Prof. Dr. H. Brenner **Osnabrück SS 2018**

Lineare Algebra und analytische Geometrie II

Arbeitsblatt 40

Übungsaufgaben

Aufgabe 40.1. Berechne

$$\left\langle \begin{pmatrix} -8 \\ 3 \\ -3 \\ 5 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 7 \\ -4 \end{pmatrix} \right\rangle$$

in einem vierdimensionalen Standard-Minkowski-Raum.

Aufgabe 40.2. Es sei V ein Minkowski-Raum.

(1) Zeige, dass ein skalares Vielfaches eines zeitartigen (raumartigen, lichtartigen) Vektors wieder zeitartig (raumartig, lichtartig) ist.
(2) Zeige, dass die Summe von zwei zeitartigen (raumartigen, lichtartigen) Vektoren im Allgemeinen nicht wieder zeitartig (raumartig, lichtartig) ist.

Aufgabe 40.3.*

Ist die Einschränkung einer Minkowski-Form im $\mathbb{R}^n$ auf einen $n-1$-dimensionalen Untervektorraum wieder eine Minkowski-Form?

Aufgabe 40.4. Es sei V ein Minkowski-Raum mit der Minkowski-Form $\langle -, - \rangle$. Zeige, dass es zu jedem Beobachtervektor $v \in V$ eine direkte Summenzerlegung

$$V = \mathbb{R}v \oplus (\mathbb{R}v)^{\perp}$$

gibt, wobei die Einschränkung der Minkowski-Form auf $\mathbb{R}v$ negativ definit und die Einschränkung der Minkowski-Form auf $(\mathbb{R}v)^{\perp}$ positiv definit ist.

Aufgabe 40.5. Der $\mathbb{R}^2$ sei mit der Standard-Minkowski-Form versehen. Zeige, dass $\begin{pmatrix} \frac{7}{24} \\ \frac{25}{24} \end{pmatrix}$ der Geschwindigkeitsvektor eines Beobachters ist. Bestimme die Raumkomponente zu diesem Vektor.

Aufgabe 40.6.*

Der $\mathbb{R}^2$ sei mit der Standard-Minkowski-Form versehen. Zeige, dass $\begin{pmatrix} \frac{\sqrt{5}}{2} \\ \frac{3}{2} \end{pmatrix}$ ein Beobachtervektor ist und bestimme die Raumkomponente dazu.

Die Hyperbelfunktionen werden in Analysis 1 eingeführt.

Aufgabe 40.7. Der $\mathbb{R}^2$ sei mit der Standard-Minkowski-Form versehen. Zeige, dass zu $\alpha \in \mathbb{R}$ der Vektor $\begin{pmatrix} \sinh \alpha \\ \cosh \alpha \end{pmatrix}$ der Geschwindigkeitsvektor eines Beobachters ist. Bestimme die Raumkomponente zu diesem Vektor.

Aufgabe 40.8.*

Der $\mathbb{R}^2$ sei mit der Standard-Minkowski-Form versehen. Zeige, dass zu $z \in \mathbb{R}$, $z \neq 0$, die Vektoren

$$\frac{1}{2} \begin{pmatrix} z - \frac{1}{z} \\ z + \frac{1}{z} \end{pmatrix} \text{ und } \frac{1}{2} \begin{pmatrix} -z + \frac{1}{z} \\ z + \frac{1}{z} \end{pmatrix}$$

Geschwindigkeitsvektoren eines Beobachters sind. Zeige, dass jeder Beobachtervektor diese Gestalt besitzt.

Aufgabe 40.9.*

Es sei V ein Minkowski-Raum mit der Minkowski-Form $\langle -, - \rangle$ und es seien v, w gleichgerichtete Beobachtervektoren. Zeige $\langle v, w \rangle < 0$.

Aufgabe 40.10. Es sei V ein Minkowski-Raum. Zeige, dass die Menge der Beobachtervektoren in zwei Wegzusammenhangskomponenten zerfallen. Zeige, dass zwei Beobachtervektoren v, w genau dann zur gleichen Komponente gehören, wenn $\langle v, w \rangle < 0$ ist.

Aufgabe 40.11. Es sei V ein Minkowski-Raum mit der Minkowski-Form $\langle -, - \rangle$ und es seien v, w zeitartige Vektoren. Zeige die Abschätzung

$$\langle v, w \rangle^2 \geq \langle v, v \rangle \cdot \langle w, w \rangle .$$

Aufgabe 40.12. In einem vierdimensionalen Minkowski-Raum besitze ein Ereignis die Koordinaten $\begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix}$ bezüglich einer Minkowski-Basis. Bestimme die Zerlegung in Raum- und Zeitkomponente dieses Ereignisses bezüglich des Beobachtervektors $\begin{pmatrix} \frac{3}{4} \\ 0 \\ 0 \\ \frac{5}{4} \end{pmatrix}$.

Aufgabe 40.13. In einem vierdimensionalen Minkowski-Raum seien zwei Beobachter B und C mit den zugehörigen Raumkomponenten V_B und V_C gegeben. Was kann man über $V_B \cap V_C$ sagen?

Aufgabe 40.14. Es sei V ein zweidimensionaler Minkowski-Raum.

(1) Zeige, dass es eine Basis von V derart gibt, dass die beiden Diagonaleinträge in der Gramschen Matrix bezüglich dieser Basis gleich 1 sind.

(2) Zeige, dass es eine Basis von V derart gibt, dass die beiden Diagonaleinträge in der Gramschen Matrix bezüglich dieser Basis gleich -1 sind.
(3) Zeige, dass es eine Basis von V derart gibt, dass die beiden Diagonaleinträge in der Gramschen Matrix bezüglich dieser Basis gleich 0 sind.

Aufgabe 40.15. Bestimme den Geschwindigkeitsvektor eines Beobachters B in einem Minkowski-Raum relativ zu sich selbst und die Relativgeschwindigkeit.

Aufgabe 40.16. Es seien B und C Beobachter mit den Vierergeschwindigkeiten

$$v_B = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \\ \sqrt{5} \end{pmatrix}$$

und

$$v_C = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \\ \sqrt{2} \end{pmatrix}.$$

(1) Bestimme den Geschwindigkeitsvektor von C relativ zu B.
(2) Bestimme den Geschwindigkeitsvektor von B relativ zu C.
(3) Bestimme die Relativgeschwindigkeit der beiden Beobachter.

Aufgabe 40.17. Zeige, dass die Relativgeschwindigkeit von zwei Beobachtern in einem Minkowski-Raum zwischen 0 und 1 liegt. Kann 1 erreicht werden? Was ist die physikalische Signifikanz dieser Aussage?

Aufgaben zum Abgeben

Aufgabe 40.18. (1 Punkt)

Berechne

$$\left\langle \begin{pmatrix} 5 \\ 8 \\ -11 \\ -13 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -4 \\ -9 \\ 17 \\ 6 \end{pmatrix} \right\rangle$$

in einem vierdimensionalen Standard-Minkowski-Raum.

Aufgabe 40.19. (4 Punkte)

Der $\mathbb{R}^3$ sei mit der Standard-Minkowski-Form versehen. Zeige, dass $\begin{pmatrix} \frac{\sqrt{6}}{3} \\ \frac{1}{3} \\ \frac{4}{3} \end{pmatrix}$ ein Beobachtervektor ist und bestimme eine Orthonormalbasis der Raumkomponente dazu.

Aufgabe 40.20. (4 Punkte)

In einem vierdimensionalen Minkowski-Raum besitze ein Ereignis die Koordinaten $\begin{pmatrix} -1 \\ 5 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix}$ bezüglich einer Minkowski-Basis. Bestimme die Zerlegung in Raum- und Zeitkomponente dieses Ereignisses bezüglich des Beobachtervektors $\begin{pmatrix} 0 \\ \frac{5}{12} \\ 0 \\ \frac{13}{12} \end{pmatrix}$.

Aufgabe 40.21. (6 (2+2+2) Punkte)

Der $\mathbb{R}^3$ sei mit der Standard-Minkowski-Form versehen.

(1) Man gebe eine Basis des $\mathbb{R}^3$ an mit der Eigenschaft, dass alle Diagonaleinträge in der Gramschen Matrix bezüglich dieser Basis gleich 1 sind.
(2) Man gebe eine Basis des $\mathbb{R}^3$ an mit der Eigenschaft, dass alle Diagonaleinträge in der Gramschen Matrix bezüglich dieser Basis gleich -1 sind.
(3) Man gebe eine Basis des $\mathbb{R}^3$ an mit der Eigenschaft, dass alle Diagonaleinträge in der Gramschen Matrix bezüglich dieser Basis gleich 0 sind.

Aufgabe 40.22. (3 (1+1+1) Punkte)

Es seien B und C Beobachter mit den Vierergeschwindigkeiten

$$v_B = \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 5 \\ \sqrt{39} \end{pmatrix}$$

und

$$v_C = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

(1) Bestimme den Geschwindigkeitsvektor von C relativ zu B.
(2) Bestimme den Geschwindigkeitsvektor von B relativ zu C.
(3) Bestimme die Relativgeschwindigkeit der beiden Beobachter.