517

(1)

初級中學適用

初學代數學

大同大學叢書之二

序

初學代數學,先室華桂馨女士遺稿,專爲初學說法之書也.桂馨嘗謂余:"君等治天算之學者,每好以巨冊書教初學.實則節目過繁,原理轉晦;宜乎學者之望而却步矣.憶昔十餘歲時,聽君口授代數,獲益良多.吾意爲大衆計,必得簡易明瞭之教材如彼者,然後方可引人入勝."此本書之所由起也.

民國之十一年,吾國教育家羣議改革學制.於是中學小學之圖速效者,競以加高學科程度相尙.卒之高者其名,降者其實,而桂馨之言乃不幸而更驗.大同於中等教育段向設六年之普通科,固無所謂舊制新制,然新招初級學生,多來自已截去一年程度之高小,與將升高一年學科之初中,所聞愈多,所知愈少;以言習算,戛戛乎其難矣.於時初學代數諸班,需一平易切實之書尤急.余因檢桂馨舊稿授之,以爲因時制宜之計.原稿缺聯立二次方程式應用問題,吳君在淵爲增練習題一組;又無三元一次方程式之圖,華君綰言爲補製圖若干;余復重加輯訂,以竟全功.一年之間,試用作

教本者二次.爰亟付刊,以便初學.時距桂馨之沒恰週年也.

昔英之名哲穆勒(Mill)序其所著羣己權界論(*On Liberty*),侯官嚴氏譯之,有曰:"以伉儷而兼師友,於眞理要道,有高識遐情,……吾乃今以是長供養此寶愛悲傷之舊影而已."吾於此書亦云.此書摭拾舊籍,淺近無比.然其長處,正在其能淺近;而編者之純為初學着想,僅事摭拾適當之陳材,而不欲自儕於著作之林,亦足見其為人之一斑.使此書果能"減少初學之困難,引起上進之興味,"則作者所望於教者學者之初願償矣.使教者學者更能推作者此志而廣之,則此書之有裨初學,又豈限於讀此書者而已哉.

中華民國十二年九月十三日,

胡敦復序於上海大同大學.

教師注意

一班之中,學生材力往往不能齊一.其材力過人者,可於本書練習例題以外令加作較難之練習題.

練習題所由取材之書甚多.茲舉其最切用者數種於下:

Hall and Knight, *Elementary Algebra.*

Smith, *Elementary Algebra,* Revised by Irving Stringham (Complete Edition).

Ross, *Elementary Algebra.*

Wentworth *College Algebra.*

吳在淵著近世初等代數學.

大同大學彙刊:

初等代數學問題一　代數式.

初等代數學問題二　方程式.

編輯例言

一　本編爲代數學入門之書,陳義力避過高,說理務求淺顯,以減少初學之困難,引起上進之興味.

一　本編教材,大都取諸美人溫德華氏,郝克斯氏,英人司密斯氏,郝爾那式二氏,日人早川氏等所著初等代數學,而於溫氏書採用尤多.

一　本編於方程式之如何應用,講解特詳,以明代數學與人生實用問題之關係.

一　本編述簡易之圖寫圖解方程式法頗詳盡,以示數理之研究多可借助於形象.

一　本編凡論一理,舉一法,必設例若干,不嫌辭費;旣以明其意義,著其應用,且示學者以演題之模範.

一　本編設簡易之練習題甚多,俾學者藉以熟知運算之理,嫻習運算之術,爲以後提綱挈領執簡馭繁之地.

一　本編可與中學算術同時教授,亦可逕接高小算術;於初級中學前期師範等校用作教本,最爲適宜.

目 錄

初學代數學

第一章

緒論

[注意. 本書列舉主要之定義於卷首,以便檢閱,凡定義,所以釋名,學者務宜細心讀過,玩索其意指,勿但以逐字記憶爲能事已畢也.]

1. 量. 事物之大小多寡輕重等等,凡可得而比較者,曰量(Quantity).

2. 單位. 量可得而比較,則必有可與比較者.欲求比較之便利及精密,每取可與比較之一量作標準.此種標準,得隨事物之性質或比較之目的定之,名曰單位(Unit).

例如計學校學生之多寡,其單位爲一個學生;圖書館圖書之多寡,其單位爲一種圖書.鉛筆以打計者,其單位爲一打之鉛筆;磚以萬方計者,其單位爲一萬方之磚.距離之大者以里計,小者以尺或寸計,一里一尺皆單位也.

3. 數. 以單位度所欲比較之量,視其重複至若

干次;如是所得之結果曰數(Number).

4. 論數之學,有算術(Arithmetic)及代數學(Algebra)算術示數之加減乘除,乘方開方諸運算,而應用於種種數量之問題.代數學更進而推究數之關係及性質,擴大算術所及之範圍,以期運算之普徧.

5. **算術中數之記號.** 算術之表數用數字,其記號凡十: 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9.

6. **代數學中數之記號.** 代數學之表數,除用數字外,更用文字.此種文字,用以作數之普徧記號,其特有之值若何,初無一定,得隨意命之.

主要符號

7. 加減乘除四法,常稱爲基本運算.代數學中基本運算之符號,與算術中全同.

8. 加號(Sign of Addition), $+$. 符號 $+$ 讀作加(plus).

例如 $4+3$, 讀作 4 加 3, 其義爲於 4 加 3, $a+b$, 讀作 a 加 b, 其義爲於 a 加 b.

9. 減號(Sign of Subtraction), $-$. 符號 $-$ 讀作減(minus).

例如 $4-3$, 讀作 4 減 3, 其義爲從 4 減 3; $a-b$, 讀作

a 減 b, 其義爲從 a 減 b.

10. 乘號 (Sign of Multiplication), ×. 符號 × 讀作乘以 (multiplied by).

例如 4×3, 讀作 4 乘以 3, 其義爲以 3 乘 4; $a\times b$, 讀作 a 乘以 b, 其義爲以 b 乘 a.

乘號有時用一點 · 代之. 例如 $4\cdot3$ 與 4×3 同義; $a\cdot b\cdot c$, 與 $a\times b\times c$ 同義.

11. 除號 (Sign of Division), ÷. 符號 ÷ 讀作除以 (divided by).

例如 $4\div3$, 讀作 4 除以 3, 其義爲以 3 除 4 $a\div b$, 讀作 a 除以 b, 其義爲以 b 除 a.

除號有時用一線 —— 或 / 代之; 被除數在 —— 之上或 / 之左, 除數在 —— 之下或 / 之右. 例如 $\frac{4}{3}$, $4/3$, 均與 $4\div3$ 同義; $\frac{a}{b}$, a/b, 均與 $a\div b$ 同義.

12. 等號 (Sign of Equality), =. 符號 = 讀作等於 (is equal to); 置兩數間以示其相等.

例如 $8+4=12$, 示 $8+4$ 及 12 爲相等之數; $x+y=20$, 示 $x+y$ 及 20 爲相等之數.

13. 不等號 (Sign of Inequality), > 或 <. 符號 > 讀作大於 (is greater than), 符號 < 讀作小於 (is less than); 均置大小兩數間以示其不相等; 其開口處對大數.

例如 $9+6>12$, 示 $9+6$ 較 12 爲大; $9+6<16$; 示 $9+6$ 較 16 爲小.

14. 推斷號 (Sign of Deduction), $\therefore$. 符號 $\therefore$ 讀作故 (therefore) 或是以 (hence).

15. 繼續號 (Sign of Continuation), $\cdots$. 符號 $\cdots$ 讀作等等 (and so on).

16. 括號 (Sign of Aggregation). 括號之形式不一:有縱括 (Bar) $\Big|$, 有橫括 (Vinculum) $\overline{\quad\quad}$, 有圓括 (Parentheses) ( ), 有方括 (Brackets) [ ], 有包括 (Braces) { }.

例如 $\left.\begin{matrix}a\\+b\end{matrix}\right|$, $\overline{a+b}$, $(a+b)$, $[a+b]$, $\{a+b\}$, 均示 $a+b$ 當視作一數.

因數, 係數, 冪

17. 因數. 設一數等於甲乙丙丁等數之積; 則甲乙丙丁等數, 均名曰此數之因數 (Factor).

乘號在數字與文字之間, 或文字與文字之間, 常略去不用.

例如 $63\times a\times b$ 常寫作 $63\,ab$; $a\times b\times c$ 常寫作 abc.

abc 與 $a+b+c$ 之別，學者宜十分注意。abc 爲 a, b, c 三數之積；$a+b+c$ 爲 a, b, c 三數之和；二者萬萬不可相混也。

設 $$a=2, b=3, c=4,$$

則 $$abc=2\times3\times4=24,$$

但 $$a+b+c=2+3+4=9,$$

[註. 算術記法所略去之運算符號，恆爲加號；代數記法所略去之運算符號，恆爲乘號；例如 456 之義爲 $400+50+6$, $4ab$ 之義爲 $4\times a\times b$.]

18. 因數之爲數字者，曰數字因數；其爲文字者，曰文字因數。

19. 設一數之因數甲乙丙丁等數中，有一等於0；則無論其他各因數之值爲何，此數亦等於0.

數值爲0之因數，曰零因數。

20. 係數. 設一數爲甲乙二數之積；則在此數中，甲名曰乙之係數 (Coefficient)，乙名曰甲之係數.

例如在 $7c$ 中，7 爲 c 之係數；在 $7ax$ 中，7 爲 ax 之係數，$7a$ 爲 x 之係數.

係數之爲數字者，曰數字係數；其爲文字者，曰文字係數。數字係數爲1者，常略去不寫；例如 ax 卽 $1ax$.

21. 羃及根. 設甲數之因數盡爲乙數,則甲數名曰乙數之羃 (Power),乙數名曰甲數之根 (Root).

例如 $9=3\times3$, 9 爲 3 之羃, 3 爲 9 之根.

22. 指數. aa 爲二個 a 之積;恆記作 a^2; aaa 爲三個 a 之積,恆記作 a^3; $aaaa$ 爲四個 a 之積,恆記作 a^4; 下做此. a 右上之 2, 3, 4 等小數字,曰 a 之指數(Exponent).

指數爲 1 者,常略去不寫;例如 a 卽 a^1.

a, a^2, a^3, a^4, 讀作 a 之第一羃,第二羃,第三羃,第四羃;下做此.

23. 指數與係數之別,學者宜十分注意,例如

$$a^4=a\times a\times a\times a;$$

$$4a=a+a+a+a.$$

設 $a=3$, 則 $a^4=3\times3\times3\times3=81$;

$$4a=3+3+3+3=12.$$

[註. 設一正方形之邊長 a 尺,則其面積爲 a^2 平方尺;因是 a^2 常名曰 a 之平方 (Square) 又設一立方體之邊長 a 尺,則其體積爲 a^3 立方尺;因是 a^3 常名曰 a 之立方(Cube).]

代數式

24. 代數式. 用代數記號所記之數曰代數式

(Algebraic Expression),略稱式.代數式或含一數之記號,或含二數以上之記號並其間之運算符號.

例如 $a, 3abc, 5a+2b-3c$, 皆爲代數式.

25. 項. 代數式之無加減號.以隔開其各部分者,曰項(Term).

例如 $a,\ 5xy,\ 2ab\times 4cd,\ \frac{3ab}{4cd}$, 皆爲一項之代數式,一項之各部分間,止可有乘除號.

26. 單式. 代數式由一項所成者曰單式 (Simple Expression) 或一項式 (Monomial).

例如 $5xy,\ a\times 2b, 7a\div 2b$, 皆爲單式.

27. 複式. 代數式由二項以上所成者,曰複式 (Compound Expression) 或多項式(Polynomial).

例如 $5xy+7a, 2x-y-3z, 4a\quad 3b+2c-3d$, 皆爲複式.

28. 多項式之含二項者,特名曰二項式(Binomial).含三項者,特名曰三項式(Trinomial).

例如 $3a-b$ 爲二項式; $3a-b+c$ 爲三項式.

29. 正負項. 多項式之各項,其前附有 + 號者曰正項 (Positive Term),附有 − 號者曰負項 (Negative Term).第一項前之 + 號,常略去不用.

置項前之符號,常稱曰項之號 (Sign).

30. 兩項異號而同數,則其合併時恆相消.

例如 $+5-5=0$; $-ab+ab=0$.

31. 同類項. 兩項所含文字全同者為同類(Like 或 Similar),所含文字不全同者為不同類(Unlike 或 Dissimilar.

例如 $5a^2bc$, $-7a^2bc$, a^2bc 互為同類項; $5a^2bc$, ab^2c, $5abc^2$ 互為不同類項.

32. 項之次數. 項以所含文字因數之數為次數(Degree).

例如 $5abc$ 為三次項; $2a^2b^2c^2$, 即 $2aabbcc$, 為六次項.

33. 複式之次數. 複式以式中最高次項之次數為次數.

例如 a^2x^2+bx+c 為四次式,因 a^2x^2 為四次故.

34. 元. 式中往往有一文字較其餘諸文字為重要者,此種文字,常名曰元 (Dominant Letter).式之含元者,常以元之次數為次數.

例如 a^2x^2+bx+c 為 x 之二次式.

35. 複式之整列. 多項式之各項,依式中一文字之羃次排列之,謂之多項式之整列(Arrangement).羃次自大而小者曰降羃(Descending Power),自小而大

者曰升羃 (Ascending Power).

例如 $3ax^3-4bx^2-6ax+8b$ 爲依 x 之降羃而整列者, $8b-6ax-4bx^2+3ax^3$ 爲依 x 之升羃而整列者.

括號

36. 多項式於計算時往往有視作一項者;括號常用以示此意.

例如 $2\times(10+5)$ 之義,爲加 5 於 10 而以其和乘 2 若不用括號而作 $2\times10+5$,則其義爲以 10 乘 2 而加 5 於其積矣.

37. 前有 + 號之括號. 設某人原有銀幣 10 圓,後收得 3 圓,最後又收得 2 圓;則先加 3 圓於 10 圓而後加 2 圓於其和,與先以 3 圓 2 圓相加而後加其和於 10 圓. 二者所得之結果,均爲其人最後所有之銀幣.

加 3 於 10 而加 2 於其和,記以式爲 $10+3+2$.

以 3 與 2 相加而加其和於 10,記以式爲 $10+(3+2)$.

故 $$10+(3+2)=10+3+2. \tag{1}$$

設某人原有 10 圓,後收得 3 圓,最後付出 2 圓;則先加 3 圓於 10 圓而後自其和減去 2 圓與先自 3 圓減去 2 圓而後加其差於 10 圓,二者所得之結果,均爲其人最後所有之銀幣.

加3於10而自其和減去2,記以式爲$10+3-2$.

自3減去2而加其差於10,記以式爲$10+(3-2)$.

故 $$10+(3-2)=10+3-2 \qquad (2)$$

由(1)及(2),可知以上二事:

設括號之前有+號,則去括號時勿變其中各項之號(+仍+,−仍−).

設括號之前有+號,則置一式之任何部分於其中時,勿變其各項之號.

38. 前有−號之括號. 設某人原有銀幣10圓,今須償清3圓2圓之兩宗欠款;則先付去3圓後付去2圓,與同時付去3圓2圓無異.

自10先去3後去2,記以式爲$10-3-2$.

自10同時去3及2,記以式爲$10-(3+2)$.

故 $$10-(3+2)=10-3-2. \qquad (3)$$

設某人原有銀圓五枚及五圓紙幣一張,今須償清3圓之欠款,則付去紙幣之5圓而找回2圓,與付去銀圓之3卽(5−2)圓無異.

自10去5而加2,記以式爲$10-5+2$.

自10去$(5-2)$,記以式爲$10-(5-2)$.

故 $$10-(5-2)=10-5+2. \qquad (4)$$

由 (3) 及 (4),可知以下二事:

設括號之前有－號,則去括號時必變其中各項之號(＋變－,－變＋)

設括號之前有－號,則置一式之任何部分於其中時,必變其各項之號.

練習第一

試去以上各式之括號而計算其結果:

1. $9+(3+2)$.	2. $9+(3-2)$.
3. $7+(5+1)$.	4. $7+(5-1)$.
5. $6+(4+3)$.	6. $6+(4-3)$.
7. $3+(8-2)$.	8. $9-(8-6)$.
9. $10-(9-5)$.	10. $9-(6+1)$.
11. $8-(3+2)$.	12. $7-(3-2)$.
13. $9-(4+3)$.	14. $9-(4-3)$.
15. $7-(5-2)$.	16. $7-(7-3)$.
17. $(8-6)-1$.	18. $(3-2)-(1-1)$.
19. $(7-3)-(3-2)$.	20. $(8-2)-(5-3)$.
21. $15-(10-3-2)$.	22. $18-(9-3+7)$.

39. 以單式乘複式. $4(5+3)$ 一式,示 5 及 3 之和常倍以 4,此式可表以點四列,每列左五點爲一組,右

三點又爲一組.

• • • • •　　• • •

• • • • •　　• • •

• • • • •　　• • •

• • • • •　　• • •

今每列之點數爲$(5+3)$而列數爲4.故點之總數爲$4\times(5+3)$.

次更分計左右兩方之點數,則於左得4×5,於右得4×3.二數之和$(4\times5)+(4\times3)$,必等於點之總數.故

$$4(5+3)=(4\times5)+(4\times3)$$
$$=20+12.$$

又$4(8-3)$一式,示8及3之差當倍以4.此式可表以點四列,每列八點右三點外環以圈而左五點則否.

• • • • • ⊙⊙⊙

• • • • • ⊙⊙⊙

• • • • • ⊙⊙⊙

• • • • • ⊙⊙⊙

今每列不加圈之點有$(8-3)$而列數爲4.故不加圈諸點之總數爲$4\times(8-3)$.

次更計加圈諸點之總數而自點之總數減去之點

之總數爲 4×8, 加圈諸點之總數爲 4×3. 二數之差 $(4\times8)-(4\times3)$,必等於不加圈諸點之總數.故

$$4(8-3)=(4\times8)-(4\times3)$$
$$=32-12.$$

設以 a,b,c 代任何三數,則得

$$a(b+c)=ab+ac,$$
$$a(b-c)=ab-ac.$$

由此以推,可知以單式乘複式之法爲分乘各項而合併其所得之積.

練 習 第 二

試去以下各式之括號而計算其結果:

1.	$7(8+5)$.	2.	$7(8-5)$.	3.	$6(7+3)$.
4.	$6(7-3)$.	5.	$8(7+5)$.	6.	$8(7-5)$.
7.	$9(6-2)$.	8.	$4(a+b)$.	9.	$4(a-b)$.
10.	$2(a+b^2)$.	11.	$2(a^2-b^2)$.	12.	$3(ab+c)$.
13.	$3(a-c)$.	14.	$3(c-ab)$.	15.	$a(b+c)$.
16.	$a(b-c)$.	17.	$3a(b+c)$.	18.	$3a(b-c)$.
19.	$5a(b^2+c)$.	20.	$5a(b^2-c^2)$.	21.	$5a^2(b^2-c)$.

40. 代數式之數值. 設代數式中所含文字各以其所表之數代之,且實行其間運算符號所表之運算,

則得全式所表之數,全式所表之數,曰式之數值(Numerical Value),或略曰值.

例一. 設 $b=4$, 求 $3b^2$ 之值,

$$3b^2=3\times4^2=3\times16=48.$$

例二. 設 $a=7, b=2, c=3$, 求 $5ab^2c^3$ 之值.

$$5ab^2c^3=5\times7\times2^2\times3^3=3780.$$

練習第三

設 $a=7$, $b=5$, $c=3$, 試求以下各式之值:

1. $9a$.	2. $8ab$.	3. $4b^2c$.
4. $2a^2$.	5. $3c^3$.	6. $2b^4$.
7. $5ac$.	8. abc.	9. abc^2.
10. $\frac{1}{5}abc$.	11. $\frac{1}{5}ab^2c$.	12. $\frac{1}{7}a^2bc$.

設 $a=5, b=2, c=0, x=1, y=3$, 試求以下各式之值:

13. $4ac^2$.	14. $3ax^5y^2$.	15. $2ab^2y$.
16. $2a^2b^2c^2y^2$.	17. $2ab^2x^2y^2$.	18. $2abx^3y^3$.
19. $3abcxy$.	20. $3abx^3y^2$.	21. $3ab^2xy^2$.

41. 求複式之數值.

例. 設 $a=10, b=4, c=3$, 試求 $5ab-10c^2-5b^2$ 之值.

$$5ab=5\times10\times4=200;$$

$$10c^2=10\times3^2=90;$$

$$5b^2=5\times4^2=80.$$

$$\therefore\ 5ab-10c^2-5b^2=200-90-80$$
$$=30.$$

42. 求複式之值必,如上法先求得各項之值而合併之;故其計算時必先行乘除而後行加減.

[註. 單式與複式間略去之符號,恆為乘號. 例如 $2(a-b)$ 卽 $2\times(a-b)$.]

練習第四

設 $a=5, b=4, c=3$,試求以下各式之值:

1. $9a+2bc$.
2. $ab+2c$.
3. $abc+bc$.
4. $5ac+2a$.
5. $2abc-2ac^2$.
6. $ab+bc-ac$.
7. $ac-(b+c)$.
8. $a^2+(b^2+c^2)$.
9. $2a+(2b+2c)$.
10. $a^2-b^2-c^2$.
11. $3(a-b+c)$.
12. $6ab-(bc+8)$.
13. $7bc-c^2+a$.
14. $5ac-b^2+3b$.
15. $4b^2c-5c^2-2b$.
16. $2a+(b+c)$.
17. $b+2(a-c)$.
18. $c+2(a-b)$.
19. $2a-(b+c)$.
20. $2b-(a-c)$.

21. $2c-(a-b)$. 22. $2c-5(a-b)$.

23. $2b-3(a-c)$. 24. $2c-b(a+b)$.

代數式記法

練習第五

1. 試讀 $a+b$; $a-b$; ab; $a\div b$

2. 六增以四,試以式記之.

3. a增以b,試以式記之.

4. 六減以四,試以式記之.

5. a減以b,試以式記之.

6. 問二十五大於十六幾何.

7. 問x大於y幾何.

8. 三之四倍及三之第四羃,試各以式記之.

9. x之四倍及x之第四羃,試各以式記之.

10. 分二十五爲甲乙二部分.設甲部分爲十五,問乙部分爲何數.

11. 分三十五爲甲乙二部分,設甲部分爲x,問乙部分爲何數.

12. 設x之一部分爲a,問其餘各部分共爲幾何.

13. 問十小於十二幾何.

14; x=100吋10

14. 問 x 小於十四幾何.

15. 問 x 小於 a 幾何.

16. 設一人每時步行四英里,問三時當步行若干英里.

17. 設一人每時步行 y 英里,問 x 時當步行若干英里.

18. 設一人每時步行 y 英里,問步行 x 英里當需時幾何.

練習第六

1. 設被除數爲二十而商爲五,問除數爲何數.

2. 設被除數爲 a 而商爲 b,問除數爲何數.

3. 設某甲此時年二十歲,問四年前年若干歲;五年後年若干歲.

4. 設某乙此時年 x 歲,問三年前年若干歲;七年後年若干歲.

5. 七減去五其結果乘以四,試以式記之.

6. $2x$ 減去 y,其結果乘以七,試以式記之.

7. 問大於四之整數,以何數爲最小.

8. 設 x 爲整數,問大於 x 之整數以何數爲最小;小於 x 之整數以何數爲最大.

9. 問何數較20小d.

10. 設二數之差爲五而小數爲十五,問大數爲何數.

11. 設二數之差爲八而小數爲x,問大數爲何數.

12. 設二數之和爲30而第一數爲20,問第二數爲何數.

13. 設二數之和爲x而第一數爲10,問第二數爲何數.

14. 設100爲x之十倍,求x之值.

練習第七

1. 設x年後某人之年齡爲40歲,問此時爲若干歲.
40－x

2. 設此時某人之年齡爲a歲,問y年後爲若干歲.
a+y

3. 設$7x$等於28,求x之值.

4. 田中之禾,三人刈之,四日可畢,問一人刈之,需時幾何.

5. 田中之禾,a人刈之,b日可畢,問一人刈之,需時幾何.

6. 問$5x$大於$3x$幾何.

7. 問 $20-3$ 大於 $10+1$ 幾何.

8. 問 $2x-3$ 大於 $x+1$ 幾何.

9. 設 x 爲 10, 求 $403x-20$ 之值.

10. 設 a 爲 10, b 爲 2, 求 $2(a-2b)$ 之值.

11. 美國幣制,一圓分作百分.問一圓之幣 a 枚,四分一圓之幣 b 枚,十分一圓之幣 c 枚,共合若干分.

12. 某書架上有英文法文德文書共百册.設法文書有 x 册,德文書有 y 册,問英文書有若干册.

13. 有兵士一隊,分作 10 列,每列 80 人,尙餘 15 人.求全隊之人數.

14. 有兵士一隊,分作 a 列,每列 b 人,尙餘 c 人.求全隊之人數.

練 習 第 八

1. 一室長十碼,寬八碼;室中地板上,鋪一六碼方之地氈,其不鋪地氈之處,若盡以油布覆之,問需油布若干方碼.

2. 一室長 x 碼,寬 y 碼;室中地板上,鋪一 a 碼方之地氈.其不鋪地氈之處,若盡以油布覆之,問需油布若干方碼.

3. 某室周圍四壁之面積,除去門窗不計外,可依

10/16 [illegible]

長p尺高h尺計算,今欲以每捲長g尺寬k尺之紙糊之,問需紙若干捲.

4. m^{2}平方之六倍,加以$5c$與d加b減a之積;試以式記之.

5. 五與二n加一之積,減去六與c減a加b之積;試以式記之.

6. 某人購禮服一襲,價a圓,外套一件,價b圓;手套兩副,每副價c圓.設此人付出百圓紙幣一張,問應找回幾何.

7. 某人作一事,四日而畢.問每日作幾何.

8. 某人作一事,x日而畢.問每日作幾何.

9. 一事,某甲作之,x日而畢;某乙作之,y日而畢;某丙作之,z日而畢.問三人同作,每日能作幾何.

10. 相連三整數之最小數為n.試求其和及積.

11. 甲乙二數之積為36.設甲數為x,問乙數為何數.

12. 設除數為d而商為q,問被除數為何數.

13. 設除數為d,商為q,而剩餘為r,問被除數為何數.

14. 設銀50分可買橘x枚,問銀100分可買橘若干

枚.

15. 小橘每打價銀10分;試求x枚之價.

16. 設橘b枚之價為銀6分,問a枚之價幾何.

17. 一汽車以每時m英里之速度自甲處起行,4時而抵乙處.求甲乙二處間之距離.

18. 某人之年齡,10年前為x歲,問7年後為若干歲.

19. 某人之年齡,y年前為x歲,問c年後為若干歲.

20. 一室之地板,長$3x$碼,寬12碼;試求其面積.

21. 某人行一英里需時15分.問行c英里需時幾何.

22. 相連三整數之平均為x;求三數.

23. 某奇數為$2n+1$.問大於此之奇數,以何數為最小.

24. 一屋之長,比其寬多k尺.今若以w表其寬;問當如何表其長,其周圍,及其面積.

25. 一屋之寬,比其長少a尺;其高又比寬少b尺.今若以h表其高,問如何表其寬,其長,其地板之面積,其四壁之面積,及全屋之容積.

第二章

一次方程式

43. 等式. 兩代數式間有等號聯之以示其相等者,曰等式 (Equation).

例如 $a+b=b+a$, 示 $a+b$ 與 $b+a$ 同表一數; $3x+2=8$, 示 $3x+2$ 與 8 同表一數均爲等式.

44. 等號前後兩代數式,曰等式之兩節 (Member), 或兩邊 (Side) 在前者,曰左節或左邊.在後者,曰右節或右邊.

45. 等式大別爲二種:有可任以何值代其所含文字而其兩節無不相等者,曰恆同等式 (Identical Equation), 略稱恆同式 (Identity).有必以一定之特別值代其所含文字然後其兩節方能相等者,曰虛擬等式 (Conditional Equation), 亦曰方程式 (Equation).

例如 $a+b=b+a$ 爲恆同式,因無論 a, b 之值若何, $a+b$ 恆等於 $b+a$ 也; $3x+2=8$ 爲方程式,因必 x 之值爲 2 而後 $3x+2$ 方等於 8 也.

46. 方程式中所含諸數,其值爲已知或假定爲已知者,曰已知數 (Known Number); 其值爲未知者,曰

未知數 (Unknown Number) 未知數之值,常可由其與已知數之關係求得之.

表未知數,常用羅馬字母之末數字;如 x, y, z 等.表已知數,常用羅馬字母之首數字;如 a, b, c 等.例如方程式 $ax+b=c$ 中之 x,表未知數;a, b, c. 表已知數.

47. 一次方程式. 方程式之含未知數之第一羃而不含其高次羃者,曰一次方程式 (Equation of the First Degree).

例如 $ax+b=c$, 爲 x 之一次方程式.

48. 解方程式. 解方程式 (To Solve an Equation) 者,求未知數之值之謂也.設以某數代方程式中所含未知數,而方程式隨變爲恆同式,則此數卽爲所求之值.此值可稱爲適合於 (To Satisfy) 方程式,而名曰方程式之根 (Root of an Equation).

49. 公理. 解方程式時,恆應用以下之公理 (Axiom):

公理一. 於等數加等數,則和等.

公理二. 從等數減等數,則差等.

公理三. 等數乘以等數,則積等.

公理四. 等數除以等數,則商等.

是故方程式之兩節,以等數加減乘除之,其和差積商仍各相等.

例如方程式$8x=24$,原示$8x$與24表同一之數,故
$8x+4=24+4$, $8x-4=24-4$, $8x\times4=24\times4$, $8x\div4=24\div4$.

50. 移項. 解方程式時,常須移置其兩節之各項,令其含未知數者與不含未知數者分居等號之兩邊,此之謂移項 (Transposition of Terms) 今舉例以示其法.

例一. 試由方程式 $14x-11=5x+70$ 所表之關係求x之值.

先從兩邊各減去$5x$,得

$$14x-5x-11=5x-5x+70$$

即　$9x-11=70$.　(公理二)

次於兩邊各加11,得

$$9x-11+11=70+11,$$

即　$9x=81$.　(公理一)

末以9除兩邊,得　$x=9$.　(公理四)

例二. 試解方程式 $x+b=a$.

從兩邊各減去b,得　$x=a-b$,　(公理二)

例三. 試求方程式 $x-b=a$ 之根.

於兩邊各加b得 $x=a+b$. (公理一)

51. 應用公理一二如以上三例,其效果實無異於自方程式之一節中,取出一項,變其符號,而置之其他一節中.

52. 盡變方程式兩節中各項之號,則兩節之相等如故;因盡變各項之號,無異於盡移左節之項於右節右節之項於左節而後令左右兩節易位也.

53. 統觀以上數款,可知解一次方程式之含一未知數者,有通法如下

先以含未知數之項移至左邊次以不含未知數之項移至右邊末以未知數之係數除兩邊,卽得方程式之根.

54. 以根代未知數,則方程式必變為恆同式故解方程式所得之結果,欲知其有無錯誤,可應用此理以驗之.

例一. 問何數加以其倍,則為24.

[解] 令x為所求之數;

則 $2x$ 為其倍,

而二者之和為 $x+2x$.

但二者之和為24.

$$\therefore\quad x+2x=24.$$

合併x及$2x$,得 $\quad 3x=24.$

兩邊各除以x之係數3,得

$$x=8. \qquad \text{(公理四)}$$

故所求之數爲8.

[驗] $\quad x+2x=24,$

$$8+2\times8=24,$$

$$8+16=24,$$

$$24=24.$$

例二. 設$4x-5$表19,問x表何數.

[解] 從題意,得方程式

$$4x-5=19.$$

移-5於右邊,得 $\quad 4x=19+5.$

合併19及5,得 $\quad 4x=24.$

兩邊各除以4,得 $\quad x=6.$ (公理四)

[驗] $\quad 4x-5=19,$

$$4\times6-5=19,$$

$$24-5=19,$$

$$19=19.$$

例三. 設$3x-7$與$14-4x$同表一數,問x表何數.

[解] 從題意,得方程式

$$3x-7=14-4x.$$

移 $-4x$ 於左邊, -7 於右邊, 得

$$3x+4x=14+7.$$

合倂,得 $$7x=21.$$

除以7, 得 $$x=3.$$

[驗] $$3x-7=14-4x,$$

$$3\times3-7=14-4\times3,$$

$$2=2.$$

例四. 試解方程式 $7(x-1)-30=4(x-4)$.

[解] $$7(x-1)-30=4(x-4).$$

去括號,得 $$7x-7-30=4x-16.$$

移項,得 $$7x-4x=7+30-16.$$

合倂,得 $$3x=21.$$

除以3, 得 $$x=7.$$

[驗] $$7(7-1)-30=4(7-4),$$

$$7\times6-30=4\times3,$$

$$42-30=12,$$

$$12=12.$$

練 習 第 九

試求以下各方程式之根:

1. $3x=x+8$.
2. $3x=2x+5$.
3. $3x+4=x+10$.
4. $4x+6=x+9$.
5. $7x-19=5x+7$.
6. $3(x-2)=2(x-3)$.
7. $8x+7=4x+27$.
8. $3x+10=x+20$.
9. $5(x-2)=3x+4$.
10. $3(x-2)=2(x-1)$.
11. $2x+3=16-(2x-3)$.
12. $10x-3=2(7+x)$.
13. $7x-70=5x-20$.
14. $2x-22=108-2x$.
15. $2(3x-25)=10$.
16. $33x-70=3x+20$.
17. $8x-(x+2)=47$.
18. $3(x-2)=50-(2x-9)$.
19. $2(x+5)+5(x-4)=32$.
20. $4(1+x)+3(2+x)=17$.
21. $2x-(3+4x-3x+5)=4$.
22. $5(2-x)+7x-21=x+3$.
23. $3(x-2)+2(x-3)+(x-4)=3x+5$.
24. $x+1+x+2+x+4=2x+12$.
25. $(2x-5)-(x-4)+(x-3)=x-4$.
26. $4-5x-(1-8x)=63-x$.
27. $3x-(x+10)-(x-3)=14-x$.

28. $x^2-2x-3=x^2-3x+1.$

29. $(x^2-9)-(x^2-16)+x=10.$

30. $x^2+8x-(x^2-x-2)=5(x+3)+3.$

31. $x^2+x-2+x^2+2x-3=2x^2-7x-1.$

32. $10x-(x-5)=2x+47.$

33. $7x-5-(6-8x)+2=3x-7+106.$

34. $6x+3-(3x+2)=(2x-1)+9.$

35. $3(x+10)+4(x+20)+5x-170=15-3x.$

36. $20-x+4(x-1)-(x-2)=30.$

37. $5x+8-(2x-2)+(1-x)=6(9-x)$

55. 解應用問題. 初學者不得其道每苦其難.今舉其當注意之數事如下:

細審題之命意所在,確知其所求者何.

規定量之單位,以 x 代未知量中所含單位之倍數 x 祗表數,不表量;學者宜十分注意.

以代數學之語敍述題意,每式詳加說明.

俟應有諸式齊備,然後作方程式而解之.

例一. 某甲有桃,其數三倍於某乙所有,設二人共有之數爲32,問甲乙各有桃若干.

令 x 爲某乙所有桃之數;

則　$3x$ 爲某甲所有桃之數;

而　$x+3x$ 爲二人共有桃之數;

但桃之總數爲32.

$$\therefore\quad x+3x=32.$$

解方程式得　　　　$x=8.$

從 $x=8$, 得　　　　$3x=24.$

故某甲有24桃某乙有8桃.

[註. 初學者解上題時,每作

"令 x 爲某乙所有之桃".

此於理不可通. x 所表者,桃之數非桃也.]

例二. 甲乙共有銀24圓,而乙所有多於甲所有8圓.問二人各有銀幾何.

令　x 爲甲所有銀圓之數;

則　$x+8$ 爲乙所有銀圓之數;

而　$x+(x+8)$ 爲二人共有銀圓之數;

但二人共有銀圓之數爲24.

$$\therefore\quad x+(x+8)=24.$$

去括號,　　　　$x+x+8=24.$

移項,　　　　$2x=16.$

除以2,　　　　$x=8.$

從 $x=8$, $x+8=16$.

故甲有銀8圓,乙有銀16圓.

[註. 解上題時,萬勿作

"命 $x=$ 甲之銀"或"命 $x=$ 甲所有之銀圓."

x 所表者,圓之數,非銀亦非銀圓也.]

例三. 二數之和爲18,而大數之三倍較小數之四倍多5試求二數.

命 $x=$ 大數;

x 與小數之和爲18,故

$18-x=$ 小數;

三倍大數爲 $3x$,四倍小數爲 $4(18-x)$ 故

$3x-4(18-x)=$ 三倍大數較四倍小數所多;

但三倍大數較四倍小數多5.

$$\therefore \quad 3x-4(18-x)=5.$$

$$\therefore \quad 3x-(72-4x)=5,$$

即 $$3x-72+4x=5.$$

$$\therefore \quad 7x=77.$$

而 $$x=11.$$

故所求二數爲11及7.

練習第十

1. 一數乘以9,得積270.試求此數.

2. 父子歲數之和爲60.設父年五倍於子,試求二人之歲數.

3. 二數之和爲91,而大數適爲小數之六倍.試求二數.

4. 一樹爲風吹斷後,其斷下之部分長於斷餘之部分八倍.設樹幹原長90尺,問二部分各長幾何.

5. 二數之差爲7,和爲53試求二數.

6. 二數之和爲84,差爲12試求二數.

7. 試分35爲二部分,令其大部分較小部分多5.

8. 某數之三倍,適等於其數與40之和;試求其數.

9. 某數之三倍減去24,其結果仍爲原數.問原數爲何數.

10. 一數爲又一數之四倍.設二數之差爲30,問二數爲何數.

11. 二數之和爲36,而大數較小數之二倍大6.試求二數.

12. 二數之和爲40.設小數之五倍較大數之二倍大25,問二數爲何數.

13. 試分30爲二部分,令其大部分之四倍較小部分之五倍大30.

14. 二數之和爲27二倍大數而加以小數之三倍,則得64.試求二數.

15. 二數之和爲32,而小數之五倍適爲大數之三倍.試求二數.

練習第十一

1. 某農夫賣去馬牛各一,共得銀210圓.設馬價爲牛價之四倍問馬牛各值幾何.

2. 自某數減去6而乘以3,與加144於其數相等.試求其數.

3. 某數之三十一倍較40所多,適等於其九倍較40所少.試求其數.

4. 二數之差爲10,其和七倍於差.試求二數.

5. 有相連三整數x, $x+1$, $x+2$,其和爲78,試求之.

6. 有相接五整數,其和爲35.試求之.

7. 甲乙歲數之和爲40.距今十年後,甲年當倍於乙.問甲乙年各幾何.

8. 父年四倍於子,距今五年後則三倍於子.試求

父子之年.

9. 甲年60,乙年50.問距今若干年前,甲年倍長於乙.

10. 一人年50歲,其子年10歲,問距今若干年後,父年三倍於子.

11. 甲有銀100圓,乙有銀20圓.問甲必以銀若干圓與乙,而後二人所有方能相等.

12. 某銀行收回五圓二圓紙幣兩種,共付出現金63圓.設兩種之張數相等.問每種各收回若干張.

練習第十二

1. 某公司中人數凡90其中女子之數二倍於男子,兒童之數三倍於男子,問男子女子兒童各若干.

2. 某數之二倍較70所多,適等於其數較80所少.試求其數.

3. 某農夫雇二人築牆112丈.一人每日平均築4丈,一人築3丈.試求二人工作之日數.

4. 二人同時自某處出發,相背而行.一人每日行30英里,一人行20英里.問若干日後,二人相距350英里.

5. 二人同時自某處出發,同向前行.一人每日行

30英里,一人行20英里.問若干日後,二人相距350英里.

6. 一人前後買燃料三次,共費銀408圓.第一次燃料之價每噸17圓,第二次16圓,第三次18圓.設三次所買分量相等,問其人共買若干噸.

7. 有等量之薪兩種,共值銀八錢四分.設一種每束價銀四分,一種每束價銀三分,試求薪之束數.

[註. 解上題時,可令束數爲$2x$.]

8. 設$2x-3$表29,問$4+x$表何數.

9. 某屆選舉,甲乙二人共得2044票.設甲所得票數較乙少104.問二人各得票若干.

練習第十三

1. 甲行x時,每時4英里.乙行$x+2$時,每時3英里.設二人所行之距離相等,試求之.

2. 甲有銀倍於乙.設甲以30圓與乙,則乙銀倍於甲.問二人各有銀幾何.

3. 某人所有二圓紙幣及四分一圓銀幣,共合金12.75圓.設紙幣之張數,適二倍於銀幣之枚數.問其人紙幣若干張.銀幣若干枚.

4. 某數減以8而乘以8,其結果與減以6而乘以

6等試求其數.

5. 予所有半圓銀幣及四分一圓銀幣,共合金11圓.設半圓銀幣之枚數五倍於四分一圓銀幣,問兩種各有若干枚.

6. 某人以十圓一圓兩種紙幣還欠款91圓設一圓紙幣之張數三倍於十圓紙幣,問兩種各有若干張.

7. 父年四倍於子.距今四年後,則三倍於子.試求父子之年.

8. 某人受雇作工,言明每工作一日可淨得工銀一圓半,惟每輟一日則須貼膳銀半圓.設其人受雇二十四日,共得銀二十八圓;試求工作之日數.

練習第十四

1. 某兒乘馬適野,步行而歸.設馬行之速每時9英里,步行之速每時8英里,而往返所需時間共爲4時間往返各行若干英里.

2. 甲有銀180圓,乙有銀80圓.問甲必以銀若干圓與乙,而後乙銀之六倍方能與甲銀之七倍相等.

3. 有茶兩種,一種每磅價銀四角五分,一種每磅價銀六角五分.今欲混合兩種而得每磅價銀五角之茶八十磅;問兩種應各取若干磅.

4. 一池之容積爲1200立方尺.今用水管三箇引水入池.設一管每分鐘注入水8立方尺,一管10立方尺,一管12立方尺;問注滿此池需時幾何.

5. 一車前輪周圍10尺,後輪周圍12尺.問前輪較後輪多轉250周時,此車共行若干尺.

6. 試分一碼長之線爲二部分,令其一部分較其他一部分長六英寸.

7. 有橙兩種,一種每打價銀40圓,一種50圓.今欲以銀3圓買橙7打,問每種可買若干打.

8. 某人以銀3.30圓,買四分一圓,十分一圓,兩種郵票.設十分一圓之張數三倍於四分一圓,問兩種各買若干張.

9. 亞洲大於北美洲1,818,000方英里;南美洲大於北美洲391,000方英里,大於歐洲3,282,000方英里.合計四洲之面積,共31,548,000方英里.試求每洲之面積.

10. 埃及之大金字塔,高於羅馬之聖彼得寺2尺.美之華盛頓碑,高於大金字塔105尺.巴黎愛斐塔(Eiffel Tower)之高.幾兩倍華盛頓碑而不足120尺.已知此四大建築高度之和爲2443尺,問其高度各爲若干尺.

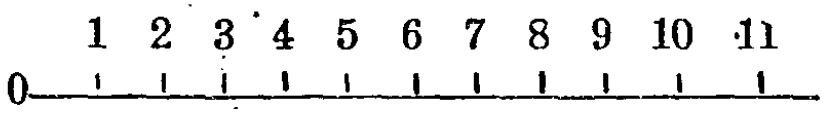
第三章

正　負　數

56. 性質相反之量. 量每有性質相反者,如一人經商,獲利則其資本加多,失敗則其資本減少.又如溫度之高低,常以寒暑表中水銀之升降測之;溫度加高,則水銀上升溫度減低,則水銀下降.

今任就一量觀之凡增多此量之量,名曰正量(Positive Quantity);減少此量之量,名曰負量(Negative Quantity).

57. 正負數 任取一點,以0記之,命其名曰零點.從此點向右作一直線.更任取一定長之線分爲單位,而自零點依此直線向右量去.如是,則單位重複之次數,可依自然數1,2,3,4,等向下數之:



今欲於5加2,可自5向前(卽向右數2而止於其和7欲從5減2,可自5向後(卽向左)數2而止於其差3.欲從5減5,可自5向後數5而得0.然試從2減5,則自2向後數至0卽已無可再數.於是自然數窮,而減法

乃不可通矣.

夫然,故欲從小數減大數,不得不更假定自零而左尙有一羣之數.今試再以前所用之單位,自零點依直線向左量去,亦可得單位重複之次數有如零右 自然數.然零右零左兩羣之數其性質適相反;於是以正負別之:凡屬右羣之數,曰正數 (Positive Number),其前置符號 +;屬左羣之數,曰負數(Negative Number),其前置符號 −;兩羣諸數,統稱曰代數學中之數 (Algebraic Number),略曰代數數.

$$\cdots -5 \quad -4 \quad -3 \quad -2 \quad -1 \quad 0 \quad +1 \quad +2 \quad +3 \quad +4 \quad +5 \cdots$$

今欲從 2 減 5,祇須自正羣之 +2 向負方(卽向左)數 5 而止於負羣之 −3;以式記之,卽 $2-5=-3$ 也.

兩數均爲正數時,則從小數減大數所得之結果恆爲負數.

設 a, b 爲正羣中任何二數,則 $a-b$ 之正負,視 a 較 b 之大小. a 大於 b,則 $a-b$ 爲正;a 等於 b,則 $a-b$ 爲零;a 小於 b,則 $a-b$ 爲負.

代數數,自左而右數之,其大遞增;自右而左數之,其

大遞減.例如 $-3, -1, 0, +2, +4$, 愈在左者愈小,愈在右者愈大.

58. 每一代數數,由兩部分所成.第一部分爲其符號 $+$ 或 $-$,略稱其號;第二部分爲其絕對值(Absolute Value).號示其所屬之羣,絕對值示其在羣中所占之位置.

數前無符號者,其號必爲 $+$.例如 4 即 $+4$; a 即 $+a$.符號 $-$,則無論何時不可省去.

59. 算術中,設所數之量爲整單位,則其數曰整數(Integer);數之稱整從其所數之量也.設所數之量僅爲單位之部分,則其數曰分數(Fraction);數之稱分,亦從其所數之量也.

代數中,設所數之量爲負,則其數曰負數;數之稱負,亦從其所數之量之性質也.

計算負量時,爲便利計,可取負量之單位作負單位,而視負數爲表此負單位之倍數.

60. 符號 $+$ 及 $-$ 之二義. 符號 $+$ 及 $-$ 有二義:一以示加減,爲運算符號(Sign of Operation),算術代數中皆用之;一以示正負,爲性質符號(Sign of Opposition),代數中始用之.

性質符號＋及－,常逕讀作正及負.

61. 代數數遇行加減時,常置之括號中,以免其正負號與加減號之相混.例如 $+4+(-3)$ 表 $+4$ 及 -3 之和, $+4-(-3)$ 表 $+4$ 及 -3 之差.

62. 加　欲於甲代數數加乙代數數,可自甲數在羣中之位置依乙數之號所示之方向數其絕對值所含單位之數.

例如欲求 $+4+(+3)$ 之結果,可自 $+4$ 向正方(卽向右)數3而得 $+7$. 故 $+4$ 加 $+3$ 之和爲 $+7$.

欲求 $+4+(-3)$ 之結果,可自 $+4$ 向負方(卽向左)數3而得 $+1$. 故 $+4$ 加 -3 之和爲 $+1$.

欲求 $-4+(+3)$ 之結果,可自 -4 向正方數 3 而得 -1. 故 -4 加 $+3$ 之和爲 -1.

欲求 $-4+(-3)$ 之結果,自可 -4 向負方數 3 而得 -7. 故 -4 加 -3 之和爲 -7.

63. 減. 欲從甲代數數減乙代數數,可自甲數在羣中之位置反乙數之號所示之方向數其絕對值所含單位之數.

例如欲求 $+4-(+3)$ 之結果,可自 $+4$ 向負方數3而得 $+1$. 故 $+4$ 減 $+3$ 之差爲 $+1$.

欲求 $+4-(-3)$ 之結果可自 $+4$ 向正方數 3 而得 $+7$. 故 $+4$ 減 -3 之差爲 $+7$.

欲求 $-4-(+3)$ 之結果,可自 -4 向負方數 3 而得 -7. 故 -4 減 $+3$ 之差爲 -7.

欲求 $-4-(-3)$ 之結果,可自 -4 向正方數 3 而得 -1. 故 -4 減 -3 之差爲 -1.

64. 今再彙舉以上所得諸結果:

加法	減法
$+4+(+3)=+4+3=+7.$	$+4-(-3)=+4+3=+7.$
$+4+(-3)=+4-3=+1.$	$+4-(+3)=+4-3=+1.$
$-4+(+3)=-4+3=-1.$	$-4-(-3)=-4+3=-1.$
$-4+(-3)=-4-3=-7.$	$-4-(+3)=-4-3=-7.$

由此可得代數數加減之通法如下.

65. **代數數之加法.**

I. 二數之號同,則求其絕對值之和而置其公號於和之前.

II. 二數之號異,則求其絕對值之差而置值大者之號於差之前.

III. 數在二個以上,則先分求諸正數及諸負數之和,次取二和絕對值之差而置值大者之號於差之前.

[註. 加法之結果,與諸數之次序無關.故二數以上之求和,儘可任定一序,依次加之.]

66. 代數數之和,常稱曰代數和 (Algebraic Sum),以別於算術和 (Arithmetical Sum).算術和者,謂絕對值之和也.

67. **代數數之減法.** 比較第64款加減諸結果,則知減一正數,與加一同絕對值之負數同;減一負數,與加一同絕對值之正數同.故行減法時,可

變減數(Subtrahend) 之號而加諸被減數 (Minuend)

68. **加減法之例.**

例一 試求 $3a, 2a, a, 5a, 7a$ 之和.

a 之係數之和,爲 $3+2+1+5+7=18$.

故五數之和爲 $18a$.

例二. 試求 $-5c, -c, -3c, -4c\ -2c$, 之和.

c 之係數之和,爲 $-5-1-3-4-2=-15$.

故五數之和爲 $-15c$.

例三. 試求 $8x, -9x, -x, 3x, 4x, -12x, x$ 之和.

x 之正係數之和,爲 $8+3+4+1=16$.

x 之負係數之和爲 $-9-1-12=-22$.

16 及 22 間之差爲 6,而大數 22 前之符號爲 一.故所

求之和爲 $-6x$.

練習第十五

試求以下各組代數式之和:

1. $5c,\ 23c,\ c,\ 11c.$　　2. $4a,\ 3a,\ 7a,\ 10a.$

3. $7x,\ 12x,\ 11x,\ 9x.$　　4. $6y,\ 8y,\ 2y,\ 35y.$

5. $-3a,\ -5a,\ -18a.$　　6. $-5x,\ -6x,\ -18x,\ -11x.$

7. $-3b,\ -b,\ -9b,\ -4b.$　　8. $-z,\ -2z,\ -1\ z,\ -53z.$

9. $-11m,\ -3m,\ -m,\ m.$

10. $5d,\ -d,\ 3d,\ -4d,\ 2d,\ -3d.$

11. $13n,\ -12n,\ 6n,\ -9n,\ n,\ 2n,\ -3n,\ 13n.$

12. $5g,\ -3g,\ -g,\ -4g,\ 20g,\ -5g,\ -11g,\ -14g.$

13. $-9a^2,\ 5a^2,\ 6a^2,\ a^2,\ 2a^2,\ -a^2,\ -3a^2.$

14. $3x^3,\ -x^3,\ -x^3、-7x^3,\ -x^3,\ 2x^3,\ -10x^3,\ -x^3.$

15. $4a^2b^2,\ -a^2b^2,\ -6a^2b^2,\ 4a^2b^2,\ -2a^2b^2,\ a^2b^2.$

16. $6mn,\ -5mn,\ mn,\ -3mn,\ 4mn.$

17. $3xyz,\ -2xyz,\ 5xyz,\ -7xyz,\ xyz.$

18. $5a^3b^3c^3,\ -7a^3b^3c^3,\ -3a^3b^3c^3,\ 2a^3b^3c^3.$

19. $11abcd,\ -10abcd,\ -9abcd,\ -abcd.$

20. 設 $a=-4,\ b=-5$, 試從 $-b$ 和 $-a$ 而求其值.

設 $a=4,\ b=-2,\ c=-3$. 試求以下各差之值:

21. 從 $a-b+c$ 減 $-a+b+c$.

22. 從 $a+(-b)+c$ 減 $a-(-b)+c$.

23. 從 $-a-(-b)+c$ 減 $-(-a)+(-b)-c$.

24. 從 $a-b+(-c)$ 減 $a-(-b)-(-c)$.

代數數之乘除法

69. **乘法.** 累次取一數(被乘數)至所取次數爲又一數(乘數)中所含單位之數而止,是爲倍.算術中常以倍爲乘之定義.然乘限於倍,則其義有時而窮,如乘數爲分數時是已以分數乘,其法當先分而後倍分者,以乘數分母中所含單位之數等分被乘數而得其一份也;倍者,以乘數分子中所含單位之數倍此等分被乘數所得之一份也.例如以 $\frac{2}{3}$,乘 6, 當三分 6 而取其二;其結果爲 4 夫乘數 $\frac{2}{3}$, 爲 1 之 $\frac{2}{3}$; 而積 4, 爲 6 之 $\frac{2}{3}$. 故積之得自被乘數,恰如乘數之得自一.

乘數爲整數時此義亦可適用.例如 $7\times5=35$ 中之乘數 5, 等於 $1+1+1+1+1$;其積 35, 等於 $7+7+7+7+7$.

70. 由此觀之,自被乘數及乘數可得一數焉,其得自被乘數也,猶乘數之得自一也;是卽所謂積也.由被乘數(Multiplicand)及乘數(Multiplier)求其積(Product)之法,曰乘法.

71. 準斯定義,則

因 $$+3=+1+1+1;$$

故 $$(+8)\times(+3)=+8+8+8 \tag{1}$$

$$=+24,$$

而 $$(-8)\times(+3)=-8-8-8 \tag{2}$$

$$=-24$$

又因 $$-3=-1-1-1,$$

故 $$(+8)\times(-3)=-8-8-8 \tag{3}$$

$$=-24,$$

而 $$(-8)\times(-3)=-(-8)-(-8)-(-8)$$

$$=+8+8+8 \tag{4}$$

$$=+24.$$

72. 乘法之符號定則 乘數被乘數同號,則其積之號爲正,異則爲負.

設 a, b 表任何二數,則

$$(+a)\times(+b)=+ab,$$

$$(+a)\times(-b)=-ab,$$

$$(-a)\times(+b)=-ab,$$

$$(-a)\times(-b)=+ab.$$

73. 乘法之指數定則,

因 $a^2=aa$ 而 $a^3=aaa$,

故 $$a^2\times a^3=aa\times aaa=aaaaa=a^5=a^{2+3},$$

又 $$a^4\times a=aaaa\times a=aaaaa=a^5=a^{4+1}.$$

設 a 表任何數而 m 及 n 爲任何整數,則

$$a^m\times a^n=a^{m+n}.$$

故二羃相乘積之指數,等於二羃指數之和.

74. 求單式之積之法今可舉之如下:

係數取其積;指數取其和.

75. 乘法之例

例一. 試求 $6a^2b^3$ 與 $7ab^2c^3$ 之積.

因數先後之序,無關結果,故

$$6a^2b^3\times 7ab^2c^3=6\times 7\times a^2\times a\times b^3\times b^2\times c^3$$
$$=42a^3b^5c^3.$$

例二. 試求 $-3ab$ 與 $7ab^3$ 之積.

$$-3ab\times 7ab^3=-3\times 7\times a\times a\times b\times b^3$$
$$=-21a^2b^4.$$

練習第十六

試求以下各組代數式之積.

1. $5a^2 6a^3$.
2. $8ab$, $5a^3b^2$
3. $9xy$, $7xy$.
4. $2a^2b$, $a^3b^4c^2$.

5. $3a^2bc^3,\ 3a^4b^2c.$ 6. $2a,\ -5a.$

7. $-3a,\ -4b.$ 8. $-ab,\ a^3b^2.$

9. $-2ab^4,\ -a^4bc.$ 10. $-2x^5y^3z,\ -6xy^2z.$

11. $3a^3b,\ -5ab^2,\ -7a^4b^2.$

12. $2a^2bc^3,\ 3a^3b^2c,\ -ab^2c^3.$

13. $2b^2c^2x^2,\ 2a^2b^2c^3,\ -3a^3bx^3.$

14. $2a^3b^2c,\ -3a^2b^3c,\ -4a^2bc^3.$

15. $7am^2x^3,\ 3a^4mx^3,\ -2amx.$

16. $-3xy^2z^2,\ 2x^2yz^3,\ -5x^4yz.$

設 $a=-2,\ b=3,\ c=-1$;試求以下各式之值:

17. $2ab^2-3bc^2+c.$ 18. $4a^2-2b^2-c^2.$

19. $5a+2b-4c^4.$ 20. $2a^3-3b+8c^2.$

21. $-a+3b-2c^2.$ 22. $-a^3-2b-10c.$

23. $3a^3-3b^3-3c^3.$ 24. $2ab^2-3bc^2+2ac.$

25. $3abc+5a^2b^2-2a^2b.$ 26. $ab^2c^2+2abc^2+a^2b^2c^2.$

27. $2a^2bc+3abc+a^3b^2c^2.$ 28. $6a^2+3a^2b^2-5a^2bc.$

76. 除法. 以8除48者,求8含於48中之次數也,即已知積及其一因數而求其他一因數也,由積及其一因數求其他一因數之法,曰除法.

就除法而言,上舉之積稱被除數(Dividend),已知之

因數稱除數 (Divisor,) 所求之因數稱商 (Quotient).

77. 除法之符號定則.

因 $(+a)\times(+b)=+ab$, $\therefore\ +ab\div(+a)=+b$.

因 $(+a)\times(-b)=-ab$, $\therefore\ -ab\div(+a)=-b$.

因 $(-a)\times(+b)=-ab$, $\therefore\ -ab\div(-a)=+b$.

因 $(-a)\times(-b)=+ab$, $\therefore\ +ab\div(-a)=-b$.

故除數被除數同號,則其商之號爲正;異則爲負.

78. 除法之指數定則.

被除數所含因數,與除數及商所含者全同,故其不見於除數中者,必盡見於商中.

例如 $\frac{abc}{bc}=a$; $\frac{aabx}{ab}=ax$; $\frac{124abc}{-4ab}=-31c$.

以 a^2 除 a^5, a^4 除 a^6, a 除 a^4, 則得

$$\frac{a^5}{a^2}=\frac{aaaaa}{aa}=aaa=a^3=a^{5-2};$$

$$\frac{a^6}{a^4}=\frac{aaaaaa}{aaaa}=aa=a^2=a^{6-4};$$

$$\frac{a^4}{a}=\frac{aaaa}{a}=aaa=a^3=a^{4-1}.$$

設 m, n 表任何整數而 m 大於 n, 則

$$a^m\div a^n=a^{m-n}.$$

故二冪之商之指數,等於被除冪之指數減去除冪之指數.

79. 除法之例.

例一. 試以 $5x$ 除 $15xy$.

$$\frac{15xy}{5x}=\frac{3\times 5xy}{5x}=3y.$$

上式中之5及 x, 爲除數被除數之公因數,故可約去.

例二. 試以 $3ab^2$ 除 $-21a^2b^3$.

$$\frac{-21a^2b^3}{3ab^2}=-7ab.$$

例三. 試以 $-6ab^2c$ 除 $54a^5b^3c$.

$$\frac{54a^5b^3c}{-6ab^2c}=-9a^4b.$$

例四. 試以 $-15x^4y^5z^5$ 除 $-45x^4y^5z^7$.

$$\frac{-45x^4y^5z^7}{-15x^4y^5z^5}=3z^2.$$

例五. 試以 $-60a^2bc^3$ 除 $-15a^3b^2c^3$.

$$\frac{-15a^3b^2c^3}{-60a^2bc^3}=\frac{ab}{4}.$$

練習第十七

試除:

1. x^3 以 x.　　2. $21x^5$ 以 $7x$.
3. $35x^2$ 以 $-7x^2$.　　4. $-42x^2$ 以 $6x^3$.
5. $-63x^5$ 以 $-9x$.　　6. $-72x^3$ 以 $-8x^2$.

7. $-32a^2b^2$ 以 $8ab^2$.　　8. $-16x^3y^3$ 以 $-4xy$.

9. $18x^2y$ 以 $-2xy$.　　10. $-25x^4y^2$ 以 $-5x^3y^2$.

11. $-51x^2y^3$ 以 $-17x^2y$.　　12. $-28a^4b^3$ 以 $7a^3b$.

13. $-36x^2y^6$ 以 $3xy^2$.　　14. $-3x^4y^6$ 以 $-5xy^3$.

15. $-12a^2b^3$ 以 $8ab^3$.　　16. $-abcd$ 以 ac.

17. $-a^2b^3c^4d^5$ 以 $-ab^3c^3d^3$.　　18. $2x^2y^2z^3$ 以 $-xyz^3$.

19. $-5a^5b^8c^7$ 以 $-a^4b^2c^7$.　　20. $52a^2m^3n^4$ 以 $13a^2m^2n^3$.

21. $13xy^2z^4$ 以 $39xyz$.　　22. $68xc^2d^3$ 以 $-4xcd^2$.

23. $-8n^5n^3p^2$ 以 $-1m^5np$.　　24. $-6pqr^3$ 以 $-2p^2qr$.

25. $26a^2g^2t^5$ 以 $-2agt^4$.　　26. $-a^4bc^8$ 以 $-a^5b^3c^4$.

27. $-3x^2y^2z^2$ 以 $-2x^3y^4z^5$.　　28. $-6mnp$ 以 $-3m^2n^2p^2$.

29. $-17a^2b^3c^4$ 以 $51ab^5c^4$.　　30. $-19mg^2t^3$ 以 $7mgt^4$.

設 $a=-1, b=-2, c=-4$; 試求以下各式之值:

31. $6a^2b^2\times(-5ab^2)\div 3a^3b^3$.

32. $8a^5b^2\div(-4bc^3)\times a^2bc$.

33. $-12bc\div c^3\times(-bc^2)$.

34. $28a^4b^3\times a^3c^2\div(-4a^3b)$. -170

35. $21b^3c^5\div(-9b^2\div 7ac)$.

36. $57a^6\div(-7a^3b^2)\div(-a^3c^2)$.

第四章

整式之加減法

80. 代數式之不含文字於其各項之分母中者,曰整式 (Integral Expression).

例如 $x^3+7cx^2-5c^2x$ 爲整式.

整式分數式云者,指式之形而言,非謂其數值之爲整數或分數也.

81. **整式之加法.** 欲示二代數式之相加,可以符號 $+$ 聯第二式於第一式設二式無互爲同類之項,則聯以符號之後,在代數學中運算可稱已畢.

例如加 $m+n-p$ 於 $a+b+c$ 之結果,爲

$$a+b+c+(m+n-p),\text{ 即 } a+b+c+m+n-p.$$

82. 設二式中有同類之項,則聚 (To Collect) 之.聚之者,併之成一項也.併成之項之係數,當然爲同類諸項之係數之代數和.

例一. 試加 $6x+5x+4$ 於 x^2-4x-5.

$$\begin{aligned}
\text{和} &= x^2-4x-5+(6x^2+5x+4)\\
&= x^2-4x-5+6x^2+5x+4\\
&= x^2+6x^2-4x+5x-5+4\\
&= 7x^2+x-1.
\end{aligned}$$

加時爲便於計算計,可並列二式令其同類項上下相對如下:

$$\begin{array}{r}x^2-4x-5\\ 6x^2+5x+4\\ \hline 7x^2+\ x-1\end{array}$$

結果中x^2之係數爲 6+1, 卽 7; x 之係數爲 $-4+5$, 卽 1, 末項爲 $-5+4$, 卽 -1.

例二. 試求 $2c^3-5c^2d+6cd^2+d^3$; $c^3+6c^2d-5cd^2-2d^3$; $3c^3-c^2d-7cd^2-3d^3$之和.

$$\begin{array}{rrrr}2c^3&-5c^2d&+6cd^2&+d^3\\ c^3&+6c^2d&-5cd^2&-2d^3\\ 3c^3&-c^2d&-7cd^2&-3d^3\\ \hline 6c^3&&-6cd^2&-4d^3\end{array}$$

結果中 c^3 之係數爲 2+1+3, 卽 6; c^2d 之係數爲 $-5+6-1$, 卽 0 故和中不見 c^2d; cd^2 之係數爲 $6-5-7$, 卽 -6; d^3 之係數爲 $1-2-3$, 卽 -4.

練習第十八

試求以下各組代數式之和:

1. a^2-ab+b^2; a^2+ab+b^2.
2. $3a^2+5a-7$; $6a^2-7a+13$.
3. $x+2y-3z$; $-3x+y+2z$; $2x-3y+z$.

4. $3x+2y-z$; $-x+3y+2z$ $2x-y+3z$.

5. $-3a+2b+c$; $a-3b+2c$; $2a+3b-c$.

6. $-a+3b+4c$, $3a-b+2c$; $2a+2b-2c$.

7. $4a^2+3a+5$; $-2a^2+3a-8$; a^2-a+1.

8. $5ab+6bc-7ac$; $3ab-9bc+4ac$; $3bc+6ac$.

9. x^3+x^2+x;$2x^3+3x^2-2x$; $3x^3-4x^2+x$.

10. $3x^2-2x-3y$;$5x^2+6xy-7y^2x^2$, $+2y^2$.

11. $2a^2-2ab+3b^2$; $4b^2+5ab-2a^2$,$a^2-3ab-9b^2$.

12. a^3-a^2+a-1; a^2-2a+2; $3a^3+7a+1$.

13. $2m^3-m^2-m$; $4m^3+8m^2-7$; $-3m^3+m+9$.

14. $x^3-3x+6y$; $x^3+2x-5y$; x^3-3x^2+5y.

15. $6x^3-5x+1$; $3x^3+47x^2+2x-3$.

16. $a^3+3a^2b-3ab^2$, $-3a^2b-6ab^2-a^3$; $3a^2b-4ab^2$.

17. $a^3-2a^2b-2a^2$;$a^2-3ab^2-b^3$;$3b^2-2a^3-b^3$.

18. $7x^3-2x^2y+9xy^2+13y^3$; $5x^2y-4xy^2-2x^3-3y^3$;
$y^3-x^3-3x^2y-5xy^2$; $2x^2y-5y^3-2x^3-xy^2$.

19. 設 $x=a-b-c$, $y=2b+2c-3a$, $z=2a-b-c$, 則 $x+y+z=0$; 試證之.

20. 設 $x=3a^2-6a+12$, $y=9a^2+12a-21$, $z=4a^2+2a-3$, 則 $x+y=3z$; 試證之.

83. 整式之減法. 行減法時,設二代數式無互爲同類之項,則惟有以符號 $-$ 聯減數於被減數,其結果不能再行化簡.

例如從 $m+n-p$ 減去 $a+b+c$ 之結果,爲

$$m+n-p-(a+b+c) \text{ 即 } m+n-p-a-b-c.$$

然若二式中有同類之項,則可行聚項之法併之爲一項.

例一. 試從 $2a^3-3a^2+2a-1$ 減 a^3+2a^2+3a-5.

$$\begin{aligned}
\text{差} &= 2a^3-3a^2+2a-1-(a^3+2a^2+3a-5)\\
&= 2a^3-3a^2+2a-1-a^3-2a^2-3a+5\\
&= 2a^3-a^3-3a^2-2a^2+2a-3a-1+5\\
&= a^3-5a^2-a+4.
\end{aligned}$$

減時爲便於計算計,可書減數於被減數之下,令其同類項兩兩相對,然後變減數每項之號而加諸被減數.

$$\begin{array}{r}
2a^3-3a^2+2a-1\\
a^3+2a^2+3a-5\\
\hline
a^3-5a^2-\ a+4
\end{array}$$

變減數各項之號而加之,得 a^3 之係數爲 $2-1$, 即 1; a^2 之係數爲 $-3-2$, 即 -5, a 之係數爲 $2-3$, 即 -1;

末項爲 $-1+5$, 卽 4.

例二. 試從 $4a^3x^2-2a^2x^3-5ax^4$ 減 $x^5-2ax^4-3a^2x^3+4a^3x^2$.

二式之同類項可對列如下而行減法:

$$\begin{array}{r} -5ax^4-2a^2x^3+4a^3x^2 \\ x^5-2ax^4-3a^2x^3+4a^3x^3 \\ \hline -x^5-3ax^4+a^2x^3 \end{array}$$

被減數中無 x^5 項故結果中 x^5 之係數爲 $0-1$, 卽 -1; ax^4 之係數爲 $-5+2$, 卽 -3; a^2x^3 之係數爲 $-2+3$, 卽 1; a^3x^2 之係數爲 $4-4$, 卽 0, 故差中無 a^3x^2 項.

練習第十九

試求以下各組之差:

1. $2a-3b+4c$ 減 $a-2b+3c$.
2. $3a-5b+c$ 減 $a-3b-5c$.
3. $4x-y-2z$ 減 $2x-4y+6z$.
4. $6x-7y+2z$ 減 $x-11y-3z$.
5. $ab+ac+bc+bd$ 減 $ab-ac-bc-bd$.
6. $5ab-ac+bc+bd$ 減 $3ab+2ac-3bc+bd$.
7. $3x^3+2x^2-3x-5$ 減 $2x^3-x^2-5x+3$.
8. $x^3-x+1-a$ 減 $7x^2-5x+1-a$.
9. $9b^3+3abc-7a^3$ 減 $7b^3+8c^3-15abc$.

10. $7-2x^2-3x^3+x^4$ 減 x^4+x-5x^3+5.

11. $3abc+a^3-2b^3-3c^3$ 減 $a^3+b^3+c^3-3abc$.

12. $x^4+2-2x^3-x^2$ 減 $2x^4-5x^2+7x-3$.

13. $x^4+1+x+x^2$ 減 $1-x^5-x+x^4+x^3$.

14. $a^3+b^3-a^2b-ab^2$ 減 $a^3-b^3+3a^2b-3ab^2$.

15. $b^4-5a^3b^3-2ab^2+a^2b$ 減 $a^2b-ab^2-3a^3b^3-b^4$.

16. $3x^3+5y^3-xy^2+4x^2y$ 減 $-x^3+7x^2y-2y^3+3xy^2$.

84. 括號 設 a, b, c 爲正數,則由第37,38兩款可得

$$a+(b+c)=a+b+c, \qquad a+b+c=a+(b+c);$$

$$a+(b-c)=a+b-c, \qquad a+b-c=a+(b-c);$$

$$a-(b+c)=a-b-c, \qquad a-b-c=a-(b+c);$$

$$a-(b-c)=a-b+c, \qquad a-b+c=a-(b-c).$$

此言前有 + 號之括號可去;去時無須變其中各項之號.又項無多少,可置入前有 + 號之括號中;置入時無須變號.

前有 − 號之括號亦可去;惟去時必須變其中各項之號.又項無多少,亦可置入前有 − 號之括號中;惟置入時必須變號.

以上諸定則,亦可通於負數.卽款首所舉之 $a, b, c,$

不必限於正數。

85. 式中括號重疊時,則往往異括號之形式以誌其內外之別.學者遇圓括方括包括之前半,無論其間所括爲何必細審其後半所在合前半後半而得括號之全則凡其間所括之式必察其前之符號而依上款之定則處理之.此外之括號可弗問也.

去重疊括號,莫如自內而外依次爲之例如

$$a-\{b-[c-(d-e)+f]\}$$
$$=a-\{b-[c-d+e+f]\}$$
$$=a-\{b-c+d-e-f\}$$
$$=a-b+c-d+e+f.$$

練習第二十

試去括號而聚項.

1. $a-b-(b-c)-a+2b.$
2. $x-[x-(a-b)+a-y].$
3. $3x-\{2y-[-7c-2x]+y\}.$
4. $5a-[7-(2b+5)-2a].$
5. $x-[2x+(3a-2x)-5a].$
6. $x-[15y-(13z+12x)].$

7. $2a-b+[4c-(b+2c)]$.

8. $5a-\{b+[3c-(2b-c)]\}$.

9. $7x-\{5y-[3z-(3x+z)]\}$.

10. $(a-b+c)-(b-a-c)+(a+b-2c)$.

11. $3x-[-2y-(2y-3x)+z]+[x-(y-2z-x)]$.

12. $x-[2x+(z-2y)+2y]-3x-\{4x-[(x+2y)-y]\}$.

13. $x-[y+z-x-(x+y)-z]+(3x-2y+z)$.

試視 x, y, z 三文字前之因數作係數,而聚每文字之係數於括號中.

14. $ax+by+cz-ay+az-bx$

15. $ax+az+by-cz-ay+cx$.

16. $2ax-3ay-4by+5cx-6bz-7cz$.

17. $az-bmy+3cz-anx-cny+acx$.

18. $mnx-x-mny-y+mnz+z$.

19. $2py-px+4qz-qx-5pz-3qy$.

20. $ax+by+cz-bx-az-cy+bz+cx+ay$.

21. $anz-aly-bmx+alx-cmz-bny+amy-cnx-blz$.

22. $(a+d)y+(a-d)x+(c+d)x+(b-c)y+(b+c)y+(a-b)x$.

23. $(l-m)x-(l+p)y+(l-p)z-(n+p)x-(m+n)z$.

第五章

整式之乘除法

86. 一項式乘多項式.

設 a, b, c 爲正數,則由第39款,

$$a(b+c)=ab+ac,$$

$$a(b-c)=ab-ac,$$

此定則亦可通於負數.

故乘多項式以一項式;可以乘數徧乘被乘數之各項而合併其所得之部分積.

例. 試求 $ab+ac-bc$ 與 abc 之積.

$$\begin{array}{l} ab+ac-bc \\ abc \\ \hline a^2b^2c+a^2bc^2-ab^2c^2 \end{array}$$

[註. 乘自左而右. 先以 abc 乘被乘數之第一項 ab, 次第二項 ac, 又次第三項 $-bc$]

練習第二十一

試乘;

1. $x+7$ 以 x.
2. $2x-3y$ 以 $4x$.
3. $2x-3y$ 以 $7y$.
4. $x-2a$ 以 $2a$.

5. $-x+3b$ 以 $-b$.　　6. $2a-3ab$ 以 $-3a$.

7. $2x^2+3xz$ 以 $5z$.　　8. a^2-5ab 以 $5ab$.

9. x^2-3xy 以 $-y^2$.　　10. $2x^3-3x^2$ 以 $2x^2$.

11. x^2-3y 以 $4y$.　　12. x^2-3y^2 以 $-x^2$.

13. $b^3-a^2b^2$ 以 $-a^3$.　　14. $-a^2b^2-a^3$ 以 $-a^2$.

15. $2x^3-3x^2+x$ 以 $2x^2$.　　16. $a^2-5ab-b^2$ 以 $5ab$.

17. $a^3+2a^2b+2ab^2$ 以 a^2.　　18. $a^3+2a^2b+2ab^2$ 以 b^3.

19. $4x^2-6xy-9y^2$ 以 $2x$.　　20. $-x^2-2xy+y^2$ 以 $-y$.

21. $-a^3-a^2b^2-b^3$ 以 $-a^2$.　　22. $-x^2+2xy-y^2$ 以 $-y^2$.

23. $3a^2b^2-4ab^3+a^3$ 以 $5a^2b^2$.

24. $-ax^2+3axy^2-ay^4$ 以 $-3ay^2$.

25. $x^{12}-x^{10}y^3-x^3y^{10}$ 以 x^3y^3.

26. $-2x^3+3x^2y^3-2xy^3$ 以 $-2x^2y^3$

27. $a^3x^2y^5-a^2xy^4-ay^3$ 以 $a^7x^3y^5$.

28. $3a^2b^2-2ab^3+5a^3b$ 以 $5a^2b^3$.

87. 多項式乘多項式.

欲求 $m+n+p$ 與 $a+b+c$ 之積,可以 M 代乘數 $a+b+c$ 如是則

$$M(m+n+p)=Mm+Mn+Mp$$

以 $a+b+c$ 代 M，則得

$$(a+b+c)m+(a+b+c)n+(a+b+c)p$$
$$=am+bm+cm+an+bn+cn+ap+bp+cp$$
$$=am+an+ap+bm+bn+bp+cm+cn+cp$$

故乘多項式以多項式:可以乘數之各項偏乘被乘數之各項而合併其所得之部分積.

多項式相乘時,爲便計算計,可書乘數於被乘數之下,而列部分積中之同類項成一縱行使上下相對.

例一. 試以 $5x-4y$ 乘 $2x-3y$.

$$\begin{array}{r} 2x-3y \\ 5x-4y \\ \hline 10x^2-15xy \\ -8xy+12y^2 \\ \hline 10x^2-23xy+12y^2 \end{array}$$

首以乘數之第一項 $5x$ 乘被乘數之第一項 $2x$，得 $10x^2$; 次以 $5x$ 乘被乘數之第二項 $3y$，得 $-15xy$. 故第一行部分積爲 $10x^2-15xy$，又次以乘數之第二項 $-4y$ 乘被乘數得第二行部分積 $-8xy+12y^2$. 書此積，當移右一位使同類項 $-35xy$ 及 $-8xy$ 成一縱行. 於是加同類項之係數而得全積.

例二. 試以 $3-2a^2-3a$ 乘 $2a+3-4a^2$.

依a之升冪整列乘數及被乘數.

$$
\begin{array}{r}
3+2a-4a^2 \qquad\qquad\qquad \\
3-3a-2a^2 \qquad\qquad\qquad \\
\hline
9+6a-12a^2 \qquad\qquad\qquad \\
-9a-6a^2+12a^3 \qquad\quad \\
-6a^2-4a^3+8a^4 \\
\hline
9-3a-21a^2+8a^3+8a^4
\end{array}
$$

例三. 試以x^3-2-x乘$3x+x^4-2x^2$.

整列依x之降冪.

$$
\begin{array}{llllll}
x^4 & -2x^2 & +3x & & & \\
x^3 & -x & -2 & & & \\
\hline
x^7 & -2x^5 & +3x^4 & & & \\
 & -x^5 & & +2x^3 & -3x^2 & \\
 & & -2x^4 & & +4x^2 & -6x \\
\hline
x^7 & -3x^5 & +x^4 & +2x^3 & +x^2 & -6x
\end{array}
$$

例四. 試以$a+b+c$乘$a^2+b^2+c^2-ab-bc-ac$.

整列依a之降冪.

$$
\begin{array}{llllllllll}
a^2 & -ab & -ac & +b^2 & -bc & +c^2 & & & & \\
a & +b & +c & & & & & & & \\
\hline
a^3 & -a^2b & -a^2c & +ab^2 & -abc & +ac^2 & & & & \\
 & a^2b & & -ab^2 & -a^2c & & +b^3 & -b^2c & +bc^2 & \\
 & & a^2c & & -abc & -ac^2 & & +b^2c & -bc^2 & +c^3 \\
\hline
a^3 & & & & -3abc & & +b^3 & & & +c^3
\end{array}
$$

[註. 整列乘數及被乘數必依同序;所以便同類項之列成縱行也.]

練習第二十二

試求以下各組代數式之積:

1. $x+7, x+6$.
2. $x-7, x+6$.
3. $x+7, x-6$.
4. $x-7, x-6$.
5. $x+8, x-5$.
6. $2x+3, 2x+3$.
7. $2x-3, 2x-3$.
8. $2x+3, 2x-3$.
9. $3x-2, 2-3x$.
10. $5x-3, 4x-7$.
11. $a-2b, a+3b$.
12. $a-7b, a-5b$.
13. $5x-3y, 5x-3y$.
14. $x-b, x-c$.
15. $2m-p, 4m-3p$.
16. $a+b+c, a-c$.
17. a^2-ab+b^2, a^2+b^2.
18. x^3-3x^2+7, x^2-3.
19. $a^2+ab+b^2, a-b$.
20. $a^2-ab+b^2, a+b$.
21. $x^2+5x-10, 2x^2+3x-4$.
22. $3x^3-2x^2+x, 3x^2+2x-2$.
23. $x^3+2x^2y+3xy^2, x^2-2xy+y^2$.
24. $a^2-3ab-b^2, -a^2+ab+2b^2$.
25. $3a^2b^2+2ab^3-5a^3b, 5a^2b^2-ab^3-b^4$.
26. $a^2-2ab+b^2, a^2+2ab+b^2$.

27. $ab+ac+cd,\ ab-ac+cd.$

28. $3x^2y^2+xy^3-2x^4,\ x^2y^2+xy^3-3y^4.$

29. $x^2+2xy-y^2,\ x^2-2xy+y^2.$

30. $3x^2+xy-y^2,\ x^2-2xy-3y^2.$

31. $a^2-2ab-b^2,\ b^2-2ab-a^2.$

32. $a^2+b^2-c^2-ac,\ a^2-b^2-c^2.$

33. $a^2+4abx-4a^2b^2x^2,\ a^2-4abx+4a^2b^2x^2.$

34. $3a^2-2abx+b^2x^2,\ 2a^2+3abx-2b^2x^2.$

35. $2x^3y+4x^2y^2-8xy^3,\ 2x^3y-3x^2y^2+5xy^3.$

89. 一項式除多項式.

因 $$a(b+c-d)=ab+ac-ad,$$

$$\therefore\quad \frac{ab+ac-ad}{a}=\frac{ab}{a}+\frac{ac}{a}-\frac{ad}{a}=b+c-d.$$

故除多項式以一項式:可以除數徧除被除數之各項而合併其所得之部分商.

例. 試以 $3a^2c$ 除 $3a^4b^2c-9a^3bc^2-6a^2c^3$.

$$\frac{3a^4b^2c-9a^3bc^2-6a^2c^3}{3a^2c}=\frac{3a^4b^2c}{3a^2c}-\frac{9a^3bc^2}{3a^2c}-\frac{6a^2c^3}{3a^2c}$$

$$=a^2b^2-3abc-2c^2$$

練習第二十三

試除:

1. $2a^3-a^2$ 以 a.
2. $4ba^5-6a^2$ 以 $6a$.
3. $21x^4+3x^2$ 以 $3x^2$.
4. $35m^4-7p^2$ 以 7.
5. $27x^5-45x^4$ 以 $9x^2$.
6. $24x^6-8x^3$ 以 $-8x^3$.
7. $34x^3-51x^2$ 以 $17x$.
8. $5x^5-10x^3$ 以 $-5x^3$.
9. $-3a-6ac$ 以 $-3a$.
10. $-5x^3+x^2y$ 以 $-x^2$.
11. $2a^5x^3-2a^4x^2$ 以 $2a^4x^2$.
12. $-x^2y-x^2y^2$ 以 $-xy$.
13. $9a-12b+6c$ 以 -3.
14. $a^3b^2-a^2b^5-a^4b^2$ 以 a^2b.
15. $3x^3-6x^2y-9xy^2$ 以 $3x$.
16. $x^2y^2-x^3y-xy^3$ 以 xy.
17. $a^3-a^2b-ab^2$ 以 $-a$.
18. $a^2b-ab+ab^2$ 以 $-ab$.
19. $xy-x^2y^2+x^3y^3$ 以 $-xy$.
20. $-x^6-2x^5-x^4$ 以 $-x^4$.
21. $a^2x-abx-acx$ 以 ax.
22. $3x^5y^2-3x^4y^3-3x^3y^4$ 以 $3x^2y^2$.
23. $a^2b^2-2ab-3ab^3$ 以 ab.
24. $3a^3c^3+3a^2c-3ac^2$ 以 $3ac$.
25. $8x^3y-24x^2y^2+16xy^3-4xy^2$ 以 $4xy$.
26. $6l^2m^2n^2-9l^2mn-3lm^2n+12lmn^2$ 以 $-3lmn$.

90. 多項式除多項式.

設除數(可視作因數之一) $=$ $a+b+c$,

而商(可視作因數之一) $=$ $n+p+q$,

則被除數(可視作積) $= \left\{ \begin{array}{l} an+bn+cn \\ +ap+bp+cp \\ +aq+bq+cq. \end{array} \right.$

被除數之第一項爲 an; an 者,除數之第一項 a 與商之第一項 n 之積也.故商之第一項 n,可以除數之第一項 a 除被除數之第一項 an 而得之.

從被除數減去 n 與除數之積,則餘數之第一項爲 ap, ap 爲除數之第一項 a 與商之第二項 p 之積;卽商之第二項 p,可以除數之第一項除餘數之第一項而得之也.更自餘數減去 p 與除數之積,而以 a 除所得新餘數之第一項則得商之第二項.

故除多項式以多項式:可

先整列除數及被除數令合於其公有文字之一之升冪序或降冪序;

次以除數之第一項除被除數之第一項;

次以除得之結果記作商之第一項;

次以商之第一項徧乘除數之各項;

次以乘得之積從被除數減去;

5

7

4

次視減得之餘數作新被除數,而再應用上法.

91. 除數及被除數之整列,必依同一文字之同序,除未畢,勿易其序.

下列諸例學者宜注意:

例一. 試以$x+7$除$x^2+18x+77$.

$$\begin{array}{r|l} x^2+18x+77 & x+7 \\ \cline{2-2} x^2+\ \ 7x & x+11 \\ \cline{1-1} 11x+77 & \\ 11x+77 & \\ \cline{1-1} \end{array}$$

[註. 上法實無異於析被除數爲x^2+7x及$11x+77$二部分而以$x+7$分除之;全商$x+11$,卽所得部分商x及11之和也:

$$x^2+18x+77=x^2+7x+11x+77=(x^2+7x)+(11x+77).$$

$$\therefore\quad \frac{x^2+18x+77}{x+7}=\frac{x^2+7x}{x+7}+\frac{11x+77}{x+7}=x+11.]$$

例二. 試以$a-b$除$a^2-2ab+b^2$.

$$\begin{array}{r|l} a^2-2ab+b^2 & a-b \\ \cline{2-2} a^2-ab\quad & a-b \\ \cline{1-1} -ab+b^2 & \\ -ab+b^2 & \\ \cline{1-1} \end{array}$$

例三. 試以a^2+b^2除$a^4-ab^3+b^4+2a^2b^2-a^3b$.

整列依 a 之降冪.

$$
\begin{array}{l|l}
a^4-a^3b+2a^2b^2-ab^3+b^4 & a^2+b^2 \\ \cline{2-2}
a^4 \qquad\quad + a^2b^2 & a^2-ab+b^2 \\ \cline{1-1}
\quad -a^3b+a^2b^2-ab^3+b^4 & \\
\quad -a^3b \qquad\quad -ab^3 & \\ \cline{1-1}
\qquad\qquad a^2b^2 \qquad +b^4 & \\
\qquad\qquad a^2b^2 \qquad +b^4 & \\ \cline{1-1}
\end{array}
$$

例四. 試以 $2a^2-4b^2-3ab$ 除

$$10a^2b^2-20b^4-17a^3b+6a^4+ab^3$$

整列依 a 之降冪.

$$
\begin{array}{l|l}
6a^4-17a^3b+10a^2b^2+ab^3-20b^4 & 2a^2-3ab-4b^2 \\ \cline{2-2}
6a^4-9a^3b-12a^2b^2 & 3a^2-4ab+5b^2 \\ \cline{1-1}
\quad -8a^3b+22a^2b^2+ab^3-20b^4 & \\
\quad -8a^3b+12a^2b^2+16ab^3 & \\ \cline{1-1}
\qquad\qquad 10a^2b^2-15ab^3-20b^4 & \\
\qquad\qquad 10a^2b^2-15ab^3-20b^4 & \\ \cline{1-1}
\end{array}
$$

例五. 試以 $1+2x-3x^2$ 除 $5x^3-3x^4-4x^2+1+x$.

整列依 x 之升冪.

$$
\begin{array}{l|l}
1+x-4x^2+5x^3-3x^4 & 1+2x-3x^2 \\ \cline{2-2}
1+2x-3x^2 & 1-x+x^2 \\ \cline{1-1}
\quad -x-x^2+5x^3-3x^4 & \\
\quad -x-2x^2+3x^3 & \\ \cline{1-1}
\qquad\qquad x^2+2x^3-3x^4 & \\
\qquad\qquad x^2+2x^3-3x^4 & \\ \cline{1-1}
\end{array}
$$

例六. 試以 $a+b+c$ 除 $a^3+b^3+c^3-3abc$.

整列依 a 之降冪.

$$
\begin{array}{r|l}
a^3-3abc+b^3+c^3 & a+b+c \\ \cline{2-2}
a^3+a^2b+a^2c \qquad & a^2-ab-ac+b^2-bc+c^2 \\ \cline{1-1}
-a^2b-a^2c-3abc+b^3+c^3 & \\
-a^2b-ab^2-abc \qquad\qquad & \\ \cline{1-1}
-a^2c+ab^2-2abc+b^3+c^3 & \\
-a^2c \qquad\quad -abc-ac^2 & \\ \cline{1-1}
ab^2-abc+ac^2+b^3+c^3 & \\
a^2b \qquad\quad +b^3+b^2c & \\ \cline{1-1}
-abc+ac^2-b^2c+c^3 & \\
-abc \qquad\quad -b^2c-bc^2 & \\ \cline{1-1}
ac^2+bc^2+c^3 & \\
ac^2+bc^2+c^3 & \\ \cline{1-1}
\end{array}
$$

練習第二十四

試除:

1. $x^2+15x+56$ 以 $x+7$.　2. $x^2-15x+56$ 以 $x-7$.

3. x^2+x-56 以 $x-7$.　4. x^2-x-56 以 $x+7$.

5. $3a^2-4a-4$ 以 $2-a$.　6. $6a^2-7a-3$ 以 $2a-3$.

7. $4a^2+23a+15$ 以 $4a+3$.

8. $2a^2+11a+5$ 以 $2a+1$.

9. x^4+x^2+1 以 x^2+x+1.

10. x^8+x^4+1 以 x^4-x^2+1.

11. $1-a^3b^3$ 以 $1-ab$.

12. x^3-8x-3 以 $x-3$.

13. $a^2-2ab+b^2-c^2$ 以 $a-b-c$.

14. $a^2+2ab+b^2-c^2$ 以 $a+b+c$.

15. $x^2-y^2+2yz-z^2$ 以 $x-y+z$.

16. c^4+2c^2-c+2 以 c^2-c+1.

17. $x^2-4y^2-4yz-z^2$ 以 $x+2y+z$.

18. $x^3-6a^3+11a^2x-6ax^2$ 以 $x^2+6a2-5ax$.

19. $a^2-4b^2-9c^2+12bc$ 以 $a-3c+2b$.

20. $2a^3-8a+a^4+12-7a^2$ 以 $2+a^2-3a$.

21. $q^4+6q^3+4+12q+13q^2$ 以 $3q+2+q^2$.

22. $27a^3-8b^3$ 以 $3a-2b$.

試求餘數:

23. $a^4+9a^2+15-11a-7a^3$ 除以 $a-5$.

24. $7-8c^2+5c^3+8c$ 除以 $5c-3$.

25. $3+11a^3+30a^4-82a^2-5a$ 除以 $3a^2-4+2a$.

26. $2x^3-16x+10-39x^2+17x^4$ 除以 $2-5x^2-4x$.

27. $30y+9+71y^3+28y^4-5y^7$ 除以 $4y^2-13y+6$.

28. $x^7-6y^{14}-7x^5y^4-7xy^{12}+14x^3y^8$ 除以 $x-2y^2$.

練習第二十五

雜題

1. 試加 $2a^2-3ac-3ab$; $2b^2+3ac+a^2$; $-a^2-2b^2+3ab$.

2. 試從 $4b^4-2ab^3+4a^2b^2$ 減去 $3a^4-2a^3b+4a^2b^2$.

3. 試簡約 $x-y-\{z-x-(y-x+z)\}$.

4. 試以 $a^2+b^2-c^2+d^2$ 乘 $a^2+b^2+c^2-d^2$.

5. 試以 $1+y^2-2$ 除 $10y^6+2-12y^5$.

6. 設 $a=1, b=2, c=-3$, 試求

$a^2+b^2+c^2+2ab+2ac+2bc$ 之值.

7. 試簡約 $x-(y-z)-\{4y+[2y-(z-x)]\}$.

8. 試以 $a+b+c$ 乘 $a^2+b^2+c^2-ab-ac-bc$.

9. 試以 $4y^2-5x^2+3xy$ 除 $16y^4-21x^2y^2+21x^3-10x^4$.

10. 試加 $-2a^4+3a^3b-4a^2b^2$, $2a^3b-3a^2b^27$, $a^2b^2+2a^4-b^4$.

11. 試從 $3x^3+5x-1$ 減去 $x-5+5x^2$ 及 $3+4x-3x^2$ 之和.

12. 被減數爲 $9c^2+11c-5$, 餘數爲 $6c^2-13c+7$. 問減數爲何數.

13. a^4+6b^4 除以 $a^2+2ab+2b^2$; 試求其餘數.

14. 試以 $5-2x-x^2$ 乘 $2-5x^2-4x$.

15. 試以 a^2+ax+x^2 除 $a^6+a^5x+a^4x^2-a^3x^3+x^6$.

試以 x 之各冪之係數置入括號中:

16. $ax^3-cx+bx^2-bx^3+cx^2-x$.

17. $ax^4-2x+bx^4-cx-ax^3+bx^3$.

18. $x^3-bx^2-cx+bx-cx^2+ax^3$.

試簡約以下各式:

19. $a-\{a-(a+b)-[a-(a-\overline{b-a})]+2b\}$.

20. $[x+y-2(a+b)]+[y+a-3(b+x)]+[a+b-4(x+y)]$.

21. $(x^3+3x^2y+3xy^2+y^3)-(3xy^2-3x^2y+x^3-y^3)$.

22. $(3a-b)(3a+b)(9a^2+3ab+b^2)(9a^2-3ab+b^2)$.

23. $[(x^2-xy)\div x]\times[(y^4-x^4)\div(x^2+y^2)]\div[(y^2-xy)\div y]$.

試以含 x, y 之各項置入前附 + 號之括號中，以含 a, b 之各項置入前附 − 號之括號中:

24. $x^2+12ab-9b^2-4a^2$.

25. $10ab+x^2-y^2-a^2-36b^2$.

26. $y^2-a^2-4b^2+x^2-2xy+4ab$.

27. $4xy+4ab-4y^2+4a^2+b^2-x^2$.

28. $2ab+16x^2-a^2-b^2+4y^2-16xy$.

29. $3a^2-2y^2-12ab+10xy-x^2+b^2$.

第六章

乘除之特別法

92. 乘之特別法 乘之結果有可列爲公式(Formula)藉以簡捷運算者此等捷法,爲用甚大,學者務宜注意.茲舉其最要者於後.

93. 二數和之平方.

$$
\begin{aligned}
(a+b)^2 &= (a+b)(a+b)\\
&= a(a+b)+b(a+b)\\
&= a^2+ab+ab+b^2\\
&= a^2+2ab+b^2.
\end{aligned}
$$

a, b 皆任何數也.由此可得

法一. 二數和之平方,等於二數之平方和加上其積之倍.

94. 二數差之平方.

$$
\begin{aligned}
(a-b)^2 &= (a-b)(a-b)\\
&= a(a-b)-b(a-b)\\
&= a^2-ab-ab+b^2\\
&= a^2-2ab+b^2.
\end{aligned}
$$

由此可得

法二. 二數差之平方等於二數之平方和減去其積之倍.

95. 二數和差之積.

$$\begin{aligned}(a+b)(a-b)&=a(a-b)+b(a-b)\\&=a^2-ab+ab-b^2\\&=a^2-b^2.\end{aligned}$$

由此可得

法三. 二數和差之積,等於二數之平方差.

試以 $2x$ 代 a, 3 代 b; 則

從法一得 $(2x+3)^2=4x^2+12x+9$;

從法二得 $(2x-3)^2=4x^2-12x+9$;

從法三得 $(2x+3)(2x-3)=4x^2-9$.

以上諸結果,均逕由視察 (Inspection) 得之,無須再藉尋常之運算.

練習第二十六

試逕由視察求以下各式之結果:

1. $(m+n)^2$.
2. $(c-a)^2$.
3. $(a+2c)^2$.
4. $(3a-2b)^2$.
5. $(2a+3b)^2$.
6. $(a-3b)^2$.
7. $(2x-y)^2$.
8. $(y-2x)^2$.

9. $(a+5b)^2$.　　10. $(2a-5b)^2$.

11. $(x+y)(x-y)$.　　12. $(4a-b)(4a+b)$.

13. $(2b-3c)(2b+3c)$.　　14. $(x+5b)(x+5b)$.

15. $(y-2z)(y-2z)$.　　16. $(y+3z)(y-3z)$.

17. $(2a-3b)(2a+3b)$.　　18. $(2a-3b)(2a-3b)$.

19. $(2a+3b)(2a+3b)$.　　20. $(5x+3a)(5x-3a)$.

96. 兩二項式 $x+a$, $x+b$ 之積. 兩二項式之形爲 $x+a$, $x+b$ 者,其積亦甚重要.

一.
$$\begin{aligned}(x+5)(x+3)&=x(x+3)+5(x+3)\\&=x^2+3x+5x+15\\&=x^2+8x+15\end{aligned}$$

二.
$$\begin{aligned}(x-5)(x-3)&=x(x-3)-5(x-3)\\&=x^2-3x-5x+15\\&=x^2-8x+15\end{aligned}$$

三.
$$\begin{aligned}(x+5)(x-3)&=x(x-3)+5(x-3)\\&=x^2-3x+5x-15\\&=x^2+2x-15\end{aligned}$$

四.
$$\begin{aligned}(x-5)(x+3)&=x(x+3)-5(x+3)\\&=x^2+3x-5x-15\\&=x^2-2x-15.\end{aligned}$$

觀此可知

第一. $x+a$, $x+b$ 之積,共有三項.

第二. 積之首項,爲原有兩式第一項之積.

第三. 積之末項,爲原有兩式第二項之積.

第四. 積之中項,以原有兩式第二項之代數和爲係數.

97. 由是,則兩二項式之第一項相同者,其積可逕由視察得之.

例一. 試以 $x+7$ 乘 $x+8$.

$$8+7=15, 8\times 7=56.$$

$$\therefore \quad (x+8)(x+7)=x^2+15x+56.$$

例二. 試以 $x-7$ 乘 $x-8$.

$$(-8)+(-7)=-15, (-8)(-7)=56.$$

$$\therefore \quad (x-8)(x-7)=x^2-15x+56.$$

例三. 試以 $x+6y$ 乘 $x-7y$.

$$-7y+6y=-y, (-7y)\times 6y=-42y^2.$$

$$\therefore (x-7y)(x+6y)=x^2-xy-42y^2.$$

例四. 試以 $x-5y$ 乘 $x+6y$.

$$6y-5y=y, 6y\times(-5y)=-30y^2.$$

$$\therefore \quad (x+6y)(x-5y)=x^2+xy-30y^2.$$

練習第二十七

試逕由視察求以下各式之結果:

1. $(x+7)(x+4)$.
2. $(x-3)(x+7)$.
3. $(x-2)(x-4)$.
4. $(x-6)(x-10)$.
5. $(x+7)(x-4)$.
6. $(x+a)(x-2a)$.
7. $(x+3a)(x-a)$.
8. $(a+3c)(a+3c)$.
9. $(a+2x)(a-4x)$.
10. $(a-3b)(a-4b)$.
11. $(a^2-c)(a^2+2c)$.
12. $(x-17)(x-3)$.
13. $(x+6y)(x-5y)$.
14. $(3+2x)(3-x)$.
15. $(5+2x)(1-2x)$.
16. $(a-2b)(a+3b)$.
17. $(a^2b^2-x^2)(a^2b^2-5x^2)$
18. $(a^3b-ab^3)(a^3b+5ab^3)$.
19. $(x^2y+xy^2)(x^2y+xy^2)$
20. $(x^2y-xy^2)(x^2y-3xy^2)$.
21. $(x+a)(x+b)$.
22. $(x+a)(x-b)$.
23. $(x-a)(x+b)$.
24. $(x-a)(x-b)$.
25. $(x+2a)(x+2b)$
26. $(x-2a)(x+2b)$.
27. $(x+2a)(x-2b)$.
28. $(x-2a)(x-2b)$.
29. $(x^2-7a^2)(x^2+8a^2)$.
30. $(ab+3x^3)(ab-3x^3)$.
31. $(y^2+9x^2)(y^2-3x^2)$.
32. $(1+a^2b^2)(1-3ac)$.
33. $(pq+a^2)(b^2-pq)$.
34. $(xy+2)(k-xy^3)$.

98. 除之特別法　除之結果,亦有可列爲公式藉

以簡捷運算者茲舉其最要者於後,學者其注意焉.

99. 二平方之差.

因$(a+b)(a-b)=a^2-b^2$,

$$\therefore\quad \frac{a^2-b^2}{a+b}=a-b;\ \frac{a^2-b^2}{a-b}=a+b.$$

由此可得

法一. 二數之平方差可爲其和或差所整除;整除者,除盡而無餘也.

練習第二十八

試逕由視察求以下各式之結果:

1. $\frac{x^2-4}{x-2}$　　2. $\frac{x^2-4}{x+2}$.

3. $\frac{a^2-9}{a-3}$　　4. $\frac{a^2-9}{a+3}$.

5. $\frac{c^2-25}{c-5}$　　6. $\frac{c^2-25}{c+5}$.

7. $\frac{49x^2-y^2}{7x-y}$　　8. $\frac{49x^2-y^2}{7x+y}$.

9. $\frac{9b^2-1}{3b-1}$　　10. $\frac{9b^2-1}{3b+1}$.

11 $\frac{16x^2-25a^2}{4x-5a}$　　12 $\frac{16x^4-25a^2}{4x^2+5a}$.

13. $\frac{9x^2-25y^2}{3x-5y}$　　14. $\frac{a^2-(b-c)^2}{a-(b-c)}$.

15. $\frac{a^2-(b-c)^2}{a+(b-c)}$　　16. $\frac{a^2-(2b-c)}{a-(2b-c)}$,

17. $\frac{(5a-7b)^2-1}{(5a-7b)-1}$.

18. $\frac{(5a-7b)^2-1}{(5a-7b)+1}$.

19. $\frac{z^2-(x-y)^2}{z-(x-y)}$

20. $\frac{z^2-(x-y)^2}{z+(x-y)}$.

21. $\frac{a^2-(2b-c)^2}{a+(2b-c)}$

22. $\frac{(x+3y)^2-z^2}{(x+3y)-z}$.

23. $\frac{(x+3y)-z^2}{(x+3y)+z}$

24. $\frac{(a+2b)^2-4c^2}{(a+2b)-2c}$.

25. $\frac{(a+2b)^2-4c^2}{(a+2b)+2c}$

26. $\frac{1-(3x-2y)^2}{1+(3x-2y)}$.

100. 二立方之差. 實行除法,知

$$\frac{a^3-b^3}{a-b}=a^2+ab+b^2.$$

由此可得 公式 $a^3-b^3=(a-b)(a^2+ab+b^2)$

法二. 二數之立方差,可爲其差所整除;所得之商,等於二數之平方和加上其積.

練習第二十九

試逕由視察求以下各式之結果:

1. $\frac{1-x^3}{1-x}$

2. $\frac{1-8a^3}{1-2a}$.

3. $\frac{1-27c^3}{1-3c}$.

4. $\frac{8a^3-b^3}{2a-b}$.

5. $\frac{64b^3-27c^3}{4b-3c}$.

6. $\frac{2bx^3-8y^3}{3x-2y}$.

7. $\frac{x^3y^3-z^3}{xy-z}$.

8. $\frac{a^3b^3-8}{ab-2}$.

9. $\dfrac{125a^3-b^3}{5a-b}$. 10. $\dfrac{a^3-8b^3}{a-2b}$.

11. $\dfrac{a^3-64}{a-4}$. 12. $\dfrac{a^9-27}{a^3-3}$.

13. $\dfrac{a^{12}-x^6y^6}{a^4-x^2y^2}$. 14. $\dfrac{x^{15}-a^9b^9}{x^5-a^3b^3}$.

15. $\dfrac{27x^3y^3-z^{12}}{3xy-z^4}$. 16. $\dfrac{x^3y^3z^3-1}{xyz-1}$.

17. $\dfrac{8a^3b^3c^3-27}{2abc-3}$. 18. $\dfrac{1-64x^3y^3z^3}{1-4xyz}$.

101. 二立方之和. 實行除法,知

$$\frac{a^3+b^3}{a+b}=a^2-ab+b^2,$$

由此可得 法 $a^3+b^3=(a+b)(a^2-ab+b^2)$

法三. 二數之立方和,可爲其和所整除;所得之商,等於二數之平方和減去其積.

練習第三十

試逕由視察求以下各式之結果:

1. $\dfrac{1+x^3}{1+x}$. 2. $\dfrac{1+8a^3}{1+2a}$.

3. $\dfrac{1+27c^3}{1+3c}$. 4. $\dfrac{8a^3+b^3}{2a+b}$

5. $\dfrac{64b^3+27c^3}{4b+3c}$. 6. $\dfrac{27x^3+8y^3}{3x+2y}$.

7. $\dfrac{8x^3+125y^3}{2x+5y}$. 8. $\dfrac{x^3y^3+z^3}{xy+z}$.

$\dfrac{1+x^3}{1+x}=\dfrac{(1+x)(1-x+x^2)}{1+x}$

9. $\dfrac{a^3b^3+8}{ab+2}$.

10. $\dfrac{125a^3+b^3}{5a+b}$.

11. $\dfrac{a^3+8b^3}{a+2b}$.

12. $\dfrac{a^6+64}{a^2+4}$.

13. $\dfrac{a^9+27}{a^3+3}$.

14. $\dfrac{8a^6+b^3}{2a^2+b}$.

15. $\dfrac{a^{12}+x^6y^6}{a^4+x^2y^2}$.

16. $\dfrac{x^{15}+a^9b^9}{x^5+a^3b^3}$.

17. $\dfrac{27x^3y^3+z^{12}}{3xy+z^4}$.

18. $\dfrac{x^3y^3z^3+1}{xyz+1}$.

19 $\dfrac{8a^3b^3c^3+27}{2abc+3}$.

20. $\dfrac{1+64x^3y^3z^3}{1+4xyz}$.

21. $\dfrac{1+27a^6b^3c^3}{1-3a^2bc}$

22. $\dfrac{p^3q^3+125x^3}{pq+5x}$.

23 $\dfrac{343x^3+1000y^3}{7x+10y}$.

24. $\dfrac{512a^3b^3+729c^3d^3}{8ab+9cd}$.

試用除法求下列諸式之結果:

25. $\dfrac{x^4-y^4}{x-y}$.

26. $\dfrac{x^4-y^4}{x+y}$.

27. $\dfrac{x^5-y^5}{x-y}$.

28. $\dfrac{x^5+y^5}{x+y}$.

29. $\dfrac{x^6-y^6}{x-y}$.

30. $\dfrac{x^6-y^6}{x+y}$.

31. $\dfrac{x^7-y^7}{x-y}$.

32. $\dfrac{x^7+y^7}{x+y}$.

33. $\dfrac{x^8-y^8}{x-y}$.

34 $\dfrac{x^8-y^8}{x+y}$.

第七章

因數

102. 有理式. 式之不含平方根或其他羃根者,曰有理式 (Rational Expression).

103. 有理整式之因數 算術中,凡可整除(卽除盡而無餘數)一整數之整數,均爲其因數.代數學中亦然;凡可整除一有理整式之有理整式,均爲其因數.

104. 一項式之因數. 一項式之因數可由視察得之.例如 $21a^2b$ 之因數爲 $3, 7, a, a, b$.

105. 多項式之因數. 多項式之可析爲因數者,察其形每可悟求之之法.今別爲數類如下:

第一類

106. 式之各項有公因數者.

例一. 試析 $3a^2-6ab$ 爲因數.

$3a$ 爲各項之公因數.

$$\frac{3a^2-6ab}{3a}=\frac{3a^2}{3a}-\frac{6ab}{3a}=a-2b.$$

$$\therefore\quad 3a^2-6ab=3a(a-2b).$$

故所求之因數爲 $3a$ 及 $a-2b$.

例二. 試析 $4x^3+12x^2-8x$ 爲因數.

$4x$爲各項之公因數.

$$\frac{4x^3+12x^2-8x}{4x}=\frac{4x^3}{4x}+\frac{12x^2}{4x}-\frac{8x}{4x}.$$

$$=x^2+3x-2$$

$$\therefore\quad 4x^3+12x^2-8x=4x(x^2+3x-2)$$

故所求之因數爲$4x$及x^2+3x-2.

練習第三十一

試析以下各式爲因數:

1. $2x^2-4x$.
2. $3a^3-6a$.
3. $5a^2b^2-10a^3b^3$.
4. $3x^2y+4xy^2$.
5. $8a^3b^2+4a^2b^3$.
6. $3a^4-12a^2-6a^3$.
7. $4x^2-8x^4-12x^5$.
8. $5-10x^2y^2+15x^2y$.
9. $7a^2-14a-21x^3$.
10. $3x^3y^3-6x^4y^4-9x^2y^2$.

第二類

107. 式之諸項可分爲羣而各羣有公因數者.

例一. 試析$ac+ad+bc+bd$爲因數.

$$ac+ad+bc+bd=(ac+ad)+(bc+bd) \quad (1)$$

$$=a(c+a)+b(c+d) \quad (2)$$

$$=(a+b)(c+d) \quad (3)$$

[註. $ac+ad+bc+bd$之首二項有公因數a,末二項

有公因數 b.故首二項可括爲一羣,而末二項又爲一羣二羣有公因數 $c+d$; 故原式之因數爲 $a+b$, $c+d$.]

例二. 試析 $ac+ad-bc-bd$ 爲因數.

$$\begin{aligned} ac+ad-bc-bd &= (ac+ad)-(bc+bd) \\ &= a(c+d)-b(c+d) \\ &= (a-b)(c+d). \end{aligned}$$

例三. 試析 $2x^3-3x^2-4x+6$ 爲因數.

$$\begin{aligned} 2x^3-3x^2-4x+6 &= (2x^3-3x^2)-(4x-6) \\ &= x^2(2x-3)-2(2x-3) \\ &= (x^2-2)(2x-3). \end{aligned}$$

例四. 試析 x^3+x^2-ax-a 爲因數.

$$\begin{aligned} x^3+x^2-ax-a &= (x^3+x^2)-(ax+a) \\ &= x^2(x+1)-a(x+1) \\ &= (x^2-a)(x+1). \end{aligned}$$

例五. 試析 x^3+3ax^2+x+3a 爲因數.

$$\begin{aligned} x^3+3ax^2+x+3a &= (x^3+3ax^2)+(x+3a) \\ &= x^2(x+3a)+(x+3a) \\ &= (x^2+1)(x+3a). \end{aligned}$$

練習第三十二

試析以下各式爲因數:

1. $x^3+x^2+x+1.$

2. $x^3-x^2+x-1.$

3. $x^2+xy+xz+yz.$

4. $ax-bx-ay+by.$

5. $a^2-ac+ab-bc.$

6. $x^2-bx+3x-3b.$

7. $2x^3-x^2+4x-2.$

8. $a^2-3a-ab+3b.$

9. $6a^2+2ab-3ac-bc.$

10. $abxy+cxy+abc+c^2.$

11. $ax-ay-bx+cy-cx+by.$

12. $(a-b)^2-2c(a-b)+3d(a-b).$

第三類

108. 二項式爲二平方之差者.

從乘法,知$(a+b)(a-b)=a^2-b^2$,

故a^2-b^2之因數爲$a+b$, $a-b$.

凡式之可寫作二平方之差者,其因數可倣此求之.

109. 一項式爲完全平方時,其求平方根法如下:

數字係數,行開平方法;文字則以2除其指數.

例一. 試析$9x^2-4y^2$爲因數.

$9x^2=(3x)^2$, $4y^2=(2y)^2$,

故$9x^2-4y^2$可寫作$(3x)^2-(2y)^2$.

因 $$a^2-b^2=(a+b)(a-b),$$

故代 a 以 $3x$, 代 b 以 $2y$, 則得

$$(3x)^2-(2y)^2=(3x+2y)(3x-2y).$$

例二. 試析 $1-81a^2b^2$ 爲因數.

$$1-81a^2b^2=1-(9ab)^2$$
$$=(1+9ab)(1-9ab).$$

是故析二平方差爲因數可先求二平方之根;於是於第一根加第二根,則得第一因數;從第一根減第二根,則得第二因數:

練習第三十三

試析以下各式爲因數:

1. $4-x^2$.
2. $9-x^2$.
3. $9a^2-x^2$.
4. $25-x^2$.
5. $25x^2-a^2$.
6. $16a^4-121$.
7. $121a^4-16$.
8. $4a^2b^2-c^2d^2$.
9. $1-x^2y^2$.
10. $81x^2y^2-1$.
11. $49a^2b^2-4$.
12. $25a^4b^4-9$.
13. $9a^4b^6-16x^{10}$.
14. $144x^2y^2-1$.
15. $100x^6y^2z^4-1$.
16. $1-121a^4b^8c^{12}$.
17. $25a^2-64x^6y^8$.
18. $16x^{16}-25y^{18}$.

12
12
24
12
144

試應用析因數法以求以下各式之值:

19. $(375)^2-(225)^2$. 20. $(579)^2-(559)^2$.

21. $(873)^2-(173)^2$. 22. $(101)^2-(99)^2$.

23. $(7244)^2-(7242)^2$. 24 $(3781)^2-(219)^2$.

110. 平方爲複式時,上法亦可用.

例一. 試析$(x+3y)^2-16a^2$爲因數.

第一平方之根爲$x+3y$.

第二平方之根爲$4a$.

二根之和爲$x+3y+4a$.

二根之差爲$x+3y-4a$.

故$(x+3y)^2-16a^2=(x+3y+4a)(x+3y-4a)$.

例二. 試分析$a^2-(3b-5c)^2$爲因數.

二平方之根爲a及$3b-5c$.

二根之和爲$a+3b-5c$,其差爲$a-3b+5c$.

故$a^2-(3b-5c)^2=(a+3b-5c)(a-3b+5c)$.

練習第三十四

試析以下各式爲因數:

1. $(x+y)^2-z^2$. 2. $(x-y)^2-z^2$.

3. $z^2-(x+y)^2$. 4. $z^2-(x-y)^2$.

5. $(x+y)^2-4z^2$. 6. $4z^2-(x-y)^2$.

7. $(a+2b)^2-c^2$.

8. $(a-2b)^2-c^2$.

9. $c^2-(a-2b)^2$.

10. $(2a+5c)^2-1$.

11. $1-(2a-5c)^2$.

12. $(a+3b)^2-16c^2$.

13. $(a-5b)^2-9c^2$.

14. $16c^2-(a-5b)^2$.

15. $4a^2-(x+y)^2$.

16. $b^2-(a-2x)^2$.

17. $4z^2-(x+3y)^2$.

18. $9-(3a-7b)^2$.

19. $16a^2-(2b+5c)^2$.

20. $25c^2-(3a-2x)^2$.

21. $9a^2-(3b-5c)^2$.

22. $16y^2-(a-3c)^2$.

23. $49m^2-(p+2q)^2$.

24. $36n^2-(d-2c)^2$.

25. $(x+y)^2-(a+b)^2$.

26. $(x-y)^2-(a-b)^2$.

27. $(2x+3)^2-(2a+b)^2$.

28. $(b-c)^2-(a-2x)^2$.

29. $(3x-y)^2-(2a-b)^2$.

30. $(x-3y)^2-(a+2b)^2$.

31. $(x+2y)^2-(a+3b)^2$.

32. $(x+y)^2-(a-z)^2$.

第四類

111. 二項式爲二立方之差者

從除法知 $\dfrac{a^3-b^3}{a-b}=a^2+ab+b^2$,

故 a^3-b^3 之因數爲 $a-b$, a^2+ab+b^2.

凡式之可寫作二立方之差者,其因數可做此求之.

112. 一項式爲完全立方時,其求立方根法如下:

數字係數,行開立方法;文字則以3除其指數.

例一. 試析 $8a^3-27b^6$ 爲因數.

$8a^3=(2a)^3$, $27b^6=(3b^2)^3$.

故 $8a^3-27b^6$ 可寫作 $(2a)^3-(3b^2)^3$.

因 $$a^3-b^3=(a-b)(a^2+ab+b^2),$$

故代 a 以 $2a$, 代 b 以 $3b^2$, 則得

$$(2a)^3-(3b^2)^3=(2a-3b^2)[(2a)^2+2a\times3b^2+(3b^2)^2]$$
$$=(2a-3b^2)(4a^2+6ab^2+9b^4).$$

例二. 試析 $64x^3-1$ 爲因數.

$$64x^3-1=(4x)^3-1$$
$$=(4x-1)[(4x)^2+4x+1]$$
$$=(4x-1)(16x^2+4x+1).$$

是故析二立方差爲因數:可先求二立方之根;於是從第一根減第二根,則得第一因數;於二根平方之和加二根之積,則得第二因數.

練習第三十五

試析以下各式爲因數:

1. $8x^3-y^3$.
2. x^3-1.
3. $x^3y^3-z^3$.
4. x^3-64.
5. $125a^3-b^3$.
6. a^3-343.

7. $a^3b^3-27c^3$.　　8. $x^3y^3z^3-8$.

9. $8a^3b^3-27y^6$.　　10. $64x^3-y^9$.

11. $27a^3-64c^6$.　　12. $x^3y^3-216z^3$.

13. $64x^3-729y^3$.　　14. $27a^3-512c^3$.

15. $8x^6-125y^3$.　　16. $64x^{12}-27y^{15}$.

17. $216-8a^3$.　　18. $343-27y^6$.

第 五 類

113. 二項式爲二立方之和者.

從除法知$\dfrac{a^3+b^3}{a+b}=a^2-ab+b^2$.

故 a^3+b^3 之因數爲 $a+b$, a^2-ab+b^2.

凡式之可寫作二立方之和者,其因數可倣此求之.

例一. 試析 $8x^3+27y^3$ 爲因數.

$8x^3=(2x)^3$, $27y^3=(3y)^3$, 故 $8x^3+27y^3$ 可寫作 $(2x)^3+(3y)^3$.

因 $$a^3+b^3=(a+b)(a^2-ab+b^2),$$

故代 a 以 $2x$, 代 b 以 $3y$, 則得

$$(2x)^3+(3y)^3=(2x+3y)[(2x)^2-2x\times 3y+(3y)^2]$$
$$=(2x+3y)(4x^2-6xy+9y^2).$$

例二. 試析 $125a^3+64x^6$ 爲因數.

$$125a^3=(5a)^3,\ 64x^6=(4x^2)^3;$$

$$\therefore\quad 125a^3+64x^6=(5a+4x^2)(25a^2-20ax^2+16x^4)$$

是故析二立方和爲因數:可先求二立方之根;於是於第一根加第二根,則得第一因數;從二根平方之和減二根之積,則得第二因數.

練習第三十六

試析以下各式爲因數:

1. x^3+1.
2. $8x^3+y^3$.
3. x^3+125.
4. $64a^3+27$.
5. $x^3y^3+z^3$.
6. a^3+64.
7. $8a^6+b^3$.
8. x^3+343.
9. $8+x^3y^3z^3$.
10. y^9+64x^3.
11. $a^3b^3+27x^3$.
12. $8y^3z^3+x^6$.
13. y^9+64x^6.
14. $64a^{12}+x^{15}$.
15. $27x^{15}+8a^6$.
16. $27x^9-512$.
17. $343+64x^3$.
18. $125+27y^3$.

第六類

114. 三項式之爲完全平方者.

從乘法,知$(x+y)^2=x^2+2xy+y^2$,

故$x^2+2xy+y^2$之因數爲$x+y, x+y$.

又　　$(x-y)^2=x^2-2xy+y^2$,

故 $x^2-2xy+y^2$ 之因數爲 $x-y, x-y$.

由此可知:凡三項式之爲完全平方者,其首項末項皆爲完全平方,其中項則等於首末兩項平方根相乘積之倍.

是故析完全平方之三項式爲因數:可取首項末項之平方根而以中項之號聯之.

例一. 試析 $16a^2-24ab+9b^2$ 爲因數.

首項 $16a^2$ 之平方根爲 $4a$, 末項 $9b^2$ 之平方根爲 $3b$; 中項之號爲負.故

$$16a^2-24ab+9b^2=(4a-3b)^2.$$

例二. 試析 $25x^2+40xy+16y^2$ 爲因數.

首末兩項之因數爲 $5x, 4y$; 中項之號爲正.故

$$25x^2+40xy+16y^2=(5x+4y)^2.$$

練習第三十七

試析以下各式爲因數:

1. $4x^2+4xy+y^2$.
2. $x^2+6xy+9y^2$.
3. $x^2+16x+64$.
4. $x^2+10ax+25a^2$.
5. $a^2-16a+64$.
6. $a^2-10ab+25b^2$.
7. $c^2-6cd+9d^2$.
8. $4x^2-4x+1$.
9. $4a^2-12ab+9b^2$.
10. $9a^2-24ab+16b^2$.

11. $x^2+8xy+16y^2$.　　12. $x^2-8xy+16y^2$.

13. $4x^2-20xy+25y^2$.　　14. $1+20a+100a^2$.

15. $49a^2-28a+4$.　　16. $36a^2+60ab+25b^2$.

17. $81x^2-36bx+4b^2$.　　18. $m^2n^2+14mnx^2+49x^4$.

第七類

115. 三項式之形爲x^2+ax+b者. a爲二數之代數和b爲其積;a, b爲正爲負均可.

從乘法知$(x+5)(x+3)=x^2+8x+15$,

故$x^2+8x+15$之因數爲$x+5, x+3$.

又　$(x+5)(x-3)=x^2+2x-15$,

故$x^2+2x-15$之因數爲$x+5, x-3$.

由此可知:凡三項式x^2+ax+b之可析爲兩個二項因數者,其因數之第一項均爲x;第二項兩數之積爲三項式中之末項b,其代數和爲中項之係數a.

例一. 試析$x^2+11x+30$爲因數.

今先求二數之積爲30而代數和爲11者.

1與30, 2與15, 3與10, 5與6, 積均爲30;惟5與6之代數和爲11. 故

$$x^2+11x+30=(x+5)(x+6)$$

例二 試析$x^2-7x+12$爲因數.

今先求二數之積爲12而代數和爲 -7 者.

積正,故二數非均爲正卽均爲負;而和負,故二數必皆負.

負數 -12 與 -1, -6 與 -2, -4 與 -3, 積均爲 12; 惟 -4 與 -3 之和爲 -7, 故

$$x^2-7x+12=(x-4)(x-3).$$

例三. 試析 $x^2+2x-24$ 爲因數.

今先求二數之積爲 -24 而和爲 2 者.

積負故二數一正一負;而和正故正大負小.

24 與 -1, 12 與 -2, 8 與 -3, 6 與 -4, 均正大負小而積爲 -24; 惟 6 與 -4 之和爲 2. 故

$$x^2+2x-24=(x+6)(x-4).$$

例四. 試析 $x^2-3x-18$ 爲因數.

今先求二數之積爲 -18 而和爲 -3 者.

積負,故二數一正一負;而和負,故負大正小.

-18 與 1, -9 與 2, -6 與 3, 均負大正小而積爲 -18; 惟 -6 與 3 之和爲 -3. 故

$$x^2-3x-18=(x-6)(x+3).$$

練習第三十八

試析以下各式爲因數;

1. $a^2+5a+6.$ 2. $a^2-5a+6.$

3. $a^2+6a+5.$ 4. $a^2-6a+5.$

5. $a^2+4a-5.$ 6. $a^2-4a-5.$

7. $c^2-9c+18.$ 8. $c^2+9c+18.$

9. $c^2+3c-18.$ 10. $c^2-3c-18.$

11. $x^2+9x+14.$ 12. $x^2-9x+14.$

13. $x^2-5x-14.$ 14. $x^2-9x+20.$

15. $x^2-x-20.$ 16. $x^2+x-20.$

17. $x^2-10x+21.$ 18. $x^2-4x-21.$

19. $x^2+4x-21.$ 20. $x^2-15x+56.$

21. $x^2-x-56.$ 22. $x^2-10x+9.$

23. $x^2+13x+30.$ 24. $x^2+7x-30.$

25. $x^2-7x-30.$ 26. $a^2+ab-6b^2.$

27. $a^2-ab-6b^2.$ 28. $a^2+3ab-4b^2.$

29. $a^2-3ab-4b^2.$ 30. $a^2x^2-2ax-63.$

31. $a^2+2ax-63x^2.$ 32. $a^2-9ab+20b^2.$

33. $x^2y^2-19xyz+48z^2.$ 34. $a^2b^2+15abc+44c^2.$

35. $x^2-13xy+36y^2.$ 36. $x^2+19xy+84y^2.$

37. $a^2x^2-23axy+102y^2.$ 38. $x^4-9x^2y^2+20y^4.$

39. $a^4x^4-24a^2x^2y^2+143y^4.$ 40. $a^6b^6-23a^3b^3c^2+132c^4.$

41. $a^2-20abc-96b^2c^2$. 42. $a^2-4abc-96b^2c^2$.

43. $a^2-10abc-96b^2c^2$. 44. $a^2+9abc-96b^2c^2$.

45. $a^2-46abc-96b^2c^2$. 46. $a^2+49abc+48b^2c^2$.

47. $x^2-18xyz-243y^2z^2$. 48. $x^2y^2-xyz-182z^2$.

練習第三十九

雜題

試求以下各式之因數:

1. a^3-7a. 2. $3a^2b^2-2a^3b+3ab^3$.

3. $(a-b)^2+(a-b)$. 4. $(a+b)^2-1$.

5. a^3+8b^3. 6. $(x^2-4y^2)+(x-2y)$.

7. $(a^3-b^3)+(a-b)$. 8. $a^2-6ab+9b^2$.

9. x^2-x-2. 10. x^2-2x-3.

11. $x^2+4x-21$. 12. $a^2-11a-26$.

13. $ax^2+bx^2+3a+3b$. 14. $x^2-3x-xy+3y$.

15. $x^2-7x+12$. 16. $a^2+5ab+6b^2$.

17. x^4+10x^2+25. 18. $x^2-18x+81$.

19. $x^2-21x+110$. 20. $x^2+19x+88$.

21. $x^2-19x+88$. 22. x^3-x^2+x-1.

23. $9x^4-x^2$. 24. $1-(a-b)^2$.

25. $(a^3+b^3)+(a+b)$. 26. $m^2x-n^2x+m^2y-n^2y$.

27. $(x-y)^2-z^2$. 28. $z^2-(x-y)^2$.

29. $4a^4-(3a-1)^2$. 30. $8x^3-y^3$.

31. x^3-3x^2y. 32. x^3-27y^3.

33. $x^2+3x-40$. 34. $x^2+3xy-10y^2$.

35. $1-16x^2$. 36. $a^6-9a^2b^4$.

37. $x^3+3x^2y+2xy^2$. 38. $x^4+4x^3y+3x^2y^2$.

39. $x^2-4xy^2+4y^4$. 40. $16x^4+8x^2+1$.

41. $9a^4-4a^2c^2$. 42. $a^3b-a^2b^2-2ab^3$.

43. x^4-x^3+8x-8. 44. $a^4-a^3x+ay^3-xy^3$.

45. $210-y^2-y^4$. 46. $2a^6+2a^3-264$.

47. $72+xy-x^2y^2$. 48. $y^3z+6y^2z-91yz$.

49. p^2-16q^2+p-4p. 50. $x^2+2yz-y^2-z^2$.

51. $1-(m^2+n^2)-2mn$. 52. $c^3x^2-c^3+x^2-1$.

53. $2+128(x+y)^3$. 54. $c-d-4(c-d)^3$.

試加一項於以下各式令成完全平方:

55. x^2+2x. 56. $-2ab+b^2$.

57. $4y^2+25$. 58. $36-84z$.

59. $25x^2+16y^2$. 60. x^2-12xy.

61. $-80a^2b^2+64b^4$. 62. $49y^6-42y^3z$.

第八章

公因數與公倍數

116. 公因數. 可整除二整數以上之整數,曰此諸整數之公因數(Common Factor).

可整除二有理整式以上之有理整式,曰此諸有理整式之公因數.例如$5a$為$20a$, $25a$之公因數; $3x^2y^2$為$12x^2y^2$, $15x^2y^2$, $30x^2y^2$之公因數.

117. 整數除本數及1以外更無他因數者,曰素數(Prime Number).因數之為素數者,曰素因數(Prime Factor).

二數除1以外無他公因數者,則就二數言為互素(Prime to each other)之數.例如5與8互素;16與21互素.

二式除1以外無他公因數者則就二式言為互素之式.例如$3y^2$與$5mn$互素,$a+b$與$x-y$互素.

118. 二數以上之公因數中,其數為最大者,曰此諸數之最大公因數(Greatest Common Factor).

119. 二式以上之公因數中,其次為最高者,曰此諸式之最高公因數(Highest Common Factor).

例如 $3a^2$ 爲 $3a^2$, $6a^3$, $12a^4$ 之最高公因數; $5x^2y^2$ 爲 $10x^3y^2$, $15x^2y^2$, $25ax^2y^3$ 之最高公因數.

最高公因數,常簡稱 $H.C.F.$

120. 求二式以上之最高公因數.

例一. 試求 $42a^3b^2$, $30a^2b^4$ 之 $H.C.F.$

$$42a^3b^2=2\cdot3\cdot7\cdot aaa\cdot bb,$$

$$30a^2b^4=2\cdot3\cdot5\cdot aa\cdot bbbb;$$

$$\therefore\quad H.C.F.=2\cdot3\cdot aa\cdot bb=6a^2b^2.$$

例二. 試求 x^2-9y^2, $x^2+6xy+9y^2$ 之 $H.C.F.$

$$x^2-9y^2=(x+3y)(x-3y),$$

$$x^2+6xy+9y^2=(x+3y)(x+3y);$$

$$\therefore\quad H.C.F.=x+3y.$$

例三. 試求 $4x^2-4x-80$, $2x^2-18x+40$ 之 $H.C.F.$

$$4x^2-4x-80=4(x^2-x-20)=4(x-5)(x+4),$$

$$2x^2-18x+40=2(x^2-9x+20)=2(x-5)(x-4);$$

$$\therefore\quad H.C.F.=2(x-5).$$

是故求二式以上之 $H.C.F.$: 可

先析各式爲因數;

次作其所有公因數之積,每因數應取至其見於任何式中最少之次數.

[註. 代數中最高公因數,猶算術中之最大公約數. 惟最大最小兩名詞,不甚宜於代數式,因式中文字所表何值初無一定也.例如 a 表 $\frac{1}{2}$, 則 a^2 小於 a 矣.]

練習第四十

試求以下各組之 $H.C.F$:

1. $330a, 546a^2$.
2. $20x^3, 15x^4$.
3. $42ax^2, 60a^2x$.
4. $35a^2b^2, 49ab^3$.
5. $28x^4, 63y^4$.
6. $54a^2b^2, 56a^3b^3$.
7. x^3+3x^2y, x^3+27y^3.
8. x^2+3x, x^2-9.
9. $2ax^3+x^3, 8a^3+1$.
10. $(x+y)^2, x^2-y^2$.
11. a^3+a^2x, a^2-x^2.
12. a^2-4b^2, a^2+2ab.
13. x^2-1, x^2+2x-3.
14. x^2+5x+6, x^2+4x+3.
15. x^3+1, x^2-x+1.
16. x^2-3x+2, x^2-4x+3.
17. $x^2-9x+18, x^2-10x+24$.
18. $x^2-3xy+2y^2, x^2-2xy+y^2$.
19. x^2-4x-5, x^2-25.
20. $(a-b)^2-c^2, ab-b^2-bc$.
21. $x^2+xy-2y^2, x^2+5xy+6y^2$.
22. $x^2+7xy+12y^2, x^2+3xy-4y^2$.
23. $x^3-8y^3, x^2+2xy+4y^2$.

24. $x^3-2x^2-x+2,\ x^2-4x+4.$

25. $1-5a+6a^2.\ 1-7a+12a^2.$

26. $x^2-8xy+7y^2,\ x^2-3xy-28y^2.$

27. $8a^3+b^3,\ 4a^2+4ab+b^2.$

28. $x^2-(y-z)^2,\ (x+y)^2-z^2.$

121. 公倍數. 可為二整數以上所整除之數,曰此諸整數之公倍數(Common Multiple).

可為二式以上所整除之式,曰此諸式之公倍數.

例如 $12x^3$ 為 $2x,\ 3x^2,\ 4x^3$ 之公倍數.

122. 二數以上之公倍數中,其數值最小者,曰此諸數之最小公倍數(Least Common Multiple).

123. 二式以上之公倍數中,其次數最低者,曰此諸式之最低公倍數(Lowest Common Multiple).

例如 $6abc$ 為 $3ab,\ 2ac$ 之最低公倍數.

最低公倍數,常簡稱 $L.\ C.\ M.$

124. **求二式以上之最低公倍數.**

例 . 試求 $42a^3b^2,\ 30a^2b^4$ 之 $L.\ C.\ M.$

$$42a^3b^2=2\cdot3\cdot7a^3\cdot b^2;$$

$$30a^2b^4=2\cdot3\cdot5a^2\cdot b^4.$$

$L.\ C.\ M.$ 必盡含任一式中之因數,而又以僅能盡含

爲限.故每因數,祗可取至其見於任何式中最多之次數而止.

$$\therefore\quad L.C.M.=2\cdot3\cdot7\cdot5\cdot a^3\cdot b^4=210a^3b^4.$$

例二. 試求 $4x^2-4x-80,\ 2x^2-18x+40$ 之 $L.C.M.$

$$4x^2-4x-80=4(x^2-x-20)=4(x-5)(x+4);$$

$$2x^2-18x+40=2(x^2-9x+20)=2(x-5)(x-4).$$

$$\therefore\quad L.C.M.=4(x-5)(x+4)(x-4).$$

是故求二式以上之 $L.C.M.$:可

先析各式爲因數;

次作各因數之積,惟每因數應取至其見於任何式中最多之次數.

練習第四十一

試求以下各組之 $L.C.M.$

1. $9xy^3,\ 6x^2y.$
2. $3abc^2,\ 2a^2bc^3.$
3. $4a^3b,\ 10ab^3.$
4. $6a^3b^3,\ 15a^2b^4.$
5. $21xy^3,27x^3y^5$
6. $xy^3z^2,\ x^2y^2z^3.$
7. $a^2,\ a^2+a.$
8. $x^2,\ x^3-3x^2.$
9. $x^2-1,\ x^2+x.$
10. $x^2-1,\ x^2-x.$
11. $x^2+xy,\ xy+y^2.$
12. $x+2x,\ (x+2)^2$

13. $a^2-4a+4, a^2+5a+6.$

14. $c^2+c-20, c^2-c-30.$

15. $b^2+b-42, b^2-11b+30.$

16. $y^2-10y+24, y^2+y-20.$

17. $z^2+2z-35, z^2-11z+30.$

18. $x^2-64, x^3-64, x+8.$

19. $a^2-b^2, (a+b)^2, (a-b)^2.$

20. $4ab(a+b)^2, 2a^2(a^2-b^2).$

21. $y^2+7y+12, y^2+6y+8, y^2+5y+6.$

22. $x^2-1, x^3+x^2+x+1, x^3-x^2+x-1.$

23. $1-x^2, 1-x^3, 1+x.$

24. $x^2+2xy+y^2, x^2-y^2, x^2-2xy+y^2.$

25. $x^3-27, x^2+2x-15, x^2+5x.$

26. $(a+b)^2-c^2, (a+b+c)^2, a+b-c.$

27. $x^2-(a+b)x+ab, x^2-(a+c)x+ac.$

28. $(a+b)^2-c^2, a^2+ab+ac.$

29. $a^2-b^2, a^3-b^3, a^2+2ab+b^2.$

30. $15(p^3+q^3), 5(p^2-pq+q^2), 6(p^2-q^2).$

31. $z^3-8, 4-z^2, 4z^2+2z^3+z^4.$

32. $6ax^2-6bx^2, 2a^2-4ab+2b^2, 9a^2y+18aby+9b^2y.$

第九章

分數式

125. 代數式具$\frac{a}{b}$之形以示二式之商者,曰分數式(Fractional Expression).

被除數 a 曰分子(Numerator),除數 b 曰分母(Denominator);總稱爲分數之兩項(Terms of a Fraction).

126. 除數被除數乘以同一之數,其商之值不變;除以同一之數,其商之值亦不變.

例如 $\frac{12}{4}=3$; $\frac{12\times12}{4\times12}=3$; $\frac{12\div2}{4\div2}=3$.

故以同一因數乘分數之子母,或除分數之子母,其分數之值不變.

分數之化法

127. 化分數(To Reduce a Fraction)者,言變分數之形而不變其值也.化之之法,均應用上款之原則.

第一類

128. 化分數至最低項(To Reduce a Fraction to its Lowest Terms),亦曰約分.

分數之子母無公因數者,謂之最低項之分數.由此可得約分之法如下:

析分數之兩項爲素因數,而去其所有之公因數.

例一. $\dfrac{38a^2b^3c^4}{57a^3bc^2}=\dfrac{2\cdot19a^2b^3c^4}{3\cdot19a^3bc^2}=\dfrac{2b^2c^2}{3a}.$

例二. $\dfrac{a^3-x^3}{a^2-x^2}=\dfrac{(a-x)(a^2+ax+x^2)}{(a-x)(a+x)}=\dfrac{a^2+ax+x^2}{a+x}.$

例三. $\dfrac{a^2+7a+10}{a^2+5a+6}=\dfrac{(a+5)(a+2)}{(a+3)(a+2)}=\dfrac{a+5}{a+3}.$

練習第四十二

試約以下各分數:

1. $\dfrac{2a}{6ab}$.
2. $\dfrac{12m^2n}{15mn^2}$.
3. $\dfrac{21m^2p^2}{28mp^4}$.
4. $\dfrac{3x^3y^2z}{6xy^3z^2}$.
5. $\dfrac{5a^3b^3c^3}{15c^5}$.
6. $\dfrac{34x^3y^4z^5}{51x^2y^3z^5}$.
7. $\dfrac{46m^2np^3}{69mnp^4}$.
8. $\dfrac{39a^2b^3c^4}{52a^5bc^3}$.
9. $\dfrac{58xy^4z^6}{87xy^2z^2}$.
10. $\dfrac{abx-bx^2}{acx-cx^2}$.
11. $\dfrac{4a^2-9b^2}{4a^2+6ab}$.
12. $\dfrac{3a^2+6a}{a^2+4a+4}$.
13. $\dfrac{x^2+5x}{x^2+4x-5}$.
14. $\dfrac{xy-3y^2}{x^3-27y^3}$.
15. $\dfrac{x^2+5x+4}{x^2-x-20}$.
16. $\dfrac{x^2+2x+1}{x^2-x-2}$.
17. $\dfrac{(a+b)^2-c^2}{a^2+ab-ac}$.
18. $\dfrac{x^2+9x+20}{x^2+7x+12}$.

第二類

129. 化分數式爲整式,或整式分數式之混合式(Mixed Expression),此與算術中全同.法以分母除分子足矣.

例一. $\frac{x^3-1}{x-1}=x^2+x+1.$ (實行除法)

例二. $\frac{x^3-1}{x+1}=x^2-x+1-\frac{2}{x+1}.$ (實行除法)

[註. 分母不能除盡分子時;其商即不能盡爲整式.此整式之後必須加一分數式;以餘數爲其分子而以除數爲其分母.]

練習第四十三

試化以下各分數式爲整式或混合式:

1. $\frac{a^2-b^2+2}{a-b}.$ 2. $\frac{a^2-b^2-2}{a+b}.$

3. $\frac{a^3-2a^2+2a+1}{a^2-a-1}.$ 4. $\frac{2x^2-2x+1}{x+1}.$

5. $\frac{8x^3}{2x+1}$ 6. $\frac{5x^3+9x^2+3}{x^2+x-2}.$

7. $\frac{a^3+a^2+7a-2}{a^2+a+2}.$ 8. $\frac{y^4+y^2x^2+x^4}{y^2+yx+x^2}.$

9. $\frac{x^4-3x^3+x-1}{x^2+x+1}.$ 10. $\frac{x^5-x^4+1}{x^2-x-1}.$

第三類

130. 化整式分數式之混合式爲分數式

此爲上類之逆.其法如下:

乘整式以分母,於其積加分子,而後書分母於所得結果之下.

例. $$a-b-\frac{a^2-ab-b^2}{a+b}=\frac{(a-b)(a+b)-(a^2-ab-b^2)}{a+b}$$
$$=\frac{a^2-b^2-a^2+ab+b^2}{a+b}$$
$$=\frac{ab}{a+b}.$$

[註. 分數兩項間之界線,對分子有橫括之功用.故若界線前有負號如上例者,則去此界線時,必置分子於括號中,而附負號於其前.]

練習第四十四

試化以下各混合式爲分數式:

1. $x-y+\dfrac{2xy}{x-y}$.
2. $x+y-\dfrac{2xy}{x+y}$.
3. $1-\dfrac{x-y}{x+y}$.
4. $a-x-\dfrac{a^2+x^2}{a-x}$.
5. $x+2-\dfrac{x^2-4}{x-3}$.
6. $\dfrac{x-3}{x-2}-2x+1$.
7. $\dfrac{x+3}{x+2}+x^2-x-1$.
8. $2a-1+\dfrac{3-4a}{a-3}$.

9. $1-2a^2-\frac{a^2-a+2}{a-1}$. 10, $a^2+2a-5-\frac{2a-1}{3a^2+1}$.

第四類

131. 化諸分數令有最低分母.(To Reduce Fractions to their Lowest Common Denominator), 亦曰通分.

此與算術中全同.其法如下:

先求諸分母之最低公倍數,即得最低公母.

次以各分數之分母除此公母,而依次以其商分乘各分數之分子;如是所得之積即爲所求各分數之分子.

[註. 求公母之前,應先化各分數至最低項.

以各分母除公母所得之商,常稱爲通分乘數;因以此乘原分數之兩項,即得通分後之分數也.]

最低公母,常簡稱 $L.C.D.$

例一. 試化$\frac{3x}{4a^2}$, $\frac{2y}{3a}$, $\frac{5}{6a^3}$三分數令有最低公母.

分母$4a^2, 3a, 6a^3$之 $L.C.M.=12a^3=$最低公母.

以各分母除公母所得之商爲$3a, 4a^2, 2$.

以各商依次分乘各分子所得之積爲 $9ax$, $8a^2y$, 10.

故所求之諸分數爲

$$\frac{9ax}{12a^3}, \frac{8a^2y}{12a^3}, \frac{10}{12a^3}.$$

例二. 試求 $\frac{1}{x^2+5x+6}$, $\frac{1}{x^2+4x+3}$ 二分數通分之結果.

分母之因數爲 $x+3, x+2; x+3, x+1$.

故 L. C. D. 爲 $(x+3)(x+2)(x+1)$, 而所求之分子爲 $x+1, x+2$.

故所求之二分數爲

$$\frac{x+1}{(x+3)(x+2)(x+1)},\quad \frac{x+2}{(x+3)(x+2)(x+1)}.$$

練習第四十五

試於以下各組行通分:

1. $\frac{x}{x-a}$, $\frac{x^2}{x^2-a^2}$.　　2. $\frac{a}{a+b}$, $\frac{a^2}{a^2-b^2}$.

3. $\frac{1}{1+2a}$, $\frac{1}{1-4a^2}$.　　4. $\frac{9}{16-x^2}$, $\frac{4-x}{4+x}$.

5. $\frac{a^2}{27-a}$, $\frac{a}{3-a}$.　　6. $\frac{1}{x^2-5x+6}$, $\frac{1}{x^2-x-6}$.

分數之加減法

132. 分數行加減時,若其分母相同,則祗須作諸分子之代數和而書分母於其下;即所得結果常可寫作一分數,其分子爲原諸分子之代數和而其分母即爲原分母也.若諸分數之分母不同,則先行化分令有

最低分母.由此可知

分數之加減法. 於諸分數行通分,作其所得諸分子之代數和而書所得公母於其下.

133. 分母爲單項者.

例一. 試求 $\frac{3a-4b}{4}-\frac{2a-b+c}{3}+\frac{a-4c}{12}$ 之代數和.

諸分數有 $L.C.D.=12$.

通分所用乘數(卽以各分母3,4,12除公母12所得之商),爲 3,4,1.

故原式之代數和,爲

$$\frac{3(3a-4b)}{12}-\frac{4(2a-b+c)}{12}+\frac{a-4c}{12},$$

$$=\frac{9a-12b-8a+4b-4c+a-4c}{12}.$$

$$=\frac{2a-8b-8c}{12}=\frac{a-4b-4c}{6}.$$

以上之演算亦可如下列之:

$L.C.D.=12$.

通分乘數爲 3,4,1.

$$\begin{array}{rcll} 3(3a-4b) & = & 9a-12b & = \text{第一分子}. \\ -4(2a-b+c) & = & -8a+4b-4c & = \text{第二分子}. \\ 1(a-4c) & = & a\qquad -4c & = \text{第三分子}. \\ \hline & & 2a-8b-8c & = \text{分子之代數和}. \end{array}$$

$\therefore$ 所求分數之代數和 $=\dfrac{2(a-4b-4c)}{12}=\dfrac{a-4b-4c}{6}$

例二. 試求 $\dfrac{2}{3x}-\dfrac{4}{5x}+\dfrac{7}{30x}$ 之代數和.

$L.C.D.=30x$.

通分乘數爲10, 6, 1.

故原式 $=\dfrac{2\cdot10}{30x}-\dfrac{4\cdot6}{30x}+\dfrac{7}{30x}$

$$=\frac{20-24+7}{30x}=\frac{3}{30x}=\frac{1}{10x}.$$

練習第四十六

試求以下各代數和:

1. $\dfrac{x+1}{2}+\dfrac{x-3}{5}+\dfrac{x+5}{10}$.
2. $\dfrac{2x-1}{3}+\dfrac{x+5}{4}+\dfrac{x-4}{6}$.
3. $\dfrac{7x-1}{6}-\dfrac{3x-2}{7}+\dfrac{x-5}{3}$.
4. $\dfrac{3x-2}{9}-\dfrac{x-2}{6}+\dfrac{5x+3}{4}$.
5. $\dfrac{x-1}{6}-\dfrac{x-3}{3}+\dfrac{x-5}{2}$.
6. $\dfrac{x-2y}{2x}+\dfrac{x+5y}{4x}-\dfrac{x+7y}{8x}$.
7. $\dfrac{5x-11}{3}-\dfrac{2x-1}{10}-\dfrac{11x-5}{15}+\dfrac{x+7}{20}$.
8. $\dfrac{x-3}{3x}-\dfrac{x^2-6x}{5x^2}-\dfrac{7x^2-x^3}{15x^3}-\dfrac{3x^2+4x}{10x^4}$.
9. $\dfrac{ac-b^2}{ac}-\dfrac{a^2-c^2}{ab}+\dfrac{a^2-bc}{bc}-\dfrac{a^2+b^2+c^2}{abc}$.

134. 分母爲多項者.

例一. 試簡約 $\dfrac{a+b}{a-b}-\dfrac{a-b}{a+b}-\dfrac{4ab}{a^2-b^2}$.

$L.C.D.=(a-b)(a+b)$.

通分乘數爲 $a+b, a-b, 1$.

$$\begin{aligned}(a+b)(a+b) &= a^2+2ab+b^2 = \text{第一分子.}\\ -(a-b)(a-b) &= -a^2+2ab-b^2 = \text{第二分子.}\\ -1(4ab) &= \underline{\qquad -4ab \qquad} = \text{第三分子.}\\ & \qquad\quad 0 \qquad\quad = \text{分子之和.}\end{aligned}$$

$$\therefore \text{ 原式} = \frac{0}{(a-b)(a+b)} = 0.$$

<u>例二</u>. 試求 $\frac{x}{1-2x}+1-\frac{3}{4x^2-1}$ 之結果.

原式依 x 之升羃整列之,可書作 $\frac{x}{1-2x}+1+\frac{3}{1-4x^2}$.

$L.C.D.=1-4x^2$.

通分乘數爲 $1+2x, 1-4x^2, 1$

$$\text{故原式} = \frac{x(1+2x)}{1-4x^2}+\frac{1-4x^2}{1-4x^2}+\frac{3}{1-4x^2}$$

$$= \frac{4+x-2x^2}{1-4x^2}.$$

[註. 上例之 $-\frac{3}{4x^2-1} = \frac{-3}{4x^2-1} = \frac{-3}{-1+4x^2}$

$$= \frac{-3}{-(1-4x^2)} = \frac{3}{1-4x^2}.$$

分母分子同時變號,則分數之值不變.若單變分母(或單變分子)中各項之號,則必同時變分數前之號,

方能使分數之値不變.]

練習第四十七

試求以下各代數和:

1. $\frac{1}{x+3}+\frac{1}{x-2}$.

2. $\frac{1}{x+1}+\frac{1}{x-1}$.

3. $\frac{4}{x-8}-\frac{1}{x+2}$.

4. $\frac{a+x}{a-x}-\frac{a-x}{a+x}$.

5. $\frac{x}{x-a}-\frac{x^2}{x^2-a^2}$.

6. $\frac{4a^2+b^2}{4a^2-b^2}-\frac{2a+b}{2a-b}$.

7. $\frac{7}{9-a^2}-\frac{1}{3+a}-\frac{1}{3-a}$.

8. $\frac{1}{a-b}-\frac{1}{a+b}-\frac{b}{a^2-b^2}$.

9. $\frac{2}{x-2}-\frac{2}{x+2}+\frac{5x}{x^2-4}$.

10. $\frac{3-x}{1-3x}-\frac{3+x}{1+3x}-\frac{15x-1}{1-9x^2}$.

11. $\frac{1}{a}-\frac{1}{a+3}+\frac{3}{a+1}$.

12. $\frac{x}{x-1}-1-\frac{1}{x+1}$.

13. $\frac{x+1}{x+2}+\frac{x-2}{x-3}+\frac{2x+7}{x^2-x-6}$.

14. $\frac{1}{x(x-1)}-\frac{2}{x^2-1}+\frac{1}{x(x+1)}$.

練習第四十八

試求以下各代數和:

1. $\frac{1}{2x+1}+\frac{1}{2x-1}+\frac{4x}{1-4x^2}$.

2. $\frac{a^2+b^2}{a^2-b^2}+\frac{a}{a+b}-\frac{b}{b-a}$.

3. $\frac{3a}{1-a^2}-\frac{2}{a-1}-\frac{2}{1+a}$.

4. $\frac{1}{2x+5y}+\frac{3x}{25y^2-4x^2}+\frac{1}{2x+5y}$.

5. $\frac{1}{x+4y}-\frac{8y}{x^2-16y^2}-\frac{1}{4y-x}$.

6. $\frac{3}{2x-3}-\frac{2}{2x+3}+\frac{3}{9-4x^2}$.

分數之乘除法

135. 例. 試求$\frac{a}{b}\times\frac{c}{d}$之積.

令 $\frac{a}{b}=x, \frac{c}{d}=y,$

於是 $a=bx,\ c=dy.$

等式兩邊之積仍相等,故

$$ac=bdxy.$$

除以bd,得 $\frac{ac}{bd}=xy.$

但 $\frac{a}{b}\times\frac{c}{d}=xy.$

故 $\frac{a}{b}\times\frac{c}{d}=\frac{ac}{bd}.$

依同理,

$$\frac{a}{b}\times\frac{c}{d}\times\frac{e}{f}=\frac{ac}{bd}\times\frac{e}{f}=\frac{ace}{bdf}.$$

由此可得

分數之乘法. 以分子乘分子作積之分子,分母乘分母作積之分母.

136. 逆數　二數之積爲一者,互爲逆數(Reciprocal).

例如 2 與$\frac{1}{2}$, a 與$\frac{1}{a}$, 均互爲逆數.

$\frac{a}{b}$之逆數爲$\frac{b}{a}$, 因$\frac{a}{b}\times\frac{b}{a}=1$也.

故分數之逆數,可顚倒其分子分母而得之.

137. 今試比較下列二式:

$$\frac{a}{b}\times\frac{b}{a}=1,\ \frac{a}{b}\div\frac{a}{b}=1.$$

可知以$\frac{b}{a}$乘一數與以$\frac{a}{b}$除之,其結果全然相同.

由此可得

分數之除法.　顚倒除數之分子分母而行乘法.

[註. 混合式應先化爲分數式.整式可寫作以1爲分母之分數式,分數之兩項,均須析爲素因數;有公因數,則消去之.]

例一. 試求$\frac{ab-b^2}{a+b}\times\frac{ab+b^2}{a^2-b^2}$之積.

$$\frac{ab-b^2}{a+b}\times\frac{ab+b^2}{a^2-b^2}=\frac{b(a-b)}{a+b}\times\frac{b(a+b)}{(a-b)(a+b)}=\frac{b^2}{a+b}.$$

例二. 試求$\frac{ab}{(a-b)^2}\div\frac{ac}{a^2-b^2}$之商.

$$\frac{ab}{(a-b)^2}\div\frac{ac}{a^2-b^2}=\frac{ab}{(a-b)(a-b)}\times\frac{(a-b)(a+b)}{ac}.$$

$$=\frac{b(a+b)}{c(a-b)}.$$

例三. 試求$\dfrac{3a^2b}{2x^2y}\div\dfrac{7ab}{6xy^2}\times\dfrac{7abc}{9a^2by^2}$之結果.

$$\frac{3a^2b}{2x^2y}\div\frac{7ab}{6xy^2}\times\frac{7abc}{9a^2by^2}=\frac{3a^2b}{2x^2y}\times\frac{6xy^2}{7ab}\times\frac{7abc}{9a^2by^2}$$

$$=\frac{3\cdot6\cdot7\cdot a^3b^2cxy^2}{2\cdot7\cdot9\cdot a^3b^2x^2y^3}=\frac{c}{xy}.$$

例四. 試求$\dfrac{1}{x}\times\dfrac{x^2-1}{x^2-4x-5}\div\dfrac{x^2+2x-3}{x^2-25}$之結果.

$$\frac{1}{x}\times\frac{x^2-1}{x^2-4x-5}\div\frac{x^2+2x-3}{x^2-25}$$

$$=\frac{1}{x}\times\frac{x^2-1}{x^2-4x-5}\times\frac{x^2-25}{x^2+2x-3}$$

$$=\frac{1}{x}\times\frac{(x-1)(x+1)}{(x-5)(x+1)}\times\frac{(x-5)(x+5)}{(x-1)(x+3)}$$

$$=\frac{x+5}{x(x+3)}.$$

練習第四十九

試簡約以下各分數:

1. $\dfrac{15a^2}{7b^2}\times\dfrac{28ab}{9a^3c}$.
2. $\dfrac{3x^2y^2z^3}{4a^2b^2c^2}\times\dfrac{8a^3b^2c^3}{9x^2yz^3}$.
3. $\dfrac{5m^2n^2p^4}{3x^2yz^3}\times\dfrac{21xyz^2}{20m^2n^2p^2}$.
4. $\dfrac{16a^4b^2c^3}{21m^2n^3y^4}\times\dfrac{3m^3x^3y^4}{8a^2b^2c^2}$.
5. $\dfrac{2a}{b}\times\dfrac{3b}{ac}\times\dfrac{5c}{ab}$.
6. $\dfrac{2a^3}{3bc}\times\dfrac{3b^3}{5ac}\times\dfrac{5c^3}{2ab}$.
7. $\dfrac{5abc^3}{3x^2}\div\dfrac{10ac^3}{6bx^2}$.
8. $\dfrac{x^2-a^2}{x^2-4a^2}\times\dfrac{x+2a}{x-a}$.
9. $\dfrac{x^2y^2+3xy}{4c^2-1}\times\dfrac{2c+1}{xy^2+3}$.
10. $\dfrac{a^2-10}{a^2-9}\times\dfrac{a-3}{a-10}$.

11. $\dfrac{9x^2-4y^2}{x^2-4}\times\dfrac{x-2}{3x-2y}$. 12. $\dfrac{25a^2-b^2}{16a^2-9b^2}\div\dfrac{5a-b}{4a-3b}$.

13. $\dfrac{x^2-49}{(a+b)^2-c^2}\div\dfrac{x+7}{(a+b)-c}$.

14. $\dfrac{x^2+2x+1}{x^2-25}\div\dfrac{x+1}{x^2+5x}$.

15. $\dfrac{a^2+3a+2}{a+5a+6}\times\dfrac{a^2+7a+12}{a^2+9a+20}$.

16. $\dfrac{y^2-y-30}{y^3-36}\times\dfrac{y^2-y-2}{y^2+3y-10}\times\dfrac{y^2+6y}{y^2+y}$.

17. $\dfrac{x^2-2x+1}{x^2-y^2}\times\dfrac{x^2+2xy+y^2}{x-1}\div\dfrac{x^2-1}{x^2-xy}$.

18. $\dfrac{a^2-b^2}{a^2-3ab+2b^2}\times\dfrac{ab-2b^2}{a^2+ab}\div\dfrac{(a-b)^2}{a(a-b)}$.

19. $\dfrac{(a+b^2-c^2)}{a^2+ab+ac}\times\dfrac{a^2b^2c^2}{a^2+ab+ac}\div\dfrac{b^2c^3}{abc}$.

20. $\dfrac{x^3+7y+10y^2}{x^2+6xy+5y^2}\times\dfrac{x+1}{x^2+4x+4}\div\dfrac{1}{x+2}$.

138. 疊分數. 分數之兩項復含分數者,曰疊分數 (Complex Fraction).

簡約疊分數最捷之法,莫如以其中所含諸分數之 $L.C.$ 乘其兩項.

例一. 試簡約 $\dfrac{3x}{x-\frac{1}{4}}$.

以 4 乘其兩項得 $\dfrac{12x}{4x-1}$.

例二. 試簡約 $\dfrac{\dfrac{a+x}{a-x}-\dfrac{a-x}{a+x}}{\dfrac{a+x}{a-x}+\dfrac{a-x}{a+x}}$.

原式所含諸分數之 $L.C.D.=(a-x)(a+x)$.

以 $(a-x)(a+x)$ 乘原式之兩項，得

$$\frac{(a+x)^2-(a-x)^2}{(a+x)^2+(a-x)^2}$$

$$=\frac{(a^2+2ax+x^2)-(a^2-2ax+x^2)}{(a^2+2ax+x^2)+(a^2-2ax+x^2)}$$

$$=\frac{a^2+2ax+x^2-a^2+2ax-x^2}{a^2+2ax+x^2+a^2-2ax+x^2}$$

$$=\frac{4ax}{2a^2+2x^2}$$

$$=\frac{2ax}{a^2+x^2}$$

練習第五十

試簡約以下各疊分數:

1. $\dfrac{\dfrac{x}{b}+\dfrac{y}{b}}{\dfrac{z}{b}}$.

2. $\dfrac{x+\dfrac{y}{4}}{x-\dfrac{y}{3}}$.

3. $\dfrac{\dfrac{ab}{7}-3d}{3c-\dfrac{ab}{d}}$.

4. $\dfrac{1+\dfrac{1}{x+1}}{1-\dfrac{1}{x-1}}$.

5. $\dfrac{\dfrac{2m+x}{m+x}-1}{1-\dfrac{x}{m+x}}$.

6. $\dfrac{\dfrac{x+y}{x^2-y^2}}{\dfrac{x-y}{x+y}}$.

7. $\dfrac{a+\dfrac{ab}{a+b}}{a-\dfrac{ab}{a+b}}$.

8. $\dfrac{9a^2-64}{a-1-\dfrac{a+4}{4}}$.

9. $\dfrac{\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}}{\dfrac{1}{x}-\dfrac{1}{y}}$.

10. $\dfrac{x+3+\dfrac{2}{x}}{1+\dfrac{3}{x}+\dfrac{2}{x^2}}$.

11. $\dfrac{\dfrac{1}{x}-\dfrac{2}{x^2}+\dfrac{1}{x^3}}{\dfrac{(1-x)^2}{x^2}}$

12. $\dfrac{x^2-x-6}{1-\dfrac{4}{x^2}}$.

13. $\dfrac{a^2-a-\dfrac{1-a}{1+a}}{a+\dfrac{1}{a+1}}$.

14. $\dfrac{\dfrac{4a(x-a)}{x^2-a^2}}{\dfrac{a-x}{a+x}}$.

15. $\dfrac{9x^2-64}{x-1-\dfrac{1}{1-\dfrac{x}{4+x}}}$.

16. $\dfrac{\dfrac{1}{a}-\dfrac{2}{a^2}-\dfrac{3}{a^3}}{\dfrac{9}{a}-a}$.

17. $\dfrac{\dfrac{x-y}{1+xy}+\dfrac{y-z}{1+yz}}{1-\dfrac{(x-y)(y-z)}{(1+xy)(1-yz)}}$.

18. $\dfrac{\dfrac{a-b}{a+b}+1}{\dfrac{a-b}{a+b}-1}\div\dfrac{\dfrac{a^2-b^2}{a^2+b^2}+1}{\dfrac{a^2-b^2}{a^2+b^2}-1}$.

第十章

分數方程式

139. **分數方程式之化法.**

例一. 試解$\frac{x}{3}-\frac{x-1}{11}=x-9$.

乘以諸分母之 L. C. M. 33, 得

$$11x-3(x-1)=33(x-9),$$

即 $$11x-3x+3=33x-297.$$

移項, $$11x-3x-33x=-297-3.$$

合併, $$-25x=-300.$$

除以 -25, $$x=12.$$

[註. 第二分數之前有負號.故去其分母時,必變$x-1$中各項之號.]

由此可知

方程式去分數之法. 每項以諸分母之 L. C. M. 乘之.

設分數前有負號,則去分母時必變其分子中各項之號.

例二. 試解$\frac{x+1}{4}-\frac{1}{5}(x-1)=1$.

乘以諸分數之 L. C. D. 20,

$$5(x+1)-4(x-1)=20.$$

$$5x+5-4x+4=20.$$

移項, $5x-4x=20-5-4.$

合併, $x=11.$

例三. 試解:

$$7x-\frac{(2x-3)(3x-5)}{5}=\frac{153}{10}-\frac{(4x-5)(3x-1)}{10}.$$

乘以 $L.C.D.$ 10,

$$70x-2(2x-3)(3x-5)=153-(4x-5)(3x-1).$$

即 $70x-2(6x^2-19x+15)=153-(12x^2-19x+5).$

去括號, $70x-12x^2+38x-30=153-12x^2+19x-5.$

消去 $-12x^2$ 而移項, $70x+38x-19x=153-5+30.$

合併, $89x=178.$

除以 89, $x=2.$

例四. 試解 $\dfrac{2x+1}{2x-1}-\dfrac{2x-1}{2x+1}=\dfrac{8}{4x^2-1}.$

因 $4x^2-1=(2x+1)(2x-1),$

故 $L.C.D.$ $=(2x+1)(2x-1),$

乘原方程式以 $L.C.D.$ $4x^2-1,$

$$(2x+1)^2-(2x-1)^2=8,$$

即 $4x^2+4x+1-(4x^2-4x+1)=8.$

卽 $$4x^2+4x+1-\ 4x^2+4x-1\ =8.$$

$$\therefore\quad 8x=8.$$

$$\therefore\quad x=1.$$

例五. 試解 $\dfrac{4}{x+1}-\dfrac{x+1}{x-1}+\dfrac{x^2-3}{x^2-1}=0.$

因 $$x^2-1=(x+1)(x-1),$$

故 $L.C.D.$ $$=(x+1)(x-1).$$

乘原方程式以 $L.C.D.\ x^2-1,$

$$4(x-1)-(x+1)^2+(x^2-3)=0,$$

卽 $$4x-4-x^2-2x-1+x^2-3=0.$$

$$\therefore\quad 2x=8.$$

$$\therefore\quad x=4.$$

練習第五十一

試解以下各方程式:

1. $\dfrac{x-1}{2}=\dfrac{x+1}{3}.$ 2. $\dfrac{3x-1}{4}=\dfrac{2x+1}{3}.$

320
200
120

3. $\dfrac{6x-19}{2}=\dfrac{2x-11}{3}$ 4. $\dfrac{7x-40}{8}=\dfrac{9x-80}{10}.$

5. $\dfrac{3x-116}{4}+\dfrac{180-5x}{6}$ 6. $\dfrac{3x-4}{2}-\dfrac{3x-1}{16}=\dfrac{6x-5}{8}.$

7. $\dfrac{x-1}{8}-\dfrac{x+1}{18}=1,$ 8. $\dfrac{60-x}{14}-\dfrac{3x-5}{7}=\dfrac{3x}{4}.$

9. $\dfrac{3x-1}{11}-\dfrac{2-x}{10}=\dfrac{6}{5}.$ 10. $\dfrac{4x}{x+1}-\dfrac{x}{x-2}=3.$

11. $\frac{2x+1}{4}-\frac{4x-1}{10}+1\frac{1}{4}=0.$

12. $\frac{x-1}{5}-\frac{43-5x}{6}-\frac{3x-1}{8}=0.$

13. $\frac{1}{x+4}+\frac{2}{x+6}-\frac{3}{x+5}=0.$

14. $\frac{4}{x^2-1}+\frac{1}{x-1}+\frac{1}{x+1}=0.$

15. $\frac{3x+1}{4}-\frac{5x-4}{7}=12-2x-\frac{x-2}{3}.$

16. $\frac{1}{8}(5x+3)-\frac{1}{3}(3-4x)+\frac{1}{6}(9-5x)=\frac{1}{2}(31-x)$

17. $\frac{1}{15}(34x-56)-\frac{1}{5}(7x-3)-\frac{1}{3}(7x-5)=0.$

練習第五十二

試解以下各方程式:

1. $\frac{2}{3}(x+1)-\frac{1}{7}(x+5)=1.$

2. $\frac{6}{7}(x-9)-\frac{1}{3}(5-x)+3x+1=0.$

3. $\frac{1}{3}(5x-24)+\frac{1}{7}(x-2)-2(x-1)=0.$

4. $\frac{x+3}{4}-\frac{x-2}{5}=\frac{5x-1}{4}+\frac{5x+4}{9}.$

5. $\frac{x+1}{3}-\frac{x-1}{4}=\frac{x-2}{5}-\frac{x-3}{5}+\frac{31}{60}.$

6. $\frac{(2x-1)(2-x)}{2}+x^2-\frac{1+3x}{2}=0.$

7. $\frac{6x-11}{4}-\frac{3-4x}{6}=\frac{4}{3}-\frac{x}{8}.$

8. $\frac{x+6}{4}-\frac{16-3x}{12}=4\frac{1}{6}$.

9. $x-\frac{x-2}{3}=\frac{x+23}{4}-\frac{10+x}{5}$.

10. $\frac{5x+3}{x-1}+\frac{2x-3}{2x-1}=6$.

11. $\frac{3x}{4x+1}+1=2-\frac{x}{2(2x-1)}$.

12. $\frac{8x+7}{5x+4}-1=1-\frac{2x}{5x+1}$.

13. $\frac{x+1}{2(x-1)}-\frac{x-1}{x+1}=\frac{17-x^2}{2(x^2-1)}$.

140. 諸分母或為單項或為多項時,常可先去其單項者而後去其多項者.每次所得乘積,宜簡約之.

例一. 試解 $\frac{4x+3}{10}-\frac{2x+3}{5x-1}=\frac{2x-1}{5}$.

乘以10, $4x+3-\frac{10(2x+3)}{5x-1}=2(2x-1)$.

移項, $4x+3-2(2x-1)=\frac{10(2x+3)}{5x-1}$.

合併, $5=\frac{10(2x+3)}{5x-1}$.

除以 5, $1=\frac{2(2x+3)}{5x-1}$.

乘以 $5x-1$, $5x-1=4x+6$.

移項合併, $x=7$.

練習第五十三

試解以下各方程式:

1. $\dfrac{10x+13}{18}-\dfrac{x+2}{x-3}=\dfrac{5x-4}{9}$.

2. $\dfrac{6x+7}{10}-\dfrac{3x+1}{5}=\dfrac{x-1}{3x-4}$.

3. $\dfrac{11x-12}{14}-\dfrac{11x-7}{19x+7}=\dfrac{22x-36}{23}$.

4. $\dfrac{2x-1}{5}+\dfrac{2x-3}{17x-12}=\dfrac{4x-3}{10}$.

5. $\dfrac{11x-13}{7}-\dfrac{13x+7}{3x+7}=\dfrac{22x-75}{14}$.

6. $\dfrac{6x-13}{2x+3}+\dfrac{6x+7}{9}-\dfrac{2x+4}{3}=0$.

141. 文字方程式. 方程式之以文字表其已知數者,曰文字方程式(Literal Equation).

例. 試解 $\dfrac{x+a}{x-b}+\dfrac{x+b}{x-a}=2$.

乘以 $(x-a)(x-b)$,

$$(x+a)(x-a)+(x+b)(x-b)=2(x-a)(x-b),$$

卽 $$x^2-a^2+x^2-b^2=2x^2-2ax-2bx+2ab.$$

移項合併, $$2ax+2bx=a^2+2ab+b^2,$$

卽 $$2(a+b)x=(a+b)^2.$$

除以 $a+b$, $$2x=a+b.$$

$$\therefore\quad x=\frac{a+b}{2}.$$

練習第五十四

試解以下各方程式:

1. $a(x-a)=b(x-b)$.

2. $(a+b)x+(a-b)x=a^2$.

3. $(a+b)x-(a-b)x=b^2$.

4. $(2x-a)+(x-2a)=3a$.

5. $(x+a+b)+(x+a-b)=2b$.

6. $(x-a)(x-b)=x(x+c)$.

7. $x^2+b^2=(a-x)(a-x)$.

8. $(a+b)(2-x)=(a-b)(2+x)$.

9. $(x-a\ (2x-a)=2(x-b)^2$.

10. $(a+bx)(c+d)=(a+b)(c+dx)$.

11. $\dfrac{x}{a-b}-\dfrac{3a}{a+b}=\dfrac{bx}{a^2-b^2}$.

142. 分數方程式應用問題.

練習第五十五

例. 有一數,其三分一與五分一之和,大於其四分一與六分一之差之倍者22;試求之.

令 $x=$ 所求之數;

則 $\dfrac{x}{3}+\dfrac{x}{5}=$ 其三分一與五分一之和,

$\frac{x}{4}-\frac{x}{6}$ 其四分一與六分一之差,

$2\left(\frac{x}{4}-\frac{x}{6}\right)=$其四分一與六分一之差之倍;

而 $\frac{x}{3}+\frac{x}{5}$比$2\left(\frac{x}{4}-\frac{x}{6}\right)$大22.

故 $\frac{x}{3}+\frac{x}{5}-2\left(\frac{x}{4}-\frac{x}{6}\right)=22.$

乘上式以諸分數之$L.C.D.$ 60.

$$20x+12x-2(15x-10x)=22\times 60,$$

合併, $$22x=22\times 60.$$

$$\therefore\quad x=60.$$

故所求之數爲60.

1. 有一數,其五分一與七分一之差爲2;試求之.

2. 某數之半比其五分一七分一之和大11;試求之.

3. 有一數,其三分一六分一之和大於其六分一九分一之差者16;試求之.

4. 有相連二數 x, $x+1$; 已知其大者之半比小者之三分一多10,試求之.

練習第五十六

例. 二數之和爲63,以小數除大數,則得商2餘數3,試求此二數.

令　　　$x=$ 大數;

則　　　$63-x=$ 小數.

夫　　　商 $=\dfrac{\text{被除數}-\text{餘數}}{\text{除數}}$;

而在本題中,被除數爲 x,餘數爲3,除數爲 $63-x$;

故　　　$\dfrac{x-3}{63-x}=2.$

解之,得　　　$x=43.$

故所求二數爲43與20.

1. 二數之和爲100.以小數除大數,則得商4餘數5.試求此二數.

2. 二數之和爲124.以小數除大數,則得商4餘數4.試求此二數.

3. 二數之差爲49.以小數除大數,則得商4餘數4.試求此二數.

4. 二數之差爲91.以小數除大數,則得商8餘數7.試求此二數.

5. 試分320爲兩部分,令其大部分當小部分之11倍而尚餘20.

6. 試分500爲兩部分,令其大部分當小部分之13倍而不足4.

練習第五十七

例. 某兒八年前之歲數,適爲其今後一年之歲數之四分一.問某兒今年若干歲.

令　$x=$某兒今年之歲數;

則　$x-8=$八年前之歲數;

而　$x+1=$一年後之歲數.

$$\therefore\quad x-8=\tfrac{1}{4}(x+1).$$

解之,得　　$x=11.$

故某兒今年11歲

1. 子年當父年四分之一;今後24年,則當父年之半.試求子之年.

2. 乙年當甲年六分之一;今後15年,則當其三分之一.問甲乙之年.

3. 甲乙歲數之和爲30.今後五年,乙年適當甲年三分之一.問甲乙之年.

4. 父年35歲,子年當其四分之一.問子年當父年二分一之時,在距今若干年後.

5. 甲年60歲;乙年當其三分之二.問乙年當甲年五分一之時,在距今若干年前.

6. 子年當父年三分之一;四年前則僅當其四分

之一.問父子之年.

7. 甲年50歲,乙年當其半.問乙年何時可當甲年三分之二.

8. 乙年當甲年之半;十年前則當其四分之一.問甲乙之年.

9. 父子歲數之和爲80.假如其子早生5年,則此時歲數適當其父年之四分一.問父子今年各若干歲

練習第五十八

例. 一事,甲作之,2日可畢;乙作之,3日可畢;問二人合作,需時幾何.

1. 一事,甲作之,3日可畢;乙作之,5日可畢;丙作之,6日可畢.問三人合作,需時幾何.

2. 一事,甲作之,5日可畢;乙作之,4日可畢;丙作之.3日可畢;問三人合作,需時幾何.

3. 一事.甲作之,$2\frac{1}{2}$日可畢;乙作之,$3\frac{1}{2}$日可畢;丙作之,$3\frac{3}{4}$日可畢.問三人合作,需時幾何.

4. 一事,甲作之,10日可畢;乙作之,12日可畢;甲乙合作,有丙助之,則4日可畢.問丙一人作之,需時幾何.

5. 田中有草,甲乙刈之,10時可盡;甲丙刈之,12

時可盡;若甲一人刈之,則需20時方盡.問乙丙合作,需時幾何.

6. 甲乙同築一牆,12日成之;甲丙同築,需時15日;乙丙同築,需時20日,問三人合作,需時幾何.

[本題提示. 每人作2日,則此牆之$\frac{1}{12}+\frac{1}{15}+\frac{1}{20}$可成.]

練習第五十九

例. 用三管注水池中,單開甲管,15時而滿;單開乙管,20時而滿;單開丙管,30時而滿;問三管齊開,何時可滿.

令 $x=$三管齊開所需時數;

則每時三管注入之水,為全池水量之$\frac{1}{x}$.

但每時三管注入之水,為全池水量之$\frac{1}{15}+\frac{1}{20}+\frac{1}{30}$;

$$\therefore \quad \frac{1}{15}+\frac{1}{20}+\frac{1}{30}=\frac{1}{x}.$$

解之,得 $$x=6\frac{2}{3}.$$

故三管齊開,$6\frac{2}{3}$時可滿.

1. 水由甲管入池,16時而滿;由乙管,24時而滿;由丙管,32時而滿.問水由三管齊下,何時可滿.

2. 水由甲管流入池中,3時可滿;由乙管流入,4

時可滿;由丙管流出,則6時可盡.問三管同流,此池何時可滿.

3. 引水入池,由甲管則1時40分可滿;由乙管,3時20分可滿;由丙管,5時可滿.問三管同流,何時可滿.

4. 引水滿池,甲管需$2\frac{1}{3}$時,乙管需$3\frac{1}{2}$時,丙管需$4\frac{2}{3}$時.問三管齊流,需時幾何.

5. 一池有三管.由第一管通水於池,12時可滿;由第二管,20時可滿;若齊用三管,則祇需6時.問由第三管通水於池,何時可滿.

練習第六十

例. 甲行每時速6里,乙行每時速$7\frac{1}{2}$里.設甲先行2時,問乙何時可追及之.

令 $x=$ 甲共行時數,

$x-2=$ 乙共行時數;

則 $6x=$ 甲所行里數,

$7\frac{1}{2}(x-2)=$ 乙所行里數.

甲乙所行之距離相等,

$$\therefore\quad 6x=7\tfrac{1}{2}(x-2).$$

解之,得 $x=10.$

故乙於出發後$10-2=8$時可追及甲.

1. 甲自某處起行,每時速 3 英里.乙以每時 4 英里之速度追之.設甲乙起程先後相差 3 時,問乙追及甲之處,距原處幾何遠.

2. 某郵差出發後 4 時,又一郵差繼之.設第一郵差每時行$6\frac{1}{2}$英里,第二郵差每時行$7\frac{1}{2}$英里;問二人於若干時後可相會.

3. 一人步行至山巓,每時速2英里;遵原路下山,每時速4英里.設此人往返共行6時,問至山巓幾何遠.

4. 兩火車同向某地開行.甲車之速度,每時40英里;乙車每時30英里.設甲車比乙車早到2時,問所行路程之長幾何.

練習第六十一

例. 兔走4步時,犬走3步.惟犬2步之長,可當兔之3步.設兔先走50步;問犬欲追及之,須走若干步.

令 $3x=$ 犬走步數,

則 $4x=$ 同時兔所走步數.

又令 a尺 $=$ 兔每步之長,

則 $\frac{3a}{2}$尺 $=$ 犬每步之長.

故 $3x\times\frac{3a}{2}$ 即 $\frac{9ax}{2}$ 尺,為全路之長,

兔既先走50步,又走$4x$步而被追及,其每步之長爲a尺:

故 $(50+4x)a$尺,亦爲全路之長.

$$\therefore \quad \frac{9ax}{2}=(50+4x)a.$$

乘以2, $$9ax=(100+8x)a.$$

除以a, $$9x=100+8x.$$

$$x=100.$$

$$\therefore \quad 3x=300.$$

故犬欲追及兔,須走300步.

1. 兔走5步時,犬走3步.惟犬之1步,可當兔之2步.設兔先走120步;問兔爲犬追及之前,再可走若干步.

2. 犬走5步時,兔能走6步;惟兔9步之長,僅抵犬之7步.設兔先走60步;問犬走若干步後,可追及之.

3. 犬走4步時,兔能走5步;惟兔4步之長,僅抵犬之3步.設兔在犬前之距離,適爲犬90步之長;問犬追及兔時,犬與兔各走若干步.

練習第六十二

例. 問2點3點之間鐘表之長短針何時在一處.

鐘鳴二下時,短針在長針之前10小格.(針轉一周爲

60小格;長針行一小格,需時恰一分鐘.)

令 $\quad x=$長針所轉格數,

則 $\quad x-10=$短針所轉格數.

長針轉動之速12倍於短針;

故 $12(x-10)=$長針所轉格數.

$$\therefore \quad 12(x-10)=x.$$

解之,得 $\qquad x=10\frac{10}{11}.$

故長短針相會之時,在2點$10\frac{10}{11}$分.

1. 問5點6點之間,長短針何時在一處.

2. 問2點3點之間,長短針何時互相垂直.

[解題提示. 此題長針在短針之前15小格.]

3. 問2點3點之間長短針何時所指方向相反.

[解題提示. 此題長針在短針之前30小格.]

4. 問1點2點之間,長短針何時成一直角.

5. 問1點2點之間,長短針何時所指方向相反.

6. 問7點8點之間,長短針何時相會.

練習第六十三

例. 有一矩形(卽長方形)與一正方形,面積相等.矩形之長,大於正方形之一邊6尺;其寬,小於正方形之一邊5尺.試求矩形之長寬.

令　正方形一邊之長 $=x$ 尺,

則　矩形之長 $=(x+6)$ 尺,

而　矩形之寬 $=(x-5)$ 尺.

矩形之面積 $=(x+6)(x-5)$ 方尺.

正方形之面積 $=x.x$ 方尺.

二形之面積相等;

$$\therefore\quad (x+6)(x-5)=x^2.$$

解之,得 $x=30$.

故矩形之長爲36尺,寬爲25尺.

1. 一矩形與一正方形面積相等其長大於正方形一邊之長7尺,其寬小於正方形一邊之長6尺.試求其面積.

2. 屋之長寬,相差5尺.設長寬各多1尺,則其面積將多42方尺.試求屋之長寬.

3. 矩形之長寬,相差6尺.設長寬各多1尺,則其面積將多35方尺.試求矩形之長寬.

4. 矩形之長,大於其寬3尺.設其長增3尺,其寬減2尺,則其面積不變.試求其長寬.

5. 屋之長,大於其寬10尺.設長寬均多2尺,則其面積可多144方尺.試求其長寬.

143. 公式及通法 以文字表一問題中所設諸數而解之,則其所得結果可通用於凡屬此類之問題.表此普徧之結果之式曰公式(Formula);以文言達其恉,則曰通法,或簡稱法.(Rule).

144. 今舉例以明之.

例一. 二數之和爲s,其差爲d.試求其數.

令 $x=$ 小數.

則 $x+d=$ 大數.

二數之和 $x+x+d=s$,

卽 $2x=s-d$.

$$\therefore\quad x=\frac{s-d}{2},$$

而 $$x+d=\frac{s-d}{2}+d=\frac{s-d+2d}{2}$$

$$=\frac{s+d}{2}.$$

故二數爲$\frac{s+d}{2}$, $\frac{s-d}{2}$.

以上公式無論s與d所表何數,均可通用.譯爲文言,則得此類問題之通法如下:

已知二數之和差,欲求二數:可於和加差,半之得大數;從和減差,半之得小數.

例二. 一事,甲以a日成之;乙以b日成之.問二人

合作,若干日可成.

令 $x=$ 所求之日數.

二人合作,每日可作全事之$\frac{1}{x}$.

甲一人每日可作全事之$\frac{1}{a}$,乙一人每日可作全事之$\frac{1}{b}$;故二人合作,每日可作全事之$\frac{1}{a}+\frac{1}{b}$.

$$\therefore \quad \frac{1}{x}=\frac{1}{a}+\frac{1}{b}.$$

解之,得 $$x=\frac{ab}{a+b}.$$

譯此公式爲文言,則得此類問題之通法如下:

已知二人獨作一事所各需之時,欲求二人合作所需之時:可以二人所各需之時間單位之和除其相乘積.

145. 利息之公式. 計算利息所含要素有五:本,利率,時間,利息,及本息總數是也.計算時,可以文字代之如下:

$p=$ 本:銀圓數(或其他貨幣單位之數);

$r=$ 利率:年息(或其他單位時間之息)與本之比,

$t=$ 時間:年數(或其他時間單位之數),

$i=$ 利息:銀圓數(或其他貨幣單位之數);

$a=$ 本息總數銀圓數(或其他貨幣單位之數),

146. 知本,利率,時間;求利息.

r爲利率,卽1圓1年之利息爲r圓;故p圓1年之利息爲pr圓,而p圓t年之利息爲prt圓.

$$\therefore\quad i=prt.\qquad\text{(公式一.)}$$

法. 作本,利率,時間之相乘積.

147. 知利息,利率,時間;求本.

從公式一,　$prt=i.$

除以rt,　$p=\frac{i}{rt}$　(公式二.)

法. 以利率時間之積除利息.

148. 知本息總數,利率,時間;求本.

從公式一,　$p+prt=a,$

卽　$p(1+rt)=a.$

除以$1+rt$,　$p=\frac{a}{1+rt}.$　(公式三.)

法. 作利率時間之積,以1加此積除本息總數.

149. 知本息總數,本,利率;求時間.

從公式一,　$p+prt=a.$

移p於右邊,　$prt=a-p.$

除以pr,　$t=\frac{a-p}{pr}.$　(公式四.)

法. 從本息總數減本,而除以本與利率之積.

150. 知本息總數,本,時間;求利率.

從公式一, $p+prt=a,$

遷p於右邊, $prt=a-p.$

除以pt, $r=\dfrac{a-p}{pt}.$ (公式五)

法. 從本息總數減本,而除以本與時間之積.

練習第六十四

試應用前數款之公式以解下列各問題:

1. 二角之和爲120°30′30″,其差爲59°30′30″.問二角各幾何大.

2. 有人借銀$500,年息8%(卽每年百分之八,俗稱常年八釐),3年4個月後歸還.問應付利息幾何.

3. 某人借銀,年息8% 3年6個月之後,共付還本利$2560.問所借之本幾何.

4. 有款一宗,2年4個月後可得利息$560.設利率爲6%,問本銀幾何.

5. 某人以款貸出,年息12%;1年6個月後,得利息$540.問本銀幾何.

6. 以款貸出,年息9%;4年後,本利共得$680.問本銀幾何.

7. 某人以\$250存入銀行,4年後共得本利\$300試求其利率.

8. 設\$1000之本於16年8個月後可得本利共\$2000;試求其利率.

9. 某人借用\$400,後付利息\$108.設利率爲9%,問借用之時間幾何.

10. 以\$60存入銀行,年息6%;問若于年後可得本利共\$250.

11. 某人投資,年可收入\$1250.設利率爲5%,問所投之資幾何.

12. 某人投資所得,每月\$100;設利率爲6%,問資本幾何.

13. 以\$1000爲本.8個月得利息\$40;試求其利率.

14. 有款貸出利率15%;問何時可得一本三利.

15. 某人借入款項,其利率半爲$10\frac{1}{2}$%半爲11%;2年3個月後,共付還本利\$33,225.問借款總額幾何.

16. 某人所有資產每年生息\$1720;其中$\frac{2}{3}$之利率爲8%,$\frac{1}{4}$爲6%,餘爲4%.問資產總額幾何.

第十一章

聯立一次方程式

151. 設 x, y 二元(卽表未知數之文字)之間僅有一個關係,則適合於此關係之值,不可勝數.例如 x, y 間僅有一個關係 $x+y=10$;則可任意假定一數為 x 之值而從上之關係求得一數為 y 之值.蓋從 $x+y=10$,卽知 $y=10-x$.若 x 為 1,則 $y=9$;$x=2$,則 $y=8$;$x=-2$,則 $y=12$;如是推之,x, y 之值無有窮盡.

152. 設 x, y 間更有一個關係不與上之關係相同;則表此兩個關係之方程式互為獨立,常稱為獨立方程式 (Independent Equations).例如 $x+y=10$ 與 $x-y=2$ 為獨立方程式;其所表 x, y 間兩個關係顯然不同.

153. 兩個獨立方程式並存時,其所含二元 x, y 止能各有一值同時適合於其所表之兩個關係.例如同時適合於 $x+y=10, x-y=2$ 之值,祇有 $x=6, y=4$,此外更無他數.

154. **聯立方程式.** 觀上例又知 $x=6$, $y=4$ 為二方程式之根.故 x, y 在二式中可視為各表同一之數.

設諸獨立方程式中所含各元可視為各表同一之

數,則此諸方程式曰聯立方程式(Simultaneous Equations).

155. 解聯立一次方程式. 含二元之二方程式,可設法合併爲祇含一元之方程式.此法名消去法(Elimination).今舉例以明之.

例一. 試解:
$$\left.\begin{aligned} 5x-\ 3y&=20 \\ 2x+\ 5y&=39 \end{aligned}\right\}\qquad \begin{aligned}(1)\\(2)\end{aligned}$$

乘(1)以5,乘(2)以3,
$$25x-15y=100 \qquad (3)$$
$$6x+15y=117 \qquad (4)$$

於(3)加(4),
$$31x\qquad =217$$
$$\therefore\ x=7.$$

代x之值於(2),
$$14+\ 5y=39.$$
$$5y=25.$$
$$\therefore\ y=5.$$

此解用加法消去y.

例二. 試解:
$$\left.\begin{aligned} 6x+\ 35y&=177 \\ 8x-\ 21y&=\ 33 \end{aligned}\right\}\qquad \begin{aligned}(1)\\(2)\end{aligned}$$

乘(1)以4,乘(2)以3,
$$24x+140y=708 \qquad (3)$$
$$24x-\ 63y=\ 99 \qquad (4)$$

從(3)減(4),
$$203y=609$$

$$\therefore \quad y=3.$$

代y值之於(2), $8x-63=33.$

$$8x=96.$$

$$\therefore \quad x=12.$$

此解用減法消去x.

156. 從上二例,可得加減消去法如下:

原方程式各以適當之數乘之,使其二元之一有絕對值相等之係數,

設此相等係數之號相反,則以所得之二方程式相加;相同則相減

[註. 上所言適當之乘數宜擇數值最小者用之.故欲消去某元,可先求其諸係數之$L. C. M.$而以各係數依次除之,其所得之商,卽爲消去此元最小最適宜之乘數.例如上題x之係數爲6, 8; $L. C. M.$爲24;除以6, 8,得4, 3爲消去x最小之乘數.

諸元中無論何元可用此法消去之;惟通常以消去其所需乘數最小者爲最便.]

有時先以二方程式相加或相減,可使解法簡捷.

例. 試解:

$$\left.\begin{aligned} x+49y&=51 \qquad (1)\\ 49x+y&=99 \qquad (2)\end{aligned}\right\}$$

於(1)加(2)，　$50x+50y=150.$　(3)

除(3)以50，　$x+y=3.$　(4)

從(1)減(4)，　$48y=48.$

$\therefore\ y=1.$

從(2)減(4)，　$48x=96.$

$\therefore\ x=2.$

練習第六十五

試用加減法解以下各組方程式:

1. $\left.\begin{aligned}5x+4y&=14\\17x-3y&=31\end{aligned}\right\}$

2. $\left.\begin{aligned}3x-2y&=5\\2x+5y&=16\end{aligned}\right\}$

3. $\left.\begin{aligned}2x-3y&=7\\5x+2y&=27\end{aligned}\right\}$

4. $\left.\begin{aligned}7x+6y&=20\\2x+5y&=9\end{aligned}\right\}$

5. $\left.\begin{aligned}x+5y&=11\\3x+2y&=7\end{aligned}\right\}$

6. $\left.\begin{aligned}3x-5y&=13\\4x-7y&=17\end{aligned}\right\}$

7. $\left.\begin{aligned}8x-y&=3\\7x+2y&=63\end{aligned}\right\}$

8. $\left.\begin{aligned}5x-4y&=7\\7x+3y&=70\end{aligned}\right\}$

9. $\left.\begin{aligned}x+21y&=2\\2x+27y&=19\end{aligned}\right\}$

10. $\left.\begin{aligned}6x-13y&=-1\\5x-12y&=-2\end{aligned}\right\}$

11. $\left.\begin{aligned}7x+y&=265\\3x-5y&=5\end{aligned}\right\}$

12. $\left.\begin{aligned}2x+3y&=7\\8x-5y&=11\end{aligned}\right\}$

13. $\left.\begin{aligned} 5x+7y&=19 \\ 7x+4y&=15 \end{aligned}\right\}$　　14. $\left.\begin{aligned} 11x-12y&=9 \\ 4x+5y&=2 \end{aligned}\right\}$

15. $\left.\begin{aligned} x+8y&=17 \\ 7x-3y&=1 \end{aligned}\right\}$　　16. $\left.\begin{aligned} 4x+3y&=25 \\ 5x-4y&=8 \end{aligned}\right\}$

試去分數而解以下各組:

17. $\left.\begin{aligned} \frac{2x}{3}-\frac{5y}{4}&=3 \\ \frac{7x}{4}-\frac{5y}{3}&=\frac{43}{3} \end{aligned}\right\}$　　18. $\left.\begin{aligned} \frac{7x}{6}+\frac{6y}{7}&=32 \\ \frac{5x}{4}-\frac{2y}{3}&=1 \end{aligned}\right\}$.

19. $\left.\begin{aligned} \frac{x+y}{4}-\frac{7x-5y}{11}&=3 \\ \frac{x}{5}-\frac{2y}{7}+7&=0 \end{aligned}\right\}$　　20. $\left.\begin{aligned} \frac{6x+7y}{2}&=22 \\ \frac{55y-2x}{5}&=20 \end{aligned}\right\}$

21. $\left.\begin{aligned} \frac{x+y}{2}-\frac{x-y}{3}&=8 \\ \frac{x+y}{3}+\frac{x-y}{4}&=11 \end{aligned}\right\}$　　22. $\left.\begin{aligned} \frac{8x-5y}{7}+\frac{11y-4x}{5}&=4 \\ \frac{17x-13y}{5}+\frac{2x}{3}&=7 \end{aligned}\right\}$

23. $\left.\begin{aligned} \frac{5x-3y}{3}+\frac{7x-5y}{11}&=4 \\ \frac{15y-3x}{7}+\frac{7y-3x}{5}&=4 \end{aligned}\right\}$

24. $\left.\begin{aligned} \frac{2x-3}{4}-\frac{y-8}{5}&=\frac{y+3}{4} \\ \frac{x-7}{3}+\frac{4y+1}{11}&=3 \end{aligned}\right\}$

25. $$\left.\begin{aligned}\frac{x-2y}{6}-\frac{x+3y}{4}=\frac{3}{2}\\ \frac{2x-y}{6}-\frac{3x+y}{4}=\frac{5y}{4}\end{aligned}\right\}$$

26. $$\left.\begin{aligned}\frac{x}{a+b}+\frac{y}{a-b}=\frac{1}{a-b}\\ \frac{x}{a+b}-\frac{y}{a-b}=\frac{1}{a+b}\end{aligned}\right\}$$

[註. 解上題,試以原式相加相減,視其結果若何.]

27. $$\left.\begin{aligned}\frac{a+b}{x}+\frac{a-b}{y}=a-b\\ \frac{a+b}{x}-\frac{a-b}{y}=a+b\end{aligned}\right\}$$

157. 消去法不僅用加減,且可用所謂代入法(Substitution)比較法(Comparison)者.今舉其例如下;

例一. 試解:

$$\left.\begin{aligned}5x-3y=20\\ 2x+5y=39\end{aligned}\right\}\qquad\begin{aligned}(1)\\(2)\end{aligned}$$

從(1), $$5x=3y+20,$$

即 $$x=\frac{3y+20}{5}. \qquad (3)$$

代入(2), $$2\left(\frac{3y+20}{5}\right)+5y=39.$$

解之,得 $$y=5.$$

代 y 之值於(3),得 $$x=7.$$

此解用代入法消去 x.

例二. 試解
$$\left.\begin{aligned} 6x+35y&=177 \\ 8x-21y&=\ \ 33 \end{aligned}\right\}\quad \begin{matrix}(1)\\(2)\end{matrix}$$

從(1), $$y=\frac{177-6x}{35}. \tag{3}$$

從(2), $$y=\frac{8x-33}{21}. \tag{4}$$

比較(3)(4),知 $\dfrac{177-6x}{35}=\dfrac{8x-33}{21}$.

解之,得 $x=12$.

代x之值於(3),得 $y=3$.

練習第六十六

試並用上舉兩法解以下各組方程式,而比較之.

1. $\left.\begin{aligned} &\frac{x}{3}+3y=7 \\ &\frac{4x-2}{5}=3y-4 \end{aligned}\right\}$

2. $\left.\begin{aligned} &\frac{x}{2}-3y+4=0 \\ &\frac{2y}{3}+x+\frac{4}{3}=0 \end{aligned}\right\}$

3. $\left.\begin{aligned} &\frac{3x}{10}+5y=13 \\ &2x-\frac{4-7y}{2}=25 \end{aligned}\right\}$

4. $\left.\begin{aligned} &\frac{x+2}{3}+4y=2 \\ &\frac{y+5}{11}-\frac{x+1}{2}=1 \end{aligned}\right\}$

5. $\left.\begin{aligned} &x-\frac{1}{3}(y-3)=5x-3 \\ &2y+\frac{1}{3}(2x-5)=\frac{1}{6}(21y+37) \end{aligned}\right\}$

6. $\left.\begin{aligned} &\frac{1}{2}x-\frac{1}{3}(y-2)-\frac{1}{4}(x-3)=\frac{11}{12} \\ &x-\frac{1}{2}(y-1)-\frac{1}{3}(x-2)=1 \end{aligned}\right\}$

7. $4x-5y+3=3x+2y-2=5x-y-3.$

8. $3x+7y-1=2x-3y+1=4x+3y-3.$

9. $\left.\begin{array}{l}(x-1)(y-2)-(x-2)(y-1)+2=0\\(x+2)(y+2)-(x-2)(y-2)-32=0\end{array}\right\}$

10. $\left.\begin{array}{l}(1-x)(1-y)-(2-x)(2-y)-5=0\\(2+x)(2-y)-(2-x)(2+y)+8=0\end{array}\right\}$

11. $\left.\begin{array}{l}a(x+y)+b(x-y)=1\\a(x-y)+b(x+y)=1\end{array}\right\}$

12. $\left.\begin{array}{l}ax-by=a^2+b^2\\(a+b)x+(a+b)y=2(a^2-b^2)\end{array}\right\}$

158. 含二未知數之應用問題.

例. 甲與乙銀十圓,則乙銀三倍甲銀.乙與甲銀十圓,則甲銀二倍乙銀.問甲乙原各有銀幾何.

令 $x=$ 甲原有圓數,

$y=$ 乙原有圓數,

設甲與乙\$10,則 $x-10=$ 甲所有圓數,

$y+10=$ 乙所有圓數;

而乙銀三倍甲銀,故 $y+10=3(x-10)$. (1)

又設乙與甲\$10,則 $x+10=$ 甲所有圓數,

$y-10=$ 乙所有圓數;

而甲銀二倍乙銀故$x+10=2(y-10)$. (2)

解聯立方程式(1)(2),得$x=22, y=26$.

故甲有$22,乙有$26.

練習第六十七

1. 設甲與乙$200,則甲所有之銀當乙之半;又設乙與甲$200,則乙所有之銀當甲之三分一.問甲乙各有銀幾何.

2. 二數和之半爲20,其差之三倍爲18.試求此二數.

3. 二數之和爲36,其差比小數八分之一多2.試求此二數.

4. 設絨4丈絲3丈之價爲$33,絨5丈絲6丈之價爲$48;問絨與絲每丈價各幾何.

5. 設小麥7斗大麥10斗之價$15,小麥4斗大麥5斗之價爲$8;問小麥大麥每斗價各幾何.

6. 某人以$7買茶12磅咖啡4磅,又以$5買茶4磅咖啡12磅;問茶與咖啡每磅售價各幾何.

7. 有人買6馬7牛,費銀1000圓;又買11馬13牛,費銀1844圓.試求馬牛每頭之價.

練習第六十八

例. 有一分數,於其分子加2,則等於$\frac{1}{2}$;於其分母加3,則等於$\frac{1}{3}$;試求之.

令 $\frac{x}{y}$ = 所求之分數.

從題意, $\frac{x+2}{y}=\frac{1}{2}$,

$\frac{x}{y+3}=\frac{1}{3}$.

解此二方程式,得$x=7$, $y=18$.

故所求之分數為$\frac{7}{18}$.

1. 有一分數,設其分子加2,分母減2,則其值為1:設其分子加分母,分母減5,則其值為5.試求此分數.

2. 加1於分母,則分數為$\frac{1}{2}$;加2於分子,則分數為$\frac{3}{5}$.試求此分數.

3. 加1於分子,則分數為$\frac{1}{3}$;加1於分母,則分數為$\frac{1}{7}$.試求此分數.

4. 倍其分子而自其分母去1,則分數為$\frac{1}{2}$;倍其分母而於其分子加1,則分數為$\frac{1}{7}$.試求此分數.

5. 分數兩項之差為15;以4乘分子而加6於分母,則其值為1.試求此分數.

練習第六十九

以數字記數時,64 爲 $60+4$, 卽 6 個 10 加 4; 4 稱爲個位之數, 6 爲十位之數. 設十位之數爲 x, 個位之數爲 y, 則此兩位數可以 $10x+y$ 表之.

例. 一數兩位之和爲 10. 於其數加 18, 則兩位互易. 試求其數.

令 $x=$ 十位之數,

$y=$ 個位之數;

則 $10x+y=$ 所求之數.

從題意, $$x+y=10, \quad (1)$$

$$10x+y+18=10y+x. \quad (2)$$

從(2), $$9x-9y=-18,$$

卽 $$x-y=-2. \quad (3)$$

於(1)加(3), $$2x=8,$$

$$\therefore \quad x=4.$$

從(1)減(3), $$2y=12,$$

$$\therefore \quad y=6.$$

故所求之數爲46.

1. 一數兩位之和爲9. 於其數加9, 則兩位互易. 試求其數.

2. 一兩位數,適等於八倍其兩位之和從其數減45,則兩位互易.試求此數.

3. 某數兩位之和為9.以兩位之和除其數,得商為6.試求其數.

4. 某兩位數與互易其兩位所得之數相加為132,相減為18.問此二數為何數.

練習第七十

例. 有款一宗,依單利息計算,4年後本利總數為\$2480,5年後本利總數為\$2600.問本銀及利率各幾何.

令 $x=$ 本銀圓數,

$y/100=$ 利率.

一年之利息為本銀之 $y/100$, 卽 $xy/100$.

四年之利息為本銀之 $4xy/100$; 五年為 $5xy/100$.

故本利總數為 $x+\frac{4xy}{100}=2480$;

$$x+\frac{5xy}{100}=2600.$$

去分數, $100x+4xy=248,000;\qquad(1)$

$$100x+5xy=260,000.\qquad(2)$$

以4除(1),以5除(2),得

$$25x+xy=62,000$$

$$20x+xy=52,000$$

相減, $5x=10,000$

故 $x=2,000.$

代入(1) $y=6.$

故本銀為\$2000, 利率為6%.

1. 有款一宗,依單利息計算,5年後本利總數為\$3000,6年後本利總數為\$3100.問本銀及利率各幾何.

2. 有款一宗,依單利息計算,10個月後本利總數為\$1680,18個月後本利總數為\$1744.問本銀及利率各幾何.

3. 某人兩次投資,共銀萬圓.其第一次之利率為4%,第二次為5%,每年由第一次資本所得,比由第二次資本所得多\$40問兩次資本各幾何.

練習第七十一

雜題

1. 二數和之半為20;5倍其差亦為20.試求此二數.

2. 甲數以乙數除之,得商7餘數4.甲數之三倍

以乙數之兩倍除之,得商 11 餘數 4.試求甲乙二數.

3. 有一分數,加 2 於其分子,加 3 於其分母,則其值爲 $\frac{4}{5}$;從其分子減 2,從其分母減 1,則其值爲 $\frac{3}{4}$.試求此分數.

4. 某農夫賣去米 5 石麥 3 石,得銀 74 圓;又賣去米 3 石麥 5 石,得銀 70 圓.試求米麥每斗之價.

5. 甲以 $10 與乙,則其所有銀三倍於乙;若乙以 $5 與甲,則甲所有銀四倍於乙.問甲乙各有銀幾何.

6. 甲乙共有銀 $100.設甲用去其銀之半數,乙用去其銀之三分一,則二人共有銀祗 $55.問甲乙各有銀幾何.

7. 某人以銀 4 角 2 分買橙 3 枚,檸檬 6 枚;又以銀 6 角買橙 8 枚,檸檬 3 枚.問橙與檸檬價銀各若干分.

8. 某甲以蘋果 10 枚與我,則其所有適倍於乙;若不與我而與乙,則甲乙所有相等.問甲乙各有蘋果若干枚.

9. 舟行靜水中,每時速 12 里.今自 A 點順流而下至 B 點,計行 7 時;復自 B 點逆流而上至 C 點,計行 5 時.設 C 點在 A 點下流 36 里,試求 AB 間之距離及水流之速度.

10. 父年減去2歲,適當子年之倍;子三年前之歲數,適當父今後12年之歲數之三分一.試求父子之年.

11. AB兩處相距a里.甲以每時p里之速度自A步行至B,乙以每時q里之速度自B步行至A.設二人同時出發,問在距A若干里之處相會.

12. 某人有茶二種,一種每斤價a圓,一種b圓;今欲混合之令其每斤之價爲c圓.設混合之茶共爲$a-b$斤,問二種應各取幾何.

13. 某人買絲兩種,共用銀c圓假如彼少買甲種絲之半,則可以餘銀多買乙種絲之三倍.今知甲種每丈價a圓,乙種價b圓;問二種各買若干丈.

14. 某人自甲地往乙地:其速度,初爲每時a里及過全路三分之一時,改爲每時b里.假如此人以每時$3c$里之速度出發,始終不變,則在同一時間內,不但可往而復返,且可多行1里.問甲乙兩地間之距離幾何.

15. 某人步行一英里,需時a分.乘馬行一英里需時b分;乘車行一英里需時c分.今有A,B,C三處欲任從其一出發,依次而行,復回原處,惟行時有一規律:第一至第二處須步行,第二至第三處須乘馬,第三至第一處須乘車.設此人自A至A共行$b+c-a$時;自B至

B,共行 $c+a-b$ 時;自 C 至 C,共行 $a+b-c$ 時;問全程之長幾何.

159. 二元一次方程式之解法,可推行於二元以上之一次方程式.

例. 試解:

$$\left.\begin{array}{r} x+6y-5z=23 \\ 3x-8y+4z=-1 \\ 7x-10y+10z=0 \end{array}\right\}\qquad \begin{array}{r}(1)\\(2)\\(3)\end{array}$$

解此題,可先從二對方程式消去其一元(如 z):

$$\begin{array}{lrr}
(1)\cdot 4, & 4x+24y-20z=92 & (4) \\
(2)\cdot 5, & 15x-40y+20z=-5 & (5) \\ \hline
(4)+(5), & 19x-16y\qquad=87 & (6) \\
(2)\cdot 5, & 15x-40y+20z=-5 & (7) \\
(3)\cdot 2, & 14x-20y+20z=0 & (8) \\ \hline
(7)-(8), & x-20y\qquad=-5 & (9)
\end{array}$$

於是(6)(9)為兩個含有二元 (x, y) 之一次方程式.

解之:

$$\begin{array}{lrr}
(6)\cdot 1, & 19x-16y=87 & (10) \\
(9)\cdot 19, & 19x-380y=-95 & (11) \\ \hline
(10)-(11), & 364y=182 & (12) \\
(12)\div 364, & y=\tfrac{1}{2} &
\end{array}$$

代y之值於(9),得 $x=5.$

代x,y之值於(10),得 $z=-3.$

練習第七十二

試解以下各組方程式:

1. $\left.\begin{array}{r}x+3y+2z=11\\2x+y+3z=14\\3x+2y+z=11\end{array}\right\}$

2. $\left.\begin{array}{r}2x-y+z=4\\5x+y+3z=5\\2x-3y+4z=20\end{array}\right\}$

3. $\left.\begin{array}{r}7x-3y=30\\9y-5z=34\\x+y+z=33\end{array}\right\}$

4. $\left.\begin{array}{r}3x-y+z=17\\5x+3y-2z=10\\7x+4y-5z=3\end{array}\right\}$

5. $\left.\begin{array}{r}\dfrac{6y-4x}{3z-7}=1\\\dfrac{5z-x}{2y-3z}=1\\\dfrac{y-2z}{3y-2x}=1\end{array}\right\}$

6. $\left.\begin{array}{r}\dfrac{x+2y}{3y+4z}=\dfrac{7}{8}\\\dfrac{5x+6z}{3x+50}=\dfrac{9}{7}\\\dfrac{y+12z}{2x-3z}=\dfrac{8}{9}\end{array}\right\}$

7. $\left.\begin{array}{r}y+z-x=2a\\z+x-y=2b\\x+y-z=2c\end{array}\right\}$

8. $\left.\begin{array}{l}x+y+z=a+b+c\\bx+ay=2ab\\cx+az=2ac\end{array}\right\}$

9. $\left.\begin{array}{r}ax+by=1\\by+cz=1\\cz+ax=1\end{array}\right\}$

10. $\left.\begin{array}{r}cy+bz=bc\\az+cx=ca\\bx+ay=ab\end{array}\right\}$

第十二章

二次方程式

160. 方程式之含未知數之平方而不含其高次冪者,曰二次方程式(Quadratic Equation).

161. 二次方程式之僅含一未知數如x者,至多祇有三類之項:

一. 含x之平方者.

二. 含x之第一冪者.

三. 不含x者.

聚其同類諸項,則每二次方程式可寫作

$$ax^2+bx+c=0$$

之形;式中a, b, c均為已知數,x為未知數.

162. 方程式$ax^2+bx+c=0$中之a, b, c,謂之方程式之係數(Coefficients);第三項c,謂之常數(Constant)項.

設式中無x之第一冪,即$b=0$,則其式稱純二次方程式(Pure Quadratic).

設式中有x之第一冪,則其式稱雜二次方程式(Affected Quadratic),或完全二次方程式(Complete Quadratic).

純二次方程式

163. 例.

例一. 試解方程式$5x^2-48=2x^2$.

聚項, $3x^2=48$.

除以3, $x^2=16$.

開方, $x=\pm4$.

4前之符號±,讀作正或負,所以表根之或正或負也.$(+4)\times(+4)=16$, $(-4)\times(-4)=16$;故正負均可通.

任何數有二平方根,一爲正,一爲負.以前僅舉其正者,今須兩者並舉矣.符號$\sqrt{\ }$曰根號(Radical Sign)用以示開方之義.例如$\sqrt{4}$即4開平方之根,$\sqrt[3]{4}$即4開立方之根是也.根號左方之小數字曰根指數(Index of the Root),用以示根之次數.

例二. 試解方程式$3x^2-15=0$.

移項而除以3, $x^2=5$.

開方, $x=\pm\sqrt{5}$.

開5之平方,永永不盡.故其根非整數,非分數;且無論取小數至若干位,終不能示其眞值.然得其近似,亦不甚難,且可近似至任何程度.例如$\sqrt{5}$在2·23606與2·23607之間,$-\sqrt{5}$在$-2·23606$與$-2·23607$之間.設任

取 2·23606 或 2·23607 爲其絕對值，則所差至多不及 0·00001 也.

例三. 試解方程式 $3x^2+15=0$.

移項而除以3, $x^2=-5$

開方 $x=\pm\sqrt{-5}$.

前此所論之數,無論爲正爲負,其平方均爲正.故負數之平方根,與前此所論諸數逈異;卽欲以整數分數表其近似之值,亦不可得也.

164. 凡根之爲整數分數者,曰有理(Rational)根.

凡根,以整數分數表之,僅能得其近似者,曰不盡根(Surd).非完全羃數之羃根皆屬之.

有理根與不盡根,總稱曰實(Real)根.

凡根非整數分數所能得其近似者,曰虛(Imaginary)根.負數之偶羃根皆屬之.

練習第七十三

試解以下各方程式:

1. $5x^2-2=3x^2+6$.
2. $3x^2+1=2x^2+10$.
3. $(x-4)(x+4)=9$.
4. $(x-6)(x+6)=28$.
5. $2(x^2-10)+x^2-4=123$.
6. $3(x^2-11)+2(x^2-5)=82$.

7. $11(x^2+5)+6(3-x^2)=198.$

8. $5x^2+3-2(17-x^2)=32.$

9. $4(x+1)-4(x-1)=x^2-1.$

10. $86-52x=2(8-x)(2-3x).$

11. 二數之比,如3之於 4;其平方之差爲 112.試求之.

12. 某兒以銀 3 角6分買橘.每橘價銀,以分作單位,則銀分與橘數之比,如1之於 4.試求橘數及每橘之價.

13. 某街之面積爲 144 方丈,其長16倍於寬.問街之寬幾何.

14. 某場之寬,爲長之 $\frac{1}{4}$ 設場之面積爲5184方英尺問其長寬,各爲若干英尺.

完全二次方程式

165. 凡完全二次方程式,恆可除以 x^2 之係數,而使化作 $x^2+2bx=c$ 或 $x^2-2bx=c$ 之形.

從乘法知

$$(x+b)^2=x^2+2bx+b^2,\ (x-b)^2=x^2-2bx+b^2.$$

故 x^2+2bx 或 x^2-2bx 雖非完全平方,而加上第三項 b^2,即成完全平方.此第三項之 b^2,爲 x 係數之半之平方.

由此可得完全二次方程式之解法如下:

先於方程式之兩邊各加 x 係數之半之平方是之謂配方 (To Complete the Square).

次兩邊行開平方法.

然後化簡所得之兩個一次方程式而求其根.

例一. 試解方程式 $x^2-8x=20$.

配方, $$x^2-8x+16=36.$$

開平方, $$x-4=\pm 6.$$

簡約,用上號, $$x=4+6=10,$$

或用下號, $$x=4-6=-2.$$

故方程式之根爲 10 與 -2.

解方程式已畢,可以 x 之值代入原方程式,驗其能否適合:

$x=10$,	$x=-2$,
$10^2-8(10)=20$,	$(-2)^2-8(-2)=20$,
$100-80=20$,	$4+16=20$.

例二. 試解方程式 $\dfrac{x+1}{x-1}=\dfrac{4x-3}{x+9}$.

去分數, $$(x+1)(x+9)=(4x-3)(x-1).$$

簡約, $$-3x^2+17x=-6.$$

負數不能開平方,故 x^2 之係數必先改爲正:

原式除以 -3, $x^2-\frac{17}{3}x=2$.

x之係數爲$-\frac{17}{3}$,半之爲$-\frac{17}{6}$,自乘得$\frac{289}{36}$,加此數於兩邊,得

$$x^2-\frac{17x}{3}+\left(\frac{17}{6}\right)^2=2+\frac{289}{36},$$

卽 $$\left(x-\frac{17}{6}\right)^2=\frac{361}{36}.$$

開方, $$x-\frac{17}{6}=\pm\frac{19}{6}.$$

$$\therefore\quad x=\frac{17}{6}+\frac{19}{6}=\frac{36}{6}=6,$$

或 $$x=\frac{17}{6}-\frac{19}{6}=-\frac{2}{6}=-\frac{1}{3}.$$

故根爲6與$-\frac{1}{3}$.

今試以x之值代入原方程式,驗其能否適合:

$x=6$.	$x=-\frac{1}{3}$
$\frac{6+1}{6-1}=\frac{24-3}{6+9}$.	$\frac{-\frac{1}{3}+1}{-\frac{1}{3}-1}=\frac{-\frac{4}{3}-3}{-\frac{1}{3}+9}$.
$\frac{7}{5}=\frac{21}{15}$.	
$\frac{7}{5}=\frac{7}{5}$.	$-\frac{2}{4}=-\frac{13}{26}$.

練習第七十四

試解以下各方程式:

1. $x^2-12x+27=0$. 2. $x^2-6x+8=0$.

3. $x^2-4=4x-7$. 4. $5x^2-4x-1=0$.

5. $4x-3=2x-x^2$. 6. $9x^2-24x+16=0$.

7. $6x^2-5x-1=0$. 8. $4x+3=x^2+2x$.

9. $16x^2-16x+3=0$. 10. $3x^2-10x+3=0$.

11. $x^2-14x+51=0$. 12. $34x-x^2-225=0$.

13. $x^2+x-20=0$. 14. $x^2-x-12=0$.

15. $2x^2-12x=-10$. 16. $3x^2+12x-36=0$.

17. $32-3x^2-10x=0$. 18. $9x^2-6x-143=0$.

19. $6(9x^2-x)=55(x^2-1)$. 20. $(2x-1)^2+9=6(2x-1)$.

21. $\frac{x}{x-1}-\frac{x-1}{x}=\frac{3}{2}$. 22. $\frac{1}{x-2}+\frac{2}{x+2}=\frac{5}{6}$.

23. $\frac{5x+7}{x-1}=3x+1$. 24. $\frac{7}{x+4}-\frac{1}{4-x}=\frac{2}{3}$.

25. $\frac{2}{x+3}+\frac{x+3}{2}=\frac{10}{3}$. 26. $\frac{2x}{x+2}+\frac{x+2}{2x}=2$.

27. $\frac{3(x-1)}{x+1}-\frac{2(x+1)}{x-1}=5$. 28. $\frac{2x+5}{2x-5}=\frac{7x-5}{2x}$.

29. $\frac{3x-1}{4x+7}=\frac{x+1}{x+7}$. 30. $\frac{2x-1}{x+3}=\frac{x+3}{2x-1}$.

31. $\frac{x+4}{x-4}-\frac{x+2}{x-3}=1$. 32. $\frac{4}{x-1}-\frac{5}{x+2}=\frac{1}{2}$.

33. $\frac{2}{x-1}=\frac{3}{x-2}+\frac{2}{x-4}$. 34. $\frac{5}{x-2}-\frac{3}{x-1}=\frac{1}{2}$.

35. $\frac{x}{7-x}+\frac{7-x}{x}=\frac{29}{10}$. 36. $\frac{2x-1}{x-1}+\frac{1}{6}=\frac{2x-3}{x-2}$.

37. $x^2+3x^2=4ax$. 38. $9x^2-6ax=b^2-a^2$.

39. $x^2+px+q=0$. 40. $ax^2+bx+c=0$.

166. 二次方程式之右邊爲0而左邊爲兩個一次因數之積者,可用析因數法解之.蓋未知數之值,如能使任一因數爲0,卽能使原二次式爲0也.

例一. 試解方程式 $x^2-25=0$.

析因數. $(x-5)(x+5)=0$.

設x之值能使$x-5$或$x+5$爲0,則適合於原方程式.

從 $x-5=0$, 得 $x=5$;

從 $x+5=0$, 得 $x=-5$.

故根爲5與-5.

例二. 試解方程式$x^2-2x-35=0$.

析因數, $(x-7)(x+5)=0$.

從 $x-7=0$, 得 $x=7$;

從 $x+5=0$, 得 $x=-5$.

故根爲7與-5.

例三. 試解方程式 $x^2-(a+b)x+ab=0$.

析因數: $(x-a)(x-b)=0$.

從 $x-a=0$, 得 $x=a$;

從 $x-b=0$, 得 $x=b$.

練習第七十五

試用析因數法解以下各方程式:

1. $x^2-3x+2=0$.
2. $x^2+5x+6=0$.
3. $x^2-2x=8$.
4. $x^2+10x=24$.
5. $x^2-6x=0$.
6. $x^2+5x=0$.
7. $\frac{1}{2}x^2=\frac{2}{3}x$.
8. $(x-15)(x+15)=400$.
9. $\frac{x^2+2}{2}=\frac{x^2+7}{7}$.
10. $\frac{x^2-24}{5}+\frac{x^2-37}{4}=8$.
11. $\frac{4}{x-3}-\frac{4}{x+3}=\frac{1}{3}$.
12. $\frac{x}{4}+\frac{4}{x}=\frac{x}{9}+\frac{9}{x}$.
13. $\frac{1}{a}x^2=bx$.
14. $ax^2+bx=0$.
15. $x^2-2ax+4ab=2bx$.
16. $x^2-2ax=b^2-a^2$.

167. 二次方程式應用問題. 二次方程式有二根,故問題之應用二次方程式者可有二解.

二根均爲正整數時,其二解大概均有意義.根爲分數或負數,則有時可通,有時不可通.蓋以代數學之語敍述題意,其所涉之範圍,每較題意爲廣.題意所寓之限制,不必盡見於方程式中.故方程式之根,不必盡能適用.

辨根之適用與否祇須考察問題之性質.苟明乎問

題之性質,則遇根之不適用於某問題者,不僅可知其不能適用之故,且有時可稍變問題之條件而得此根之解釋.

例一. 相連二數之平方和爲41.試求之.

令 $x=$ 甲數,

$x+1=$ 乙數.

於是 $x^2+(x+1)^2=$ 甲乙之平方和.

但 甲乙之平方和 $=41.$

$\therefore\quad x^2+(x+1)^2=41.$

$$x^2+x^2+2x+1=41.$$

$$2x^2+2x=40.$$

$$x^2+x=20.$$

解之,得 $x=4$ 或 $-5.$

正根 4 適用於本題.故所求二數爲4與5.

相連數常指正數而言,故負根 -5 棄去不用.然若引伸相連之義於負數,則 -5 可爲甲數, -4 可爲乙數,而負根亦有解釋矣.

例二. 巢中有鳥;七倍鳥數,比鳥數平方之二倍多3.問鳥數若干.

令 $x=$ 鳥數;

則 $7x=$ 七倍鳥數,

而 $2x^2=$ 鳥數平方之二倍.

從題意, $7x-2x^2=3$.

解此方程式,得 $x=3$ 或 $\frac{1}{2}$.

分數值 $\frac{1}{2}$ 不適用於本題,因鳥數必爲整數也.

故鳥數爲 3,爲本題惟一之解答.

例三. 一池有大小二管.用大管注水滿池,比用小管早滿6時;若二管並用,則注滿祇需4時.問單用小管,何時可滿;單用大管,何時可滿.

令 $x=$ 小管所需時數;

$x-6=$ 大管所需時數.

故 每時二管輸入之水爲全池之 $\frac{1}{x}+\frac{1}{x-6}$.

但 二管並用每時輸入之水爲全池之 $\frac{1}{4}$.

$$\therefore \quad \frac{1}{x}+\frac{1}{x-6}=\frac{1}{4}.$$

解此方程式,得 $x=12$ 或 2.

二根中,2 不適用於本題;故 x 祇可爲 12.

故小管需12時,大管需6時.

例四. 地毯之長,比其寬大1碼;其面積爲12方碼.試求其長寬.

令 $x=$ 寬之碼數;

$x+1=$ 長之碼數;

$x(x+1)=$ 面積之方碼數.

從題意, $x(x+1)=12.$

解之, $x=3$ 或 $-4.$

負數不可通;故地毯之寬爲3碼,長爲4碼.

例五. 父子歲數之和爲100;其積之十分一,比父之歲數多180.試求父子之年.

令 $x=$ 父之歲數;

$100-x=$ 子之歲數

從題意, $\frac{1}{10}x(100-x)-x=180,$

簡約, $x^2-90x+1800=0.$

$(x-60)(x-30)=0.$

$\therefore\ x=60$ 或 $30.$

二根中,30不適用於本題,因父年斷無小於子年之理也.

故父年60歲,子年40歲,爲本題惟一之解答.

例六. 舟行30里.假如其速度每時加增1里,則駛行時間可縮短1時.試求舟行之速.

令 $x=$ 每時舟行里數;

則 $\frac{30}{x}$=駛行時數.

假如舟行加速,則每時所行里數將爲$x+1$,而駛行時數將爲$\frac{30}{x+1}$.

故 $\frac{30}{x}-\frac{30}{x+1}$=舟行加速所縮短之時數

但 縮短之時數爲1.

$$\therefore \quad \frac{30}{x}-\frac{30}{x+1}=1.$$

解之,得 $x=5$ 或 -6.

本題中,負數不可通,故舟行速度爲每時5里.

練習第七十六

1. 二數之和爲11,其積爲30.試求之.

2. 二數之差爲10,其平方之和爲250.試求之.

3. 某人之年,五倍於其子.子之歲數之平方減去其父之歲數爲24.問父子之年各幾何.

4. 小數加上其平方,則等於大數之九倍.設二數爲相連數,試求之.

5. 二相連數之和之平方,爲其平方和之二倍.試證之.

6. 長方形之長,比其寬多2尺,其面積爲120方尺.問長寬各幾何.

7. 有一正方形,如兩邊增6尺兩邊增4尺合成一長方形,則其面積加倍.試求其每邊之長.

8. 屋之周圍爲76尺;面積爲360方尺.問屋之長寬各幾何.

9. 有一長方形之場,其長較寬多20尺.假如其長寬各增30尺,則其面積當爲80方丈.試求此場之長寬.

10. 父子共64歲.父之歲數之二倍,比子之歲數之平方多8.問父子之年各幾何.

練習第七十七

1. 舟行10英里.假如其速度每時減少1英里,則駛行時間當增加1時.問舟行之速幾何.

2. 工人築石牆35丈.假如每日少築2丈,則工程須延緩2日.試求每日平均所築丈數.

3. 某人以銀30圓買麵粉.設彼不多費錢而能多得粉1担,則每担之價可低1圓.問彼買粉若干担.

4. 某人買刀費銀6圓.設彼少買刀二柄而付出之銀並不稍減,則每柄之價須高2角5分.問彼買刀若干柄.

5. 問何數比其平方根多30.

[解題提示. 試以x^2表所求之數.]

6. 以金 144 圓分與若干人;設人數少 2,則每人所得可多 1 圓.試求人數.

7. 舟行靜水中,每時 8 里.今有甲乙二處相距 8 里;此舟往返其間,共費時 2 時 40 分.問河流每時速幾何.

8. 甲作某事所需之時,視乙多 12 日.若二人合作,則需時僅 8 日.問甲作此事,需時幾何.

9. 甲乙二人合作一事;其所需時間,較甲獨作此事之三分一多 2 時,而較乙獨作其二分一少 2 時.試求合作之時間.

10. 甲自東地乙自西地同時出發,途中相會.其時甲比乙多行 3 里.設甲於相會後 4 時行抵西地,乙於相會後 9 時行抵東地;試求東西二地之距離.

聯立二次方程式

168. 二次方程式與一次方程式聯立者,恆可用代入法解之.今舉例如下:

例一. 試解
$$\left.\begin{aligned} x+2y&=5 \\ x^2+2y^2&=9 \end{aligned}\right\} \qquad \begin{aligned}&(1)\\&(2)\end{aligned}$$

從 (1), $$x=5-2y. \qquad (3)$$

代入 (2), $$(5-2y)^2+2y^2=9,$$

即 $$25-20y+4y^2+2y^2=9.$$

簡約, $$3y^2-10y+8=0,$$

$$(y-2)(3y-4)=0.$$

$$\therefore\quad y=2 \text{ 或 } \tfrac{4}{3}.$$

代入(3), $$x=1 \text{ 或 } \tfrac{7}{3}.$$

故方程式之根有二組 $$\left.\begin{array}{l}x=1\\y=2\end{array}\right\}\quad \left.\begin{array}{l}x=\frac{7}{3}\\y=\frac{4}{3}\end{array}\right\}.$$

例二. 試解: $$\left.\begin{array}{r}x-y=2\\xy=15\end{array}\right\}\qquad\begin{array}{r}(1)\\(2)\end{array}$$

從(1) $$x=y+2, \qquad (3)$$

代入(2), $$y(y+2)=15,$$

即 $$y^2+2y-15=0.$$

$$(y-3)(y+5)=0.$$

$$\therefore\quad y=3 \text{ 或 } -5.$$

代入(3), $$x=5 \text{ 或 } -3.$$

故方程式之根有二組: $$\left.\begin{array}{l}x=5\\y=3\end{array}\right\},\quad \left.\begin{array}{l}x=-3\\y=-5\end{array}\right\}.$$

本題亦可如下法解之:

於(1)之平方加(2)之四倍,

$$\begin{array}{r}x^2-2xy+y^2=\ 4\\ 4xy\quad\ \ =60\\ \hline x^2+2xy+y^2=64\end{array}$$

開方，　　$x+y=\pm8.$　　(4)

從(1)與(4)，可得　　$\left.\begin{array}{l}x=5\\ y=3\end{array}\right\},\quad\left.\begin{array}{l}x=-3\\ y=-5\end{array}\right\}.$

<u>例三</u>. 試解:　　$\left.\begin{array}{r}x^2+y^2=185\\ x+y=\ 17\end{array}\right\}$　　(1)
(2)

從(2)，　　$y=17-x.$　　(3)

代入(1)，　　$x^2+(17-x)^2=185,$

即　　$x^2-17x+52=0.$

$$(x-4)(x-13)=0,$$

$$\therefore\quad x=4\text{ 或 }13.$$

代入(3)，　　$y=13$ 或 $4.$

故方程式之根爲　　$\left.\begin{array}{l}x=\ 4\\ y=\ 13\end{array}\right\};\quad\left.\begin{array}{l}x=13\\ y=\ 4\end{array}\right\}.$

本題亦可如下法解之:

從(2)之平方減(1)，

$$\begin{array}{r}x^2+2xy+y^2=289\\ x^2\qquad+y^2=185\\ \hline 2xy\qquad=104\end{array}\qquad(4)$$

從(1)減(4)， $x-2xy+y^2=81.$

開方. $x-y=\pm 9$ (5)

從(2)與(5),可得 $\left.\begin{matrix} x=13 \\ y=4 \end{matrix}\right\}, \quad \left.\begin{matrix} x=4 \\ y=13 \end{matrix}\right\}.$

例四. 試解:
$$\left.\begin{aligned} x-y&=3 \qquad (1) \\ x^2-3xy+y^2&=-19 \qquad (2) \end{aligned}\right\}$$

從(1)， $x=y+3.$ (3)

$$(y+3)^2-3y(y+3)+y^2=-19,$$

卽 $y^2+3y-28=0.$

解之, $y=4$ 或 $-7.$

從(3)， $x=7$ 或 $-4.$

故方程式之根爲 $\left.\begin{matrix} x=7 \\ y=4 \end{matrix}\right\}, \quad \left.\begin{matrix} x=-4 \\ y=-7 \end{matrix}\right\}.$

本題亦可如下法解之:

從(1)之平方減(2),得 $xy=28.$ (4)

(2)+(4)·5, $x^2+2xy+y^2=121;$

$\therefore \quad x+y=\pm 11.$ (5)

從(1)與(5),可得 $\left.\begin{matrix} x=7 \\ y=4 \end{matrix}\right\}, \quad \left.\begin{matrix} x=-4 \\ y=-7 \end{matrix}\right\}.$

練習第七十八

試解以下各組方程式:

1. $\left.\begin{aligned} x+y&=4 \\ x^2-y^2&=1 \end{aligned}\right\}$

2. $\left.\begin{aligned} x-y&=1 \\ x^2-xy+y^2&=21 \end{aligned}\right\}$

3. $\left.\begin{aligned} x-y&=10 \\ x^2+y^2&=58 \end{aligned}\right\}$

4. $\left.\begin{aligned} x+y&=5 \\ xy+x^2&=10 \end{aligned}\right\}$

5. $\left.\begin{aligned} x+y&=5 \\ xy^2+x^2y&=30 \end{aligned}\right\}$

6. $\left.\begin{aligned} 2x-y&=2 \\ 4x^2-y^2&=12 \end{aligned}\right\}$

7. $\left.\begin{aligned} 2x-y&=5 \\ x+3y&=2xy \end{aligned}\right\}$

8. $\left.\begin{aligned} 2x-3y&=1 \\ 2x^2+xy&=6y^2 \end{aligned}\right\}$

9. $\left.\begin{aligned} x+y&=5 \\ \frac{1}{x}+\frac{1}{y}&=\frac{5}{6} \end{aligned}\right\}$

10. $\left.\begin{aligned} x-y&=1 \\ \frac{x}{y}-\frac{y}{x}&=\frac{5}{6} \end{aligned}\right\}$

11. $\left.\begin{aligned} xy+x&=15 \\ xy-y&=8 \end{aligned}\right\}$

12. $\left.\begin{aligned} xy+2x&=5 \\ 2xy-y&=3 \end{aligned}\right\}$

13. $\left.\begin{aligned} 3x+2y&=5x \\ 15x-4y&=4xy \end{aligned}\right\}$

14. $\left.\begin{aligned} x/a+y/b&=1 \\ x^2/a^2+y/b^2&=1 \end{aligned}\right\}$

169. 任意兩個二次方程式聯立者,其解法非本書範圍所及今擇其最簡易者舉例如下:

例一. 試解: $\left.\begin{aligned} x^2+y^2&=10 \\ xy&=3 \end{aligned}\right\}$　　$\begin{aligned} &(1) \\ &(2) \end{aligned}$

(1)＋(2)·2, $x^2+2xy+y^2=16$;

$$\therefore \quad x+y=\pm 4. \tag{3}$$

(1)－(2)·2, $x^2-2xy+y^2=4$;

$$\therefore \quad x-y=\pm 2. \tag{4}$$

從(3)與(4),可得根四組:

$$\left.\begin{array}{l} x=3 \\ y=1 \end{array}\right\} \quad \left.\begin{array}{l} x=1 \\ y=3 \end{array}\right\}, \quad \left.\begin{array}{l} x=-1 \\ y=-3 \end{array}\right\}, \quad \left.\begin{array}{l} x=-3 \\ y=-1 \end{array}\right\}.$$

本題亦可如下法解之:

從(2), $$y=3/x. \tag{5}$$

代入(1), $$x^2+\frac{9}{x^2}=10.$$

去分數而移項, $x^4-10x^2+9=0$.

$$(x^2-1)(x^2-9)=0.$$

$$\therefore \quad x^2=1 \text{ 或 } 9.$$

$$\therefore \quad x=\pm 1 \text{ 或 } \pm 3. \tag{6}$$

代入(5),得 $$y=\pm 3 \text{ 或 } \pm 1. \tag{7}$$

合(6)與(7),知所得結果與上全同.

例二. 試解:

$$\left.\begin{array}{ll} x^2+xy=6 & (1) \\ xy+y^2=10 & (2) \end{array}\right\}$$

(1)＋(2), $x^2+2xy+y^2=16$;

$$\therefore \quad x+y=\pm 4. \tag{3}$$

從(3)與(1)消去y, $x^2+x(\pm4-x)=6$,

$$x^2\pm4x-x^2=6,$$

$$\therefore\quad x=\pm\tfrac{3}{2}$$

代入(3), $y=\pm\frac{5}{2}$.

故方程式之根為 $\left.\begin{array}{l}x=\frac{3}{2}\\ y=\frac{5}{2}\end{array}\right\}$ $\left.\begin{array}{l}x=-\frac{3}{2}\\ y=-\frac{5}{2}\end{array}\right\}$.

本題亦可如下法解之;

(1)÷(2), $$\frac{x}{y}=\frac{3}{5}.$$

即 $$5x-3y=0.$$

或 $$x=\tfrac{3}{5}y. \qquad (4)$$

代入(1), $$(\tfrac{3}{5}y)^2+(\tfrac{3}{5}y)y=6,$$

即 $$24y^2=150.$$

$$\therefore\quad y=\pm\tfrac{5}{2}.$$

代入(4), $$x=\pm\tfrac{3}{2}.$$

<u>例三</u>. 試解: $\left.\begin{array}{r}6x^2-7xy+2y^2=0\\ x^2-y=4\end{array}\right\}$ $\begin{array}{r}(1)\\ (2)\end{array}$

(1)÷y^2, $$6\left(\frac{x}{y}\right)^2-7\left(\frac{x}{y}\right)+2=0.$$

今試視x/y作一數,名之曰z;則上式可寫作

$$6z^2-7z+2=0.$$

解之,得 $$z=\tfrac{1}{2}\text{或}\tfrac{2}{3}.$$

故 $$\frac{x}{y}=\frac{1}{2}\text{或}\frac{2}{3},$$

卽 $$2x=y \text{ 或 } 3x=2y. \tag{3}$$

從 $$\left.\begin{aligned} x^2-y&=4 \\ 2x&=y \end{aligned}\right\}$$

及 $$\left.\begin{aligned} x^2-y&=4 \\ 3x&=2y \end{aligned}\right\}$$

可得原方程式之根四組,

<u>例四.</u> 試解: $$\left.\begin{aligned} x^2-xy+2y^2&=4 \quad (1) \\ 2x^2-3xy-2y^2&=6 \quad (2) \end{aligned}\right\}$$

(1)·3, $$3x^2-3xy+6y^2=12 \tag{3}$$

(2)·2, $$4x^2-6xy-4y^2=12 \tag{4}$$

從(4)減(3), $$x^2-3xy-10y^2=0.$$

$$(x-5y)(x+2y)=0.$$

卽 $$x-5y=0 \text{ 或 } x+2y=0. \tag{5}$$

從(5)與(1),可得原方程式之根四組.

練習第七十九

試解以下各組方程式:

1. $\left.\begin{aligned} x^2+xy+y^2&=49 \\ xy&=15 \end{aligned}\right\}$

2. $\left.\begin{aligned} x^2+xy&=15 \\ y^2+xy&=10 \end{aligned}\right\}$

3. $\left.\begin{array}{l}x^2+3xy=54\\ xy+4y^2=115\end{array}\right\}$

4. $\left.\begin{array}{l}x^2-2xy=21\\ xy+y^2=18\end{array}\right\}$

5. $\left.\begin{array}{l}3x^2-y^2=23\\ 2x^2-xy=12\end{array}\right\}$

6. $\left.\begin{array}{l}7xy-8x^2=10\\ 8y^2-9xy=18\end{array}\right\}$

7. $\left.\begin{array}{l}x^2+xy+y^2=3\frac{1}{4}\\ 2x^2-3xy+2y^2=2\frac{3}{4}\end{array}\right\}$

8. $\left.\begin{array}{l}x^2-3xy+y^2=-1\\ 3x^2-xy+3y^2=13\end{array}\right\}$

9. $\left.\begin{array}{l}x^2-3xy=0\\ 3x^2+2y^2=29\end{array}\right\}$

10. $\left.\begin{array}{l}2x^2=3xy\\ 2x^2-3y^2=2\end{array}\right\}$

11. $\left.\begin{array}{l}x^2+2y^2=22\\ 3y^2-xy-x^2=17\end{array}\right\}$

12. $\left.\begin{array}{l}x^2+xy+y^2=13\\ x^2-xy+y^2=7\end{array}\right\}$

13. $\left.\begin{array}{l}2x^2-xy+y^2=2y\\ 2x^2+4xy=5y\end{array}\right\}$

14. $\left.\begin{array}{l}x^2-xy+y^2=3y\\ 2x^2+xy=10y\end{array}\right\}$

15. $\left.\begin{array}{l}\dfrac{x+y}{x-y}+\dfrac{x-y}{x+y}=\dfrac{5}{2}\\ x^2+y^2=90\end{array}\right\}$

16. $\left.\begin{array}{l}\dfrac{x^2+y^2}{x^2-y^2}=\dfrac{25}{7}\\ xy=48\end{array}\right\}$

17. $\left.\begin{array}{l}x+\dfrac{1}{y}=3\\ y+\dfrac{1}{x}=\dfrac{4}{3}\end{array}\right\}$

18. $\left.\begin{array}{l}x+\dfrac{1}{y}=1\\ y+\dfrac{1}{x}=4\end{array}\right\}$

170. 聯立二次方程式應用問題.

例一. 二數之和,為其差之九倍;其平方差為81.試求此二數.

令 x, y 為所求二數.

從題意 $$x+y=9(x-y), \qquad (1)$$

$$x^2-y^2=81. \qquad (2)$$

(2)÷(1) $$x-y=\frac{9}{x-y}.$$

去分數, $$(x-y)^2=9.$$

$$x-y=\ \ 3. \qquad (3)$$

代入(1), $$x+y=\pm 27. \qquad (4)$$

從(3)與(4),得 $$x=15 \text{ 或 } -15,$$

$$y=12 \text{ 或 } -12.$$

故所求之數為15與12,或 −15與 −12.

例二. 二數之相乘積比其和多1;其平方和為13.試求此二數.

令 x, y 為所求二數.

從題意, $$xy-(x+y)=1. \qquad (1)$$

$$x^2+y^2=13. \qquad (2)$$

(1)·2+(2), $$x^2+2xy+y^2-2(x+y)=15,$$

即 $$(x+y)^2-2(x+y)-15=0.$$

此式中之 $x+y$ 可視作一數;名之曰 z, 則

$$z^2-2z-15=0.$$

解之,得 $$z=5 \text{ 或 } -3.$$

$$\therefore\quad x+y=5 \text{ 或 } -3. \tag{3}$$

代入(1),得 $$xy=6 \text{ 或 } -2. \tag{4}$$

從(4)與(2), $$x-y=\pm1 \text{ 或 } \pm\sqrt{17}. \tag{5}$$

合(3)與(5),可得原方程式之根.

$$\left.\begin{array}{l}x=3\\ y=2\end{array}\right\},\quad \left.\begin{array}{l}x=2\\ y=3\end{array}\right\},\quad \left.\begin{array}{l}x=\frac{1}{2}(-3\pm\sqrt{17})\\ y=\frac{1}{2}(-3\mp\sqrt{17})\end{array}\right\}$$

故所求二數為2, 3;或$\frac{1}{2}(-3+\sqrt{17})$,$\frac{1}{2}(-3-\sqrt{17})$.

例三. 二數之和與其平方和之相乘積為272;其差與其平方差之相乘積為32.試求此二數.

令 x, y 為所求二數.

從題意, $$(x+y)(x^2+y^2)=272, \tag{1}$$

$$(x-y)(x^2-y^2)=32. \tag{2}$$

此二方程式均為三次式,然可應用二次式之解法:

(1)÷(2), $$\frac{x^2+y^2}{(x-y)^2}=\frac{17}{2},$$

即 $$15x^2-34xy+15y^2=0. \tag{3}$$

(3)$\div y^2$, $$15\left(\frac{x}{y}\right)^2-34\left(\frac{x}{y}\right)+15=0.$$

視$\frac{x}{y}$作一數而解之,得$\frac{x}{y}=\frac{5}{3}$或$\frac{3}{5}$,

即 $$3x=5y \text{ 或 } 5x=3y. \tag{4}$$

代入(1)而簡約,可得 $y^3=27$ 或 125,

即 $$y^3-27=0 \qquad (5a)$$

或 $$y^3-125=0. \qquad (5b)$$

析(5a)之左邊爲因數,$(y-3)(y^2+3y+9)=0$.

$$\therefore\quad y=3 \text{ 或 } \tfrac{1}{2}(-3\pm3\sqrt{-3}).$$

從 $3x=5y$, 得 $$x=5 \text{ 或 } \tfrac{1}{2}(-5\pm5\sqrt{-3}).$$

析(5b)之左邊爲因數,$(y-5)(y^2+5y+25)=0$.

$$\therefore\quad y=5 \text{ 或 } \tfrac{1}{2}(-5\pm5\sqrt{-3}).$$

從 $5x=3y$, $$x=3 \text{ 或 } \tfrac{1}{2}(-3\pm3\sqrt{-3}).$$

故所求二數爲5,3或$\tfrac{1}{2}(-5\pm5\sqrt{-3})$,$\tfrac{1}{2}(-3\pm3\sqrt{-3})$.

例四. 矩形之對角線與長邊之和等於短邊之5倍,而長邊比短邊長35尺.試求各邊之長.

令 $$x=\text{ 長邊尺數,}$$
$$y=\text{ 短邊尺數.}$$

依幾何學定理,矩形對角線上之平方等於長短兩邊上平方之和.故$\sqrt{x^2+y^2}=$對角線尺數.

從題意, $$\sqrt{x^2+y^2}+x=5y, \qquad (1)$$
$$x-y=35. \qquad (2)$$

從(1), $$\sqrt{x^2+y^2}=5y-x.$$

兩邊自乘, $$x^2+y^2=(5y-x)^2,$$

即 $$12y^2-5xy=0,$$

y 不為0,故 $5x-12y=0.$ (3)

從(2)與(3),可得 $x=60,y=25.$

故矩形之長60尺,寬25尺.

<u>例五.</u> A車發於甲地,行向乙地.B車發於乙地,行向甲地.二車出發後1時15分相會於途中,而A車比B車早1時20分達目的地.已知兩地相距100哩,試求二車每時之速度.

令 $x=A$車每時所行哩數,

$y=B$車每時所行哩數.

從題意,
$$\frac{5}{4}(x+y)=100; \qquad (1)$$
$$\frac{100}{y}-\frac{100}{x}=\frac{4}{3}. \qquad (2)$$

簡約,得
$$\left.\begin{aligned} y&=80-x \\ 75(x-y)&=xy \end{aligned}\right\} \qquad \begin{matrix}(3)\\(4)\end{matrix}$$

從(3)(4)消去y, $x^2+70x-6000=0,$

即 $(x-50)(x+120)=0.$

$\therefore\ x=50$ 或 $-120.$

代入(3), $y=30$ 或 $200.$

x之負值,於本題不可通.故所求之速度,A車為每時50哩,B車為每時30哩.

練習第八十

1. 有兩數,其平方和爲39而其平方差爲21.試求之.

2. 有兩數,其積爲20而其平方和爲41.試求之.

3. 有兩數,其相乘積比其和多11,而其平方和爲41.試求之.

4. 有兩數,其和加其平方和爲14,而其差加其平方差爲10.試求之.

5. 有兩數,其和等於其積,而其和加其平方和爲12.試求之.

6. 有兩數,其和加其積爲34,而從其平方和減其和爲42.試求之.

7. 有二分數,其和爲$\frac{5}{6}$.而其差等於其積.試求之.

8. 有二分數,其和及差之相乘積爲$\frac{5}{36}$,而其積爲$\frac{1}{6}$.試求之.

9. 兩數之差爲3,而其立方差爲279.試求此二數.

10. 兩數之和爲9,而其立方和爲243.試求此二數.

11. 東西兩地,相距25哩;甲乙二人各從一地同時出發,5時而相會.甲行一哩所費之時間比乙行一哩

所費時間多1分鐘.試求二人每時所行之哩數.

12. 甲行向7哩遠之某地,出發後20分鐘,乙始追之.乙追及甲,卽返原處.迨乙至原處時,甲亦適達所欲至之地.已知乙每時速4哩.試求甲每時之速度.

13. 一矩形周圍20尺,面積24平方尺.試求此矩形之長寬.

14. 以碁石336枚排成矩形,其周圍之枚數爲80;試求各邊碁石之數.

15. 有甲乙二種綢緞,甲種每尺價比乙種每尺價底4分一人以32圓買甲種,以36圓買乙種其所買甲種綢緞比乙種多10丈.問兩種各買幾何.

16. 有二位之數,其兩數字平方之差爲20,而其倒位數與原數之和爲110.試求之.

17. 一人從甲地行向乙地.行40哩後,每時增速2哩復經若干時而達乙地.若其人於首途時卽以增速後之速度進行,則可早到40分鐘;又若始終以原速度進行,則當遲到20分鐘.試求甲乙兩地之距離及此人之原速度.

18. 有汽車以某速度行某距離.若此車每時增速

5哩,則可早到40分鐘;又若不增速而反減速5哩,則當遲到1點鐘,試求其所行距離之長.

19. 一人買物若干件,加5%之利賣之,獲利3圓2角.若每件加銀5分賣之,則其所獲之利等於20件之原價.試求此人所買件數及每件之原價.

20. 甲乙二工人,每日之工資不等.而工作之日數相同.但甲於此若干日中勤作不輟,乙則曾輟工6日;故甲得工資9圓6角,而乙僅得工資5圓4角.假如乙於此若干日中勤作不輟,而甲輟工6日;則二人所得之工資當相等.試求工作之日數,及二人每日之工資.

21. A車發於甲地,行向乙地.B車發於乙地,行向甲地.二車出發後20時相會於途中,而A車比B車早到9時.已知A車之速度比B車每時多10哩,試求二車之速度及甲乙二地之距離.

22. A車發於甲地,行向乙地;B車發於乙地;行向甲地.迨途中相會時,A比B多行108哩.自相會後,A經9時而達乙地,B經16時而達甲地.試求二地之距離及二車每時之速度.

第十三章

平方立方根

171. 複式之平方根. $a+b$ 之平方爲 $a^2+2ab+b^2$, 故 $a^2+2ab+b^2$ 之平方根 (Square Root) 爲 $a+b$. 由此可得開平方法 (Extraction of the Square Root) 如下:

例一. 試求 $a^2+2ab+b^2$ 之平方根.

$$\begin{array}{r|l} & a^2+2ab+b^2 \;\underline{|a+b} \\ & \underline{a^2} \\ 2a+b & 2ab+b^2 \\ & \underline{2ab+b^2} \end{array}$$

方根之第一項 a, 顯然爲原式首項 a^2 之平方根.

自原式減去 a^2, 其餘式爲 $2ab+b^2$, 卽 $(2a+b)b$. 故方根之第二項 b, 可以 $2a$ 除餘式之首項而得之. $2a$ 者, 方根首項 a 之二倍; 以此爲試除之式 (Trial Divisor) 而加所得之商 b 於其上, 卽得完全除式 (Complete Divisor) $2a+b$.

例二. 試求 $25x^2-20x^3y+4x^4y^2$ 之平方.

此式爲依 x 之升冪而整列者.

$$25x^2-20x^3y+4x^4y^2\,\underline{|\,5x-2x^2y}$$

本題中，$a^2=(5x)^2=25x^2$

$$\begin{array}{r|l} \overline{2a+b=10x-2x^2y} & -20x^3y+4x^4y^2 \\ & \underline{-20x^3y+4x^4y^2} \end{array}$$

首項之平方根$5x$，爲方根之第一項減去$(5x)^2=25x^2$，得餘式$-20x^3y+4x^4y^2$.

以$2\cdot5x=10x$試除$-20x^3y$，得商$-2x^2y$爲方根之第二項.加此於$10x$，卽得完全除式$10x-2x^2y$.

172. 方根之項數在二以上者，亦可應用上法求之.每求一項:其試除之式，恆以已得諸項之二倍爲之;其完全除式，恆以試除所得之商加諸試除之式爲之.

例. 試求$1+10x^2+25x^4+16x^6-24x^5-20x^3-4x$之平方根.

此式開方之前，須先依x之降冪(或升冪)整列之.

$$16x^6-24x^5+25x^4-20x^3+10x^2-4x+1\,\underline{|\,4x^3-3x^2+2x-1}$$

$$\begin{array}{r|l} & \overline{16x^6} \\ 8x^3-3x^2 & -24x^5+25x^4 \\ & \underline{-24x^5+\ \ 9x^4} \\ 8x^3-6x^2+2x & 16x^4-20x^3+10x^2 \\ & \underline{16x^4-12x^3+\ \ 4x^2} \\ 8x^3-6x^2+4x-1 & -\ 8x^3+\ 6x^2-4x+1 \\ & \underline{-\ 8x^3+\ 6x^2-4x+1} \end{array}$$

每一試除之式,常可移其前一完全除式爲之,惟末項須加倍而已.

練習第八十一

試求以下各式之平方根:

1. $a^2+2ab+2ac+b^2+2bc+c^2$.
2. $4a^2+b^2+9c^2+6bc-12ca-4ab$.
3. $25a^4+9b^4+4c^4+12b^2c^2-20c^2a^2-30a^2b^2$.
4. $x^4+3x^2+1+2x+2x^3$.
5. $x^4+y^4-4x^3y-4xy^3+6x^2y^2$.
6. $29a^2b^2-30ab^3+4a^4-12a^3b+25b^4$.
7. $16+216x^2+81x^4-216x^3-96x$.
8. $2x^5+x^6+3x^2+3x^4+1+4x^3+2x$.
9. $49+80x^5+112x^2+25x^6+64x^4+70x^3$.
10. $31x^3-374x-22x^4+x^6-121x^2+289$.
11. $9x^4y^2-16x^3y^3+16x^6-12x^2y^4+4y^6+24x^5y$.
12. $x^4+2x^3(y+z)+x^2(y^2+4yz+z^2)+2x(y+z)yz+y^2z^2$.

173. 數之平方根. $1=1^2$, $100=10^2$, $10000=100^2$. 故數在1與100之間者,其平方根必在1與10之間.數在100與10,000之間者,其平方根必在10與100之間.簡言之,即一二位(Digit)之數之平方根,必爲一位之數;

三四位之數之平方根,必爲二位之數也.

是故數之開方必先分段 (Period). 欲開一整數之平方,可以兩位爲一段而自右至左分之爲若干段.(其極左之一段,有時祇剩一位.)於是此數之段數,卽等於平方根之位數.

例. 試求3,249之平方根.

$$
\begin{array}{rr|l}
 & & 32'49\ (57 \\
a^2= & & 25 \\ \hline
2a=2\times50= & 100 & 7\ 49 \\
b= & 7 & \\ \hline
 & 107 & 7\ 49 \\ \hline
\end{array}
$$

原數分二段,故方根爲二位之數(卽 $a+b$).

第一段32,含方根十位數之平方.

32所含之最大平方數(卽 a^2)爲 $25=5^2$,故方根之十位數(卽 a)爲5.

自32減去25而取下原數之第二段49,得餘數749(卽 $2ab+b^2$).

以 $2\times50=100$ (卽 $2a$) 試除749,取7爲其商(卽 b)而加諸 2×50,得完全除數 $2\times50+7=107$ (卽 $2a+b$).

以7乘107,自749減之恰盡.

174. 平方根在二位以上者,亦可做此求之.

例一　試求322,624之平方根.

$$
\begin{array}{lr|l}
 & & 32'26'24\,(568 \\
 & a^2=25 & \\
2a=2\times50= & 100 & 7\ 26 \\
b= & 6 & \\
 & 106 & 6\ 36 \\
2a=2\times560= & 1120 & 90\ 24 \\
b= & 8 & \\
 & 1128 & 90\ 24
\end{array}
$$

例二　試求1,708,249之平方根.

$$
\begin{array}{lr|l}
 & & 1'70'82'49\,(1307 \\
 & a^2=1 & \\
2a=2\times10= & 20 & 70 \\
b= & 3 & \\
 & 23 & 69 \\
2a=2\times1300= & 2600 & 1\ 82\ 49 \\
b= & 7 & \\
 & 2607 & 1\ 82\ 49
\end{array}
$$

本題中,第二試除數260大於被除數182,故以0爲商而取下原數之第四段49.

175.　設一平方數(Square Number)之平方根有小數,則其數亦有小數,且其小數之位數兩倍於其根之小數之位數.例如方根爲0·21,則原數爲$(0.21)^2=0.21$

$\times 0.21 = 0.0441$; 又如方根爲 0.111, 則原數爲 $(0.111)^2 = 0.111 \times 0.111 = 0.012321$.

故每平方數中小數之位數, 必偶 (Even) 而不奇 (Odd); 其方根中小數之位數,爲此偶數之半.

是以數之有小數者,其開方分段應自小數點起:整數向左,小數向右.小數末段有缺位,則加零於後以補足之.

例. 試求41.2164及965.9664之平方根.

```
     41.21'64(6.42          9'65.96'64(31.08
     36                     9
    ------                 -----
 124)5 21                61)65
     4 96                   61
    ------                 ---------
1282) 25 64            6208) 4 96 64
      25 64                  4 96 64
```

176. 設一數之小數,位數爲奇:或任何數已開得其應有之位數(即分段之數)而尙有餘數,則其平方根之眞值,永不能得.遇此等數,應加零於後,續行開方之法;如是,可得方根眞値之近似,且可近似至任何程度.

例. 試求3及357.357之平方根.

```
        3 ( 1.732…
        1
   27 ) 2 00
        1 89
  343 ) 11 00
        10 29
 3462 ) 71 00
        69 24
```

```
        3'57.35'70 ( 18.903…
        1
   28 ) 2 57
        2 24
  369 ) 33 35
        33 21
37803 ) 14  0 00
        11 34 09
```

177. 求分數之平方根,可各開分母分子之平方.設分母不爲完全平方,則開方之前應先化分數爲同值之小數,或化爲同值之分數令其分母爲平方數.

例. 試求$\frac{5}{8}$之平方根.

$$\frac{5}{8}=0.625$$

故 $\frac{5}{8}$之平方根 $=\sqrt{0.625}=0.79057.$

或如下:

$$\frac{5}{8}=\frac{10}{16};$$

故 $\frac{5}{8}$ 之平方根 $=\frac{\sqrt{10}}{\sqrt{16}}=\frac{1}{4}\sqrt{10}$

$$=\frac{1}{4}(3.16227)=0.79057.$$

練習第八十二

試求以下各數之平方根:

1.	324.	2.	529.	3.	961.
4.	10,24.	5.	53.29.	6.	53,824.
7.	616,225.	8.	346,921.	9.	1,500,625.
10.	1,046,529.	11.	1,522,756.	12.	31,371,201.

試求以下各數之平方根至四位小數:

13.	2.	14.	3.	15.	5.
16.	6.	17.	0.5.	18.	0.9.
19.	$\frac{1}{2}$.	20.	$\frac{2}{3}$.	21.	$\frac{3}{4}$.
22.	$\frac{4}{5}$.	23.	$\frac{5}{6}$.	24.	$\frac{6}{7}$.

178. 複式之立方根. $a+b$ 之立方為 $a^3+3a^2b+3ab^2+b^3$, 故 $a^3+3a^2b+3ab^2+b^3$ 之立方根(Cube Root)為 $a+b$. 由此可得開立方法(Extraction of the Cube Root)如下:

例一. 試求 $a^3+3a^2b+3ab^2+b^3$ 之立方根.

$$
\begin{array}{ll|l}
 & a^3+3a^2b+3ab^2+b^3 & \underline{a+b} \\
3a^2 & \underline{a^3} & \\
\underline{\quad +3ab+b^2} & 3a^2b+3ab^2+b^3 & \\
3a^2+3ab+b^2 & \underline{3a^2b+3ab^2+b^3} &
\end{array}
$$

方根之第一項 a, 顯然為原式首項 a^3 之立方根. 自原式減去 a^3, 其餘式為 $3a^2b+3ab^2+b^3$, 即 $(3a^2+3ab$

$+b^2)b$.故方根之第二項 b,可以 $3a^2$ 除餘式之首項而得之.$3a^2$ 者,方根首項平方之三倍;以此爲試除之式,而加 $3ab+b^2$ 於其上,卽得完全除式 $3a^2+3ab+b^2$.

例二. 試求 $8x^3-36x^2y+54xy^2-27y^3$ 之立方根.

此式爲依 x 之降冪而整列者.

$$
\begin{array}{rrl}
 & & 8x^3-36x^2y+54xy^2-27y^3 \;\underline{\big|\,2x-3y.}\\
 & 12x^2 & \overline{8x^3} \\
(6x-3y)(-3y)= & \underline{-18xy+9y^2} & \big| -36x^2y+54xy^2-27y^3 \\
 & 12x^2-18xy+9y^2 & \big| \underline{-36x^2y+54xy^2-27y^3}
\end{array}
$$

首項之立方根 $2x$,爲方根之第一項.減去 $(2x)^3=8x^3$,得餘式 $-36x^2y+54xy^2-27y^3$.

以 $3(2x)^2=12x^2$ 試除 $-36x^2y$,得商 $-3y$ 爲方根之第二項.於 $12x^2$ 加 $\{3(2x)-3y\}(-3y)=-18xy+9y^2$,卽得完全除式 $12x^2-18xy+9y^2$.

179. 方根之項數在二以上者,亦可應用上法求之.每求一項:其試除之式,恆以已得諸項之平方之三倍爲之;其完全除式,恆於此再加兩項,一爲已得諸項乘試除所得商之三倍,一爲試除所得商之平方.

例如方根之已得諸項爲 $x+y$,則求其下一項之試除之式爲 $3(x+y)^2$;如試除所得商爲 z,則完全除式

爲 $3(x+y)^2+3(x+y)z+z^2$. 又如已得諸項爲 $x+y+z$, 則求其下一項之試除之式爲 $3(x+y+z)^2$; 如試除所得商爲 w, 則完全除式爲 $3(x+y+z)^2+3(x+y+z)w+w^2$.

例. 試求 $5x^3-3x^5-3x+x^6-1$ 之立方根.

此式開方之前,須先依 x 之降冪(或升冪)整列之.

$$
\begin{array}{rr|l}
 & & \underline{x^2 \quad -x-1} \\
 & & x^6 \quad -3x^5 \qquad +5x^3-3x-1 \\
 & 3x^4 & x^6 \\
(3x^2-x)(-x) = & \underline{-3x^3+x^2} & -3x^5 \qquad +5x^3 \\
 & 3x^4-3x^3+x^2 & \underline{-3x^5+3x^4-x^3} \\
3(x^2-x)^2 = & 3x^4-6x^3+3x^2 & -3x^4+6x^3-3x-1 \\
(3x^2-3x-1)(-1) = & \underline{-3x^2+3x+1} & \\
 & 3x^4-6x^3 \qquad +3x+1 & \underline{-3x^4+6x^3-3x-1}
\end{array}
$$

本題因限於地位,故書方根於原式之上.

方根之第一項 x^2 爲原式第一項之立方根.其平方之三倍,卽爲第一試除式 $3x^4$.

自原式減去 x^6 而以第一試除式除之,得方根之第二項 $-x$. 加此於 x^2 之三倍,復以此乘之而加諸第一試除式,卽得第一完全除式 $3x^4-3x^3+x^2$.

此時方根之已得諸項爲 x^2-x; 故第二試除式爲 $3(x^2-x)^2=3x^4-6x^3+3x^2$. 試除所得商爲 -1; 故第二完

全除式爲 $(3x^4-6x^3+3x^2)+(3x^2-3x-1)(-1)=3x^4-6x^3+3x+1$.

練習第八十三

試求以下各式之立方根:

1. $x^3+3x^2y+3xy^2+y^3$.
2. $8x^3+6x-12x^2-1$.
3. $54xy^2-36x^2y+8x^3-27y^3$.
4. $108ax^2+64a^3-27x^3-144a^2x$.
5. $3x+7x^3+1+6x^4+6x^2+x^6+3x^5$.
6. $x^6+6x^4+6x^2+1-3x-7x^3-3x^5$.
7. $12x+160x^3+1+240x^4+192x^5+60x^2+64x^6$.
8. $39x^2+1-9x-144x^5+64x^6-99x^3+156x^4$.
9. $1+33x^4-36x^{10}-9x^2+8x^{12}-63x^6+66x^8$.
10. $6x^2+1+10x^6+12x^4+3x^8-10x^3-3x-6x^7-12x^5-x^9$.

180. 數之立方根.　$1=1^3$, $1000=10^3$, $1000000=100^3$. 故數在1與1000之間者,其立方根必在1與10之間;數在1000與1,000,000之間者,其立方根必在10與100之間.簡言之,卽一二三位之數之立方根,必爲一位之數;四五六位之立方根,必爲二位之數也.

是故欲開一整數之立方,可以三位爲一段而自右

至左分之爲若干段.(其極左之一段,有時祇剩二位或一位.)於是此數之段數,卽等於立方根之位數.

例. 試求42,875之立方根.

$$
\begin{array}{rr|l}
 & & 42'875\ (35 \\
 & a^3=27 & \\
3a^2=3\times 30^2= & 2700 & 15\ 875 \\
3ab=3\times 30\times 5= & 450 & \\
b^2=\qquad 5^2= & 25 & \\
\hline
 & 3175 & 15\ 875 \\
\end{array}
$$

原數分二段,故方根爲二位之數(卽 $a+b$)。

第一段42,含方根十位數之立方.

42所含之最大立方數(卽 a^3)爲 $27=3^3$,故方根之十位數(卽 a)爲3.

自42減去27而取下原數之第二段875,得餘數15875(卽 $3a^2b+3ab^2+b^3$).

以 $3\times 30^2=2700$(卽 $3a^2$)試除15875,取5爲其商(卽 b)而加 $3\times 30\times 5+5^2$ (卽 $3ab+b^2$) 於 3×30^2,得完全除數 $3\times 30^2+3\times 30\times 5+5^2=3175$ (卽 $3a^2+3ab+b^2$).

以5乘3175,自15875減之恰盡.

181. 立方根在二位以上者,亦可倣此求之.

例. 試求57,512,456之立方根.

$$\begin{array}{rr|l}
 & & 57'512'456\ (386 \\
 & a^3 = 27 & \\
3a^2 = & 3\times 30^2 = 2700 & 30\ 512 \\
3ab = & 3\times 30\times 8 = 720 & \\
b^2 = & 8^2 = 64 & \\
\hline
 & 3484 & 27\ 872 \\
\hline
3a^2 = & 3\times 380^2 = 433200 & 2\ 640\ 456 \\
3ab = & 3\times 380\times 6 = 6840 & \\
b^2 = & 6^2 = 36 & \\
\hline
 & 440076 & 2\ 640\ 456
\end{array}$$

182. 設一立方數(Cube Number)之立方根有小數,則其數亦有小數且其小數之位數三倍於其根之小數之位數.例如方根爲 0.11, 則原數爲 $(0.11)^3 = 0.11 \times 0.11 \times 0.11 = 0.001331$.

小數之段,自小數點起向右分之.末段缺位應補足.

例　試求 187.149248 之立方根.

$$\begin{array}{rr|l}
 & & 187.149'248\ (572 \\
 & a^3 = 125 & \\
3a^2 = & 3\times 50^2 = 7500 & 62\ 149 \\
3ab = & 3\times 50\times 7 = 1050 & \\
b^2 = & 7^2 = 49 & \\
\hline
 & 8599 & 60\ 193 \\
\hline
3a^2 = & 3\times 570^2 = 974700 & 1\ 956\ 248 \\
3ab = & 3\times 570\times 2 = 3420 & \\
b^2 = & 2^2 = 4 & \\
\hline
 & 978124 & 1\ 956\ 248
\end{array}$$

183. 數之非完全立方者,其立方根之眞値永不能得.遇此等數,應加零於後,續行開方之法,以得其近似之値.

例. 試求1,250.6894之立方根.

$$
\begin{array}{rrr|l}
 & & & 1'250.689'400(10.77 \\
 & & a^3=1 & \\
3a^2= & 3\times100^2= & 30000 & 250\ 689 \\
3ab= & 3\times100\times7= & 2100 & \\
b^2= & 7^2= & 49 & \\
 & & 32149 & 225\ 043 \\
3a^2= & 3\times1070^2= & 3434700 & 25\ 646\ 400 \\
3ab= & 3\times1070\times7= & 22470 & \\
b^2= & 7^2= & 49 & \\
 & & 3457219 & 24\ 200\ 533 \\
 & & & 1\ 445\ 867
\end{array}
$$

本題中,第一試除數300大於被除數250,故以0爲商而取下原數之第三段689.

184. 求試除數有捷法如下:

設a爲根之第一項,b爲根之第二項;則第一完全除式爲 $3a^2+3ab+b^2$;

第二試除式爲$3(a+b)^2$,即

$$3a^2+6ab+3b^2.$$

比較兩式,可知於第一完全除式加上其第二項及

兩倍第三項,卽得第二試除式:

$$\begin{array}{r} 3a^2+3ab+\ \ b^2 \\ 3ab+2b^2 \\ \hline 3a^2+6ab+3b^2 \end{array}$$

例. 試求5之立方根至五位小數.

$$5(1.70997$$

$$\begin{array}{lrr|l}
 & a^3= & 1 & \\
3a^2= & 3\times10^2= & 300 & 4\ 000 \\
3ab= & 3\times10\times7= & 210 & \\
b^2= & 7^2= & 49 & \\
\cline{3-3}
 & & 559 & 3\ 913 \\
\cline{4-4}
 & & 259 & 87\ 000\ 000 \\
3a^2= & 3\times1700^2= & 8670000 & \\
3ab= & 3\times1700\times9= & 45900 & \\
b^2= & 9^2= & 81 & \\
\cline{3-3}
 & & 8715981 & 78\ 443\ 829 \\
\cline{4-4}
 & & 45981 & 8\ 556\ 171\ 000 \\
3a^2= & 3\times17090^2= & 876204300 & \\
3ab= & 3\times17090\times9= & 461430 & \\
b^2= & 9^2= & 81 & \\
\cline{3-3}
 & & 876665811 & 7\ 889\ 992\ 299 \\
\cline{4-4}
 & & 461511 & 666\ 178\ 701\ 000 \\
3a^2= & 3\times170990^2= & 87712740300 & \\
3ab= & 3\times170990\times7= & 3590790 & \\
b^2= & 7^2= & 49 & \\
\cline{3-3}
 & & 87716331139 & \underline{614\ 014\ 317\ 973}
\end{array}$$

本題中第一試除數加210+49得559爲第一完全除數.於第一完全除數加上210+49=259,再加上49,得和867;故第二試除數爲86700.

以86700試除,其商爲0;因假如以1爲商,則完全除數86700+510+1=87211將大於被除數87000也.

第三試除數爲8670000.於此加45900+81得8715981爲第三完全除數.於第三完全除數加上45900+81=45981,再加上81,得和8762043;故第四試除數爲876204300.

第五試除數,可倣此求之.

185. 求分數之立方根,可各開分母分子之立方.設分母不爲完全平方,則開方之前應先化分數爲同值之小數,或化爲同值之分數令其分母爲立方數.

例. 試求$\frac{3}{\sqrt[3]{2}}$之值至三位小數.

$\left(\frac{3}{\sqrt[3]{2}}\right)^3=\frac{27}{2}$; 故$\frac{3}{\sqrt[3]{2}}$爲$\frac{27}{2}$之立方根.

$$\frac{27}{2}=13.5;$$

故 $\frac{27}{2}$之立方根 $=\sqrt[3]{13.5}=2.381$.

或如下:

$$\frac{27}{2}=\frac{108}{8};$$

故　　$\frac{27}{2}$之立方根$=\frac{\sqrt[3]{108}}{\sqrt[3]{8}}=\frac{1}{2}\sqrt[3]{108}$

$$=\frac{1}{2}(4.762)=2.381.$$

練習第八十四

試求以下各數之立方根:

1.	46,656.	2.	42,875.	3.	91,125.
4.	274,625.	5.	110,592.	6.	258,474,853.
7.	109,215,352.	8.	259,694,072.	9.	127,263,527.
10.	385,828,352.	11.	1879.080904.	12.	1838.265625

試求以下各數之立方根至四位小數:

13.	4.	14.	10.	15.	87.
16.	2.5.	17.	2.05.	18.	3.02.
19.	0.01.	20.	0.05.	21.	0.2.
22.	$\frac{2}{3}$.	23.	$\frac{3}{4}$.	24.	$\frac{9}{11}$.

25. 試求$\frac{\sqrt[3]{3}}{2}$之值至四位小數.

26. 試求$\frac{3}{\sqrt[3]{2}}$之值至三位小數.

27. 試求$\sqrt[3]{\left(\frac{294\times125}{42\times32}\right)^2}$之值.

28. 試求$\frac{(330\times\frac{1}{49})^4}{\sqrt[3]{22\times70}}$之值.

第十四章

圖寫方程式法

186. 象數 數學之中,幾何所論者爲象而有時借助於數,代數所論者爲數而有時借助於象.象數二者,不特相輔而行,且可相需爲用也.

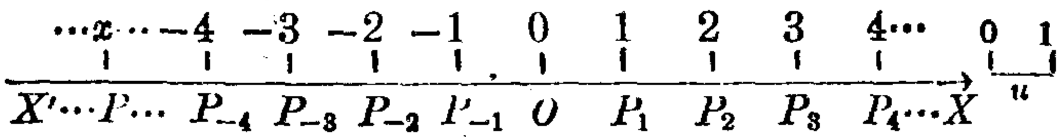
數無形而象有形;論數而借助於象,所以使理解有所附麗觀察易於明瞭也.

187. 一一對應之關係. 然借助於象云者,非泛泛然設喻取譬之謂,必使每象止表一數(不得旣表此數,又表彼數),每數止表於一象(不得旣以此象表之又以彼象表之)夫然後數之問題可移於象;象之結果可通於數,研究之際,往復自由,無虞歧誤:如是者,謂之一一對應之關係(Relation of One-to-One Correspondence),或簡稱一一關係(One-to-One Relation).

象數之間,苟能先定其一一對應之關係,則可寄數於象而研究之矣.

188. 實數系與直線. 凡正負整數分數曰有理數(Rational Number);雖非整數分數而可以整數分數表其近似之值者(如不盡根數之類)曰無理數(Irrational Number). 有理數無理數總稱曰實數 (Real Number); 包舉其全體言之,曰實數系 (Real System).

直數系可以直線上之點表之如下:



任取一點 O, 名之曰原點 (Origin);過 O 任作一無限長之直線 $X'X$, 名之曰軸(Axis).更任擇一線分 u 爲量長之單位,以量 $X'X$ 上各點與 O 之距離,而別其自 O 向右者爲正,向左者爲負.於是直線 $X'X$ 上各點 P_1, P_2, P_3 P_4,…與其各距離所含單位 u 之次數1,2,3,4,…可使一一對應;P_{-1}, P_{-2} P_{-3}, P_{-4},…與−1,−2,−3,−4,…亦然.推而至於距離不爲 u 之倍數之點,無不可有其所與對應之實數;實數之不爲整數者,無不可有其所與對應之點.

易辭言之:原點及量長之單位既已前定,則任取直線上一點,必可以一實數配之,而此數有一無二;任舉一實數,必可以直線上一點配之,而此點有一無二.

以數配點而表之,其數曰點之坐標 (Co-ordinate).以點配數而表之,其點曰數之圖 (Graph).

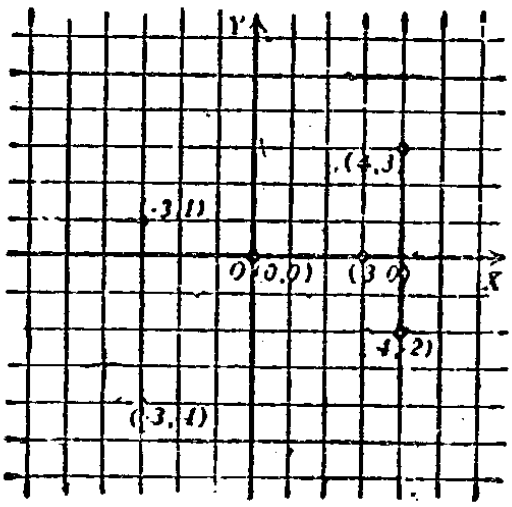
189. 點之坐標.

I. 一直線上之點(P),可以一元(x)之實數值爲其坐標.

從前款所論,知直線上之點可以實數系表之;卽 P 之位置與 x 之實數值有一一對應之關係.例如 P 在 O 右 $4u$ 之處;則從 $OP/u=4$ 知其坐標爲 4; P 在 O 左 $\frac{5}{2}u$ 之處,則從 $OP/u=-\frac{5}{2}$ 知其坐標爲 $-\frac{5}{2}$; P 在 O 右 $\sqrt{3}u$ 之處,則從 $OP/u=\sqrt{3}$ 知其坐標爲 $\sqrt{3}$; P 在 O 左 $\sqrt{3}u$ 之處,則從 $OP/u=-\sqrt{3}$ 知其坐標爲 $-\sqrt{3}$.

II. 一平面上之點,可以二元(x, y)之實數值爲其坐標.

取平面上一點 O 爲原點,過 O 作互相垂直二線 $X'X$, $Y'Y$ 爲軸(如圖).任定兩軸上量長之單位(u),而令自 X' 至 X 之向(自左而右)爲正,反之爲負;自 Y' 至 Y 之向(自下而上)爲正,反之爲負.於是平面上一點 P,不在 O 左卽在其右,不在其上卽在其下,而其距離均可量而得之.今試以

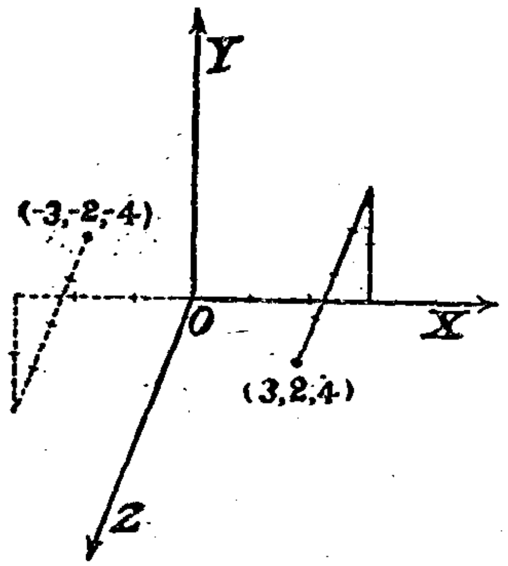


x 表 O 左右之距離，y 表 O 上下之距離；則 P 之位置與 x, y 有一一對應之關係，而其坐標可記作 (x, y)：x 曰橫標 (Abscissa)，y 曰縱標 (Ordinate)。

例如 P 對 O 之位置爲右 4 上 3（即言 P 在 O 右 $4u$，上 $3u$ 之處，下做此），則其坐標爲 $(4, 3)$；爲左 3 上 1，則其坐標爲 $(-3, 1)$；爲左 3 下 4，則其坐標爲 $(-3, -4)$；爲右 4 下 2，則其坐標爲 $(4, -2)$。軸上之點，一標爲 0：如圖中 x 軸上之 $(3, 0)$ 是也。原點之坐標爲 $(0, 0)$。

III. 空間之點，可以三元 (x, y, z) 之實數值爲其坐標。

取空間一點 O 爲原點，作兩兩互相垂直之 OX, OY, OZ 三軸（如圖）。任定量長之單位及三軸之正向如前（x 軸以向右爲正，y 軸以向上爲正，z 軸以向前爲正）。



於是空間一點 P 之位置，可以 (x, y, z) 爲坐標而表之。

例如 P 對 O 之位置爲右 3 上 2 前 4，則其坐標爲 $(3, 2, 4)$；爲左 3 下 2 後 4，則其坐標爲 $(-3, -2, -4)$。原點之坐標爲 $(0, 0, 0)$。

上所述之坐標法，創自法國哲學家嘉德氏（Descartes）。後人因名此種坐標為嘉德坐標(Cartesian Coordinates)。

190. 數之圖. 觀上款，又可知

I. 一個實數系中之數(x)，可以一直線上之點為圖而表之。(用 OX 一軸.)

II. 二個實數系中之數 (x, y,) 可以一平面上之點為圖而表之。(用 OX, OY 二軸.)

III. 三個實數系中之數 (x, y, z)，可以空間之點為圖而表之。(用 OX, OY, OZ 三軸.)

練習第八十五

1. 試作以下各數之圖: 0, -8, $\frac{1}{3}$, $\sqrt{2}$, $-\sqrt{5}$, $2+\sqrt{3}$, $2-\sqrt{3}$, $\sqrt{2}+\sqrt{3}$, $\sqrt{2}-\sqrt{3}$, $\sqrt{3}-\sqrt{2}$.

2. 試作以下各數之圖: $(2,3)$ $(2,-4)$; $(-5,3)$; $(0,4)$; $(-7,-2)$; $(-6,0)$; $(-1,\sqrt{2})$; $(\sqrt{3},-\sqrt{2})$; $(2+\sqrt{3}, 2-\sqrt{3})$; $(2-\sqrt{3}, 2+\sqrt{3})$; $(\sqrt{2}+\sqrt{3}, \sqrt{2}-\sqrt{3})$; $(\sqrt{2}-\sqrt{3}, \sqrt{2}+\sqrt{3})$.

3. 試作以下各數之圖: $(1,2,3)$; $(1,2,-3)$;

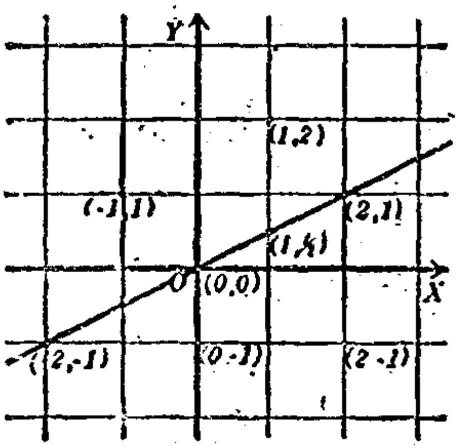
$(1, -2, 3)$；$(-1, 2, 3)$；$(1, -2, -3)$；$(-1, 2, -3)$；$(-1, -2, 3)$；$(-1, -2, -3)$；$(1, 2, 0)$；$(1, 0, -3)$；$(0, -2, 3)$；$(1, 0, 0)$；$(0, -2, 0)$；$(0, 0, -3)$；$(0, 0, 0)$.

4. 直線上A, B二點之距離爲 6. 設A之坐標爲-3, 試作B點, 且求其坐標.

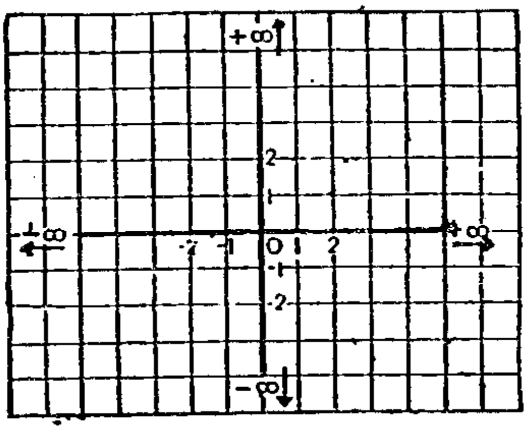
5. 平面上有一正方形,其一邊之兩端爲$(2,2)$及$(-2, 2)$兩點.試畫此正方形,且列舉其四隅之坐標.

6. 一立方體之兩對隅爲$(1, 1, 1)$及$(-1, -1, -1)$兩點.試畫此立方體,且列舉其八隅之坐標.

191. 方程式之圖寫. x, y, z 等元之含於方程式中者,不能任令其等於何值,故此方程式,可視爲一關係式,而所含諸元實受其制限.設任意各以數值與諸元,則其值或適合或不適合於方程式所表關係.例如方程式 $x=2y$ 中,以 $(0,0)$, $(1, \frac{1}{2})$, $(2, 1)$, $(-2, -1)$ 等值與 (x, y), 則適合; 若以 $(0, -1)$, $(1,2)$, $(2,-1)$, $(-1,1)$. 等值與之,則不適合.



今試設想諸元均令徧歷各實數值:自 0 遍歷各正數以至無窮,遍歷各負數以至

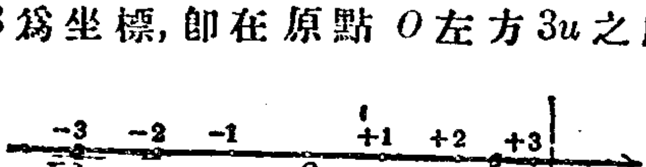


無窮（無窮之符號爲∞）；去其不適合於方程式者而留其適合者.於是盡取其適合之值以作圖，是之謂方程式之圖寫 (Graphical Representation)；其所得之象，曰方程式之圖 (Graph). 例如過 (0, 0), (1, ½), (2, 1), (−2, −1)諸點之直線爲方程式 $x=2y$ 之圖;因凡線上之點，其橫標均倍於縱標，而線外更無橫標倍於縱標之點也.

192. 一次方程式之圖寫I. 一次方程式之含一元者，可化爲 $Ax+B=0$ 之形. 此式之 x，止能有 $-B/A$ 一值，故其圖爲直線上一點.

例一. 試寫 $x+3=0$ 之圖.

解此方程式，得 $x=-3$ 爲適合之值. 故其圖爲一點：其點以 -3 爲坐標，卽在原點 O 左方 $3u$ 之處之點也.



例二. 試寫 $x-2=3x-8$ 之圖.

解此方程式,得3爲適合之値,故其圖爲一點,其點以3爲坐標.

例三. 試寫$3x+4=5x-1$之圖.

解此式,得$x=\frac{5}{2}$爲適合之値.故其圖爲以$\frac{5}{2}$爲坐標之點.

注意. 學者每讀一例,必實行畫軸作點爲圖,無稍忽略.讀以下諸款亦然.

例四. 試寫$(x+4)/(2x-3)=1$之圖.

此式之解爲$x=7$.故其圖爲以7爲坐標之點.

例五. 試寫$\dfrac{3x^2-x-1}{2x^2+x+3}=\dfrac{3}{2}$之圖.

此式之解爲$x=-11/5$.故其圖爲以$-11/5$爲坐標之點.

練習第八十六

試化簡以下各方程式而寫其圖:

1. $x+7=4x+4$.　　2. $5x-12=6x-8$.

3 $3(x-2)=2(x-3)$.　　4. $4(1-x)+3(2+x)=13$.

5. $2(x-1)-3(x-2)+4(x-3)+2=0$.

6. $5x+6(x+1)-7(x+2)-8(x+3)=0$.

7. $\frac{1}{3}(2-x)-\frac{1}{5}(5x+21)=x+3$.

8. $\frac{1}{2}(x-5)-\frac{1}{3}(x-4)=\frac{1}{5}(x-3)-(x-2)$.

9. $1-2\{x-3(1+x)\}=0$.

10. $2x-[3-\{4x+(x-1)\}-5]=8$.

11. $3x^2=(x+1)^2+(x+2)^2+(x+3)^2$.

12. $(x-2)(x-5)+(x-3)(x-4)=2(x-4)(x-5)$.

13. $5(x+1)^2+7(x+3)^2=12(x+2)^2$.

14. $(x-1)^3+(x-2)^3+(x-3)^3=3(x-1)(x-2)(x-3)$.

15. $(x+1)/(x-2)=(x-4)/(x+2)$.

16. $(x-1)/(x-4)=(x-3)/(x-2)$.

17. $\dfrac{1}{x+1}+\dfrac{1}{x+7}=\dfrac{1}{x+3}+\dfrac{1}{x+5}$.

18. $\dfrac{x}{x-2}+\dfrac{x-9}{x-7}=\dfrac{x+1}{x-1}+\dfrac{x-8}{x-6}$.

19. $\dfrac{2x-3}{2x-4}-\dfrac{2x-4}{2x-5}-\dfrac{2x-7}{2x-8}+\dfrac{2x-8}{2x-9}=0$.

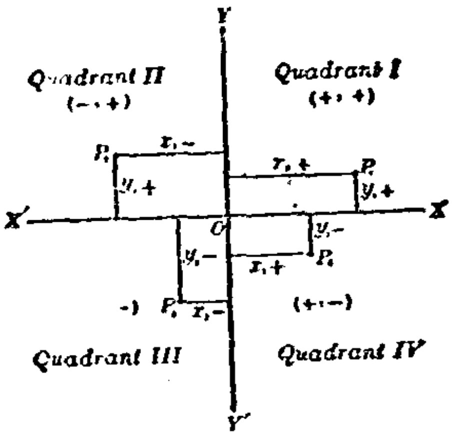
20. $x-\dfrac{4x+5}{x+1}+\dfrac{2x+5}{x+2}-\dfrac{x^2-10}{x+3}-\dfrac{x+5}{x+4}=0$.

193. 一次方程式之圖寫 II. 一次方程式之含二元者,可化爲 $\underline{Ax+By+C=0}$ 之形.此式之 (x, y),可有無數之值(參觀第 151 款);故其圖有無數之點在一平面上.

無數之點,作之不能盡也.欲求其所成何形,宜先試作若干點以知其大概之範圍.

作點之前,務須熟記以下之事實:

平面廣大無垠.直交兩坐標軸分之爲四區:原點之右上稱第一象限.(First Quadrant),x, y 皆正之點在焉;左上稱第二象限(Second Quadrant),x 負 y 正之點在焉;左下稱第三象限(Third Quadrant),x, y 皆負之點在焉;右下稱第四象限(Forth Quadrant),x 正 y 負之點在焉.



今舉例以明寫圖之法:

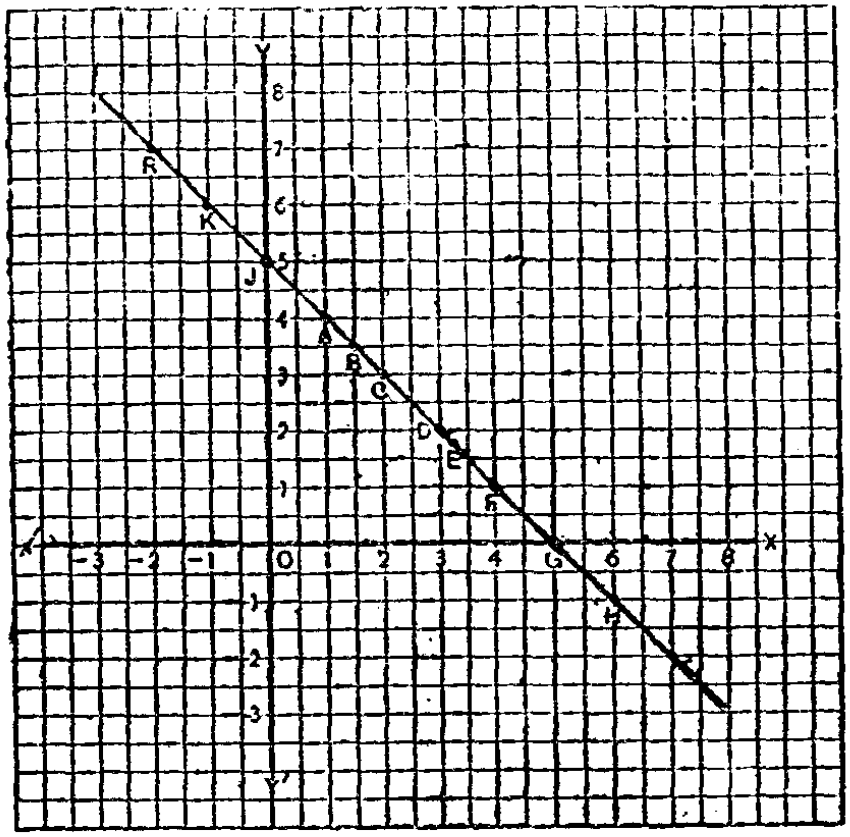
例一. 試圖寫方程式 $x+y-5=0$.

解方程式以求 y, $\qquad y=5-x$.

以實數值與 x,而計算 y 之值,列表如下:

x	1	$1\frac{1}{2}$	2	3	$3\frac{1}{2}$	4	5	6	7	0	-1	-2
y	4	$3\frac{1}{2}$	3	2	$1\frac{1}{2}$	1	0	-1	-2	5	6	7
點	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	R

作 $A, B, C, D, E, F, G, H, I, J, K, R$, 諸點.($A, B, C, D, E, F$ 在第一象限;G 在 x 軸上;H, I 在第四象限;J 在 y 軸上;K, R 在第二象限.)



觀諸點之位置,似均在一直線上.試過諸點作一無限長之直線,而以量長之單位測驗平面上任意點與坐標軸之距離,則知

凡點在線上者,其坐標值(x, y)均適合於原方程式.

凡點在線外者,其坐標值(x, y)均不適合於原方程式.

故過A, B諸點之直線卽爲$x+y-5=0$之圖.

觀於上例,可悟二元一次方程式之圖爲平面上一

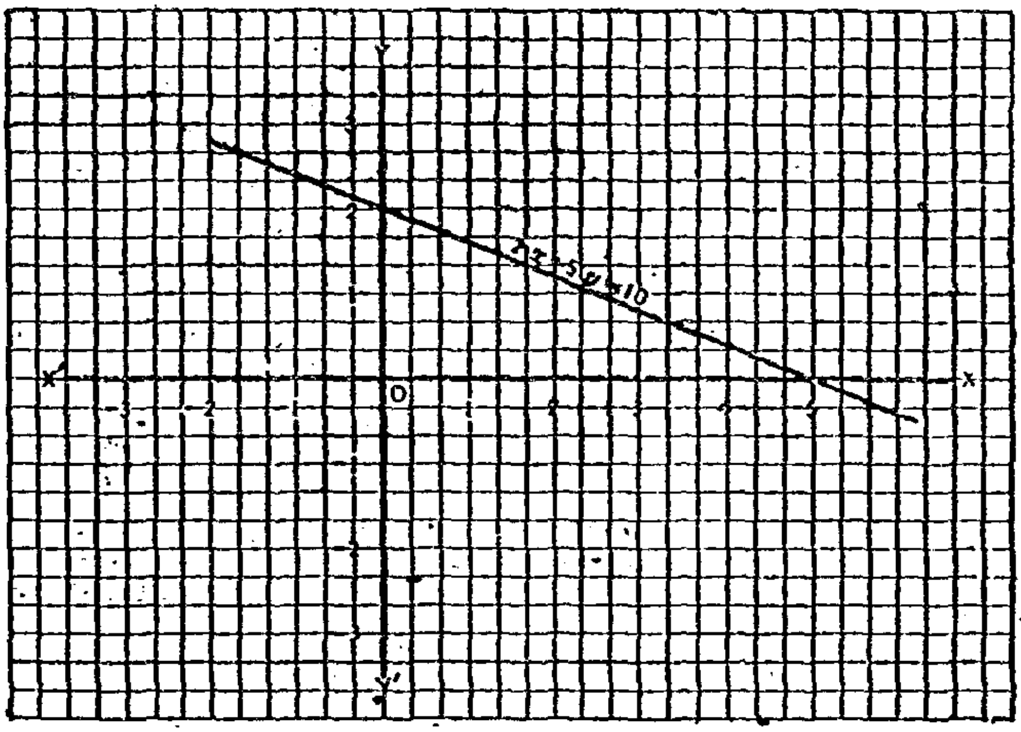
直線.(此爲代數學中一重要定理,其證明詳見高等代數學各書,茲從略.)

知二元一次方程式之圖之必爲直線,則圖寫之法至易;因求得圖中任何二點,即可以直線聯之而得其全圖也.

例二 試圖寫方程式 $2x+5y=10$.

式中令 $x=0$, 則 $y=2$; 令 $y=0$, 則 $x=5$.

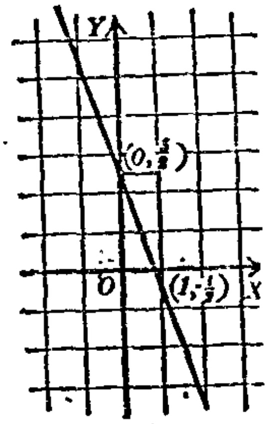
過 $(0, 2)$, $(5, 0)$ 二點作直線,即爲 $2x+5y=10$ 之圖.



例三. 試圖寫方程式 $y=-3x+\frac{5}{2}$.

式中令 $x=0$, 則 $y=\frac{5}{2}$; $x=1$, 則 $y=-\frac{1}{2}$.

過 $(0,\frac{5}{2})$, $(1,-\frac{1}{2})$ 作直線,



即得所求之圖

例四. 試圖寫 $y=4$.

此式無 x; 即言 x 任為何值, y 必為 4.

故方程式之圖為過 $(0,4)$ 而平行於 x 軸之直線.

例五. 試圖寫 $2x+1=0$.

此式無 y; 故其圖為過 $(-\frac{1}{2},0)$ 而平行於 y 軸之直線.

練習第八十七

試圖寫以下各方程式:

1. $x=-6$.
2. $x=0$.
3. $y=0$.
4. $x-y=0$.
5. $x+y=0$.
6. $2x=6(1-y)$.
7. $2x-y-4=0$.
8. $12x+10y=5$
9. $8x-y=0$.
10. $10y=4-15x$.
11. $\frac{1}{3}x+3y+14=0$.
12. $\frac{1}{5}y+5x=4$.
13. $\frac{1}{3}x-\frac{1}{6}y=\frac{1}{2}$.
14. $\frac{1}{5}x-\frac{1}{10}y-\frac{1}{2}=0$.
15. $\frac{1}{3}(2x-5y)+\frac{1}{4}(x+7)=1$.
16. $\frac{1}{5}(2x+3y)+\frac{1}{7}(y+6)=2$.

17. $\frac{1}{5}(2x-5)-\frac{1}{7}(11-2y)=0.$

18. $\frac{1}{3}(x-2)-\frac{1}{4}(y+2)=0.$

19. $x-\frac{1}{2}(y-1)-\frac{1}{3}(x-2)=0.$

20. $\frac{1}{2}x-\frac{1}{3}(y-2)-\frac{1}{4}(x-3)=0.$

194. 一次方程式之圖寫 III. 一次方程式之含三元者,可化爲$\underline{Ax+By+Cz+D=0}$之形.此式之(x, y, z),可有無數之值;其圖爲<u>空間一平面</u>.(證明詳見解析幾何學各書,茲從略.)

知三元一次方程式之圖必爲平面.則寫圖之法至易.蓋平面之位置,可以三點定之;任取適合於方程式之三點而作平面過之,卽得方程式之圖矣.

平面與OX, OY, OZ三坐標軸之三交點,最爲易作.聯此三點,卽得此平面與YOZ, ZOX, XOY三平面相交之三直線,圖寫時常用以顯面之形.

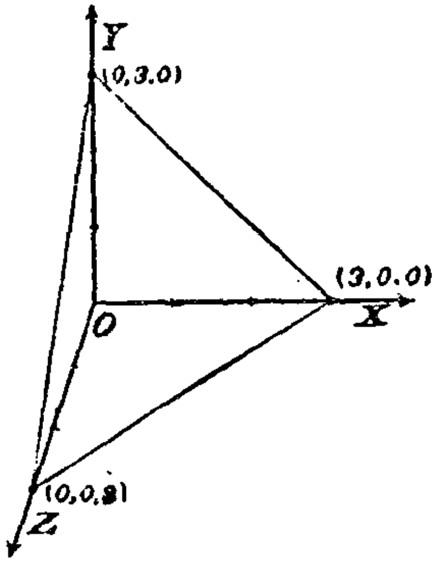
<u>例一.</u> 試圖寫方程式$x+y+z-3=0$.

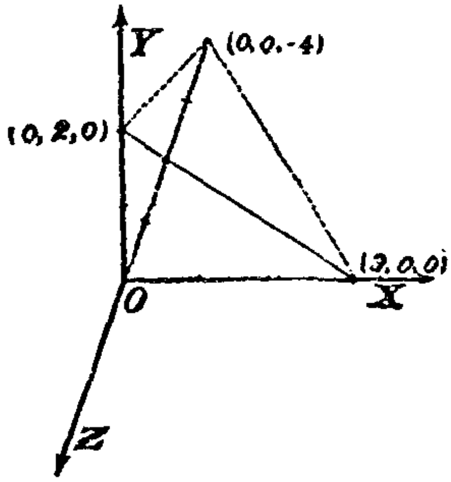
式中令$y=z=0$, 則$x=3$;

令$z=x=0$, 則$y=3$;

令$x=y=0$, 則$z=3$.

過$(3,0,0),(0,3,0),(0,0,3)$三點作平面,卽得方程式$x+y+z-3=0$之圖.





例二. 試圖寫方程式 $\frac{2}{3}x+y-\frac{1}{2}z=2$.

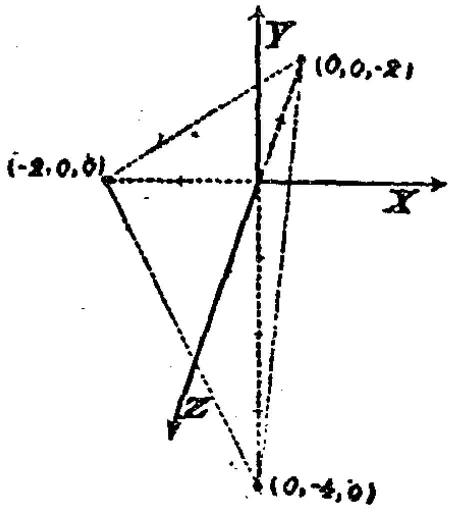
此式可化作 $4x+6y-3z-12=0$.

式中令 $y=z=0$, 則 $x=3$;

令 $z=x=0$, 則 $y=2$;

令 $x=y=0$, 則 $z=-4$.

過 $(3,0,0)$, $(0,2,0)$, $(0,0,-4)$ 作平面,卽得所求之圖.



例三. 試圖寫方程式

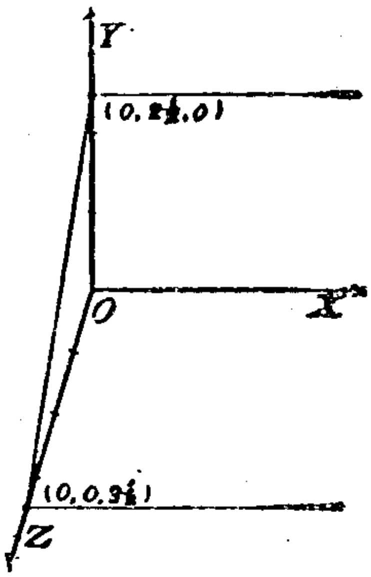
$$x+\frac{1}{2}y+z+2=0.$$

式中令 $y=z=0$, 則 $x=-2$;

$z=x=0$, 則 $y=-4$;

$x=y=0$, 則 $z=-2$.

過 $(-2, 0, 0)$, $(0, -4, 0)$,



(0, 0, −2)作平面,卽得所求之圖.

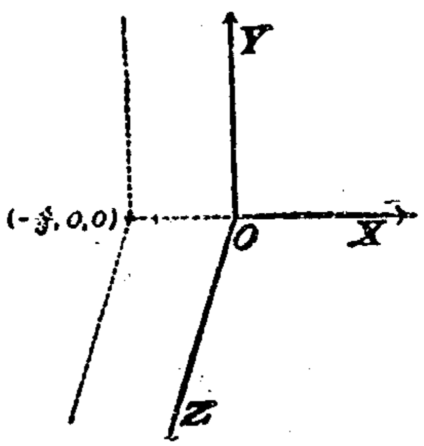
例三. 試圖寫方程式

$$14y+10z=35.$$

此式無 x; 卽言 x 任爲何值均可.

令 $y=0$, 則 $z=3\frac{1}{2}$; $z=0$, 則 $y=2\frac{1}{2}$.

故方程式之圖爲過 $(0,0,3\frac{1}{2})$, $(0,2\frac{1}{2},0)$ 而平行於 x 軸之平面.



例五. 試圖寫方程式

$$3x+4=0.$$

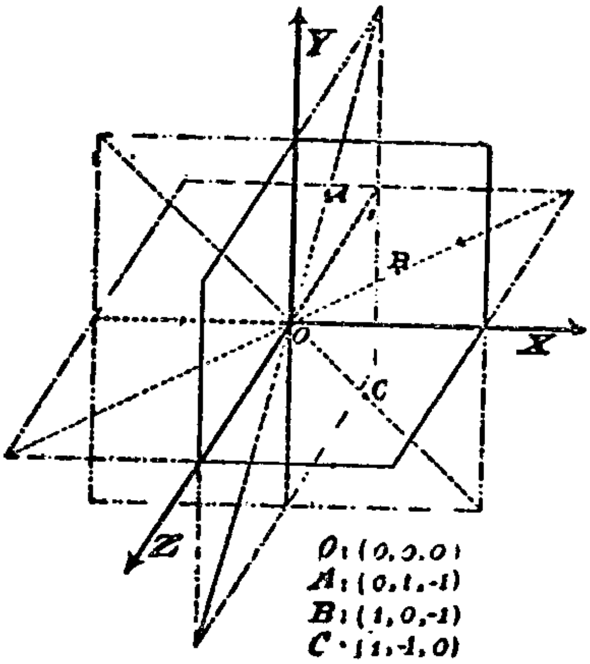
此式無 y, z; 即言 y, z 任爲何值, x 必爲 $-\frac{4}{3}$.

故此式之圖爲過 $(-\frac{4}{3},0,0)$ 而垂直於 x 軸之平面.

例六. 試圖寫方程式 $x+y+z=0$.

此式中 x, y, z 有一爲0則均爲0; 故其圖爲過原點 O 之平面.

欲知此平面與 YOZ, ZOX, XOY 相交之三直線, 可



在三平面上各作適合於方程式之一點,如

$A:(0,1,-1)$,

$B:(1,0,-1)$,

$C:(1,-1,0)$.

過 $0, A, B, C$ 作平面,卽得所求之圖.

<u>例七.</u> 試圖寫方程式 $3x-2y+z=0$.

此式之圖過原點 0.

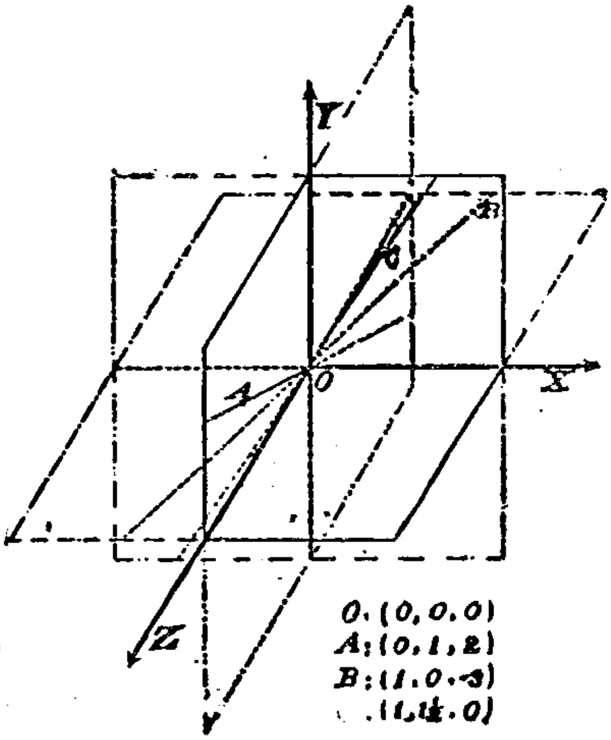
如上例,在 YOZ, ZOX, XOY 三平面上各作適合於方程式之一點:

$A:(0,1,2)$,

$B:(1,0,-3)$,

$C:(1,1\frac{1}{2},0)$.

過 $0, A, B, C$ 作平面,卽得所求之圖.



練習第八十八

試圖寫以下各方程式:

1. $4x-5=0$.　　2. $7y+9=3$.

3. $2-3z=10$.　　4. $x=0$.

5. $2y=0$.　　6. $3z=0$.

7. $x=y$.　　8. $y=2z$.

9. $z=3x$.　　10. $2x-y=6$.

11. $4y-2z=8$.　　12. $z+x-6=0$.

13. $x+y+3z=\frac{7}{2}$.　　14. $x-2y+4z=7$.

15. $2x-11y-24z=5$.　　16. $x+y+z=-1$.

17. $3x-y-5z=13$.　　18. $5x+3y+2z=1$.

19. $3x+8y-5z=0$.　　20. $10z-y-4x=0$.

195. 二次方程式之圖寫 I. 二次方程式之含一元者,可化為$Ax^2+Bx+C=0$之形.此式之x,止有二値(可用配方法或析因數法得之):

$$\frac{-B+\sqrt{B^2-4AC}}{2A}\text{或}\frac{-B-\sqrt{B^2-4AC}}{2A}.$$

設B^2-4AC為正,則方程式之圖為直線上二點.

圖之形,全視x之值;而x之值,又全係乎B^2-4AC.設B^2-4AC為0,則x之二値相等,而圖中二點相重.設B^2-4AC為負,則x之二値均為虛數(Imaginary Number),而圖不可作矣.

例一. 試圖寫方程式 $x^2+5x=6$

此式可寫作 $$x^2+5x-6=0.$$

析因數, $$(x-1)(x+6)=0.$$

$$\therefore\quad x=1 \text{ 或 } -6.$$

由此知方程式之圖為二點:其位置一為右1,一為左6.(學者宜實行畫圖,勿忘.)

例二. 試圖寫方程式 $3x^2-7x-20=0.$

除以 3 而配方, $x^2-\frac{7}{3}x+\left(\frac{7}{6}\right)^2=\frac{20}{3}+\frac{49}{36},$

即 $$\left(x-\frac{7}{6}\right)^2=\left(\frac{17}{6}\right)^2.$$

開方簡約得 $x=4$ 或 $-\frac{5}{3}$.

由此知方程式之圖為二點:其位置為右 4 與左 $\frac{5}{3}$.

例三. 試圖寫方程式 $4x^2-79=4x$

行配方法而解之,得 $x=\frac{1}{2}\pm2\sqrt{5}.$

$$\tfrac{1}{2}+2\sqrt{5}\ =.5+4.472\cdots=4.972\cdots$$

$$\tfrac{1}{2}-2\sqrt{5}\ =.5-4.472\cdots=-3.972\cdots$$

故方程式之圖為二點:其位置為右4.972與左3.972.

例四. 試圖寫方程式 $x^2+4x+4=0.$

析因數而解之,得 $x=-2.$

x 之二值均為 -2. 故方程式之圖二點相重:其位置為左 2.

例五. 試圖寫方程式$x^2-2x+2=0$.

配方解之,得 $x=1\pm\sqrt{-1}$.

x 之二值均虛數:故方程式無圖可作.

練習第八十九

試圖寫以下各方程式:

1. $x^2-9=0$.
2. $x^2=7x$.
3. $8-9x=-x^2$.
4. $28-x^2=12x$.
5. $\dfrac{5x+7}{x-1}=3x+2$.
6. $\dfrac{5x-1}{x+1}=\dfrac{3x}{2}$.
7. $\dfrac{3x-3}{x-2}=\dfrac{5x-2}{x+5}$.
8. $\dfrac{3x-1}{4x+7}=1-\dfrac{6}{x+7}$.
9. $\dfrac{5x-7}{7x-5}=\dfrac{x-5}{2x-13}$.
10. $\dfrac{x+3}{2x-7}-\dfrac{2x-1}{x-3}=0$.
11. $\dfrac{2x-2}{2x-3}+\dfrac{3-3x}{3x-2}=\dfrac{5}{8x-12}$.
12. $\dfrac{4x+3}{9}=\dfrac{6x-13}{18}-\dfrac{7x-46}{5x+3}$.
13. $\dfrac{1}{3x-6}+\dfrac{5}{4-x^2}+\dfrac{7x}{72(x+2)}=0$.
14. $\dfrac{1}{x^2-1}-\dfrac{1}{1-x}=\dfrac{7}{8}-\dfrac{1}{x+1}$.
15. $\dfrac{1}{x^2-4}-\dfrac{3}{2-x}=1+\dfrac{1}{3x+6}$.
16. $\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{x+4}=\dfrac{1}{x+1}+\dfrac{1}{x+2}$.
17. $\dfrac{x}{x+1}+\dfrac{x+1}{x+2}=\dfrac{x-2}{x-1}+\dfrac{x-1}{x}$.

18. $\frac{x}{x-3}-\frac{x-3}{x}+\frac{x}{x+3}-\frac{x+3}{x}=\frac{2}{3}$.

19. $\frac{x+3}{x+1}+\frac{x-6}{x-4}=\frac{x+4}{x+2}+\frac{x-5}{x-3}$.

20. $\frac{x-3}{x-4}-\frac{x-4}{x-5}=\frac{x-6}{x-7}-\frac{x-7}{x-8}$.

196. 二次方程式之圖寫II. 二次方程式之含二元者,可化爲 $x^2+Bxy+Cy^2+Dx+Ey+F=0$ 之形.此式之 (x, y),可有無數之值.其圖之形不外三類:曰拋物線(Parabola),曰橢圓(Ellipse),曰雙曲線(Hyperbola).皆平面上之曲線也.(證明見解析幾何學各書).

作曲線之法,先求得(x, y)適合於方程式之值,列表作點;俟其形之大概可以意想,於是就其形勢而以曲線聯之.

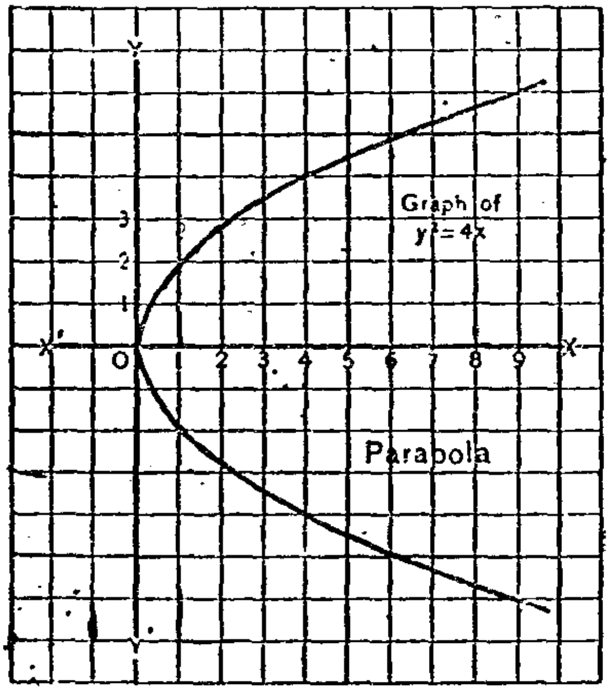
例一. 試圖寫方程式$y^2=4x$.

解方程式求y, $y=\pm2\sqrt{x}$.

以各數值與x而求y之值,列表如下:

x	0	1	2	3	4	9
y	0	±2	±2.8	±3.4	±4	±6

x	-1 (x爲任何負數)
y	$2\pm\sqrt{-1}$ (y之值均虛數)



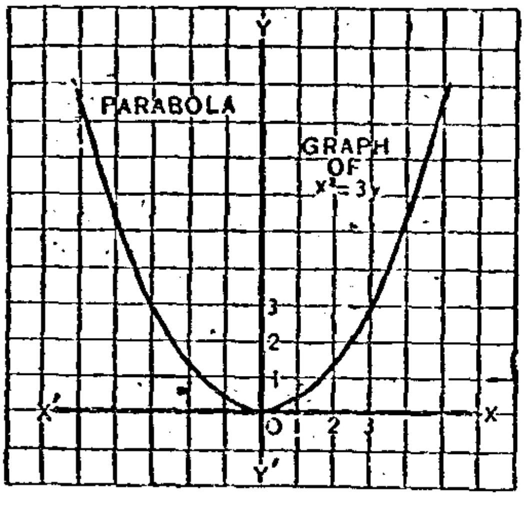
依表中(x, y)諸值作點而以曲線聯之,即得方程式之圖.此曲線名曰拋物線.

拋物空中所經之道,成拋物線.彗星之軌道有爲拋物線者.

例二. 試圖寫方程式$y=x^2/3$.

解方程式求x, $x=\pm\sqrt{3y}$.

以各數值與y而求x之值,列表如下:



x	y	x	y
0	0	$\pm\sqrt{-3}$	-1
±1.73	1	(x之值爲虛數)	(y爲任何負數)
±2.44	2		
±3	3		
±3.46	4		
±5.19	9		

作諸點而以曲線聯之,得一拋物線爲所求之圖.

凡方程式爲 $y^2=ax$ 或 $x^2=ay$ 之形者,其圖爲一拋物線.

例三. 試圖寫方程式 $4x^2+9y^2=36$.

解方程式求 y,

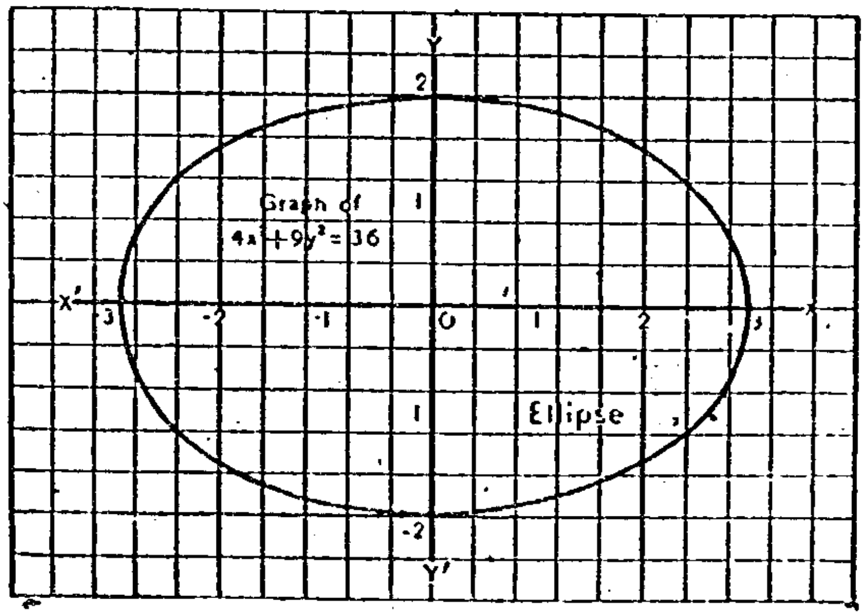
$$y=\pm\tfrac{2}{3}\sqrt{9-x^2}$$

列表作點如右:

以曲線聯之,即得方程式之圖.此曲線名曰橢圓.

x	y	x	y
0	±2	0	2
1	1.88	-1	1.88
2	1.49	-2	1.49
3	0	-3	0
4	$\pm\frac{2}{3}\sqrt{-7}$	-4	$\frac{2}{3}\sqrt{-7}$

(x 之絕對值大於 3,則 y 爲虛數.)

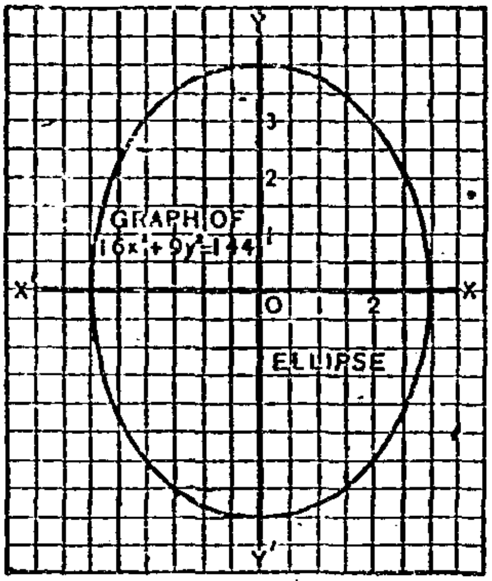


行星之軌道爲橢圓.彗星之軌道亦有爲橢圓者.

例四. 試圖寫方程式 $16x^2+9y^2=144$.

解方程式求 y, $y=\pm\frac{4}{3}\sqrt{9-x^2}$.

作以下諸點:



x	y	x	y
0	± 4	0	± 4
1	± 3.77	-1	± 3.77
2	± 2.98	-2	± 2.8
3	0	-3	0
4	$\pm\frac{4}{3}\sqrt{-7}$	-4	$\pm\frac{4}{3}\sqrt{-7}$

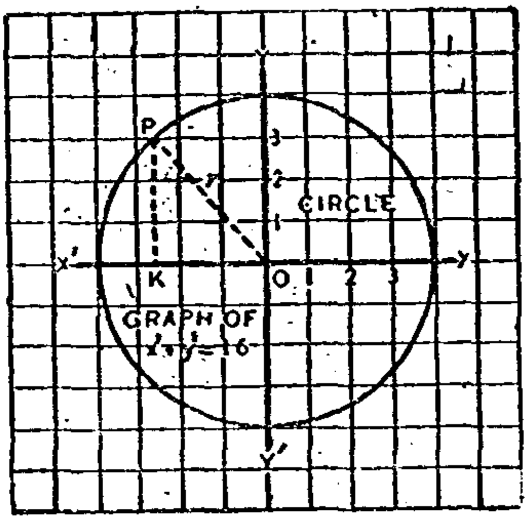
(x 之絕對值大於 3,則 y 爲虛數.)

以曲線聯之,亦得一橢圓爲所求之圖.

凡方程式爲 $a^2x^2+b^2y^2=c$ 之形者,其圖爲一橢圓.

例五. 試圖寫方程式 $x^2+y^2=16$.

解方程式求 y, $y=\pm\sqrt{16-x^2}$.



作以下諸點:

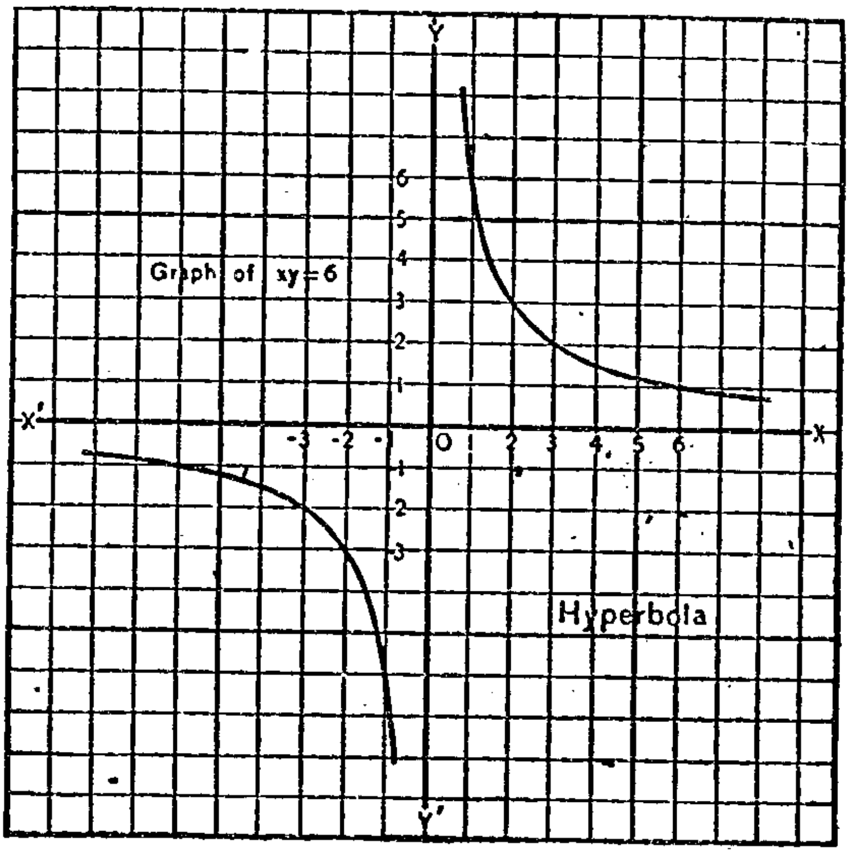
x	y	x	y
0	± 4	0	± 4
1	± 3.87	-1	± 3.87
2	± 3.46	-2	± 3.46
3	± 2.64	-3	± 2.64
4	0	-4	0
5	$\pm 3\sqrt{-1}$	-5	$\pm 3\sqrt{-1}$

以曲線聯之,得一渾圓(Circle)爲所求之圖,亦橢圓之一種也。

凡方程式爲$x^2+y^2=r^2$之形者,其圖爲平面上一圓。蓋從幾何學中定理,可證明:

直角三角形斜邊上正方形之面積,適爲其他二邊上正方形二面積之和。故凡圓心在原點之圓,其圓周上任何一點之坐標 x (如 OK), y (如 KP) 之平方和,等於圓之半徑 r (即 OP) 之平方也。

<u>例六.</u> 試圖寫方程式$xy=6$。



解方程式求 y, $y=6/x$.

作右列諸點:

x	y	x	y
$\frac{3}{4}$	8	$-\frac{3}{4}$	-8
1	6	-1	-6
2	3	-2	-3
3	2	-3	-2
4	$\frac{3}{2}$	-4	$-\frac{3}{2}$
5	$\frac{6}{5}$	-5	$-\frac{6}{5}$
6	1	-6	-1
8	$\frac{3}{4}$	-8	$-\frac{3}{4}$

以曲線聯之,卽得方程式之圖.

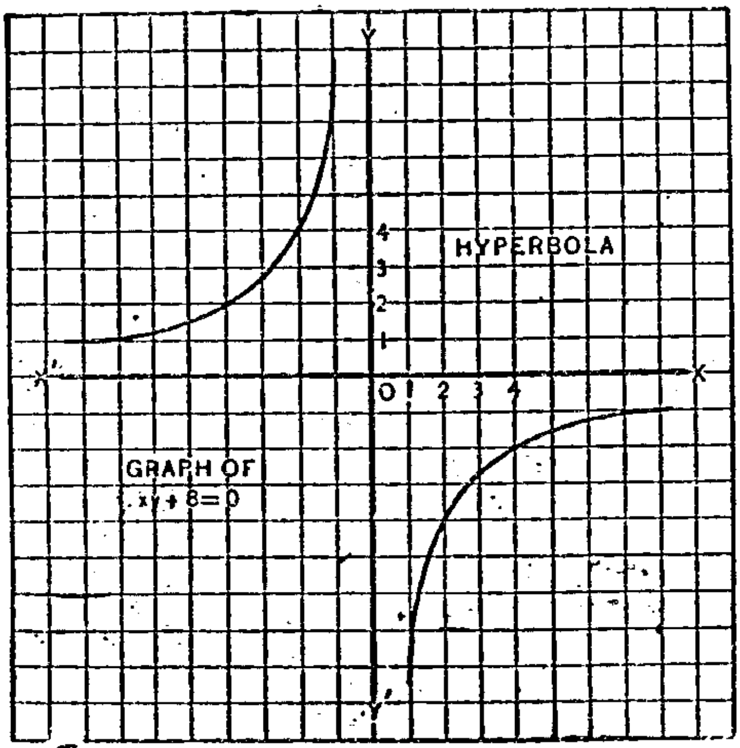
此曲線名曰雙曲線.

彗星之軌道有爲雙曲線者.

例七. 試圖寫方程式.

$$xy+8=0.$$

解方程式求 y, $y=-8/x$.



作以下諸點:

x	y	x	y
$\frac{3}{4}$	$\frac{32}{3}$	$-\frac{3}{4}$	$\frac{32}{3}$
1	-8	-1	8
2	-4	-2	4
3	$-\frac{8}{3}$	-3	$\frac{8}{3}$
4	-2	-4	2
5	$-\frac{8}{5}$	-5	$\frac{8}{5}$
6	$-\frac{4}{3}$	-6	$\frac{4}{3}$
8	-1	-8	1

以曲線聯之,亦得一雙曲線爲所求之圖.

凡方程式爲 $xy=k$ 之形者,其圖爲一雙曲線.

例八. 試圖寫方程式 $x^2-4y^2=6$.

作諸點而以曲線聯之,亦得一雙曲線爲所求之圖.

例九 試圖寫方程式 $4x^2-y^2+8=0$.

作諸點而以曲線聯之,亦得一雙曲線爲所求之圖.

凡方程式爲 $a^2x^2-b^2y^2=c$ 之形者,其圖爲一雙曲線.

例十. 試圖寫方程式 $x^2-9y^2=0$.

此式可用析因數法寫作 $(x-3y)(x+3y)=0$;

即 $$x-3y=0 \text{ 或 } x+3y=0.$$

故其圖爲二直線.

例十一, 試圖寫方程式 $x^2+9y^2=0$.

此式之 (x, y), 止有 0, 0 爲實數値. x 不爲 0 時, y 爲虛數; y 不爲 0 時, x 爲虛數.

故其圖爲一點.

例十二. 試圖寫方程式 $x^2+9y^2=-1$.

此式之 (x, y), 不能同時爲實數.

故其圖無點可作.

練習第九十

試圖寫以下各方程式,並舉各圖之名:

1. $x^2=4$.　　2. $xy=8$.

3. $x^2+y^2=25$.　　4. $y^2+2x=0$.

5. $xy=-12.$ 6. $x^2+y^2-10=0.$

7. $9x^2+16y^2=144.$ 8. $xy+6=0.$

9. $x^2-y^2=16.$ 10. $x^2-y^2+25=0.$

11. $4x^2-9y^2=36.$ 12. $25x^2+9y^2=225.$

13. $y^2+3y+2=0.$ 14. $x^2-5x+6=0.$

15. $x^2+y^2=0.$ 16. $x^2+y^2+12=0.$

17. $y=x^2-3x+2.$ 18. $x^2-6x+9=y.$

19. $y^2+8x+4y=20.$ 20. $6+5y+2x=y^2.$

197. 圖之分類. 綜觀以上諸款,可作方程式圖形一覽表如下:

I. 一元方程式之圖,爲直線上之點: 一次者一點;二次者二點(其具有特別情形者,參觀前之變例);………

II. 二元方程式之圖,爲平面上之線: 一次者直線;二次者或爲拋物線,或爲橢圓,或爲雙曲線,總稱二次曲線(其具有特別情形者,參觀前之變例);………

III. 三元方程式之圖爲空間之面: 一次者平面;………

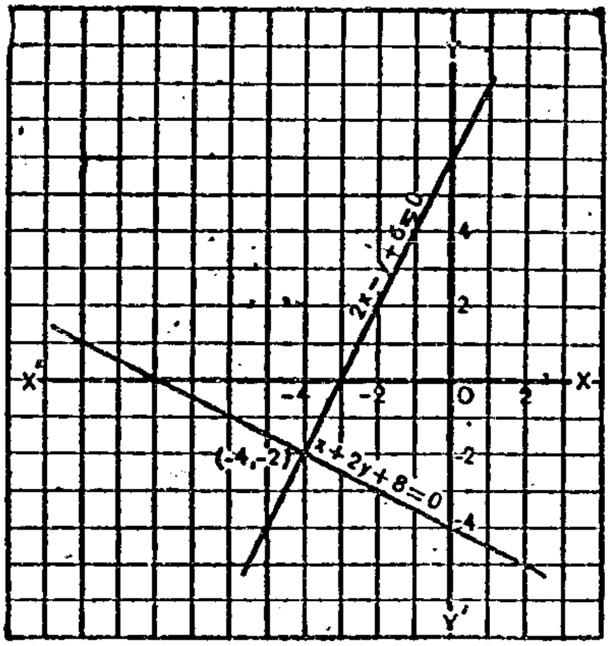
二元方程式之圖,爲用特廣,以下諸款當專論之.

第十五章

圖解方程式法

198. 線之交點. 今有二個含x, y之方程式於此,解之可知x, y有無同時適合於二式之值.設二式中(x, y)有公共之實數值,則以其值爲坐標之點必爲二式之圖所公有之點,卽二線之交點(Point of Intersection)也.反之,設二式中(x, y)無公共之實數值,則二線不能有交點.

199. 直線交直線. 二方程式爲$Ax+By+C=0$之形者,其圖均爲直線.解二式,常得根一組;$x=x_1$, $y=y_1$.故二線常有一交點$P_1:(x_1, y_1)$.



例一. 試解:

$$\left.\begin{array}{l}2x-y+6=0\\x+2y+8=0\end{array}\right\}\quad\begin{array}{l}(1).\\(2)\end{array}$$

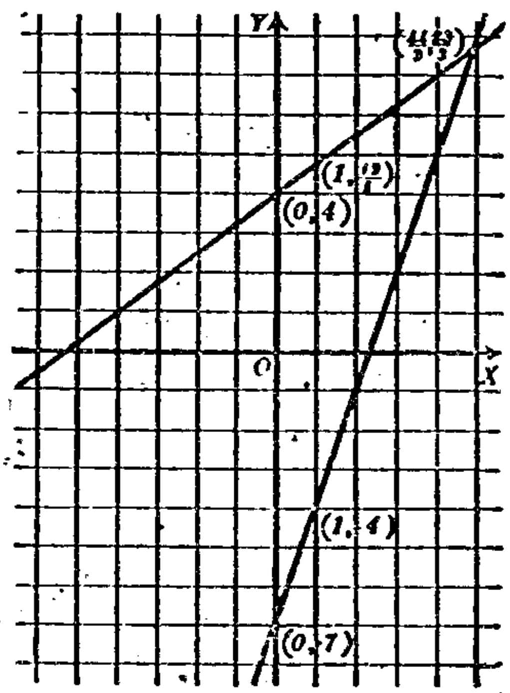
而圖寫之.

此爲聯立一次方程式.用消去法解之,得根一組:

$x=-4, y=-2.$

兩式中令 x, y 迭相爲 0，知 (1) 之圖爲過 (0, 6), (−3, 0) 之直線，(2) 之圖爲過 (0, −4), (−8, 0)之直線；二線交於(−4, −2)。

例二. 試解:
$$\left.\begin{aligned}3x-y-7&=0\\3x-4y+16&=0\end{aligned}\right\}\qquad\begin{matrix}(1)\\(2)\end{matrix}$$



而圖寫之。

解方程式，得根一組：

$x=44/9,\ y=23/3.$

二式之圖：(1) 爲過 (0, −7), (1, −4) 之直線，(2) 爲過 (0, 4), $(1, \frac{19}{4})$ 之直線；二線交於 $(\frac{44}{9}, \frac{23}{3})$.

平面上二直線亦有不相交者；試解其方程式，亦不能得根。其例如下；

例三. 試解；
$$\left.\begin{aligned}2x-y+6&=0\\2x-y+5&=0\end{aligned}\right\}\qquad\begin{matrix}(1)\\(2)\end{matrix}$$

而圖寫之。

(1) − (2)，得不可通之結果 $1=0$. 此足證二式中 (x, y) 無公共之值，故不能視爲各表同一之數也。

二式之圖: (1)爲過 (0,6), (−3,0) 之直線, (2) 爲過 (0,5), (−3, −1)之直線; 二線平行而不相交.

例四. 試解:
$$\left.\begin{aligned} 3x-\ y-7&=0 \\ 6x-2y-7&=0 \end{aligned}\right\}\qquad \begin{aligned}(1)\\(2)\end{aligned}$$

而圖寫之.

(2) − (1) ·2, 得不可通之結果 5=0. 故二式中 (x, y) 無公共之值.

二式之圖:(1) 爲過 (0, −7),(1, −4) 之直線, (2)爲過 $(0, -4\frac{1}{2})$, $(1,-1\frac{1}{2})$ 之直線; 二線平行而不相交.

練習第九十一

試解以下各組方程式而圖寫之:

1. $\left.\begin{aligned} x+3y&=2 \\ 2x+5y&=3 \end{aligned}\right\}$

2. $\left.\begin{aligned} 2x+3y&=6 \\ 7x+\ y&=2 \end{aligned}\right\}$

3. $\left.\begin{aligned} x+y&=5 \\ 3x+y&=1 \end{aligned}\right\}$

4. $\left.\begin{aligned} x-3y&=-7 \\ 4x+y&=11 \end{aligned}\right\}$

5. $\left.\begin{aligned} 3x-2y&=1 \\ 3x+2y&=5 \end{aligned}\right\}$

6. $\left.\begin{aligned} 3x-7y&=9 \\ x+2y&=3 \end{aligned}\right\}$

7. $\left.\begin{aligned} x+y&=-7 \\ 2x-3y&=6 \end{aligned}\right\}$

8. $\left.\begin{aligned} 2x+y&=3 \\ 8x-7y&=1 \end{aligned}\right\}$

9. $\left.\begin{aligned} 2x-5y&=0 \\ x-y&=3 \end{aligned}\right\}$ 10. $\left.\begin{aligned} x+2y&=-10 \\ 2x-y&=0 \end{aligned}\right\}$

11. $\left.\begin{aligned} x+y&=-4 \\ 4x-3y&=5 \end{aligned}\right\}$ 12. $\left.\begin{aligned} x-y&=-4 \\ 2x+6y&=16 \end{aligned}\right\}$

13. $\left.\begin{aligned} x-y&=1 \\ 2x-4y&=-16 \end{aligned}\right\}$ 14. $\left.\begin{aligned} 2x+6y&=-2 \\ 3x+y&=2 \end{aligned}\right\}$

15. $\left.\begin{aligned} x-y&=2 \\ 4x-5y&=9 \end{aligned}\right\}$ 16. $\left.\begin{aligned} x+y&=5 \\ 4x-2y&=28 \end{aligned}\right\}$

17. $\left.\begin{aligned} x-y&=7 \\ 2x-8y&=3 \end{aligned}\right\}$ 18. $\left.\begin{aligned} 3x+2y&=9 \\ 8x-y&=2 \end{aligned}\right\}$

19. $\left.\begin{aligned} 6x-5y&=5 \\ 2x+3y&=-20 \end{aligned}\right\}$ 20. $\left.\begin{aligned} 10x+6y&=37 \\ 14x-2y&=-31 \end{aligned}\right\}$

21. $\left.\begin{aligned} 8x+2y&=3 \\ 4x+y&=8 \end{aligned}\right\}$ 22. $\left.\begin{aligned} 2x+6y&=1 \\ x+3y&=7 \end{aligned}\right\}$

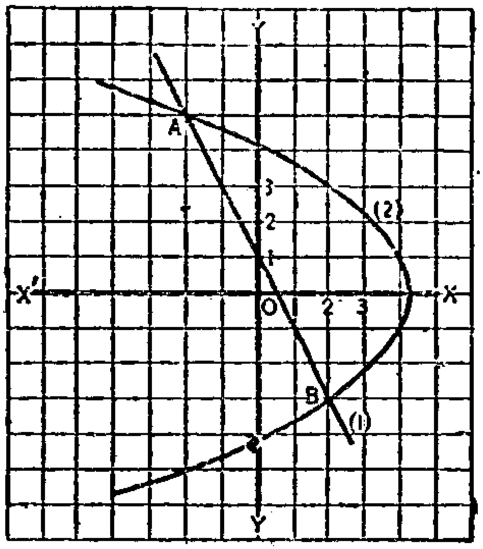
23. $\left.\begin{aligned} x-3y-2&=0 \\ 5x-15y+1&=0 \end{aligned}\right\}$ 24. $\left.\begin{aligned} 2x+y-3&=0 \\ 4x+2y-7&=0 \end{aligned}\right\}$

200. **直線交二次曲線.** 二方程式一爲 $Ax+By+C=0$ 之形,一爲 $Ax^2+Bxy+Cy^2+Dx+Ey+F=0$ 之形.則其圖一爲直線,一爲二次曲線.解二式,常得根二組: $x=x_1, y=y_1$; $x=x_2, y=y_2$. 設二組之值皆爲實數,則二線

有二交點 P_1: (x_1, y_1), P_2: (x_2, y_2).

例一. 試解:
$$\left.\begin{aligned} 2x+y&=1 \\ y^2+4x&=17 \end{aligned}\right\} \quad \begin{aligned}(1)\\(2)\end{aligned}$$

而圖寫之.



此為一次與二次聯立之方程式.用代入法解之,得根二組:

$$\left.\begin{aligned} x&=-2 \\ y&=5 \end{aligned}\right\}, \quad \left.\begin{aligned} x&=2 \\ y&=-3 \end{aligned}\right\}.$$

二式之圖: (1) 為直線, (2) 為拋物線;二線交於二點:

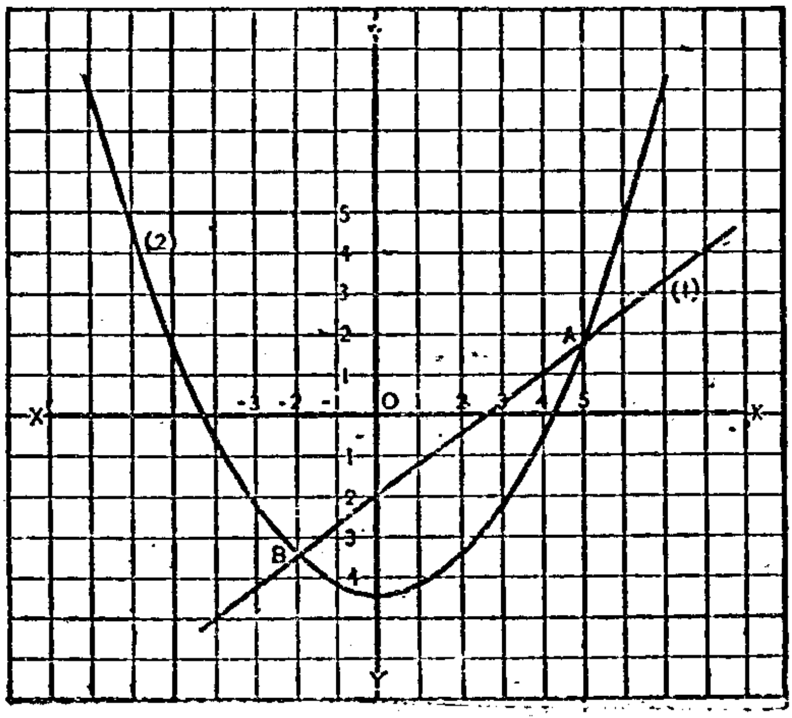
A: $(-2, 5)$,

B: $(2, -3)$.

例二. 試解:

$$\left.\begin{aligned} 3x-4y&=8 \\ x^2&=4y+18 \end{aligned}\right\} \begin{aligned}(1)\\(2)\end{aligned}$$

而圖寫之.



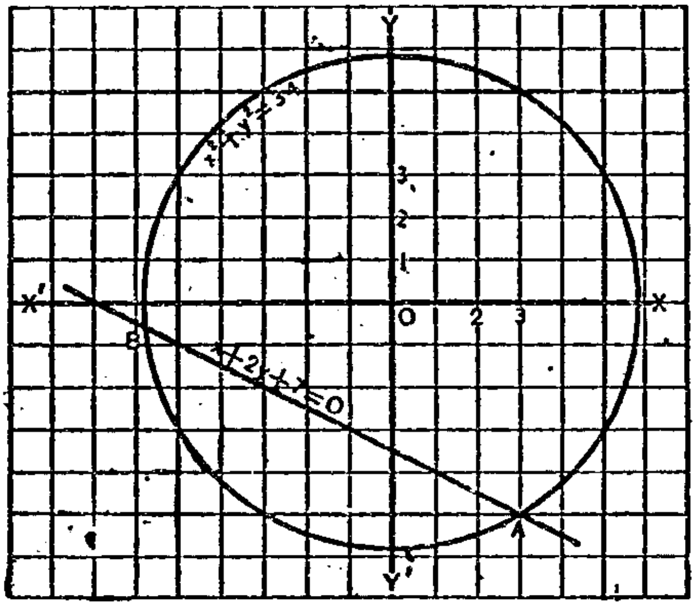
解方程式,得根二組:

$$\left.\begin{array}{l}x=5\\y=1\frac{3}{4}\end{array}\right\},\quad\left.\begin{array}{l}x=-2\\y=-3\frac{1}{2}\end{array}\right\}.$$

二式之圖:(1)爲直線,(2)爲拋物線;二線交於二點:

$$A:(5,1\tfrac{3}{4}),\ B:(-2,-3\tfrac{1}{2}).$$

例三. 試解:
$$\left.\begin{array}{l}x^2+y^2=34\\x+2y+7=0\end{array}\right\}\qquad\begin{array}{r}(1)\\(2)\end{array}$$



而圖寫之.

解方程式,得根二組:

$$\left.\begin{array}{l}x=3\\y=-5\end{array}\right\},\quad\left.\begin{array}{l}x=-5\frac{4}{5}\\y=-\frac{3}{5}\end{array}\right\}.$$

二式之圖:(1)爲圓,(2)爲直線;二線交於二點:

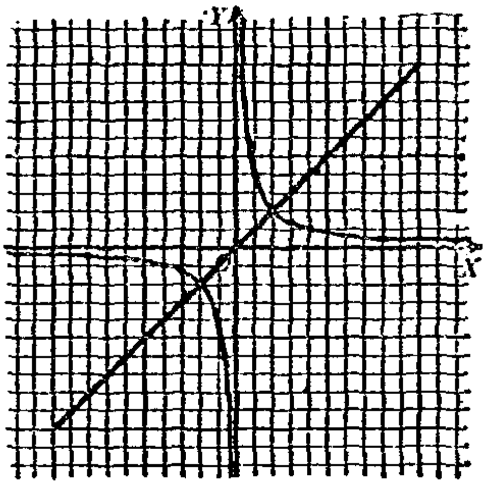
$$A:(3,-5),\ B:(-5\tfrac{4}{5},-\tfrac{3}{5}).$$

例四. 試解;
$$\left.\begin{array}{l}xy=4\\x=y\end{array}\right\}\qquad\begin{array}{r}(1)\\(2)\end{array}$$

而圖寫之.

解方程式,得根二組;

$$\left.\begin{array}{l}x=2\\y=2\end{array}\right\};\quad\left.\begin{array}{l}x=-2\\y=-2\end{array}\right\}.$$



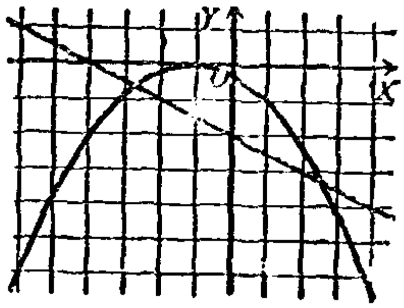
二式之圖:(1)爲雙曲線,(2)爲直線;二線交於二點,

$A:(2,2)$, $B:(-2,-2)$.

__例五.__ 試解:

$$\left.\begin{aligned} x^2+2x+4y+1=0 \\ x+2y+4=0 \end{aligned}\right\} \quad \begin{aligned}(1)\\(2)\end{aligned}$$

而圖寫之.



解方程式,得根二組:

$$\left.\begin{aligned} x&=\pm\sqrt{7} &&= 2.6 \text{ 或 } -2.6 \\ y&=-2 \quad \sqrt{\tfrac{7}{2}} &&= -3.3\text{或 } -.7 \end{aligned}\right\}$$

二式之圖:(1)爲拋物線,(2)爲直線;二線交於二點:

$A:(2.6,-3.3)$, $B:(-2.6,-.7)$.

__例六.__ 試解:

$$\left.\begin{aligned} x+y=7 \\ xy=6 \end{aligned}\right\} \quad \begin{aligned}(1)\\(2)\end{aligned}$$

而圖寫之.

(1)自乘, $x^2+2xy+y^2=49.$ (3)

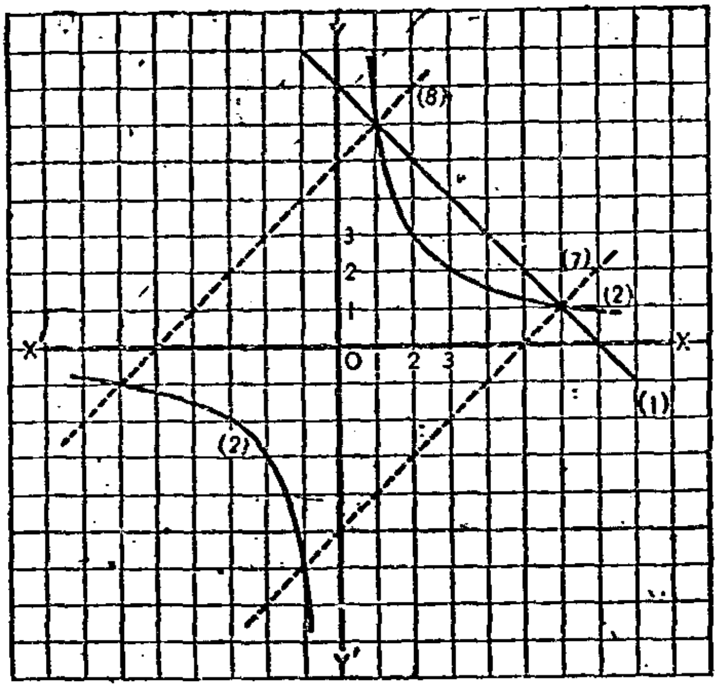
(2)·4, $4xy\quad=24.$ (4)

(3)－(4), $x^2-2xy+y^2=25.$ (5)

(5)開方, $x-y=\pm5.$ (6)

即 $$x-y=5, \tag{7}$$

或 $$x-y=-5. \tag{8}$$



從 (1) 與 (7), 得方程式之根一組:

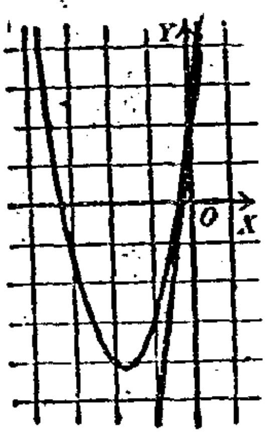
$$x=6,\ y=1.$$

從 (1) 與 (8), 又得一組:

$$x=1,\ y=6.$$

二式之圖: (1)為直線,(2)為雙曲線; 二線交於二點: (6, 1), (1, 6). 此二點亦為 (1) 與 (7) (8)之交點.

設方程式之二組根相等: $x=x_1=x_2$, $y=y_1=y_2$; 則其圖之二交點亦相重: $P_1=P_2$, 例如下:



例七. 試解:

$$\left.\begin{aligned} 7x-y+2&=0 \quad (1)\\ 2x^2+7x-y+2&=0 \quad (2)\end{aligned}\right\}$$

而圖寫之.

$\{(2)-(1)\}/2$, 得 $x^2=0$, 即 x 之二值均為 0. 代入 (1), 得 y 之二值均為 2,

故方程式之根二組均爲$x=0, y=2$.

二式之圖: (1) 爲直線, (2) 爲拋物線, 二線相切於(0, 2)(此點可視爲相重二點).

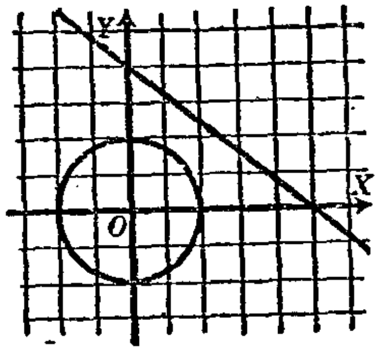
設方程式之二組根爲虛數,則其圖之交點不可作.

例如下:

例八. 試解:

$$\left.\begin{array}{r} 4x+5y=20 \\ x^2+y^2=4 \end{array}\right\} \qquad \begin{array}{r}(1)\\(2)\end{array}$$

而圖寫之.



解方程式,得虛根二組:

$$\left.\begin{array}{l} x=\frac{10}{41}(8\pm\sqrt{-59}) \\ y=\frac{4}{41}(25\mp 2\sqrt{-59}) \end{array}\right\}$$

二式之圖:(1)爲直線,(2)爲圓;二線無交點.

直線與二次曲線,除上種情形外,尚有僅交於一點或不相交者.試解其方程式,祇能得其一根,或二根均不可得.其例如下:

例九. 試解:

$$\left.\begin{array}{r} xy=4 \\ y=2 \end{array}\right\} \qquad \begin{array}{r}(1)\\(2)\end{array}$$

而圖寫之:

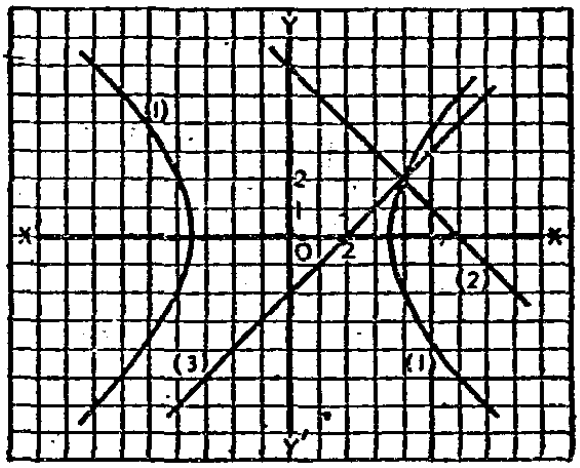
解方程式,僅得根一組: $x=2, y=2$; 不能更得他根.

二式之圖:(1)爲雙曲線,(2)爲直線;二線祇有一交點:(2,2).

例十. 試解:

$$\left.\begin{aligned} x^2-y^2&=12 \qquad (1)\\ x+y&=6 \qquad (2)\end{aligned}\right\}$$

而圖寫之.



除(1)以(2),得

$$x-y=2 \qquad (3)$$

從(2)與(3),得方程式之根一組:

$$x=4,\ y=2;$$

此外更無他根.

二式之圖:(1)爲雙曲線,(2)爲直線;二線祇交於一點:(4,2).此點亦爲(2)與(3)之交點.

例十一. 試解:

$$\left.\begin{aligned} xy&=4 \qquad (1)\\ y&=0 \qquad (2)\end{aligned}\right\}$$

而圖寫之.

二式中(x, y)不能有公共之値,卽二組根均不可得.

二式之圖:(1)爲雙曲線,(2)爲直線;二線不相交.

練習第九十二

試解以下各組方程式而圖寫之:

1. $\left.\begin{array}{l} x+y=5 \\ xy=4 \end{array}\right\}$

2. $\left.\begin{array}{l} x-y=5 \\ xy=26 \end{array}\right\}$

3. $\left.\begin{array}{l} xy=1 \\ x+y=2 \end{array}\right\}$

4. $\left.\begin{array}{l} 3x-y=5 \\ xy-x=0 \end{array}\right\}$

5. $\left.\begin{array}{l} x^2+y^2=50 \\ 9x+7y=70 \end{array}\right\}$

6. $\left.\begin{array}{l} x+2y=5 \\ x^2+y^2=5 \end{array}\right\}$

7. $\left.\begin{array}{l} x^2+y^2=40 \\ x-3y=0 \end{array}\right\}$

8. $\left.\begin{array}{l} 2x-3y=4 \\ x^2-y^2=0 \end{array}\right\}$

9. $\left.\begin{array}{l} x^2=8y \\ 2x-y=8 \end{array}\right\}$

10. $\left.\begin{array}{l} xy=12 \\ 2x+3y=18 \end{array}\right\}$

11. $\left.\begin{array}{l} x:y=9:4 \\ x:12=12:y \end{array}\right\}$

12. $\left.\begin{array}{l} x-y=1 \\ x^2-4y=0 \end{array}\right\}$

13. $\left.\begin{array}{l} 5x^2+y=3xy \\ 2x-y=0 \end{array}\right\}$

14. $\left.\begin{array}{l} x^2-xy+y^2=7 \\ 2x-3y=0 \end{array}\right\}$

15. $\left.\begin{array}{l} x^2+y^2=25 \\ 4x-3y=25 \end{array}\right\}$

16. $\left.\begin{array}{l} (x+y)(x-2y)=7 \\ x-y=3 \end{array}\right\}$

17. $\left.\begin{array}{l} 3x^2-4y=5x-2y^2 \\ 3x+4y=10 \end{array}\right\}$

18. $\left.\begin{array}{l} x^2-y^2=8 \\ x+y=2 \end{array}\right\}$

19. $\left.\begin{array}{l} xy+72=6(2x+y) \\ x/y=2/3 \end{array}\right\}$

20. $\left.\begin{array}{l} x^2+y=y^2+x-18 \\ x:y=2:3 \end{array}\right\}$

21. $\left.\begin{array}{l} x^2+y^2=13 \\ \dfrac{x+y}{x-y}=8 \end{array}\right\}$

22. $\left.\begin{array}{l} \dfrac{10}{x+2}+\dfrac{9}{y-1}=5 \\ x-1:y=2:4 \end{array}\right\}$

23. $\left.\begin{array}{l} \dfrac{x^2+y+1}{y^2+x+1}=\dfrac{3}{2} \\ x-y=1 \end{array}\right\}$

24. $\left.\begin{array}{l} \dfrac{1+x+x^2}{1+y+y^2}=3 \\ x+y=6 \end{array}\right\}$

25. $\left.\begin{array}{l} x(x-y)-5y=6 \\ \dfrac{x}{x-y}=3\frac{1}{2} \end{array}\right\}$

26. $\left.\begin{array}{l} \dfrac{3x-2}{y+5}+\dfrac{y}{x}=2 \\ x-y=4 \end{array}\right\}$

27. $\left.\begin{array}{l} \dfrac{8}{x}+\dfrac{3}{y}=3 \\ 5(y-1)=2(x+1) \end{array}\right\}$

28. $\left.\begin{array}{l} \dfrac{2x-y+1}{x-2y+1}=\dfrac{8}{3} \\ x^2-3xy+y^2=5 \end{array}\right\}$

29. $\left.\begin{array}{l} 7(x+5)^2-9(y+4)^2=118 \\ x-y=1 \end{array}\right\}$

30. $\left.\begin{array}{l} 2x^2-5xy+x^2+10x+12y=100 \\ 2x-3y=1 \end{array}\right\}$

31. $\left.\begin{array}{l} x^2+2xy+y^2=7(x-y) \\ 2x-y=5 \end{array}\right\}$

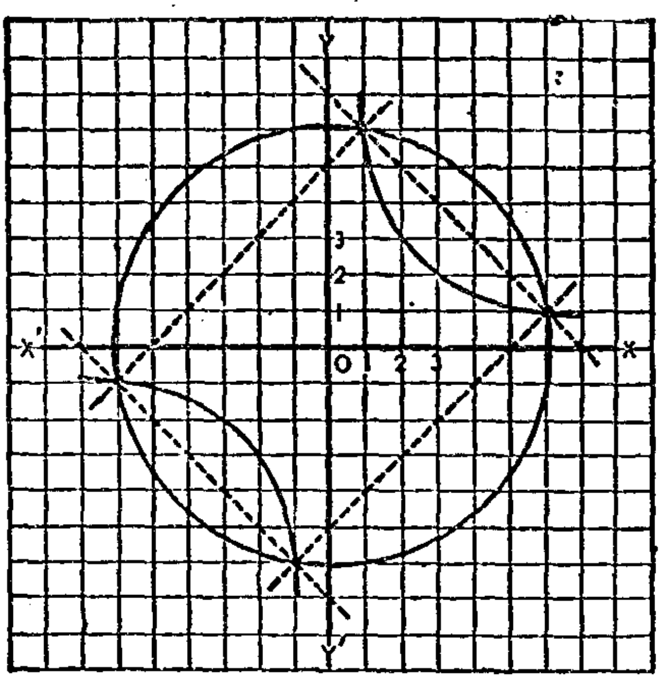
32. $\left.\begin{array}{l} \dfrac{4x+y-1}{2x+y-1}-\dfrac{4x+y-12}{2x+y-12}=2\frac{2}{5} \\ 3x+y=13 \end{array}\right\}$

201. 二次曲線交二次曲線. 二方程式為 $Ax^2+Bxy+Cy^2+Dx+Ey+F=0$ 之形者，其圖均為二次

曲線.解二式,常得根四組: $x=x_1,\ y=y_1$; $x=x_2,\ y=y_2$; $x=x_3,\ y=y_3$; $x=x_4,\ y=y_4$. 設四組之值皆為實數,則二線有四交點 $P_1:(x_1,y_1)$, $P_2:(x_2,y_2)$, $P_3:(x_3,y_3)$, $P_4:(x_4,y_4)$.

例一. 試解:
$$\left.\begin{aligned} x^2+y^2&=37 \quad (1)\\ xy&=6 \quad (2)\end{aligned}\right\}$$

而圖寫之.



(1)+(2)·2而開方,

得 $x+y=\pm7$, (3)

(1)−(2)·2而開方,

得 $x-y=\pm5$. (4)

從(3)與(4),可得方程式之根四組:

$$\begin{cases} x=1,\ 6,\ -1,\ -6;\\ y=6,\ 1,\ -6,\ -1.\end{cases}$$

二式之圖:(1)為圓,(2)為雙曲線;二曲線交於四點:

$A:(1,6)$, $B:(6,1)$, $C:(-1,-6)$, $D:(-6,-1)$.

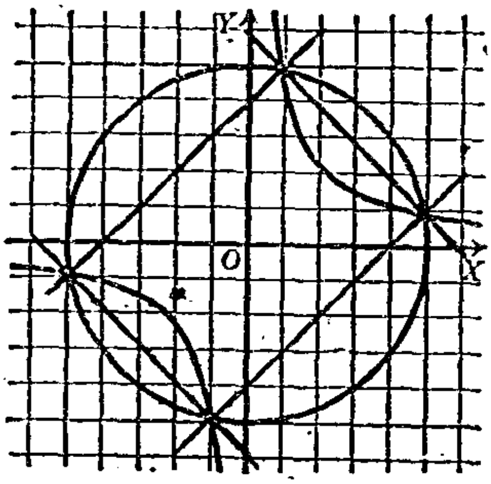
此四點亦為(3)與(4)四直線之交點.

例二. 試解:
$$\left.\begin{aligned} x^2+y^2&=25 \quad (1)\\ 2xy&=9 \quad (2)\end{aligned}\right\}$$

而圖寫之.

(1)+(2)而開方,得 $x+y=\pm\sqrt{34}$. (3)

(1)−(2)而開方,得 $x-y=\pm 4$. (4)



從(3)與(4),得方程式之根四組:

$x=\pm 2\pm\frac{\sqrt{34}}{2}$, $y=\mp 2\pm\frac{\sqrt{34}}{2}$;

即 $\left.\begin{array}{l}x=4.9\\y=\ .9\end{array}\right\}$ $\left.\begin{array}{l}x=\ .9\\y=4.9\end{array}\right\}$

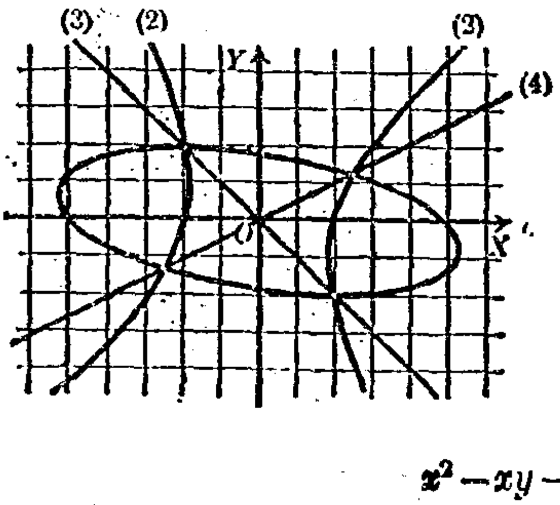
$\left.\begin{array}{l}x=-4.9\\y=-\ .9\end{array}\right\}$ $\left.\begin{array}{l}x=-\ .9\\y=-4.9\end{array}\right\}$.

二式之圖:(1)爲圓,(2)爲雙曲線;二曲線交於四點:

A:(4.9, .9), B:(.9, 4.9),

C:(−4.9, −.9), D:(−.9, −4.9).

此四點亦爲(3)與(4)之交點.



例三. 試解:

$$\left.\begin{array}{l}2x^2+2xy+7y^2=24\\2x^2-\ xy-\ y^2=8\end{array}\right\}\quad\begin{array}{l}(1)\\(2)\end{array}$$

而圖寫之.

消去不含 x, y 之項而析因數,可得

$$x^2-xy-2y^2=0;$$

即 $$x+y=0 \tag{3}$$

或 $$x-2y=0 \tag{4}$$

從(1)與(3)(4),可得方程式之根四組.

二式之圖:(1)爲橢圓,(2)爲雙曲線;二曲線交於四點.此四點亦爲(1)與(3)(4)之交點.

設方程式之四組根,有二組相等:$x=x_1=x_2, y=y_1=y_2$;則其圖之四交點有二點相重:$P_1=P_2$.設其他二組亦相等:$x=x_3=x_4, y=y_3=y_4$;則其他二交點亦相重:$P_3=P_4$.

例四. 試解:
$$\left.\begin{aligned} x^2+x^2&=9 \\ 9(x-1)^2+4y^2&=36 \end{aligned}\right\} \begin{aligned} &(1) \\ &(2) \end{aligned}$$

而圖寫之.

(2)−(1)·4,得 $$5x^2-18x+9=0.$$

析因數,得 $$(x-3)(5x-3)=0;$$

即 $$x-3=0 \text{ 或 } 5x-3=0;$$
$$\therefore\quad x=3 \text{ 或 } \tfrac{3}{5}.$$

以 3 代(1)之 x,得 $y^2=0$,即 y 之二值均爲0.

以 $\frac{3}{5}$ 代(1)之 x,得 $y=\pm\frac{6}{5}\sqrt{6}$.

故方程式之根四組爲
$$\begin{cases} x=3, & 3, & \frac{3}{5}, & \frac{3}{5}; \\ y=0, & 0, & \frac{6}{5}\sqrt{6}, & -\frac{6}{5}\sqrt{6}. \end{cases}$$

其中前二組相等.

二式之圖:(1)爲圓,(2)爲橢圓;二曲線交於$(\frac{3}{5}, \frac{6}{5}\sqrt{6})$及$(\frac{3}{5}, -\frac{6}{5}\sqrt{6})$二點而相切於$(3,0)$.

例五. 試解:
$$\left.\begin{aligned} x^2+y^2&=9 \qquad (1)\\ 9x^2+16y^2&=144 \qquad (2)\end{aligned}\right\}$$
而圖寫之.

$\{(2)-(1)\cdot 9\}/7$, 得 $y^2=9$, 卽 $y=\pm 3$.

任以3或-3代(1)之y, 得$x^2=0$, 卽x之二值均爲0.

故方程式之根四組爲
$$\left\{\begin{aligned} x&=0,\ 0,\ \ \ 0,\ \ \ 0; \qquad (1)\\ y&=3,\ 3,\ -3,\ -3. \qquad (2)\end{aligned}\right.$$
其中前二組及後二組各相等.

二式之圖:(1)爲圓,(3)爲橢圓;二曲線相切於$(0,3)$及$(0,-3)$二點.

設方程式之四組根,有二組爲虛數,則其圖之四交點,有二點不可作.設其他二組亦爲虛數,則其他二點亦不可作.

例六. 試解:
$$\left.\begin{aligned} 4y^2&=27x \qquad (1)\\ 9x^2-4y^2&=36 \qquad (2)\end{aligned}\right\}$$

而圖寫之.

解方程式,得根四組:

$$\begin{cases} x=4, & -1, \\ y=\pm 3\sqrt{3}, & \pm\frac{3}{2}\sqrt{-3}. \end{cases}$$

其中後二組為虛數.

二式之圖: (1)為拋物線, (2)為雙曲線;二曲線交於$(4,3\sqrt{3})$, $(4,-3\sqrt{3})$ 二點,其他二點不可作.

<u>例七.</u> 試解:

$$\left.\begin{aligned} x^2+y^2&=9 \\ 9(x-5)^2+4y^2&=36 \end{aligned}\right\} \begin{aligned} &(1) \\ &(2) \end{aligned}$$

而圖寫之.

解方程式,得根四組:

$$\begin{cases} x=3, & 3, & 15, & 15; \\ y=0, & 0, & 6\sqrt{-6}, & -6\sqrt{-6}; \end{cases}$$

其中二組相等,二組為虛數.

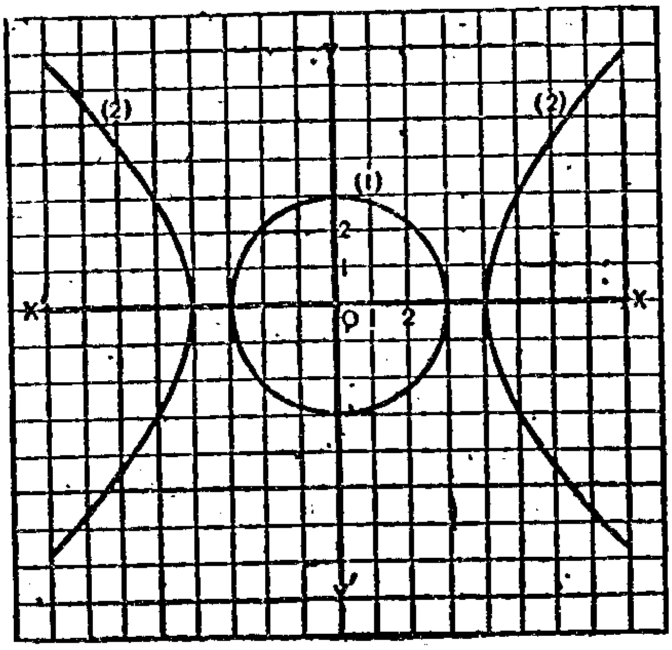
二式之圖: (1)為圓,(2)為橢圓;二曲線相切於$(3,0)$,其他二交點不可作.

<u>例八.</u> 試解:

$$\left.\begin{aligned} x^2+y^2&=9 \\ x^2-y^2&=16 \end{aligned}\right\} \begin{aligned} &(1) \\ &(2) \end{aligned}$$

而圖寫之.

解方程式,得虛根四組:



$$\begin{cases} x=\frac{5}{2}\sqrt{2},\ \frac{5}{2}\sqrt{2},\\ \quad -\frac{5}{2}\sqrt{2},-\frac{5}{2}\sqrt{2},\\ y=\sqrt{-\frac{7}{2}},-\sqrt{-\frac{7}{2}},\\ \quad -\sqrt{-\frac{7}{2}},\sqrt{-\frac{7}{2}}. \end{cases}$$

二式之圖：(1)爲圓，(2)爲雙曲線；二曲線之四交點，均不可作.

二個二次曲線，除上種情形外，尚有僅交於三點，或二點，或一點，或不相交者.試解其方程式，祇能得根三組，或二組，或一組，或并一組而不可得.其例如下：

例九. 試解：

$$\left.\begin{aligned} x^2-y^2&=9 \\ (x+4)(x-y-3)&=0 \end{aligned}\right\} \qquad \begin{aligned} &(1)\\ &(2) \end{aligned}$$

而圖寫之.

(2)可析爲二方程式，　$x+4=0,$　　(3)

或　　$x-y-3=0.$　　(4)

從(1)與(3)，得根二組：　$x=-4,\ y=\pm\sqrt{7}.$

又從(1)與(4)，得根一組：　$x=3,\quad y=0.$

此外更無他根.

二式之圖：(1)爲雙曲線，(2)爲二直線；(1)(2)祇有

三交點:$(-4,\sqrt{7})$, $(-4,-\sqrt{7})$, $(3,0)$.

<u>例十.</u> 試解:

$$\left.\begin{aligned} x^2+y^2&=9 \\ (x-4)^2+y^2&=9 \end{aligned}\right\} \qquad \begin{aligned}&(1)\\&(2)\end{aligned}$$

而圖寫之.

解方程式,得根二組: $x=2,\ y=\sqrt{5}$; $x=2,\ y=-\sqrt{5}$. 此外更無他根.

二式之圖: (1) 爲圓; (2) 亦爲圓; 二圓祇有二交點: $(2,\sqrt{5})$, $(2,-\sqrt{5})$.

<u>例十一.</u> 試解:

$$\left.\begin{aligned} x^2+y^2&=9 \\ (x-6)^2+y^2&=9 \end{aligned}\right\} \qquad \begin{aligned}&(1)\\&(2)\end{aligned}$$

而圖寫之.

解方程式,得相等根二組: $x=3, y=0$. 此外更無他根.

二式之圖爲相切於 $(3,0)$ 之二圓.

<u>例十二.</u> 試解:

$$\left.\begin{aligned} x^2+y^2&=9 \\ (x-8)^2+y^2&=9 \end{aligned}\right\} \qquad \begin{aligned}&(1)\\&(2)\end{aligned}$$

而圖寫之.

解方程式,得虛根二組: $x=4, y=\pm\sqrt{-7}$. 此外更無他根.

二式之圖爲不相交之二圓.

例十三. 試解:
$$\left.\begin{array}{r} x^2-y^2=12 \\ x^2-y^2-6x+6y=6 \end{array}\right\} \quad \begin{array}{r} (1) \\ (2) \end{array}$$

解方程式,得根一組: $x=6\frac{1}{2}, y=5\frac{1}{2}$.

此外更無他根.

二式之圖: (1)爲雙曲線, (2)亦爲雙曲線二曲線祇有一交點: $(6\frac{1}{2}, 5\frac{1}{2})$.

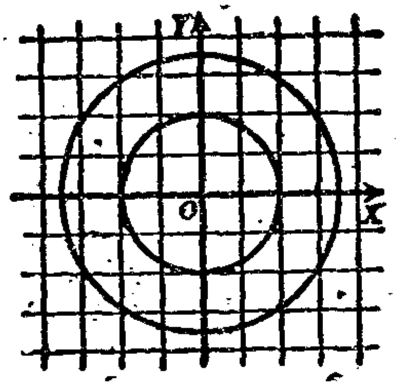
例十四. 試解:
$$\left.\begin{array}{r} xy=1 \\ xy=-1 \end{array}\right\} \quad \begin{array}{r} (1) \\ (2) \end{array}$$

而圖寫之.

(1)−(2), 得 $0=2$.

此足見二式中之 x, y 不能有公共之值.

二式之圖爲不相交之二雙曲線.



例十五. 試解:
$$\left.\begin{array}{r} x^2+y^2=4 \\ 4x^2+4y^2=49 \end{array}\right\} \quad \begin{array}{r} (1) \\ (2) \end{array}$$

(2) − (1)·4; 得 $0=33$.

故二式中之 x, y 不能有公共之值.

二式之圖爲同心二圓.

練習第九十三

試解以下各組方程式而圖寫之:

1. $$\left.\begin{aligned}&2x^2-3y^2=6\\&3x^2-2y^2=19\end{aligned}\right\}$$

2. $$\left.\begin{aligned}&x(y-1)=10\\&y(x-1)=12\end{aligned}\right\}$$

3. $$\left.\begin{aligned}&x^2-xy+y^2=0\\&xy=x+y\end{aligned}\right\}$$

4. $$\left.\begin{aligned}&5x^2+2y^2=22\\&3x^2-5y^2=7\end{aligned}\right\}$$

5. $$\left.\begin{aligned}&x+xy=35\\&y+xy=32\end{aligned}\right\}$$

6. $$\left.\begin{aligned}&3x^2-2y^2=9\\&3x^2-2y^2=16\end{aligned}\right\}$$

7. $$\left.\begin{aligned}&x^2+xy+y^2=2\\&x^2-xy+y^2=6\end{aligned}\right\}$$

8. $$\left.\begin{aligned}&x+xy+y=5\\&x^2+xy+y^2=7\end{aligned}\right\}$$

9. $$\left.\begin{aligned}&5x+y+3=2xy\\&xy=2x-y+9\end{aligned}\right\}$$

10. $$\left.\begin{aligned}&x^2-xy+y^2=37\\&x^2-y^2=40\end{aligned}\right\}$$

11. $$\left.\begin{aligned}&(x+y)(8-x)=10\\&(x+y)(5-y)=20\end{aligned}\right\}$$

12. $$\left.\begin{aligned}&(x+y)^2=3x^2-2\\&(x-y)^2=3y^2-11\end{aligned}\right\}$$

13. $$\left.\begin{aligned}&4x^2-9y^2=0\\&4x^2+y^2=8(x+y)\end{aligned}\right\}$$

14. $$\left.\begin{aligned}&3xy-2(x+y)=28\\&2xy-3(x+y)=2\end{aligned}\right\}$$

15. $$\left.\begin{aligned}&x^2+y^2+x+y=18\\&x^2-y^2+x-y=6\end{aligned}\right\}$$

16. $$\left.\begin{aligned}&3x^2-2y^2=6(x-y)\\&xy=0\end{aligned}\right\}$$

17. $$\left.\begin{aligned}&x^2+y^2-5(x+y)=8\\&x^2+y^2-3(x+y)=2\end{aligned}\right\}$$

18. $$\left.\begin{aligned}&x^2-xy+y^2=13(x-y)\\&xy=12\end{aligned}\right\}$$

19. $$\left.\begin{aligned}&2x^2-3xy+5y-5=0\\&(x-2)(y-1)=0\end{aligned}\right\}$$

20. $$\left.\begin{aligned}&\frac{1}{x}+\frac{1}{y}=5\\&x-y=3\end{aligned}\right\}$$

21. $\left.\begin{array}{l}\dfrac{x}{y}-\dfrac{y}{x}=\dfrac{16}{15}\\ 3x^2+5y^2=120\end{array}\right\}$

22. $\left.\begin{array}{l}\dfrac{x}{y}+\dfrac{y}{x}=\dfrac{25}{12}\\ x^2-y^2=28\end{array}\right\}$

23. $\left.\begin{array}{l}x\left(1+\dfrac{x}{y}\right)=2\\ y\left(1+\dfrac{y}{x}\right)=3\end{array}\right\}$

24. $\left.\begin{array}{l}x=10\cdot\dfrac{y-1}{y+1}\\ y=\dfrac{9}{2}\cdot\dfrac{x-1}{x+1}\end{array}\right\}$

25. $\left.\begin{array}{l}\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}=\dfrac{5}{6}\\ \dfrac{1}{x+2}+\dfrac{1}{y+1}=\dfrac{1}{2}\end{array}\right\}$

26. $\left.\begin{array}{l}\dfrac{4}{x}-\dfrac{3}{y}=1\\ \dfrac{5}{x+3}-\dfrac{2}{y-1}=2\end{array}\right\}$

27. $\left.\begin{array}{l}x^2+xy=15\\ y^2+xy=10\end{array}\right\}$

28. $\left.\begin{array}{l}x^2+3xy=54\\ xy+4y^2=115\end{array}\right\}$

29. $\left.\begin{array}{l}x^2+y^2=5\\ 2xy-y^2=3\end{array}\right\}$

30. $\left.\begin{array}{l}3x^2-5y^2=28\\ 3xy-4y^2=8\end{array}\right\}$

31. $\left.\begin{array}{l}3x^2-y^2=23\\ 2x^2-xy=12\end{array}\right\}$

32. $\left.\begin{array}{l}7xy-8x^2=10\\ 8y^2-9xy=18\end{array}\right\}$

33. $\left.\begin{array}{l}x^2-3xy+y^2+1=0\\ 3x^2-xy+3y^2=13\end{array}\right\}$

34. $\left.\begin{array}{l}x^2-2xy=21\\ xy+y^2=18\end{array}\right\}$

35. $\left.\begin{array}{r}x^2+4y^2-15x-30y+80=0\\ xy=6\end{array}\right\}$

36. $\left.\begin{array}{r}9x^2+y^2-63x-21y+128=0\\ xy=4\end{array}\right\}$

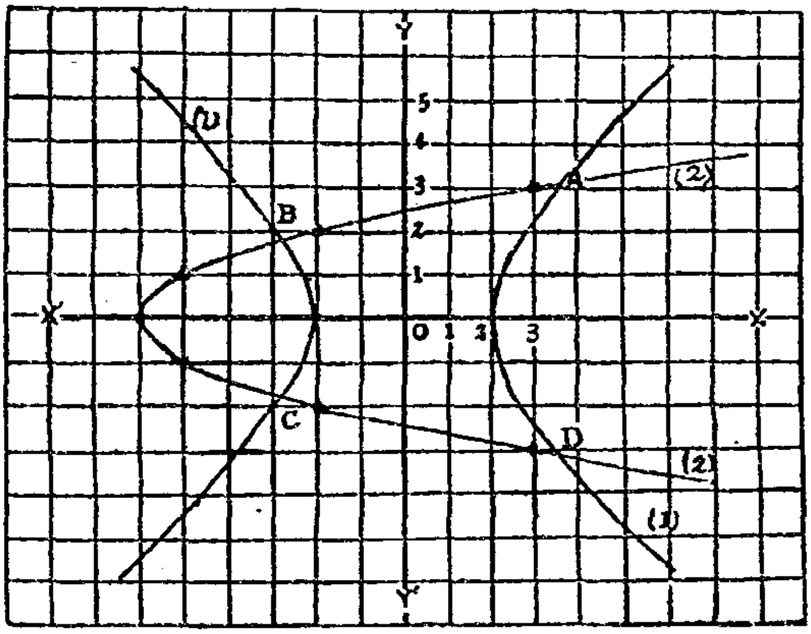
202. 方程式之圖解. 二方程式之圖有公共之點時,其點之坐標必為二式中 x, y 所公有之實數值. 故由二圖之各交點,可求二式之各組實根;是之謂方程式之圖解 (Graphical Solution). 方程式之不易以尋常代數法解之者,其實根往往可自其圖形得之.

例一. 試圖解:

$$x^2-y^2=4 \qquad (1)$$

$$y^2-x-6=0 \qquad (2)$$

作二式之圖:(1)雙曲線,(2)拋物線;得其交點 A, B, C, D.



以量長之單位度之,可得下列之結果:

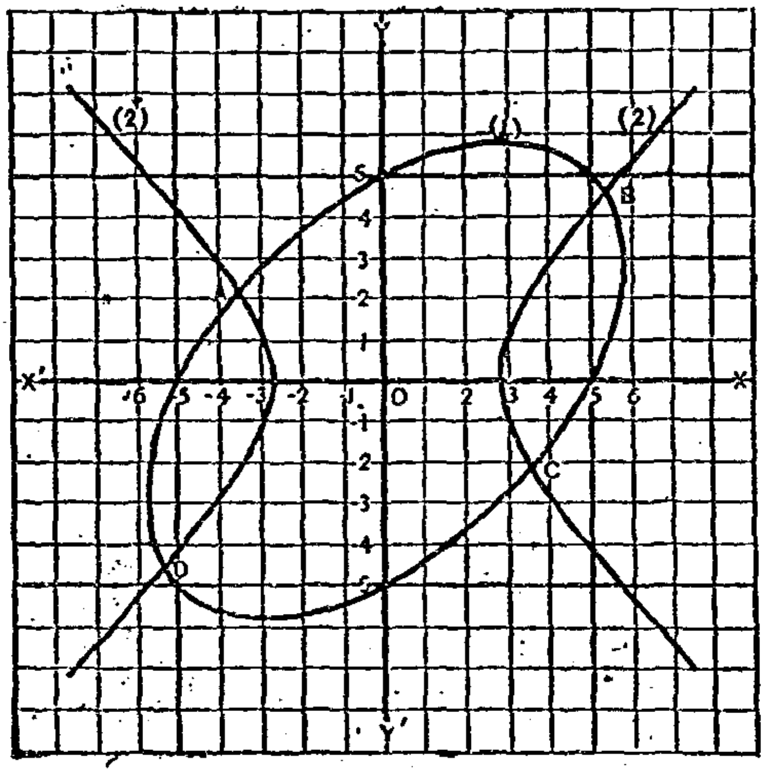
$$A\begin{cases}x=3.7,\\ y=3.1;\end{cases} \qquad B\begin{cases}x=-2.7,\\ y=\ \ 1.8;\end{cases}$$

$$C\begin{cases}x=-2.7,\\ y=-1.8,\end{cases} \qquad D\begin{cases}x=\ \ 3.7,\\ y=-3.1.\end{cases}$$

以上諸數,爲方程式四組實根之近似值.作圖時,宜力求精密;愈精密,則所得之結果愈近於其眞值.

例二. 試圖解:
$$\left.\begin{aligned} x^2-xy+y^2&=25 \\ x^2-y^2&=8 \end{aligned}\right\} \quad \begin{aligned}(1)\\(2)\end{aligned}$$

作二式之圖: (1) 橢圓; (2) 雙曲線;得其交點 A, B, C, D.



以量長之單位度之,可得各組根之近似值:

$A\begin{cases} x=-3.6, \\ y=\ \ 2.2; \end{cases}$

$B\begin{cases} x=5.4, \\ y=4.7; \end{cases}$

$C\begin{cases} x=\ \ 3.6, \\ y=-2.2; \end{cases}$

$D\begin{cases} x=-5.4, \\ y=-4.7. \end{cases}$

練習第九十四

試圖解以下各組方程式,而用尋常代數解法驗其所得結果:

1. $\left.\begin{array}{l}x^2-2xy=3y\\2x^2-9y^2=9\end{array}\right\}$ 2. $\left.\begin{array}{l}2x^2-xy+y^2=2y\\2x^2+4xy=5y\end{array}\right\}$

3. $\left.\begin{array}{l}x^2-xy+y=-6\\y^2-xy-x=12\end{array}\right\}$ 4. $\left.\begin{array}{l}x^2+xy-y=9\\y^2+xy-x=-3\end{array}\right\}$

5. $\left.\begin{array}{l}x^2-xy+x=35\\xy-y^2+y=15\end{array}\right\}$ 6. $\left.\begin{array}{l}(x+y)^2+3(x-y)=30\\xy+3(x-y)=11\end{array}\right\}$

7. $\left.\begin{array}{l}x+\dfrac{1}{y}=3\\y+\dfrac{1}{x}=\dfrac{4}{3}\end{array}\right\}$ 8. $\left.\begin{array}{l}x+\dfrac{1}{y}=\dfrac{18}{7}\\y+\dfrac{1}{x}=\dfrac{7}{4}\end{array}\right\}$

9. $\left.\begin{array}{l}(x-y)^2=3-2x-2y\\y(x-y+1)=x(y-x+1)\end{array}\right\}$

10. $\left.\begin{array}{l}x-7xy+4y^2=34\\\dfrac{2x+y}{x-3y}-\dfrac{x-3y}{2x+y}=2\dfrac{2}{3}\end{array}\right\}$

203. 變數與函數. 含x, y之方程式,可視爲二元間之關係式.今若以一元(如x)爲主而令其徧歷各數值,則其他一元(如y)可隨彼元之值而定其對應之值,且常可以含彼元之代數式表之.任令徧歷各值之元,曰變數(Variable).含變數之代數式,其值隨變數而變者,曰函數(Function).

例如下例諸式,均示y爲含x之函數:

$y=x+3$ 爲 x 之一次函數.

$y=2x^2-x+4$ 爲 x 之二次函數.

$y=2x^3-3x+1$ 爲 x 之三次函數.

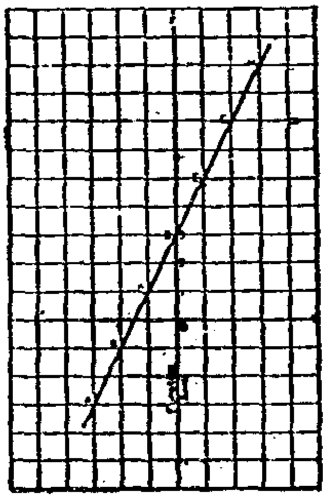
$y=x^4-3x^3+x^2-2$ 爲 x 之四次函數.

含 x 之函數,常以符號 $f(x)$ 記之. x 之值爲 a 時, $f(x)$ 之對應值常以 $f(a)$ 記之. 例如 $f(x)=x+3$, 則 $f(0)=3$, $f(1)=4$, $f(-2)=1$, $f(a)=a+3$. 又如 $f(x)=2x^2-x+4$, 則 $f(0)=4$, $f(1)=5$, $f(-2)=14$, $f(a)=2a^2-a+4$.

204. 函數之圖寫. 方程式既可視爲變數(x)函數(y)間之關係式.則方程式之圖亦可視爲變數函數間之關係圖.以圖表函數與變數之關係,謂之函數之圖寫.

例一. 試圖寫 $f(x)=2x+3$.

x	$f(x)$
-3	-3
-2	-1
-1	1
0	3
1	5
2	7
3	9



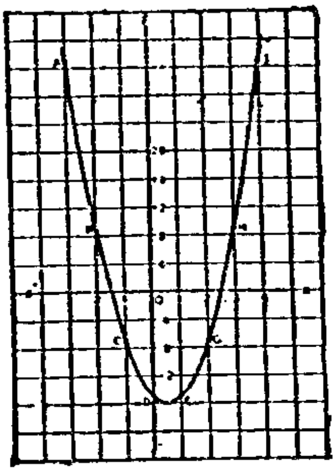
以各數值與 x 而求 $f(x)$ 之值,列表如下:

以 x 軸爲變數軸, y 軸爲函數軸,按表作 A, B, C, D, E, F, G, H 諸點而聯之,即得一直線爲 $f(x)$ 與 x 之關係圖.

例二. 試圖寫$f(x)=4x^2-4x-15$.

以各數值與x而求$f(x)$之值,列表如下:

x	$f(x)$
-3	33
-2	9
-1	-7
0	-15
1	-15
2	-7
3	9
4	33



按表作$A, B, C, D, E, F, G, H, I$諸點而以曲線聯之,即得一拋物線爲所求之關係圖.

205. 圖解法之應用. 函數與變數間,設已有一精密之關係圖,則

(A) 任舉變數之一值,不難立即按圖而得其函數之對應值.

(B) 任舉函數之一值,不難立即按圖而得其變數之對應值.

例一. $f(x)=2x+3$;試從前款例一之圖 (A) 求$f(\frac{1}{2})$, (B) 求$f(x)=2$時x之值.

(A) 爲知變數之值而求函數之值.

前款例一之直線爲$y=2x+3$之圖.今若加作$x=\frac{1}{2}$之圖,則二直線交於一點.此點之縱標,以量長之單位

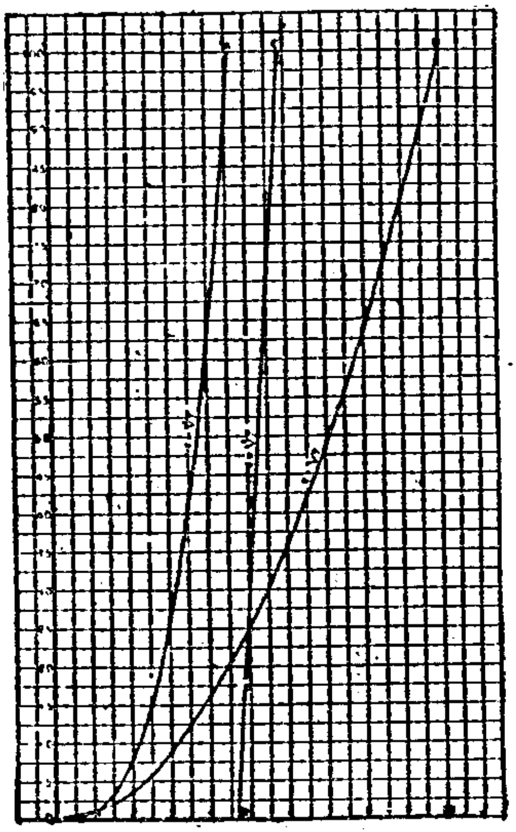
度之，得 $f(\frac{1}{2})=4$.

(B) 爲知函數之值而求變數之值.

前款例一之直線爲 $y=2x+3$ 之圖.今若加作 $y=2$ 之圖,則二直線交於一點.此點之橫標,以量長之單位度之,得 $-\frac{1}{2}$.

例二. $f(x)=4x^2-4x-15$; 試從前款例二之圖 (A) 求 $f(1\frac{1}{2})$, (B) 求 $f(x)=20$.

前款例二之拋物線,爲 $y=4x^2-4x-15$ 之圖.(A) 作直線 $x=1\frac{1}{2}$, 交拋物線於一點. 此點之縱標, 以量長之單位度之, 得 $f(1\frac{1}{2})=-12$. (B) 作直線 $y=20$, 交拋物線於二點. 二點之橫標,以量長之單位度之,得 $3\frac{1}{2}$ 及 $-2\frac{1}{2}$.



例三. (a) 試從 $x=\sqrt{y}$ (卽 $y=x^2$, 惟 x 爲正數)之圖求任何數之平方根.(b) 試從 $x=\sqrt[3]{y}$ (卽 $y=x^3$, 惟 x 爲正數)之圖求任何數之立方根.

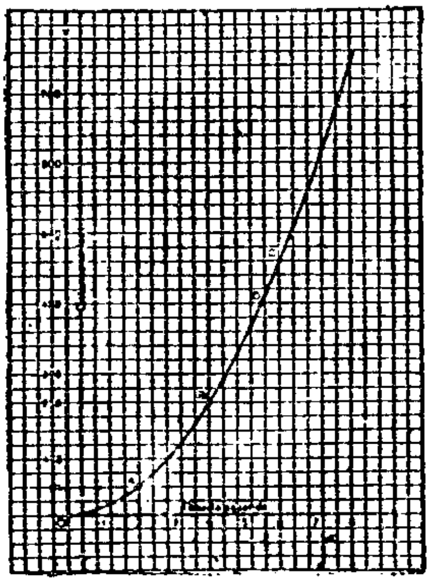
本題先宜作有準確之圖.

曲線 OD 爲 $x=\sqrt{y}$ 之圖.

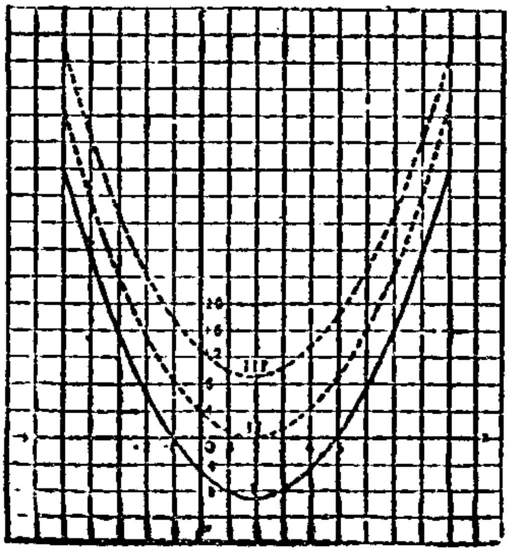
曲線 OA 爲 $x=\sqrt[3]{y}$ 之圖; BC 爲 OA 之續, B 點卽 A 點也(BC 因限於紙幅故自上移下.)

旣有準確之圖,則任何數之平方立方根,不難按圖得之矣.

<u>例四.</u> 物體下墜之距離,爲時間之函數:設以 x 表秒數, y 表英尺數,則其關係式爲 $y=16x^2$ (x 爲正數). 其關係圖如右.



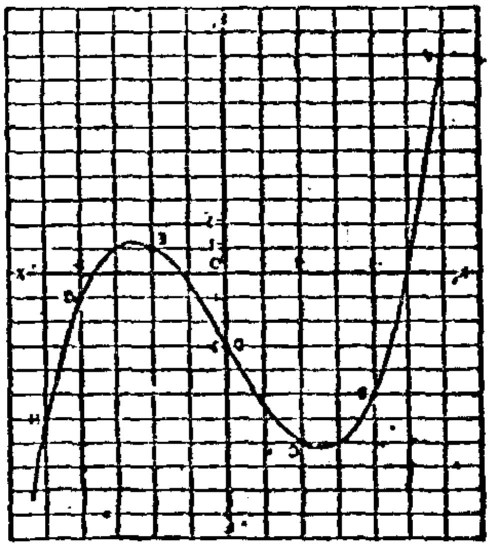
關係圖旣已製成,則無論從時間求距離或從距離求時間,均可按圖得之,



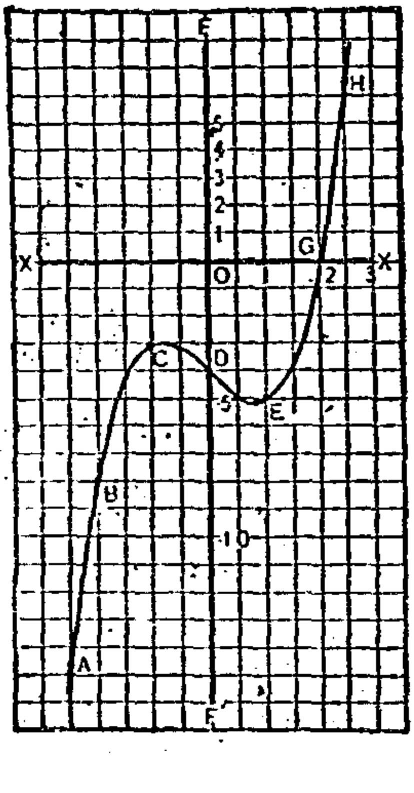
<u>例五</u> (a)試從函數 $f(x)=x^2-4x-5$ 之圖求方程式 (I) $x^2-4x-5=0$ 之根. (b)試從函數 $f(x)=x^2-4x+4$ 之圖求方程式

(II) $x^2-4x+4=0$ 之根 (c) 試從函數 $f(x)=x^2-4x+13$ 之圖求方程式 (III) $x^2-4x+13=0$ 之根.

欲求方程式之根,祇須問函數爲 0 時 x 有何值與相對應.



從圖, I 交 $X'X$ 於二點: $(5,0)$, $(-1,0)$; II 交 $X'X$ 於一點: $(2,0)$. III 與 $X'X$ 不相交. 故 I 之根爲 5 及 -1, II 之二根相重,均爲 2, III 之二根均爲虛數.



例六. 試解一元三次方程式 $x^3-5x+3=0$.

先作 $f(x)=x^3-5x+3$ 之圖得一曲線.此曲線交 x 軸於三點.以量長單位度之,可得方程式三根之近似值 1.8, .6, -2.5.

例七. 試解一元三次方程式 $x^3-2x-4=0$.

先作 $f(x)=x^3-2x-4$ 之圖,得一曲線.此曲線交 x 軸於一點 $(2,0)$.由是可知方程式祇有一根爲實,其他二根均虛.

練習第九十五

試從圖求:

1. (a)20, (b) 5, (c) 59, (d) 68 之方平根.

2. (a)25, (b) 18, (c) 52, (d)165, (e) 150 之立方根.

試從圖求物體下墜若干英尺:

3. 已知下墜之時間爲 (a) 8秒, (b) 3秒, (c) 7 秒, (d)$2\frac{1}{2}$秒, (e)6.2秒.

試從圖求物體下墜若干秒:

4. 已知下墜之距離爲 (a)400英尺, (b)196英尺. (c)100英尺, (d)25英尺, (e)120英尺, (f)750英尺.

試應用圖解法求以下各方程式之實根:

5. $x^2-6x+7=0$. 6. $x^2-6x+11=0$.

7. $2x^2+x+1=0$. 8. $2x^2+x-1=0$.

9. $x^2+14=8x$. 10. $2x^2-x=0$.

11. $x^3-8x=0$. 12. $x^3+x=4$.

13. $x^3-3x+4=0$. 14. $x^3-4x+2=0$.

第十六章

比及比例

206 以分數示甲數當乙數之若干倍或何部分(甲數爲分子,乙數爲分母),曰甲乙數之比(Ratio).

例如4與3之比,可以$\frac{4}{3}$表之通常記作4:3. a與b之比,可以$\frac{a}{b}$表之;通常記作$a:b$讀如a對b,或a比b.

207. 比之第一項(卽分數之分子),曰前項(Antecedent),第二項(卽分數之分母),曰後項(Consequent).前後項相等之比曰等比(Ratio of Equality);前項大於後項者曰優比(Ratio of Greater Inequality);前項小於後項者曰劣比(Ratio of Less Inequality).等比之值爲1,優比大於1,劣比小於1.

208. 倒轉一比之前後項所得之比,爲其比之反比(Inverse Ratio).

例如3:4與4:3兩比,互爲反比.

209. 二量同類者,可以公單位度之而得二數(卽二量含公單位之次數),故二量亦有比.二量之比,常適用此二數之比爲之.

例如\$9與\$11之比爲9:11;此以\$1爲公單位者也.

$2\frac{2}{3}$寸長之線與$3\frac{3}{4}$寸長之線之比爲 32:45; 此以一寸之$\frac{1}{12}$爲公單位者也.

量之不同類者,無比可言,以其不可得而比較也.

例如 3 與5,銀 \$3 與 \$5, 書 3 册 與 5 册,雖均有比 3:5; 然銀 3 圓 與 書 5 册,則不能有何比.

210. 同類二量, 取適當之公單位度之可均得整數者, 曰可通約 (Commensurable) 之二量;其公單位曰公度 (Common Measure), 二量均爲此公度之倍數 (Multiple).

例如 $2\frac{1}{2}$尺與$3\frac{2}{3}$尺可以$\frac{1}{6}$尺爲公度 $2\frac{1}{2}$尺當其 15 倍, $3\frac{2}{3}$尺當其 22 倍,均適盡無餘.

211. 同類二量,無論以何單位度之不能均得整數者,曰不可通約 (Incommensurable) 之二量;其比曰不可通約比 (Incommensurable Ratio).

不可通約比之值,求之永不能盡.然苟小其單位,亦可得其近似,單位愈小,則近似之程度愈高.

例如幾何學中可證明正方形之對角線 a 與其一邊 b 之比爲

$$\frac{a}{b}=\sqrt{2}=1.41421356\cdots.$$

今試取 b 之百分一作單位:以度 b, 適爲 100 倍以度

a,則爲141倍有奇而不足142倍.故兩線之比可以

$$\frac{a}{b}=\frac{141}{100}=1.41$$

表之.此與其眞值之差,不及0.01.

試再取b之千分一作單位:以度b,適爲1000倍;以度a,則爲1414倍有奇而不足1415倍.故兩線之比可以

$$\frac{a}{b}=\frac{1414}{1000}=1.414$$

表之.此與其眞值之差,不及0.001.

設所取之單位更小,則分數之値去比之眞值更近;以實用言,幾可視同眞值矣.

212. 比之兩項,以同數乘之,其比不變.

此因a與b之比,可以a/b表之;ma與mb之比,可以ma/mb表之.然$ma/mb=a/b$,故

$$ma:mb=a:b.$$

213. 諸比相乘之積爲相乘比.

例如$4:3$與$6:5$之相乘比爲$\frac{4}{3}\times\frac{6}{5}=\frac{24}{15}=\frac{8}{5}=8:5$;

$a:b$與$c:d$之相乘比爲$\frac{a}{b}\times\frac{c}{d}=\frac{ac}{bd}=ac:bd$.

以比$a:b$自乘所得之比$a^2:b^2$,曰a與b之二乘比(Duplicate Ratio);再乘以$a:b$所得之比$a^3:b^3$,曰a與b之三乘比(Triplicate Ratio).

練習第九十六

1. 試作3:5與8:7之相乘比.此比視原有二比大小若何.

2. 二乘比較原比爲大爲小,視原比之爲優爲劣試證之.

3. 試以4:15之二乘比與5:2之三乘比相乘,而作其相乘比.

4. 試比較4:5; 9:11; 13:15; 5:6諸比之大小而依次列之.

5. 設$a>b$;問$a+b:a-b$與$a^2+b^2:a^2-b^2$孰大.

試作以下各組之相乘比:

6. 5:14; 8:9; 7:5.

7. 7:9; 15:17; 102:105.

8. $\dfrac{a^2+ab+b^2}{a^3-a^2b+ab^2-b^3}:\dfrac{a^2-ab+b^2}{a+b}$.

9. $\dfrac{a^2-7a+12}{a^2-5a}:\dfrac{a^2-8a+15}{a^2-4a}$.

10. $\dfrac{x^2-9x+20}{x^2-6x}:\dfrac{x^2-13x+42}{x^2-5x}$.

11. $a+b:a-b;\ a^2+b^2:(a+b)^2;\ (a^2-b^2)^2:a^4-b^4$.

12. 二數之比爲3:4;設每數加6,則其比爲5:6.試求之.

[註. 試以$3x$, $4x$表所求二數.]

13. 二數之比爲2:3;而其和與其平方和之比爲5:52試求之.

14. 設金圓七枚銀圓二枚與金圓五枚銀圓二十二枚同值,問金圓對銀圓之比若何.

15. 設金圓四枚銀圓十二枚與金圓二枚銀圓九十二枚同值;問銀圓對金圓之比若何.

16. 有一矩形,其面積14方丈,其長寬之比如8:7.問長寬各爲若干尺.

214 表二比相等之式曰比例式 (Proportion), 略曰比例.

比例式中之四項曰比例數 (Proportionals).第一第四項曰外項 (Extremes).第二第三項曰內項 (Means).

由相等二比$a:b$, $c:d$所成之比例式,其記法有三:

$$(1)\qquad a:b=c:d$$

此式讀作: a與b之比;等於c與d之比.

$$(2)\qquad a:b::c:d.$$

此式讀作: a比b,如c比d.

$$(3)\qquad a/b=c/d.$$

此爲尋常之分數式.

a, d 爲外項; b, c 爲內項.

215. 比例 $a:b=c:d$ 中之 d, 對 a, b, c 而言, 曰第四比例項. (Fourth Proportional).

例如在 $5:10=40:80$ 中. 80 對 5, 10, 40 而言, 爲第四比例項.

216. 比例之兩內項相等時, 均可稱爲比例中項 (Mean Proportional).

例如在 $5:10=10:20$ 中, 10 對 5 及 20 而言, 爲比例中項.

217. 設 $$a:b=c:d,$$

則 $$\frac{a}{b}=\frac{c}{d}.$$

兩邊乘以 bd, $$ad=bc.$$

故設四數成比例, 則兩外項之積與兩內項之積相等.

218. 設 $$ad=bc,$$

則 $$\frac{ad}{bd}=\frac{bc}{bd}, \qquad [\text{除以 } bd.]$$

即 $$\frac{a}{b}=\frac{c}{d}.$$

$$\therefore \quad a:b=c:d.$$

故設兩數之積與他兩數之積相等,則四數成比例:兩數可作比例之外項(或內項)其他兩數可作比例之內項(或外項).

219. 設 $a:b=b:c$,

則 $$\frac{a}{b}=\frac{b}{c}.$$

去分數, $b^2=ac.$

開方, $b=\sqrt{ac}.$

故二數間之比例中項,等於其積之平方根.

220. 設 $a:b=c:d$,

$e:f=g:h$,

$k:l=m:n$,

則 $$\frac{a}{b}=\frac{c}{d},\quad \frac{e}{f}=\frac{g}{h},\quad \frac{k}{l}=\frac{m}{n}.$$

取諸方程式左右兩邊之積.

$$\frac{aek}{bfl}=\frac{cgm}{dhn}.$$

$$\therefore\ aek:bfl=cgm:dhn.$$

故二個比例以上各對應項之相乘積,亦成比例.

221. 設 $a:b=c:d$,

則 $$\frac{a}{b}=\frac{c}{d}.$$

取兩邊之n次羃,$\frac{a^n}{b^n}=\frac{c^n}{d^n}$.

$$a^n:b^n=c^n:d^n.$$

故比例各項之同次羃,亦成比例.

222. 設 $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$,

則 $\frac{ab}{bc}=\frac{bc}{cd}$, [乘以$\frac{b}{c}$.]

即 $\frac{a}{c}=\frac{b}{d}$.

故設$a:b=c:d$,則$a:c=b:d$. 是曰更比 (Alternation) 之定理.

223. 設 $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$,

則 $\frac{a}{b}+1=\frac{c}{d}+1$,

即 $\frac{a+b}{b}=\frac{c+d}{d}$.

故設$a:b=c:d$,則$a+b:b=c+d:d$. 是曰合比 (Composition) 之定理.

224. 設 $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$,

則 $\frac{a}{b}-1=\frac{c}{d}-1$,

即 $\frac{a-b}{b}=\frac{c-d}{d}$.

故設$a:b=c:d$,則$a-b:b=c-d:d$. 是曰分比(Division) 之定理.

225. 從 $$\frac{a+b}{b}=\frac{c+d}{d},$$

及 $$\frac{a-b}{b}=\frac{c-d}{d},$$

可得 $$\frac{a+b}{a-b}=\frac{c+d}{c-d}.$$

故設$a:b=c:d$,則$a+b:a-b=c+d:c-d$.是曰合比分比並用(Composition and Division)之定理.

例如從比例5:2=15:6,引用合比定理,得7:2=21:6;引用分比定理,得3:2=9:6;合比分比並用,得7:3=21:9.

226. 設 $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}=\frac{e}{f}=\frac{g}{h}$ 命此相等諸比爲 r, 則

$$\frac{a}{b}=r,\ \frac{c}{d}=r,\ \frac{e}{f}=r,\ \frac{g}{h}=r;$$

$$\therefore\quad a=br,\ c=dr,\ e=fr,\ g=hr;$$

$$\therefore\quad a+c+e+g=(b+d+f+h)r;$$

$$\therefore\quad \frac{a+c+e+g}{b+d+f+h}=r;$$

$$\therefore\quad \frac{a+c+e+g}{b+d+f+h}=\frac{a}{b};$$

$$\therefore\quad a+c+e+g:b+d+f+h=a:b.$$

故相等諸比前項之和與其後項之和之比,仍等於原有諸比.

練習第九十七

1. 試求3, 5, 42之第四比例項.

2. 試求$x^4, xy, 4x^3y$之第四比例項.

3. 試求8與18間之比例中項.

4. 試求a^4與b^4間之比例中項.

5. 試求$\frac{(a-5)^2}{a+5}$與$\frac{(a+5)^2}{a-5}$間之比例中項.

設 $a:b=c:d$, 試證:

6. $ma:nb=mc:nd$.
7. $3a+b:b=3c+d:d$.
8. $a+2b:b=c+2d:d$.
9. $a^3:b^3=c^3:d^3$.
10. $a:a+b=c:c+d$.
11. $a:a-b=c:c-d$.
12. $ma+nb:ma-nb=mc+nd:mc-nd$.
13. $2a+3b:3a-4b=2c+3d:3c-4d$.
14. $a:a+c=a+b:a+b+c+d$.
15. $a^2+ab+b:a^2-ab+b^2=c^2+cd+d:c^2-cd+d^2$.
16. $a+b:c+d=\sqrt{a^2+b^2}:\sqrt{c^2+d^2}$.
17. $\sqrt{a^2+b^2}:\sqrt{c^2+d^2}=\sqrt[3]{a^3+b^3}:\sqrt[3]{c^3+d^3}$.
18. $a+b:c+d=\sqrt{2a^2-3b^2}:\sqrt{2c^2-3d^2}$.
19. $(a+b+c+d)(a-b-c+d)=(a-b+c-d)(a+b-c-d)$.
20. $\frac{(a+c)(a^2+c^2)}{(a-c)(a^2-c^2)}=\frac{(b+d)(b^2+d^2)}{(b-d)(b^2-d^2)}$.

設 $a:b=b:c$, 試證:

21. $a+b:b+c=a:b$.

22. $a^2+ab:b^2+bc=a:c$.

23. 設 $x+5:2x-3=5x+1:3x-3$, 試求 x.

24. 設 $x+a:2x-b=3x+b:4x-a$, 試求 x.

25. 設 $x:27=y:9$, $x:27=2:x-y$; 試求 x, y.

26. 甲乙二人,各出資本經商.甲獲利\$200,乙損失\$50;於是甲乙資本之比爲 $2:\frac{1}{2}$. 假如甲獲利\$100,乙損失\$85,則二人資本之比爲 $15:3\frac{1}{4}$. 試求甲乙二人原有之資本.

27. 某人在甲火車中,見乙火車過去:如二車方向相反,則需時2秒;如方向相同,則需時30秒.試求二車速度之比.

28. 設 $x/a=y/b=z/c$, 試證:

$$\frac{x+y}{a+b}=\frac{y+z}{b+c}=\frac{z+x}{c+a}.$$

29. 設 $a/b=b/c$, 試證:

$$(a^2+b^2)(b^2+c^2)=(ab+bc)^2.$$

30. 設 $x:a=y:b=z:c$, 試證:

$$\frac{x^3}{a^2}+\frac{y^3}{b^2}+\frac{z^3}{c^2}=\frac{(x+y+z)^3}{(a+b+c)^2}.$$

第十七章

等差級數

227. 列諸數爲一組,若自其中每項減去其前一項所得諸差無不相等,則此組諸數成一等差級數 (Arithmetical Progression).

例如 $b-a$, $c-b$, $d-c$, ... 均相等,則 a, b, c, d, ... 成一等差級數.

228. 諸差所等之數,名曰級數之公差 (Common Difference),常以 d 記之.

例如 1, 4, 7, 10,......之公差爲 3;

5, 7, 9, 11,......之公差爲 2;

10, 9, 8, 7,......之公差爲 -1;

7, 3, -1, -5,......之公差爲 -4.

229. 設以 a 表等差級數之首項, d 表公差,則第二項爲 $a+d$, 第三項爲 $a+2d$, 第四項爲 $a+3d$, 以下準是類推: d 之係數, 恆視項數少 1. 故

等差級數之第 n 項爲 $a+(n-1)d$.

設以 l 表第 n 項,則

$$l=a+(n-1)d. \qquad \text{(公式一)}$$

230. 已知等差級數之首項及公差,或其任何兩項,則可求得級數之任意若干項.

例一. 級數之首項爲3,公差爲4;試求其第十項

從公式一, 第十項爲$3+(10-1)4=39$.

例二. 等差級數之第八項爲25, 第二十三項爲70;試求此級數.

從公式一, 第二十三項爲 $a+22d$,

第 八 項爲 $a+7d$.

故
$$a+22d=70$$
$$a+7d=25$$

行減法,
$$15d=45$$

卽
$$d=3,$$

而
$$a=4.$$

故級數爲4, 7, 10, 13, ……

231. **等差中項** (Arithmetical Mean). 設三數成一等差級數,則其居中一數名曰前後兩數之等差中項.

設 a, A, b 成一等差級數,則 A 爲 a, b 之等差中項.

從等差級數之定義,知

$$A-a=b-A.$$

而 $$A=\frac{a+b}{2}.$$ (公式二)

故任意二數之等差中項,等於其和之半.

232. 推廣等差中項之義,而插入若干項於兩數之間,是曰等差內項 (Arithmetical Means).

設 m 為內項之項數, n 為項之總數,則 $m+2=n$. 以 $m+2$ 代公式一中之 n,則得

$$l=a+(m+1)d.$$

移項, $$l-a=(m+1)d.$$

$$\therefore \quad d=\frac{l-a}{m+1}.$$ (公式三)

例如欲於 3 與 17 之間插入六個內項,則公差 d 為 $\frac{17-3}{6+1}=2$; 而所得級數為 3, 5, 7, 9, 11, 13, 15, 17.

練習第九十八

1. 試求級數 3, 6, 9, …… 中之第二十五項.

2. 試求級數 50, 49, 48, …… 中之第十三項.

3. 試求級數 $\frac{1}{7}$, $\frac{3}{7}$, $\frac{5}{7}$, …… 中之第十五項.

4. 試求級數 $\frac{1}{4}$, $-\frac{1}{4}$, $-\frac{3}{4}$, …… 中之第十九項.

5. 等差級數之第一項為 5, 第三項為 9; 試求其第十項.

6. 等差級數之第一項為 10, 第六項為 5; 試求其

第十一項.

7. 設等差級數之第三項爲20,第十三項爲100問其第二十項爲幾何.

8. 問43爲級數5,7,9,11,……中之第幾項.

9. 問18爲級數$\frac{4}{3},\frac{3}{2},\frac{5}{3}$,……中之第幾項.

10. 問何數爲20與32間之等差中項.

11. 試求$a+b$與$a-b$間之等差中項.

12. 試於20與29之間插入八個等差內項.

233. 等差級數之求和.

設a爲首項,l爲末項,n爲項數,d爲公差,s爲諸項之和,則級數之各項從首項而下順次爲$a, a+d, a+2d$,等等;從末項而上順次爲$l, l-d, l-2d$,等等故

$$s=a+(a+d)+(a+2d)+\cdots+(l-d)+l,$$

或
$$s=l+(l-d)+(l-2d)+\cdots+(a+d)+a.$$

$$\therefore\ 2s=(a+l)+(a+l)+(a+l)+\cdots+(a+l)+(a+l).$$

上式中$(a+l)$共有n項.

$$\therefore\ 2s=n(a+l)$$

而
$$s=\frac{n}{2}(a+l). \qquad \text{(公式四)}$$

以$a+(n-1)d$代公式四中之l,則得

$$s=\frac{n}{2}\left\{a+a+(n-1)d\right\}$$

$$=\frac{n}{2}\left\{2a+(n-1)d\right\}. \qquad \text{(公式五)}$$

例一. 試求級數 5, 7, 9, 11, …… 中首十六項之和.

本題中 $a=5,\ d=2,\ n=16.$

代入公式五, $s=\frac{16}{2}(10+15\times 2)=320.$

例二. 自1起順次各奇數之和均爲平方數;試證之.

奇數1, 3, 5, 7,…… 成一等差級數.

此中 $a=1;\ d=2.$

代入公式五, $s=\frac{n}{2}\left\{2+(n-1)2\right\}$

$$=\frac{n}{2}\times 2n=n^2.$$

故自 1 起順次各奇數首五個之和爲 5^2 卽 25; 首八個之和爲 8^2 卽 64; 餘可類推.

例三. 等差級數二十項之和爲420, 首項爲 2; 試求公差.

本題中 $s=420,\ n=20,\ a=2.$

代入公式五, $420=\frac{20}{2}(4+19d)$

$$=40+190d.$$

$$\therefore\ 190d=380.$$

$$\therefore\ d=2.$$

故所求之公差爲 2.

練習第九十九

1. 試求級數 3, 5, 7, …… 至 20 項之和.

2. 試求級數 $14, 14\frac{1}{2}, 15,$ …… 至 12 項之和.

3. 試求級數 $\frac{7}{8}, 1, \frac{9}{8},$ …… 至 10 項之和.

4. 試求級數 $-7, -5, -3,$ …… 至 16 項之和.

5. 試求級數 12, 9, 6, …… 至 21 項之和.

6. 試求級數 $-10\frac{1}{2}, -9, -7\frac{1}{2},$ …… 至 25 項之和.

7. 三數成一等差級數,其和爲 9, 其平方和爲 35; 試求之.

[註. 命三數爲 $x-y, x, x+y$.]

8. 鐘之報時,自一下至十二下;問一晝夜間共鳴若干下.

9. 某天文臺之鐘,報時自一下至二十四下;問一晝夜間共鳴若干下.

10. 西俗有番薯競走之戲.其法於競走者每人出發之處置一籃,籃前每隔一碼置番薯一枚,共置番薯五十枚.競走者自出發處走至第一枚處,拾而返諸籃中又至第二枚處,拾而返諸籃中;如是每一往返取回

番著一枚,直至五十枚盡數取回而止.問每人共走若干碼.

11. 物體下墜,第一秒16.1英尺,以後每秒所墜較前一秒多32.2英尺.問歷時19秒共墜若干英尺.

12. 石自橋墜,歷3秒而至水面.問橋高出水面若干英尺.

13. 甲乙二數之等差中項爲13,甲數之倍與乙數之三倍之等差中項爲$33\frac{1}{2}$.試求此二數.

14. 三數成一等差級數,其和爲27;第一第二兩數之和,等於第二第三兩數之$\frac{4}{5}$.試求此三數.

15. A每日行20英里,B第一日行8英里,第二日行12英里,以後每日依等差級數遞加.設二人於月曜日之晨在一地出發,且遵同路而行;問至土曜日之晚,二人相距若干英里.

16. 等差級數三項之和爲36,其中項之平方比其前後兩項之積多49.試求此三項.

17. 試求100與200間奇數之和.

18. 試求200與400間3之倍數之和.

19. 試求200與400間7之倍數之和.

20. 試求200與400間5之倍數之和.

第十八章

等比級數

234. 列諸數爲一組,若其中每項除以其前一項所得諸商無不相等,則此組諸數成一等比級數(Geometrical Progression).

例如 $\frac{b}{a}$, $\frac{c}{b}$, $\frac{d}{c}$, ……均相等,則 a, b, c, d, ……成一等比級數.

235. 諸比所等之數,名曰級數之公比 (Common Ratio),常以 r 記之.

例如 1, 3, 9, 27,……之公比爲 3;

2, 4, 8, 16,……之公比爲 2;

16, 8, 4, 2,……之公比爲 $\frac{1}{2}$;

$\frac{2}{3}$, 1, $\frac{3}{2}$, $\frac{9}{4}$,……之公比爲 $\frac{3}{2}$;

4, -2, 1, $-\frac{1}{2}$,……之公比爲 $-\frac{1}{2}$.

236. 設以 a 表等比級數之首項, r 表公比,則第二項爲 ar, 第三項爲 ar^2, 第四項爲 ar^3, 以下準是類推: r 之指數,恆視項數少 1. 故

等比級數之第 n 項爲 ar^{n-1}.

設以 l 表第 n 項,則

$$l=ar^{n-1}.\qquad\text{(公式一)}$$

237. 已知等比級數之首項及公比,或其任何兩項,則可求得級數之任意若干項.

例一. 級數之首項為3,公比為2試求其第五項.

從公式一, 第五項為 $3\times2^{5-1}=48.$

例二. 等比級數之第五項為48,第七項為192:試求此級數.

從公式一, 第五項為 ar^4,

第七項為 ar^6.

故 $ar^4=48,\qquad(1)$

$ar^6=192.\qquad(2)$

以(1)除(2), $r^2=4.$

$\therefore\ r=\pm2.$

從(1), $a=\dfrac{48}{16}=3.$

故級數為 $3, \pm6, 12, \pm24, \cdots\cdots$

238. **等比中項** (Gometrical Mean). 設三數成一等比級數,則其居中一數名曰前後兩項之等比中項.

設 a, G, b 成一等比級數,則 G 為 a, b 之等比中項.

從等比級數之定義,知

$$G/a=b/G$$

$$\therefore\quad G^2=ab$$

而
$$G=\pm\sqrt{ab}.\qquad\text{(公式二)}$$

故任意二數之等比中項,等於其積之平方根.

239.　等比級數之求和.

設 a 爲首項, l 爲末項, n 爲項數, r 爲公比, s 爲諸項之和,則
$$s=a+ar+ar^2+ar^3+\cdots+ar^{n-1}.$$

以 r 乘之,
$$rs=ar+ar^2+ar^3+\cdots+ar^{n-1}+ar^n.$$

由是可得
$$rs-s=ar^n-a,$$

即
$$(r-1)s=a(r^n-1).$$

$$\therefore\quad s=\frac{a(r^n-1)}{r-1}.\qquad\text{(公式三)}$$

240.　設 $r<1$,則爲便利計公式三更可寫作.
$$s=\frac{a(1-r^n)}{1-r}.$$

例一.　試求級數 $1, 2, 4, \cdots\cdots$ 中首八項之和.

本題中　$a=1, r=2, n=8.$

代入公式三,　$s=1(2^8-1)=255.$

例二.　試求級數 $2, 3, \frac{9}{2}, \cdots\cdots$ 中首六項之和.

本題中　$a=2, r=\frac{3}{2}, n=6.$

代入公式三,
$$s=\frac{2\{(\frac{3}{2})^6-1\}}{\frac{3}{2}-1}$$
$$=\frac{2(\frac{729}{64}-1)}{\frac{1}{2}}.$$

$$=\frac{4(729-64)}{64},$$

$$=41\frac{9}{16}.$$

練習第一百

1. 試求級數 3, 9, 27,…… 中之第五項.

2. 試求級數 3, 6, 12,…… 中之第七項.

3. 試求級數 6, 3, $\frac{3}{2}$, …… 中之第八項.

4. 試求級數 1, -2, 4, …… 中之第九項.

5. 試求 2 與 8 間之等比中項.

6. 等比級數之第一項爲 2, 第三項爲 32; 試求其公比.

7. 試求級數 3, 9, 27,…… 至 6 項之和.

8. 試求級數 3, 6, 12,…… 至 8 項之和

9. 試求級數 6, 3, $\frac{3}{2}$, …… 至 7 項之和.

10. 試求級數 8, 4, 2, …… 至 8 項之和.

11. 試求級數 64, 32, 16,…… 至 9 項之和.

12. 試求級數 64, -32, 16,……至 5 項之和.

13. 試求級數 $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{3}$, $\frac{2}{9}$, …… 至 4 項之和.

14. 鐵匠釘馬蹄鐵, 每蹄七釘. 設彼上第一釘應得銀 1 分, 上第二釘得銀 2 分, 如是依等比級數遞加, 問

七釘上全共應得銀幾何.

15. 某兒作工,第一日得銀2分,二第日4分,第三日8分,如是遞加至第十二日.問彼於十二日中共得工銀幾何.

16. 某城今有100,000人.設人口每年增10%,問四年後可有若干人.

17. 三數成一等比級數,其連乘積爲216,其兩兩相乘積之和爲156試求此三數.

18. 等比級數之第一項與第三項之等差中項,爲其第二項之五倍;試求公比.

19. 設等差級數之第四項爲第二第七項之等比中項,試證其六項爲第二第十四項之等比中項.

20. 設等比級數之項數爲奇數.試證其居首居中居末三項亦成一等比級數.

21. 試於6與16之間插入二數,令四數中首三數成一等差級數,末三數成一等比級數.

22. a, b, c, 成一等比級數, x 爲 a, b 間之等差中項; y 爲 b, c 間之等差中項.試證

$$\frac{1}{x}+\frac{1}{y}=\frac{2}{b},\quad \frac{a}{x}+\frac{c}{y}=2.$$

答　案

練習第一. (11.)

1. 14.	2. 10.	3. 13.	4. 11.	5. 13.
6. 7.	7. 9.	8. 7.	9. 6.	10. 2.
11. 3.	12. 6.	13. 2.	14. 8.	15. 4.
16. 3.	17. 1.	18. 1.	19. 3.	20. 4.
	21. 10.		22. 5.	

練習第二. (13.)

1. 91.	2. 21.	3. 60.	4. 24.	5. 96.
6. 16.	7. 36.	8. $4a+4b$.	9. $4a-4b$.	

10. $2a^2+2b^2$.	11. $2a^2-2b^2$.	12. $ab+3c$.
13. $3ab-3c$.	14. $3c-3ab$.	15. $ab+ac$.
16. $ab-ac$.	17. $3ab+3ac$.	18. $3ab-3ac$.
19. $5ab^2+5ac$.	20. $ab^2-{}^25ac$.	21. $5a^2b^2-5a^2c$.

練習第三. (14.)

1. 63.	2. 280.	3. 300.	4. 98.	5. 81.
6. 1250.	7. 105.	8. 105.	9. 315.	10. 35.
11. 105.	12. 105.	13. 0.	14. 135.	15. 120.

16. 0. 17. 1800. 18. 540.
19. 0. 20. 270. 21. 540.

練習第四. (15-16.)

1. 21. 2. 26. 3. 72. 4. 85. 5. 30.
6. 17. 7. 8. 8. 50. 9. 24. 10. 0.
11. 12. 12. 100. 13. 80. 14. 71. 15. 139.
16. 17. 17. 8. 18. 5. 19. 3. 20. 6.
21. 5. 22. 1. 23. 2. 24. 2.

練習第五. (16-17.)

1. a加b; a減b; a乘以b; a除以b.
2. $6+4$. 3. $a+b$. 4. $6-4$. 5. $a-b$.
6. $25-16$. 7. $x-y$. 8. $3\times4;3^4$. 9. $4x;x^4$.
10. $25-15$. 11. $35-x$. 12. $x-a$.
13. $12-10$. 14. $14-x$. 15. $a-x$.
16. 4×3英里. 17. xy英里. 18. x/y時.

練習第六. (17-18.)

1. $20/5$. 2. a/b. 3. $(20-4)$歲; $(20+5)$歲.
4. $(x-3)$歲; $(x+7)$歲. 5. $4(7-5)$. 6. $7(2x-y)$.
7. $4+1$. 8. $x+1;x-1$. 9. $20-d$. 10. $15+5$.
11. $x+8$. 12. $30-20$. 13. $x-10$. 14. 10.

練習第七. (18-19.)

1. $(40-x)$歲.　2. $(a+y)$歲.　3. 4.

4. 4×3日.　5. ab日.　6. $5x-3x$.

7. $20-3-(10+1)$.　8. $2x-3-(x+1)$.　9. 40.

10. 12.　11. $100a+25b+10c$.　12. $(100-x-y)$册

13. $(80\times10+15)$人.　14. $(xy+c)$人.

練習第八. (19-21.)

1. $(10\times8-6^2)$方碼.　2. $(yx-a^2)$方碼.　3. ph/gk捲.

4. $m^2+5c(d+b-a)$.　5. $5(2n+1)-6(c-a+b)$.

6. $\{100-(a+b+2c)\}$圓.　7. 其事之1/4.

8. 其事之$1/x$.　9. 其事之$\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}\right)$.

10. $n+(n+1)+(n+2)$; $n(n+1)(n+2)$.

11. $36/x$.　12. qd.　13. $qd+r$.　14. $2x$枚.

15. $(10/12x)$分.　16. $6a/b$分.　17. $4m$英里.

18. $(x+17)$歲.　19. $(x+y+c)$歲.　20. $36x$方碼.

21. $c/4$時.　22. $x-1, x, x+1$.　23. $2n+3$.

24. $(w+k)$尺; $2(2w+k)$尺; $w(w+k)$方尺.

25. $(b+h)$尺; $(a+b+h)$尺; $(b+h)(a+b+h)$方尺;

$2h(a+2b+2h)$方尺; $h(b+h)(a+b+h)$立方尺.

練習第九. (28-29.)

1. 4. 2. 5. 3. 3. 4. 1. 5. 13.
6. 0. 7. 5. 8. 5. 9. 7. 10. 4.
11. 4. 12. 1. 13. 25. 14. $32\frac{1}{2}$. 15. 10.
16. 3. 17. 7. 18. 13. 19. 6. 20. 1.
21. 12. 22. 14. 23. 7. 24. 5. 25. 0.
26. 15. 27. $10\frac{1}{2}$. 28. 4. 29. 3. 30. 4.
31. $\frac{2}{5}$. 32. 6. 33. 9. 34. 7. 35. 5.
36. 6. 37. 6.

練習第十. (32-33.)

1. 30. 2. 50歲,10歲. 3. 78,13. 4. 80尺;10尺.
5. 30,23. 6. 48,36. 7. 20,15. 8. 20.
9. 12. 10. 40,10. 11. 26,10 12. 15,25.
13. 20, 10. 14. 20, 7. 15. 12, 20.

練習第十一. (33-34.)

1. $168; $42. 2. 81. 3. 2.
4. 40, 30. 5. 25, 26, 27. 6. 5, 6, 7, 8, 9.
7. 30歲 10歲. 8. 40;歲 10歲. 9. 40年.
10. 10年. 11. $40. 12. 9張.

練習第十二. (34-35.)

1. 15, 30, 45, 2. 50. 3. 16日. 4. 7日. 5. 35日.

6. 24噸. 7. 34束. 8. 20. 9. 970票; 1074票.

練習第十三. (35-36.)

1. 24英里. 2. $60. $30. 3. 6張; 3枚. 4. 14.

5. 20枚; 4枚. 6. 21張7張. 7. 32歲8歲. 8. 20日.

練習第十四. (36-37.)

1. 9英里. 2. $60. 3. 60磅; 20磅.

4. 40分鐘. 5. 15,000尺. 6. 21英寸; 15英寸.

7. 5打; 2打. 8. 18張; 6張.

9. 亞洲9,875,500方英里; 歐洲5,166,500方英里; 北美洲8,057,500方英里, 南美洲8,448,500方英里.

10. 聖彼得寺448尺, 大金字塔480尺; 華盛頓碑555尺, 愛斐塔990尺.

練習第十五. (44-45.)

1. $40c$.	2. $24a$.	3. $39x$.	4. $51y$.
5. $-26a$.	6. $-40x$.	7. $-17b$.	8. $-66z$.
9. $-20m$.	10. $2d$.	11. 0.	12. $-18g$.
13. a.	14. $-21x^3$.	15. 0.	16. $3mn$.

17.	0.	18.	$-a^3b^3c^3$.	19.	$-9abcd$.	20.	1.
21.	12.	22.	4.	23.	-18.	24.	10.

練習第十六. (47-48.)

1.	$30a^5$.	2.	$40a^4b^3$.	3.	$63x^2y^2$.	4.	$2a^5b^5c^2$.
5.	$9a^7b^9c^9$.	6.	$-10a^2$.	7.	$12ab$.	8.	$-a^4b^3$.
9.	$10a^5b^5c$.	10.	$12x^7y^5z^2$.	11.	$105a^7b^5$.	12.	$6a^6b^5c^7$.
13.	$-12a^5b^5c^5x^5$.	14.	$24a^7b^5c^5$.	15.	$-42a^6m^5x^7$.	16.	$30x^8y^4z^6$.
17.	-46.	18.	-3.	19.	-8.	20.	-17.
21.	9.	22.	12.	23.	-102.	24.	-41.
25.	174.	26.	6.	27.	30.	28.	372.

練習第十七. (50-15.)

1.	x^2.	2.	$3x^2$.	3.	-7.	4.	-7.	5.	$7x^4$.
6.	$9x$.	7.	$-4a$.	8.	$4x^2y^2$.	9.	$-9x$.	10.	$5x$.

11.	$3y^2$.	12.	$-4ab^2$.	13.	$12xy^4$.	14.	$3x^3y^3/5$.
15.	$-3a/2$.	16.	$-bd$.	17.	acd^2.	18.	$-2xy/3$.
19.	$5ab$.	20.	$4mn$.	21	$yz^3/3$.	22.	$-17cd$.
23.	$2n^2p$.	24.	$3r^2/p$.	25.	$-13agt$.	26.	$1/abc$.
27.	$3/2xy^2z^3$.	28.	$2/mnp$.	29.	$-a/3b^2$.	30.	$-g/3mt$.
31	20.	32.	$1/2$.	33.	$+48$.	34.	448.
35.	$-512/3$.	36.	$57/448$.				

練習第十八. (53-54.)

1. $2a^2+2b^2$.　　2. $9a^2-2a+6$.　　3. 0.

4. $4x+4y+4z$.　　5. $2b+2c$.　　6. $4a+4b+4c$.

7. 3^2+5a-2.　　8. $8ab+3ac$.　　9. $6x^3$.

10. $5x^2+3xy+2y^2$.　　11. a^2-2b^2　　12. $4a^3+6a+2$.

13. $3m^3+7m^2+2$.　　14. $2x^3-2x^2+4x+y$.

15. $7x^3+7x^2+2$.　　16. $a^3+3a^2b-5ab^2-b^3$.

17. $-a^3-a^2b-2ab^2-2b^3$.　　18. $2x^3+2x^2y-xy^2+6y^3$.

練習第十九. (56-57.)

1. $a-b+c$.　　2. $2a-2b+6c$.　　3. $2x+3y-8z$.

4. $x+4y+5z$.　　5. $2ac+2bc$.　　6. $2ab-3ac+4bc$.

7. x^3+3x^2+2x-8.　　8. x^3-7x^2+4x.

9. $2b^3+18abc-15c^3$.　　10. $2-x-2x^2+2x^3$.

11. $-3b^3-4c^3+6abc$.　　12. $-x^4-2x+4x^2+5$.

13. $2x+x^2+x^3+x^5$.　　14. $2a^3-4ab+2ab^2$.

15. $2b^4-2a^3b^3-ab^2$.　　16. $4x^3-3x^2y-4xy^2+7y$.

練習第二十. (58-59)

1. c.　　2. $y-b$.　　3. $x-3y-7c$.

4. $7a+2b-2$.　　5. $2a+x$.　　6. $13x+15y+13z$.

3

7119

116

110

696

220

1416

7. $2a-2b+2c$. 8. $5a+b-4c$. 9. $4x-5y+2z$.

10. $3a-b$. 11. $2x+3y+z$. 12. $-8x+y$.

13. $6x-2y-z$. 14. $(a-b)x-(a-b)y+(a+c)z$.

15. $(a+c)x-(a-b)y+(a-c)z$.

16. $(2a+5c)x-(3a+4b)y-(6b+7c)z$.

17. $(ac-an)x-(bm+cn)y+(a+3c)z$.

18. $(mn-1)x-(mn+1)y+(mn+1)z$.

19. $-(p+q)x+(2p-3)y-(5p-4q)z$.

20. $(a-b+c)x+(a+b-c)y-(a-b-c)z$.

21. $(al-bm-cn)x+(an-bn-cl)y+(an-bl-cm)z$.

22. $(a-b+c+d)x+(a+b-c+d)y+(a+b+c-d)z$.

23. $(l-m-n-p)x-(l+p)y+(l-m-n-p)z$.

練習第二十一. (60-61.)

1. x^2+7x. 2. $8x^2-12xy$. 3. $14xy-21y^2$.

4. $2ax-4a^2$. 5. $bx-3b^2$. 6. $-6a^2+9a^2b$.

7. $10x^2z+15xz^2$. 8. $5a^3b-25a^2b^2$. 9. $-x^2y^2+3xy^3$.

10. $4x^5-6x^4$. 11. $4x^2y-12y^2$. 12. $-x^4+3x^2y^2$.

13. $-a^3b^3+a^5b^2$. 14. $a^4b^2+a^5$. 15. $4x^5-6x^4+2x^3$.

16. $5a^3b-25a^2b^2-5ab^3$. 17. $a^5+2a^4b+2a^3b^2$.

18. $a^3b^3+2a^2b^4+2ab^5$. 19. $8x^3-12x^2y-18xy^2$.

20. $x^2y+2xy^2-y^3$.　　21. $a^6+a^4b^2+a^2b^3$

22. $x^2y^2-2xy^3+y^4$.　　23. $15a^4b^4-20a^3b^5+5a^5b^3$.

24. $3a^2x^2y^2-9a^2xy^4+3a^2y^6$.　　25. $x^{15}y^2-x^{13}y^5-x^6y^{12}$.

26. $4x^5y^3-6x^4y^5+4x^3y^6$.　　27. $a^{10}x^5y^{10}-a^9x^4y^9-a^8x^3y^8$.

28. $15a^4b^5-10a^3b^6+25a^5b^4$.

練習第二十二. (64-65.)

1. $x^2+13x+42$.　　2. x^2-x-42.　　3. x^2+x-42.

4. $x^2-13x+42$.　　5. $x^2+3x-40$.　　6. $4x^2+12x+9$.

7. $4x^2-12x+9$.　　8. $4x^2-9$.　　9. $-9x^2+12x-4$.

10. $20x^2-47x+21$.　　11. $a^2+ab-6b^2$.

12. $a^2-12ab+35b^2$.　　13. $25x^2-30xy+9y^2$.

14. $x^2-bx-cx+bc$.　　15. $8m^2-10mp+3p^2$.

16. $a^2+ab-bc-c^2$.　　17. $a^4-a^3b+2a^2b^2-ab^3+b^4$.

18. $a^5-3x^4-3x^3+16x^2-21$.　　19. a^3-b^3.

20. a^3+b^3.　　21. $2x^4+13x^3-9x^2-50x+40$.

22. $9x^5-7x^3+6x^2-2x$.　　23. $x^5-4x^2y^3+3xy^4$.

24. $-a^4+4a^3b-7ab^3-2b^4$.

25. $-25x^6b^3+20a^4b^4+12a^3b^5-5a^2b^6-2ab^7$.

26. $a^4-2a^2b^2+b^4$.

27. $a^2b^2+2abcd-a^2c^2+c^2d^2$.

28. $-2x^5y^2-2x^4y^3+3x^4y^4+6x^3y^4+4x^3y^5-8x^2y^6-xy^7$.

29. $x^4-4x^2y^2+4xy^3-y^4$.

30. $3x^4-5x^3y-12x^2y^2-xy^3+3y^4$.

31. $-a^4+6a^2b^2-b^4$.

32. $a^4-a^3c+ab^2c-b^4-2b^2c^2+ac^3-c^4$.

33. $a^4-16a^2b^2x^2+32a^3b^3x^3-16a^4b^4x^4$.

34. $6a^4+5a^3bx-10a^2b^2x^2+7ab^3x^3-2b^4x^4$.

35. $10x^6y^2+14x^5y^3-48x^4y^4+32x^3y^5-16x^2y^6$.

練習第二十三. (66.)

1. $2a^2-a$. 2. $7a^4-a$. 3. $7x^2+1$.

4. $5m^4-p^2$. 5. $3x^3-5x^2$. 6. $-3x^3+1$.

7. $2x^2-3x$. 8. $-x^2+2$. 9. $1+2c$.

10. $5x-y$. 11. $ax-1$. 12. $x+xy$.

13. $-3a+4b-2c$. 14. $ab-b^4-a^2b$. 15. $x^2-2xy-3y^2$.

16. $xy-x^2-y^2$. 17. $-a^2+ab+b^2$. 18. $-a+1-b$.

19. $-1+xy-x^2y^2$. 20. x^2+2x+1. 21. $a-b-c$.

22. $x^3-x^2y-y^2$. 23. $ab-2-3b^2$. 24. a^2c^2+a-c.

25. $2x^2-6xy+4y^2-y$. 26. $-2lmn+3l+m-4n$.

練習第二十四. (70–71.)

1. $x+8$. 2. $x-8$. 3. $x+8$. 4. $x-8$. 5. $-3a-2$.

6. $3a+1$. 7. $a+5$. 8. $a+5$.
9. x^2-x+1. 10. x^4+x^2+1. 11. $1+ab+a^2b^2$.
12. x^2+3x+1. 13. $a-b+c$. 14. $a+b-c$.
15. $x+y-z$. 16. c^2+c+2. 17. $x-2y-z$.
18. $x-a$. 19. $a-2b+3c$. 20. a^2+5a+6.
21. q^2+3q+2. 22. $9a^2+6ab+4b^2$. 23. -65.
24. 10. 25. $7c-45$. 26. $2x^4$.
27. $-39y+27$. 28. $-4y^{14}$.

練習第二十五. (72-73)

1. $2a^2$. 2. $-3a^4+2a^3b-2ab^3+4b^4$.
3. x. 4. $a^4+2a^2b^2+b^4-c^4+2c^2d^2-d^4$.
5. $10y^4+8y^3+6y^2+4y+2$. 6. 0.
7. $2z-7y$. 8. $a^3-3abc+b^3+c^3$.
9. $4y^2-3xy+2x^2$. 10. $5a^3b-b^4$.
11. $3x^3-2x^2+1$. 12. $3c^2+24c-12$.
13. $2b^4$. 14. $10-16x-39x^2+2x^3+15x^4$.
15. $a^4-ax^3+x^4$. 16. $(a-b)x^3+(b+c)x^2-(c+1)x$.
17. $(a+b)x^4-(a-b)x^3-(c+2)x$.
18. $(a+1)x^3-(b+c)x^2+(b-c)x$.
19. 0. 20. $-6x-2y-4b$. 21. $6x^2y+2y^3$. 22. $729a^6-b^6$.

23. x^2-y^2.

24. $x^2-(4a^2-12ab+9b^2)$.

25. $(x^2-y^2)-(a^2-10ab+36b^2)$.

26. $(x^2-2xy+y^2)-(a^2-4ab-4b^2)$.

27. $(-x^2+4xy-4y^2)-(-4a^2-4ab-b^2)$.

28. $(16x^2-16xy+4y^2)-(a^2-2ab+b^2)$.

29. $(-x^2+10xy-25y^2)-(-36a^2+12ab-b^2)$.

練習第二十六. (75-76.)

1. $m^2+2mn+n^2$. 2. $c^2-2ac+a^2$. 3. $a^2+4ac+4c^2$.

4. $9a^2-12ab+4b^2$. 5. $4a^2+12ab+9b^2$. 6. $a^2-6ab+9b^2$.

7. $4x^2-4xy+y^2$. 8. $y^2-4xy+4x^2$. 9. $a^2+10ab+25b^2$.

10. $4a^2-20ac+25c^2$. 11. x^2-y^2. 12. $16a^2-b^2$.

13. $4b^2-9c^2$. 14. $x^2+10bx+25b^2$. 15. $y^2-4yz+4z^2$.

16. y^2-9z^2. 17. $4a^2-9b^2$. 18. $4a^2-12ab+9b^2$.

19. $4a^2+12ab+9b^2$. 20. $25x^2-9a^2$.

練習第二十七. (78.)

1. $x^2+11x+28$. 2. $x^2+4x-21$. 3. x^2-6x+8.

4. $x^2-16x+60$. 5. $x^2+3x-28$. 6. $x^2-ax-2a^2$.

7. $x^2+2ax-3a^2$. 8. $a^2+6ac+9c^2$. 9. $a^2-2ax-8x^2$.

10. $a^2-7ab+12b^2$. 11. $a^4+a^2c-2c^2$. 12. $x^2-20x+51$.

13. $x^2+xy-30y^2$. 14. $9+3x-2x^2$. 15. $5-8x-4x^2$.
16. $a^2+ab-6b^2$. 17. $a^4b^4-6a^2b^2x^2+5x^4$.
18. $a^6b^2+4a^4b^4-5a^2b^6$. 19. $x^4y^2+2x^3y^3+x^2y^4$.
20. $x^4y^2-4x^3y^3+3x^2y^4$. 21. $x^2+(a+b)x+ab$.
22. $x^2+(a-b)x-ab$. 23. $x^2-(a-b)x-ab$.
24. $x^2-(a+b)x+ab$. 25. $x^2+2(a+b)x+4ab$.
26. $x^2-2(a-b)x-4ab$. 27. $x^2+2(a-b)x-4ab$.
28. $x^2-2(a+b)x+4ab$. 29. $x^4+a^2x^2-56a^4$.
30. $a^2b^2-9x^6$. 31. $y^4+6x^2y^2-27x^4$.
32. $1+a^2b^2-3ac-3a^3b^2c$. 33. $a^2b^2-(a^2-b^2)pq-p^2q^2$.
34. $2k+(k-2)x^3y^3-x^6y^6$.

練習第二十八. (79-80.)

1. $x+2$. 2. $x-2$. 3. $a+3$. 4. $a-3$.
5. $c+5$. 6. $c-5$. 7. $7x+y$. 8. $7x-y$.
9. $3b+1$. 10. $3b-1$. 11. $4x^2+5a$. 12. $4x^2-5a$.
13. $3x+5y$. 14. $a+b-c$. 15. $a-b+c$. 15. $a+2b-c$.
17. $5a-7b+1$. 18. $5a-7b-1$. 19. $z+x-y$.
20. $z-x+y$. 21. $a-2b+c$. 22. $x+3y+z$.
23. $x+3y-z$. 24. $a+2b+2c$. 25. $a+2b-2c$.
26. $1-3x+2y$.

練習第二十九. (80–81.)

1. $1+x+x^2$.　2. $1+2a+4a^2$.　3. $1+3c+9c^2$.
4. $4a^2+2ab+b^2$.　5. $16b^2+12bc+9c^2$.　6. $9x^2+6xy+4y^2$.
7. $x^2y^2+yz+z^2$.　8. $a^2b^2+2ab+4$.　9. $25a^2+5ab+b^2$.
10. $a^2+2ab+4b^2$.　11. $a^2+4a+16$.　12. a^6+3a^3+9.
13. $a^8+a^4x^2y^2+x^4y^4$.　14. $x^{10}+x^5a^3b^3+a^6b^6$.
15. $9x^2y^2+3xyz^4+z^8$.　16. $x^2y^2z^2+xyz+1$.
17. $4a^2b^2c^2+6abz+9$.　18. $1+4xyz+16x^2y^2z^2$.

練習第三十. (81–82.)

1. $1-x+x^2$.　2. $1-2a+4a^2$.　3. $1-3c+9c^2$.
4. $4a^2-2ab+b^2$.　5. $16b^2-12bc+9c^2$.
6. $9x^2-6xy+4y^2$.　7. $4x^2-10xy+25y^2$.
8. $x^2y^2-xyz+z^2$.　9. $a^2b^2-2ab+4$.
10. $25a^2-5ab+b^2$.　11. $a^2-2ab+4b^2$.
12. a^4-4a^2+16.　13. a^6-3a^3+9.
14. $4a^4-2a^2b+b^2$.　15. $a^8-a^4x^2y^2+x^4y^4$.
16. $x^{10}-a^3b^3x^5+a^6b^6$.　17. $9x^2y^2-3xyz^4+z^8$.
18. $x^2y^2z^2-xyz+1$.　19. $4a^2b^2c^2-6abc+9$.
20. $1-4xyz+16x^2y^2z^2$.　21. $1-3a^2bc+9a^4b^2c^2$.
22. $p^2q^2-5pqx+25x^2$.　23. $49x^2-70xy+100y^2$.

24. $64a^2b^2-72abcd+81c^2d^2$. 25. $x^3+x^2y+xy^2+y^3$.

26. $x^3-x^2y+xy^2-y^3$. 27. $x^4+x^3y+x^2y^2+xy^3+y^4$.

28. $x^4-x^3y+x^2y^2-xy^3+y^4$. 29. $x^5+x^4y+x^3y^2+x^2y^3+xy^4+y^5$.

30. $x^5-x^4y+x^3y^2-x^2y^3+xy^4-y^5$.

31. $x^6+x^5y+x^4y^2+x^3y^3+x^2y^4+xy^5+y^6$.

32. $x^6-x^5y+x^4y^2-x^3y^3+x^2y^4-xy^5+y^6$.

33. $x^7+x^6y+x^5y^2+x^4y^3+x^3y^4+x^2y^5+xy^6+y^7$.

34. $x^7-x^6y+x^5y^2+x^4y^3+x^3y^4-x^2y^5+xy^6-y^7$.

練習第三十一. (84.)

1. $2x(x-2)$. 2. $3a(a^2-2)$. 3. $5a^2b^2(1-2ab)$.

4. $xy(3x+4y)$. 5. $4a^2b^2(2a+b)$. 6. $3a^2(a^2-4-2a)$.

7. $4x^2(1-2x^2-3x^3)$. 8. $5(1-2x^2y^2+3x^2y)$.

9. $7a(a+2-3a^2)$. 10. $3x^2y^2(xy-2x^2y^2-3)$.

練習第三十二. (86.)

1. $(x^2+1)(x+1)$. 2. $(x^2+1)(x-1)$. 3. $(x+y)(x+z)$.

4. $(x-y)(a-b)$. 5. $(a+b)(a-c)$. 6. $(x+3)(x-b)$.

7. $(x^2+2)(2x-1)$. 8. $(a-b)(a-3)$.

9. $(2a-c)(3a+b)$. 10. $(xy+c)(ab+c)$.

11. $(a-b-c)(x-y)$. 12. $(a-b-2c+3d)(a-b)$.

練習第三十三. (87-88.)

1. $(2+x)(2-x)$.
2. $(3+x)(3-x)$.
3. $(3a+x)(3a-x)$.
4. $(5+x)(5-x)$.
5. $(5x+a)(5x-a)$.
6. $(4a^2+11)(4a^2-11)$.
7. $(11a^2+4)(11a^2-4)$.
8. $(2ab+cd)(2ab-cd)$.
9. $(1+xy)(1-xy)$.
10. $(9xy+1)(9xy-1)$.
11. $(7ab+2)(7ab-2)$.
12. $(5a^2b^2+3)(5a^2b^2-3)$.
13. $(3a^4b^3+4x^5)(3a^4b^3-4x^5)$.
14. $(12xy+1)(12xy-1)$.
15. $(10x^3yz^2+1)(10x^3yz^2-1)$.
16. $(1+11a^2b^4c^6)(1-11a^2b^4c^6)$.
17. $(5a+8x^3y^3)(5a-8x^3y^3)$.
18. $(4x^3+5y^9)(4x^3-5y^9)$.
19. 90,000.
20. 22,760.
21. 732,200.
22. 400.
23. 28,972.
24. 14,248,000.

練習第三十四. (88-89.)

1. $(x+y+z)(x+y-z)$.
2. $(x-y+z)(x-y-z)$.
3. $(z+x+y)(z-x-y)$.
4. $(z+x-y)(z-x+y)$.
5. $(x+y+2z)(x+y-2z)$.
6. $(2z+x-y)(2z-x+y)$.
7. $(a+2b+c)(a+2b-c)$.
8. $(a-2b+c)(a-2b-c)$.
9. $(c+a-2b)(c-a+2b)$.
10. $(2a+5c+1)(2a+5c-1)$.
11. $(1+2a-5c)(1-2a+5c)$.
12. $(a+3b+4c)(a+3b-4c)$.
13. $(a-5b+3c)(a-5b-3c)$.
14. $(4c+a-5b)(4c-a+5b)$.

15. $(2a+x+y)(2a-x-y)$. 16. $(b+a-2x)(b-a+2x)$.

17. $(2z+x+3y)(2z-x-3y)$. 18. $(3+3a-7b)(3-3a+7b)$.

19. $(4a+2b+5c)(4a-2b-5c)$.

20. $(5c+3a-2x)(5c-3a+2x)$.

21. $(3a+3b-5c)(3a-3b+5c)$.

22. $(4y+a-3c)(4y-a+3c)$. 23. $(7m+p+2q)(7m-p-2q)$.

24. $(6n+d-2c)(6n-d+2c)$. 25. $(x+y+a+b)(x+y-a-b)$.

26. $(x-y+a-b)(x-y-a+b)$.

27. $(2x+3+2a+b)(2x+3-2a-b)$.

28. $(b-c+a-2x)(b+c-a+2x)$.

29. $(3x-y+2a-b)(3x-y-2a+b)$.

30. $(x-3y+a+2b)(x-3y-a-2b)$.

31. $(x+2y+a+3b)(x+2y-a-3b)$.

32. $(x+y+a-z)(x+y-a+z)$.

練習第三十五. (90-91.)

1. $(2x-y)(4x^2+2xy+y^2)$. 2. $(x-1)(x^2+x+1)$.

3. $(xy-z)(x^2y^2+xyz+z^2)$. 4. $(x-4)(x^2+4x+16)$.

5. $(5a-b)(25a^2+5ab+b^2)$. 6. $(a-7)(a^2+7a+49)$.

7. $(ab-3c)(a^2b^2+3abc+9c^2)$. 8. $(xyz-2)(x^2y^2z^2+2xyz+4)$.

9. $(2ab-3y^2)(4a^2b^2+6aby^2+9y^4)$.

10. $(4x-y^3)(16x^2+4xy^3+y^6)$.

11. $(3a-4c^2)(9a^2+12ac+16c^4)$.

12. $(xy-6z)(x^2y^2+6xyz+36z^2)$.

13. $(4x-9y)(16x^2+36xy+81y^2)$.

14. $(3a-8c)(9a^2+24ac+64c^2)$.

15. $(2x^2-5y)(4x^4+10x^2y+25y^2)$.

16. $(4x^4-3y^5)(16x^8+12x^4y^5+9y^{10})$.

17. $(6-2a)(36+12a+4a^2)$. 18. $(7-3y)(49+21y+9y^2)$.

練習第三十六. (92.)

1. $(x+1)(x^2-x+1)$. 2. $(2x+y)(4x^2-2xy+y^2)$.

3. $(x+5)(x^2-5x+25)$. 4. $(4a+3)(16a^2-12a+9)$.

5. $(xy+z)(x^2y^2-xyz+z^2)$. 6. $(a+4)(a^2-4a+16)$.

7. $(2a^2+b)(4a^4-2a^2b+b^2)$. 8. $(x+7)(x^2-7x+49)$.

9. $(2+xyz)(4-2xyz+x^2y^2z^2)$.

10. $(y^3+4x)(y^6-4yx+16x^2)$.

11. $(ab+3x)(a^2b^2-3abx+9x^2)$.

12. $(2yz+x^2)(4y^2z^2-2yzx^2+x^4)$.

13. $(y^3+4x^2)(y^6-4y^3x^2+16x^4)$.

14. $(4a^4+x^5)(16a^8-4a^4x^5+x^{10})$.

15. $(3x^5+2a^2)(9x^{10}-6a^2x^5+4a^4)$.

16. $(3x^3+8)(9x^6-24x^3+64)$.

17. $(7+4x)(49-28x+16x^2)$. 18. $(5+3y)(25-15y+9y^2)$.

練習第三十七. (93–94.)

1. $(2x+y)(2x+y)$. 2. $(x+3y)(x+3y)$. 3. $(x+8)(x+8)$.

4. $(x+5a)(x+5a)$. 5. $(a-8)(a-8)$. 6. $(a-5b)(a-5b)$.

7. $(c-3d)(c-3d)$. 8. $(2x-1)(2x-1)$. 9. $(2a-3b)(2a-3b)$.

10. $(3a-4b)(3a-4b)$. 11. $(x+4y)(x+4y)$.

12. $(x-4y)(x-4y)$. 13. $(2x-5y)(2x-5y)$.

14. $(1+10a)(1+10a)$. 15. $(7a-2)(7a-2)$.

16. $(6a+5b)(6a+5b)$. 17. $(9a-2b)(9x-2b)$.

18. $(mn+7x^2)(mn+7x^2)$.

練習第三十八. (95–97.)

1. $(a+2)(a+3)$. 2. $(a-2)(a-3)$. 3. $(a+1)(a+5)$.

4. $(a-1)(a-5)$. 5. $(a-1)(a+5)$. 6. $(a+1)(a-5)$.

7. $(c-3)(c-6)$. 8. $(c+3)(c+6)$. 9. $(c-3)(c+6)$.

10. $(c+3)(c-6)$. 11. $(x+2)(x+7)$. 12. $(x-2)(x-7)$.

13. $(x+2)(x-7)$. 14. $(x-4)(x-5)$. 15. $(x+4)(x-5)$.

16. $(x-4)(x+5)$. 17. $(x-3)(x-7)$. 18. $(x+3)(x-7)$.

19. $(x-3)(x+7)$. 20. $(x-7)(x-8)$. 21. $(x+7)(x-8)$.

22. $(x-1)(x-9)$. 23. $(x+3)(x+10)$. 24. $(x-3)(x+10)$.

25. $(x+3)(x-10)$. 26. $(a-2b)(a+3b)$. 27. $(a+2b)(a-3b)$.

28. $(a-b)(a+4b)$. 29. $(a+b)(a-4b)$. 30. $(ax+7)(ax-9)$.

31. $(a-7x)(a+9x)$. 32. $(a-4b)(5-5b)$. 33. $(xy-3z)(xy-16z)$.

34. $(ab+4c)(ab+11c)$. 35. $(x-4y)(x-9y)$.

36. $(x+7y)(x+12y)$. 37. $(ax-6y)(ax-17y)$.

38. $(x+2y)(x-2y)(x^2-5y)$. 39. $(a^2x^2-11y)(a^2x^2-23y^2)$.

40. $(a^3b^3-11c^2)(a^3b^3-12c^2)$. 41. $(a+4bc)(a-4bc)$.

42. $(a+8bc)(a-12bc)$. 43. $(a+6bc)(a-16bc)$.

44. $(a-3bc)(a+32bc)$. 45. $(a+2bc)(a-48bc)$.

46. $(a+bc)(a+48bc)$. 47. $(x+9yz)(x-27yz)$.

48. $(xy+13z)(xy-14z)$.

練習第三十九. (97-98.)

1. $a(a^2-7)$. 2. $ab(3ab-2a^2+3b^2)$.

3. $(a-b+1)(a-b)$. 4. $(a+b+1)(a+b-1)$.

1. $(a+2b)(a^2-2ab+4b^2)$. 6. $(x+2y+1)(x-2y)$.

7. $(a-b)(a^2+ab+b^2+1)$. 8. $(a-3b)(a-3b)$.

9. $(x+1)(x-2)$. 10. $(x+1)(x-3)$. 11. $(x-3)(x+7)$.

12. $(a+2)(a-13)$. 13. $(x^2+3)(a+b)$. 14. $(x-3)(x-y)$.

15. $(x-3)(x-4)$. 16. $(a+2b)(a+3b)$. 17. $(x^2+5)(x^2+5)$.

18. $(x-9)(x-9)$.　　19. $(x-10)(x-11)$.

20. $(x+8)(x+1)$.　　21. $(x-8)(x-11)$.

22. $(x^2+1)(x-1)$.　　23. $x^2(3x+1)(3x-1)$.

24. $(1+a-b)(1-a+b)$.　　25. $(a+b)(a^2-ab+b^2+1)$.

26. $(m+n)(m-n)(x+y)$.　　27. $(x+y+z)(x-y-z)$.

28. $(z+x-y)(z-x+y)$.　　29. $(2a^2+3a-1)(2a^2-3x+1)$.

30. $(2x-y)(4x^2+2xy+y^2)$.　　31. $a^2(x-3y)$.

32. $(x-3y)(x^2+3xy+9y^2)$.　　33. $(x-5)(x+8)$.

34. $(x-2y)(x+5y)$.　　35. $(1+4x)(1-4x)$.

36. $a^2(a^2+3b^2)(a^2-3b^2)$.　　37. $x(x+y)(x+2y)$.

38. $x^2(x+y)(x+3y)$.　　39. $(x-2y^2)(x-2y^2)$.

40. $(4x^2+1)(4x^2+1)$.　　41. $a^2(3a+2c)(3a-2c)$.

42. $ab(a+b)(a-2b)$.　　43. $(x+2)(x^2-2x+4)(x-1)$.

44. $(a+y)(a^2-ay+y^2)(a-y)$.　　45. $(15+y^2)(14-y^2)$.

46. $2(a^3+12)(a^3-11)$.　　47. $(8+xy)(9-xy)$.

48. $yz(y+13)(y-7)$.　　49. $(p-4q)(p+4q+1)$.

50. $(x+y-z)(x-y+z)$.　　51. $(1+m+n)(1-m-n)$.

52. $(c+1)(c^2-c+1)(x+1)(x-1)$.

53. $2(1+4x+4y)(1-4x-4y+16x^2+32xy+16y^2)$.

54. $(c-d))(1+2c-2d)(1-2c+2d)$.

55. 1. 56. a^2. 57. $20y$或$-20y$. 58. $49z^2$.

59. $40xy$或$-40xy$. 60. $36y^2$. 61. $25a^4$. 62. $9z^2$.

練習第四十. (101-102.)

1. 6. 2. $5x^3$. 3. $6ax$. 4. $7ab^2$.

5. 7. 6. $2a^2b^2$. 7. $x+3y$. 8. $x+3$.

9. $2a+1$. 10. $x+y$. 11. $a+x$. 12. $a+2b$.

13. $x-1$. 14. $x+3$. 15. x^2-x+1. 16. $x-1$.

17. $x-6$. 18. $x-y$, 19. $x-5$. 20. $a-b-c$.

21. $x+2y$. 22. $x+4y$. 23. $x^2+2xy+4y^2$. 24. $x-2$.

25. $1-3a$. 26. $x-7$. 27. $2a+b$. 28. $x+y-z$.

練習第四十一. (103-104.)

1. $18x^2y^3$. 2. $6a^2bc^3$. 3. $20a^3b^3$.

4. $30a^3b^4$. 5. $189x^3y^5$. 6. $x^2y^3z^3$.

7. $a^2(a+1)$. 8. $x^2(x-3)$. 9. $x(x+1)(x-1)$.

10. $x(x+1)(x-1)$. 11. $yx(x+y)$. 12. $x(x+2)^2$.

13. $(a+2)^2(a+3)$. 14. $(c-4)(c+5)(c-6)$.

15. $(b-5)(b-6)(b+7)$. 16. $(y-4)(y+5)(y-6)$.

17. $(z-5)(z-6)(z+7)$.

18. $(x-4)(x+8)(x-8)(x^2+4x+16)$.

19. $(a+b)^2(a-b)^2$.　　20. $4a^2b(a+b)^2(a-b)$.

21. $(y+2)(y+3)(y+4)$.　　22. $(x+1)(x-1)(x^2+1)$.

23. $(1+x)(1-x)(1+x+x^2)$.　　24. $(x+y)^2(x-y)^2$.

25. $x(x-3)(x+5)(x^2+3x+9)$.

26. $(a+b+c)^2(a+b-c)$.

27. $(x-a)(x-b)(x-c)$.

28. $a(a+b+c)(a+b-c)$.

29. $(a+b)^2(a-b)(a^2+ab+b^2)$.

30. $30(p+q)(p-q)(p^2-pq+q^2)$.

31. $z^2(z+2)(z-2)(z^2+2z+4)$.

32. $18x^2(a+b)^2(a-b)^2$.

練習第四十二. (106.)

1. $\frac{1}{3b}$.　　2. $\frac{4m}{5n}$.　　3. $\frac{3m}{4p^2}$.　　4. $\frac{x^2}{2yz}$.

5. $\frac{a^3b^3}{3c^2}$.　　6. $\frac{2xy}{3}$.　　7. $\frac{2m}{3p}$.　　8. $\frac{3b^2c}{4a^3}$.

9. $\frac{2y^2z^4}{3}$.　　10. $\frac{b}{c}$.　　11. $\frac{2a-3b}{2a}$.　　12. $\frac{3a}{a+2}$.

13. $\frac{x}{x-1}$.　　14. $\frac{y}{x^2+3xy+9y^2}$.　　15. $\frac{x+1}{x-5}$.　　16. $\frac{x+1}{x-2}$.

17. $\frac{a+b+c}{a}$.　　18. $\frac{x+5}{x+3}$.

練習第四十三. (107.)

1. $a+b+\dfrac{2}{a-b}$.
2. $a-b-\dfrac{2}{a+b}$.
3. $x-1+\dfrac{2a}{a^2-a-1}$.
4. $2x-4+\dfrac{5}{x+1}$.
5. $4x^2-2x+1-\dfrac{1}{2x+1}$.
6. $5x+4+\dfrac{x+7}{x^2+x-1}$.
7. $a+\dfrac{5a-2}{a^2+a+2}$.
8. y^2-yx+x^2.
9. $x^2-4x+3+\dfrac{2x-4}{x^2+x+1}$.
10. $x^3+x+1+\dfrac{2x+2}{x^2-x-2}$.

練習第四十四. (108-109.)

1. $\dfrac{x^2+y^2}{x-y}$.
2. $\dfrac{x^2+y^2}{x+y}$.
3. $\dfrac{2y}{x+y}$.
4. $-\dfrac{2ax}{a-x}$.
5. $-\dfrac{x+2}{x-3}$.
6. $-\dfrac{2x^2-6x+5}{x-2}$.
7. $\dfrac{x^3+x^2-2x+1}{x+2}$.
8. $\dfrac{2a^2-11a+6}{a-3}$.
9. $\dfrac{-2a^3+a^2+2a-3}{a-1}$
10. $\dfrac{3a^4+6a^3-14a^2-4}{3a^2+1}$.

練習第四十五. (110.)

1. $\dfrac{x(x+a)}{(x+a)(x-a)}$, $\dfrac{x^2}{(x+a)(x-a)}$.
2. $\dfrac{a(a-b)}{(a+b)(a-b)}$, $\dfrac{a^2}{(a+b)(a-b)}$.
3. $\dfrac{1-2a}{(1+2a)(1-2a)}$, $\dfrac{1}{(1+2a)(1-2a)}$.

4. $\frac{9}{(4+x)(4-x)}$, $\frac{(4-x)^2}{(4+x)(4-x)}$.

5. $\frac{a^2}{(3-a)(9+3a+a^2)}$, $\frac{a(9+3a+a^2)}{(3-a)(9-3a+a^2)}$.

6. $\frac{x+2}{(x+2)(x-2)(x-3)}$, $\frac{x-2}{(x+2)(x-2)(x-3)}$.

練習第四十六. (112.)

1. $\frac{4x+2}{5}$.　2. $\frac{13x+3}{12}$.　3. $\frac{5(9x-13)}{42}$.

4. $\frac{51x+31}{36}$.　5. $\frac{x-5}{3}$.　6. $\frac{5(x-y)}{8x}$.

7. $\frac{47x-173}{60}$.　8. $\frac{6x^3-8x^2-9x-12}{30x^3}$.

9. $\frac{a^3-b^3+c^3-a^2-b^2-c^2-abc}{abc}$.

練習第四十七. (114.)

1. $\frac{2x+1}{(x+3)(x-2)}$.　2. $\frac{2x}{x^2-1}$.　3. $\frac{3x+16}{(x-8)(x+2)}$.

4. $\frac{4ax}{a^2-x^2}$.　5. $\frac{ax}{x^2-a^2}$.　6. $-\frac{4ab}{4a^2-b^2}$.

7. $\frac{1}{9-a^2}$.　8. $\frac{b}{a^2-b^2}$.　9. $\frac{5x+8}{x^2-4}$.

10. $\frac{1+x}{1-9x^2}$.　11. $\frac{3(a^2+4a+1)}{a(a+1)(a+3)}$.　12. $\frac{2}{x^2-1}$.

13. $\frac{2x^2}{(x+2)(x-3)}$.　14. 0.

練習第四十八.(114–115.)

1. 0. 2. $\frac{2(a^2+b^2)}{a^2-b^2}$. 3. $\frac{7a}{1-a^2}$.

4. $\frac{x-10y}{4x^2-25y^2}$. 5. $\frac{2}{x+4y}$. 6. $\frac{2(x+6)}{4x^2-9}$.

練習第四十九.(117–118.)

1. $\frac{20}{3bc}$. 2. $\frac{2ay}{3}$. 3. $\frac{7p^2}{4xz}$. 4. $\frac{2a^2cm}{7}$.

5. $\frac{30}{abc}$. 6. abc. 7. b^2. 8. $\frac{x+a}{x-2a}$.

9. $\frac{xy}{2c-1}$. 10. $\frac{a+10}{a+3}$. 11. $\frac{3x+2y}{x-2}$. 12. $\frac{5a+b}{4a+3b}$.

13. $\frac{x-7}{a+b+c}$. 14. $\frac{x(x+1)}{x-5}$. 15. $\frac{a+1}{a+5}$. 16. 1.

17. $\frac{x(x+y)}{x+1}$. 18. $\frac{b}{a-b}$. 19. abc. 20. $\frac{(x+2y)(x+1)}{(x+y)(x+2)}$.

練習第五十.(119–120.)

1. $\frac{x+y}{z}$. 2. $\frac{12x+3y}{12x-4y}$. 3. $\frac{abd-21d^2}{21cd-7ab}$.

4. $\frac{x^2+x-2}{x^2-x-2}$. 5. 1. 6. $\frac{x+y}{x^2-2xy+y^2}$.

7. $\frac{a+b}{a-b}$. 8. $4(3a+8)$. 9. $\frac{y+x}{y-x}$.

10. x. 11. $\frac{1}{x}$. 12. $\frac{x^2(x-3)}{x-2}$.

13. $a-1$. 14. $\frac{4a}{a-x}$. 15. $4(3x+8)$.

16. $-\dfrac{a+1}{a^2(a+3)}$.　17. $\dfrac{x-z}{1+xz}$.　18. $\dfrac{b}{a}$.

練習第五十一. (123-124.)

1. 5.　2. 7.　3. $2\frac{1}{2}$.　4. 20.　5. $37\frac{5}{19}$.　6. $2\frac{1}{3}$.
7. 17.　8. 4.　9. 4.　10. 1.　11. -16.　12. 11.
13. -2.　14. -2.　15. 5.　16. 9.　17. -1.

練習第五十二. (124-125.)

1. 2.　2. 2.　3. -33.　4. 1.　5. $\frac{2}{3}$.　6. $1\frac{1}{2}$.　7. 2.
8. 8.　9. 5.　10. $\frac{3}{7}$.　11. 1.　12. 1.　13. 3.

練習第五十三. (126.)

1. 33.　2. 2.　3. $3\frac{1}{2}$.　4. $1\frac{5}{37}$.　5. 7.　6. 3.

練習第五十四. (127.)

1. $a+b$.　2. $\dfrac{a}{2}$.　3. $\dfrac{b}{2}$.　4. $2a$.　5. $b-a$.　6. $\dfrac{ab}{a+b+c}$.
7. $\dfrac{a^2-b^2}{2a}$.　8. $\dfrac{2b}{a}$.　9. $\dfrac{2b^2-a^2}{4b-3a}$.　10. 1.　11. $3(a-b)$.

練習第五十五. (127-128.)

1. 35.　2. 70.　3. 86.　4. 57,58.

練習第五十六. (128-129.)

1. 19,81.　2. 24,100.　3. 15,64.

4. 12,103. 5. 295,25. 6. 464,36.

練習第五十七. (130-131.)

1. 12 歲. 2. 60 歲, 10 歲. 3. 25 歲, 5 歲.

4. $17\frac{1}{3}$ 年後. 5. 35 年前. 6. 36 歲, 12 歲.

7. 25 年後. 8. 30 歲, 15 歲. 9. 68 歲, 12 歲.

練習第五十八. (131-132.)

1. $1\frac{3}{7}$日. 2. $1\frac{13}{47}$日. 3. $1\frac{1}{20}$月. 4. 15日. 5. 12時. 6. 10日.

練習第五十九. (132-133.)

1. $7\frac{5}{18}$時. 2. $2\frac{2}{3}$時. 3. $\frac{10}{11}$時. 4. $1\frac{1}{81}$時. 5. 30時.

練習第六十. (133-134.)

1. 36 英里. 2. 26 時. 3. 8 英里. 4. 240 英里.

練習第六十一. (134-135.)

1. 600 步. 2. 700 步. 3. 犬 1440 步, 兔 1800 步.

練習第六十二. (135-136.)

1. 5 點 $27\frac{3}{11}$分. 2. 2 點 $27\frac{3}{11}$分. 3. 2 點 $43\frac{7}{11}$分.

4. 1 點 $21\frac{9}{11}$分. 5. 1 點 $38\frac{2}{11}$分. 6. 7 點 $38\frac{2}{11}$分.

練習第六十三. (136-137.)

1764 方尺. 2. 23 尺, 18 尺. 3. 20 尺, 14 尺.

4. 15 尺, 12 尺. 5. 40 尺, 30 尺.

練習第六十四. (141-142.)

1. $90°0'30''$, $30°30'$.	2. \$133$\frac{1}{3}$.	3. \$2000.	4. \$4000.
5. \$3000.	6. \$500.	7. 5%.	8. 6%.
9. 3 年.	10. 9$\frac{3}{8}$年.	11. \$25,000.	12. \$20,000.
13. 6%.	14. 20 年.	15. \$30,000.	16. \$24,000.

練習第六十五. (146-148.)

1. $x=2$, $y=1$.	2. $x=3$, $y=2$.	3. $x=5$, $y=1$.	4. $x=2$, $y=1$.
5. $x=1$, $y=2$.	6. $x=6$, $y=1$.	7. $x=3$, $y=21$.	8. $x=7$, $y=7$.
9. $x=23$, $y=-1$.	10. $x=2$, $y=1$.	11. $x=35$, $y=20$.	12. $x=2$, $y=1$.
13. $x=1$, $y=2$.	14. $x=3$, $y=2$.	15. $x=1$, $y=2$.	16. $x=4$, $y=3$.
17. $x=12$, $y=4$.	18. $x=12$, $y=21$.	19. $x=5$, $y=7$.	20. $x=5$, $y=2$.
21. $x=18$, $y=6$.	22. $x=3$, $y=2$.	23. $x=3$, $y=2$.	24. $x=7$, $y=8$.
25. $x=8$, $y=-2$.	26. $x=\frac{a}{a-b}$, $y=\frac{b}{a+b}$.	27. $x=1+\frac{b}{a}$, $y=1-\frac{b}{a}$.	

練習第六十六. (149-150.)

1. $x=3,\ y=2.$ 2. $x=-2,\ y=1.$ 3. $x=10,\ y=2.$ 4. $x=-2,\ y=\frac{1}{2}.$

5. $x=5,\ y=-3.$ 6. $x=2,\ y=3.$ 7. $x=2,\ y=1.$ 8. $x=2,\ y=0.$

9. $x=5,\ y=3.$ 10. $x=3,\ y=5.$ 11. $x=\frac{1}{a+b},\ y=0.$ 12. $x=a+b,\ y=a-b.$

練習第六十七. (151.)

1. 甲 \$520,乙 \$440. 2. 23,17. 3. 20,16. 4. 絨 \$6,絲\$3.
5. 小麥 \$1,大麥 \$$\frac{4}{5}$. 6. 茶 \$$\frac{1}{2}$,咖啡 \$$\frac{1}{4}$. 7. 馬 \$92,牛\$64.

練習第六十八. (152.)

1. $\frac{5}{7}$. 2. $\frac{13}{36}$. 3. $\frac{3}{20}$. 4. $\frac{6}{21}$. 5. $\frac{7}{22}$.

練習第六十九. (153-154.)

1. 45. 2. 72. 3. 54. 4. 75,57.

練習第七十. (154-155.)

1. 本銀 \$2500,利率 4%. 2. 本銀 \$1600,利率 6%.
3. 第一次資本 \$6000 第二次資本 \$4000.

練習第七十一. (155-158.)

1. 22,18. 2. 60,8. 3. $\frac{14}{17}$. 4. 米每斗 \$1,麥每斗 \$$\frac{4}{5}$.

5. 甲\$235,乙\$65. 6. 甲\$70, 乙\$30. 7. 橙6分,檸檬4分.

8. 甲30枚,乙10枚. 9. A至B 91里;水流每時1里.

10. 父48歲,子23歲. 11. $\frac{ap}{p+q}$.

12. 每斤a圓者$c-b$斤,每斤b圓者$a-c$斤.

13. 甲種$\frac{6c}{7a}$丈,乙種$\frac{c}{7b}$丈. 14. $\frac{ab}{(a+b)c-2ab}$. 15. 60里.

練習第七十二. (159.)

1. $x=2$, $y=1$, $z=3$.
2. $x=-1$, $y=-2$, $z=4$.
3. $x=9$, $y=11$, $z=13$.
4. $x=4$, $y=0$, $z=5$.
5. $x=10$, $y=7$, $z=3$.
6. $x=51$, $y=76$, $z=1$.
7. $x=b+c$, $y=c+a$, $z=a+b$.
8. $x=a$, $y=b$, $z=c$.
9. $x=1/2a$, $y=1/2b$, $z=1/2c$.
10. $x=a/2$, $y=b/2$, $z=c/2$.

練習第七十三. (162-163.)

1. ±2. 2. ±3. 3. ±5. 4. ±8. 5. ±7. 6. ±5.

7. ±5. 8. ±3. 9. ±3, 10. ±3. 11. 12,16.

12. 橘12枚,每枚價3分. 13. 寬3丈.

14. 長144英尺,寬36英尺.

練習第七十四. (165-167.)

1. 9,3.	2. 4,2.	3. 3,1.	4. $1, -\frac{1}{3}$.
5. $1, -3$.	6. $\frac{4}{3}, \frac{4}{3}$.	7. $1, \frac{1}{5}$.	8. 3, 1.
9. $\frac{3}{4}, \frac{1}{4}$.	10. $3, \frac{1}{3}$.	11. $17, -3$.	12. 25, 9.
13. $4, -5$.	14. $4, -3$.	15. 5, 1.	16. $2, -6$.
17. $2, -5\frac{1}{2}$.	18. $4\frac{1}{3}, -3\frac{2}{3}$.	19. 5, 11.	20. 2, 2.
21. $2, \frac{1}{8}$.	22. $4, -\frac{9}{5}$.	23. $2, -3$.	24. 10, 2.
25. $3, -2\frac{1}{3}$.	26. 2, 2.	27. $\frac{1}{2}, -3$.	28. $5, \frac{1}{5}$.
29. 7, 2.	30. $4, -\frac{8}{9}$.	31. 8, 2.	32. $4, -7$.
33. 0, 3.	34. 0, 7.	35. 5, 2.	36. $4, -1$.

37. $a, 3a$. 38. $\frac{a+b}{3}, \frac{a-b}{3}$.

39. $\frac{-p\pm\sqrt{p^2-4q}}{2}$. 40. $\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$.

練習第七十五. (168.)

1. 1, 2.	2. $-2, -3$.	3. $4, -2$.	4. $2, -12$.
5. 0, 6.	6. $0, -5$.	7. $0, \frac{4}{3}$.	8. ± 25.
9. 0, 0.	10. ± 7.	11. ± 9.	12. ± 6.
13. $0, ab$.	14. $0, -\frac{b}{a}$.	15. $2a, 2b$.	16. $a\pm b$.

練習第七十六. (172-173.)

1. 6,5. 2. 15,5. 3. 父40歲,子8歲. 4. 9,10.

6. 長12尺,寬1尺. 7. 12尺. 8. 長20尺,寬18尺.

9. 長70尺,寬50尺. 10. 父54歲,子10歲.

練習第七十七. (173-174.)

1. 每時6英里. 2. 7丈. 3. 5擔. 4. 8柄. 5. 36.

6. 18人. 7. 4里. 8. 24日. 9. 4時. 10. 15里.

練習第七十八. (178.)

1. $\left.\begin{matrix}x=\frac{7}{8}\\y=\frac{1}{8}\end{matrix}\right\}.$　2. $\left.\begin{matrix}x=5\\y=4\end{matrix}\right\},\left.\begin{matrix}-4\\-5\end{matrix}\right\}.$　3. $\left.\begin{matrix}x=3\\y=-7\end{matrix}\right\},\left.\begin{matrix}7\\-3\end{matrix}\right\}.$

4. $\left.\begin{matrix}x=2\\y=3\end{matrix}\right\}.$　5. $\left.\begin{matrix}x=2\\y=3\end{matrix}\right\},\left.\begin{matrix}3\\2\end{matrix}\right\}.$　6. $\left.\begin{matrix}x=2\\y=2\end{matrix}\right\}.$

7. $\left.\begin{matrix}x=3\\y=1\end{matrix}\right\},\left.\begin{matrix}\frac{5}{4}\\-\frac{5}{2}\end{matrix}\right\}.$　8. $\left.\begin{matrix}x=\frac{3}{7}\\y=\frac{1}{7}\end{matrix}\right\}.$　9. $\left.\begin{matrix}x=2\\y=3\end{matrix}\right\},\left.\begin{matrix}3\\2\end{matrix}\right\}.$

10. $\left.\begin{matrix}x=3\\y=2\end{matrix}\right\},\left.\begin{matrix}\frac{2}{5}\\-\frac{8}{5}\end{matrix}\right\},$　11. $\left.\begin{matrix}x=5\\y=2\end{matrix}\right\},\left.\begin{matrix}3\\4\end{matrix}\right\}$　12. $\left.\begin{matrix}x=1\\y=3\end{matrix}\right\},\left.\begin{matrix}\frac{5}{4}\\2\end{matrix}\right\}.$

13. $\left.\begin{matrix}x=0\\y=0\end{matrix}\right\},\left.\begin{matrix}\frac{9}{5}\\\frac{8}{5}\end{matrix}\right\}.$　14. $\left.\begin{matrix}x=0\\y=b\end{matrix}\right\},\left.\begin{matrix}a\\0\end{matrix}\right\}.$

練習第七十九. (181–182.)

1. $\left.\begin{array}{l}x=\pm5\\ y=\pm3\end{array}\right\},\left.\begin{array}{l}\pm3\\ \pm5\end{array}\right\}.$

2. $\left.\begin{array}{l}x=\pm3\\ y=\pm2\end{array}\right\}$

3. $\left.\begin{array}{l}x=\mp3\\ y=\pm5\end{array}\right\}\left.\begin{array}{l}36\\ \mp\frac{23}{2}\end{array}\right\}.$

4. $\left.\begin{array}{l}x=\pm7\\ y=\pm2\end{array}\right\},\left.\begin{array}{l}\pm\sqrt{3}\\ \mp3\sqrt{3}\end{array}\right\}.$

5. $\left.\begin{array}{l}x=\pm3\\ y=\pm2\end{array}\right\}\left.\begin{array}{l}\pm4\\ \pm5\end{array}\right\}.$

6. $\left.\begin{array}{l}x=\pm2\\ y=\pm3\end{array}\right\},\left.\begin{array}{l}\pm5\\ \pm6\end{array}\right\}.$

7. $\left.\begin{array}{l}x=\pm\frac{3}{2}\\ y=\pm\frac{1}{2}\end{array}\right\},\left.\begin{array}{l}\pm\frac{1}{2}\\ \pm\frac{3}{2}\end{array}\right\}.$

8. $\left.\begin{array}{l}x=\pm2\\ y=\pm1\end{array}\right\},\left.\begin{array}{l}\pm1\\ \pm2\end{array}\right\}.$

9. $\left.\begin{array}{l}x=\pm3\\ y=\pm1\end{array}\right\},\left.\begin{array}{l}0\\ \sqrt{\frac{29}{8}}\end{array}\right\}.$

10. $\left.\begin{array}{l}x=0\\ y=\pm\sqrt{-\frac{2}{3}}\end{array}\right\}\left.\begin{array}{l}\pm\sqrt{3}\\ \pm\frac{2}{3}\sqrt{3}\end{array}\right\}$

11. $\left.\begin{array}{l}x=\pm2\\ y=\pm3\end{array}\right\},\left.\begin{array}{l}\pm\frac{16}{3\sqrt{3}}\\ \pm\frac{18}{3\sqrt{3}}\end{array}\right\}.$

12. $\left.\begin{array}{l}x=\pm1\\ y=\pm3\end{array}\right\},\left.\begin{array}{l}\pm3\\ \pm1\end{array}\right\}.$

13. $\left.\begin{array}{l}x=0\\ y=0\end{array}\right\},\left.\begin{array}{l}1\\ 2\end{array}\right\},\left.\begin{array}{l}\frac{15}{22}\\ \frac{9}{22}\end{array}\right\}$

14. $\left.\begin{array}{l}x=0\\ y=0\end{array}\right\},\left.\begin{array}{l}2\\ 1\end{array}\right\},\left.\begin{array}{l}\frac{20}{7}\\ \frac{16}{7}\end{array}\right\}.$

15. $\left.\begin{array}{l}x=\pm9\\ y=\pm3\end{array}\right\}.$

16. $\left.\begin{array}{l}x=\pm8\\ y=\pm6\end{array}\right\},\left.\begin{array}{l}\pm8\sqrt{-1}\\ \mp6\sqrt{-1}\end{array}\right\}.$

17. $\left.\begin{array}{l}x=\frac{5}{2}\\ y=\frac{8}{5}\end{array}\right\}.$

18. $\left.\begin{array}{l}x=\frac{1}{2}\\ y=2\end{array}\right\}.$

練習第八十. (187–189.)

1. $\pm3,\ \pm\sqrt{30}.$

2. $\pm4,\ \pm5.$

3. $5,4;\ \frac{1}{2}(-7+\sqrt{33}),\ \frac{1}{2}(-7-\sqrt{33}).$

4. $3,1;\ 3,-2;\ -4,1;\ -4,-2.$

5. $2,2;\ \frac{1}{2}(-3+\sqrt{21}),\ \frac{1}{2}(-3-\sqrt{21}).$

6. $4,6;\ \frac{1}{2}(-11+\sqrt{-59}),\ \frac{1}{2}(-11-\sqrt{-59}).$

7. $\frac{1}{2}, \frac{1}{3}; -\frac{5}{3}, \frac{5}{2}$.　8. $\pm\frac{1}{2}, \pm\frac{1}{3}; \pm\frac{1}{3}\sqrt{-1}, \pm\frac{1}{2}\sqrt{-1}$.

9. 7, 4; −4, −7. 10. 3, 6.　11. 甲 $\frac{5}{3}$ 哩,乙 $\frac{10}{3}$ 哩.

12. 每時 3 哩.　13. 長 6 尺,寬 4 尺. 14. 28 枚, 12 枚.

15. 甲種 400 尺,乙種 300 尺.　16. 64 或 46.

17. 甲至乙 60 哩;原速度每時 10 哩.

18. 距離 100 哩.　19. 160 件;每件 4 角.

20. 24 日;甲每日 4 角,乙每日 3 角.

21. A 每時 50 哩,乙每時 40 哩;距離 1800 哩.

22. 距離 756 哩; A 每時 36 哩, B 每時 27 哩.

練習第八十一. (192.)

1. $a+b+c$.　2. $2a-b-3c$.　3. $5a^2-3b^2-2c^2$.

4. x^2+x+1.　5. $x^2-2xy+y^2$.　6. $2a^2-3ab+5b^2$.

7. $4-12x+9x^2$.　8. x^3+x^2+x+1.　9. $7+8x^2+5x^3$.

10. $x^3-11x+17$.　11. $4x^3+3x^2y-2y^3$.　12. $x^2+x(y+z)+yz$.

練習第八十二. (196–197.)

1. 18.　2. 23.　3. 31.　4. 3.2.　5. 7.3.　6. 232.

7. 785.　8. 589.　9. 1225.　10. 1023.　11. 1234.　12. 5601.

13. 1.4142…　14. 1.7320…　15. 2.2360…　16. 2.4494…

17. 0.7071…　18. 0.9486…　19. 0.7071…　20. 0.8164…

21. 0.8660…　22. 0.8944…　23. 0.8128…　24. 0.9258…

練習第八十三.　(200.)

1. $x+y$.　2. $2x-1$.　3. $2x-3y$.　4. $4a-3x$.

5. $1+x+x^2$.　6. x^2-x+1.　7. $1+4x+4x^2$.

8. $1-3x+4x^2$.　9. $1-3x^2+2x^4$.　10. $1-x+x^2-x^3$.

練習第八十四.　(206.)

1. 36.　2. 35.　3. 45.　4. 65.　5. 48.　6. 637.

7. 478.　8. 638.　9. 503.　10. 728.　11. 12.34.　12. 12.25.

13. 1.5874…　14. 2.1544…　15. 4.4310…　16. 1.3572…

17. 1.2703…　18. 1.4454…　19. 0.2154…　20. 0.3684…

21. 0.5843…　22. 0.873…　23. 0.9085…　24. 0.9352…

25. 0.721 …　26. 2.381…　27. 9.076…　28. 178.1 …

練習第八十五.　(211-212.)

4. B之坐標爲3或-9.

5. $(2,2),(-2,2),(-2,-2),(2,-2)$,或$(2,2),(-2,2),(-2,6),(2,6)$.

6. $(1,1,1)(1,1,-1);(1,-1,-1);(1-1,1);(-1,1,1);(-1,1,-1);$
$(-1,-1,-1);(-1,-1,1)$.

練習第九十一.　(237-238.)

1. $(-1,1)$.　2. $(0,2)$.　3. $(-2,7)$.　4. $(2,3)$.　5. $(1,1)$.

6. $(3,0)$.　7. $(-3,-4)$.　8. $(1,1)$.　9. $(5,2)$.　10. $(-2,-4)$.

11. $(-1,-3)$.　12. $(-1,3)$.　13. $(10,9)$.　14. $(2,-4)$.

15. $(1,-1)$.　16. $(6,-1\frac{1}{8})$,　17. $(8\frac{5}{6},1\frac{5}{6})$.　18. $(\frac{13}{19},\frac{66}{19})$.

19. $(-\frac{85}{28},-\frac{65}{14})$.　20. $(-\frac{14}{13},\frac{207}{36})$.

練習第九十二. (245-246.)

1. $(4,1),(1,4)$.　2. $(9,4),(-4,-9)$.　3. $(1,1),(1,1)$.

4. $(2,1),(0,-5)$.　5. $(7,1),(\frac{35}{13},\frac{85}{13})$.　6. $(1,2),(1,2)$.

7. $(6,2),(-6,-2)$.　8. $(-4,-4),(\frac{4}{5},-\frac{4}{5})$.　9. $(8,8)(8,8)$.

10. $(6,2),(3,4)$.　11. $(18,8),(-18,-8)$.　12. $(2,1),(2,1)$.

13. $(0,0),(2,4)$.　14. $(3,2),(-3,-2)$.　15. $(4,-3),(4,-3)$.

16. $(5,2),(2\frac{1}{3},-\frac{1}{3})$.　17. $(2,1),(\frac{10}{33},\frac{25}{11})$.　18. $(3,-1)$.

19. $(6,9),(8,12)$.　20. $(4,6),(-3\frac{3}{5}-5\frac{2}{5})$.　21. $(9,7),(-9,-7)$.

22. $(3,4),(-\frac{8}{5},-\frac{16}{5})$.　23. $(3,2),(2,1)$.　24. $(4,2)(16,-10)$.

25. $(14,10),(-\frac{8}{3},-\frac{15}{14})$.　26. $(4,0),(-\frac{1}{3},-4\frac{1}{3})$.　27. $(4,3),(-\frac{7}{3},\frac{7}{15})$.

28. $(4,1),(-\frac{41}{19},\frac{1}{19})$.　29. $(2,1),(6,5)$.　30. $(11,7),(10\frac{5}{8},6\frac{3}{4})$.

31. $\left(\frac{23+\sqrt{889}}{18},\frac{-22+\sqrt{889}}{9}\right),\left(\frac{23-\sqrt{889}}{18},\frac{-22-\sqrt{889}}{9}\right)$.

32. $\left(\frac{19+\sqrt{-407}}{8},\frac{47+3\sqrt{-407}}{8}\right),\left(\frac{19-\sqrt{-407}}{8},\frac{47-3\sqrt{-407}}{8}\right)$.

練習第九十三. (255-256.)

1. $x=\pm3;\ y=\pm2$.　2. $x=5,-2;\ y=3,-4$.

3. $0,\frac{1}{2}(3\pm\sqrt{-3});\ 0,\frac{1}{2}(3\mp\sqrt{-3})$.　4. $\pm2;\ \pm1$.

6. $7,-5;\ 4,-8$.　7. $\pm\sqrt{2};\ \mp\sqrt{2}$.

8. $2, 1, -2\pm\sqrt{-5}; 1, 2, -2\mp\sqrt{-5}$.

9. $6, 2; 3, 4\frac{1}{3}$.

10. $\pm 7, \pm\frac{11}{3}\sqrt{3}; \pm 3, \pm\frac{1}{3}\sqrt{3}$.

11. $7, 4\frac{2}{3}; 3, -1\frac{2}{3}$.

12. $\pm 3, \pm\frac{5}{13}\sqrt{13}; \pm 2, \mp\frac{12}{13}\sqrt{13}$.

13. $0, 3, \frac{3}{5}; 0, 2, -\frac{2}{5}$.

14. $8, 2; 2, 8$.

15. $3, -4, 3, -4; 2, 2, -3, -3$.

16. $0, 0, 2; 0, 3, 0$.

17. $7, 3; 3, 7$.

18. $4, -3, \pm 4\sqrt{3}+6; 3, -4, \pm 4\sqrt{3}-6$.

19. $2, 0, \frac{3}{2}; 3, 1, 1$.

20. $6, 1; 3, -2$.

21. $\pm 5, \pm 3\sqrt{\frac{15}{17}}; \pm 3, \mp 5\sqrt{\frac{15}{19}}$.

22. $\pm 8, \pm\sqrt{-36}; \pm 6, \pm\sqrt{-64}$.

23. $2(\pm\sqrt{6}+3), 3(\mp\sqrt{6}-2)$.

24. $5, 2; 3, \frac{3}{2}$.

25. $2, 12; 3, \frac{4}{3}$.

26. $\frac{1}{8}(1\pm\sqrt{-119}); \frac{1}{5}(-4\pm\sqrt{-119})$.

27. $\pm 3; \pm 2$.

28. $\pm 3, \pm 36; \pm 5, \mp 11\frac{1}{3}$.

29. $\pm 2, \pm\frac{4}{5}\sqrt{5}; \pm 1, \pm\frac{3}{5}\sqrt{5}$.

30. $\pm 4, \pm 6; \pm 2, \pm 4$.

31. $\pm 3, \pm 4, \pm 2, \pm 5$.

32. $\pm 2, \pm 5; \pm 3, \pm 6$.

33. $\pm 2, \pm 1; \pm 1, \pm 2$.

34. $\pm 7, \pm\sqrt{3}; \pm 2, \mp 3\sqrt{3}$.

35. $4, 3, 6, 2; \frac{3}{2}, 2, 1, 3$.

36. $2, \frac{2}{3}, 4, \frac{1}{3}; 2, 6, 1, 12$.

練習第九十四. (258-259.)

1. $x=0, 3; y=0, 1$.

2. $x=0, 1, \frac{15}{22}; y=0, 2, \frac{9}{22}$.

3. $8, -\frac{3}{4}; 10, -3\frac{3}{4}$.

4. $3, -7; 0, 5$.

5. $7, -8\frac{3}{4}; 3, -3\frac{3}{4}$.

6. $5, 2, 1\pm\sqrt{6}; -2, -5, -1\pm\sqrt{6}$.

7. $\frac{3}{2}; \frac{2}{3}$.

8. $\frac{6}{7}, \frac{12}{7}; \frac{7}{12}, \frac{7}{6}$.

9. $\frac{3}{4}$, 1, 0; $\frac{3}{4}$ 0, 1.　　10. 10, 0; ±1, $\pm\frac{1}{3}\sqrt{34}$.

練習第九十六. (269-270.)

1. 24:35. 此比大於3:5而小於8:7.　　3. $\frac{10}{9}$.

4. 13:15.>5:6>9:11>4:5.　　5. $a+b:a-b>a^2+b^2:a^2-b^2$.

6. 4:27.　　7. 2:3.　　8. $(a^4+a^2b^2+b^4):(a^4-b^4)$.

9. $(a-3)^2:a^2$.　　10. $(x^2-11x+28):x^2$.　　11. 1.

12. 9,12.　　13. 8,12.　　14. 10:1.

15. 1:40.　　16. 40尺, 35尺.

練習第九十七. (275-276.)

1. 70.　　2. $4y^2$.　　3. 12.　　4. a^2b^2.　　5. $\sqrt{a^2-25}$.

23. $x=3$ 或 $\frac{4}{7}$.　　24. $x=a+b$ 或 $\frac{1}{3}(a-b)$.

25. $x=\pm9, y=\pm3$.　　26. 甲 \$200, 乙 \$150.　　27. 8:7.

練習第九十八. (279-280.)

1. 75.　　2. 38.　　3. $4\frac{1}{7}$.　　4. $-8\frac{3}{4}$.　　5. 23.　　6. 0.

7. 156.　　8. 第20.　　9. 第101.　　10. 26.　　11. a.　　12. 21,22等.

練習第九十九. (282-283.)

1. 440.　　2. 201.　　3. $4\frac{1}{6}$.　　4. 128.

5. −378.　　6. $187\frac{1}{2}$.　　7. 1,3,5.　　8. 156.

9. 300.　　10. 2550碼.　　11. 5812.1.英尺.　　12. 144.9英尺.

13. 11,15. 14. 7,9,11. 15. 12英里. 16. 5, 12, 19.

17. 7500. 18. 20100. 19. 8729. 20. 12300.

練習第一百. (287-288.)

1. 243. 2. 192. 3. $\frac{3}{64}$. 4. 256.

5. ± 4. 6. ± 4. 7. 1092. 8. 765.

9. $11\frac{29}{32}$. 10. $15\frac{15}{16}$. 11. $127\frac{7}{8}$. 12. 44.

13. $1\frac{11}{64}$. 14. \$1.27. 15. \$81.90. 16. 14,641.

17. 2,6,18. 18. $5\pm 2\sqrt{6}$. 21. 9,12 或 1, -4.

中英名詞對照表

(名詞後附註數字,以表其見於本書中何頁。)

Abscissa 橫坐標,橫標,210.

Absolute value 絕對值,40.

Affected quadratic 雜二次方程式,160.

Algebra 代數學,2.

Algebraic expression 代數式,7.

Algebraic number 代數學之數,代數數,39.

Algebraic sum 代數和,43.

Alternation 更比,273.

And so on 等等,4.

Antecedent 前項,266.

Arithmetic 算術,2.

Arithmetical mean 等差中項,278.

Arithmetical means 等差內項,279.

Arithmetical progression 等差級數,277.

Arithmetical sum 算術和,43.

Arrangement 整列,8.

Ascending power 升冪,9.

Axiom 公理,23.

Axis 軸,208.

Bar 縱括,4.

Binomial 二項式,7.

Braces 包括,4.

Brackets 方括,4.

Capital 本,139.

Cartesian co-ordinates 嘉德坐標,211.

Coefficient 係數,5.

Commensurable 可通約,267.

Common difference 公差,279.

數, 5.

Numerical factor 數字因數, 5.

Numerical value 數值,值, 14.

Odd 奇, 195.

One-to-one relation 一一關係, 207.

Ordinate 縱坐標,縱標, 210.

Origin 原點, 208.

Parabola 拋物線, 227.

Parenthesis 圓括, 4.

Period 段, 193.

Plus 加, 2.

Point of intersection 交點, 235.

Polynomial 多項式, 7.

positive number 正數, 39.

Positive quantity 正量, 38.

Positive term 正項, 7.

Power 冪, 6.

Prime factor, 素因數, 99.

Prime number 素數, 99.

Prime to each other 互素, 99.

Product 積, 45.

Proportion 比例式, 270.

Proportionals 比例數, 270.

Pure quadratic 純二次方程式, 160.

Quadratic equation 二次方程式, 160.

Quantity 量, 1.

Quotient 商, 49.

Radical sign 根號, 161.

Ratio 比, 266.

Ratio of equality 等比, 266.

Ratio of greater inequality 優比, 266.

Ratio of less inequality 劣比, 266.

Rational 有理, 162.

Rational expression 有理式, 83.

Rational number 有理數, 207.

大同大學叢書叢刊書目

	定價
一元三次方程式之解法	
本大學數理研究會稿	$ .20
The Mother's Pride	
本大學英文研究會稿	.20
初等代數學問題一 代數式	
本大學試題練習題集	.10
初等代數學問題二 方程式	
本大學試題練習題集	.17
初等幾何學問題一 直線形	
本大學試題練習題集	.07
初等幾何學問題二 圓	
本大學試題練習題集	.16
初學幾何學 (初級中學適用)	
本大學教授吳在淵編	.60
近世初等代數學 (初級高級中學適用)	
本大學教授吳在淵著	2.50
初學代數學 (初級中學適用)	
胡華夫人桂馨原編　本大學校長胡敦復輯訂	

中等以上學校適用

算學補充書

商務印書館出版

▲算術

- 高等混合算學……上冊 二元八角
- 布利氏新式算學教科書（一）……一元六角
- （二）……一元四角
- （三）……二元
- 加減乘除……三角

▲代數學

- 何魯陶三氏代數學……上冊 一元四角
- 下冊 一元二角
- 初等代數學……一元三角
- 近世初等代數……二元五角
- 查理斯密初等代數學……一元二角
- 又 小代數學……一元四角
- 又 大代數學……二元五角
- 大代數學講義……三元

▲幾何學

- 近世初等幾何學……上冊 一元二角
- 下冊 一元
- 近世平面幾何學……六角
- 非歐凡里得幾何學……三角五分
- 溫德華士幾何學……一元六角
- 又 解析幾何學……一元五角
- 解析幾何學講義……一元五角
- 投影幾何學……五角

▲三角法

- 溫德華士三角法……一元二角
- 平面三角法講義……二元四角

▲題解

- 新學制初中混合算學習題答案……前三冊各二角
- 現代初中算術習題解答……一元
- 又 代數學習題解答……上冊八角
- 民國新教科書算術問題詳解……二元
- 民國新教科書代數學問題詳解……一元三角
- 又 幾何學問題詳解……一元五角
- 又 三角學問題詳解……一元五角
- 共和國教科書平三角大要問題詳解……三角五分
- 暗射中學算術題解……二冊各六角
- 又 代數學題解……二冊各六角
- 又 平面幾何題解……六角
- 又 立體幾何題解……二角五分

（以上十二種購時須有學校圖章爲憑）

- 查理斯密小代數學解式……二角五分
- 溫德華士平面幾何學解法……八角
- 又 立體幾何學解法……六角
- 幾何學難題詳解……二冊各八角
- 三角法難題詳解……八角
- 大代數學難題詳解……五角

▲算理及其他

- 羅素算理哲學……九角
- 幾何原理……四角五分
- 算尺原理及用法……三角五分
- 小學算術教學法……三角五分
- 數學遊戲大觀……上冊 一元四角
- 一葉對數表……一葉 一角

大學院審定

新時代初級中學教科書

商務印書館發行

綜合編制三民主義教本　三冊　各三角

鄒卓立編　本書三冊上冊敍述中山先生一生奮鬥的歷史，和三民主義產生的時代背景，並概括說明三民主義所包含的內容全部；中冊以闡明三民主義的思想系統爲主；下冊以闡明實現三民主義的革命方法爲主。

三民主義　三冊　各三角五分

胡愈之等編　本書第一冊爲民族主義，第二冊爲民權主義，第三冊爲民生主義。全書根據孫中山先生所著三民主義及中國國民黨歷次所發表的黨綱宣言編制。

※國語　六冊　(一)五角(二)六角

陳彬龢等編　本書所選教材純爲積極的，其塗於消極的作品，一概不錄。

本國史　二冊　各五角

王鍾麒編　本書打破歷來朝代的界限，摒棄課文，一以代表各時代的時代精神爲指歸。取材在古代則注重學術思想的變遷和制度風俗的由來；有近代則注意帝國主義的侵入和國民革命的發展。

本國地理　二冊(一)七角半(二)八角半

劉虎如編　本書分上下兩冊：上冊概說自然人文之狀況，下冊分述地方之情形。至於三民主義之真意，建國方略之計畫，亦儘量採入。

※世界史　二冊(一)五角(二)五角半

王恩爵編　本書取材係根據史的定義和世界史的意義，以可以說明各民族進化的途徑，及史蹟的因果與其相互關係者爲主要材料。

加有※各書已送大學院審查

Fundamentals of Algebra
The Commercial Press, Limited

中華民國十三年一月初版　　中華民國十八年十二月八版

大同大學叢書

(回)初學代數學一冊

每冊定價大洋壹圓叁角　外埠酌加運費匯費

原編者　胡華夫人桂馨
輯訂者　大同大學校長胡敦復
校閱者　大同大學教授吳在淵
校閱者　大同大學教授胡明復
發行者　商務印書館
上海北河南路北首寶山路
印刷所　商務印書館
上海棋盤街中市
總發行所　商務印書館
分售處　北平天津保定瀋陽吉林龍江濟南太原開封西安南京杭州蘭谿安慶蕪湖南昌漢口長沙常德衡州成都重慶廈門福州廣州潮州香港梧州雲南貴陽張家口新嘉坡
商務印書分館

N二一五九自