Equazioni frazionarie e letterali 17

17.1 Equazioni di grado superiore al primo riducibili al primo grado

Nel capitolo 15 abbiamo affrontato le equazioni di primo grado. Adesso consideriamo le equazioni di grado superiore al primo che possono essere ricondotte ad equazioni di primo grado, utilizzando la legge di annullamento del prodotto (legge 1.2 a pagina 12).

Esempio 17.1. Risolvere $x^2 - 4 = 0$.

Il polinomio al primo membro può essere scomposto in fattori: $(x-2)(x+2) = 0$. Per la legge di annullamento, il prodotto dei due binomi si annulla se $x - 2 = 0$ oppure se $x + 2 = 0$. Di conseguenza si avranno le soluzioni: $x = 2$ e $x = -2$.

In generale, se si ha un'equazione di grado n scritta in forma normale $P(x) = 0$ e se il polinomio $P(x)$ è fattorizzabile nel prodotto di n fattori di primo grado:

$$(x-a_1)(x-a_2)(x-a_3)\ldots(x-a_{n-1})(x-a_n) = 0$$

applicando la legge di annullamento del prodotto, le soluzioni dell'equazione si ottengono determinando le soluzioni delle singole n equazioni di primo grado, cioè risolvendo:

$$x-a_1 = 0,\quad x-a_2 = 0,\quad x-a_3 = 0,\quad \ldots,\quad x-a_{n-1} = 0,\quad x-a_n = 0.$$

Pertanto l'insieme delle soluzioni dell'equazione data sarà: $\text{I. S.} = \{a_1, a_2, a_3, \ldots, a_{n-1}, a_n\}$.

Esempio 17.2. Risolvere $x^2 - x - 2 = 0$.

Scomponendo in fattori il polinomio al primo membro, ricercando quei due numeri la cui somma è pari a -1 e il cui prodotto è pari a -2, si ha: $(x+1)(x-2) = 0$. Utilizzando la legge di annullamento del prodotto, si ottiene il seguente insieme di soluzioni: $\text{I. S.} = \{-1, 2\}$.

Esempio 17.3. Risolvere $x^4 - 5x^2 + 4 = 0$.

Scomponendo in fattori il polinomio al primo membro, utilizzando la regola della scomposizione del particolare trinomio di secondo grado, si ottiene: $(x^2-1)(x^2-4) = 0$. Scomponendo ulteriormente in fattori si ha:

$$(x-1)(x+1)(x-2)(x+2) = 0.$$

Per la legge di annullamento del prodotto è necessario risolvere le equazioni:

$$x-1 = 0 \Rightarrow x = 1,\quad x+1 = 0 \Rightarrow x = -1,\quad x-2 = 0 \Rightarrow x = 2,\quad x+2 = 0 \Rightarrow x = -2.$$

L'insieme delle soluzioni: $\text{I. S.} = \{+1, -1, +2, -2\}$.

✍ *Esercizi proposti:* 17.1, 17.2, 17.3, 17.4, 17.5, 17.6, 17.7, 17.8, 17.9, 17.10, 17.11, 17.12, 17.13, 17.14

17.2 Equazioni numeriche frazionarie

Affrontiamo ora le equazioni in cui l'incognita compare anche al denominatore.

Definizione 17.1. Un'equazione in cui l'incognita compare al denominatore si chiama *frazionaria* o *fratta*.

Esempio 17.4. Risolvere $\dfrac{3x-2}{1+x} = \dfrac{3x}{x-2}$.

Questa equazione si differenzia da quelle affrontate in precedenza per il fatto che l'incognita compare anche al denominatore. Riflettendo sulla richiesta del problema, possiamo senz'altro affermare che, se esiste il valore che rende la frazione al primo membro uguale alla frazione al secondo membro, esso non deve annullare nessuno dei due denominatori, poiché in questo caso renderebbe priva di significato la scrittura, in quanto frazioni con denominatore 0 sono prive di significato.

Per risolvere un'equazione frazionaria, prima di tutto dobbiamo renderla nella forma

$$\frac{F(x)}{G(x)} = 0.$$

a) Determiniamo il mcm dei denominatori, mcm $= (1+x)\cdot(x-2)$. Osserviamo che per $x = -1$ oppure per $x = 2$ le frazioni perdono di significato, in quanto si annulla il denominatore;
b) imponiamo le condizioni di esistenza: $1+x \neq 0$ e $x-2 \neq 0$ cioè C. E. $x \neq -1 \wedge x \neq 2$. La ricerca dei valori che risolvono l'equazione viene ristretta all'insieme $\mathcal{D} = \mathbb{R} - \{-1, 2\}$, detto *dominio* dell'equazione o *insieme di definizione*;
c) applichiamo il primo principio d'equivalenza trasportando al primo membro la frazione che si trova al secondo membro e riduciamo allo stesso denominatore (mcm)
$$\frac{(3x-2)\cdot(x-2)-3x\cdot(1+x)}{(1+x)\cdot(x-2)} = 0;$$
d) applichiamo il secondo principio di equivalenza moltiplicando ambo i membri per il mcm, certamente diverso da zero per le condizioni poste precedentemente. L'equazione diventa: $(3x-2)\cdot(x-2)-3x\cdot(1+x) = 0$;
e) eseguiamo le moltiplicazioni e sommiamo i monomi simili per portare l'equazione alla forma canonica: $3x^2-6x-2x+4-3x-3x^2 = 0 \Rightarrow -11x = -4$;
f) dividiamo ambo i membri per -11, per il secondo principio di equivalenza si ha: $x = \frac{4}{11}$;
g) confrontiamo il valore trovato con le C. E.: in questo caso la soluzione appartiene al dominio $\mathcal{D}$, quindi possiamo concludere che è accettabile. L'insieme soluzione è: I. S. $= \left\{\frac{4}{11}\right\}$.

Esempio 17.5. Risolvere $\dfrac{x^2+x-3}{x^2-x} = 1 - \dfrac{5}{2x}$.

a) Determiniamo il mcm dei denominatori. Per fare questo dobbiamo prima scomporli in fattori. Riscriviamo: $\dfrac{x^2+x-3}{x\cdot(x-1)} = 1 - \dfrac{5}{2x}$ con mcm $= 2x\cdot(x-1)$;

b) condizioni di esistenza:

$$x-1 \neq 0 \wedge 2x \neq 0,$$

cioè $x \neq 1 \wedge x \neq 0$. Il dominio è $\mathcal{D} = \mathbb{R} - \{1, 0\}$;

c) trasportiamo al primo membro ed uguagliamo a zero

$$\frac{x^2+x-3}{x \cdot (x-1)} - 1 + \frac{5}{2x} = 0$$

e riduciamo allo stesso denominatore (mcm) ambo i membri

$$\frac{2x^2+2x-6-2x^2+2x+5x-5}{2x \cdot (x-1)} = 0;$$

d) applichiamo il secondo principio di equivalenza moltiplicando ambo i membri per il mcm, certamente diverso da zero per le condizioni poste in precedenza. L'equazione diventa: $2x^2+2x-6-2x^2+2x+5x-5=0$;

e) riduciamo i monomi simili per portare l'equazione alla forma canonica: $9x = 11$;

f) dividiamo ambo i membri per 9, otteniamo: $x = \frac{11}{9}$;

g) confrontando con le C. E., la soluzione appartiene all'insieme $\mathcal{D}$, dunque è accettabile e l'insieme soluzione è: I. S. $= \left\{\frac{11}{9}\right\}$.

✍ *Esercizi proposti:* 17.15, 17.16, 17.17, 17.18, 17.19, 17.20, 17.21, 17.22, 17.23, 17.24, 17.25

17.26, 17.27, 17.28, 17.29, 17.30, 17.31, 17.32, 17.33, 17.34, 17.35, 17.36, 17.37

17.3 Equazioni letterali

17.3.1 Equazioni con un solo parametro

Quando si risolvono problemi, ci si ritrova a dover tradurre nel linguaggio simbolico delle proposizioni del tipo: «Un lato di un triangolo scaleno ha lunghezza pari a k volte la lunghezza dell'altro e la loro somma è pari a $2k$». Poiché la lunghezza del lato del triangolo non è nota, ad essa si attribuisce il valore incognito x e quindi la proposizione viene tradotta dalla seguente equazione: $x + kx = 2k$.

È possibile notare che i coefficienti dell'equazione non sono solamente numerici, ma contengono una lettera dell'alfabeto diversa dall'incognita. Qual è il ruolo della lettera k? Essa prende il nome di *parametro* ed è una costante che rappresenta dei numeri fissi, quindi, può assumere dei valori prefissati. Ogni volta che viene fissato un valore di k, l'equazione precedente assume una diversa forma. Infatti si ha:

Valore di k	Equazione corrispondente
0	$x = 0$
2	$x + 2x = 4$
$-\frac{1}{2}$	$x - \frac{1}{2}x = -1$

Si può quindi dedurre che il parametro diventa una costante, all'interno dell'equazione nell'incognita x, ogni volta che se ne sceglie il valore.

Si supponga che il parametro k assuma valori all'interno dell'insieme dei numeri reali. Lo scopo è quello di risolvere l'equazione, facendo attenzione a rispettare le condizioni che permettono l'uso dei principi d'equivalenza e che permettono di ridurla in forma normale.

Riprendiamo l'equazione $x + kx = 2k$, raccogliamo a fattore comune la x si ha:

$$(k+1)x = 2k.$$

Per determinare la soluzione di questa equazione di primo grado, è necessario utilizzare il secondo principio d'equivalenza e dividere ambo i membri per il coefficiente $k+1$. Si ricordi però che il secondo principio ci permette di moltiplicare o dividere i due membri dell'equazione per una stessa espressione, purché questa sia diversa da zero. Per questa ragione, nella risoluzione dell'equazione $(k+1)x = 2k$ è necessario distinguere i due casi:

- se $k+1 \neq 0$, cioè se $k \neq -1$, è possibile dividere per $k+1$ e si ha $x = \frac{2k}{k+1}$;
- se $k+1 = 0$, cioè se $k = -1$, sostituendo tale valore all'equazione si ottiene l'equazione $(-1+1)x = 2 \cdot (-1)$, cioè $0 \cdot x = -2$ che risulta impossibile.

Riassumendo si ha:

$x + kx = 2k$ con $k \in \mathbb{R}$		
Condizioni sul parametro	Soluzione	Equazione
$k = -1$	nessuna	impossibile
$k \neq -1$	$x = \frac{2k}{k+1}$	determinata

Ritorniamo ora al problema sul triangolo, spesso nell'enunciato del problema sono presenti delle limitazioni implicite che bisogna trovare. Infatti, dovendo essere x un lato del triangolo esso sarà un numero reale positivo. Di conseguenza, dovendo essere l'altro lato uguale a k volte x, il valore di k deve necessariamente essere anch'esso positivo, ovvero $k > 0$. Di conseguenza il parametro k non può mai assumere il valore -1 e quindi il problema geometrico ammette sempre una soluzione.

Questa analisi effettuata sui valori che può assumere il parametro k, prende il nome di *discussione dell'equazione*.

Procedura 17.1. *Stabilire quando una equazione è determinata, indeterminata, impossibile.*

In generale, data l'equazione $ax + b = 0$ si ha $ax = -b$ e quindi:

a) se $a \neq 0$, l'equazione è determinata e ammette l'unica soluzione $x = -\frac{b}{a}$;
b) se $a = 0$ e $b \neq 0$, l'equazione è impossibile;
c) se $a = 0$ e $b = 0$, l'equazione è soddisfatta da tutti i valori reali di x, ovvero è indeterminata.

Esempio 17.6. Risolvere e discutere $1 + x + m = (x+1)^2 - x(x+m)$.

Dopo aver fatto i calcoli si ottiene l'equazione $(m-1) \cdot x = -m$ e quindi si ha:

- Se $m - 1 \neq 0$, cioè se $m \neq 1$, è possibile dividere ambo i membri per $m-1$ e si ottiene l'unica soluzione $x = -\frac{m}{m-1}$;

- se $m-1=0$, cioè se $m=1$, sostituendo nell'equazione il valore 1 si ottiene $0 \cdot x = -1$, che risulta impossibile.

Esempio 17.7. Risolvere e discutere $(k+3)x = k+4x(k+1)$.
Effettuando i prodotti si ottiene l'equazione: $(3k+1)x = -k$ e quindi si ha:

- Se $3k+1 \neq 0$, cioè se $k \neq -\frac{1}{3}$, è possibile dividere ambo i membri per $3k+1$ e si ottiene l'unica soluzione $x = \dfrac{-k}{3k+1}$;
- se $k = -\frac{1}{3}$, sostituendo questo valore di k nell'equazione si ottiene $0 \cdot x = \frac{1}{3}$, che risulta un'equazione impossibile.

Esempio 17.8. Risolvere e discutere $a^2 \cdot x = a+1+x$.
Portiamo al primo membro tutti i monomi che contengono l'incognita $a^2 \cdot x - x = a+1$. Raccogliamo a fattore comune l'incognita $x \cdot \left(a^2-1\right) = a+1$. Scomponendo in fattori si ha l'equazione $x \cdot (a-1)(a+1) = a+1$.
I valori di a che annullano il coefficiente dell'incognita sono $a=1$ e $a=-1$.

- Se nell'equazione sostituisco $a=1$, ottengo l'equazione $0x=2$ che è impossibile;
- se sostituisco $a=-1$, ottengo l'equazione $0x=0$ che è indeterminata;
- escludendo i casi $a=1$ e $a=-1$, che annullano il coefficiente della x, posso applicare il secondo principio di equivalenza delle equazioni e dividere primo e secondo membro per $(a+1)(a-1)$, ottenendo $x = \dfrac{a+1}{(a+1)\cdot(a-1)} = \dfrac{1}{a-1}$.

Ricapitolando: se $a=1$, allora I. S. $=\emptyset$; se $a=-1$, allora I. S. $=\mathbb{R}$; se $a \neq +1 \wedge a \neq -1$, allora I. S. $= \left\{\dfrac{1}{a-1}\right\}$.

Esercizi proposti: 17.38, 17.39, 17.40, 17.41, 17.42, 17.43, 17.44

17.3.2 Equazioni con due parametri

Esempio 17.9. Risolvere e discutere $(b+a)x-(b+2)(x+1)=-1$.
Mettiamo l'equazione in forma canonica: $bx+ax-bx-b-2x-2=-1$. Raccogliamo a fattore comune l'incognita $(a-2)x=b+1$.

- Se $a-2=0$ l'equazione è impossibile o indeterminata. In questo caso:
  - se $b+1=0$ è indeterminata;
  - se $b+1 \neq 0$ è impossibile;
- se $a-2 \neq 0$ l'equazione è determinata e la sua soluzione è $x = \dfrac{b+1}{a-2}$.

Riassumendo: se $a=2 \wedge b=-1$ allora I. S. $=\mathbb{R}$; se $a=2 \wedge b \neq -1$ allora I. S. $=\emptyset$; se $a \neq 2 \wedge b \neq -1$ allora I. S. $= \left\{\dfrac{b+1}{a-2}\right\}$.

Esercizi proposti: 17.45, 17.46, 17.47

17.3.3 Equazioni con il parametro al denominatore

Esempio 17.10. Risolvere e discutere $\frac{x+a}{2a-1} - \frac{1}{a-2a^2} = \frac{x}{a}$ con $a \in \mathbb{R}$.

Questa equazione è intera, pur presentando termini frazionari. Sappiamo che ogni volta che viene fissato un valore per il parametro, l'equazione assume una forma diversa; la presenza del parametro al denominatore ci obbliga ad escludere dall'insieme dei numeri reali quei valori che annullano il denominatore.

Per $a = 0 \vee a = \frac{1}{2}$ si annullano i denominatori, quindi l'equazione è priva di significato. Per risolvere l'equazione abbiamo bisogno delle condizioni di esistenza C. E. $a \neq 0$ e $a \neq \frac{1}{2}$.

Procediamo nella risoluzione, riduciamo allo stesso denominatore ambo i membri dell'equazione: $\frac{a \cdot (x+a)+1}{a \cdot (2a-1)} = \frac{x \cdot (2a-1)}{a \cdot (2a-1)}$. Applichiamo il secondo principio moltiplicando ambo i membri per il mcm, otteniamo: $ax + a^2 + 1 = 2ax - x$ che in forma canonica è

$$x \cdot (a-1) = a^2 + 1.$$

Il coefficiente dell'incognita dipende dal valore assegnato al parametro a; procediamo quindi alla discussione:

- se $a - 1 \neq 0$ cioè $a \neq 1$ possiamo applicare il secondo principio e dividere ambo i membri per il coefficiente $a-1$ ottenendo $x = \frac{a^2+1}{a-1}$. L'equazione è determinata:
$$\text{I. S.} = \left\{\frac{a^2+1}{a-1}\right\};$$
- se $a - 1 = 0$ cioè $a = 1$ l'equazione diventa $0 \cdot x = 2$. L'equazione è impossibile: I. S. $= \emptyset$.

Riassumendo si ha:

$\frac{x+a}{2a-1} - \frac{1}{a-2a^2} = \frac{x}{a}$ con $a \in \mathbb{R}$		
Condizioni sul parametro	Insieme Soluzione	Equazione
$a = 0 \vee a = \frac{1}{2}$		priva di significato
$a = 1$	I. S. $= \emptyset$	impossibile
$a \neq 0 \wedge a \neq \frac{1}{2} \wedge a \neq 1$	I. S. $= \left\{\frac{a^2+1}{a-1}\right\}$	determinata

Esempio 17.11. Risolvere e discutere $\frac{a-x}{a-2} + \frac{2ax}{a^2-4} - \frac{2-x}{a+2} = 0$ con $a \in \mathbb{R}$.

Scomponendo i denominatori troviamo il mcm $= a^2 - 4$. Pertanto se $a = 2$ o $a = -2$ il denominatore si annulla e quindi l'equazione è priva di significato. Per poter procedere nella risoluzione poni le C. E. $a \neq -2 \wedge a \neq 2$.

Riducendo allo stesso denominatore: $\frac{(a-x)(a+2)+2ax-(2-x)(a-2)}{(a+2)(a-2)} = 0$.

Applica il secondo principio per eliminare il denominatore e svolgi i calcoli. Arrivi alla forma canonica che è $2 \cdot (a-2) \cdot x = a^2 + 4$.

Per le C. E. sul parametro, il coefficiente dell'incognita è sempre diverso da zero, pertanto puoi dividere per $2(a-2)$ e ottieni $x = \frac{a^2+4}{2(a-2)}$.

Riassumendo si ha:

$\frac{a-x}{a-2}+\frac{2ax}{a^2-4}-\frac{2-x}{a+2}=0$ con $a\in\mathbb{R}$		
Condizioni sul parametro	Insieme Soluzione	Equazione
$a=-2\vee a=+2$		priva di significato
$a\neq-2\wedge a\neq+2$	$\mathrm{I.S.}=\left\{\frac{a^2+4}{2(a-2)}\right\}$	determinata

✍ *Esercizi proposti:* 17.48, 17.49, 17.50, 17.51

17.3.4 Equazioni frazionarie letterali

Caso in cui il denominatore contiene solo l'incognita

Esempio 17.12. Risolvere e discutere $\dfrac{x+4a}{3x}=a-\dfrac{2x+2a}{6x}$ con $a\in\mathbb{R}$.

Questa equazione è frazionaria o fratta perché nel denominatore compare l'incognita. Sappiamo che risolvere un'equazione significa determinare i valori che, sostituiti all'incognita, rendono vera l'uguaglianza tra il primo e il secondo membro. Non sappiamo determinare tale valore solamente analizzando l'equazione, ma certamente possiamo dire che non dovrà essere $x=0$ perché tale valore, annullando i denominatori, rende privi di significato entrambi i membri dell'equazione.

Poniamo allora una condizione sull'incognita: la soluzione è accettabile se $x\neq 0$. Non abbiamo invece nessuna condizione sul parametro.

Procediamo quindi con la riduzione allo stesso denominatore di ambo i membri dell'equazione $\dfrac{2x+8a}{6x}=\dfrac{6ax-2x-2a}{6x}$; eliminiamo il denominatore che per la condizione posta è diverso da zero. Eseguiamo i calcoli al numeratore e otteniamo $4x-6ax=-10a$ da cui la forma canonica:

$$x\cdot(3a-2)=5a.$$

Il coefficiente dell'incognita contiene il parametro, quindi procediamo alla discussione:

a) se $3a-2\neq 0$ cioè $a\neq\frac{2}{3}$ possiamo applicare il secondo principio e dividere ambo i membri per il coefficiente $3a-2$ ottenendo $x=\frac{5a}{3a-2}$. L'equazione è determinata: $\mathrm{I.S.}=\left\{\frac{5a}{3a-2}\right\}$. A questo punto dobbiamo ricordare la condizione sull'incognita, cioè $x\neq 0$, quindi la soluzione è accettabile se $x=\frac{5a}{3a-2}\neq 0\Rightarrow a\neq 0$;

b) se $3a-2=0$ cioè $a=\frac{2}{3}$ l'equazione diventa $0\cdot x=\frac{10}{3}$, cioè l'equazione è impossibile: $\mathrm{I.S.}=\emptyset$.

Riassumendo si ha la tabella:

$\frac{x+4a}{3x}=a-\frac{2x+2a}{6x}$ con $a\in\mathbb{R}$			
Condizioni			
parametro	incognita	Insieme Soluzione	Equazione
	$x\neq 0$		
$a=\frac{2}{3}$		$\mathrm{I.S.}=\emptyset$	impossibile
$a\neq\frac{2}{3}$		$\mathrm{I.S.}=\left\{\frac{5a}{3a-2}\right\}$	determinata
$a\neq\frac{2}{3}\wedge a\neq 0$	accettabile	$x=\frac{5a}{3a-2}$	

Caso in cui il denominatore contiene sia il parametro che l'incognita

---

Esempio 17.13. Risolvere e discutere $\frac{2x+b}{x}+\frac{2x+1}{b-1}=\frac{2x^2+b^2+1}{bx-x}$ con $b \in \mathbb{R}$.

L'equazione è fratta; il suo denominatore contiene sia l'incognita x che il parametro b. Scomponiamo in fattori i denominatori

$$\frac{2x+b}{x}+\frac{2x+1}{b-1}=\frac{2x^2+b^2+1}{x\cdot(b-1)}.$$

Determiniamo le condizioni di esistenza che coinvolgono il parametro C. E. $b \neq 1$ e le condizioni sull'incognita: soluzione accettabile se $x \neq 0$.

Riduciamo allo stesso denominatore ed eliminiamolo in quanto per le condizioni poste è diverso da zero. L'equazione canonica è $x\cdot(2b-1)=b+1$.

Il coefficiente dell'incognita contiene il parametro quindi occorre fare la discussione:

a) se $2b-1 \neq 0$ cioè $b \neq \frac{1}{2}$ possiamo dividere ambo i membri per $2b-1$, otteniamo: $x=\frac{b+1}{2b-1}$. L'equazione è determinata, l'insieme delle soluzioni è I. S. $=\left\{\frac{b+1}{2b-1}\right\}$; la soluzione è accettabile se verifica la condizione di esistenza $x \neq 0$ da cui si ha

$$x=\frac{b+1}{2b-1}\neq 0 \quad\Rightarrow\quad b\neq -1,$$

cioè se $b=-1$ l'equazione ha una soluzione che non è accettabile, pertanto è impossibile;

b) se $2b-1=0$ cioè $b=\frac{1}{2}$ l'equazione diventa $0\cdot x=\frac{3}{2}$. L'equazione è impossibile, l'insieme delle soluzioni è vuoto: I. S. $=\emptyset$.

La tabella che segue riassume tutti i casi:

$$\frac{2x+b}{x}+\frac{2x+1}{b-1}=\frac{2x^2+b^2+1}{bx-x} \text{ con } b \in \mathbb{R}$$

Condizioni parametro	Condizioni incognita	Insieme Soluzione	Equazione
$b=1$			priva di significato
$b\neq 1$	$x\neq 0$		
$b=\frac{1}{2}\vee b=-1$		I. S. $=\emptyset$	impossibile
$b\neq 1\wedge b\neq\frac{1}{2}$		I. S. $=\left\{\frac{b+1}{2b-1}\right\}$	determinata
$b\neq 1\wedge b\neq\frac{1}{2}\wedge b\neq -1$	accettabile	$x=\frac{b+1}{2b-1}$	

✍ *Esercizi proposti:* 17.52, 17.53, 17.54, 17.55, 17.56, 17.57, 17.58, 17.59, 17.60, 17.61, 17.62

17.3.5 Equazioni letterali e formule inverse

Le formule di geometria, di matematica finanziaria e di fisica possono essere viste come equazioni letterali. I due principi di equivalenza delle equazioni permettono di ricavare le cosiddette formule inverse, ossia di risolvere un'equazione letterale rispetto a una delle qualsiasi lettere incognite che vi compaiono.

Esempio 17.14. Area del triangolo $A = \frac{b \cdot h}{2}$.

Questa equazione è stata risolta rispetto all'incognita A, ossia se sono note le misure della base b e dell'altezza h è possibile ottenere il valore dell'area A.

È possibile risolvere l'equazione rispetto a un'altra lettera pensata come incognita. Note le misure di A e di b ricaviamo h. Per il primo principio di equivalenza moltiplichiamo per 2 entrambi i membri dell'equazione

$$A = \frac{b \cdot h}{2} \quad \Rightarrow \quad 2A = b \cdot h$$

dividiamo entrambi i membri per b ottenendo $\frac{2A}{b} = h$. Ora basta invertire primo e secondo membro:

$$h = \frac{2A}{b}.$$

Esempio 17.15. Formula del montante $M = C(1 + it)$.

Depositando un capitale C per un periodo di tempo t (in anni), a un tasso di interesse annuo i, si ha diritto al montante M.

Risolviamo l'equazione rispetto al tasso di interesse i, ossia supponiamo di conoscere il capitale depositato C, il montante M ricevuto alla fine del periodo t e ricaviamo il tasso di interesse che ci è stato applicato. Partendo da $M = C(1 + it)$, dividiamo primo e secondo membro per C, otteniamo

$$\frac{M}{C} = 1 + it;$$

sottraiamo 1 al primo e al secondo membro, otteniamo

$$\frac{M}{C} - 1 = it;$$

dividiamo primo e secondo membro per t, otteniamo

$$i = \frac{\left(\frac{M}{C} - 1\right)}{t} \quad \Rightarrow \quad i = \frac{1}{t} \cdot \left(\frac{M}{C} - 1\right) \quad \Rightarrow \quad i = \frac{M - C}{t \cdot C}.$$

Esempio 17.16. Formula del moto rettilineo uniforme $s = s_0 + v \cdot t$.

Un corpo in una posizione s_0, viaggiando alla velocità costante v, raggiunge dopo un intervallo di tempo t la posizione s.

Calcoliamo v supponendo note le altre misure. Partendo dalla formula $s = s_0 + v \cdot t$ sottraiamo ad ambo i membri s_0, otteniamo $s - s_0 = v \cdot t$; dividiamo primo e secondo membro per t, otteniamo

$$\frac{s - s_0}{t} = v.$$

✍ *Esercizi proposti:* 17.63, 17.64, 17.65, 17.66, 17.67, 17.68, 17.69, 17.70, 17.71, 17.72, 17.73

17.74, 17.75, 17.76, 17.77, 17.78, 17.79, 17.80