Prof. Dr. H. Brenner **Osnabrück SS 2023**

Grundkurs Mathematik II

Arbeitsblatt 34

Die Pausenaufgabe

Aufgabe 34.1. Bestimme eine Basis für den Lösungsraum der linearen Gleichung

$$2x - 5y - 3z = 0.$$

Übungsaufgaben

Aufgabe 34.2. Zeige, dass ein Körper K, aufgefasst als Vektorraum, nur zwei Untervektorräume besitzt, nämlich den Nullraum 0 und sich selbst.

Aufgabe 34.3. Bestimme, ob die folgenden Teilmengen $T = \mathbb{Q}^2$ Untervektorräume sind.

(1) $\{0\}$,
(2) $\mathbb{Q}_{\geq 0} \times \mathbb{Q}_{\geq 0}$,
(3) Der Graph der linearen Funktion $y = 7x$,
(4) Das Quadrat $[0,1] \times [0,1]$,
(5) $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$,
(6) Die Vereinigung aus der x-Achse und der y-Achse (das *Achsenkreuz*),
(7) $\mathbb{Q} \times 0$,
(8) Die Lösungsmenge zur linearen Gleichung $4x - 9y = 11$.

Aufgabe 34.4. Beschreibe sämtliche Untervektorräume des $\mathbb{Q}^2$.

Aufgabe 34.5.*

Zu je zwei Punkten in der Produktmenge $\mathbb{Q}^2$ gibt es eine Verbindungsgerade und einen Mittelpunkt, der die Verbindungsstrecke halbiert.

(1) Man gebe zu zwei Punkten (a_1, a_2) und (b_1, b_2) die Koordinaten des Mittelpunktes an.
(2) Es seien in der Produktmenge $\mathbb{Z}^2$ fünf Punkte gegeben (jeder Punkt habe also ganzzahlige Koordinaten). Zeige, dass mindestens einer der Mittelpunkte ganzzahlige Koordinaten haben muss.

(3) Gilt die Eigenschaft aus (2) auch bei vier Punkten?

Aufgabe 34.6. Zeige, dass ein Untervektorraum $U \subseteq K^n$ insbesondere eine Untergruppe des K^n ist.

Aufgabe 34.7. Es seien $v_1, \ldots, v_k \in K^n$ Vektoren und sei

$$U = \left\{ \sum_{i=1}^{k} s_i v_i \mid s_i \in K \right\}.$$

Zeige, dass U ein Untervektorraum des K^n ist.

Aufgabe 34.8. Wir betrachten im $\mathbb{Q}^3$ die Untervektorräume

$$U = \langle \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 7 \end{pmatrix} \rangle$$

und

$$W = \langle \begin{pmatrix} 5 \\ -1 \\ 11 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ 3 \end{pmatrix} \rangle.$$

Zeige $U = W$.

Aufgabe 34.9.*

Es sei K ein Körper und

$$\begin{matrix} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n & = & 0 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n & = & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n & = & 0 \end{matrix}$$

ein homogenes lineares Gleichungssystem über K. Zeige, dass die Menge aller Lösungen des Gleichungssystems ein Untervektorraum des K^n ist. Wie verhält sich dieser Lösungsraum zu den Lösungsräumen der einzelnen Gleichungen?

Aufgabe 34.10. Bestimme eine Basis für den Lösungsraum der linearen Gleichung

$$3x + 4y - 2z + 5w = 0.$$

Aufgabe 34.11. Bestimme eine Basis für den Lösungsraum des linearen Gleichungssystems

$$-2x + 3y - z + 4w = 0 \text{ und } 3z - 2w = 0\,.$$

Aufgabe 34.12. Im K^n seien zwei Vektoren u, v gegeben und es sei $U = \langle u, v \rangle \subseteq K^n$ der von den beiden Vektoren erzeugte Untervektorraum. Zeige, dass die Vektoren u, v genau dann eine Basis von U bilden, wenn weder u ein Vielfaches von v noch v ein Vielfaches von u ist.

Aufgabe 34.13. Es seien $U_1, \ldots, U_r \subseteq K^n$ Untervektorräume. Zeige, dass der Durchschnitt $U_1 \cap \ldots \cap U_r$ ebenfalls ein Untervektorraum ist.

Aufgabe 34.14. Bestimme eine Basis für den Lösungsraum des linearen Gleichungssystems

$$\begin{aligned} 3x - 6y - 5z &= 0 \\ x + 7y + 4z &= 0 \end{aligned}$$

über $\mathbb{Q}$.

Aufgabe 34.15. Es sei

$$M = \begin{pmatrix} 4 & 3 & -4 \\ 5 & -2 & -1 \end{pmatrix}$$

und

$$c = \begin{pmatrix} -3 \\ -7 \end{pmatrix}.$$

(1) Bestimme eine Basis des Lösungsraums des linearen Gleichungssystems $Mv = 0$.
(2) Beschreibe die Lösungsmenge des inhomogenen linearen Gleichungssystems $Mv = c$ mit einem Aufpunkt und mit der Basis aus dem ersten Teil.

Aufgabe 34.16.*

Bestimme die Punktrichtungsform für die durch die Gleichung

$$4x + 7y = 3$$

im $\mathbb{Q}^2$ gegebene Gerade.

Aufgabe 34.17. Bestimme die Punktrichtungsform für die durch die Gleichung

$$-7x + 5y = -4$$

im $\mathbb{Q}^2$ gegebene Gerade.

Aufgabe 34.18.*

Erstelle eine Geradengleichung für die Gerade im $\mathbb{R}^2$, die durch die beiden Punkte $(2,3)$ und $(5,-7)$ verläuft.

Aufgabe 34.19. Es seien im K^2 zwei Geraden G und H in Gleichungsform durch

$$ax + by = c$$

bzw.

$$rx + sy = d$$

gegeben. Zeige, dass der Durchschnitt $G \cap H$ der beiden Geraden die Lösungsmenge des linearen Gleichungssystems ist, das aus beiden Gleichungen besteht. Zeige ferner, dass es hierbei die drei Möglichkeiten gibt:

(1) Es ist $G = H$.
(2) Es ist $G \cap H = \emptyset$.
(3) Der Durchschnitt besteht aus einem einzigen Punkt.

Aufgabe 34.20. Es sei ein lineares Gleichungssystem mit zwei Gleichungen in zwei Variablen über $\mathbb{Q}$ gegeben. Die Lösungsmengen der einzelnen Gleichungen seien Geraden. Skizziere die drei Möglichkeiten, wie die Lösungsmenge des Systems aussehen kann.

Aufgabe 34.21.*

(1) Skizziere vier Geraden in der Ebene, die sich insgesamt in genau drei Punkten schneiden.
(2) Skizziere vier Geraden in der Ebene, die sich in keinem Punkt schneiden.
(3) Skizziere vier Geraden in der Ebene, die sich in einem Punkt schneiden.
(4) Skizziere vier Geraden in der Ebene, die sich insgesamt in sechs Punkten schneiden.

Vorlage:Inputaufga

Aufgabe 34.22.*

Es seien n Geraden in der Ebene gegeben. Formuliere und beweise eine Formel (in Abhängigkeit von n) für die maximale Anzahl von Schnittpunkten der Geraden.

AUFGABE 34.23. Wir betrachten die beiden Mengen

$$E = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \mid -3x + 2y - 6z = 0 \right\}$$

und

$$F = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \mid 7x - 5y - 4z = 0 \right\}.$$

Finde eine Beschreibung für den Durchschnitt

$$G := E \cap F = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \mid -3x + 2y - 6z = 0 \text{ und } 7x - 5y - 4z = 0 \right\}$$

wie in Beispiel 34.13.

AUFGABE 34.24.*

Im $\mathbb{R}^3$ seien die beiden Untervektorräume

$$U = \left\{ s \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 7 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 4 \\ -2 \\ 9 \end{pmatrix} \mid s, t \in \mathbb{R} \right\}$$

und

$$V = \left\{ p \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + q \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \\ -4 \end{pmatrix} \mid p, q \in \mathbb{R} \right\}$$

gegeben. Bestimme eine Basis für $U \cap V$.

AUFGABE 34.25.*

Wir betrachten die drei Ebenen E, F, G im $\mathbb{Q}^3$, die durch die folgenden Gleichungen beschrieben werden.

(1)
$$E = \{(x, y, z) \in \mathbb{Q}^3 \mid 5x - 4y + 3z = 2\},$$

(2)
$$F = \{(x, y, z) \in \mathbb{Q}^3 \mid 7x - 5y + 6z = 3\},$$

(3)
$$G = \{(x, y, z) \in \mathbb{Q}^3 \mid 2x - y + 4z = 5\}.$$

Bestimme sämtliche Punkte $E \cap F \setminus E \cap F \cap G$.

Aufgabe 34.26. Bestimme eine Ebenengleichung für die Ebene im $\mathbb{R}^3$, auf der die drei Punkte

$$(1,0,0), (0,1,2) \text{ und } (2,3,4)$$

liegen.

Aufgabe 34.27. Erstelle ein lineares Gleichungssystem, dessen Lösungsraum die Gerade $U = \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \\ -1 \end{pmatrix} \mathbb{R}$ ist.

Aufgabe 34.28. Es sei K ein Körper. Man finde ein lineares Gleichungssystem in drei Variablen, dessen Lösungsraum genau

$$\left\{ \lambda \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ -5 \end{pmatrix} \mid \lambda \in K \right\}$$

ist.

Aufgabe 34.29. Ein lineares Ungleichungssystem sei durch die Ungleichungen

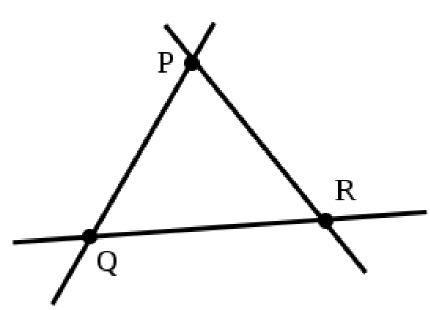
$$\begin{aligned} x &\geq 0, \\ y &\geq 0, \\ x + y &\leq 1, \end{aligned}$$

gegeben. Skizziere die Lösungsmenge dieses Ungleichungssystems.

Aufgabe 34.30. Es sei

$$\begin{aligned} a_1x + b_1y &\geq c_1, \\ a_2x + b_2y &\geq c_2, \\ a_3x + b3y &\geq c_3, \end{aligned}$$

ein lineares Ungleichungssystem, dessen Lösungsmenge ein Dreieck sei. Wie sieht die Lösungsmenge aus, wenn man in jeder Ungleichung $\geq$ durch $\leq$ ersetzt?



Aufgaben zum Abgeben

Aufgabe 34.31. (4 Punkte)

Wir betrachten im $\mathbb{Q}^4$ die Untervektorräume

$$U = \langle \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ -5 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 4 \\ -3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix} \rangle$$

und

$$W = \langle \begin{pmatrix} 6 \\ -1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ -2 \\ -7 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 9 \\ 2 \\ -1 \\ 10 \end{pmatrix} \rangle .$$

Zeige $U = W$.

Aufgabe 34.32. (4 (2+2) Punkte)

Es sei

$$M = \begin{pmatrix} 2 & -7 & 8 \\ 5 & 9 & -3 \end{pmatrix}$$

und

$$c = \begin{pmatrix} 4 \\ -5 \end{pmatrix} .$$

(1) Bestimme eine Basis des Lösungsraums des linearen Gleichungssystems $Mv = 0$.
(2) Beschreibe die Lösungsmenge des inhomogenen linearen Gleichungssystems $Mv = c$ mit einem Aufpunkt und mit der Basis aus dem ersten Teil.

Aufgabe 34.33. (2 Punkte)

Bestimme die Punktrichtungsform für die durch die Gleichung

$$-2x + 9y = 5$$

im $\mathbb{Q}^2$ gegebene Gerade.

Aufgabe 34.34. (3 Punkte)

Betrachte im $\mathbb{R}^3$ die beiden Ebenen

$$E = \left\{ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid 3x+4y+5z = 2 \right\}$$
$$\text{und } F = \left\{ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid 2x-y+3z = -1 \right\}.$$

Bestimme die Schnittgerade $E \cap F$.

Aufgabe 34.35. (3 Punkte)

Bestimme eine Ebenengleichung für die Ebene im $\mathbb{R}^3$, auf der die drei Punkte

$$(1,0,2), (4,-3,2) \text{ und } (2,1,-1)$$

liegen.

Aufgabe 34.36. (4 (2+2) Punkte)

Ein lineares Ungleichungssystem sei durch die Ungleichungen

$$\begin{aligned} x &\geq 0, \\ y+x &\geq 0, \\ -1-y &\leq -x, \\ 5y-2x &\geq 3, \end{aligned}$$

gegeben.

a) Skizziere die Lösungsmenge dieses Ungleichungssystems.

b) Bestimme die Eckpunkte der Lösungsmenge.

Abbildungsverzeichnis