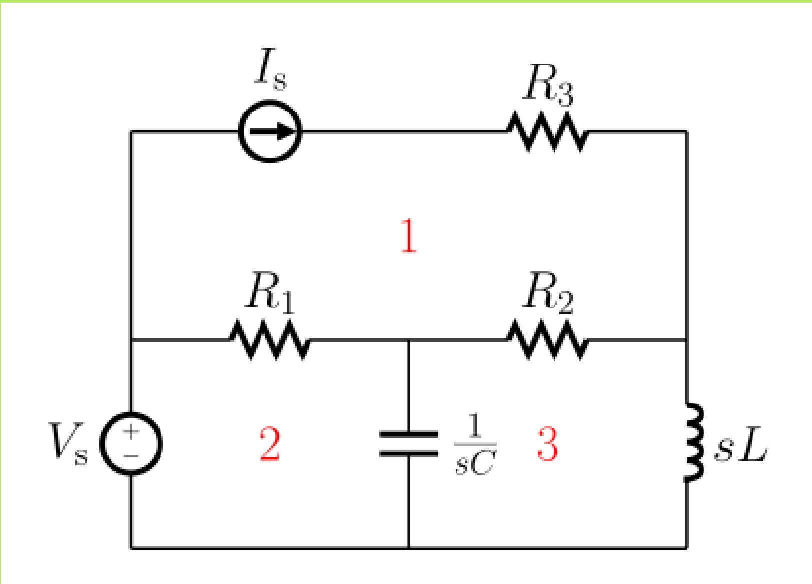
IT.WIKIBOOKS.ORG

Alfonso Sommacal

Analisi topologica dei circuiti elettrici



Alfonso Sommacal

Analisi topologica dei circuiti elettrici

it.wikibooks.org
2018

Questo testo proviene dal sito
https://it.wikibooks.org/wiki/Analisi_topologica_dei_circuiti_elettrici
ed è stato scritto collettivamente dagli utenti di tale sito

Principale autore:
Alfonso Sommacal

Questo e-book è aggiornato al
7 giugno 2018

In copertina:
File:Mesh Analysis Example1 TeX.svg. *Fonte:* https://commons.wikimedia.org/wiki/File:MeshAnalysisExample1TeX.svg; *autore:* GorillaWarfare; *licenza:* pubblico dominio

Indice

Prefazione

1

La **topologia** di un circuito elettronico è la forma che assume il reticolo delle interconnessioni dei componenti del circuito. Un reticolo, i cui componenti siano cambiati o ridimensionati, conserva la stessa topologia. La topologia non riguarda la fisicità dei componenti di un circuito ma la loro collocazione su uno schema circuitale. Si occupa solo di quali collegamenti esistono tra i componenti. Ci possono essere molteplici componenti circuitali afferenti tutti alla stessa topologia.

Il pertinente insieme lessicale della topologia circuitale è costituito dei seguenti vocaboli:

1. Nodo: punto di un grafo (di un circuito) in cui convergono tre o più rami

2. Ramo: elemento (o gruppo di elementi) che costituisce una connessione tra due nodi (lato, arco, corda)

3. Maglia: insieme di rami collegati fra loro in modo da formare un percorso chiuso

4. Anello: un percorso chiuso che non contiene maglie al suo interno (maglia elementare)

5. Taglio: insieme dei rami del grafo toccati da una superficie gaussiana che racchiude uno o più nodi

6. Superficie gaussiana: una superficie che racchiude completamente i nodi (non li interseca)

7. Albero di una rete: un insieme connesso di rami della rete, che comprende tutti i nodi del grafo senza formare percorsi chiusi (maglie)

8. Coalbero: insieme dei rami del grafo che non appartengono all'albero.

In senso stretto, la sostituzione di un componente con uno di tipo completamente diverso non trasforma una topologia in un'altra topologia. In determinati contesti, tuttavia, queste sostituzioni possono liberamente essere descritte come differenti topologie. Per esempio, se scambiando induttori e condensatori in un filtro passa-basso si passa a un filtro passa-alto, si può transitare in un'alta topologia. Queste potrebbero essere descritte come topologia passa-alto e topologia passa-basso, anche qualora la topologia del circuito rimanga la stessa. Un termine più corretto per queste classi di oggetti (cioè, un circuito in cui viene specificato il tipo di componente, ma non il valore assoluto) è "circuito prototipo".

La topologia dei circuiti elettronici è affine alla topologia matematica, in particolare, per i circuiti che contengono solo dispositivi a due terminali. La topologia circuitale può essere vista come un'applicazione della teoria dei grafi.

2 Circuiti elettrici

Si definisce **circuito elettrico** l'interconnessione di elementi elettrici in un percorso chiuso in modo che la corrente elettrica possa fluire con continuità.[1]

Vengono definiti circuiti elettrici anche i modelli matematici di tali entità. È comunque uso comune in ambito scientifico indicare con *circuito elettrico* solamente i circuiti (e i relativi modelli matematici) che soddisfano con buona approssimazione il modello a parametri concentrati, dove sia cioè possibile assumere che tutti i fenomeni avvengono *esclusivamente* all'interno dei componenti fisici (cioè i componenti elettronici) e delle interconnessioni tra questi (escludendo quindi, per esempio, gli apparati contenenti antenne, appartenenti alla classe detta a parametri distribuiti).

I modelli matematici dei circuiti elettrici sono l'ambito di studio della teoria dei circuiti (una delle discipline della ingegneria elettrica); i corrispondenti modelli matematici dei componenti fisici sono chiamati componenti elettrici.

In ambito non tecnico si usa talvolta chiamare *circuito elettrico* solo i circuiti dedicati alla trasmissione e trasformazione dell'energia elettrica (si veda su Wikipedia la voce impianto elettrico).

[1] R. Dorf, J. Svoboda, *Circuiti elettrici*, p.8

3 Componenti circuitali

Un componente circuitale è un dispositivo utilizzato per regolare il passaggio di corrente elettrica attraverso di esso e/o il valore di tensione elettrica ai suoi capi. Si tratta solitamente di prodotti industriali aventi più terminali che ne consentono l'uso per la costruzione di circuiti elettrici.

La legge di natura matematica che lega correnti e tensioni ai capi del componente è detta **caratteristica** del componente: per i classici bipoli lineari (condensatori, resistore, induttore) è costituita da una equazione semplice. Quando questa legge tiene conto anche di forze fisiche esterne, non elettriche, il componente è detto **trasduttore** e viene usato per acquisire informazioni dall'ambiente fisico circostante o per agire su di esso.

I componenti si suddividono in "attivi" e "passivi". I componenti passivi non introducono energia nel circuito e non necessitano di un'alimentazione esterna, in aggiunta al segnale in ingresso. Componenti attivi, come i transistor o gli amplificatore operazionale, possono essere invece utilizzati ad esempio per amplificare il segnale in ingresso.

3.1 Resistore

Il resistore (o resistenza) è costruito con un materiale che determina una caduta di potenziale elettrico al passaggio di una corrente attraverso di esso. La resistenza si misura in ohm (Ω), ed è determinata da caratteristiche geometriche oltre che dalla capacità conduttiva del materiale. Per le resistenze a filo metallico c'è una semplice formula che lega la caratteristica del componente a quella del materiale (seconda legge di Ohm):

$$R = \rho \frac{l}{S}$$

dove ρ è la costante detta resistività ($\Omega * m$) del materiale, l la lunghezza del filo, e S la sezione. Per altri tipi di resistori questa formula è vera solo in linea di massima, perché bisogna tenere conto anche della geometria tridimensionale del componente.

3.2 Induttore

L'induttore (o induttanza) genera un campo magnetico al passare della corrente elettrica. Viene utilizzata nelle macchine e nei motori elettrici, ad esempio trasformatori, relè, ecc...

L'induttore con un campo magnetico costante si lascia attraversare da corrente elettrica senza reagire; invece, in un campo magnetico variabile (quindi con un flusso variabile), l'induttore genera il campo magnetico e non fa passare la corrente alternata

3.3 Condensatore

Il condensatore immagazzina una carica elettrica, accumulando proporzionalmente una tensione ai suoi capi. La capacità del condensatore si misura in farad e suoi sottomultipli: le capacità dei condensatori commerciali più comuni sono dell'ordine del milionesimo di farad o meno. In elettronica i condensatori sono usati per accoppiare o disaccoppiare segnali tempo-varianti e per immagazzinare energia.

3.4 Memristor

Il memristor è definito come un componente circuitale a due terminali in cui il flusso magnetico Φ_m è funzione della carica elettrica q che contiene. La definizione prevede che

$$d\Phi_\mathrm{m} = M(q)dq$$

M è appunto la memristenza. Questa quantità, al contrario della resistenza elettrica, non dipende dalla corrente ma dal valore assoluto della carica. Dunque, la tensione rilevata ai capi, data da

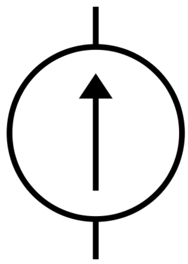
$$V = M(q)I$$

come si può dedurre dalla legge sull'induttanza, dipenderà non solo dalla corrente, ma anche dalla carica presente nel componente attraverso la memristenza. In sostanza, V dipenderà sia dalla variazione di carica che dal valore di q a un istante immediatamente precedente, cioè dalla "storia recente" della corrente I.

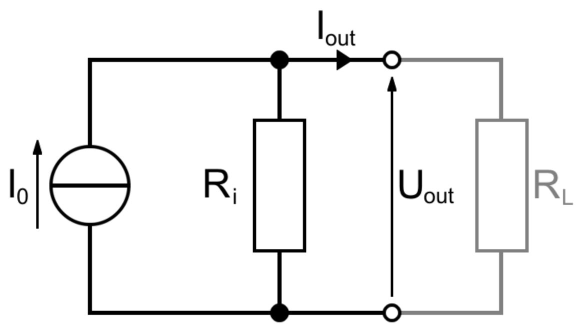
3.5 Generatori di corrente reali

A differenza dei generatori di tensione, i generatori di corrente sono per lo più dispositivi ideali, utilizzati per schematizzare il comportamento di componenti elettronici (i transistor, ad esempio). La maggior parte dei generatori di energia elettrica sono meglio schematizzati da generatori di tensione, a meno che non abbiano una elevatissima resistenza interna.

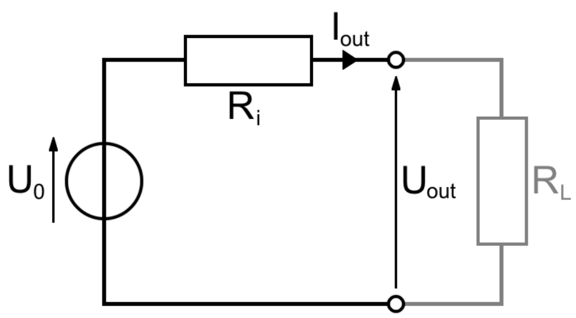
Nei circuiti elettrici, comunque, si introducono generatori reali come un generatore ideale in parallelo con una resistenza (resistenza interna). Grazie



(a) Simbolo di un generatore di corrente ideale



(b) Simbolo di un generatore di corrente reale



(c) Circuito equivalente di un generatore di tensione U_o con resistenza interna R_i che alimenta un carico R_L

al teorema di Norton si può sostituire un generatore reale di tensione con un generatore reale di corrente (e viceversa, per il teorema di Thévenin).

3.6 Generatori di tensione reali

I generatori di tensione reali sono componenti elettronici che mantengono una tensione costante o costantemente oscillante entro certi limiti. Nei circuiti elettrici vengono generalmente schematizzati come un generatore ideale in serie con una resistenza (resistenza interna).[1]

[1]La non idealità di un generatore di tensione può essere causata, oltre che dalle cadute ohmiche, anche dalle cadute di potenziale associate a eventuali sovratensioni interne al generatore, di natura elettrochimica (se il generatore è una cella galvanica, ad esempio una pila). Per i calcoli di grandezze elettriche, si può tenere conto degli effetti delle sovratensioni pensando alla resistenza interna come la somma delle cadute ohmiche e delle sovratensioni, ma tale semplificazione non può essere utilizzata per il calcolo del calore sviluppato per effetto Joule, in quanto l'energia dissipata dalle sovratensioni è convertita solo in parte in calore; l'altra parte di tale energia può essere invece convertita per lo svolgimento di vari processi interni alla cella elettrochimica, tra cui: reazioni di trasferimento di carica, trasporto degli ioni nell'elettrolita e deposizione degli ioni agli elettrodi.

Relazione tra circuiti fisici e modelli

4

Nella parte restante di questo libro si utilizzerà la dizione ”circuito elettrico” esclusivamente per indicare un modello matematico. Il livello di dettaglio del modello matematico dipenderà dal tipo di risultati che siamo interessati a ottenere. Per ovvi motivi, dato un sistema fisico, si cercherà il modello più semplice compatibilmente con i risultati desiderati: si utilizzeranno quindi modelli puramente lineari ove possibile, ben sapendo che componenti fisici puramente lineari non esistono, purché si sia sicuri che nel campo di funzionamento cui siamo interessati tutti i componenti del nostro modello si comportino in modo *ragionevolmente* lineare.

Un circuito elettrico *fisico* potrà quindi corrispondere a diversi circuiti elettrici (intesi come modello matematico) sia in funzione della precisione che si vuole raggiungere nella rappresentazione del circuito fisico, sia del campo di variabilità che ci si aspetta per le grandezze elettriche del circuito fisico. Similmente a un circuito elettrico potranno corrispondere diversi circuiti fisici, in funzione, per esempio, della precisione con cui si vuole replicare il comportamento previsto dal modello matematico.

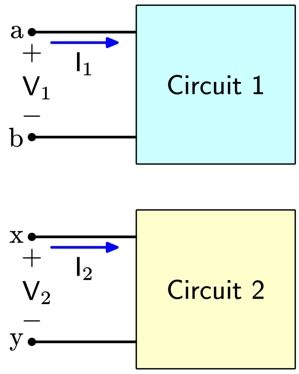
4.1 Circuiti equivalenti

Una rete, nel contesto dell'elettronica, è un insieme di componenti collegati tra di loro. Analisi di rete è il processo con cui si ricerca la tensione ai capi di ciascun componente la rete e la corrente che lo attraversa. Ci sono molte differenti tecniche per ottenere questi valori. Tuttavia, per la maggiore parte, la tecnica applicata assume che i componenti della rete siano tutti lineari e tempo-invarianti. I metodi qui descritti sono solamente applicabili alle analisi di rete lineari, a eccezione di quando esplicitamente espresso.

È procedura utile nella analisi delle reti ridurre il numero di componenti dei circuiti. Ciò si può ottenere sostituendo i componenti effettivi con componenti fittizi che abbiano i medesimi effetti. Una particolare tecnica potrebbe ridurre il numero di componenti, per esempio, combinando in serie le impedenze. D'altra parte, potrebbe semplicemente trasformare la forma in una in cui i componenti possano essere ridotti in una operazione successiva. Per esempio, si potrebbe trasformare un generare di tensione in un generatore di corrente facendo ricorso al teorema di Norton al fine di potere successivamente combinare la resistenza interna del generatore con una impedenza di carico in parallelo.

Un circuito resistivo è un circuito che contiene resistenze solamente sorgenti di corrente ideali e sorgenti di tensione ideali. Se le sorgenti sono sorgenti a corrente continua, il risultato è un circuito a corrente continua. L'analisi di un circuito consiste nella determinazione delle tensioni e delle correnti presenti nel circuito. I principi solutivi qui descritti si applicano pure nell'analisi dei fasori nei circuiti a corrente alternata.

Se $V_2 = V_1$ implica che $I_2 = I_1$ per tutti i valori reali di V_1 allora, perlomeno con riguardo ai terminali ab e xy, il circuito 1 e il circuito 2 sono equivalenti.



Quanto detto costituisce una definizione sufficiente di rete a due attacchi. Nel caso di più di due attacchi, allora deve essere stabilito che le correnti e le tensioni tra tutte le paia di attacchi corrispondenti devono conservare le medesime relazioni. Per esempio, le reti a stella e a triangolo sono effettivamente circuiti a sei attacchi e quindi richiedono tre equazioni simultanee per specificare pienamente la loro equivalenza.

4.2 Impedenze in serie e in parallelo

Qualsiasi circuito elettrico di impedenze a due terminali in serie o in parallelo può eventualmente venire ridotto ad un circuito a singola impedenza di valore determinato, a seconda dei casi, come segue.

Impedenze in serie: $Z_{eq} = Z_1 + Z_2 + \cdots + Z_n$

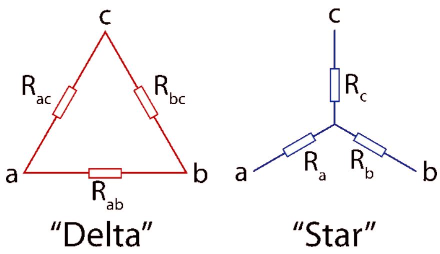
Impedenze in parallelo: $\frac{1}{Z_{eq}} = \frac{1}{Z_1} + \frac{1}{Z_2} + \cdots + \frac{1}{Z_n}$

Per due sole impedenze in parallelo, l'impedenza equivalente rsulta:

$$Z_{eq} = \frac{Z_1 Z_2}{Z_1 + Z_2}$$

4.2.1 Trasformazione triangolo-stella

Una circuito costituito di impedenze con più di due terminali non può venire ridotto in un circuito equivalente a impedenza singola. Un circuito a n terminali può, alla meglio, essere ridotto a **n** impedenze. Per un circuito a tre terminali, le tre impedenze possono venire espresse con un circuito a rettangolo a tre nodi oppure con un circuito a stella a quattro nodi. Questi due circuiti sono equivalenti e le trasformazioni tra loro sono fornite



qui di seguito. Una generica rete con un numero arbitrario di nodi non può venire ridotta al numero minimo di impedenze con l'impiego di sole combinazioni serie e parallelo. Generalmente, trasformazioni triangolo-stella e stella-triangolo potrebbero pure essere richieste. Per alcuni circuiti la estensione della trasformazione triangolo-stella potrebbe risultare necessaria.

Per equivalenza intendesi che le impedenze fra qualsiasi coppia di terminali devono essere le medesime per entrambi i circuiti, risultando in un insieme di tre equazioni simultanee riportate qui di seguito.

Equazioni di trasformazione triangolo-stella

$$R_a = \frac{R_{\text{ac}}R_{\text{ab}}}{R_{\text{ac}} + R_{\text{ab}} + R_{\text{bc}}}$$

$$R_b = \frac{R_{\text{ab}}R_{\text{bc}}}{R_{\text{ac}} + R_{\text{ab}} + R_{\text{bc}}}$$

$$R_c = \frac{R_{\text{bc}}R_{\text{ac}}}{R_{\text{ac}} + R_{\text{ab}} + R_{\text{bc}}}$$

Equazioni di trasformazione stella-triangolo

$$R_{\text{ac}} = \frac{R_aR_b + R_bR_c + R_cR_a}{R_b}$$

$$R_{\text{ab}} = \frac{R_aR_b + R_bR_c + R_cR_a}{R_c}$$

$$R_{\text{bc}} = \frac{R_aR_b + R_bR_c + R_cR_a}{R_a}$$

4.2.2 Forma generica di eliminazione dei nodi delle reti

Le trasformazioni stella-triangolo e resistori in serie sono casi particolari dell'algoritmo di eliminazione dei nodi nelle reti resistive. Qualsiasi nodo connesso con **N** resistori (R_1 .. R_N) ai nodi **1**... **N** può essere sostituito da $\binom{N}{2}$ resistori che connettono i rimanenti N nodi. La resistenza fra qualsiasi due nodi x and y è data da:

$$R_{\mathrm{xy}} = R_x R_y \sum_{i=1}^{N} \frac{1}{R_i}$$

Per una trasformazione stella-triangolo ($N = 3$) ciò si riduce a:

$$\begin{aligned} R_{\mathrm{ab}} &= R_a R_b \left(\frac{1}{R_a} + \frac{1}{R_b} + \frac{1}{R_c}\right) \\ &= \frac{R_a R_b (R_a R_b + R_a R_c + R_b R_c)}{R_a R_b R_c} \\ &= \frac{R_a R_b + R_b R_c + R_c R_a}{R_c} \end{aligned} \tag{4.1}$$

per una riduzione seriale ($N = 2$) ciò si riduce a:

$$R_{\mathrm{ab}} = R_a R_b \left(\frac{1}{R_a} + \frac{1}{R_b}\right) = \frac{R_a R_b (R_a + R_b)}{R_a R_b} = R_a + R_b$$

Per un resistore pendente ($N = 1$) sfocia nella eliminazione del resistore poiché $\binom{1}{2} = 0$.

Trasformazione da stella a maglia

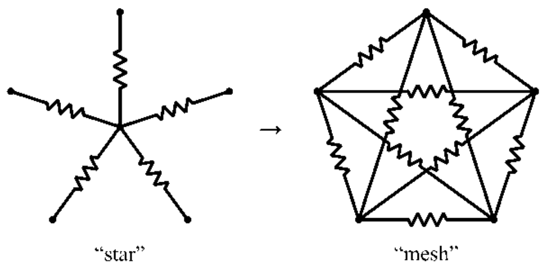
La trasformazione da stella a maglia (o da stella a poligono) è una tecnica di analisi circuitale matematica per trasformare una rete resistiva in una rete equivalente con un nodo di meno. L'equivalenza segue dall'identità complementare di Schur applicata alla matrice di Kirchhoff della rete.

L'impedenza equivalente fra i nodi A e B è data da:

$$z_{AB} = Z_A Z_B \sum \frac{1}{z}$$

dove Z_A è l'impedenza tra il nodo A e il nodo centrale che viene rimosso.

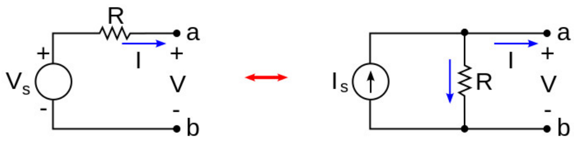
La trasformazione rimpiazza **N** resistori con $\frac{N(N-1)}{2}$ resistori. Per $N > 3$, il risultato è un aumento del numero di resistori, quindi la trasformazione non avviene senza generare addizionali problemi.



È possibile, anche se non necessariamente efficiente, trasformare una maglia resistiva comunque complessa a due terminali in un unico resistore equivalente applicando ripetutamente la trasformazione da stella a maglia per eliminare ogni nodo non terminale.

4.2.3 Trasformazione delle sorgenti

Un generatore con una impedenza interna (cioè non ideale) può essere rappresentato sia come un generatore di tensione ideale sia come un generatore ideale di corrente con in pi una impedenza. Queste due forme sono equivalenti e le trasformazioni sono riportate qui sotto. Se le due reti sono equivalenti, con riferimento ai terminali **ab**, allora **V** e **I** in entrambe le reti devono essere uguali. Quindi,



1. il **teorema di Norton** stabilisce che qualsiasi rete a due terminali può venire ricondotta ad un generatore ideale di corrente e ad una impedenza in parallelo;

2. il **teorema di Thèvenin** stabilisce che qualsiasi rete a due terminali può venire ricondotta ad un generatore di tensione ideale e ad una resistenza in serie.

Reti semplici

5

5.1 Partitore di tensione a componenti in serie

Nella teoria dei circuiti, un **partitore di tensione** (detto anche **partitore di potenziale**) è un circuito passivo lineare che produce una tensione in uscita V_out, che è una frazione della tensione di ingresso applicata V_in. Una **partizione di tensione** è il risultato di una distribuzione della tensione di ingresso tra i componenti del partitore. Un semplice esempio di partitore di tensione è quello di due resistori connessi in serie, con la tensione di ingresso applicata sulla coppia dei resistori e la tensione di uscita che emerge dalla loro connessione.

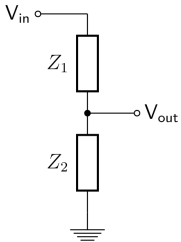


Figura 5.1: Partitore di tensione elementare

Considerate n impedenze che siano collegate in **serie**. La tensione V_i ai capi di una qualsiasi impedenza Z_i è:

$$V_i = Z_i I = (\frac{Z_i}{Z_1 + Z_2 + \cdots + Z_n})V$$

5.2 Partitore di corrente con componenti in parallelo

Si considerino **n** impedenze collegate in **parallelo**, La corrente I_i che passa attraverso una qualsiasi impedenza Z_i è:

$$I_i = \left(\frac{\left(\frac{1}{Z_i}\right)}{\left(\frac{1}{Z_1}\right) + \left(\frac{1}{Z_2}\right) + \cdots + \left(\frac{1}{Z_n}\right)} \right) I$$

per

$$i = 1, 2, ..., n.$$

5.2.1 Caso specifico: partitore di corrente a due elementi in parallelo

$$I_1 = \left(\frac{Z_2}{Z_1 + Z_2} \right) I$$

$$I_2 = \left(\frac{Z_1}{Z_1 + Z_2} \right) I$$

Analisi dei circuiti elettrici

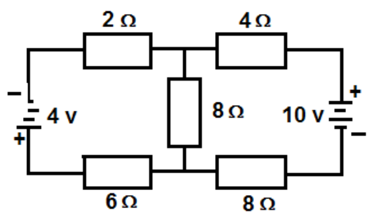
6

6.1 Analisi dei circuiti elettrici

L'**analisi dei circuiti elettrici** consiste nella determinazione delle grandezze elettriche (tensione e corrente) in ogni punto di un circuito in un qualsiasi istante di tempo.

A questo fine si possono applicare metodi analitici che nel caso più generale comportano la risoluzione di equazioni differenziali che descrivono il comportamento dei vari componenti del circuito (induttori, condensatori, resistori ecc.) o la risoluzione di sistemi di equazioni lineari in domini trasformati secondo Laplace o secondo Fourier (vedi la voce fasore su Wikipedia).

6.2 L'algebra per l'analisi dei circuiti



La maggior parte dei problemi che si presentano in elettrotecnica possono essere risolti con l'ausilio di reti equivalenti. L'analisi del comportamento delle correnti elettriche in queste reti necessita la risoluzione di equazioni lineari simultanee. Queste equazioni sono lineari poiché gli elementi delle reti sono presunti a comportamento lineare: sono equazioni differenziali se sono di interesse i regimi transitori e algebriche quando lo siano quelli stazionari.

Per risolvere un sistema di equazioni simultanee a due incognite non è evidentemente necessaria una capacità risolutiva notevole. Per esempio, le equazioni per le correnti I_1 e I_2, del circuiti a due maglie, rappresentato nella figura accanto, sono:

$$16I_1 - 8I_2 = 4$$

$$8I_1 - 20I_2 = -10$$

Queste equazioni possono venire risolte col metodo di sostituzione o con il metodo della eliminazione di una variabile. Con quest'ultimo metodo:

$$(16I_1 - 8I_2) - 2((8I_1 - 20I_2) = 4 - 2(-10)$$

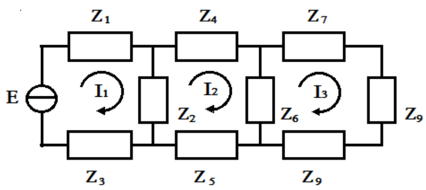
$$32I_2 = 24$$

$$I_2 = \frac{3}{4}$$

per cui:

$$I_1 = \frac{5}{8}$$

In una rete elettrica semplice a due maglie la soluzione tramite il metodo della sostituzione risulta relativamente semplice. Tuttavia, laddove il circuito da analizzare sia a più di due maglie, come quello mostrato in figura, e l'analisi sia condotta tramite la prima legge di Kirchhoff, il numero delle equazioni pareggia il numero delle maglie e la soluzione del sistema di equazioni tramite il metodo delle sostituzioni diventa corrispondentemente sempre più tedioso.



Comunque, esiste un metodo meno tedioso e più conciso, il metodo di Cramer o dei determinanti, che può venire utilizzato per l'analisi dei sistemi elettrici a multi-maglie.

6.2.1 Equazione algebrica a due variabili risolta col metodo di Cramer

Consideriamo le seguenti equazioni simultanee:

$$3x + 2y = 4 \quad (1) \quad e \quad 8x - 5y = 21 \quad (2)$$

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 4 & amp; 2 \\ 21 & amp; -5 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 3 & amp; 2 \\ 8 & amp; -5 \end{vmatrix}} = 2 \qquad y = \frac{\begin{vmatrix} 3 & amp; 4 \\ 8 & amp; 21 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 3 & amp; 2 \\ 8 & amp; -5 \end{vmatrix}} = -1$$

per i valori dei seguenti determinanti:

$$\begin{vmatrix} 4 & amp; 2 \\ 21 & amp; -5 \end{vmatrix} = (4)(-5) - (2)(21) = -62$$

$$\begin{vmatrix} 3 & amp; 4 \\ 8 & amp; 21 \end{vmatrix} = (3)(21) - (4)(8) = 31$$

$$\begin{vmatrix} 3 & amp; 2 \\ 8 & amp; -5 \end{vmatrix} = 3(-5) - (2)(8) = -31$$

6.2.2 Regola di Cramer

Nell'analisi delle reti normalmente sono utilizzati i determinanti in connessione con il metodo sviluppato da Gabriel Cramer per la rapida soluzione di equazioni simultanee.

Consideriamo un insieme di n equazioni lineari in n incognite.

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + ... + a_{1n}x_n = k_1$$

$$a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + ... + a_{1n}x_n = k_2$$

$$................................$$

$$................................$$

$$a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + ... + a_{nn}x_n = k_n$$

in cui x_1, x_2, ..., x_n sono le incognite, e $a_1 1$, $a_1 2$, ..., $a_n n$ e k_1, k_2... k_n sono delle costanti.

Si assuma che D rappresenti il determinante della matrice (indicato al disotto) costituita usando come elementi i coefficienti delle incognite come appaiono nelle equazioni enunciate.

$$\begin{vmatrix} a_{11} & amp; a_{12} & amp; ...a_{1k} & amp; ....a_{1n} \\ a_{21} & amp; a_{22} & amp; ...a_{2k} & amp; ....a_{2n} \\ \vdots & amp; \vdots & amp; \vdots & amp; \vdots \\ a_{n1} & amp; a_{n2} & amp; ...a_{nk} & amp; ....a_{nn} \end{vmatrix}$$

Si assuma ora che D_1 rappresenti il determinante della seguente matrice

$$\begin{vmatrix} k_1 & amp; x_{12} & amp; ...a_{1k} & amp; ....a_{1n} \\ k_2 & amp; a_{22} & amp; ...a_{2k} & amp; ....a_{2n} \\ \vdots & amp; \vdots & amp; \vdots & amp; \vdots \\ k_n & amp; a_{n2} & amp; ...a_{nk} & amp; ....a_{nn} \end{vmatrix}$$

la cui somiglianza con la matrice di D è evidente, eccetto per gli elementi della prima colonna, che sono stati sostituiti con le costanti che appaiono sul lato destro delle equazioni.

Parimenti D_2 rappresenta il determinante della seguente matrice:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & amp; k_1 & amp; ...a_{1k} & amp; ....a_{1n} \\ a_{21} & amp; k_2 & amp; ...a_{2k} & amp; ....a_{2n} \\ \vdots & amp; \vdots & amp; \vdots & amp; \vdots \\ a_{1n} & amp; k_n & amp; ...a_{nk} & amp; ....a_{nn} \end{vmatrix}$$

Con il medesimo processo si può ottenere D_3, D_4... D_n.
Orbene, la regola di Cramer può venire asserita come segue:
In un sistema di equazioni lineari algebriche, se D non è zero, allora:

$$x_1 = \frac{D_1}{D} \quad x_2 = \frac{D_2}{D} \quad x_3 = \frac{D_3}{D} ....x_n = \frac{D_n}{D}$$

6.3 Scelta del metodo

La scelta del metodo è in una certa misura un questione di gusti. Se la rete è particolarmente semplice o è richiesta solamente una specifica tensione o corrente, allora l'applicazione *ad hoc* di alcuni semplici circuiti equivalenti potrebbe fornire la risposta senza ricorrere a metodi più sistematici.

1. Analisi nodale: il numero delle variabili di tensione, e quindi delle equazioni simultanee da risolvere, è pari al numero dei nodi meno uno. Ogni sorgente di tensione collegata al nodo di riferimento riduce il numero delle incognite ed equazioni di una unità.

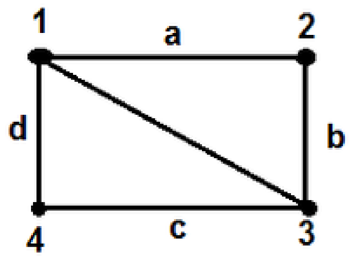
2. Analisi delle maglie: il numero delle variabili di corrente, e il numero delle equazioni simultanee da risolvere, è pari al numero delle maglie. Ogni sorgente di corrente in una maglia riduce il numero delle incognite di uno. L'analisi delle magie può essere utilizzato solo con reti che possono essere disegnate come una rete planare, cioè, senza rami che si intersecano.

3. Teorema della sovrapposizione: è forse il metodo concettualmente più semplice, ma che rapidamente conduce a un gran numero di equazioni e combinazioni di impedenze disordinato come la rete diventa più grande.

6.4 Topologia circuitale

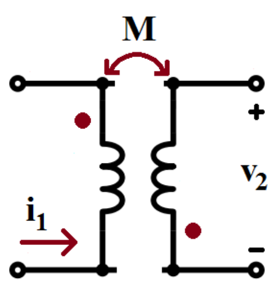
L'importanza della topologia circuitale per l'analisi delle reti sta nel fatto che, se tutti i componenti elettrici fossero estrapolati dalla rete, vi rimarrebbe un circuito geometrico completamente caratterizzato da un insieme di rami terminanti su vari vertici. È possibile, da questo circuito geometrico, dedurre molte proprietà generiche della rete e determinare se la rete possa essere risolta più facilmente da un'analisi nodale o da un'analisi delle reti. La valutazione più importante, naturalmente, è la questione di quale metodo vorrà produrre il minore numero di equazioni simultanee e pertanto un determinante di ordine minore.

Prendiamo in esame la figura mostrata accanto. Al fine di fissare la nomenclatura della geometria circuitale, si è tracciato il contorno di un circuito rettangolare, tralasciando i dettagli degli elementi elettrici impedienti



del circuito stesso. Deve venire inteso che un qualche elemento impediente sia connesso tra ciascun paio dei punti 1-2, 2-3, 3-4 e 4-1. Ogni punto 1, 2, 3, 4 è denominato **nodo**. Il nodo è definito come il terminale di qualsiasi ramo di un circuito o un terminale comune a due o più rami ed è identico a punto di giunzione, punto di ramificazione o vertice. Le linee **a**, **b**, **c**, **d** ed **e**, che connettono i punti **1**, **2**, **3** e **4**, sono chiamati **rami**. Un ramo è definito come una parte di una rete consistente di uno o più elementi a due terminali connessi in serie. Una **maglia** è un insieme di rami che formano un percorso chiuso in un circuito, e tale che, se uno qualsiasi dei rami sia rimosso dall'insieme non ne permanga un percorso chiuso. Nell'immagine ci sono tre maglie formate dagli insiemi di rami **abcd**, **bce**, e **aed**.

Con rifermento alla figura, un insieme di rami connessi che non cingono una maglia, come mostrato, è definito un albero. Il numero **N** dei nodi presenti in una maglia non chiusa di **B** rami risulta dato da $N = B + 1$, che danno corpo a delle maglie.



Una parte di una rete non direttamente connessa, ovverosia accoppiata induttivamente, è definita una **parte separata**.

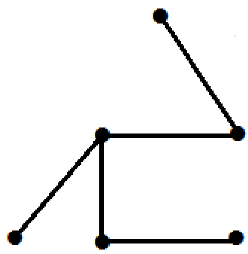
Facendo riferimento alla figura, un insieme di rami connessi che non includono alcuna maglia, come mostrato, è descritto come un **albero**. Come si può vedere, qualsiasi rete, composta di una o più maglie, può ridursi in un albero rimuovendo i rami senza impattare sui nodi. In altri termini, è possibile dare forma a un albero, contenente tutti i nodi, di una data rete connessa, tagliando i rami. Inoltre, il numero **N** dei nodi è $N = B+1$ (equazione 1) dove **B** è il numero dei rami nell'albero così formato.

Si è trovato che, se una rete ha N nodi e B rami e che si devono tagliare β rami per trasformarla in un albero, la seguente relazione persiste sempre tra N, B, e β: $N = 1 + B - \beta$ (equazione 2). La quantità β è nota come numero di Betti, un fisico e matematico italiano. Una espressione per il numero di Betti è ottenibile riscrivendo l'equazione 2: $\beta = 1 + B - N$ (equazione 3).

Ma il numero di Betti è pure il numero delle maglie in una rete connessa disegnata interamente su un piano senza tratti che si intersecano, poiché β

rami devono essere tagliati per convertire una rete con β maglie in un albero.

Pertanto, il numero **N** di maglie nella rete deve uguagliare il numero di Betti, e in base alla equazione 3, essere $<< 01 + B - N$. Ovviamente **N** è pure il numero di equazioni simultanee indipendenti e l'ordine del determinante da risolvere usando il metodo delle analisi di maglia. La costante numerica **1** corrisponde ad una rete che può venire tracciata su un singolo piano senza intercettare tratti, o ad una rete che consiste in una **parte separata**.



Nella analisi nodale, il numero R delle equazioni nodali, definito come il rango della rete, sarà ovviamente uno di meno del numero dei nodi poiché nessuna equazione nodale viene scritta per il nodo di riferimento. In generale il numero **R** delle equazioni nodali indipendenti necessario per l'analisi nodale è $R = V - P$ in cui **P** è il numero delle parti nella rete.

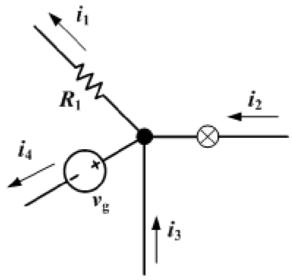
È ora possibile comparare i metodi di analisi di maglia e nodale per quanto concerne il risparmio di lavoro necessario. Assumiamo una rete in cui il numero delle maglie sia uguale al numero delle equazioni nodali indipendenti. Allora, il numero delle equazioni necessari sarà identico e **N=R**.

La sostituzione dei valori di **N** e **R** sviluppati nelle equazioni da: $P + B - V = V - P$S da cui $B = 2(V - P)$.

Se l'analisi di maglia necessita più equazioni della nodale, il lato sinistro della equazione sovrastante eccederà il destro e $B > 2(V - P)$. All'opposto, se l'analisi di maglia richiede meno equazioni della nodale, il membro destro della ineguaglianza eccederà il membro di sinistra e $B < 2(V - P)$.

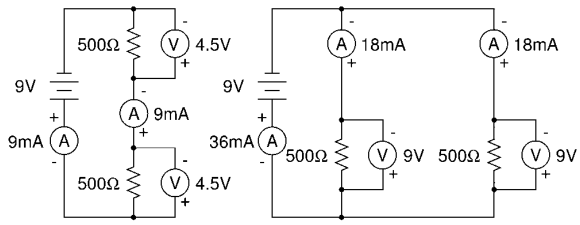
6.5 Analisi nodale

L'analisi nodale dei circuiti elettrici, analisi delle tensioni ai nodi, o metodo delle correnti ai rami è un metodo per determinare la tensione (differenza di potenziale) tra **nodi** (punti in cui gli elementi o rami si connettono) in un circuito elettrico in virtù delle correnti nei rami.



Si può applicare solo a reti con generatori di corrente e componenti ad ammettenza, quindi non ad esempio a reti con generatori di tensione ideali, per questi è però possibile utilizzare il metodo dei potenziali ai nodi modificato.

Nell'analizzare un circuito usando le leggi di Kirchhoff, si può effettuare sia l'analisi nodale usando la legge di Kirchhoff delle correnti (KCL) o analisi di maglia utilizzando la legge di Kirchhoff delle tensioni (KVL). L'analisi nodale

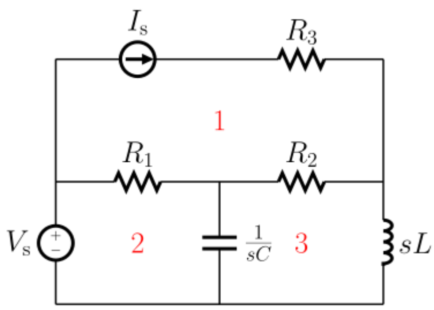


formula un'equazione ad ogni nodo elettrico, che richiede che le correnti dei rami incidenti in un nodo devono ammontare a zero. Le correnti dei rami sono scritte in termini di tensioni di nodo del circuito. Di conseguenza, ogni relazione costitutiva di ciascun ramo deve dare una corrente funzione della tensione

6.6 Analisi delle maglie

In elettrotecnica il termine **maglia** si usa per indicare, all'interno di un circuito elettrico, un percorso chiuso costituito dalla concatenazione di più rami, utilizzati ciascuno una volta sola nell'ambito del percorso stesso.

Un circuito a maglie è composto da un insieme di nodi in numero superiore a due, tutti o parzialmente interconnessi tra di loro tramite rami. L'esempio più semplice di maglia infatti è costituito da un percorso composto da tre nodi interconnessi da tre rami (triangolo).



Al crescere del numero dei nodi e dei rami di un circuito, è possibile individuare al suo interno maglie sempre più complesse. Il numero di maglie differenti individuabili in un circuito cresce in modo geometrico rispetto alle dimensioni (numero di nodi e di interconnessioni) del circuito stesso.

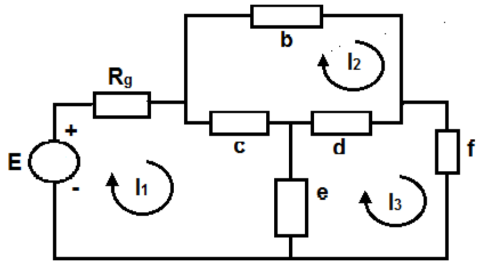
Le maglie basilari del circuito planare della figura accanto sono etichettate 1, 2, e 3. R1, R2, R3, 1 / sC, e sL rappresentano i valori dell'impedenza dei resistori, condensatori e induttori nel dominio della frequenza. Vs e Is sono i valori di tensione e di corrente delle rispettive sorgenti. Analisi alle maglie (o metodo delle correnti di anello) è un metodo che viene utilizzato per determinare le correnti (e indirettamente le tensioni) in qualsiasi punto del circuito elettrico. I circuiti planari sono dei circuiti che possono essere disegnati su una superficie piana senza fili che si attraversecano. Una tecnica più generale, chiamata modello delle correnti ad anello (con le corrispondenti variabili di rete dette correnti di maglia) può essere applicata a qualsiasi circuito, planare o meno. L'analisi alle maglie e il metodo delle correnti di anello si avvalgono della legge delle tensioni di Kirchhoff per arrivare ad un sistema di equazioni la cui risolvibilità è garantita se il circuito ha una soluzione. L'analisi alle maglie di solito è più facile da usare quando il circuito è planare, rispetto alle analisi alle correnti di anello.

6.7 Confronto delle analisi nodale e di maglia

6.7.1 Analisi delle maglie

Diamo luogo alla analisi di maglia del circuito affiancato, le cui impedenze sono: $R_g = 4$ (resistenza del generatore), b=6, c=8, d=10, e=12 e f=14 (resistenza di carico) ohm.

Per questa analisi assumiamo le correnti nelle maglie 1, 2 e 3 cosi come indicate,le cui equazioni sono:



$$maglia\ 1 = (4+8+12)I_1 - 8 - I_2 - 12 = 24I_1 - 8I_2 - 12I_3$$

$$maglia\ 2 = -8I_1 + (6+8+10)I_2 - 10I_3 = -8I_1 + 24I_2 - 10I_3$$

$$maglia\ 3 = -12I_1 - 10I_2 + (14+10+12)I_3 = -12_I 1 - 10I_2 + 36I_3$$

Il sistema di equazioni di maglia da risolvere risulta:

$$E = 24I_1 - 8I_2 - 12I_3$$

$$0 = -8I_1 + 24I_2 - 10I_3$$

$$0 = -12I_1 - 10I_2 - 36I_3$$

Con il metodo di Cramer, il denominatore per le correnti I_1, I_2 e I_3 sarà

$$\begin{bmatrix} 24 \quad amp; -8 \quad amp; -12 \\ -8 \quad amp; 24 \quad amp; -10 \\ -12 \quad amp; -10 \quad amp; 36 \end{bmatrix} = 10656$$

mentre i numeratori saranno:

$$N_1 = \begin{bmatrix} 10 \quad amp; -8 \quad amp; -12 \\ 0 \quad amp; 24 \quad amp; -10 \\ 0 \quad amp; -10 \quad amp; 36 \end{bmatrix} = 7640$$

$$N_2 = \begin{bmatrix} 24 & amp; 10 & amp; -12 \\ -8 & amp; 0 & amp; -10 \\ -12 & amp; 0 & amp; 36 \end{bmatrix} = 4080$$

$$N_3 = \begin{bmatrix} 24 & amp; -8 & amp; -10 \\ -8 & amp; 24 & amp; 0 \\ -12 & amp; -10 & amp; 0 \end{bmatrix} = 3680$$

Quindi I_1, I_2 e I_3 sono:

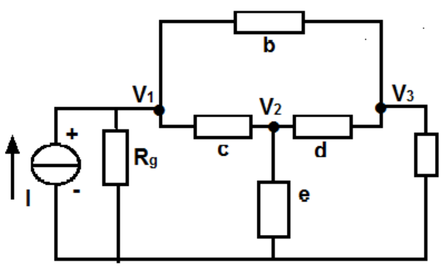
$$I_1 = \frac{76401}{10656} = \frac{955}{1332} \qquad I_2 = \frac{4080}{10656} = \frac{85}{222} \qquad I_3 = \frac{3680}{10656} = \frac{115}{333}$$

Le correnti che attraversano i rami sono:

$$R_g = \frac{955}{1332} \quad b = \frac{85}{222} \quad c = \frac{445}{1332} \quad d = \frac{25}{666} \quad e = \frac{445}{148} \quad f = \frac{115}{333}$$

6.7.2 Analisi nodale

Per l'analisi nodale, assegniamo ai tre nodi della figura accanto i valori V_1, V_2 e V_3 e sostituiamo il generatore **E** con un'equivalente sorgente a corrente costante di **E/4** Amp. in parallelo con una impedenza di **4ohm** secondo il teorema di Norton.



Le conduttanze sono:

$$Y_g = \frac{1}{4} \quad Y_b = \frac{1}{6} \quad Y_c = \frac{1}{8} \quad Y_d = \frac{1}{10} \quad Y_e = \frac{1}{12} \quad Y_f = \frac{11}{14}$$

Le equazioni ai nodi possono quindi venire scritte secondo il procedimento descritto in precedenza:

$$\frac{E}{4} = (\frac{1}{4} + \frac{1}{6} + \frac{1}{8})V_1 - \frac{1}{8}V_2 - \frac{1}{6}V_3$$

$$0 = -\frac{1}{8}V_1 + (\frac{1}{8} + \frac{1}{12} + \frac{1}{10})V_2 - \frac{1}{10}V_3$$

$$0 = -\frac{1}{6}V_1 - \frac{1}{10}V_2 + (\frac{1}{6} + \frac{1}{10} + \frac{1}{14})V_3$$

ovvero:

$$\frac{10}{4} = \frac{13}{24}V_1 - \frac{1}{8}V_2 - \frac{1}{6}V_3$$

$$0 = -\frac{1}{8}V_1 + \frac{37}{120}V_2 - \frac{1}{10}V_3$$

$$0 = -\frac{1}{6}V_1 - \frac{1}{10}V_2 + \frac{71}{210}V_3$$

$$b = 6, c = 8, d = 10, e = 12ef = 14(resistenzadicarico)ohm.$$

Con il metodo di Cramer, il denominatore per le tensioni V_1, V_2 e V_3 saranno

$$D = \begin{bmatrix} \frac{13}{24} & amp; -\frac{1}{8} & amp; -\frac{1}{6} \\ -\frac{1}{8} & amp; \frac{37}{120} & amp; -\frac{1}{10} \\ -\frac{1}{6} & amp; -\frac{1}{10} & amp; \frac{71}{2120} \end{bmatrix} = \frac{37}{1120}$$

mentre i numeratori saranno:

$$N_1 = \begin{bmatrix} \frac{10}{4} & amp; -\frac{1}{8} & amp; -\frac{1}{6} \\ 0 & amp; \frac{37}{120} & amp; -\frac{1}{10} \\ 0 & amp; -\frac{1}{10} & amp; \frac{71}{210} \end{bmatrix} = \frac{475}{2016}$$

$$N_2 = \begin{bmatrix} \frac{13}{24} & amp; \frac{10}{4} & amp; -\frac{1}{6} \\ -\frac{1}{8} & amp; 0 & amp; -\frac{1}{10} \\ -\frac{1}{6} & amp; 0 & amp; \frac{71}{210} \end{bmatrix} = \frac{33}{224}$$

$$N_3 = \begin{bmatrix} \frac{13}{24} & amp; -\frac{1}{8} & amp; \frac{10}{4} \\ -\frac{1}{8} & amp; \frac{37}{120} & amp; 0 \\ -\frac{1}{6} & amp; -\frac{1}{10} & amp; 0 \end{bmatrix} = \frac{23}{144}$$

pertanto:

$$V_1 = \frac{\frac{475}{2016}}{\frac{37}{1120}} = \frac{2375}{333} \qquad V_2 = \frac{\frac{33}{224}}{\frac{37}{1120}} = \frac{165}{37} \qquad V_3 = \frac{\frac{23}{144}}{\frac{37}{1120}} = \frac{1610}{333}$$

La correlazione fra i due tipi di analisi è ben evidenziata dalle seguenti espressioni:

$$V_1 = \frac{2375}{333} \qquad i_c 8 + i_e 12 = \frac{445}{1332}8 + \frac{55}{148}12 = \frac{2375}{333}$$

$$V_2 = \frac{165}{37} \qquad i_e 12 = \frac{55}{148}12 = \frac{165}{37}$$

$$V_3 = \frac{161}{333} \qquad i_d 10 + i_e 12 = \frac{25}{666}10 + \frac{55}{148}12 = \frac{161}{333}$$

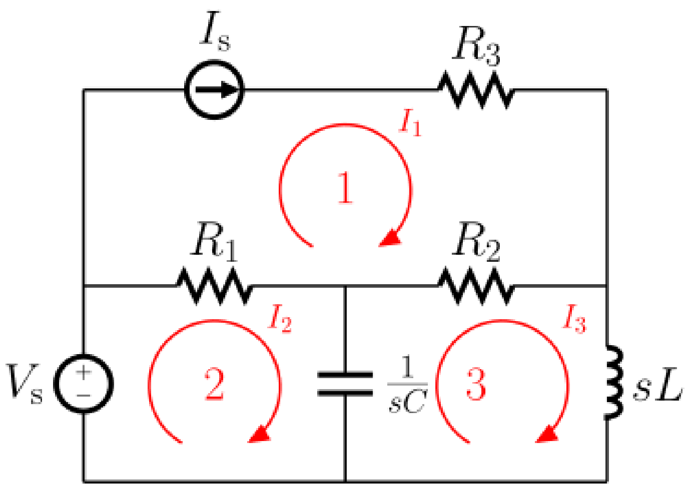


Figura 6.1: $\begin{cases} \text{Mesh } 1{:}I_1 = I_s \\ \text{Mesh } 2{:} -V_s + R_1(I_2 - I_1) + \frac{1}{sC}(I_2 - I_3) = 0 \\ \text{Mesh } 3{:} \frac{1}{sC}(I_3 - I_2) + R_2(I_3 - I_1) + LsI_3 = 0 \end{cases}$

6.8 Maglie essenziali e correnti

L'analisi delle maglie assegna arbitrariamente correnti di anello nelle maglie essenziali (note anche come maglie indipendenti). Una maglia essenziale è un anello nel circuito che non contiene alcun altro anello. Figura 1 contrassegna le maglie essenziali con uno, due e tre.

Le correnti di anello sono correnti che scorrono nelle maglie essenziali e le equazioni sono impostate su di esse. Una corrente di maglia potrebbe non corrispondere ad una qualsiasi corrente che scorra fisicamente, ma da loro le correnti fisiche sono facilmente deducibili. È pratica usuale avere tutte le correnti di anello scorrenti nella stessa direzione. Ciò consente di evitare errori durante la scrittura delle equazioni. La convenzione è quella di avere tutte le correnti di maglia che ruotano in senso orario. La Figura 2 mostra lo stesso circuito di figura 1 con le correnti di anello contrassegnate da i_1, i_2, e i_3. Le frecce indicano la direzione della corrente di anello.

Risolvendo rispetto alle correnti di maglia, invece di applicare direttamente la legge di Kirchhoff delle correnti può ridurre notevolmente la quantità di calcolo richiesto. Questo è perché ci sono meno correnti di maglia che di ramo. Nella figura 2, per esempio, ci sono sei correnti di ramo ma solo tre correnti di anello.

6.8.1 Impostare le equazioni

Ogni maglia genera una equazione. Queste equazioni sono costituite dalla somma delle cadute di tensione in ciascun intero anello percorso dalla corrente di anello. Per i problemi più generali di quelli compresi corrente e sorgente di tensione, la caduta di tensione sarà l'impedenza del componente elettronico moltiplicata per la corrente di maglia in quel anello.

Se un generatore di tensione è presente all'interno dell'anello circuitale, la tensione della sorgente viene sommata o sottratta a seconda se si tratta di una caduta di tensione o un aumento di tensione nella direzione della corrente di anello. Per una sorgente di corrente che non è compresa tra due maglie, la corrente di anello assumerà il valore positivo o negativo del generatore di corrente a seconda se la corrente maglia è nello stesso o opposta direzione fonte corrente. Il circuito di Figura 3 è lo stesso di Figura 2 con le equazioni necessarie per ottenere tutte le correnti del circuito.

Una volta che le equazioni siano state trovate, il sistema di equazioni lineari può essere risolto utilizzando qualsiasi metodo ritenuto opportuno.

6.8.2 Sovrapposizione

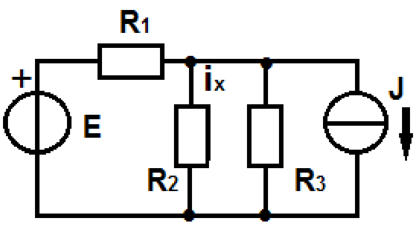
In questo metodo, l'effetto di ogni generatore viene calcolato a turno. Tutti i generatori meno quello preso in esame vengono rimossi e cortocircuitati nel caso di generatori di tensione o aperti nel caso di generatori di corrente. La corrente totale attraverso un ramo particolare o la sua relativa tensione totale viene quindi calcolata sommando tutte le singole correnti o tensioni.

C'è un presupposto sottostante a questo metodo e cioè che la tensione totale e la corrente totale siano una sovrapposizione lineare delle parti. Pertanto, il metodo non può essere utilizzato se sono presenti dei componenti non lineari. Si noti che anche l'analisi della maglia e l'analisi nodale implicitamente utilizzano la sovrapposizione cosicché anche questi sono applicabili solo ai circuiti lineari. La sovrapposizione non può essere utilizzata per trovare la potenza totale utilizzata da elementi anche in circuiti lineari. La potenza varia secondo il quadrato della tensione totale o della corrente totale e il quadrato della somma non è generalmente uguale alla somma dei quadrati.

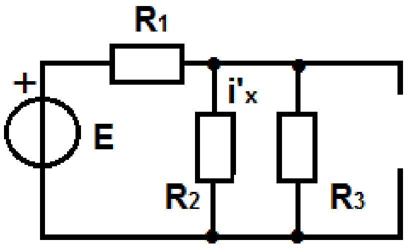
Esempio

Per esemplificare il metodo, poniamo il seguente esercizio:

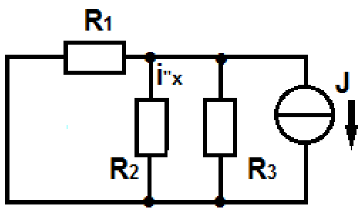
Dato il circuito in figura (a), trovare il valore di i_x e la potenza P_x diddipata su R_2 usando il metodo della sovrapposizione degli effetti. Siano dati $R_1 = 24\Omega$, $R_2 = 20\Omega$, $R_3 = 80\Omega$, $E = 30V$ e $J = 2A$.



(a) Circuito di esempio



(b) Circuito con generatore di corrente spento



(c) Generatore di tensione in corto circuito

Soluzione

Per calcolare la $i_x^{'}$ dovuta al generatore **E** si spegne il generatore di corrente **J**. Il risultato è il seguente.

Per il calcolo di $i_x^{'}$ conviene prima trovare la tensione ai capi del parallelo R_2 e R_3.

$$V_x^{'} = E\frac{(R_2||R_3)}{R_1 + (R_2||R_3)} = 30V\frac{20\Omega||80\Omega}{24\Omega + (20\Omega||80\Omega)} = 12V$$

$$i_x^{'} = \frac{V_x^{'}}{R_2} = \frac{12V}{20\Omega} = 0.6A$$

Per calcolare i_x dovuta al generatore di corrente **J** si spenge il generatore di tensione. Il valore di $i_x^{"}$ è dato da un semplice partitore di tensione.

$$i_x^{''} = -J\frac{R_1||R_3}{R_2 + (R_1||R_3)} = -2A\frac{24\Omega||80\Omega}{20\Omega + (24\Omega||80\Omega)} = -0.96A$$

Mettendo insieme i due risultati si ha:

$$i_x = i_x^{'} + i_x^{''} = 0,6A - 0,96A = -0,36A$$

$$P = R_2 i_x^2 = 20\Omega(-0,36A)^2 = 2592W$$

Funzione di trasferimento 7

La funzione di trasferimento esprime la relazione tra un ingresso e una uscita di una rete nel dominio di Laplace. Le reti con componenti non resistivi ma lineari quali condensatori e induttori sono in generale descritte da sistemi di equazioni differenziali lineari, l'applicazione della trasformata di Laplace permette di descriverle attraverso equazioni algebriche a coefficienti complessi. In analisi di rete quindi, piuttosto che utilizzare le equazioni differenziali direttamente, è prassi usuale effettuare una trasformazione di Laplace e poi esprimere il risultato in termini della variabile complessa **s** che prende il posto della variabile temporale **t**.

7.1 Trasformata di Laplace

La trasformata di Laplace è quindi lo strumento matematico per transitare dal dominio di **t** al dominio di **s**, al "costo" di operare con numeri complessi si sostituiscono gli operatori differenziali con operatori algebrici. Tale approccio è standard nella teoria dei controlli per determinare le caratteristiche di un sistema lineare, come la stabilità o la sua risposta. I passi che devono essere eseguiti nella soluzione di un problema di una rete tramite le trasformate di Laplace sono quelli che seguono.

1. Scrivere l'equazione differenziale della rete.
2. Stabilire le condizioni iniziali nel circuito al tempo **t=0**.
3. Trasformare l'equazione differenziale con le trasformate di Laplace.
4. Ricavare l'incognita della trasformata.
5. Ottenere la trasformazione inversa dell'incognita per una forma utile nel dominio del tempo del tempo.

7.1.1 Esempio di applicazione delle trasformate di Laplace

Consideriamo il seguente esempio.

Una tensione di 100 volt massimi è applicata a una induttanza di 1-henry in serie con una resistenza di 100 Ω. L'equazione differenziale del circuito è:

$$L\frac{di}{dt} + Ri = E$$

ovvero, in questo caso:

$$\frac{di}{dt} + 100i = 100Sin(377t)$$

Usando la coppia $[sf(s) - f(0+),\ f'(t)]$ per il termine a sinistra e la coppia $[\frac{\omega}{s^2+\omega^2},\ Sin(\omega t)]$ per il termine a destra, l'equazione differenziale si trasforma in:

$$si(s) + 100i(s) = \frac{377(100)}{s^2 + 377^2}$$

Risolvendo per **i(s)** si ottiene:

$$i(s) = \frac{377(100)}{(s + 100)(s^2 + 377^2)}$$

Dalla coppia $[\frac{1}{(s+a)(s^2+377^2)},\ \frac{1}{a^2+\omega^2}(e^2 + \frac{a}{\omega}\sin \omega t - \cos \omega t)]$, la soluzione inversa corrispondente è:

$$i(t) = \frac{377(100)}{(100)^2 + 377^2}(e^{-100t} + \frac{100}{377}\sin 377t - \cos 377t)$$

7.2 Funzioni di trasferimento di componenti a due terminali

Per i componenti a due terminali la funzione di trasferimento, o in genere per gli elementi non lineari, è la relazione fra la corrente che entra nei dispositivi e la tensione che ne risulta ai loro capi. La funzione di trasferimento, Z(s), avrà quindi come unità di impedenza:-ohm. Per i tre componenti passivi incontrati nelle reti elettriche le funzioni di trasferimento sono:

Resistore $Z(s) = R$

Induttore $Z(s) = sL$

Condensatore $Z(s) = \frac{1}{sC}$

Per una rete alla quale sono applicati solamente segnali in corrente alternata, **s** è sostituita da $j\omega$ e ne derivano i valori più famigliari della teoria delle reti a corrente alternata, che sono:

Resistore $Z(j\omega) = R$

Induttore $Z(j\omega) = j\omega L$

Condensatore $Z(j\omega) = \frac{1}{j\omega C}$

Alla fine, per una rete alla quale sia applicata solo la corrente continua, **s** viene sostituita con uno **0** e si impiega la teoria delle reti a corrente continua.

Resistore $Z = R$

Induttore $Z = 0$

Condensatore $Z = \infty$

7.3 Funzioni di trasferimento nelle reti elettriche a due porte

Nella teoria dei sistemi di controllo le funzioni di trasferimento vengono identificate con il simbolo $\mathbf{H(s)}$. Più comunemente in elettronica sono definite come il rapporto fra una tensione d'uscita e di una tensione in entrata e vengono identificate con il simbolo $\mathbf{A(s)}$.

Un caso particolare della trasformata di Laplace è la trasformata di Fourier. Formalmente essa sostituisce alla variabile s la variabile $j\omega$, dove ω è una pulsazione. Si studia quindi il comportamento del sistema sottoposto a sollecitazioni sinusoidali a pulsazione ω. In tale trattazione sparisce completamente la variabile temporale e si suppone che il sistema sia a regime (cioè sia passato un tempo "lungo" dall'accensione dei generatori). La trasformata di Fourier sposta il problema nel dominio della frequenza, o spazio di Fourier. Fourier dimostrò che è possibile scrivere ogni reale segnale sotto forma di una somma di segnali sinusoidali a frequenza e fase diversa, studiando quindi il comportamento di un sistema nello spazio di Fourier è possibile conoscerne il comportamento rispetto a qualsiasi segnale in ingresso.

Il rapporto fra ingresso e uscita diventa quindi $\mathbf{A}(j\omega)$:

$$A(j\omega) = \frac{V_o}{V_i}$$

A sta per attenuazione , oppure amplificazione, il che dipende dal contesto. Talvolta l'analista è interessato solamente nella grandezza del guadagno e non nella fase. In questo caso se ne considereranno i moduli, che sono per definizione numeri reali positivi:

$$A(\omega) = \left|\frac{V_o}{V_i}\right|$$

7.4 Sistemi a un ingresso e una uscita

Il concetto di un sistema a un ingresso e una uscita, oppure quadripolo, può essere utile nella analisi delle reti come approccio a **scatola nera** alla analisi. Il comportamento del quadripolo in una più ampia rete può venire descritto interamente senza necessariamente dire nulla circa la sua struttura interna. Si dimostra che un quadripolo (o doppio bipolo) è descritto da quattro coefficienti:

$$\begin{bmatrix} V_1 \\ V_0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} z(j\omega)_{11} & amp; z(j\omega)_{12} \\ z(j\omega)_{21} & amp; z(j\omega)_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_1 \\ I_0 \end{bmatrix}$$

La matrice può venire abbreviata ad un elemento rappresentativo:

$$[z(j\omega)]\, oppure\, [z]$$

Questi concetti possono estendersi a reti con più quadripoli. Tuttavia, cio in realtà viene raramente fatto perché, in molti particolari casi, i quadripoli sono considerati o puramente degli ingressi o puramente delle uscite. Se le funzioni di trasferimento in direzione inversa sono ignorate, una rete multipla di quadripoli può sempre venire decomposta in un numero di quadripoli.

7.4.1 Componenti distribuiti

Dove una rete è composta di elementi circuitali distinti, l'analisi con l'impiego di quadripoli è una questione di scelta, non essenziale. La rete può in alternativa sempre essere analizzata in termini di funzioni di trasferimento dei suoi componenti singoli. Tuttavia, se il circuito comprende degli elementi a parametri distribuiti, quale è il caso delle linee di trasmissione, allora non risulta possibile espletare una analisi in termini di componenti elementari dato che non esistono. L'approccio più usuale di condurre l'analisi è di configurare la linea ad una rete a due porte e di caratterizzarla con i parametri degli elementi a due porte. Un ulteriore esempio di questa tecnica è la configurazione dei portatori di carica che attraversano la regione di base in un transistore ad alta frequenza. La regione della base deve venire modellata con resistenze e capacitanze distribuite piuttosto che con elementi concentrati.

7.4.2 Impedenza immagine

Impedenza immagine è un concetto utilizzato nella progettazione ed analisi delle reti elettroniche e soprattutto nella progettazione del filtri. Il termine "impedenza immagine" applica alla impedenza vista guardando in una porta di una rete. Di solito un doppio bipolo è implicito, ma il concetto può venire esteso a reti con più di due porte. La definizione di impedenza immagine per una rete a due porte è l'impedenza, Z_1, vista guardando nella porta 1 quando la porta 2 è terminata con l'impedenza immagine, Z_1; per la porta 2. In generale, le impedenze immagine delle porte 1 e 2 non saranno eguali a meno che la rete sia simmetrica (o anti-simmetrica) rispetto alle porte.

Reti lineari

8

Un **circuito lineare** è un circuito elettrico che rispetta il principio di sovrapposizione, ovvero è tale che la presenza contemporanea di due variabili causa C_1 e C_2, che separatamente genererebbero gli effetti ε_1 e ε_2, ha come effetto la sovrapposizione $\varepsilon_1 + \varepsilon_2$ dei rispettivi effetti.

Pertanto, se la variabile causa è una funzione sinusoidale di frequenza f, l'uscita sarà ancora una funzione sinusoidale della medesima frequenza f, non necessariamente caratterizzata dalla stessa fase e ampiezza.

Le variabili causa sono le variabili di ingresso e le variabili effetto quelle di uscita, che possono essere segnali di tensione o corrente impressi da un generatore. I componenti di un circuito lineare possono essere attivi o passivi: mentre i componenti passivi sono generalmente lineari, quelli attivi possono essere considerati lineari solo per piccole variazioni delle variabili.

Nello studio dei circuiti lineari sono importanti il teorema di Thévenin e il teorema di Norton, che permettono di semplificare problemi complessi.

I problemi classici affrontati nella teoria dei circuiti lineari sono i circuiti RC, RL e RLC, per i quali si studia l'evoluzione libera e in presenza di termini forzanti: in quest'ultimo caso sono usati importanti strumenti matematici, come la trasformata di Laplace e i teoremi dei limiti e di convoluzione.

Da un punto di vista applicativo, e nel caso specifico degli amplificatori, un amplificatore è *lineare* se mantiene costante il modulo della risposta in frequenza (guadagno), *non lineare* altrimenti generando distorsione del segnale. Essendo impossibile costruire circuiti che si comportino in maniera perfettamente lineare per qualsiasi valore di frequenza, vengono considerati lineari gli amplificatori in cui il guadagno *ragionevolmente* costante all'interno di un prefissato campo di frequenze, detto banda passante. Gli amplificatori lineari devono presentare, in banda passante, uno sfasamento *ragionevolmente* lineare.

Un dispositivo o componente elettrico è detto lineare quando la sua relazione costitutiva è una funzione lineare, sia che si tratti di una relazione algebrica, come nel caso dei resistori lineari, sia che si tratti di una relazione differenziale, come nel caso dei condensatori e induttori lineari.

In caso contrario si parlerà di dispositivo non lineare. Nei casi pratici, non esistendo nella realtà alcun dispositivo che sia veramente lineare, si intende con lineare un dispositivo che si comporti in modo ragionevolmente lineare nel campo di applicazione per il quale si intende utilizzarlo. Esempi di dispositivi non lineari, per i quali l'aspetto non lineare è spesso necessario al funzionamento del circuito di cui fanno parte, sono tutti i diodi, i transistor, i tubi termoionici (valvole).

Reti non lineari

9

La maggior parte dei progetti elettronici sono, in realtà, non lineari... questi sono inevitabilmente non lineari, la funzione di trasferimento di un semiconduttore (giunzione p-n) è data dalla seguente relazione decisamente non lineare:

$$i = I_o(e^{\frac{v}{V_T}} - 1)$$

in cui;

1. i e v sono i valori istantanei della corrente e della tensione.
2. I_o è un parametro arbitrario denominato corrente inversa di perdita il cui valore dipende dalla costruzione del dispositivo.
3. V_T è un parametro proporzionale alla temperatura denominato tensione termica e uguaglia 25mV alla temperatura ambiente.

Ci sono molti altri modi che possono visualizzare la non linearità in una rete. Tutti i metodi che utilizzano la sovrapposizione lineare falliranno quando siano presenti dei componenti non lineari . Ci sono diverse opzioni per trattare con la non linearità a seconda del tipo di circuito e delle informazioni che l'analista desidera ottenere.

9.1 Equazioni costitutive

L'equazione del diodo suddetta è un esempio di una equazione costitutiva di un elemento elettrico non lineare della forma generica

$$f(v, i) = 0$$

Ciò può far portare a considerare un resistore come non lineare. Le equazioni costitutive per le induttanze e le capacita non lineari sono rispettivamente:

$$f(v, \theta) = 0$$

$$f(v, q) = 0$$

in cui f è una qualsiasi funzione arbitraria, θ è il flusso magnetico immagazzinato e q la carica immagazzinata.

9.2 Esistenza, unicità e stabilità delle soluzioni

Una considerazione importante in analisi non lineare è la questione dell'unicità. Per una rete composta di componenti lineari ci sarà sempre una soluzione unica per un dato insieme di condizioni al contorno. Nei circuiti non lineari questo però non è sempre il caso. Per esempio, un resistore con una corrente fissa che lo attraversa ha una sola soluzione per la tensione ai suoi capi. D'altra parte, il diodo a effetto tunnel ha fino a tre soluzioni per la tensione per una data corrente. Cioè, una soluzione particolare per una corrente che attraversa il diodo non è unica, ce ne potrebbero essere altre, ugualmente valide. In alcuni casi non ci potrebbe essere una soluzione affatto: la questione della esistenza di soluzioni deve venire considerata.

Un'altra considerazione importante è la questione della stabilità. Una soluzione particolare può esistere, ma potrebbe comunque non essere stabile, rapidamente allontanandosi da quella alla minima stimolazione. Può essere dimostrato che una rete che è assolutamente stabile in tutte le condizioni ha una soluzione sola per ciascuna serie di condizioni.

9.3 Metodi

9.3.1 Analisi booleano di reti a commutazione

Un dispositivo di commutazione è un dispositivo in cui la non linearità è utilizzata per produrre due stati opposti. I dispositivi CMOS nei circuiti digitali, per esempio, hanno la loro uscita collegata o all'alimentazione positiva o all'alimentazione negativa e non si trovano mai connessi in qualche cosa di intermedio tranne che durante un periodo transitorio quando il dispositivo sta effettivamente commutando. Qui la non linearità è progettato per essere estrema, e l'analista può effettivamente trarre vantaggio da questo fatto. Questi tipi di reti possono essere analizzati tramite l'algebra booleana assegnando ai due stati ("on" / "off", "positivo" / "negativo" o qualsiasi altro stato sia in utilizzo) le costanti booleane "0" e "1".

I transienti sono ignorati in questa analisi, insieme a qualsiasi lieve discrepanza tra lo stato attuale del dispositivo e lo stato nominale assegnato al valore della variabile booleana. Per esempio, valore "1" può essere assegnato allo stato di + 5V. L'uscita del dispositivo può essere effettivamente + 4.5V ma l'analista ritiene comunque che questo sia valore "1". I produttori di dispositivi di solito vogliono specificare un intervallo di valori nelle loro schede dati che sono da considerarsi indefinita (cioè il risultato sarà imprevedibile).

I transienti non sono del tutto priva di interesse per l'analista. La velocità massima di commutazione è determinata dalla velocità di transizione da uno stato all'altro. Fortunatamente per l'analista, per molti dispositivi la maggior parte della transizione avviene nella porzione lineare della funzione di trasferimento dei dispositivi e l'analisi lineare può essere applicata per ottenere almeno una risposta approssimativa.

È matematicamente possibile derivare algebre booleane che hanno più di due stati. Il loro uso non è troppo frequente in elettronica, anche se i dispositivi a tre stati siano abbastanza comuni.

9.3.2 Analisi suddivisa della polarizzazione e dei segnali

Questa tecnica viene utilizzata quando il funzionamento del circuito è quello di essere essenzialmente lineare, ma i dispositivi utilizzati per la sua attuazione sono non lineari. Un amplificatore a transistor è un esempio di questo tipo di rete. L'essenza di questa tecnica consiste nel suddividere l'analisi in due parti. In primo luogo, le polarizzazioni DC sono analizzate utilizzando dei metodi non-lineari. Questo stabilisce il punto polarizzato di funzionamento del circuito. In secondo luogo, le caratteristiche del circuito afferenti i segnali vengono analizzate utilizzando l'analisi di rete lineare. Esempi di metodi che possono essere impiegate per entrambe queste fasi sono riportati di seguito.

9.3.3 Metodo grafico di analisi DC

In moltissimi progetti di circuiti, la polarizzazione DC viene avviata ai componenti non lineari tramite dei resistori (o eventualmente una rete di resistori). Poiché i resistori sono componenti lineari, è particolarmente facile determinare il punto operativo in assenza di segnale del dispositivo non lineari da un grafico della sua funzione di trasferimento. Il metodo è il seguente: dall'analisi di rete lineare la funzione di trasferimento è calcolata (che è la tensione di uscita da una corrente di uscita) è calcolato sia per la rete resistiva che per il generatore li produce. Questa sarà una linea retta (detta linea di carico) e può facilmente essere sovrapposta sull grafico della funzione di trasferimento del dispositivo non lineare. Il punto in cui le linee si incrociano è il punto operativo in assenza di segnale.

Forse il metodo pratico più semplice è quello di calcolare la tensione della rete lineare a circuito aperto e la corrente di corto circuito e tracciare questi sulla funzione di trasferimento del dispositivo non lineare. La retta che unisce i due punti è la funzione di trasferimento della rete.

In realtà, il progettista del circuito potrebbe procedere in senso inverso a quello descritto. Partendo da un grafico fornito nel foglio dati del produttore del dispositivo non lineare, il progettista potrebbe scegliere il punto di funzionamento desiderato e quindi calcolare i valori dei componenti lineari necessari per realizzarlo.

È ancora possibile utilizzare questo metodo se il dispositivo che è polarizzato ha la sua polarizzazione fornita attraverso un altro dispositivo che è esso stesso non lineare - un diodo per esempio. In questo caso però, il tracciamento della funzione di trasferimento della rete sul dispositivo che è polarizzato non sarebbe più una linea retta e di conseguenza più noioso da fare.

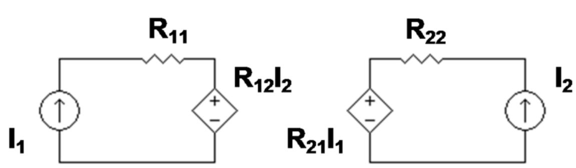
9.3.4 Circuiti equivalenti per piccoli segnali

Questo metodo può essere utilizzato quando la escursione dei segnali di ingresso e di uscita in una rete elettrica rimane sostanzialmente dentro la parte lineare della funzione di trasferimento dei dispositivi non lineari, oppure è così piccola che la curva della funzione di trasferimento può essere considerata lineare. Sulla base di queste condizioni specifiche, il dispositivo non lineare può essere rappresentato da una rete lineare equivalente. Bisogna ricordare che questo circuito equivalente è del tutto fittizio e valido solo per le piccole escursioni di segnale. È del tutto inapplicabile alla polarizzazione CC del dispositivo.

Per un semplice dispositivo a due terminali, il circuito equivalente per piccoli segnali potrebbe essere di non più di due componenti. Una resistenza di valore uguale alla pendenza della curva v / i in corrispondenza e tangente al punto operativo (chiamata resistenza dinamica). Un generatore, perché questa tangente non passerà, in generale, attraverso l'origine. Con più terminali, sono necessari circuiti equivalenti più complicati.

Una forma largamente diffusa di specificare il circuito equivalente per i piccoli segnali tra i produttori di transistor è quello di utilizzare i parametri di rete a due porte conosciuti come parametri |H|.. Questi sono una matrice di quattro parametri come i parametri [Z] ma nel caso dei parametri [H] sono una miscela ibrida di impedenze, ammettenze, guadagni di corrente e guadagni tensione. In questo modello il transistore a tre terminali è considerato un Quadripolo, uno dei suoi terminali è comune ad entrambe le porte. I parametri [H] sono molto diversi a seconda di quale terminale è scelto come terminale comune. Il parametro più importante per i transistori di solito è il guadagno di corrente diretta, H_21, in configurazione emettitore comune. Questo è designato HFE sulle schede tecniche.

Il circuito equivalente per piccoli segnali in termini di parametri di un quadripolo conduce al concetto dei generatori dipendenti. Cioè, il valore di tensione o di corrente del generatore dipende linearmente dalla tensione o corrente presente in un'altra parte del circuito. Per esempio il modello del parametro [H] porta a generatori di tensione dipendenti come mostrato in questo schema:



Ci saranno sempre i generatori dipendenti in un circuito equivalente parametro a due porte. Questo vale per i parametri [H] così come per i parametri [Z] e qualsiasi altro tipo di parametri. Queste dipendenze devono essere conservate nello sviluppo delle equazioni in una più ampia analisi di rete lineare.

9.3.5 Modello a tratti lineari

In questo metodo, la funzione di trasferimento del dispositivo non lineare viene suddivisa in regioni. Ciascuna di queste regioni viene approssimata con una linea retta. Pertanto, la funzione di trasferimento sarà lineare fino ad un particolare punto dove ci sarà una discontinuità. Passato questo punto la funzione di trasferimento sarà nuovamente lineare, ma con una pendenza differente.

Un'applicazione ben conosciuta di questa metodo è l'approssimazione della funzione di trasferimento di un diodo a giunzione pn. La funzione di trasferimento di un diodo ideale è stata espressa nella parte superiore di questa sezione (non lineare). Tuttavia, questa formula viene utilizzata raramente in analisi di rete, ed una approssimazione a tratti viene invece usata al suo posto. Si può notare che la corrente del diodo diminuisce rapidamente al valore di saturazione inversa I_0 come la tensione si riduce. Questa corrente, per molti scopi, è così piccola che può essere ignorata. Con l'aumento di tensione, la corrente aumenta in modo esponenziale. Il diodo è conformato a un circuito aperto fino al ginocchio della curva esponenziale, quindi oltre questo punto come una resistenza uguale alla resistività di superficie del materiale semiconduttore.

I valori comunemente accettati per la tensione del punto di transizione sono 0.7V per i dispositivi al silicio e 0.3V per dispositivi al germanio. Un modello ancora più semplice del diodo, talvolta usato in applicazioni di commutazione, è un cortocircuito per la polarizzazione diretta ed un circuito aperto per la polarizzazione inversa.

Il modello di una giunzione pn a polarizzata diretta di approssimativamente 0,7 V costante è anche una approssimazione molto usato per la tensione della giunzione base-emettitore dei transistori nella progettazione degli amplificatori.

Il metodo a tratti è simile al metodo per piccoli segnali in quanto le tecniche di analisi delle reti lineari possono essere applicate solo se il segnale rimane entro certi limiti. Se il segnale attraversa un punto di discontinuità, allora il modello non è più valido per scopi di analisi lineare. Tuttavia il modello a tratti ha un vantaggio rispetto al modello per piccoli segnale, in quanto è ugualmente applicabile alla polarizzazione di segnale e CC.

9.4 Componenti a tempo-varianti

In analisi lineare, i componenti di rete sono presunti immutabili, ma in alcuni circuiti ciò non vale, come per i generatori a spazzolamento, amplificazione di tensione controllata, filtro elettronico e equalizzatori variabili. In molti casi la variazione del valore del componente è periodica. Un componente non lineare eccitato con un segnale periodico, per esempio, può essere rappresentato come un componente lineare che varia periodicamente. Sidney Darlington ha divulgato un metodo per analizzare tali circuiti variabili periodicamente nel tempo e sviluppato forme di circuiti canoniche, che sono analoghe alle forme canoniche di Ronald Foster e Wilhelm Cauer, utilizzate per l'analisi di circuiti lineari.

Fonti

Fonti dei testi

- **Copertina**. *Fonte:* https://it.wikibooks.org/wiki/Analisi_topologica_dei_circuiti_elettici/Copertina
- **Analisi topologica dei circuiti elettrici**. *Fonte:* https://it.wikibooks.org/wiki/Analisi_topologica_dei_circuiti_elettici
- **Prefazione**. *Fonte:* https://it.wikibooks.org/wiki/Analisi_topologica_dei_circuiti_elettici/Prefazione
- **Componenti circuitali**. *Fonte:* https://it.wikibooks.org/wiki/Analisi_topologica_dei_circuiti_elettici/Componenti_circuitali
- **Relazione tra circuiti fisici e modelli**. *Fonte:* https://it.wikibooks.org/wiki/Analisi_topologica_dei_circuiti_elettici/Relazione_tra_circuiti_fisici_e_modelli
- **Reti semplici**. *Fonte:* https://it.wikibooks.org/wiki/Analisi_topologica_dei_circuiti_elettici/Reti_semplici
- **Analisi dei circuiti elettrici**. *Fonte:* https://it.wikibooks.org/wiki/Analisi_topologica_dei_circuiti_elettici/Analisi_dei_circuiti_elettrici
- **Funzione di trasferimento**. *Fonte:* https://it.wikibooks.org/wiki/Analisi_topologica_dei_circuiti_elettici/Funzione_di_trasferimento
- **Reti lineari**. *Fonte:* https://it.wikibooks.org/wiki/Analisi_topologica_dei_circuiti_elettici/Reti_lineari
- **Reti non lineari**. *Fonte:* https://it.wikibooks.org/wiki/Analisi_topologica_dei_circuiti_elettici/Reti_non_lineari

Fonti delle immagini

- **File:Current Source.svg**. *Fonte:* https://commons.wikimedia.org/wiki/File:Current_Source.svg; *autore:* jjbeard; *licenza:* pubblico dominio

- **File:Real current source.png**. *Fonte:* https://commons.wikimedia.org/wiki/File:Real_current_source.png; *autore:* norro; *licenza:* pubblico dominio
- **File:Real voltage source.png**. *Fonte:* https://commons.wikimedia.org/wiki/File:Real_voltage_source.png; *autore:* norro; *licenza:* pubblico dominio
- **File:Circuit equivalence.png**. *Fonte:* https://commons.wikimedia.org/wiki/File:Circuit_equivalence.png; *autore:* Dbenbenn; *licenza:* GFDL, CC BY-SA 3.0, CC BY-SA 2.5
- **File:Delta-Star Transformation.svg**. *Fonte:* https://commons.wikimedia.org/wiki/File:Delta-Star_Transformation.svg; *autore:* jjbeard; *licenza:* pubblico dominio
- **File:Star-mesh transform.svg**. *Fonte:* https://commons.wikimedia.org/wiki/File:Star-mesh_transform.svg; *autore:* SlothMcCarty; *licenza:* CC BY-SA 3.0
- **File:Sourcetransform.svg**. *Fonte:* https://commons.wikimedia.org/wiki/File:Sourcetransform.svg; *autore:* Stannered; *licenza:* pubblico dominio
- **File:Impedance voltage divider.svg**. *Fonte:* https://commons.wikimedia.org/wiki/File:Sourcetransform.svg; *autore:* Velociostrich; *licenza:* CC BY-SA 3.0
- **File:Simple two-mesh network.png**. *Fonte:* https://commons.wikimedia.org/wiki/File:Simple_two-mesh_network.png; *autore:* Sommacal alfonso; *licenza:* pubblico dominio
- **File:Simple two-mesh network.png**. *Fonte:* https://it.wikibooks.org/wiki/File:Rete_a_tre_maglie.png; *autore:* Sommacal alfonso; *licenza:* pubblico dominio
- **File:Topological network.png**. *Fonte:* https://commons.wikimedia.org/wiki/File:Topological_network.png; *autore:* Sommacal alfonso; *licenza:* CC BY-SA 4.0
- **File:300px-Dot Convention Leave Plus.png**. *Fonte:* https://commons.wikimedia.org/wiki/File:300px-Dot_Convention_Leave_Plus.png; *licenza:* CC BY-SA 3.0, GFDL
- **File:Topological network tree.png**. *Fonte:* https://commons.wikimedia.org/wiki/File:Topological_network_tree.png; *autore:* Sommacal alfonso; *licenza:* CC BY-SA 4.0, GFDL

- **File:KCL.png**. *Fonte:* https://commons.wikimedia.org/wiki/File:KCL.png; *autore:* Pflodo; *licenza:* CC BY-SA 3.0, GFDL

- **File:Series and parallel circuits2.svg**. *Fonte:* https://commons.wikimedia.org/wiki/File:Series_and_parallel_circuits2.svg; *autore:* Xyzzy n, Krinkle; *licenza:* CC BY-SA 1.0, GFDL

- **File:Mesh Analysis Example1 TeX.svg**. *Fonte:* https://commons.wikimedia.org/wiki/File:Mesh_Analysis_Example1_TeX.svg; *autore:* GorillaWarfare; *licenza:* pubblico dominio

- **File:Bridgget-T network.png**. *Fonte:* https://commons.wikimedia.org/wiki/File:Bridgget-T_network.png; *autore:* Sommacal alfonso; *licenza:* CC BY-SA 4.0, GFDL

- **File:Bridged-T network.png**. *Fonte:* https://commons.wikimedia.org/wiki/File:Bridged-T_network.png; *autore:* Sommacal alfonso; *licenza:* CC BY-SA 4.0, GFDL

- **File:Mesh Analysis Example2 TeX.svg**. *Fonte:* https://commons.wikimedia.org/wiki/File:Mesh_Analysis_Example2_TeX.svg; *autore:* GorillaWarfare; *licenza:* pubblico dominio

- **File:Esercizio sovrapposizione.png**. *Fonte:* https://commons.wikimedia.org/wiki/File:Esercizio_sovrapposizione.png; *autore:* Alfisomm; *licenza:* GFDL, CC BY-SA 4.0

- **File:Circuito senza generatore di ccorrente.png**. *Fonte:* https://commons.wikimedia.org/wiki/File:Circuito_senza_generatore_di_ccorrente.png; *autore:* Alfisomm; *licenza:* GFDL, CC BY-SA 4.0

- **File:Generatore di tensione cortocircuitato.png**. *Fonte:* https://commons.wikimedia.org/wiki/File:Generatore_di_tensione_cortocircuitato.png; *autore:* Alfisomm; *licenza:* GFDL, CC BY-SA 4.0

- **File:Z-equivalent two port.png**. *Fonte:* https://commons.wikimedia.org/wiki/File:Z-equivalent_two_port.png; *autore:* Brews ohare; *licenza:* pubblico dominio