御製數理精蘊下編卷三十

體部八

各體權度比例

堆垜

各體權度比例

數學至體而備。以其綜線面之全。而盡度量衡之用也。蓋線面存乎度。體則存乎量。求輕重則存乎衡。是以又有權度之比例。其法槩以諸物製爲正方。其邊一寸其積千分。較量豪釐俾有定率。然後凡物知其體積。即知其重輕。知其重輕。即知其體積。而權度無遁情也。且體之爲質不一。邊積等者輕重不同。輕重等者邊積不同。皆有互相比例之法。而各體無混淆也。

赤金十六兩八錢

紋銀九兩

水銀十二兩二錢八分

紅銅七兩五錢

白銅六兩九錢八分

黃銅六兩八錢

鋼六兩七錢三分

生鐵六兩七錢

熟鐵六兩七錢三分

高錫六兩三錢

六錫七兩六錢

倭鉛六兩

黑鉛九兩九錢三分

白正二兩六錢

金珀八錢

白瑪瑙二兩三錢

紅瑪瑙二兩二錢

硨磲一兩五錢二分

青石二兩八錢八分

白石二兩五錢

紅石二兩五錢六分

象牙一兩五錢四分

牛角一兩九錢

沉香八錢二分

白檀八錢三分

紫檀一兩零二分

花梨八錢七分

楠木四錢八分

黃楊七錢五分

烏木一兩一錢

油八錢三分

水九錢三分

設如有金一方。每邊三寸。問重幾何。

一率　一寸

二率　一十六兩八錢

三率　二十七寸

四率　四百五十三兩六錢

法以一寸為一率。金寸方重一十六兩八錢為二率。今所設之金方每邊三寸為三率。求得四自乘再乘。得二十七寸為三率。求得四

一率　一寸
二率　一十六兩八錢
三率　二十七寸
四率　四百五十三兩六錢

幸四百五十三兩六錢。即金之重數也。此法葢因金方每邊三寸則體積爲二十七寸。以一寸與一十六兩八錢之比。同於二十七寸與四百五十三兩六錢之比也。

設如有銀一方。每邊二寸。問重幾何。

一率　一寸
二率　九兩
三率　八寸
四率　七十二兩

法以一寸爲一率。銀寸方重九兩爲二率。今所設之銀方每邊二寸自乘再乘得八寸爲三率。求得四率七十二兩即銀之重數也。此法葢因銀方每邊二寸則體積爲八寸。以一寸與九兩之比。同於八寸與七十二兩之比也。

設如黃銅一條。重三百七十四兩。問積幾何。

一率　六兩八錢
二率　一寸
三率　三百七十四兩
四率　五十五寸

法以黃銅寸方重六兩八錢爲一率。一寸爲二率。今所設黃銅重三百七十四兩爲三率。求得四率五十五寸。即黃銅之積也。

設如熟鐵一塊。重十六兩。欲鎔爲正方體。問每邊幾

何。

法以熟鐵寸方重六兩七錢三分爲一率。一寸爲二率。今鐵重十六兩爲三率。求得四率二寸三百七十七分四百一十四釐有餘。開立方。得一寸三分三釐有餘。即每邊之數也。

一率六兩七錢三分
二率一寸
三率一十六兩
四率二寸三百七十七分四百一十四釐

設如水銀一匣。但知匣闊四寸。長六寸。高三寸五分。問內水銀重數幾何。

法以匣闊四寸與長六寸相乘。得二十四寸。又以高三寸五分再乘。得八十四寸。爲水銀一匣之積數。爰以一寸爲一率。水銀寸方重一十二兩二錢八分爲二率。今所得之水銀一匣之積數八十四寸爲三率。求得四率一千零三十一兩五錢二分。即水銀之重數也。

一率一寸
二率一十二兩二錢八分
三率八十四寸
四率一千零三十一兩五錢二分

設如白玉一方。重九十三兩六錢。但知闊比高多一寸。長比闊多三寸。問高闊長各幾何。

法以玉寸方重二兩六錢爲一率。一寸

一率　二兩六錢
二率　一寸
三率　九十三兩六錢
四率　三十六寸

為二率。今所設玉重九十三兩六錢為三率。求得四率三十六寸為長方體積。乃以闊比高多一寸長比闊多三寸為帶兩縱之較。用帶兩縱不同較數開立方法算之。得高二寸。加闊比高多一寸得三寸為闊。再加長比闊多三寸得六寸為長也。

設如金與銀鎔於一處。共得正方體積二十七寸。重二百七十四兩二錢。問金與銀各幾何。

一率　七兩八錢
二率　一寸
三率　三十一兩二錢
四率　四寸

法以共積二十七寸。以銀寸方重九兩乘之。得二百四十三兩。與共重二百七十四兩二錢相減。餘三十一兩二錢。乃以銀寸方重九兩與金寸方重十六兩八錢相減。餘七兩八錢為一率。金一寸為二率。今相減所餘之三十一兩二錢為三率。求得四率四寸。即金之寸數。於共積二十七寸內減去四寸。餘二十三寸。即銀之寸數也。以金四寸與金寸方

重十六兩八錢相乘得六十七兩二錢以銀二十三寸與銀寸方重九兩相乘得二百零七兩兩數相併得二百七十四兩二錢仍與原數相合也此即和較比例之法葢銀二十七寸則其重數應得二百四十三兩與共重二百七十四兩二錢相減餘三十一兩二錢即金重於銀之數而金每寸比銀每寸多七兩八錢故多七兩八錢則金有一寸今多

一率 七兩八錢
二率 一寸
三率 一百七十九兩四錢
四率 二十三寸

三十一兩二錢則知金有四寸也若欲先得銀數則仍以七兩八錢爲一率一寸爲二率將共積二十七寸以金寸方重十六兩八錢乘之得四百五十三兩六錢內減共重二百七十四兩二錢餘一百七十九兩四錢爲三率求得四率二十三寸即銀之寸數與共積二十七寸相減餘四寸即金之寸數葢少七兩八錢則銀有一寸今少一百七十九兩

四錢則知銀有二十三寸也。

設如金鑲玉爐一座。共重四十六兩七錢。問金玉各幾何。

法用盛水器皿一件。置爐其中。實之以水。取出爐看水淺幾何。設如盛水器四係五方形。每邊五寸取出爐水淺五分即以每邊五寸自乘得二十五寸。以水淺五分爲高再乘得一十二寸五百分。爲爐之體積。即金玉之共積。爰以共積一寸二寸五百分以玉寸方重二兩六錢乘之得三十二兩五錢。與共重四十六兩七錢相減。餘一十四兩二錢。乃以玉寸方重二兩六錢與金重一十六兩八錢。相減。餘一十四兩二錢爲一率。金一寸爲二率。今相減所餘一十四兩二錢爲三率。求得四率一寸爲金之寸數。於共積一十二寸五百分內減去一寸。餘十一寸五百分爲玉之寸數。金一寸

一率　一十四兩二錢
二率　一寸
三率　一十四兩二錢
四率　一寸

一率　一十四兩二錢
二率　一寸
三率　一百六十三兩三錢
四率　一十一寸五百分

重得十六兩八錢玉十一寸五百分與玉寸方重二兩六錢相乘得二十九兩九錢爲玉之重數兩數相併共得四十六兩七錢仍與原數相合也如欲先得玉數則仍以一十四兩二錢爲一率一寸爲二率將所得共積一十二寸五百分以金寸方重十六兩八錢乘之得二百一十兩內減共重四十六兩七錢餘一百六十三兩三錢爲三率求得四率一十一寸五百分爲玉之寸數與共積一十二寸五百分相減餘一寸即金之寸數也

設如空心金球一個外徑一尺二寸厚三分問重幾何

法以金球外徑一尺二寸自乘再乘得一尺七百二十八寸乃用方邊球徑相等方積球積不同之定率比例以方積

一率　一〇〇〇〇〇〇〇〇〇
二率　五二三五九八七七五
三率　一七二八
四率　九〇四七七八六八三

一〇〇〇〇〇〇〇〇〇爲一率球積

一率　一〇〇〇〇〇〇〇〇〇
二率　五三三五九八七七五
三率　一七二八
四率　九〇四七七八六八二

五三三五九八七七五爲二率。今球徑自乘再乘之正方體積一尺七百二十八寸爲三率。求得四率九百零四寸七百七十八分六百八十三釐有餘。爲球之全體積。又以厚三分倍之得六分。與外徑一尺二寸相減。餘一尺一寸四分爲空心徑自乘再乘。得一尺四百八十一寸五百四十四分。仍以方積一〇〇〇〇〇〇〇〇爲一率。球積五三三

一率　一〇〇〇〇〇〇〇〇〇
二率　五三三五九八七七五
三率　一四八一五四四
四率　七七五七三四六三三

五九八七七五爲二率。今空心徑自乘再乘之正方體積一尺四百八十一寸五百四十四分爲三率。求得四率七百七十五寸七百三十四分六百二十三釐有餘。爲球內空心虛積。兩積相減。餘一百二十九寸零四十四分零六十釐有餘。爲空心球體積。乃以一寸爲一率。

一率　一寸
二率　一十六兩八錢
三率　一百二十九寸〇四四〇六〇
四率　二千一百六十七兩九四〇

金寸方重十六兩八錢爲二率。空心球體積一百二十九寸零四十四分零六

一率　一寸
二率　一十六兩八錢
三率　一百二十九寸〇四四〇六〇
四率　二千二百六十七兩九四〇

十釐有餘爲三率。求得四率二千一百六十七兩九錢四分有餘。卽空心金球體之重數也。

設如正方青石一塊。紅石一塊。紅石比青石每邊多二寸。體積多五十六寸。問二石之邊數及重數各幾何。

法以紅石比青石每邊多二寸爲邊較。體積多五十六寸爲積較。用大小二立方有邊較積較求邊法算之。以邊較二寸自乘再乘得八寸。與積較五十六寸相減。餘四十八寸。三歸之得一十六寸。以邊較二寸除之得八寸。爲長方面積。以邊較二寸爲長闊之較。用帶縱較數開平方法算之。得闊二寸。卽青石之邊數。加紅石比青石每邊多二寸得四寸。卽紅石之邊數。乃以一寸爲一率。紅石寸方重二兩五錢六分爲二率。紅石每邊四寸自乘再乘得六十四寸爲三率。

一率　一寸
二率　二兩五錢六分
三率　六十四寸
四率　一百六十三兩八錢四分

一率 一寸
二率 二兩五錢六分
三率 六十四寸
四率 一百六十三兩八錢四分

一率 一寸
二率 二兩八錢八分
三率 八寸
四率 一十三兩零四分

求得四率一百六十三兩八錢四分。即紅石之重數也。又以一寸為一率。青石寸方重二兩八錢八分為二率。青石每邊二寸自乘再乘得八寸為三率。求得四率二十三兩零四分。即青石之重數也。此法因二石皆為正方體。故用大小二立方有邊較積較求邊之法。求得二石之邊。自乘再乘。即得二石之體積。用寸方重數定率以比例之。即得二石之重數也。

設如有正方水桶三個。第一桶每邊一尺。第三桶比第二桶每邊多二寸。第三桶體積與第一桶第二桶兩桶之共積相等。問三桶水之重數各幾何。

法以一寸為一率。水寸方重九錢三分為二率。第一桶正方每邊一尺自乘再乘得一千寸為三率。求得四率九百三十兩為第一桶水之重數。又以第三桶比第二桶每邊多二寸為邊較。以第一

一率 一寸
二率 九錢三分
三率 一千寸
四率 九百三十兩

桶體積一千寸爲第三桶比第二桶所多之積較用大小二立方有邊較積較求邊法算之以邊較二寸自乘再乘得八寸與積較一千寸相減餘九百九十二寸三歸之得三百三十寸六百六十六分六百六十六釐有餘以邊較二寸除之得一尺六十五寸三十三分三十三釐有餘爲長方面積以邊較二寸爲長闊之較用帶縱較數開平方法算之

一率　一寸
二率　九錢三分
三率　一尺六百八十寸九二四
四率　一千五百七十兩九九三

得闊一尺一寸八分九釐有餘爲第二桶之邊數加較二寸得一尺三寸八分九釐有餘爲第三桶之邊數乃以一寸爲一率水寸方重九錢三分爲二率第二桶每邊一尺一寸八分九釐有餘自乘再乘得一尺六百八十寸九百二十四分有餘爲三率求得四率一千五百七十兩九錢九分三釐有餘即第二桶水之重數又以一寸爲一率水寸方重

一率　一寸
二率　九錢三分
三率　二尺六百七十九寸八百二十六
四率　二千四百九十二兩三三八

九錢三分爲二率。第三桶每邊一尺三寸八分九釐有餘。自乘再乘得二尺六百七十九寸八百二十六分有餘爲三率。求得四率二千四百九十二兩二錢三分八釐有餘。即第三桶水之重數也。此法蓋因第三桶之體積與第一第二兩桶之共積相等。則第一桶體積一千寸。即第三桶體積比第二桶體積所多之較也。而第三桶比第二桶每邊多二寸。故用大小二立方有邊較積較求邊法。求得二桶之邊數。自乘再乘。即得二桶之體積。用寸方重數定率以比例之。即得二桶水之重數也。

設如金球一個徑二寸二分六釐。今欲作一銀球。其重與金球等。問徑幾何。

一率　一寸
二率　一寸二分三釐
三率　二寸二分六釐
四率　二寸七分七釐

法以金方邊一寸爲一率。銀方邊一寸二分三釐爲二率。今所設之金球徑二寸二分六釐爲三率。求得四率二寸七

分七釐有餘即銀球之徑數也此法葢因各色俱爲正方體其重數俱設爲十六兩八錢與金寸方等故金方邊爲一寸銀方邊爲一寸二分三釐水銀方邊爲一寸一分一釐鉛方邊爲一寸一分九釐銅方邊爲一寸三分一釐鐵方邊爲一寸三分六釐錫方邊爲一寸三分九釐石方邊爲一寸八分九釐水方邊爲二寸六分四釐油方邊爲二寸七分四釐皆係邊與邊之比例故球徑與球徑之比同於方邊與方邊之比而爲相當比例四率也

設如青石一塊正方一尺二寸重四千九百七十六兩六錢四分今欲作與青石一樣大熟鐵一塊問重幾何

一率　二兩錢八分
二率　六兩錢三分
三率　四千九百七十六兩錢四分
四率　萬一千一百一十九兩四錢分

法以青石寸方重二兩八錢八分爲一率熟鐵寸方重六兩七錢三分爲二率今所設之青石重四千九百七十六兩

一率　二兩七錢八分
二率　六兩七錢三分
三率　四千九百七十六兩六錢四分
四率　一萬二千六百二十九兩四錢四分

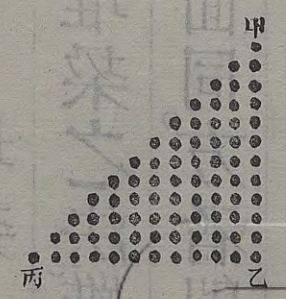
六錢四分爲三率。求得四率一萬一千六百二十九兩四錢四分。卽與青石一樣大熟鐵之重數也。

堆垜

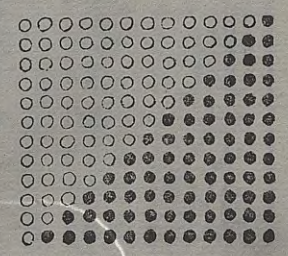
堆垜之法。雖爲體屬。而一面平堆與方圓束形實與面同。方者卽平方法。其餘則用梯形法。以其每層皆遞加之數也。束形亦與一面平堆同法。葢圓者以六包一。方者以八包一。三角者以九包一。有邊求積。有周求積。其理皆相通也。若夫以方面層累者則爲四角尖堆。以三角面層累者則爲三角尖堆。此二者每層之邊皆同爲遞加一數。每層之面積則三角爲按位相加之數。四角爲按位自乘相加之數。其傍皆峻

嶒不平。故與體亦微異也。至於以長方面層累者則爲長方堆。以全堆而減去上截者則爲半堆。總以尖堆之法御之。分之以立其法。合之以明其理。一一按法解之於後。

設如一面直角尖堆。底十二。求積幾何。

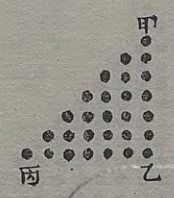


法以底十二加尖上一得十三。與層數十二相乘得一百五十六。折半得七十八。即一面直角尖堆之積也。如圖甲乙丙一面直角尖堆。乙丙爲底十二。其甲乙高亦即爲十二層。其每層皆加一爲挨次遞加之數。成直角三角形。試另作一丁戊己直角三角形合於原形之側。則成甲乙丁戊長方形。其高即層數。其底即首數與末數相加之數。其積即總數加一倍之數。（見算法原本二卷第三十二節。）故以底十二與上尖一相加。與層數十二相乘得長方積。折半即得一面直角尖堆之積也。此法與勾股求積之法異者。蓋勾

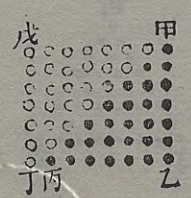


股之上尖爲一點無數可紀此上尖一即其上之闊成斜方形故用斜方求積之法以上闊與下闊相加以高數乘之折半而得積也

設如一面直角尖堆積二十八求底幾何

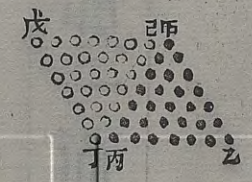


法以一面直角尖堆積二十八倍之得五十六爲長方積以一爲長闊之較用帶縱較數開平方法算之得闊七即一面直角尖堆之底數也如圖甲乙丙一面直角尖堆積倍之則成甲乙丁戊長方形積其乙丁長比甲乙闊多一故用帶縱較數開平方法算之得甲乙與乙丙等爲一面直角尖堆之底闊也



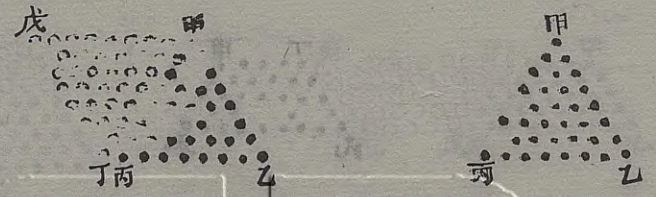
設如一面三角尖堆底七求積幾何

法以底七加上尖一得八與層數七相乘得五十六折半得二十八即一面三角尖堆之積也如圖甲乙丙一面三角尖堆乙丙爲底七其甲乙高亦即爲七



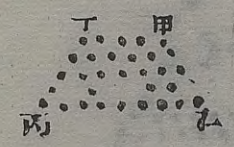
層。其每層皆加一爲挨次遞加之數。成等邊三角形。試另作一丁戊己等邊三角形。合於原形之側。則成甲乙丁戊斜方形。其高即層數。其底即首數與末數相加之數。其積即總數加一倍之數。故以底七與上尖一相加。與層數七相乘得斜方積。折半得一面三角尖堆之積也。

設如一面三角尖堆積三十六。求每邊幾何。

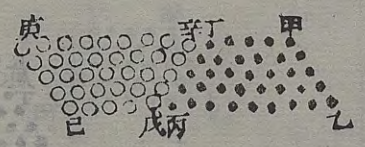


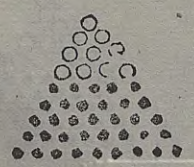
法以一面三角尖堆積三十六。倍之得七十二。爲長方積。以一爲長闊之較。用帶縱較數開平方法算之。得闊八。即一面三角尖堆每一邊之數也。如圖甲乙丙丁面三角尖堆積。倍之則成甲乙丁戊斜長方積。若直排之即與直角長方積等。故其求邊之法亦與前直角尖堆求邊之法同也。

設如一面梯形堆。上五下九。求積幾何。



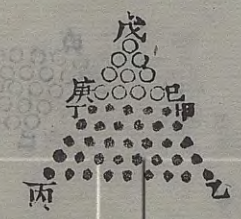
法以上五與下九相加得十四。又視上五以上至一虛四位。即以所虛之四與下九相減。餘五為層數。與上下相加之十四相乘得七十。折半得三十五。即一面梯形堆之積也。如圖甲乙丙丁一面梯形堆。甲丁為上五。乙丙為下九。甲乙為層數五。凡自一遞加之數其末數即截去四位。故於末數內減去所少之位即為今之所有之位。見算法原本二卷第三十二節。試另作一戊己庚辛梯形合於





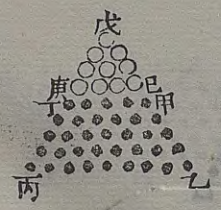
原形之側。則成甲乙己庚斜方形。其底即上數與下數相加之數。其高即層數。其積即總數加一倍之數。故以上數與下數相加與層數相乘。折半即得一面梯形堆之積也。

又法以底九用一面三角尖堆求積法。求得總積四十五。又以上五內減一餘四為上虛小一面三角尖堆之底。亦用三角尖堆求積法。求得上虛小一面三



角尖堆積十兩積相減餘三十五即一面梯形堆之積也如圖甲乙丙丁一面梯形堆先求得戊乙丙三角尖堆總積又求得戊己庚上虛小三角尖堆積相減即得甲乙丙丁梯形堆之積也如有上闊或下闊與層數求積者則於層數內減一餘爲上下闊之較與上闊相加則得下闊與下闊相減則得上闊皆用有上下闊之法算之而得積也

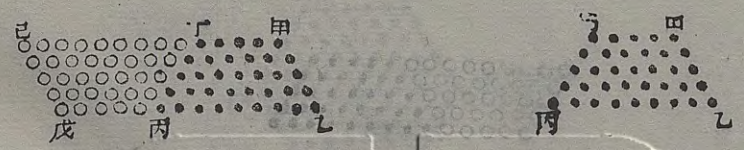
設如一面梯形堆積三十五下九問上幾何



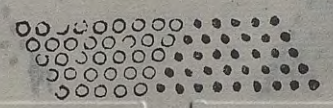
法以下九用一面三角尖堆求積法求得總積四十五內減梯形積三十五餘十爲上虛小一面三角尖堆積用一面三角尖堆有積求邊法求得每邊四加一得五即一面梯形堆之上闊也如圖甲乙丙丁一面梯形堆先以乙丙下九求得戊乙丙三角尖堆總積內減甲乙丙丁梯形堆積餘戊己庚上虛小一面

三角尖堆積。乃用有積求邊法。求得己庚四。因每層挨次遞加一。故加一即得甲丁五爲上闊也。如有上闊求下闊者。則以上闊內減一爲上虛小三角尖堆之底。求得上虛小三角尖堆積。與梯形積相加爲三角尖堆總積。亦用有積求邊法算之即得下闊也。

設如一面梯形堆積三十五上闊比下闊少四問上下闊各幾何。

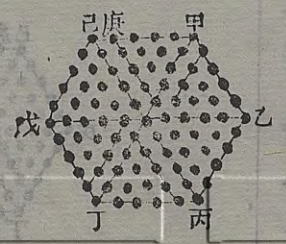


法以梯形堆積三十五倍之得七十。又以上下闊之較四加一得五爲層數。以除倍積七十得十四爲上下闊之和。加較四得十八折半得九爲下闊。內減較四餘五爲上闊也。如圖甲乙丙丁一面梯形堆積。每層挨次加一。今甲丁上闊比乙丙下闊少四。即知甲乙爲五層矣。故以甲乙丙丁梯形積倍之。則成甲乙戊己斜方積。以甲乙五層除之得乙戊。

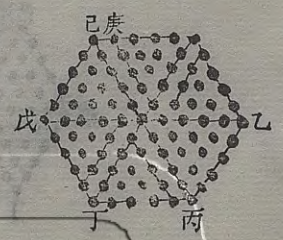


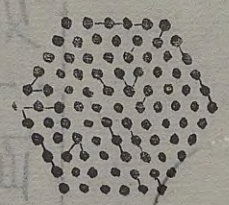
為上下闊之和。加上下闊之較折半即得下闊。於下闊內減上下闊之較即得上闊也。如有積與上下闊之和求上下闊者。則將積數加一倍。以上下闊之和除之即得層數。內減一即得上下闊之較。或有積與層數求上下闊者。則於層數內減一即得上下闊之較。以層數除倍積即得上下闊之和。既有較有和即得上下闊矣。

設如一面六角堆。每邊六。求積幾何



法以一面六角堆分作六三角尖堆算之。以每邊六減一餘五。為每一面三角尖堆之底。與每邊六（即底加一也。）相乘得三十。折半得十五。為每一面三角尖堆積。六因之得九十。加中心一得九十一。即一面六角堆之積也。如圖甲乙丙丁戊己一面六角堆。六分之則成甲庚辛類六三角尖堆。而餘中心一。其每一三角

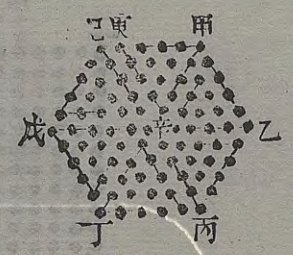




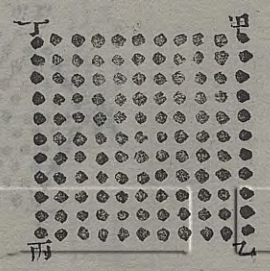
尖堆之甲庚一邊比六角堆之甲己一邊尖一。故以六角堆之每一邊內減一。即得三角尖堆之每一邊。而求得一面三角尖堆積。六因之再加中心一。即得一面六角堆之總積也。

設如一面六角堆積九十一。求每邊幾何。

法以一面六角堆積九十一。減中心一餘七十。六歸之得十五。為一面三角尖堆積用一面三角尖堆有積求邊法算之。得每邊五。加一得六。即六角堆之每一邊也。如圖甲乙丙丁戊己一面六角堆積。先減去中心一。以六歸之則得甲庚辛一面三角尖堆積。其三角尖堆之甲庚一邊比六角堆之甲己一邊少一。故用一面三角尖堆有積求邊法求得一邊。再加一。為一面六角堆之每一邊也。此即算書所謂圓束也。本以六包一。不能成圓。凡云圓者皆六邊也。

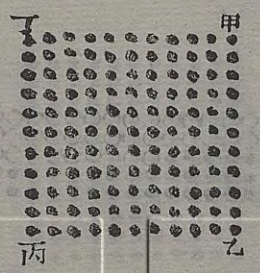


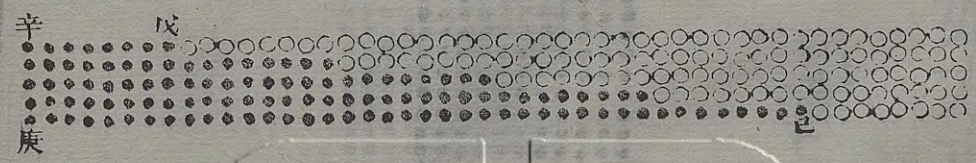
設如方束。外周四十求積幾何。



法以外周四十加四得四十四。四歸之得十一。爲方束每一邊之數。自乘得一百二十一。即方束之積也。如圖甲乙丙丁方束。其四隅之四。各爲兩邊所同用。故必以外周加四。以四歸之。始得甲乙每一邊之數。以一邊自乘。即爲方束之積數也。

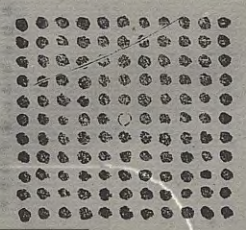
又法以外周四十加八得四十八。與外周四十相乘得一千九百二十。十六除之得一百二十。加中心一。得一百二十一。爲方束之積也。蓋方束以八包一。其外周所包之數。亦必以八遞加。爲超位平加之數。如甲乙丙丁方束。除却中心之一。最內一層爲八。第二層爲十六。第三層爲二十四。第四層爲三十二。第五層爲四十。每層皆加八。爲超位平加之數。引而長之成戊己庚辛梯形。外周四





十即梯形之底。內周八即梯形之上闊。如以首數八與末數四十相加得四十八。用層數五乘之。折半即得總數。見算法原本卷第三十二節。然其層數之五。乃係外周四三十用八歸所得之數。今以內周八與外周四十相加。即與外周四十相乘。是末用八歸。故將相乘所得之數。必以八歸。又以二歸。即折半。始得總數。夫先用八歸後用二歸。即與用十六歸除等。二與八相因得一十六。合兩次除爲一次除。故以十六歸除得總數。再加中心一。即得方束之積也。又按第一法。以外周四十加四。以四歸之。得方束之每一邊。是外周加四則得每邊之四倍。若以外周加四自乘。必得方束積之十六倍。而以十六歸除。亦即得方束之積。今以外周加八與外周相乘成長方形。則其長比每邊之四倍多四。其闊比每邊之四倍少四。其積必爲方束積

之十六倍而少十六。以十六歸除則得方束積而少一。故加一而得方束積也。

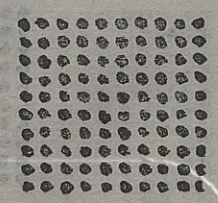


此方束每邊十一。係奇數。故有中心之十。若方束每邊係偶數者。則無中心之一。詳見下法。

設如方束。外周三十六。求積幾何。

法以外周三十六加四得四十。四歸之得一十。為方束每一邊之數。自乘得一百。即方束之積也。

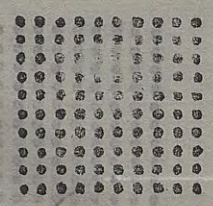
又法以外周三十六加八得四十四。與外周三十六相乘。得一千五百八十四。十六除之。得九十九。加一得一百。為方束之積也。此方束每邊係偶數。無中心一。其最內一層為四。其外周三十六用八歸之。則得四層半。然其立法亦與前法同。乘除得數仍加一者。蓋以外周加四。則得每邊之四倍。若以外周加四自乘。必得方束積之十六倍。而以十六歸



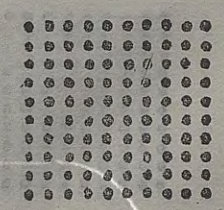
除亦即得方束之積。今以外周加八與外周相乘成長方形。則其長比每邊之四倍多四。其闊比每邊之四倍少四。其積必爲方束積之十六倍而少十六。以十六歸除則得方束積而少一。故加一而得方束積也。

設如方束積一百。求外周幾何。

法以方束積一百開平方得一十。四因得四十。內減四餘三十六。即方束外周之數也。如圖甲乙丙丁方束開方則得甲乙一邊。前法以外周加四。四歸之而得一邊。此法以一邊四因之。減四而即得外周也。

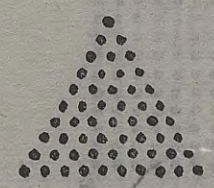


又法以方束積一百內減一餘九十九。以十六乘之得一千五百八十四爲長方積。以八爲長闊之較。用帶縱較數開平方法算之。得闊三十六。即方束之外周數也。此即方束有外周求積之法而

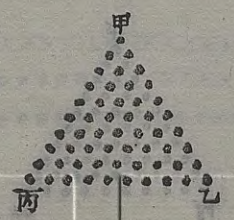


轉用之前法以外周加八與外周相乘。十六除之再加一而得積。此法則以積數減一。餘用十六乘之以八爲長闊之較。用帶縱開方得闊而爲外周也。

設如三稜束。外周二十七。求積幾何。



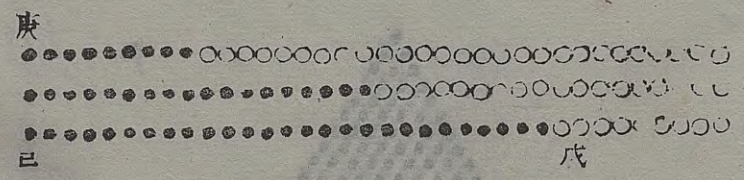
法以外周二十七加三得三十。三歸之得一十。爲三稜束每一邊之數。用一面三角尖堆有邊求積法。以每邊一十加一得一十一。與每邊一十相乘得一百一十。折半得五十五。即三稜束之積也。



如圖甲乙丙三稜束。其三角之三各爲兩邊所同用。故必以外周加三以三歸之。始得甲乙每一邊之數。即如一面三角尖堆之每一邊。故用一面三角尖堆有邊求積法算之。即得三稜束之積也。

又法以外周二十七加九得三十六。與外周二十七相乘得九百七十二。以十八歸除得五十四。加中心一得五十五。

爲三稜束之積也。蓋三稜束以九包一。其外周所包之數。亦必以九遞加。爲超位平加之數。如甲乙丙三稜束。除却中心之一。最內一層爲九。第二層爲十八。第三層爲二十七。每層皆加九。爲超位平加之數。引而長之成丁戊己庚梯形。外周二十七卽梯形之底。內周九卽梯形之上闊。如以首數九與末數二十七相加得三十六。用層數三乘之。折半卽



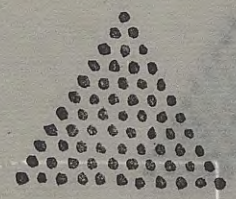
得總數（見算法原本二卷第三十二節）。然其層數之三乃係外周二十七。用九歸所得之數。今以內周九與外周二十七相加。卽與外周二十七相乘。是未用九歸。故將相乘所得之數。必以九歸。又以二歸（卽折半）始得總數。夫先用九歸後用二歸。卽與十八歸除等（二與九相乘得一十八。合兩次除爲一次除）。故以十八歸除得總數。再加中心一。卽得三稜束之積也。又按第一法。以外周二十

七加三以三歸之得一面三角尖堆之每一邊是外周加三則得每邊之三倍若以每邊之三倍再加三與每邊之三倍相乘必得一面三角尖堆積之十八倍（蓋以一面三角尖堆之每一邊加一倍與每邊之數相乘則得一面三角尖堆積之二倍今以每邊之三倍加三與每邊之三倍相乘是邊加三倍則積加九倍彼既為一面三角尖堆積之二倍故此即為十八倍也）而以十八歸除亦即得三稜束之積今以外周加九與外周相乘成長方形則其長比

每邊之三倍加三者尚多三其闊比每邊之三倍少三其積必為一面三角尖堆積之十八倍而少十八以十八歸除則得一面三角尖堆積而少一故加一而得三稜束之積也此三稜束亦有無中心之一者蓋緣三稜束包中心一為一層者周圍九其底則四包中心一為二層者周圍十八其底則七凡如此類周遞加九邊遞加三者皆有中心之一

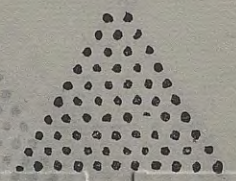
其餘皆無中心之一。詳見下法。

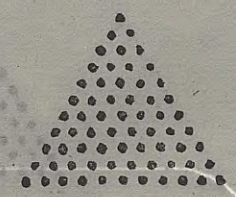
設如三稜束。外周三十。求積幾何。



法以外周三十加三得三十三。三歸之得十一。爲三稜束每一邊之數。用一面三角尖堆有邊求積法。以每邊十一加一得十二。與每邊十一相乘。得一百三十二。折半得六十六。卽三稜束之積也。

又法以外周三十加九得三十九。與外周三十相乘得一千一百七十。十八除之得六十五。加一得六十六。爲三稜束之積也。此三稜束無中心。其最內一層爲三。其外周三十用九歸之。則得三層又三分之一。然其立法亦與前法同。乘除得數仍加一者。蓋以外周加三則得每邊之三倍。若以每邊之三倍再加三與每邊之三倍相乘。必得一面三角尖堆積之十八倍。而以十八歸除。亦卽得三稜束之積。今以外周加九與外周相

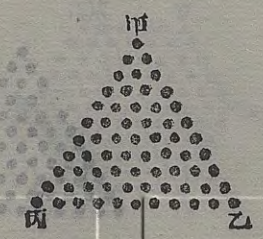




乘成長方形。則其長比每邊之三倍加三者尚多三。其闊比每邊之三倍少三。其積必爲一面三角尖堆積之十八倍而少十八。以十八歸除。則得一面三角尖堆積而少一。故加一而得三稜束之積也。

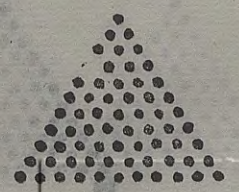
設如三稜束積六十六。求外周幾何。

法以三稜束積六十六倍之得一百三十二爲長方積。以一爲長闊之較用帶縱較數開平方法算之。得闊十一。爲三稜束之每一邊三因之得三十三。內減三餘三十。卽三稜束之外周數也。如圖



甲乙丙三稜束。用一面三角尖堆有積求邊法。求得甲乙一邊。前法以外周加三。三歸之而得一邊。此法以一邊三因之。減三而卽得外周也。

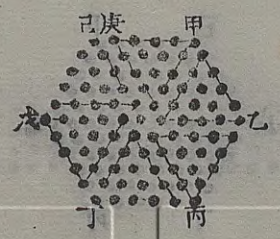
又法以三稜束積六十六內減一餘六十五。以十八乘之。得一千一百七十爲

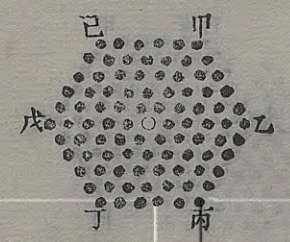


長方積。以九爲長闊之較。用帶縱較數開平方法算之。得闊三十。卽三稜束之外周數也。此卽三稜束有外周求積之法而轉用之。前法以外周加九與外周相乘。十八除之。再加一而得積。此法則以積數減一。餘用十八乘之以九爲長闊之較。用帶縱開方得闊而爲外周也。

設如圓束。外周三十。求積幾何。

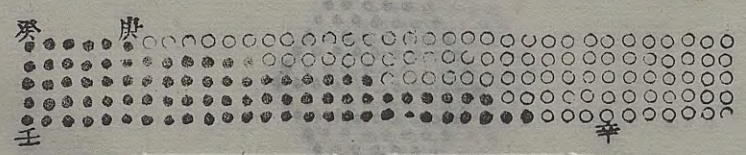
法以外周三十。六歸之得五。爲一面三角尖堆之每一邊。用一面三角尖堆有邊求積法。以每邊五加一得六。與每邊五相乘得三十。折半得十五。爲每一三角尖堆積。六因之得九十。加中心一得九十一。卽圓束之積也。如圖甲乙丙丁戊己圓束。六分之則成甲庚辛類六三角尖堆形。而餘中心一。故以外周六分之而得甲庚每一邊。而求得一三角尖堆角尖堆之每一邊。卽如一面三





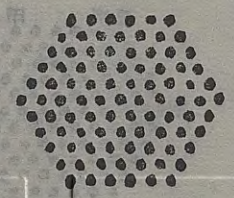
積。六因之得六三角尖堆積。加中心一。即爲圓束之積數也。

又法以外周三十加六得三十六。與外周三十相乘。得一千零八十。十二除之得九十。加中心一。得九十一。爲圓束之積也。蓋圓束以六包一。其外周所包之數亦必以六遞加。爲超位平加之數。如甲乙丙丁戊己圓束除却中心之一。最內一層爲六。第二層爲十二。第三層爲



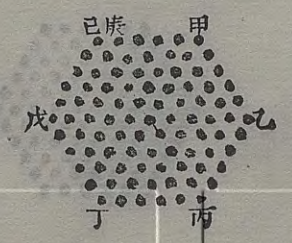
十八。第四層爲二十四。第五層爲三十。每層皆加六。爲超位平加之數。引而長之成庚辛壬癸梯形。外周三十。即梯形之底。內周六。即梯形之上闊。如以首數六與末數三十相加得三十六。用層數五乘之。折半即得總數。見算法原本二卷第三十二節然其層數之五。乃係外周三十用六歸所得之數。今以內周六與外周三十相加。即與外周三十相乘。是未用六歸。故

將相乘所得之數。必以六歸。又以二歸。即折半。始得總數。夫先用六歸後用二歸。即與十二歸除等。二與六相因得一十二。合兩次除為一次除。故以十二歸除得總數。再加中心一即得圓束之積也。又按第一法。以外周三十六歸之得一面三角尖堆之每一邊。是圓束之外周為一面三角尖堆每邊之六倍。若以外周加六與外周相乘。則必得一面三角尖堆積之七十二倍

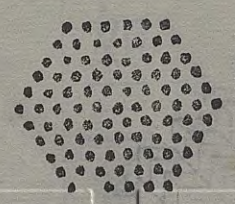


蓋以一面三角尖堆之每一邊加一與每一邊之數相乘。則得一面三角尖堆積之二倍。今以每邊之六倍加六與每邊之六倍相乘。是邊加六倍則積加三十六倍。彼既為一面三角尖堆積之二倍。故此即為七十二倍也。以一面三角尖堆之每一邊加一與每一邊之數相乘。則得一面三角尖堆積之二倍。今以每邊之六倍加六與每邊之六倍相乘。是邊加六倍則積加三十六倍。彼既為一面三角尖堆積之二倍。故此即為七十二倍也。以一面三角尖堆積六倍之。加中心一則得圓束積。今將七十二倍積以十二除之。亦得一面三角尖堆積之六倍。故加中心一而得圓束之積也。凡圓束皆有中心。設此解與前法相通耳。

設如圓束積九十一。求外周幾何



法以圓束積九十一減中心一餘九十。六歸之得一十五。倍之得三十。或即以九十三歸之。所得亦同。蓋六歸二因與三歸所得之數同也。為長方積。以一為長闊之較。用帶縱較數開平方法算之得闊五。又以六因之得三十。即圓束之外周數也。如圖甲乙丙丁戊己圓束減去中心一。以六歸之則得甲庚辛一面三角尖堆形。故用一面三角尖堆有積求邊法。求得甲庚一邊。以六因之

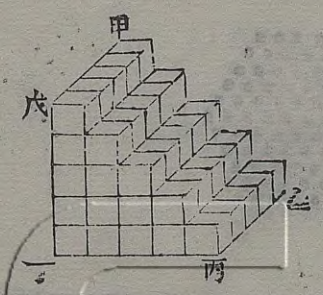


而得外周也。

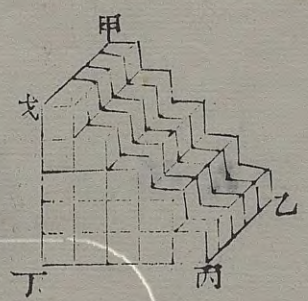
又法以圓束積九十一減一餘九十。以十二乘之得一千零八十為長方積。以六為長闊之較。用帶縱較數開平方法算之得闊三十。即圓束之外周數也。此即圓束有外周求積之法而轉用之前法以外周加六與外周相乘。十二除之。再加一而得積。此法則將積數減一餘用十二乘之。以六為長闊之較。用帶縱

開方得闊而爲外周也。

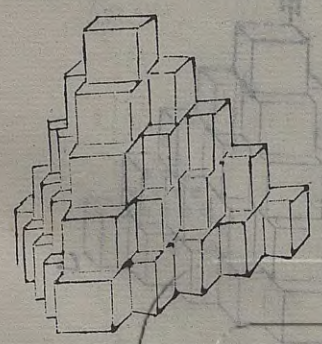
設如塹堵堆。底五。求積幾何。



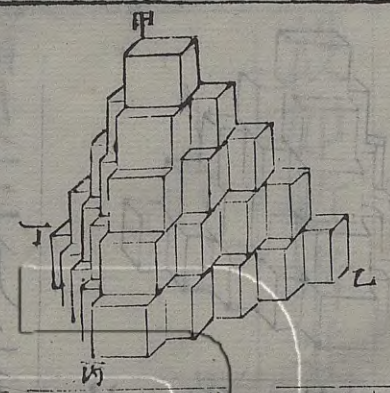
法以底五自乘得二十五爲底面積。又以位數五加一得六。與底面積二十五相乘。得一百五十。折半得七十五。卽塹堵堆之積也。如圖甲乙丙丁戊塹堵堆。卽一面直角尖堆累積之體也。兩直角面相合成長方面形。比原位數多一行。而兩塹堵體相合成長方體形。比原位數亦必多一面。故以位數加一與底面積相乘。所以增其一面之數。成長方體形。爲塹堵堆之二倍。折半而得塹堵堆之積也。



設如三角尖堆。每邊五。求積幾何。

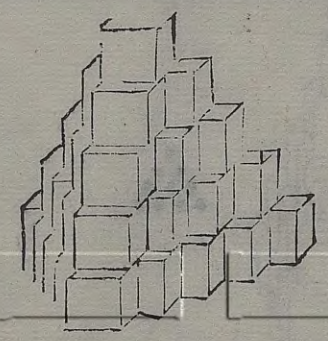


法以每邊五加一得六。與每邊五相乘得三十。折半得十五爲底面積。再以每邊五加一得七。與底面積十五相乘得一百零五。三歸之得三十五。卽三角尖



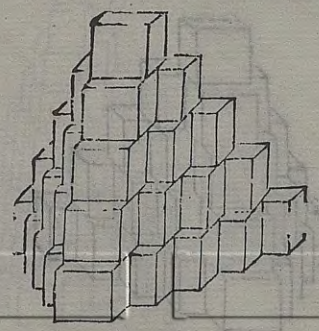
堆之積也。如圖甲乙丙丁三角尖堆。每面皆一面三角尖堆。累積成等邊三角體形。其每邊之數即位數也。試按位作點排之。第一層爲一。第二層爲三。第三層爲六。第四層爲十。第五層爲十五。爲每次按位相加之數。如以位數加二與末數相乘。取其三分之一。即得總數。兄算法原本二卷第三十四節今以每邊加一與每邊之數相乘。折半即得底面積。再以位數加

二爲高與底面積相乘成平行面之三稜體。是爲三角尖體之三倍。故以三除之而得也。然必以位數加二爲高者。蓋以三三角尖體相湊。乃成上下相等之平行面體。其高必比原有之位數多二層。兩三角面相合。比原位數多一行。今三角體相合。故必比原位數多二面也。又以一平行面三稜體分爲三三角尖體。其二面爲兩體所同用。今以位數加二爲高與底數相乘。所以增其二面

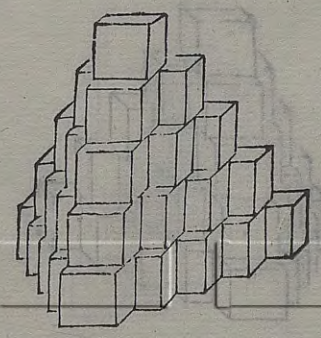


之分也。

又法以每邊五加一得六。與每邊五相乘得三十爲倍底積。再以位數加二得七。與倍底積三十相乘得二百一十六。歸之亦得三十五爲三角尖堆之積也。此法與前法同。蓋以每邊加一與每邊之數相乘。則得底面積之二倍。前法以位數加二與底數相乘。既爲三角尖堆積之三倍。此法以位數加二與倍底積相乘。即爲三角尖堆積之六倍矣。故以六歸之得積也。

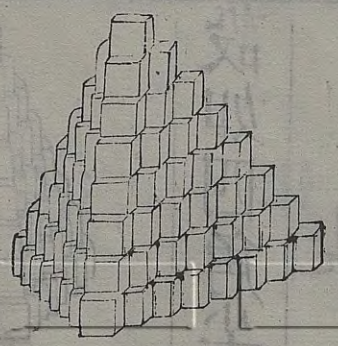


又法以每邊五自乘再乘得一百二十五爲第一數。再以每邊五自乘得二十五爲第二數。又以每邊五加一得六與每邊五相乘得三十。倍之得六十爲第三數。三數相加共得二百一十六。歸之得三十五。即三角尖堆之積也。此法與第二法同。蓋以每邊自乘再乘爲第一

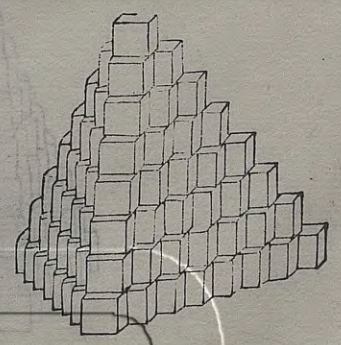


數是未以每邊加一相乘亦未以位數加二再乘也因未以每邊加一相乘則其所成之正方形必比前所得之長少一層之數故又以每邊自乘爲第二數也因未以位數加二再乘則其高必比前所得之高少二層之數故又以每邊加一與每邊相乘即如前之倍底積又倍之爲第三數也三數相加始爲三角尖堆積之六倍故以六歸之而得積也

設如三角尖堆積一百二十求每邊幾何

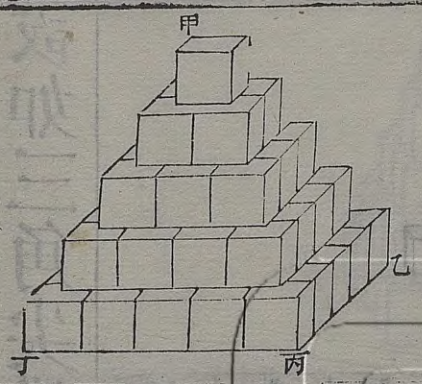


法以三角尖堆積一百二十六因之得七百二十爲長方體積以一爲長與闊之較以二爲高與闊之較用帶兩縱不同較數開立方法算之得闊八即三角尖堆之每一邊也此法即三角尖堆有邊求積之法而轉用之蓋有邊求積則以每邊加一與每邊相乘又以每邊加二再乘得長方體積爲三角尖堆積之

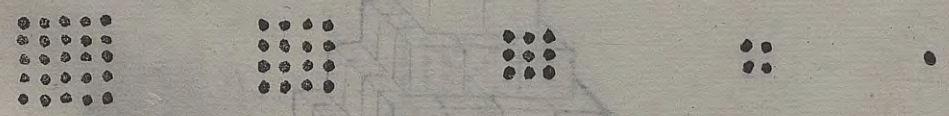


六倍是長比闊多一高比闊多二今以三角尖堆積六因之得長方體積故用帶兩縱不同較數開立方法算之得闊為每邊之數也

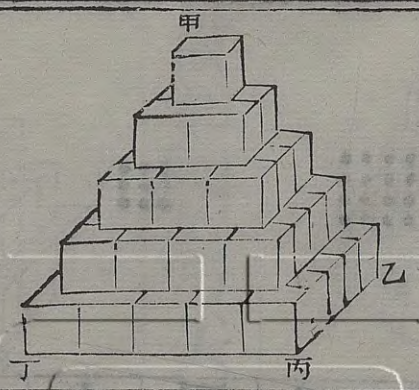
設如四角尖堆每邊五求積幾何



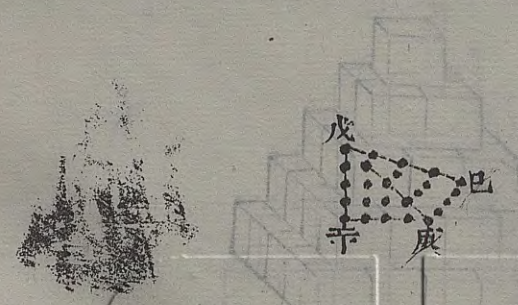
法以每邊五加半得五個半與每邊五相乘得二十七個半又以每邊五加一得六與二十七個半相乘得一百六十五三歸之得五十五即四角尖堆之積



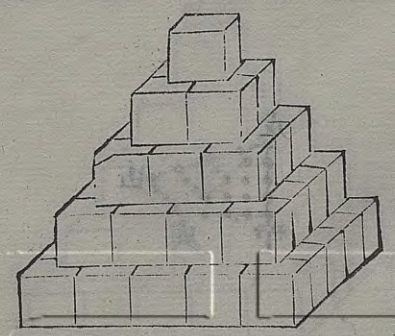
數也如圖甲乙丙丁四角尖堆底面為正方傍四面皆一面三角尖堆累積成方底四角尖體形其每邊之數即位數也試按位作點排之第一層為一第二層為四第三層為九第四層為十六第五層為二十五為每次按位自乘相加之數如以每邊加半與每邊相乘復以位數加一乘之取其三分之一即得總數見算法原本二卷第三十五節今以每邊加半與每



邊相乘是得長方面積。復以位數加一爲高乘之是得長方體積。爲四角尖體之三倍。故以三除之。卽得也。然以邊數加半爲長以位數加一爲高者。葢以三四角尖體相湊。乃成上下相等之長方體。其底必比正方面多半行。其高必比原有之位數多一層。三角體以邊數加一與邊數相乘。四角體以邊數加半與邊數相乘。三角體以位數加二爲高。四角體以位數加一爲高。總以四角體比三角體底式大一倍。故三角體爲長方體六分之一。四角

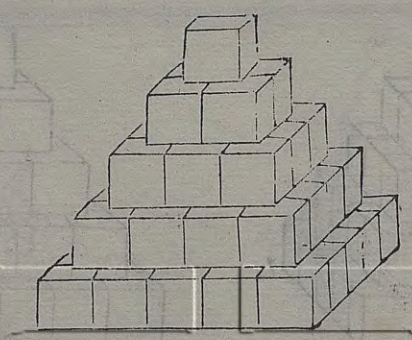


體爲長方體三分之一。三角體加數幾何而此四角體皆用其半也。又以一長方體分爲三四角尖體。其三面爲兩體所同用而少一行之數。試以甲乙丙丁四角尖體作爲戊己庚辛陽馬尖體形。爲長方體三分之一。所餘爲三分之二。其戊己庚戊庚辛兩面爲兩體所同用。而戊庚一行又爲兩面所同用。是此兩面爲兩體所同用而少一行之數也。又以其所餘三分之二平分之。必有

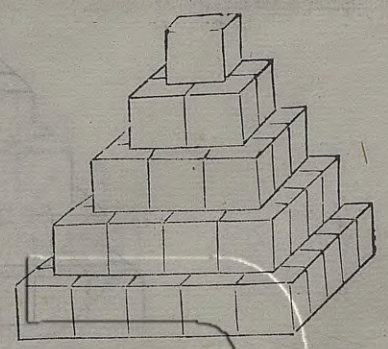


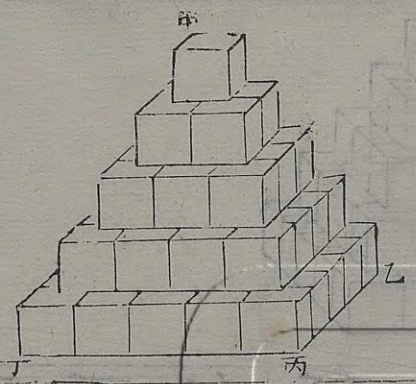
一面爲兩體所同用是以長方體分爲三四角尖體有三面爲兩體所同用而少一行之數也今以每邊加半與每邊之數相乘又以位數加一乘之所以增其三面少一行之分也蓋其高既比原位數多一則其傍面一層宜爲一面三角尖堆之倍數而其傍面只比每邊多半是傍面只爲一面三角尖堆之數也又其高既比原位多一則其上面一層爲每邊自乘之數即爲一面三角尖堆之倍數而少一行其之爲三面少一行之數也

又法以每邊五自乘再乘得一百二十



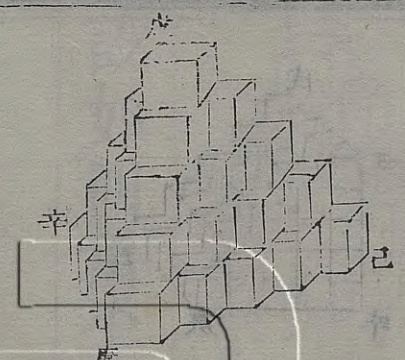
五爲第一數再以每邊五自乘得二十五爲第二數又以每邊五加一得六與每邊五相乘得三十折半得十五爲第三數三數相加共得一百六十五三歸之得五十五即四角尖堆之積也此法與第一法同蓋以每邊自乘再乘爲第一數是未以每邊加半與每邊相乘亦未以位數加一再乘也因未以位數加一再乘則其上層即少一每邊自乘之

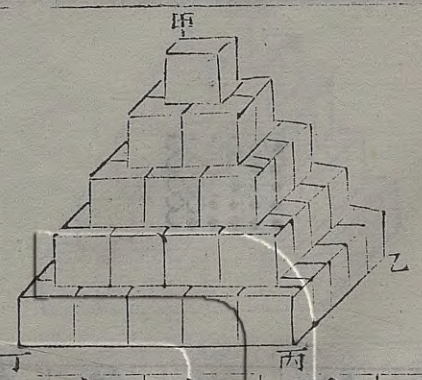


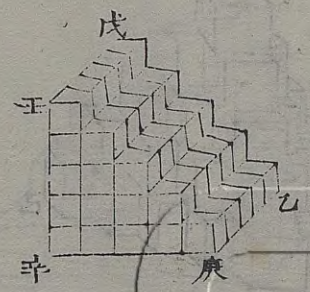


數。故以每邊自乘爲第二數也。因末以每邊加半相乘。則其傍面卽少一面三角尖堆之數。故以每邊加一與每邊相乘折半爲第三數也。三數相加。始爲四角尖堆積之三倍。故以三歸之而得積也。

又法以每邊五加一得六。與每邊五相乘得三十。又以每邊五加二得七乘之。得二百一十。三歸之得七十。爲三角尖堆之倍積。又以每邊五求得一面三角尖堆積十五。與倍三角尖堆積七十相減。亦得五十五。爲四角尖堆之積也。如圖甲乙丙丁四角尖堆。爲戊己庚辛三角尖堆之一倍而少一面之數。蓋四角尖堆底面積爲三角尖堆底面積之一倍而少一行。故四角尖堆體積爲三角尖堆體積之一倍而少一面。是以求得倍三角尖堆積內減一面三角尖堆

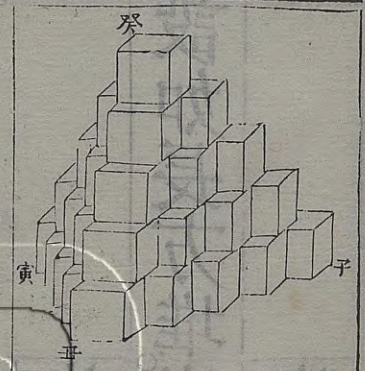


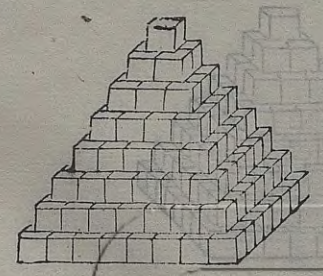




積即得四角尖堆積也。

又法以每邊五用塹堵堆求積法求得塹堵堆積七十五又以每邊五用三角尖堆求積法求得三角尖堆積三十五兩數相加得一百一十折半得五十五即四角尖堆之積也如圖甲乙丙丁四角尖堆先以乙丙一邊求得戊己庚辛壬塹堵堆積四角尖體爲塹堵體三分之二三角尖體爲塹堵體三分之一故

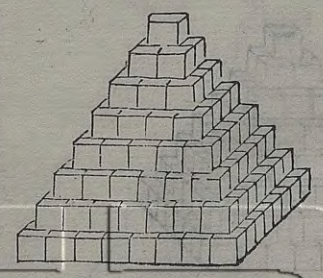




又求得癸子丑寅三角尖堆積與塹堵堆積相加即與二方底四角尖堆之積等故折半而得四角尖堆之積也

設如四角尖堆積二百零四求每邊幾何

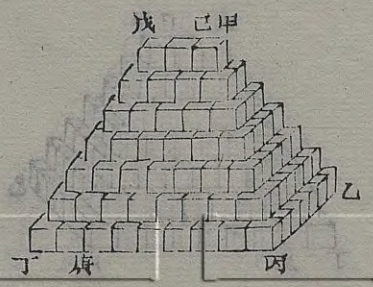
法以四角尖堆積二百零四三因之得六百一十二爲長方體積以半爲長與闊之較以一爲高與闊之較用帶兩縱不同較數開立方法算之得闊八即四角尖堆之每一邊也此法即四角尖堆



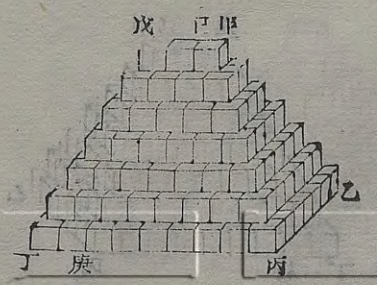
有邊求積之法而轉用之蓋四角尖堆有邊求積則以每邊加半與每邊相乘又以每邊加一再乘得長方體積爲四角尖堆積之三倍是長比闊多半高比闊多一今以四角尖堆積三因之得長方體積故用帶兩縱不同較數開立方法算之得闊爲每邊之數也

設如長方堆底長九闊七上一行收頂求積幾何

法以底闊七爲方堆之底用四角尖堆

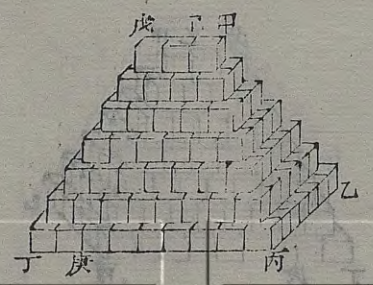


有邊求積法求得四角尖堆積一百四十又以底闊七與長九相減餘二爲兩一面三角尖堆即以底闊七用一面三角尖堆有邊求積法求得一面三角尖堆積二十八一因之得五十六爲兩一面三角尖堆積與前所得四角尖堆積一百四十相加得一百九十六即長方堆之積也如圖甲乙丙丁戊長方堆丙丁長比乙丙闊多庚丁二試自己至庚

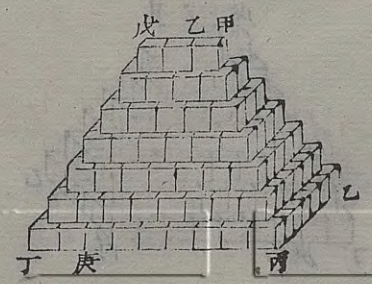


截去二面則成甲乙丙庚一四角尖堆形己庚丁戊兩一面三角尖堆形其乙丙闊與丙庚等即四角尖堆之每一邊亦即一面三角尖堆之每一邊故以一邊求得四角尖堆積又求得兩一百三角尖堆積相加即得長方堆之積也

又法以闊七與長九相減餘二折半得一又加半得一個半與長九相加得十個半與底闊七相乘得七十三個半又

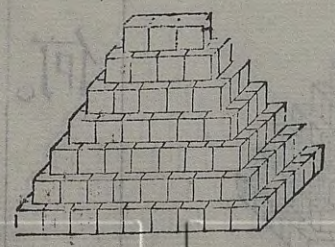


以底闊七即層數加一得八再乘得五百八十八三歸之得一百九十六即長方堆之積也此法與前法之理同如甲乙丙丁戊長方堆既分為一四角尖堆兩一面三角尖堆其甲乙丙庚四角尖堆固當以丙庚加半與乙丙相乘以甲乙加一再乘得一長方體形為一四角尖堆之三倍其己庚丁戊兩一面三角尖堆當以庚丁與乙丙相乘以戊丁同甲乙



加一再乘得二長方面形爲兩一面三角尖堆之二倍因一爲三倍一爲二倍其倍數不同故又以庚丁折半與庚丁相加即增其一長方面之分得三長方面形亦爲兩一面三角尖堆之三倍故以三歸之得一四角尖堆兩一面三角尖堆合之與甲乙丙丁戊一長方堆之積相等也

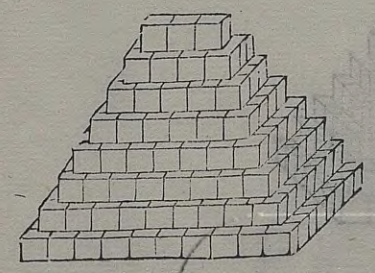
又法以底闊七與長九相減餘二再加



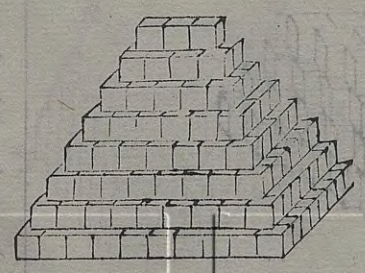
一得三爲頂上之長乃以底長九倍之得十八加頂長三得二十一與底闊七相乘得一百四十七再以高數七加一得八再乘（闊數即高數也）得一千一百七十六六歸之得一百九十六即長方堆之積也此法與第二法同蓋前法以長闊相減折半加半與長相加此法以長闊相減不折半加一與倍長相加則其長比前法多一倍闊與高皆與前數同而體

積亦必比前數大一倍。故前法用三歸。此法用六歸也。

設如長方堆積二百七十六。長比闊多二。求每邊幾何。

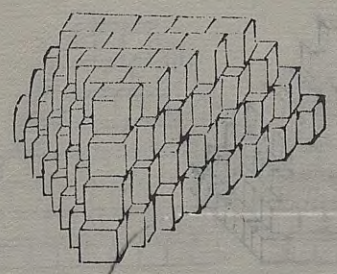


法以長方堆積二百七十六。三因之得八百二十八。為長方體積。以長比闊多二折半。又加半得一個半。與二相加得三個半。為長與闊之較。以一為高與闊之較。用帶兩縱不同較數開立方法算之得闊八為底闊。加長比闊多二得十為長也。此法即長方堆有邊求積之法而轉用之。蓋長方堆有邊求積。則以原長闊之較折半。又加半與原長相加。乃與闊相乘。又以闊加一再乘。得長方體積。為長方堆之三倍。是長比闊多原長闊之較。又多半較。仍多半。高比闊多一。今以長方堆積三因之得長方體積。故用帶兩縱不同較數開立方法算之。得

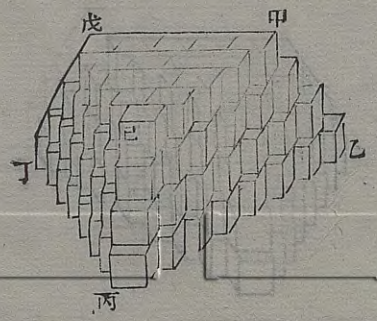


闊爲底邊之闊。加長闊之較。得數爲長也。

設如三角半堆。底邊八。上邊五。求積幾何。

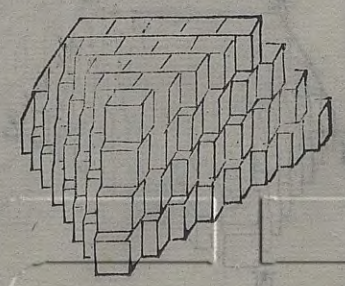


法以底邊八用三角尖堆有邊求積法。求得三角尖堆全積一百二十。又以上邊五減一得四。爲上虛三角尖堆之每邊。亦用三角尖堆有邊求積法。求得上虛三角尖堆積二十。與先所得三角尖堆全積一百二十相減。餘一百。卽三角

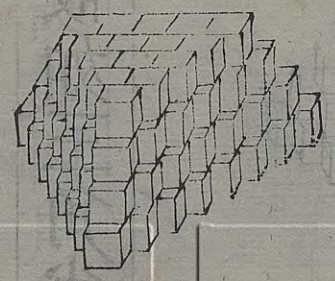


半堆之積也。如圖甲乙丙丁戊己三角半堆。若於其上加一小三角尖堆。則成一大三角尖堆形。其上所加之小三角尖堆之每邊。比三角半堆之上邊少一。故先求得大三角尖堆全積。又求得上虛小三角尖堆積。相減卽得三角半堆之積也。

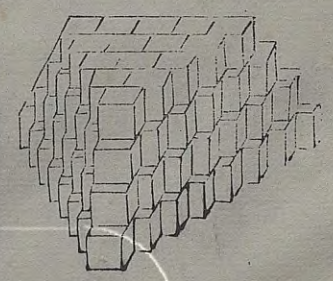
又法以底邊八加一得九。與底邊八相乘。得七十二爲第一數。又以上邊五與



底邊八相併得十三。以上邊五加一得六乘之。得七十八爲第二數。兩數相併。得一百五十。又以上邊五與下邊八相減餘三。加一得四爲層數。與兩數相加之一百五十七相乘。得六百六歸之得一百。爲七角半堆之積也。此法與等邊三角尖堆求積之法同。蓋等邊三角尖堆。其上尖一即上邊。其每邊之數即底邊。亦即層數。其法以每邊加一與每邊相

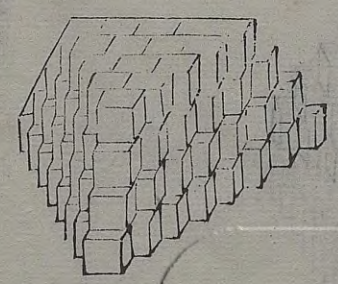


乘。又以每邊加二再乘得長方體積爲三角尖堆積之六倍。分之則得長比高闊多一之一長方體形。又得長比闊多一之二長方面形。即上多二層。若依此法以底邊加一與底邊相乘。即長比闊多一之長方體之一面數也。以上邊一與下邊相加。又以上邊一加一得二乘之。則得長比闊多一之二長方面之兩行數也。此兩數相併。以層數乘之。則亦得長

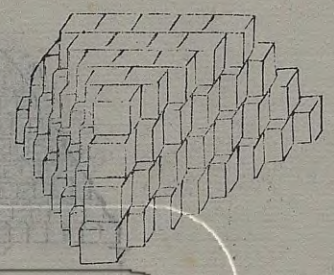


比高闊多一之一長方體形又得長比闊多一之二長方面形共成一長方體形爲三角尖堆之六倍矣

設如三角半堆積一百上邊五求底邊幾何



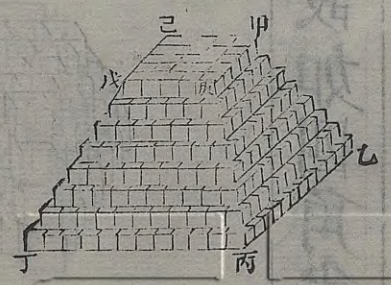
法以上邊五減一餘四爲上虛小三角尖堆之底用三角尖堆有邊求積法求得上虛三角尖堆積二十與半堆積一百相加得一百二十爲等邊三角尖堆全積用三角尖堆有積求邊法求得每



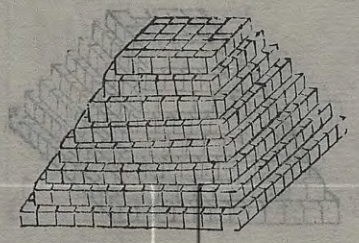
邊八即三角半堆之底邊也如有底邊求上邊者則以底邊求得三角尖堆全積與半堆積相減餘爲上虛三角尖堆積求得上虛小三角尖堆之每邊加一即上邊也

設如四角半堆底邊十二上邊五求積幾何

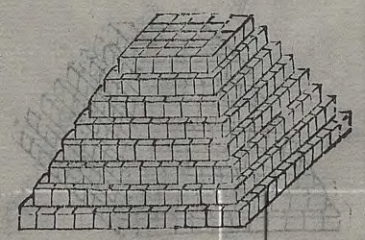
法以底邊十二用四角尖堆有邊求積法求得四角尖堆全積六百五十又以上邊五減一得四爲上虛四角尖堆之



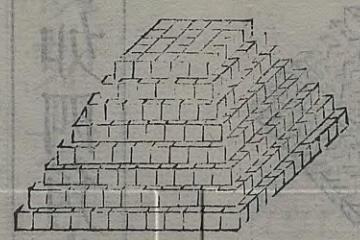
每邊亦用四角尖堆有邊求積法求得上虛四角尖堆積三十與先所得四角尖堆全積六百五十相減餘六百二十即四角半堆之積也如圖甲乙丙丁戊己庚四角半堆若於其上加一小四角尖堆則成一大四角尖堆形其上所加之小四角尖堆之每邊比四角半堆之上邊少一故求得大四角尖堆全積又求得上虛小四角尖堆積相減即得四角半堆之積也



又法以上邊五自乘得二十五為第一數以底邊十二自乘得一百四十四為第二數以上邊五與底邊十二相乘得六十為第三數又以上邊五與底邊十二相減餘七折半得三個半為第四數四數相併得二百三十二個半又以上下邊相減所餘之七加一得八為層數與四數相併之二百三十二個半相乘



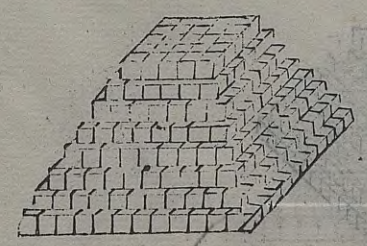
得一千八百六十三歸之得六百二十即四角半堆之積也此法與等邊四角尖堆求積之法同蓋等邊四角尖堆其上尖一即上邊其每邊之數即底邊亦即層數其法以每邊加半與每邊相乘又以每邊加一再乘得長方體積爲四角尖堆積之三倍分之則得每邊自乘再乘之一正方體形每邊自乘之一正方面形又得長比闊多一之半層長方



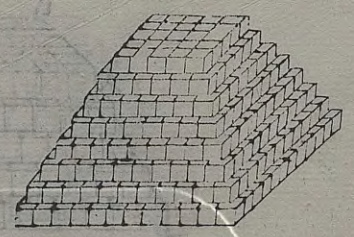
面形若以底邊自乘即正方體之一面數也以上邊一與底邊相乘則得每邊自乘正方面之一行數也以上邊一自乘又以上邊一與底邊相減折半此兩數相併即得長比闊多一之半層長方面之二行數也四數相併再以層數乘之則亦得一正方體形一正方面形又得長比闊多一之半層長方體形爲四角尖堆之六倍矣又

此法與上下不等正方體之法異者在多上下邊相減折半之一數因堆垜之傍面有餘分故也

設如四角半堆積六百二十上邊五求底邊幾何

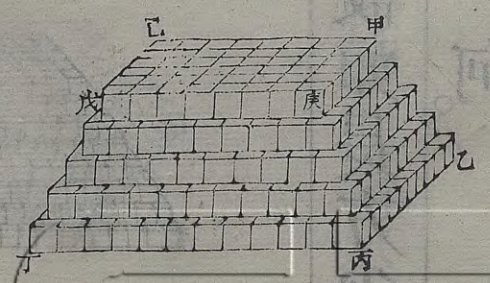


法以上邊五減一餘四爲上虛小四角尖堆之底用四角尖堆有邊求積法求得上虛四角尖堆積三十與半堆積六百二十相加得六百五十爲等邊四角尖堆全積用四角尖堆有積求邊法求得每邊十二即四角半堆之底邊也如有底邊求上邊者則以底邊求得四角尖堆全積與半堆積相減餘爲上虛四角尖堆積求得上虛小四角尖堆之每邊加一即上邊也

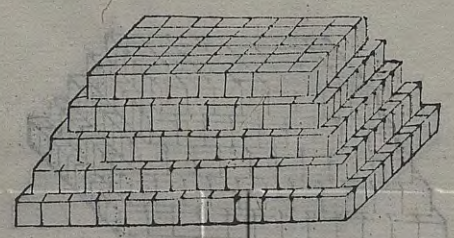


設如長方半堆底長十二闊十上長八闊六求積幾何

法以底長十二闊十用長方堆求積法求得長方堆全積四百九十五又以上

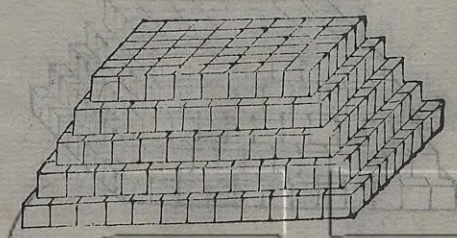


長八闊六各減一。得長七闊五。爲上虛長方堆之長闊。亦用長方堆求積法。求得上虛長方堆積八十五。與先所得長方堆全積相減。餘四百一十。卽長方半堆之積也。如圖甲乙丙丁戊己庚長方半堆。若於其上加一小長方堆。則成上一行收頂之長方堆形。其上所加之小長方堆之每邊。比長方半堆之上邊少一。故先求得長方堆全積。又求得上虛

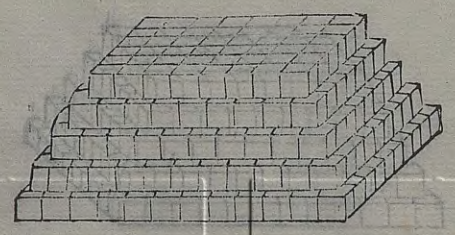


小長方堆積。相減。卽得長方半堆之積也。

又法以上長八與上闊六相乘。得四十八爲第一數。以底長十二與底闊十相乘。得一百二十爲第二數。以上長八與底闊十相乘得八十。以上闊六與底長十二相乘得七十二。兩數相併。折半得七十六爲第三數。又以上下長相減餘四。折半得二爲第四數。以此四數相加

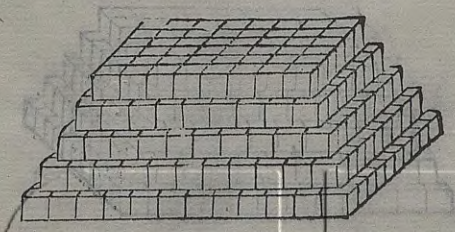


得二百四十六。又以上長與底長相減所餘之四加一得五爲層數。與四數相加之三百四十六相乘。得一千二百三十。三歸之得四百一十。即長方半堆之積也。此法與四角半堆求積之法同。蓋四角半堆長闊皆相等。此則有長闊之不同。故四角半堆以上邊自乘爲第一數者。此則以上長闊相乘爲第一數。四角半堆以下邊自乘爲第二數者。此則

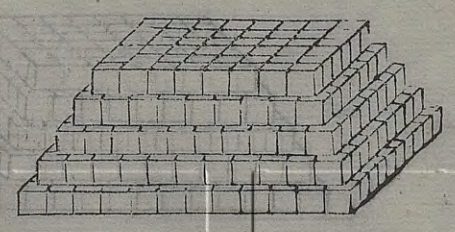


以下長闊相乘爲第二數。四角半堆以上下相乘爲第三數者。此則以上長與下闊相乘。上闊與下長相乘。相併折半爲第三數。四角半堆以上下相減折半爲第四數者。此則以上下長相減折半也。（如以上下闊相減折半亦同。）其理皆相通

又法以上長八倍之得十六。加下長十二得二十八。以上闊六乘之得一百六

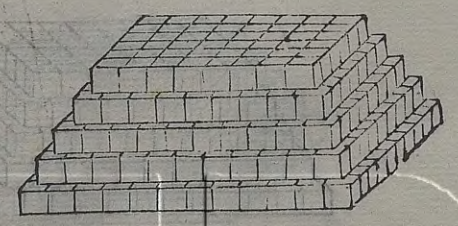


十八。又以下長十二倍之得二十四。加上長八得三十二。以下闊十乘之得三百二十又以下長十二與上長八相減餘四。三數相加得四百九十二。又以上下長相減所餘之四加一得五爲層數。與三數相加之四百九十二相乘得二千四百六十。六歸之得四百一十。即長方半堆之積也。此法與第二法同。葢此法用數比前法大一倍。故前法用三歸。



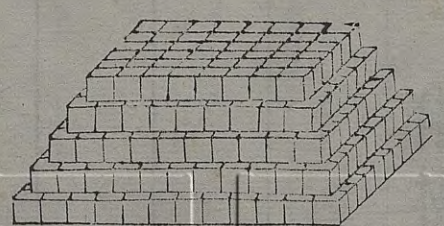
此法用六歸也。又此法與上下不等長方體之法異者。在多上下長相減之一數。因堆垜之傍面有餘分故也。

又法以底闊十與長十二相乘得一百二十。又以長十二闊十各減一得長十一闊九。相乘得九十九。又以長十一闊九各減一得長十闊八。相乘得八十。又以長十闊八各減一得長九闊七。相乘得六十三。再以長九闊七各減一得長



八闊六。即上長闊。相乘得四十八。以此五數相加。共得四百一十。即長方半堆之積也。此法將每層長闊相乘得每層之積。故總加之。即五層之共積也。法雖層累相加。實爲顯而易見。凡堆垜諸法。皆可以此法御之。若層數太多者。用本法爲簡易也。

設如長方半堆。積四百一十。上長八。闊六。求底長闊各幾何。



法以上長八闊六各減一。得長七闊五。爲上虛小長方堆之長闊。用長方堆有邊求積法。求得上虛小長方堆積八十五。與半堆積四百一十相加得四百九十五。爲長方堆全積。用長方堆有積求邊法。求得闊十長十二。即長方半堆之底邊數也。如有底邊長闊求上邊長闊者。則以底邊求得長方堆全積與半堆積相減。餘爲上虛小長方堆積。求得上

虛小長方堆之長闊兩邊各加一即長方半堆上邊長闊之數也

御製數理精蘊下編卷三十一

末部一

借根方比例 定位法 加法 減法 乘法 除法

借根方比例

借根方者。假借根數方數以求實數之法也。凡法必借根借方。加減乘除。令與未知之數比例齊等。而本數以出。大意與借衰疊借略同。然借衰疊借之法。止可以御本部。而此法則線面體諸部。皆可御之。其中有借根借方之不同。蓋因根者方之邊數。即所謂線。以根自乘得平方。以根自乘再乘得立方。以根累次乘即得累次多乘方。故以線類爲問者。則借根數以比之。以面類爲問者。則借平方長方以比之。以體類

爲問者。則借立方或累次多乘方以比之。至於借數。又有一定之位。與降位之法。定位降位法俱詳後。要之此法設立虛數。依所問之比例乘除加減。務令根方之數。與眞數相當適等。而所求之數以出。此亦借數之巧也。

定位法

衆數之經緯。盡歸乘除。而乘除之條理。又取準於定位。況借數一法。又用根方諸名。一經乘除。俱變爲幾根幾方之號。而本數之比例。由此而生。其定位與常法稍異。故變從簡易。設表如左。

定位表

前	實	根	平方	立方	三乘方	四乘方	五乘方	六乘方	七乘方	八乘方	九乘方
後	〇	一	二	三	四	五	六	七	八	九	一〇

右表前行所列者借數之名。後行所列者定數之位。其借數者即比例也。根與方數。俱爲相連比例率。如根爲二。則平方爲四。立方爲八。以立方與平方之比。同於平方與根數之比。即爲八與四之比。同於四與二之比也。然必借方借根者何也。蓋以已知未知之數。權約爲幾根幾方以統御之。加減後餘幾根幾方。即知眞數若干矣。如根爲二數。其平方即爲四。若餘二平方。即知其眞數有八。或餘二

根。即知其眞數有四也。其定位者即視根方所對之位也。乘法定位。以兩數所對之位數相加。其加數所對之方。即乘出之方也。除法定位。以兩數所對之位數相減。其減餘數所對之方。即除出之方也。乘法以眞數乘根仍得根。蓋根對一而眞數對。無可加也。如以根乘根。即得平方。蓋根對一。一與一相加得二。二所對之表爲平方。故定乘得之數爲平方也。如以根乘平方。即得立方。蓋根對一。平方對二。一二相加得三。而三所對之表爲立方。故定乘得之數爲立方也。又如以平方乘平方。則二與二相加爲四。察所對之表得三乘方。以平方乘立方。則二與三相加爲五。察所對之表得四乘方。以立方乘立方。則三與三相加爲六。察所對之表得五乘方。餘皆倣此。除法以眞數除根仍得根。蓋根對一而眞數對。無可減也。如以根除根即得眞數。蓋根對一。一與一相減得。而。所對之表爲眞數。故定除得之數爲眞數也。如以根除平方即得根。蓋根對一。平方對二。一二相減餘一。而一所對之表爲根。故定除得之數爲根數也。又如以平方除平方。則二與二減盡爲。察所對之表得眞數。以平方除立方。則二與三相減餘一。察所對之表得根數。以立方除立方。則三與三相減得。察所對之表亦得眞數也。餘皆倣此。

定多少與相同號式

凡數有多者用此號。一如一平方多二根。則如此列之。

凡數有少者用此號。一如一立方少二平方。則如此列之。

一平方　一根　二平方　二根

凡數有相等者用此號。一如二立方與十六相等則如此列之。

二等——六

至於數之多少不齊用號各異加減乘除之後有不變者。有以多變少以少變多者。俱詳於本法。

加法

凡多與多加。得數仍爲多。少與少加。得數仍爲少。多與少加。少與多加。則反相減爲所得數。而多數大則得數亦爲多。少數大則得數亦爲少。其故何也。葢因多數大。少數小。以其所多補其所少。而其所多者尚有餘也。少數大。多數小。以其所多補其所少。而其所少者仍不足也。多少之號定。而加法不淆矣。

設如有三平方多四根。與二平方多三根相加。問得幾何。

三秀——四根
二秀——三根
五秀——七根

二——八
八——六
二〇——四

法以三平方與二平方相加得五平方。四根與三根相加得七根。是爲五平方多七根。即所求之數也。此多與多加得數仍爲多也。如以數明之。以根爲二。則一平方爲四。上數三平方得十二。多四根得多八。是十二多八。共二十。下數三平方得八。多三根得多六。是八多六。共十四。上十二與下八相加得二十。即五平方之數。上多八與下多六相加得十四。即多七根之數。蓋上數共二十。下數共十四。兩數相加得三十四。即二十多十四也。

四旁——一秀
三旁——二秀
七旁——三秀

設如有四立方少一平方。與三立方少二平方相加。問得幾何。

法以四立方與三立方相加得七立方。一平方與二平方相加得三平方。是爲七立方少三平方。即所求之數也。此少與少加得數仍爲少也。如以數明之。以

一〇八——九
八——一八
一八九——二七

平方爲九。則一立方爲二十七。上數四立方得一百零八。少一平方得少九。是一百零八少九。爲九十九。下數三立方得八十一。少二平方得少十八。是八十一少十八。爲六十三。上一百零八與下八十一相加得一百八十九。即七立方之數。上少九與下少十八相加得二十七。即少三平方之數。蓋上數九十九。下數六十三。兩數相加得一百六十二。即

四根——四秀
三根——二秀
一根——六秀

一百八十九少二十七也。

設如有四平方多四根。與二平方少三根相加。問得幾何。

法以四平方與二平方相加得六平方。四根與三根相加應得七根。今多少兩數不同。故於多四根內反減去少三根。餘一根。因多數大。故得數爲多。是爲六平方多一根。即所求之數也。此多少兩數不同相加。所多數大。以其所多補足

四根——四平方

三根——二平方

根——一平方

八——六六

六——八八

二——四二

所少。而所多仍有餘。蓋以上數多四根。補足下數少三根。仍多一根也。如以數明之。以根爲二。則一平方爲四。上數四平方得十六。多四根得多八。是十六多八。共二十四。下數二平方得八。少三根得少六。是八少六爲二。上十六與下八相加得二十四。即六平方之數。上多八補足下少六仍餘二。即多一根之數。蓋上數二十四。下數二。兩數相加得二十六。即二十四多二也。

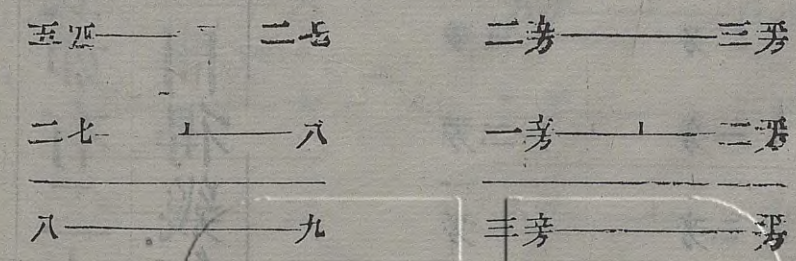
三平方——二平方

二平方——一平方

一平方——一平方

設如有二立方少三平方。與一立方多二平方相加。問得幾何。

法以二立方與一立方相加得三立方。三平方與二平方相加應得五平方。今多少兩數不同。故於少三平方內。反減去多二平方。餘一平方。因少數大。故得數爲少。是爲三立方少一平方。即所求之數也。此多少兩數不同相加。所少數



大以其所多補其所少而所少仍不足。蓋於上數少三平方內增入下數多二平方。仍少一平方也。如以數明之以平方爲九。則一立方爲二十七。上數二立方得五十四。少三平方得少二十七。是五十四少二十七。爲二十七。下數一立方得二十七。多二平方得多十八。是二十七多十八。共四十五。上五十四與下二十七相加得八十一。卽三立方之數。

上少二十七內增入下多十八仍少九。卽少一平方之數。蓋上數二十七。下數四十五。兩數相加得七十二。卽八十一少九也。

設如有一立方多三平方少四根。與一立方多二平方少三根相加。問得幾何。

法以二立方與一立方相加得三立方。三平方與二平方相加得五平方。四根與三根相加得七根。是爲三立方多五

二平方　三平方　四根
一平方　二平方　三根
三平方　五平方　七根

平方少七根。即所求之數也。此三位相加多少各自相同。故多與多加仍爲多。少與少加仍爲少也。如以數明之。以根爲一。則一平方爲四。一立方爲八。上數二立方得十六。多三平方得多十二。少四根得少八。是十六多十二又少八。爲二十。下數一立方得八。多二平方得多八。少三根得少六。是八多八又少六。爲十。上十六與下八相加得二十四。即三

一六　二　八
八　八　六
二四　二〇　四

立方之數。上多十二與下多八相加得二十。即多五平方之數。上少八與下少六相加得十四。即少七根之數。蓋上數二十。下數十。兩數相加得三十。即二十四多二十又少十四也。

設如有四立方多三平方少二根多五眞數。與五立方少一平方多三根少二眞數相加。問得幾何。

法以四立方與五立方相加得九立方。多三平方與少一平方相減餘二平方。

四旁	三旁	二根	五廉
五旁	一旁	三根	二廉
九旁	二旁	一根	三廉

多數大。故爲多。少二根與多三根相減餘一根。多數大。故爲多。多五眞數與少二眞數相減餘三眞數。多數大。故爲多。是爲九立方多二平方多一根多三眞數。卽所求之數也。此四位相加而多少各自不同。須各以所多補足所少。故相減所餘爲所得數也。如以數明之。以根爲二。則一平方爲四。一立方爲八。上數四立方得三十二。多三平方得多十二。

三五	二	四	五
四〇	四	六	二
七三	八	二	三

少二根得少四。又多眞數五。是三十二多十二。少四又多五。爲四十五。下數五立方得四十。少一平方得少四。多三根得多六。又少眞數二。是四十少四多六又少二。爲四十。上三十二與下四十相加得七十二。卽九立方之數。上多十二補足下少四。仍餘八。卽多二平方之數。上少四增入下多六。反多二。卽多一根之數。上多五補足下少二。仍餘三。卽多

三眞數。葢上數四十五。下數四十。兩數相加得八十五。即七十二多八又多二又多三也。

設如有一立方多三根與一平方少一根相加問得幾何。

一旁　一　〇　一平　一　三根
一平　一根
一旁　一　一平　一　二根

法以一立方與一平方相加得一立方多一平方。多三根與少一根相減餘二根。多數大。故爲多。是爲一立方多一平方多二根。即所求之數也。此相加兩數位分不同。須各按位列號。補足位分。始不相淆。今上層無平方位。而下層却有平方位。故上層列一空平方位以補之。凡法皆當如此也。如以數明之。以根爲三。則一平方爲九。一立方爲二十七。上數一立方得二十七。多三根得多九。是二十七多九共三十六。下數一平方得九。少一根得少三。是九少三爲六。上二十七與下無可加。仍得二十七。即一立

九　〇　一　七
三　九
六　九　一　七

二七　〇—一—九

九——三

二七—一—九—一—六

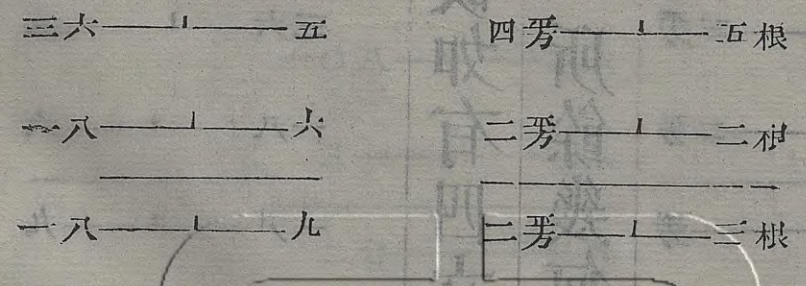
方之數下九與上空位亦無可加仍得九即一平方之數上多九補足下少三仍餘六即多二根之數蓋上數三十六下數六兩數相加得四十二即二十七多九又多六也

減法

凡多與多減原數大於減數則減餘仍爲多少與少減原數大於減數則減餘仍爲少若多與多減減數大於原數則反減而減餘即變爲少蓋減數之所多既大於原數之所多則原數之所多內減盡與原數之所多相等之數仍須於原數之整分內多減去所大之幾何則所餘之整分內即少幾何矣若少與少減減數大於原數則反減而減餘即變爲多蓋減數之所少既大於原數之所少則原數之所少內減盡

與原數之所少相等之數仍須於原數之整分內少減所大之幾何故所餘之整分內即多幾何矣至於多與少減少與多減則反相加爲減餘數而原數多則減餘仍爲多原數少則減餘仍爲少其故何也蓋因原數多減數少則原數已多在彼而減數又少於此是所餘益多也原數少減數多則原數已少在彼而減數又多於此是所餘益少也多少之號明而減法不淆矣

設如有四平方多五根內減二平方多二根問所餘幾何



法以四平方減二平方餘二平方五根減二根餘三根是爲二平方多三根即所求之數也此多與多減原數大於減數故減餘仍爲多也如以數明之以根爲三則一平方爲九上數四平方得三十六多五根得多十五是三十六多十五共五十一下數二平方得十八多二根得多六是十八多六共二十四上三

三六——丨——五
一八——丨——六
一八——丨——九

十六內減下十八餘十八。即二平方之數。上十五內減下六餘九。即三根之數。蓋上數共五十一。下數共二十四。兩數相減餘二十七。即十八多九也。

設如有四立方少三平方。內減三立方少二平方。問所餘幾何。

四方——三平
三方——二平
一方——平

法以四立方減三立方餘一立方。三平方減二平方餘一平方是爲一立方少一平方。即所求之數也。此少與少減。原數大於減數。故減餘仍爲少也。如以數明之。以十方爲九。則一立方爲二十七。上數四立方得一百零八。少三平方得少三十七。是一百零八少二十七。爲八十一。下數三立方得八十一。少二平方得少十八。是八十一少十八。爲六十三。上一百零八內減下八十一餘二十七。即一立方之數。上二十七內減下十八餘九。即少一平方之數。蓋上數八十一。

一〇八——丨——二七
八一——丨——一八
二七——丨——九

下數六十三兩數相減餘十八即二十七少九也

設如有七平方多三根內減四平方多五根問所餘幾何

七平方——三根
四平方——五根
三平方——二根

法以七平方減四平方餘三平方三根內不能減五根乃於下數多五根內反減上數多三根餘二根即變爲少是爲三平方少二根即所求之數也此多與多減減數大於原數故反減而減餘即

六三——九
三六——五
二七——六

變爲少蓋原數多三根減數多五根是減數比原數大二根如於原數三根內減去減數三根則減數仍餘二根此二根必須於原數平方內減之原數既多減二根則餘數即少二根也如以數明之以根爲三則一平方爲九上數七平方得六十三多三根得多九是六十三多九共七十二下數四平方得三十六多五根得多十五是三十六多十五共

九——丨——三六
五——丨——六三
六——七三

五十一。上六十三內減下三十六餘二十七。即三平方之數。下十五內反減上九餘六。即少二根之數。蓋上數共七十二。下數共五十一。兩數相減餘二十一。即二十七少六也。

設如有六平方少三根。內減二平方少四根。問所餘幾何。

法以六平方減二平方餘四平方。三根內不能減四根。乃於下數少四根內反減上數少三根。餘一根。即變為多。是為四平方多一根。即所求之數也。此少與少減。減數大於原數。故反減而減餘即變為多。蓋原數少三根。減數少四根。是減數比原數大一根。如於原數三根內減去減數三根。則減數仍餘一根。此一根係原數平方內所少減之一根原數既少減一根。則餘數即多一根也。如以數明之。以根為四。則一平方為十六。上

六平方——三根
二平方——四根
四平方——根

九六——二
三二——一六
六四——四

數六平方得九十六。少三根得少十二。是九十六少十二。爲八十四。下數二平方得三十二。少四根得少十六。是三十二少十六。爲十六。上九十六內減下三十二餘六十四。卽四平方之數。下十六反減上十二餘四。卽多一根之數。蓋上數八十四。下數十六。兩數相減餘六十八。卽六十四多四也。

設如有三平方多四根。內減二平方少一根。問所餘幾何。

三平——四根
二平——一根
一平——五根

法以三平方減二平方餘一平方。四根減一根應餘三根。今多少兩數不同。故反相加得五根。因原數多。故得數仍爲多。是爲一平方多五根。卽所求之數也。此多少兩數不同相減。原數多。減數少。原數已多。而減數又少。則所餘者愈多。蓋原數多四根。減數少一根。是原數比減數已多五根。故減餘卽爲多五根也。

四八——六

三二——四

一六——二

如以數明之。以根爲四。則一平方爲十六。上數三平方得四十八。多四根得多十六。是四十八多十六。共六十四。下數二平方得三十二。少一根得少四。是三十二少四。爲二十八。上四十八內減下三十二餘十六。卽一平方之數。上多十六加下少四得二十。卽多五根之數。蓋上數六十四。下數二十八。兩數相減餘三十六。卽十六多二十也。

五平方——二根

三平方——三根

二平方——五根

設如有五平方少二根。內減三平方多三根。問所餘幾何。

法以五平方減三平方餘二平方。二根不能減三根。且多少兩數不同。故反相加得五根。因原數少。故得數仍爲少。是爲二平方少五根。卽所求之數也。此多少兩數不同相減。原數少。減數多。原數已少。減數又多。則所餘者愈少。蓋原數少二根。減數多三根。是原數比減數已

五平——二根
三平——三根
七平——五根

一二五——一
七五——一五
五〇——二五

少五根故減餘即爲少五根也如以數明之以根爲五則一平方爲二十五上數五平方得一百二十五少二根得少十是一百二十五少十爲一百一十五下數三平方得七十五多三根得多十五是七十五多十五共九十上一百二十五內減下七十五餘五十即二平方之數上少十加下多十五得二十五即少五根之數蓋上數一百一十五下數九十兩數相減餘二十五即五十少二十五也

設如有四立方多六平方內減二立方多三平方多三根問所餘幾何

四方——六平　〇
二方——三平——三根
二方——三平——三根

法以四立方減二立方餘二立方六平方減三平方再減三根餘三平方少三根是爲二立方多三平方少三根即所求之數也此相減兩數位分不同須各按位列號補足位分始不相淆今上層

○　六平方　四方

三根　三平方　二方

三根　三平方　二方

無根位。而下層却有根位。故上層作一空根位以補之。是原根位無數。而減數多三根。故所餘即少三根也。如以數明之。以根爲二。則一平方爲四。一立方爲八。上數四立方得三十二。多六平方得多二十四。是三十二多二十四。共五十六。下數二立方得十六。多三平方得多十二。多三根得多六。是十六多十二又多六。爲三十四。上三十二內減下十六

○　四方　二平方

六　二　一　二　三

六　一　一　一　一

餘十六。即二立方之數。上二十四內減下十二。餘十二。即三平方之數。下六無可減。仍爲六。即少三根之數。蓋上數五十六。下數三十四。兩數相減。餘二十二。即十六多十二又少六也。

設如有五立方多四平方多三根少八眞數。內減四立方多二平方多二根少九眞數。問所餘幾何。

法以五立方減四立方。餘一立方。四平方減二平方。餘二平方。多與多減。原數

五旁一　四旁一　三根一　八藏

四旁一　二旁一　二根一　九藏

一旁一　二旁一　一根一　一藏

大故爲多。多三根減二根餘一根。多與多減。原數大故爲多。八眞數不能減九眞數。乃於下數少九內反減上數少八。餘一卽變爲多。是爲一立方多二平方多一根多一眞數。卽所求之數也。如以數明之。以根爲二。則一平方爲九。一立方爲二十七。上數五立方得一百三十五。多四平方得多三十六。多三根得多九。又少眞數八。是一百三十五多三十

一三五一　三六一　九一　八

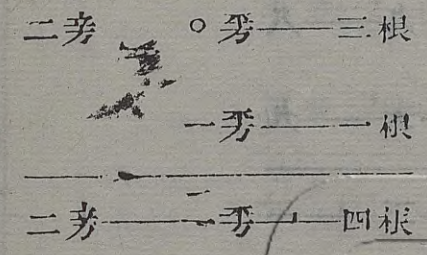
一〇八一　一八一　六一　九

二七一　一八一　三一　一

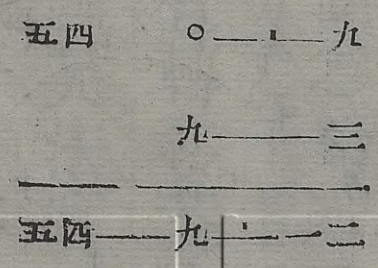
六又多九又少八。爲一百七十二。下數四立方得一百零八。多二平方得多十八。多二根得多六。又少眞數九。是一百零八多十八又多六又少九。爲一百二十三。上一百三十五內減下一百零八餘二十七。卽一立方之數。上三十六內減下十八餘十八。卽多二平方之數。上九內減下六餘三。卽多一根之數。下九反減上八餘一。卽多一眞數。葢上數一

百七十二下數一百二十三兩數相減餘四十九即二十七多十八又多三又多一也

設如有二立方多三根內減一平方少一根問所餘幾何



法以二立方減一平方餘二立方少一平方三根減一根應餘二根今多少兩數不同故反相加得四根因原數多故得數仍為多是為二立方少一平方多四根即所求之數也如以數明之以根為三則一平方為九一立方為二十七



上數二立方得五十四多三根得多九是五十四多九共六十三下數一平方得九少一根得少三是九少三為六上五十四無可減仍為五十四即二立方之數下九無可減仍為九即少一平方之數上多九與下少三相加得十二即多四根之數蓋上數六十三下數六兩

數相減餘五十七。即五十四少九又多十二也。

乘法

凡乘法。各按位分上下積列自末位起。逐位遍乘。與常法同。其書乘出之數。以類相從。如乘出之數爲根。俱書於根之下。乘出之數爲平方。俱書於平方之下。皆依定位表例。其定多少之號。則臨期互有轉移。葢法實俱止一位者。其乘出之數爲多。不必言矣。法實不止一位俱係多者。如幾平方多幾根。或幾根多幾眞數。又或幾平方多幾根又多幾眞數之類。其乘出之數亦俱爲多。葢以多乘多。則多者益多也。法實兩數俱係少者。其爲首一位已係整數爲多。如幾平方少幾根。或幾根少幾眞數。或幾平方少幾根又少幾眞數之類。

故乘出之數則有多少之分如爲首一位相乘係多與多乘其乘出之數爲多而次位爲少者與首位乘是爲少與多乘或首位與次位爲少者乘是爲多與少乘則其乘出之數俱爲少蓋少與多乘多與少乘則少者益少而得數固少也如幾平方少幾根與幾眞數相乘以眞數乘平方即爲多與多乘以眞數乘根即爲多與少乘也至於少與少乘其乘出之數反變爲多如幾立方少幾平方與幾根少幾眞數相乘以眞數乘平方即爲少與少乘也其故何也蓋法實首位爲多次位以後爲少則乘出之數首位內少次位之數必多末位之數須於乘出首位數中減去次位之數加入末位之數始與實數相合除首位上下兩整數相乘以後次位皆係少與少乘爲多而次位對首位乘必爲少與多乘或多與少乘則此兩數俱爲少合之爲首位數內少次位之數而多末位之數蓋因次位所少數內有兩分末位之數首位數內減去次位之全數即如多減去一末位之數倘能於次位數中先減去末位數然後再於首位數中減之始與實數相合今次位數中既不能先減去末位數故轉於首位數中減去次位數反加入一末位數也所謂減者即少數所謂加者即多數多少之分既定則依加法相加即爲所得之數也

設如有三根多二眞數以三眞數乘之問得幾何

法以三眞數乘二眞數得多六眞數以多末部

三根——二眞數
　　三眞數
九根——六眞數

二——二
　　三
三六——六

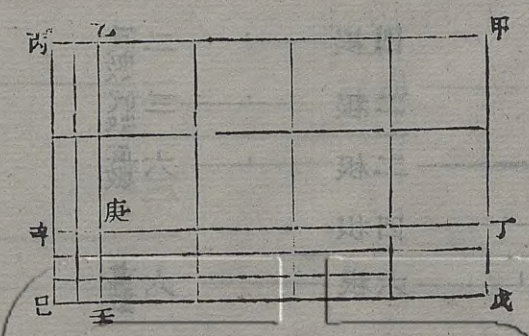
與多乘故爲多也。又凡以眞數乘根方之數。其位皆不變。如以眞數乘眞數仍得眞數。以眞數乘根仍得根。蓋定位表中眞數之位爲○。於根方之位無所加也。

以三眞數乘三根得多九根。是爲九根。多六眞數。卽所求之數也。如以數明之。以根爲四。則上數三根得十二。多二眞數。共得十四。以下眞數三乘之。所得三十六。卽九根之數。所得多六。卽多六眞數。蓋以下數三與上數十四相乘。得四十二。卽三十六多六也。

四根——二眞數
二根——三眞數
二根——六眞數
八平——四根
八平——六根——六眞數

設如有四根多二眞數。以二根多三眞數乘之。問得幾何。

法以多三眞數乘多二眞數得多六眞數。以多三眞數乘四根得多十二根。又以二根乘多二眞數得多四根。以二根乘四根得八平方。以根與根乘。卽得平方。蓋根所對之位爲一。以一加一爲二。卽平方所對之位。故得數定爲平方。相加得八平方多一十六根。又多六眞數。卽所求之數也。如圖甲乙爲四根。乙丙爲多二



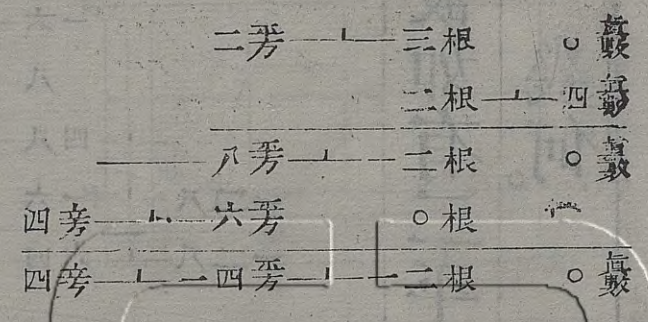
眞數。甲丁爲二根。丁戊爲多三眞數。以甲丙四根多二眞數與甲戊二根多三眞數相乘。成甲戊己丙長方形。其甲丁庚乙長方形。卽八平方。其乙庚辛丙與丁戊壬庚二長方形。卽所多十六根。其庚壬己辛長方形。卽所多六眞數也。如以數明之。以根爲四。則一平方爲十六。上數四根得十六。多二眞數。共得十八。下數二根得八。多三眞數。共得十一。相

二一六
三一八
六一八四
一一六
一二八一一
一一六
一二八一一六四一一六

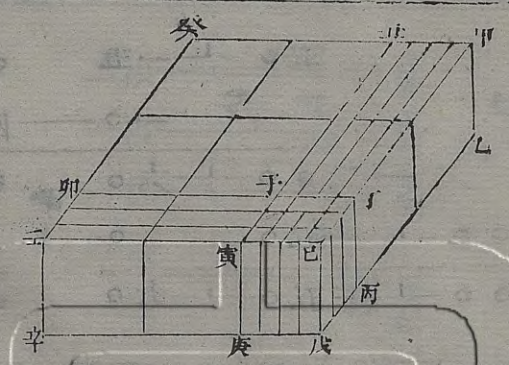
乘所得一百二十八。卽八平方之數。所得多六十四。卽多十六根之數。所得多六。卽多六眞數。葢以下數十一與上數十八相乘。得一百九十八。卽一百二十八多六十四又多六也。

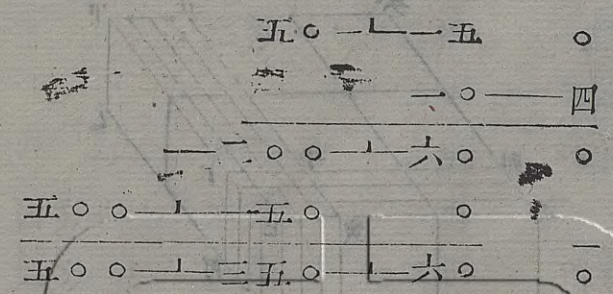
設如有二平方多三根。以二根多四眞數乘之。問得幾何。

法因上層無眞數位。故列一空位以補之。以多四眞數乘空眞數仍爲空。以多



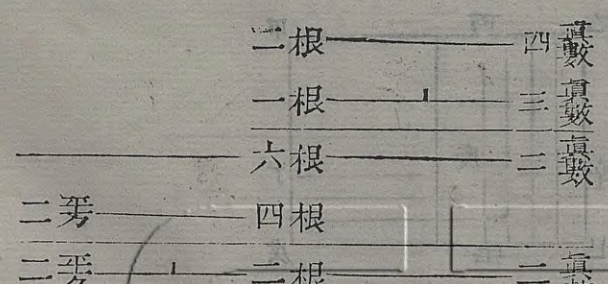
四眞數乘多三根得多十二根。以多四眞數乘二平方得多八平方。以二根乘空眞數仍爲空。以二根乘多三根得多六平方。以二根乘二平方得四立方。以根乘平方。即得立方。蓋根所對之位爲一。平方所對之位爲二。以一加二得三。即立方所對之位也。相加得四立方多十四平方又多十二根。即所求之數也。此相乘兩數位分不同。須各按位列號補足位分始不相淆。凡法皆當如此。如圖甲乙丙丁爲二平方。丁丙戊己爲多三根。庚辛爲二根。戊庚爲多四眞數。以甲乙戊己二平方多三根與戊辛二根多四眞數相乘。成乙己辛癸扁方體。其丙己庚子十二根即四眞數乘三根之數。其甲乙丙丁子丑八平方。即四眞數乘二平方乘三根之數。其丑子卯癸四立方。即二根乘二平方之數也。如以數明之。以根之數其子寅庚辛壬卯六平方。即二根



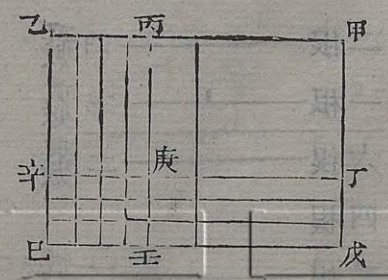


為五。則一平方為二十五。一立方為一百二十五上數二平方得五十。多三根得多十五。共得六十五。下數二根得一十。多四眞數。共得十四。相乘所得五百。即四立方之數。所得多三百五十。即多十四平方之數。所得多六十即多十二根之數。蓋以下數十四與上數六十五相乘。得九百一十。即五百多三百五十又多六十也。

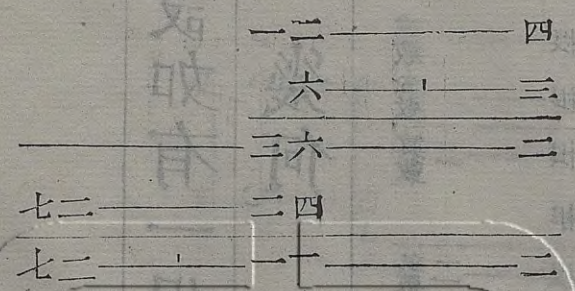
設如有二根少四眞數以一根多三眞數乘之。問得幾何。



法以多三眞數乘少四眞數得少十二眞數。多與少乘故為少。以多三眞數乘二根得多六根。凡為首一位皆為多。而數前無號者亦即為多。今以多三眞數與多二根相乘故其得數仍為多。又以一根乘少四眞數得少四根。以多與少乘故為少。以一根乘二根得二平方。相加得二平方多二根少十二眞數。即所求之數也。如圖甲乙為二



根。丙乙爲少四眞數。甲丁爲一根。丁戊爲多三眞數。以甲乙二根少四眞數與甲戊一根多三眞數相乘。成甲戊己乙長方形。其庚壬己辛長方形。卽多三眞數乘少四眞數之十二眞數。丁戊己辛長方形。卽多三眞數乘二根之六根。丙庚辛乙長方形。卽一根乘少四眞數之四根。甲丁辛乙長方形。卽一根乘二根之二平方。合之爲甲丁辛乙二平方。而少丙庚辛乙之四根。又多丁戊己辛之六根。而少庚壬己辛之十二眞數。今以丁戊己辛之多六根少十二眞數。補丙庚辛乙之少四根。仍多二根而少十二眞數也。如以數明之。以根爲六。則一平方爲三十六。上數二根得十二。少四眞數則餘八。下數一根得六。多三眞數共得九。相乘所得七十二。卽二平方之數。所得多十二。卽多二根之數。所得少十

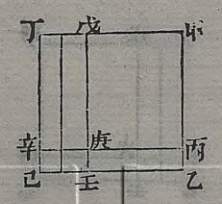


二即少十二眞數之數蓋以下數九與上數八相乘得七十二即七十二多十二又少十二也

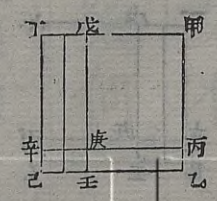
設如有一根少一眞數以一根少二眞數乘之問得幾何

一根——眞數
一根——二眞數
二根——二眞數
一秀——一根
一秀——三根——二眞數

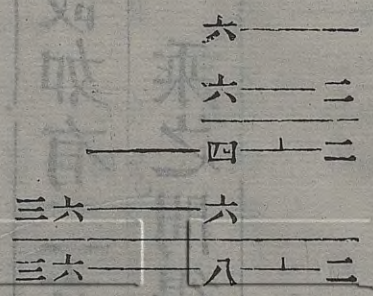
法以少二眞數乘少一眞數得多二眞數少與少乘以少二眞數乘一根得少數故爲多以一根爲首且無號故爲多今以少二根二眞數與多一根相乘故其得數亦爲少也又以一根乘少一眞數得少一根



多與少乘故爲少以一根乘一根得一平方相加得一平方少三根多二眞數即所求之數也如圖甲乙爲一根丙乙爲少一眞數甲丁亦爲一根戊丁爲少二眞數以甲乙一根少一眞數與甲丁一根少二眞數相乘成甲乙己丁正方形其庚壬己辛小長方形即少二眞數乘少一眞數之二眞數其戊壬己丁即二眞數乘一根之二根其丙乙己辛即一根乘



少一眞數之一根其甲乙己丁爲一根乘一根之一平方合之爲甲乙己丁一平方而少丙乙己辛之一根又少戊壬己丁之二根而多庚壬己辛之二眞數實得甲丙庚戊之一長方形葢甲乙己丁之一正方內減戊壬己丁之二根又減丙乙己辛之一根是重減去庚壬己辛之二眞數則甲丙庚戊長方內必缺二眞數故將少二眞數乘少一眞數所



得之二眞數卽預定爲多號以補重減之分然後得甲丙庚戊之一長方爲所得之實數也是則少與少乘之爲多者非於整數之外有盈分而爲多實因所少之數有過分而爲多也如以數明之以根爲六則一平方爲三十六上數一根爲六少一眞數則餘五下數一根爲六少二眞數則餘四相乘所得三十六卽一平方之數所得少十八卽少三根

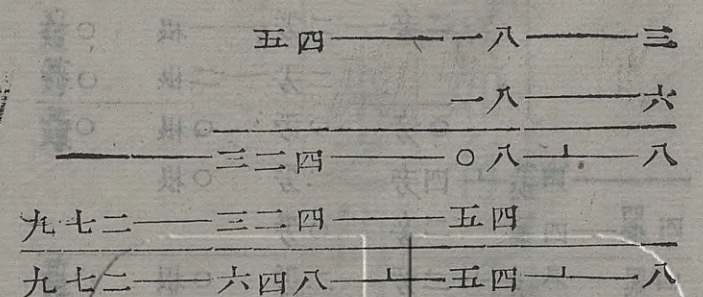
之數所得多二即多二眞數之數葢以下數四與上數五相乘得二十即三十六少十八多二也

設如有二立方少二平方少一根以二平方少二根乘之問得幾何

法因上下兩層皆無眞數位故各列一空位以補之以空眞數乘上層各位仍得各空位以少二根乘空眞數仍得空根以少二根乘少一根得多二平方以

	二旁	二秀	根	○數
		二秀	二根	○數
	○旁	○秀	○根	○數
四乘	四旁	二秀	○根	
四乘	四乘	○秀		
四乘	八乘	二旁	二秀	○根	○數

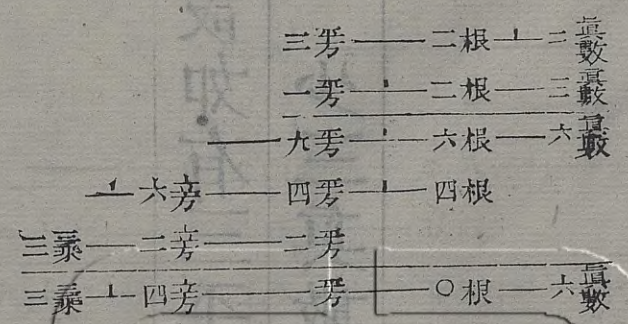
少二根乘少二平方得多四立方以少二根乘二立方得少四三乘方又以二平方乘空眞數仍得空平方以二平方乘少一根得少二立方以二平方乘少二平方得少四三乘方以二平方乘二立方得四四乘方相加共得四四乘方少八三乘方多二立方又多二平方即所求之數也如以數明之以根爲三則一平方爲九一立方爲二十七一三乘



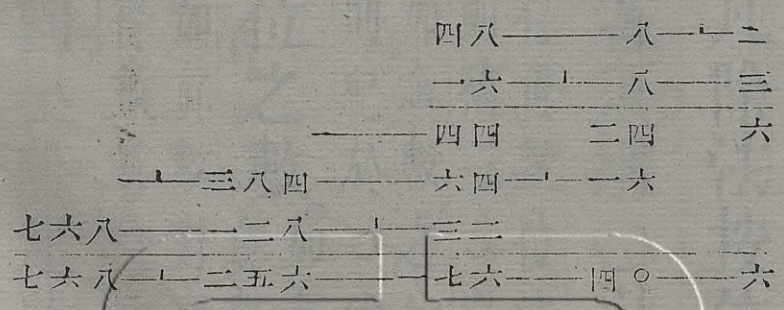
方爲八十一。四乘方爲二百四十三。上數二立方得五十四。少二平方得少十八。少一根得少三。是五十四少十八又少三爲三十三。下數二平方得十八少二根得少六。是十八少六爲十二。相乘所得九百七十二。即四四乘方之數。所得少六百四十八。即少八三乘方之數。所得多五十四。即多二立方之數。所得多十八。即多二平方之數。蓋以下數十二與上數三十三相乘。得三百九十六。即九百七十二內少六百四十八又多五十四復多十八也。

設如有三平方少二根多二眞數與一平方多二根少三眞數相乘。問得幾何。

法以少三眞數乘多二眞數得少六眞數。以少二眞數乘少二根得多六根。以少三眞數乘三平方得少九平方。又以多二根乘多二眞數得多四根。以多二



根乘少二根得少四平方。以多二根乘三平方得多六立方。又以一平方乘多二眞數得多二平方。以一平方乘少二根得少二立方。以一平方乘三平方得三三乘方。相加得三三乘方多四立方少十二平方多十根少六眞數。即所求之數也。如以數明之。以根爲四。則一平方爲十六。一立方爲六十四。一三乘方爲二百五十六。上數三平方得四十八少二根得少八。多二眞數。共得四十二。下數一平方得十六。多二根得多八。少三眞數。共得二十二。相乘所得七百六十八。即三三乘方之數。所得多二百五十六。即多四立方之數。所得少一百七十六。即少十一平方之數。所得多四十。即多十根之數。所得少六。即少六眞數之數。蓋以下數二十一與上數四十二相乘得八百八十二。即七百六十八多



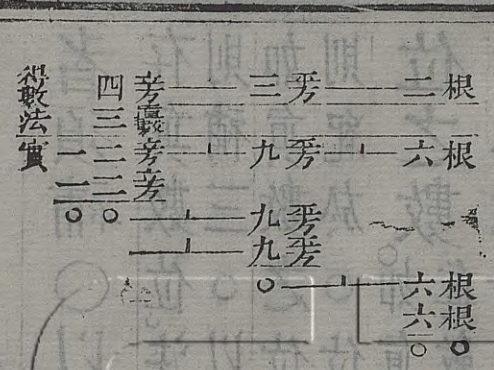
三百五十六又少二百七十六仍多四十復少六也。

除法

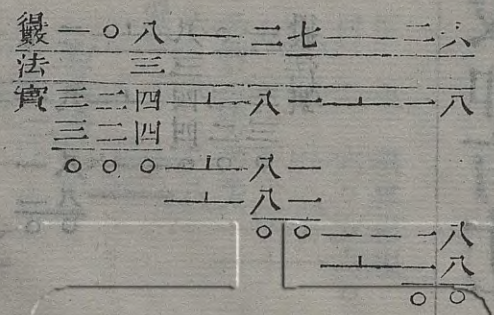
凡除法按位列數。必以眞數爲單位。法尾未至眞數者須補〇以存其位。如法尾爲根。則補一〇以有眞數位。法尾爲平方。則補二〇以存眞數位。法尾爲立方。則補三〇以存眞數位。將得數首位紀於眞數之上。如眞數之位爲〇者。則紀於〇位之上。眞數所對實中之位。卽得數首位之數。如眞數對實中根位。卽定得數首位爲根。如眞數對實中平方位。卽定得數首位爲平方。如眞數對實中立方位。卽定得數首位爲立方。餘俱倣此。其歸除遞減。皆與常法同。至於定號亦與乘法同。俱詳設如於左。

設如有十二立方多九平方多六根。以三眞數除之。

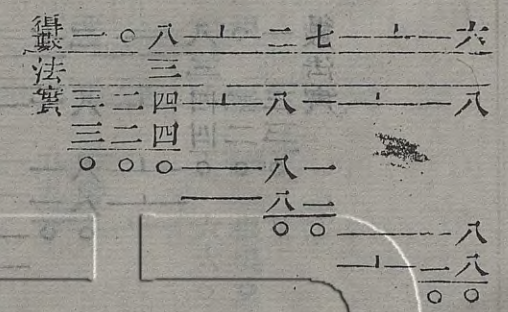
問得幾何。



法以三眞數除十二立方得四立方以四立方乘三眞數得十二立方與實相減恰盡餘多九平方多六根復以三眞數除多九平方得多三平方以多三平方乘三眞數得多九平方與實相減恰盡餘多六根又以三眞數除多六根得多二根以多二根乘三眞數得多六根與實相減恰盡無餘是爲四立方多三



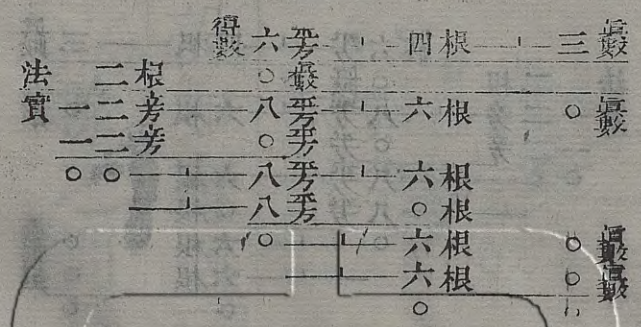
平方多二根即所求之數也此法葢因眞數除立方多平方與多根故得數之位仍從實數之位且眞數之位下對實中立方之位故定得數首位亦爲立方又因實數皆爲多故得數亦皆爲多也如以數明之以根爲三則一平方爲九一立方爲二十七實數十二立方得三百二十四多九平方得多八十一多六根得多十八是三百二十四多八十一

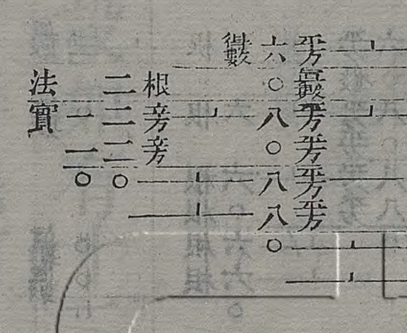


又多十八。共爲四百二十三。以眞數三除之。所得一百零八。卽四立方之數。所得多二十七。卽多三平方之數。所得多六。卽多二根之數。蓋以四百二十三。以三除之得一百四十一。卽一百零八多二十七又多六也。

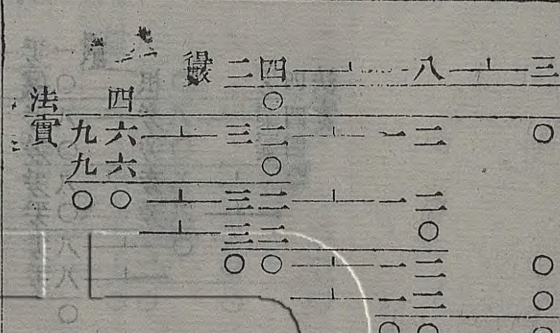
設如有十二立方多八平方多六根。以二根除之。問得幾何。

法因法尾未至眞數位。故設一空眞數位以補之。以二根除十二立方得六平方。以六平方乘二根得十二立方。與實相減恰盡。餘多八平方多六根。復以二根除多八平方得多四根。以多四根乘二根得多八平方。與實相減恰盡。餘多六根。復以二根除多六根得多三眞數。以多三眞數乘二根得多六根。與實相減恰盡無餘。是爲六平方多四根多三眞數。卽所求之數也。此法蓋因根數除



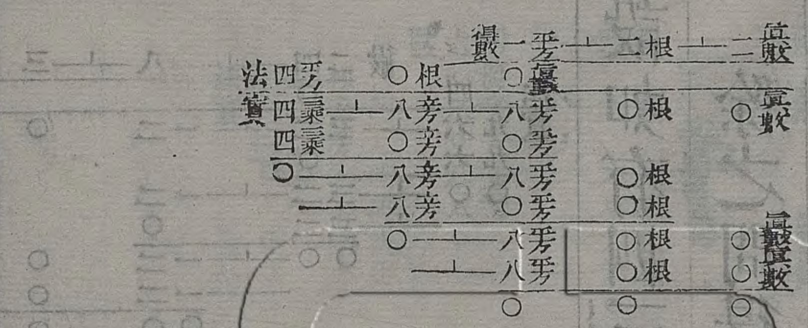


立方多平方與多根。故根除立方得平方根除多平方得多根。根除多根而得多眞數。且眞數之位下對實中平方之位。故定得數首位亦爲平方。又因實數皆爲多。故得數亦皆爲多也。如以數明之。以根爲二。則一平方爲四。一立方爲八。實數十二立方得九十六。多八平方得多三十二。多六根得多十二。是九十六多三十二又多十二。共爲一百四十。法數一根爲四除之所得二十四。卽六平方之數。所得多八。卽多四根之數。所得多三。卽多三眞數之數。蓋一百四十以四除之得三十五。卽二十四多八又多三也。

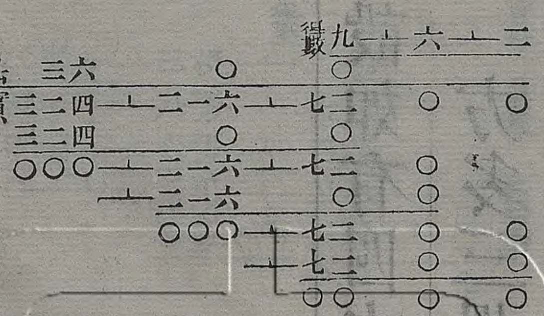


設如有四三乘方多八立方又多八平方以四平方除之。問得幾何。

法以四平方除四三乘方得一平方。以一平方乘四平方得四三乘方與實相



減恰盡。餘多八立方多八平方。復以四平方除多八立方得多二根。以多二根乘四平方得多八立方。與實相減恰盡。餘多八平方。又以四平方除多八平方得多二眞數。以多二眞數乘四平方得多八平方。與實相減恰盡無餘。是爲一平方多二根又多二眞數。即所求之數也。此法葢因平方除二乘方多立方與多平方。故平方除三乘方得平方平方

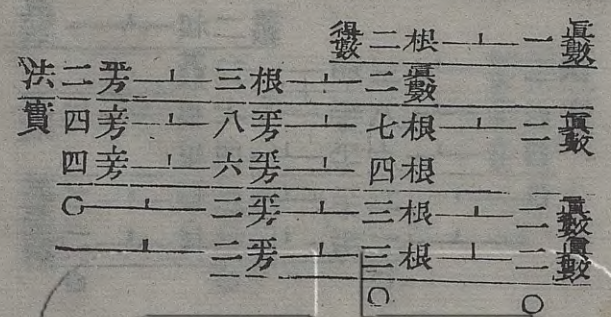


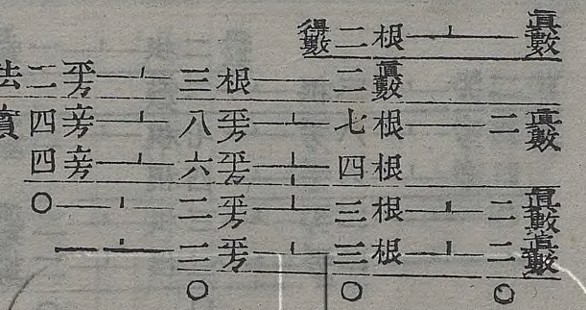
除多立方得多根。平方除多平方得多眞數。且眞數之位下對實中平方之位。故定得數首位亦爲平方。又因實數皆爲多。故得數亦皆爲多也。如以數明之。以根爲三。則一平方爲九。一立方爲二十七。一三乘方爲八十一。實數四三乘方得三百二十四。多八立方得多二百一十六。多八平方得多七十二。是三百二十四多二百一十六又多七十二。共

爲六百一十二。法數四平方爲三十六除之所得之九。卽一平方之數。所得多六卽多二根之數。所得多二卽多二眞數之數。蓋六百一十二以三十六除之得十七。卽九多六又多二也。

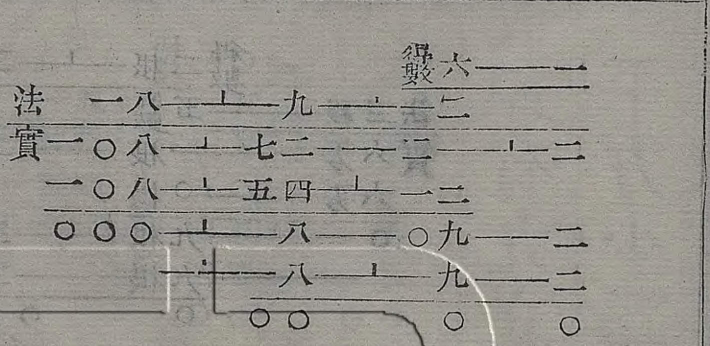
設如有四立方多八平方多七根多二眞數。以二平方多三根多二眞數除之。問得幾何。

法以二平方多三根多二眞數除四立方多八平方多七根。得二根。以二根乘多二眞數乘多四根。以二根乘多三根得多六平方。以二根乘二平方得四立方與實相減。餘多二平方多三根多二眞數。復以二平方多三根多二眞數除二平方多三根多二眞數。得多一眞數。以多一眞數乘多二眞數。得多二眞數。以多一眞數乘多三根得多三根。以多一眞數乘二平方得多二平方。與實相減恰盡無餘。是爲二根多一眞數。卽所

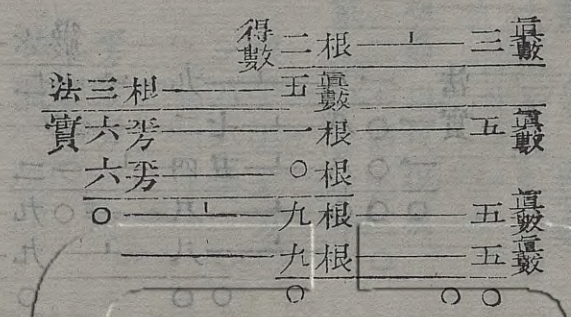




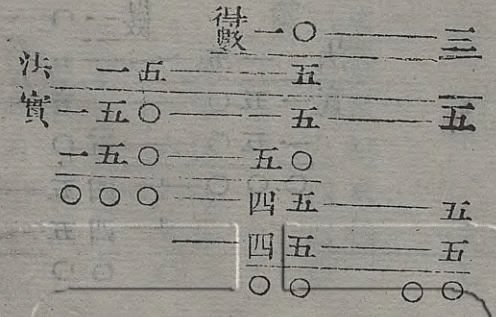
求之數也。此法葢因平方多根多眞數除立方多平方多根多眞數。故以平方除立方得根。以平方除多平方得多眞數。且眞數之位下對實中根位。故定得數首位爲根。又因實數皆爲多。故得數亦皆爲多也。如以數明之。以根爲三。則一平方爲九。一立方爲二十七。實數四立方得一百零八。多八平方得多七十二。多七根得多二十一。多二眞數卽多二。是爲一百零八多七十二又多二十一又多二。共爲二百零三。法數二平方得十八多二根得多九多二眞數卽多二。是爲十八多九又多二。共爲二十九除之所得之六。卽二根之數所得多一卽多一眞數。葢二百零三以二十九除之得七。卽六多一也。



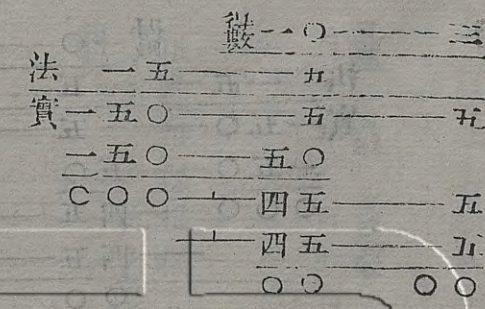
設如有六平方少一根少十五眞數。以三根少五眞數除之。問得幾何。



法以三根少五眞數除六平方少一根。得二根以二根乘少五眞數得少十根。以二根乘三根得六平方。與實相減。平方恰盡。根之減數。大於原數。轉減之。餘多九根。少十五眞數。復以三根少五眞數除多九根少十五眞數。得多三眞數。減餘之九根爲多。故除得之三眞數亦爲多也。以多三眞數與少五眞數相乘得少十五眞數。以多三眞數與三根相乘得多九根。與實相減

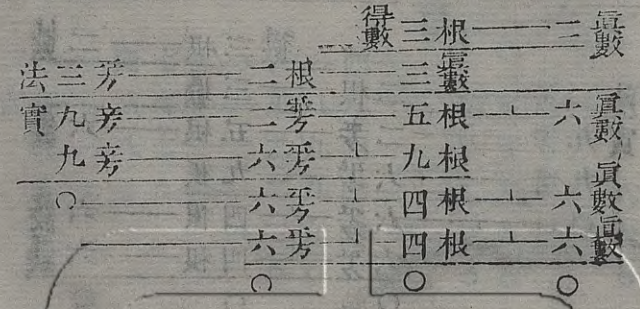


恰盡無餘。是爲二根多三眞數。卽所求之數也。此法葢因根少眞數除平方少根少眞數。故以根除平方得根。以根除多根根原爲少。而減餘數變爲多。得多眞數。且眞數之位下對實中根位。故定得數首位爲根。又因實數原爲少。而次位餘實之數變爲多。故定得數次位爲多也。如以數明之。以根爲五。則一平方爲二十五。實數六平方得一百五十。少一根得少五。

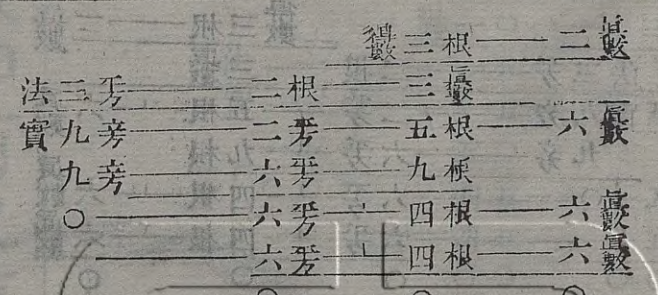


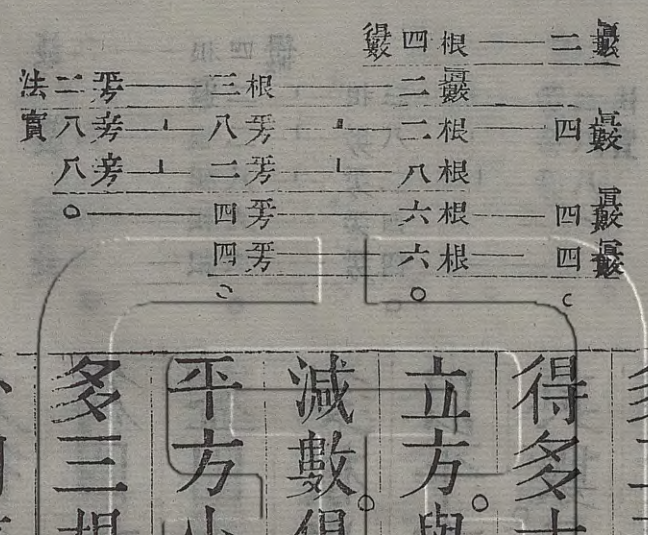
少十五眞數卽少十五是爲一百五十少五又少十五共爲一百三十法數三根得十五少五眞數卽少五是爲十五少五共爲一十除之所得之一十卽二根之數所得之多三卽多三眞數之數蓋一百三十以十除之得十三卽十多三也

設如有九立方少十二平方少五根多六眞數以三平方少二根少三眞數除之問得幾何



法以三平方少二根少三眞數除九立方少十二平方少五根得三根以三根乘少三眞數得少九根以三根乘少二根得少六平方以三根乘三平方得九立方與實相減立方恰盡原少十二平方減少六平方餘少六平方原少五根不能減九根轉減之餘多四根又多六眞數復以三平方少二根少三眞數除少六平方多四根多六眞數得少二眞


廉
廉
廉

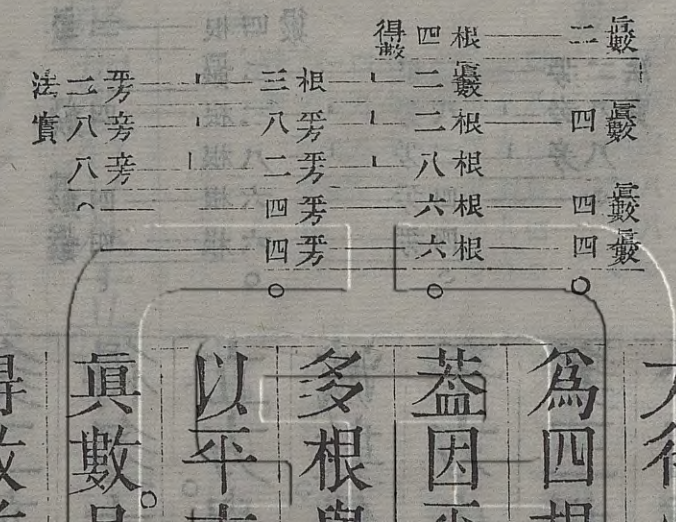


四少三眞數即少三是爲一百四十七少十四又少三共爲一百三十除之所得之二十一即三根之數所得之少三即少二眞數之數蓋二千四百七十以一百三十除之得十九即二十一少二也

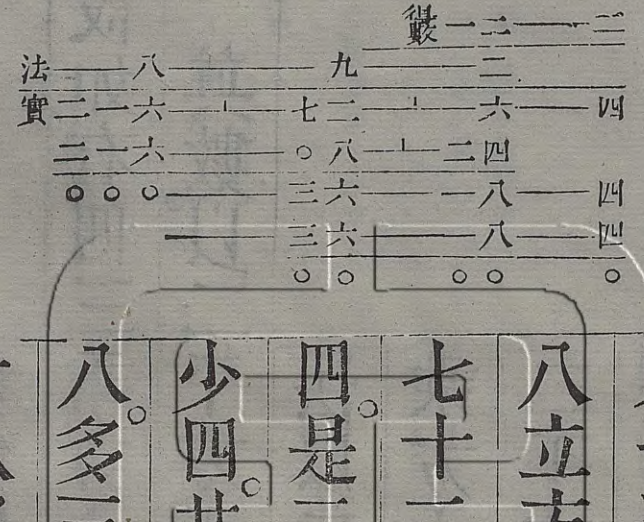
設如有八立方多八平方多二根少四眞數以二平方多三根多二眞數除之問得幾何

法以二平方多三根多二眞數除八立

方多八平方多二根得四根以四根乘多二眞數得多八根以四根乘多三根得多十二平方以四根乘二平方得八立方與實相減立方恰盡平方與根之減數俱大於原數故皆轉減之餘少四平方少六根又少四眞數復以二平方多三根多二眞數除少四平方少六根少四眞數得少二眞數以少二眞數乘多二眞數得少四眞數以少二眞數乘



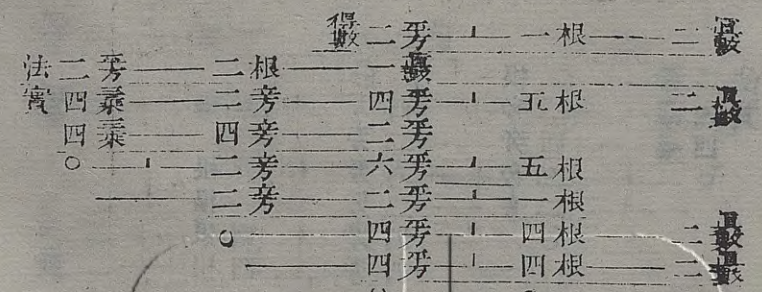
多三根得少六根。以少二眞數乘二平方得少四平方。與實相減恰盡無餘。是爲四根少二眞數。卽所求之數也。此法蓋因平方多根多眞數除立方多平方多根與少眞數。故以平方除立方得根。以平方除少平方（平方原爲多。而減餘數變爲少。）得少眞數。且眞數之位下對實中根位故定得數首位爲根。又實數之號。雖有多有少不同。而次位餘實皆變爲少。故定得數次位爲少也。如以數明之。以根爲三則一平方爲九。一立方爲二十七。實數八立方得二百一十六。多八平方得多七十二。多二根得多六。少四眞數卽少四。是二百一十六多七十二又多六仍少四。共爲二百九十。法數二平方得十八。多二。共爲二十九。除之所得十二。卽四根之數。所得少二。卽少二



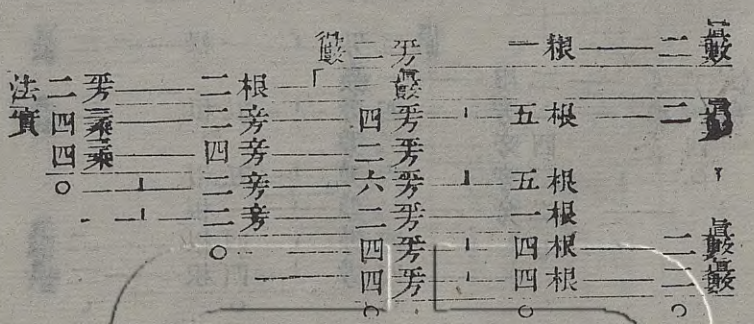
眞數之數。蓋二百九十以二十九除之得十。即十二少二也。

設如有四三乘方少二立方少四平方多五根少二眞數。以二平方少二根多一眞數除之。問得幾何。

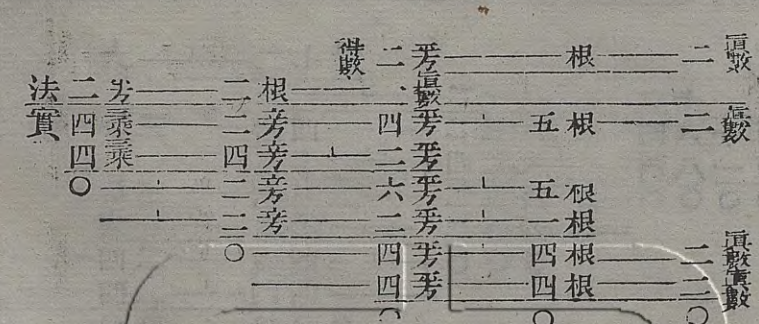
法以二平方少二根多一眞數除四三乘方少二立方少四平方。得二平方。以二平方乘多一眞數得多二平方。以二平方乘少二根得少四立方。以二平方乘二平方得四三乘方。與實相減。三乘

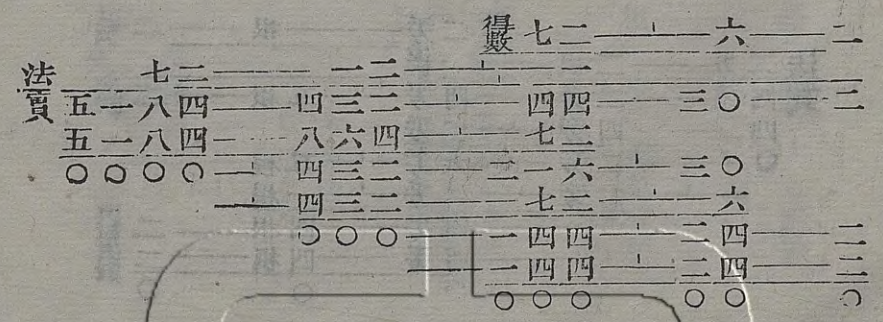


方恰盡。原少二立方不能減少四立方。轉減之餘多二立方。原少四平方減多二平方。故相加爲少六平方。仍多五根。復以二平方少二根多一眞數除多二立方少六平方多五根。得多一根。以多一根乘多一眞數得多一根。以多一根乘少二根得少二平方。以多一根乘二平方得多二立方。與實相減。立方恰盡。原少六平方減少二平方。餘少四平方



原多五根減多一根。餘多四根仍少二眞數。又以二平方少二根多一眞數除少四平方多四根少二眞數。得少二眞數。以少二眞數乘多一眞數得少二眞數。以少二眞數乘少二根得多四根。以少二眞數乘二平方得少四平方。與實相減恰盡無餘。是為二平方多一根少二眞數。即所求之數也。此法蓋因平方少根多眞數除三乘方少立方又少平方仍多根與少眞數。故以平方除三乘方得平方。以平方除多立方（立方原為少。而減餘數變為多）得多根。以平方除少平方得少眞數。且眞數之位下對實中平方之位。故定得數首位為平方。又實數之號。雖有多有少不同。而次位餘實之首數變為多三位餘實之首數仍為少。故定得數之次位為多三位為少也。如以數明之。以根為六。則一平方為三十六一立方





爲二百一十六。一三乘方爲一千二百九十六。實數四三乘方得五千一百八十四。少二立方得少四百三十二。少四平方得少一百四十四。多五根得多三十。少二眞數卽少一。是五千一百八十四少四百三十二又少一百四十四仍多三十復少二共爲四千六百三十六。法數二平方得七十二。少二根得少十二。多一眞數卽多一。是七十二少十二又多一。共爲六十一除之。所得七十二。卽二平方之數。所得多六。卽多一根之數。所得少二卽少二眞數之數。蓋四千六百三十六以六十一除之得七十六。卽七十二多六少二也。