Prof. Dr. H. Brenner **Osnabrück WS 2019/2020**

Bündel, Garben und Kohomologie

Arbeitsblatt 12

Aufgabe 12.1. Es sei R ein kommutativer Ring, D eine kommutative Gruppe und A eine D-graduierte R-Algebra. Zeige $1 \in A_0$ und folgere, dass A_0 eine R-Unteralgebra von A ist.

Aufgabe 12.2. Es sei $A = \bigoplus_{d \in D} A_d$ ein graduierter kommutativer Ring und es sei A_e eine Stufe, die eine Einheit enthalte. Zeige, dass A_e als A_0-Modul isomorph zu A_0 ist.

Aufgabe 12.3. Es sei R ein kommutativer Ring, D eine kommutative Gruppe und A eine D-graduierte kommutative R-Algebra. Es sei $\mathfrak{a} \subseteq A$ ein homogenes Ideal. Zeige, dass der Restklassenring $R/\mathfrak{a}$ ebenfalls D-graduiert ist.

Aufgabe 12.4. Zeige, dass es im Polynomring in n Variablen genau $\binom{d+n-1}{n-1}$ Monome vom Grad d gibt.

Aufgabe 12.5. Zeige, dass die Teilmengen $D_+(\mathfrak{a}) \subseteq \operatorname{Proj}(R)$ zu homogenen Idealen in einem $\mathbb{Z}$-graduierten Ring R in der Tat eine Topologie auf dem projektiven Spektrum $\operatorname{Proj}(R)$ festlegen.

Aufgabe 12.6. Zeige, dass die offenen Teilmengen $D_+(f) \subseteq \operatorname{Proj}(R)$ zu homogenen Elementen $f \in R_+$ in einem $\mathbb{Z}$-graduierten Ring R eine Basis der Topologie auf dem projektiven Spektrum bilden.

Aufgabe 12.7. Bestimme das projektive Spektrum zum Achsenkreuz

$$\operatorname{Spek}(K[X,Y]/(XY))$$

(in der Standardgraduierung).

Aufgabe 12.8. Skizziere das projektive Spektrum zu den Achsenebenen $\operatorname{Spek}(K[X,Y,Z]/(XYZ))$ (in der Standardgraduierung).

Aufgabe 12.9.*

Bestimme den Schnittpunkt der beiden Geraden

$$L = V_+(6X - 8Y + 3Z)$$

und

$$M = V_+(2X + 9Y - 5Z)$$

in der projektiven Ebene.

Aufgabe 12.10. Zeige, dass zwei verschiedene Punkte P und Q in der projektiven Ebene eindeutig eine projektive Gerade definieren, auf der beide Punkte liegen. Wie berechnet man die Geradengleichung aus den Koordinaten der Punkte?

Aufgabe 12.11. Zeige, dass der globale Schnittring $\Gamma\big(\mathbb{P}^n_R, \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n_R}\big)$ des projektiven Raumes gleich R ist.

Aufgabe 12.12. Zeige, dass die in Beispiel 10.7 über Verklebungen konstruierte projektive Gerade $\mathbb{P}^1_K$ mit der projektiven Geraden im Sinne von Beispiel 12.10, also $\operatorname{Proj}(K[X,Y])$, übereinstimmt.

Aufgabe 12.13. Sei $D_+(L) \cong \mathbb{A}^n_K \subset \mathbb{P}^n_K$, wobei L eine homogene Linearform im zugehörigen Polynomring $K[X_0, \ldots, X_n]$ sei. Zeige, dass die Zariski-Topologie auf dem projektiven Raum die Zariski-Topologie auf dem affinen Raum induziert.

Aufgabe 12.14. Sei $P = (a_0, \ldots, a_n) \in \mathbb{P}^n_K$ ein Punkt im projektiven Raum. Zeige, dass es eine offene affine Umgebung $U \cong \mathbb{A}^n_K \subset \mathbb{P}^n_K$ derart gibt, dass P in diesem affinen Raum dem Nullpunkt entspricht.

Aufgabe 12.15. Sei $\mathbb{P}^n_K$ der projektive Raum der Dimension n über dem Körper K und seien

$$D_+(X_i) \cong \mathbb{A}^n_K, D_+(X_j) \cong \mathbb{A}^n_K \subset \mathbb{P}^n_K$$

zwei affine offene Teilmengen. Beschreibe die (nicht überall definierte) Übergangsabbildung von $D_+(X_i)$ nach $D_+(X_j)$.

Aufgabe 12.16. Seien $m+1$ homogene Polynome $F_0, \ldots, F_m$ in $n+1$ Variablen gegeben, die alle den gleichen Grad d besitzen. Zeige, dass es eine offene Menge $U \subseteq \mathbb{P}^n_K$ gibt, auf der die Polynome einen Morphismus

$$\mathbb{P}^n_K \supseteq U \longrightarrow \mathbb{P}^m_K$$

definieren.

Aufgabe 12.17. Es sei S ein $\mathbb{Z}$-graduierter Ring, der in der ersten Stufe eine homogene Einheit besitze, und es sei $\mathfrak{a} \subseteq S$ ein homogenes Ideal. Zeige für $n \in \mathbb{Z}$ die Gleichheit von $(S/\mathfrak{a})_0$-Moduln

$$(S/\mathfrak{a})_n \,=\, (S/\mathfrak{a})_0 \otimes_{S_0} S_n .$$

Aufgabe 12.18. Es sei R ein standard-graduierter Ring und $\mathfrak{a} \subseteq R$ ein homogenes Ideal. Es sei $f \in R$ ein homogenes Element vom Grad 1. Zeige für $n \in \mathbb{Z}$ die folgende Gleichheit von $(R_f/\mathfrak{a}_f)_0$-Moduln

$$((R/\mathfrak{a})_f)_n \,=\, (R_f/\mathfrak{a}_f)_n \,=\, (R_f/\mathfrak{a}_f)_0 \otimes_{(R_f)_0} (R_f)_n .$$

Abbildungsverzeichnis