Prof. Dr. H. Brenner **Osnabrück WS 2015/2016**

Lineare Algebra und analytische Geometrie I

Vorlesung 15

Unterräume und Dualraum

Untervektorräume eines K-Vektorraumes stehen in direkter Beziehung zu Untervektorräumen des Dualraumes V^*.

Definition 15.1. Zu einem Untervektorraum
$$U \subseteq V$$
in einem K-Vektorraum nennt man
$$U^\perp = \{f \in V^* \mid f(u) = 0 \text{ für alle } u \in U\} \subseteq V^*$$
den *Orthogonalraum* zu U.

Definition 15.2. Es sei V ein K-Vektorraum und
$$F \subseteq V^*$$
ein Untervektorraum im Dualraum V^* zu V. Dann nennt man
$$F^\perp = \{v \in V \mid f(v) = 0 \text{ für alle } f \in F\} \subseteq V$$
den *Orthogonalraum* zu F.

Diese Orthogonalräume sind wieder Untervektorräume, siehe Aufgabe 15.3. Ob eine Linearform f zu $U^\perp$ gehört, kann man auf einem Erzeugendensystem von U überprüfen, siehe Aufgabe 15.4. Im zweiten Semester, wenn wir Skalarprodukte zur Verfügung haben, wird es auch einen Orthogonalraum zu $U \subseteq V$ in V selbst geben.

Beispiel 15.3. Es sei ein homogenes lineares Gleichungssystem
$$\begin{matrix} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n & = & 0 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n & = & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n & = & 0 \end{matrix}$$
gegeben, wobei wir die i-te Gleichung als Kernbedingung für die Linearform
$$L_i \colon K^n \longrightarrow K, (x_1, \ldots, x_n) \longmapsto \sum_{j=1}^n a_{ij}x_j,$$
auffassen. Es sei
$$F = \langle L_1, \ldots, L_m \rangle$$
der von diesen Linearformen im Dualraum K^{n*} erzeugte Untervektorraum. Dann ist $F^\perp$ der Lösungsraum des Gleichungssystems.

Generell gilt die Beziehung

$$F^{\perp} = \bigcap_{f \in F} \operatorname{kern} f .$$

Insbesondere ist

$$\langle f \rangle^{\perp} = \operatorname{kern} f .$$

Beispiel 15.4. Es sei V ein endlichdimensionaler K-Vektorraum mit einer Basis v_i, $i \in I$, und Dualbasis v_i^*, $i \in I$. Es sei

$$U = \langle v_j,\, j \in J \rangle$$

zu einer Teilmenge $J \subseteq I$. Dann ist

$$U^{\perp} = \langle v_i^*,\, i \notin J \rangle .$$

Lemma 15.5. *Es sei V ein K-Vektorraum mit Dualraum V^*. Dann gelten folgende Aussagen.*

(1) *Zu Untervektorräumen $U \subseteq U' \subseteq V$ ist*
$$U^{\perp} \supseteq U'^{\perp} .$$
(2) *Zu Untervektorräumen $F \subseteq F' \subseteq V^*$ ist*
$$F^{\perp} \supseteq F'^{\perp} .$$
(3) *Sei V endlichdimensional. Dann ist*
$$\left(U^{\perp}\right)^{\perp} = U$$
und
$$\left(F^{\perp}\right)^{\perp} = F .$$
(4) *Sei V endlichdimensional. Dann ist*
$$\dim\left(U^{\perp}\right) = \dim(V) - \dim(U)$$
und
$$\dim\left(F^{\perp}\right) = \dim(V) - \dim(F) .$$

Beweis. (1) und (2) sind klar. (3). Die Inklusion

$$U \subseteq \left(U^{\perp}\right)^{\perp}$$

ist auch klar. Sei $v \in V$, $v \notin U$. Dann kann man eine Basis $u_1, \ldots, u_r$ von U zu einer Basis $u_1, \ldots, u_r, v, v_1, \ldots, v_\ell$ von V ergänzen. Die Linearform v^* verschwindet auf U und gehört daher zu $U^{\perp}$. Wegen

$$v^*(v) = 1 \neq 0$$

ist $v \notin \left(U^{\perp}\right)^{\perp}$.

(4). Es sei $f_1, \ldots, f_r$ eine Basis von F und es sei

$$\varphi \colon V \longrightarrow K^r$$

die aus diesen Linearformen zusammengesetzte Abbildung. Dabei ist

$$F^{\perp} = \operatorname{kern} \varphi .$$

Wenn die Abbildung φ nicht surjektiv wäre, so wäre bild φ ein echter Untervektorraum von K^r und hätte maximal die Dimension $r-1$. Es sei W ein $r-1$-dimensionaler Untervektorraum mit

$$\operatorname{bild} \varphi \subseteq W \subseteq K^r .$$

Nach Lemma 14.5 gibt es eine von 0 verschiedene Linearform

$$g \colon K^r \longrightarrow K,$$

deren Kern genau W ist. Sei $g = \sum_{i=1}^{r} a_i p_i$. Dann ist

$$\sum_{i=1}^{r} a_i f_i = g \circ \varphi = 0,$$

was der linearen Unabhängigkeit der f_i widerspricht. Also ist φ surjektiv ist und die Aussage folgt aus Satz 11.5. □

Korollar 15.6. *Es sei V ein endlichdimensionaler K-Vektorraum und $U \subseteq V$ ein Untervektorraum. Dann gibt es Linearformen $L_1, \ldots, L_r$ auf V mit*

$$U = \bigcap_{i=1}^{r} \operatorname{kern} L_i .$$

Jeder Untervektorraum $U \subseteq V$ ist der Kern einer linearen Abbildung und jeder Untervektorraum des K^n ist der Lösungsraum eines linearen Gleichungssystems.

Beweis. Siehe Aufgabe 15.7. □

Die duale Abbildung

Definition 15.7. Es sei K ein Körper, V und W seien K-Vektorräume und

$$\varphi \colon V \longrightarrow W$$

sei eine K-lineare Abbildung. Dann heißt die Abbildung

$$\varphi^* \colon \operatorname{Hom}_K (W, K) = W^* \longrightarrow \operatorname{Hom}_K (V, K) = V^*, \, f \longmapsto f \circ \varphi,$$

die *duale Abbildung* zu φ.

Diese Zuordnung beruht also einfach darauf, dass man die Hintereinanderschaltung

$$V \xrightarrow{\varphi} W \xrightarrow{f} K$$

betrachtet.

Lemma 15.8. *Es seien U, V, W Vektorräume über einem Körper K und es seien*

$$\psi\colon U \longrightarrow V$$

und

$$\varphi\colon V \longrightarrow W$$

lineare Abbildungen. Dann gelten folgende Aussagen.

(1) *Für die duale Abbildung gilt*

$$(\varphi \circ \psi)^* = \psi^* \circ \varphi^* .$$

(2) *Für die Identität auf V ist*

$$\mathrm{Id}_V{}^* = \mathrm{Id}_{V^*} .$$

(3) *Wenn ψ surjektiv ist, so ist ψ^* injektiv.*
(4) *Wenn ψ injektiv ist, so ist ψ^* surjektiv.*

Beweis. (1). Für $f \in W^*$ ist

$$(\varphi \circ \psi)^* (f) = f \circ (\varphi \circ \psi) = (f \circ \varphi) \circ \psi = \varphi^*(f) \circ \psi = \psi^*(\varphi^*(f)).$$

(2) folgt direkt aus $f \circ \mathrm{Id}_V = f$.

(3). Sei $f \in V^*$ und

$$\psi^*(f) = 0.$$

Wegen der Surjektivität von ψ gibt es für jedes $v \in V$ ein $u \in U$ mit $\psi(u) = v$. Daher ist

$$f(v) = f(\psi(u)) = (\psi^*(f))(u) = 0$$

und f ist selbst die Nullabbildung. Nach Lemma 11.3 ist ψ^* injektiv.

(4). Die Voraussetzung bedeutet, dass man $U \subseteq V$ als Untervektorraum auffassen kann. Man kann daher

$$V = U \oplus U'$$

mit einem weiteren K-Untervektorraum $U' \subseteq V$ schreiben. Eine Linearform

$$g\colon U \longrightarrow K$$

lässt sich zu einer Linearform

$$\tilde{g}\colon V \longrightarrow K$$

fortsetzen, indem man beispielsweise $\tilde{g}$ auf U' als die Nullform ansetzt. Dies bedeutet die Surjektivität. □

Lemma 15.9. *Es sei K ein Körper und seien V und W Vektorräume über K, wobei W endlichdimensional sei. Es sei*

$$\varphi\colon V \longrightarrow W$$

eine lineare Abbildung. Dann gibt es Vektoren $w_1, \ldots, w_n \in W$ und Linearformen $f_1, \ldots, f_n$ auf V mit[1]

$$\varphi = f_1 w_1 + f_2 w_2 + \cdots + f_n w_n .$$

Beweis. Es sei $w_1, \ldots, w_n$ eine Basis von W und $w_1^*, \ldots, w_n^*$ die zugehörige Dualbasis. Wir setzen

$$f_i = \varphi^*(w_i^*) = w_i^* \circ \varphi .$$

Dann ist für jeden Vektor $v \in V$

$$\begin{aligned} \left(\sum_{i=1}^n f_i w_i \right)(v) &= \sum_{i=1}^n f_i(v) w_i \\ &= \sum_{i=1}^n (w_i^* \circ \varphi)(v) w_i \\ &= \sum_{i=1}^n w_i^*(\varphi(v)) w_i \\ &= \varphi(v), \end{aligned}$$

wobei die letzte Gleichung auf Lemma 14.11 beruht. □

Lemma 15.10. *Es sei K ein Körper und sei V ein n-dimensionaler K-Vektorraum mit einer Basis $\mathfrak{v} = v_1, \ldots, v_n$ und sei W ein m-dimensionaler Vektorraum mit einer Basis $\mathfrak{w} = w_1, \ldots, w_m$. Es seien $v_1^*, \ldots, v_n^*$ bzw. $w_1^*, \ldots, w_m^*$ die zugehörigen Dualbasen. Es sei*

$$\varphi \colon V \longrightarrow W$$

eine lineare Abbildung, die bezüglich der gegebenen Basen durch die $m \times n$-Matrix

$$M = M_{\mathfrak{w}}^{\mathfrak{v}}(\varphi) = (a_{ij})_{ij}$$

beschrieben werde. Dann wird die duale Abbildung

$$\varphi^* \colon W^* \longrightarrow V^*$$

bezüglich der Dualbasen von V^* bzw. W^* durch die transponierte Matrix $(M_{\mathfrak{w}}^{\mathfrak{v}}(\varphi))^{tr}$ beschrieben.

Beweis. Die Behauptung bedeutet die Gleichheit[2]

$$\varphi^*(w_j^*) = \sum_{i=1}^n a_{ji} v_i^*$$

[1] Die fw sind im Sinne von Bemerkung 14.4 zu verstehen.

[2] In W gelten die Beziehungen $\varphi(v_k) = \sum_{r=1}^m a_{rk} w_r$, dort steht der Laufindex also vorne; bei der behaupteten Gleichung steht der Laufindex hinten, was dem Transponieren entspricht.

in V^*. Dies kann man auf der Basis v_k, $k = 1, \ldots, n$, überprüfen. Es ist einerseits

$$\begin{aligned} \left(\varphi^*(w_j^*)\right)(v_k) &= w_j^*\left(\varphi(v_k)\right) \\ &= w_j^*\left(\sum_{r=1}^m a_{rk} w_r\right) \\ &= \sum_{r=1}^m a_{rk} w_j^*(w_r) \\ &= a_{jk} \end{aligned}$$

und andererseits ebenso

$$\left(\sum_{i=1}^n a_{ji} v_i^*\right)(v_k) = a_{jk}.$$

$\square$

Das Bidual

Definition 15.11. Es sei K ein Körper und V ein K-Vektorraum. Dann nennt man den Dualraum des Dualraums V^*, also

$$(V^*)^*$$

das *Bidual* von V.

Lemma 15.12. *Es sei K ein Körper und V ein K-Vektorraum. Dann gibt es eine natürliche injektive lineare Abbildung*

$$\Psi\colon V \longrightarrow (V^*)^*, \, v \longmapsto (f \mapsto f(v)).$$

Wenn V endlichdimensional ist, so ist Ψ ein Isomorphismus.

Beweis. Sei $v \in V$ fixiert. Zuerst ist zu zeigen, dass $\Psi(v)$ eine Linearform auf dem Dualraum V^* ist. Offenbar ist $\Psi(v)$ eine Abbildung von V^* nach K. Die Additivität ergibt sich aus

$$(\Psi(v))(f_1 + f_2) = (f_1 + f_2)(v) = f_1(v) + f_2(v) = (\Psi(v))(f_1) + (\Psi(v))(f_2),$$

wobei wir die Definition der Addition auf dem Dualraum verwendet haben. Die Verträglichkeit mit der Skalarmultiplikation ergibt sich entsprechend mittels

$$(\Psi(v))(sf) = (sf)(v) = s(f(v)) = s((\Psi(v))(f)).$$

Zum Beweis der Additivität der Gesamtabbildung seien $v, w \in V$. Es ist die Gleichheit

$$\Psi(v + w) = \Psi(v) + \Psi(w)$$

zu zeigen. Da dies eine Gleichheit in $(V^*)^*$ ist, also insbesondere eine Gleichheit von Abbildungen, sei $f \in V^*$ beliebig. Dann folgt die Additivität aus

$$(\Psi(v + w))(f) = f(v + w) = f(v) + f(w) = (\Psi(v))(f) + (\Psi(w))(f).$$

Entsprechend ergibt sich die skalare Verträglichkeit aus

$$(\Psi(sv))(f) = f(sv) = s(f(v)) = s((\Psi(v))(f)).$$

Zum Nachweis der Injektivität sei $v \in V$ gegeben mit $\Psi(v) = 0$. D.h. für alle Linearformen $f \in V^*$ ist $f(v) = 0$. Dann ist aber nach Lemma 14.6 schon

$$v = 0$$

und nach dem Injektivitätskriterium ist Ψ injektiv.

Im endlichdimensionalen Fall folgt die Bijektivität aus der Injektivität und aus Korollar 13.12. $\square$

Die Abbildung Ψ bildet also einen Vektor v auf die *Auswertung* (oder *Auswertungsabbildung*) ab, die eine Linearform f an der Stelle v auswertet.