulerschen Zahl e übereinstimmt (Korollar 16.11 und Korollar 20.14).

Die folgende Aussage nennt man die *Funktionalgleichung für die Exponentialfunktion*.

Satz 15.7. *Für komplexe Zahlen $z, w \in \mathbb{C}$ gilt*

$$\exp(z+w) = \exp z \cdot \exp w .$$

Beweis. Das Cauchy-Produkt der beiden Exponentialreihen ist

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n$$

mit $c_n = \sum_{i=0}^{n} \frac{z^i}{i!} \frac{w^{n-i}}{(n-i)!}$. Diese Reihe ist nach Lemma 15.2 absolut konvergent und der Grenzwert ist das Produkt der beiden Grenzwerte. Andererseits ist der n-te Summand der Exponentialreihe von $z+w$ nach der allgemeinen binomischen Formel gleich

$$\frac{(z+w)^n}{n!} = \frac{1}{n!} \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} z^i w^{n-i} = c_n ,$$

so dass die beiden Seiten übereinstimmen. □

Korollar 15.8. *Die Exponentialfunktion*

$$\mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C},\ z \longmapsto \exp z ,$$

besitzt folgende Eigenschaften.

(1) *Es ist* $\exp 0 = 1$.
(2) *Für jedes* $z \in \mathbb{C}$ *ist* $\exp(-z) = (\exp z)^{-1}$. *Insbesondere ist* $\exp z \neq 0$.
(3) *Für ganze Zahlen* $n \in \mathbb{Z}$ *ist* $\exp n = (\exp 1)^n$.
(4) *Für reelles* z *ist* $\exp z \in \mathbb{R}_+$.
(5) *Für reelle Zahlen* $z > 0$ *ist* $\exp z > 1$ *und für* $z < 0$ *ist* $\exp z < 1$.
(6) *Die reelle Exponentialfunktion*[1] *ist streng wachsend.*

Beweis. (1) folgt direkt aus der Definition. (2) folgt aus

$$\exp z \cdot \exp(-z) = \exp(z-z) = \exp 0 = 1$$

aufgrund von Satz 15.7. (3) folgt aus Satz 15.7 und (2). (4). Der Wert der Exponentialreihe für eine reelle Zahl ist wieder reell, da die reellen Zahlen in

[1]Unter der reellen Exponentialfunktion verstehen wir hier die Einschränkung der komplexen Exponentialfunktion auf die reellen Zahlen. Wir werden bald sehen, dass sie mit der Exponentialfunktion zur Basis e übereinstimmt.

$\mathbb{C}$ abgeschlossen[2] sind. Die Nichtnegativität ergibt sich aus

$$\exp z \,=\, \exp\left(\frac{z}{2}+\frac{z}{2}\right) \,=\, \exp\frac{z}{2}\cdot\exp\frac{z}{2} \,=\, \left(\exp\frac{z}{2}\right)^2 \,\geq\, 0.$$

(5). Für reelles x ist $\exp x \cdot \exp(-x) = 1$, so dass nach (4) ein Faktor ≥ 1 sein muss und der andere Faktor ≤ 1. Für $x > 0$ ist

$$\exp x \,=\, \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}x^n \,>\, \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}(-x)^n \,=\, \exp(-x)\,,$$

da ja für gerades n die Summationsglieder übereinstimmen und für ungerades n die linke Seite größer als die rechte ist. Also ist $\exp x > 1$. (6). Für reelle $x > y$ ist $x - y > 0$ und daher nach (5) $\exp(x-y) > 1$, also

$$\exp x \,=\, \exp(x-y+y) \,=\, \exp(x-y)\exp y \,>\, \exp y.$$

□

Die trigonometrischen Reihen

Definition 15.9. Für $z \in \mathbb{C}$ heißt

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n z^{2n}}{(2n)!}$$

die *Kosinusreihe* und

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n z^{2n+1}}{(2n+1)!}$$

die *Sinusreihe* zu z.

Durch Vergleich mit der Exponentialreihe ergibt sich sofort, dass diese beiden Reihen für jedes z absolut konvergieren. Die zugehörigen Funktionen

$$\cos z := \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n z^{2n}}{(2n)!} \text{ und } \sin z := \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n z^{2n+1}}{(2n+1)!}$$

heißen *Kosinus* und *Sinus*. Beide Funktionen stehen unmittelbar in Zusammenhang mit der Exponentialfunktion, wobei man allerdings die komplexen Zahlen braucht, um diesen Zusammenhang zu erkennen.

Satz 15.10. *Die Funktionen*

$$\mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C},\ z \longmapsto \cos z\,,$$

und

$$\mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C},\ z \longmapsto \sin z\,,$$

besitzen für $z, w \in \mathbb{C}$ folgende Eigenschaften.

[2]Eine Teilmenge $T \subseteq \mathbb{C}$ heißt abgeschlossen, wenn jede Folge in T, die in $\mathbb{C}$ konvergiert, schon in T konvergiert. Eine reelle Folge, die aufgefasst als komplexe Folge konvergiert, konvergiert offenbar in $\mathbb{R}$.

(1) *Für* $z = x + iy$ *ist*

$$\exp z = (\exp x)(\cos y + i \sin y) .$$

(2) *Es ist* $\cos 0 = 1$ *und* $\sin 0 = 0$.
(3) *Es ist*[3] $\cos(-z) = \cos z$ *und* $\sin(-z) = -\sin z$.
(4) *Es ist*

$$\cos z = \frac{\exp(iz) + \exp(-iz)}{2}$$

und

$$\sin z = \frac{\exp(iz) - \exp(-iz)}{2i} .$$

(5) *Es gelten die Additionstheoreme*

$$\cos(z+w) = \cos z \cos w - \sin z \sin w .$$

und

$$\sin(z+w) = \sin z \cos w + \cos z \sin w .$$

(6) *Es gilt*

$$(\cos z)^2 + (\sin z)^2 = 1 .$$

Beweis. (1). Aufgrund von Satz 15.7 gilt

$$\exp(x+iy) = \exp x \cdot \exp(iy) ,$$

so dass wir nur noch den hinteren Faktor betrachten müssen. Nach Aufgabe 15.8[4] und Lemma 9.4 (1) gilt

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(iy)^n}{n!} &= \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{(iy)^{2k}}{(2k)!} + \frac{(iy)^{2k+1}}{(2k+1)!} \right) \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} i^{2k} \frac{y^{2k}}{(2k)!} + \sum_{k=0}^{\infty} i^{2k+1} \frac{y^{2k+1}}{(2k+1)!} \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{y^{2k}}{(2k)!} + \sum_{k=0}^{\infty} i(-1)^k \frac{y^{2k+1}}{(2k+1)!} \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k y^{2k}}{(2k)!} + i \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k y^{2k+1}}{(2k+1)!} \\ &= \cos y + i \sin y . \end{aligned}$$

(2) und (3) folgen direkt aus der Definition der Reihen. (4) folgt aus (1) und (3). (5). Es ist

$$\cos(z+w) = \frac{\exp(i(z+w)) + \exp(-i(z+w))}{2}$$

[3]Die Kosinusfunktion ist also eine gerade Funktion und die Sinusfunktion ist eine ungerade Funktion.

[4]Dies ist ein Spezialfall der Aussage, dass man absolut konvergente Reihen beliebig sortieren darf, was wir in Vorlesung 17 ausführlich begründen werden.

$$
\begin{aligned}
&= \frac{\exp(iz)\exp(iw) + \exp(-iz)\exp(-iw)}{2} \\
&= \frac{1}{2}((\cos z + i \sin z)(\cos w + i \sin w) \\
&\quad +(\cos z - i \sin z)(\cos w - i \sin w)) \\
&= \frac{1}{2}(\cos z \cos w \\
&\quad +i(\cos z \sin w + \sin z \cos w) - \sin z \sin w \\
&\quad + \cos z \cos w \\
&\quad -i(\cos z \sin w + \sin z \cos w) \\
&\quad - \sin z \sin w) \\
&= \cos z \cos w - \sin z \sin w \,.
\end{aligned}
$$

Das Additionstheorem für den Sinus folgt ähnlich. (6). Aus dem Additionstheorem für den Kosinus angewendet auf $w = -z$ und aufgrund von (2) ergibt sich

$$
\begin{aligned}
1 &= \cos 0 \\
&= \cos(z - z) \\
&= \cos z \cos(-z) - \sin z \sin(-z) \\
&= \cos z \cos z + \sin z \sin z \,.
\end{aligned}
$$

□

Für reelle z sind $\sin z$ und $\cos z$ wieder reell, wie unmittelbar aus der Potenzreihendarstellung folgt. Die letzte Aussage im vorstehenden Satz besagt, dass für reelles z das Paar $(\cos z, \sin z)$ ein Punkt auf dem *Einheitskreis* $\{(x, y) |\, x^2 + y^2 = 1\}$ ist. Wir werden später sehen, dass sich jeder Punkt des Einheitskreises als $(\cos z, \sin z)$ schreiben lässt, wobei man z als Winkel (im Bogenmaß) interpretieren kann. Dabei tritt die Periode 2π auf, wobei wir die *Kreiszahl* π eben über die trigonometrischen Funktionen einführen werden.

Abbildungsverzeichnis

Quelle = Exp.svg , Autor = Benutzer Oleg Alexandrov auf Commons, Lizenz = CC-by-sa 3.0 3