MATHEMATISCHE ANNALEN

HERAUSGEGEBEN

VON

Kurt, Gottwied).

A. CLEBSCH UND **C. NEUMANN,**

PROFESSOR IN GÖTTINGEN. PROFESSOR IN LEIPZIG.

ERSTER BAND.

LEIPZIG,

DRUCK UND VERLAG VON B. G. TEUBNER.

1869.

1870, Mar. 9.
Gift of
Thomas Owen Ward,
of New York.

Inhalt des ersten Bandes.

1. Heft.

2. Heft.

3. Heft.

4. Heft.

MATHEMATISCHE ANNALEN

HERAUSGEGEBEN

VON

A. CLEBSCH UND C. NEUMANN,

PROFESSOR IN GÖTTINGEN. PROFESSOR IN LEIPZIG.

I. Band. 1. Heft.

LEIPZIG,

DRUCK UND VERLAG VON B. G. TEUBNER.

1869.

1869. April. 20
Gift of Thos. W. Ward, of New York.

PROSPECTUS.

MATHEMATISCHE ANNALEN

HERAUSGEGEBEN

VON

A. CLEBSCH UND **C. NEUMANN,**
PROFESSOR IN GÖTTINGEN. PROFESSOR IN LEIPZIG.

DRUCK UND VERLAG VON B. G. TEUBNER IN LEIPZIG.

Bei dem stets wachsenden Umfange der mathematischen Disciplinen und bei der regen Production, welche dieselben seit Jahrzehnten in Deutschland hervorgerufen haben, wird schon seit längerer Zeit die Gründung eines neuen mathematischen Journals von rein wissenschaftlicher Haltung vielseitig nicht nur für wünschenswerth, sondern zur Erfüllung eines dringenden Bedürfnisses selbst für nothwendig gehalten. In Uebereinstimmung mit dieser Ansicht fanden sich die beiden Unterzeichneten bereit, die Redaction einer solchen Zeitschrift zu übernehmen, welche unter dem Titel „Mathematische Annalen" in zwanglosen Heften erscheinen soll.

Dieselbe wird allen Originalarbeiten rein wissenschaftlichen Inhalts geöffnet sein, welche für das Gebiet der Mathematik selber oder für ihre wissenschaftlichen Anwendungen in irgend einer Weise förderlich sind. Dagegen geht die Absicht der Herausgeber weder auf Abfassung literarischer Berichte, noch auf Recensionen, um so weniger, als dieselben in einer in dem gleichen Verlage erscheinenden Zeitschrift bereits in ausgezeichneter Weise vertreten sind. Andererseits glauben die Unterzeichneten allerdings den Bedürfnissen des Publikums in so weit Rechnung tragen zu sollen, als sie den Wunsch ausdrücken, die ihnen übersandten Aufsätze (durch geeignete Citate oder auch wohl durch kurze einleitende Worte) dem allgemeinen Verständniss möglichst nahe gebracht zu sehen.

Da Redaction und Verlagshandlung vor Allem die Dienste im Auge haben, welche sie der Wissenschaft zu leisten bestrebt sind, so wird es sowohl im Interesse der Autoren, als im Interesse des Publikums ganz vorzugsweise ihre Sorge sein, alle ihnen etwa anzuvertrauenden Arbeiten möglichst schnell zum Druck zu befördern. Um eine schnellere Publication zu ermöglichen, wird daher auch von einem bestimmten Mass für die Grösse eines Heftes Umgang genommen; dagegen soll jeder Band etwa die Stärke von 40 Bogen Lexicon-Octav erhalten und zu dem Preise von 5⅓ Thlr. berechnet werden. Alle Buchhandlungen und Postanstalten nehmen Bestellungen an. Das erste Heft des I. Bandes ist soeben erschienen und in allen Buchhandlungen zur Ansicht zu haben.

Leipzig, im December 1868.

B. G. Teubner.

Inhalt des 1. Heftes des I. Bandes.

Verzeichniss

derjenigen Herren, welche den Annalen ihre Unterstützung in Aussicht gestellt haben.

Herr Aronhold in Berlin.
" August in Berlin.
" Bachmann in Breslau.
" R. Baltzer in Dresden.
" Eugenio Beltrami in Bologna.
" Bessell in Petersburg.
" Bessell in Hildesheim.
" Betti in Pisa.
" Paul du Bois-Reymond Heidelberg.
" J. Bolzani in Kasan.
" Brill in Giessen.
" Brioschi in Mailand.
" C. Bruhns in Leipzig.
" Felice Casorati in Pavia.
" Cayley in Cambridge.
" Clausius in Würzburg.
" L. Cremona in Mailand.
" v. Drach in Marburg.
" Durège in Prag.
" A. Enneper in Göttingen.
" Fiedler in Zürich.
" Gehring in Bonn.
" Geiser in Zürich.
" Gordan in Giessen.
" Grossmann in Stuttgart.
" Gugler in Stuttgart.
" Hankel in Erlangen.
" Harbordt in Giessen.
" E. Heine in Halle.
" Otto Hesse in München.
" E. Jochmann in Berlin.
" de Jonquières in Paris.
" Camille Jordan in Paris.
" Kinkelin in Basel.
" Königsberger in Greifswald.
" A. Korkin in Petersburg.
" H. Kortum in Bonn.
" M. A. Kowalski in Kasan.
" L. Lindelöf in Helsingfors.

Herr R. Lipschitz in Bonn.
" Lommel in Erlangen.
" Lüroth in Carlsruhe.
" A. Mayer in Leipzig.
" Maxwell in Schottland.
" Minding in Dorpat.
" Minnigerode in Göttingen.
" L. Oettinger in Freiburg i. B.
" Okatow in Petersburg.
" Peters in Altona.
" Rankine in Glasgow.
" M. Reiss in Frankfurt a. M.
" E. Reusch in Tübingen.
" Reuschle in Stuttgart.
" Th. Reye in Zürich.
" F. Richelot in Königsberg.
" O. Röthig in Berlin.
" Scheibner in Leipzig.
" W. Schell in Carlsruhe.
" Schiaparelli in Mailand.
" O. Schlömilch in Dresden.
" E. Schröder in Pforzheim (früher in Zürich.)
" H. Schröter in Breslau.
" L. Sohncke in Königsberg.
" Spitzer in Wien.
" Stern in Göttingen.
" Sturm in Bromberg.
" Thomae in Halle.
" William Thomson in Glasgow.
" de St. Venant in St. Ouen bei Vendôme.
" K. VonderMühll in Leipzig.
" H. Weber in Heidelberg.
" A. Weiler in Mannheim.
" Chr. Wiener in Carlsruhe.
" P. Zech in Stuttgart.
" Zehfuss in Frankfurt a. M.
" H. G. Zeuthen in Copenhagen.
" Zöppritz in Giessen.

Ueber die Integration der partiellen Differentialgleichung:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + k^2 u = 0.$$

Von Dr. H. Weber in Heidelberg.

Die Lösung einer beträchtlichen Anzahl physikalischer Probleme hängt bekanntlich ab von der Integration der Gleichung:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + k^2 u = 0,$$

so die Theorie der Bewegung der Wärme in cylindrischen Räumen, die unendlich kleinen Bewegungen einer Flüssigkeit in cylindrischen Gefässen, die transversalen Schwingungen gespannter Membranen und elastischer Platten.

Die Art und Weise aber, wie in diesen Problemen die Integration jener Gleichung gefordert wird, ist eine eigenthümliche, und in einigen Punkten wesentlich verschieden von der Aufgabe der Integration anderer partieller Differentialgleichungen wie z. B. der Potentialgleichung, oder der Gleichung, welche die kleinste Oberfläche bestimmt.

In der Regel nämlich ist die Constante k, welche in der vorliegenden Gleichung enthalten ist, nicht von vorn herein gegeben, sondern dieselbe soll nach vollführter Integration so bestimmt werden, dass das Integral gewissen Grenzbedingungen genügt, welche, allgemein zu reden, d. h. bei beliebigen Werthen von k mit der Differentialgleichung unverträglich sind, z. B. dass das Integral oder dessen nach der Normale genommener Differentialquotient an einer geschlossenen Curve gleich Null sei ohne identisch gleich Null zu sein. Dadurch ist k im Allgemeinen als Wurzel einer noch zu suchenden transcendenten Gleichung bestimmt. Die Gesammtheit der unendlich vielen Lösungen, welche auf diese Weise, derselben Grenzbedingung gemäss, bestimmt worden sind, soll dann mit Hülfe gewisser constanten Coëfficienten so zu einer unendlichen Reihe gruppirt werden, dass durch dieselbe eine willkürliche Function von zwei Veränderlichen, der Anfangszustand, dargestellt werde.

Die Lösbarkeit dieser durch die Physik gestellten Aufgaben setzt nun gewisse allgemeine Eigenschaften der Integrale jener Gleichung voraus, welche eine gewisse Analogie derselben mit den trigonometrischen Functionen erkennen lassen, in welche sie auch geradezu übergehen, wenn man sich auf eine unabhängige Variable beschränkt. Dieses eigenthümliche Verhalten der Integrale ohne Rücksicht auf besondere Probleme zu untersuchen, ist der nächste Zweck dieses Aufsatzes. Die Mittel und Wege der Untersuchung sind im Wesentlichen dieselben, die Riemann bei der Gleichung $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$ angewandt hat*), führen aber vielfach zu anderen Resultaten.

Die Möglichkeit der wirklichen Ausführung der Integration hängt natürlich hauptsächlich von der Beschaffenheit der Begrenzung ab. In den Fällen, in welchen die Aufstellung der Integrale bis jetzt gelungen ist, wird die Begrenzung gebildet durch ein Rechteck, wobei die Integrale durch trigonometrische Functionen darstellbar sind, oder durch einen Kreis, wobei die Integrale durch die Bessel'schen Functionen und durch trigonometrische Functionen ausdrückbar sind. Ich habe nun im zweiten Theile meiner Arbeit nach anderen Formen der Begrenzung gesucht, bei denen ein ähnliches Verfahren zum Ziele führen könnte und dabei hat sich die Begrenzung durch confocale Kegelschnitte ergeben. Für den Fall confocaler Parabeln lässt sich die definitive Form der Integrale durch hypergeometrische Reihen oder bestimmte Integrale darstellen, während im Falle confocaler Ellipsen ich mich damit begnügen musste, das Problem auf gewöhnliche Differentialgleichungen zweiter Ordnung zurückzuführen, da es mir nicht gelang, die Lösungen dieser Gleichungen durch Reihen, die einem übersichtlichen Gesetze folgen, auszudrücken.

Als ich diese Abhandlung fast vollendet hatte, gelangte ich zur Kenntniss einer Untersuchung von Mathieu im neuesten Bande des Liouville'schen Journals, wo er sich mit der Integration für elliptische Begrenzung beschäftigt. Die Integration ist dort durch Reihen bewerkstelligt, von denen mit grossem Fleisse eine beträchtliche Anzahl Glieder berechnet sind, für welche aber ebenfalls kein allgemeines Gesetz angegeben ist. Diese Untersuchungen mögen daher für den Physiker immerhin von grossem Werthe sein, mathematisch aber scheint mir das Problem dadurch der Lösung wenig näher gebracht zu sein, als durch die Aufstellung der gewöhnlichen Differentialgleichungen selbst.

---

*) Grundlagen für eine allgemeine Theorie der Functionen einer veränderlichen complexen Grösse.

§. 1.

Ich beginne die Untersuchung mit der Entwickelung eines Satzes über die Stetigkeit einer Function u, welche der Differentialgleichung

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + k^2 u = 0 \tag{1}$$

genügt, welcher ganz analog ist einem Satze über die Integrale der Gleichung $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$, den **Riemann** im 10ten Abschnitt seiner Doctordissertation bewiesen hat.

Die Grundlage dieses Satzes bildet das bekannte Theorem:

Sind X, Y zwei Functionen von x, y, welche innerhalb eines begrenzten Stückes der xy-Ebene nicht in Linien unstetig sind und in einzelnen Punkten nur so unstetig werden, dass mit der Entfernung ϱ eines veränderlichen Punktes vom Unstetigkeitspunkt zugleich ϱX und ϱY unendlich klein werden, so ist:

$$\int\int\left(\frac{\partial X}{\partial x} + \frac{\partial Y}{\partial y}\right) dx\, dy = -\int\left(X\frac{\partial x}{\partial p} + Y\frac{\partial y}{\partial p}\right) ds. \tag{2}$$

Die Integration auf der linken Seite erstreckt sich über das Innere, die auf der rechten Seite über die Begrenzung des Flächenstücks, in welchem X und Y die Bedingungen der Stetigkeit erfüllen. Dabei bedeutet ∂p die Differentiation nach der nach innen gerichteten Normale, ds das Element der Begrenzung, so positiv gerechnet, dass die innere Normale zu ds so liegt, wie die positive y-Axe zur positiven x-Axe.

Dies vorausgesetzt verstehen wir unter u und v zwei Functionen, welche der Differentialgleichung (1) genügen, und setzen:

$$X = u\frac{\partial v}{\partial x} - v\frac{\partial u}{\partial x}\quad, \qquad Y = u\frac{\partial v}{\partial y} - v\frac{\partial u}{\partial y},$$

$$\frac{\partial X}{\partial x} + \frac{\partial Y}{\partial y} = u\left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2}\right) - v\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right) = 0.$$

Setzen wir voraus, dass v mit seinen ersten Derivirten im Innern einer Fläche T durchaus stetig, und in derselben Fläche u nur in einzelnen Punkten und nur so unstetig sei, dass $\varrho\frac{\partial u}{\partial \varrho}$ gleichzeitig mit der Entfernung ϱ eines variablen Punktes vom Unstetigkeitspunkt unendlich klein werde, dass endlich an jeder beliebigen Linie l im Innern der Fläche T die Derivirten von u nach der Normale dieser Linie, $\frac{\partial u}{\partial \pi}$, abgesehen von einzelnen Punkten, zu beiden Seiten der Linie l einander gleich seien, so ist das Theorem (2) anwendbar auf die Fläche T, was man sofort einsieht, wenn man die Unstetigkeitspunkte durch Kreise mit dem Radius ϱ, die Unstetigkeitslinien durch andere Curven λ zuerst von der Fläche T ausschliesst, und darauf die Radien ϱ dieser

Kreise unendlich klein werden, die Curven λ beiderseits den Unstetigkeitslinien sich unendlich annähern lässt*). Man gelangt alsdann zu der Gleichung:

$$\int \left(u \frac{\partial v}{\partial p} - v \frac{\partial u}{\partial p} \right) ds = 0 \,. \tag{3}$$

Ist v in einem Punkt im Innern der Fläche unstetig, so muss dieser Punkt durch eine beliebige geschlossene Curve von dem Flächenstück ausgeschlossen werden, und diese Curve zur Begrenzung zugezogen werden; oder: das Integral (3) über die Begrenzung einer Fläche erstreckt, in welcher v an einer Stelle unstetig wird, ändert seinen Werth nicht, wenn die Begrenzung beliebig eingeengt wird, ohne dass der Unstetigkeitspunkt von v ausgeschlossen wird.

Wir suchen nun für v ein geeignetes partikuläres Integral der Gleichung (1), welches an einer Stelle unstetig wird. Ein solches erhalten wir durch die Voraussetzung, dass v allein abhängig sein soll von der Entfernung eines veränderlichen Punktes xy und eines festen Punktes $x_0 y_0$, also von

$$\varrho = \sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2} \,.$$

Transformirt man die Gleichung (1) auf Polar-Coordinaten, deren Mittelpunkt $x_0 y_0$ ist, so erhält man unter dieser Voraussetzung für v eine gewöhnliche Differentialgleichung 2^{ter} Ordnung, diejenige Gleichung, deren eines partikuläres Integral die Bessel'sche Function der 0^{ten} Ordnung $J^{(0)}_{(k\varrho)}$ ist. Diese Function ist aber für alle Werthe von ϱ stetig, also für unseren Zweck nicht brauchbar. Die Gleichung hat aber noch eine andere partikuläre Lösung, welche für $\varrho = 0$ unendlich wird, welcher Herr C. Neumann die Form gegeben hat:**)

$$Y^{(0)}_{(k\varrho)} = J^{(0)}_{(k\varrho)} \log k\varrho + E^{(0)}_{(k\varrho)} \,,$$

wo $J^{(0)}$ die Bessel'sche Function 0^{ter} Ordnung, also eine durchaus stetige Function mit stetigen Derivirten, $E^{(0)}$ ebenfalls eine durchaus stetige Function mit stetigen Derivirten, welche durch die immer convergente Reihe:

$$E^{(0)}_{(z)} = 2\left(J^{(2)}_{(z)} - \tfrac{1}{2} J^{(4)}_{(z)} + \tfrac{1}{3} J^{(6)}_{(z)} - \cdots\right)$$

oder durch das bestimmte Integral:

$$E^{(0)}_{(z)} = \int_0^{\pi} \frac{\cos(z \sin\omega)}{\pi} \log(4\cos^2\omega)\, d\omega$$

ausgedrückt werden kann.

Diese Function $Y^{(0)}_{(k\varrho)}$ soll nun an die Stelle von v in die Gleichung (3) eingesetzt werden, und es ergibt sich dann, dass das Integral auf

*) Vrgl. Riemann l. c. §. 10.

**) Neumann, Theorie der Bessel'schen Functionen. Leipzig 1867.

der linken Seite von (3), ausgedehnt über eine beliebige, den Punkt $x_0 y_0$ einschliessende Curve, gleich ist demselben Integral über einen Kreis, dessen Mittelpunkt in $x_0 y_0$ liegt, und dessen Radius r ist. Dieses letztere Integral über den Kreis wird nun, da an der Peripherie des Kreises $Y^{(0)}$ und $\frac{\partial Y^{(0)}}{\partial p} = -\frac{\partial Y^0}{\partial \varrho}$ constant sind:

$$(4) \qquad -\left(\frac{\partial Y^{(0)}_{(kr)}}{\partial r}\right)\int u\,ds - Y^0_{(kr)}\int \frac{\partial u}{\partial p}\,ds\,.$$

Nun ergibt die Gleichung (2), wenn man darin $X = \frac{\partial u}{\partial x}$, $Y = \frac{\partial u}{\partial y}$ setzt, und sie auf die Fläche des Kreises anwendet mit Rücksicht auf (1):

$$\int \frac{\partial u}{\partial p}\,ds = k^2 \int\int u\,dx\,dy\,.$$

Lässt man nun r sehr klein werden, so kann man unter die Integralzeichen an die Stelle von u den Werth u_0 setzen, den diese Function im Punkt $x_0 y_0$ annimmt, und dann ergibt sich für das Integral (4):

$$-\frac{\partial Y^{(0)}_{(kr)}}{\partial r}\,2\pi r u_0 - Y^{(0)}_{(kr)}\,k^2 r^2 \pi u_0\,.$$

Und lässt man nun r in 0 übergehen, so werden alle Glieder unendlich klein bis auf ein einziges, welches den Werth erhält:

$$-2\pi u_0\,,$$

wie aus der Bedeutung von $Y^{(0)}$ hervorgeht. Demnach erhält man die Gleichung:*)

$$(5) \qquad u_0 = \frac{1}{2\pi}\int\left(Y^{(0)}_{(k\varrho)}\frac{\partial u}{\partial p} - u\frac{\partial Y^{(0)}_{(k\varrho)}}{\partial p}\right)ds\,,$$

wo das Integral rechts zu erstrecken ist über die Begrenzung eines den Punkt $x_0 y_0$ einschliessenden Flächenstückes, in welchem u die oben aufgestellten Stetigkeitsbedingungen erfüllt.

Diese Gleichung ist ganz ebenso gebildet und gestattet die nämlichen Schlüsse, wie die von Riemann für die Lösungen der Gleichung $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$ aufgestellte, nur ist der dort vorkommende Logarithmus hier durch die Function Y^0 vertreten. Die Gleichung (5) könnte nur für solche Punkte $x_0 y_0$ ungültig sein, in denen u_0 unstetig ist; da sie aber in unmittelbarer Nähe solcher Punkte durchaus gültig ist, so können wir mit Rücksicht auf die Bildungsweise der Differentialquotienten der Function $Y^{(0)}$, welche sämmtlich nur unendlich werden können, wenn ϱ verschwindet, und sich sonst mit $x_0 y_0$ stetig ändern, den Satz aussprechen:

Wenn in einem endlichen Theile der xy-Ebene die Function u den Bedingungen genügt, dass:

*) Für den Fall dreier unabhängiger Variablen ist eine entsprechende Formel von Helmholtz abgeleitet. Crelle's Journal Bd. 57, S. 23.

1) die Punkte, in welchen die Differentialgleichung $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + k^2 u = 0$ nicht befriedigt ist, keine Flächentheile,
2) die Punkte, in welchen u unstetig wird, keine Linien stetig erfüllen,
3) mit der Entfernung ϱ eines veränderlichen Punktes von einem Unstetigkeitspunkte $\varrho \frac{\partial u}{\partial \varrho}$ unendlich klein wird,*)
4) längs allen Linien l die Differentialquotienten von u nach den Normalen dieser Linien, abgesehen von einzelnen Punkten, beiderseits gleich und nicht unendlich sind,
5) bei u eine durch Abänderung ihres Werthes in einzelnen Punkten hebbare Unstetigkeit ausgeschlossen ist,

so ist nothwendig die Function u nebst allen ihren Differentialquotienten für alle Punkte im Innern dieser Fläche endlich und stetig.

Diese Schlussweise ist durchaus nicht an die Voraussetzung gebunden, dass k reell sei. Nur x, y sind natürlich auf reelle Werthe beschränkt; k kann beliebig complex, also beispielsweise auch k^2 negativ sein; und auch der von Riemann behandelte Fall $k = 0$ ist hierin enthalten. Denn bedenkt man, dass die ganze Betrachtung in nichts geändert wird, wenn man zu $Y^{(0)}$ die mit einem beliebigen constanten Factor multiplicirte Function $J^{(0)}_{(k\varrho)}$ hinzufügt, so erkennt man, dass die Function $Y^{(0)}$ für den speciellen Fall $k = 0$ geradezu in $\log \varrho$ übergeht, also die Gleichung (5) in die von Riemann aufgestellte.

§. 2.

Unter der Voraussetzung eines reellen k lässt sich, ebenfalls nach Riemann's Methode,**) der Satz nachweisen:

Ist u mit seinen ersten Derivirten nicht an einer Linie unstetig, so kann auch nicht an einer Linie u und $\frac{\partial u}{\partial p}$ Null sein, wenn nicht u überhaupt $= 0$ ist.

---

*) Genau genommen ist nur erforderlich, dass auf einer mit dem Radius ϱ um den Unstetigkeitspunkt beschriebenen Kreisperipherie keine auch noch so kurze Strecke existirt, in welcher sich $\varrho \frac{\partial u}{\partial \varrho}$ mit abnehmendem ϱ einer von 0 verschiedenen Grenze nähert.

**) l. c. §. 11.

Um diesen Satz nachzuweisen, verbindet man mit der der Differentialgleichung (1) des vorigen Paragraphen genügenden Function u eine zweite Function ω, welche der Gleichung:

$$(6) \qquad \frac{\partial^2 \omega}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \omega}{\partial y^2} = 0$$

genügt. Setzt man nun in der Gleichung (2) des vorigen Paragraphen

$$X = u\frac{\partial \omega}{\partial x} - \omega\frac{\partial u}{\partial x} \quad , \quad Y = u\frac{\partial \omega}{\partial y} - \omega\frac{\partial u}{\partial y}$$

$$\frac{\partial X}{\partial x} + \frac{\partial Y}{\partial y} = u\left(\frac{\partial^2 \omega}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \omega}{\partial y^2}\right) - \omega\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right) = + k^2 u\,\omega\,,$$

so ergibt sich:

$$(7) \qquad k^2 \int\!\!\int u\,\omega\,dx\,dy = -\int\left(u\frac{\partial \omega}{\partial p} - \omega\frac{\partial u}{\partial p}\right)ds\,.$$

Ist nun an einer Linie u und $\frac{\partial u}{\partial p} = 0$, und u in der Nähe dieser Linie von 0 verschieden, so kann man ein Flächenstück construiren, in welchem u sein Zeichen nicht wechselt, welches keine Punkte einschliesst, in denen u oder seine ersten Derivirten unstetig werden, und welches begrenzt ist, einerseits von jener Linie, andererseits von einem Kreisbogen, mit dem Radius r, dessen Mittelpunkt nicht in diesem Flächenstück liegt. Auf dieses Flächenstück kann dann die Gleichung (7) angewandt werden, wo auf der rechten Seite der Theil des Integrals, in dem u und $\frac{\partial u}{\partial p} = 0$ sind, fortfällt und nur das Integral über den Kreisbogen übrig bleibt. Bezeichnet man mit ϱ und φ die Polarcoordinaten in Bezug auf den Mittelpunkt des Kreisbogens, so kann man setzen:

$$\omega = \log\frac{\varrho}{r} \quad , \quad \frac{\partial \omega}{\partial p} = -\frac{\partial \omega}{\partial \varrho} = -\frac{1}{\varrho}\,,$$

so dass ω am Kreisbogen verschwindet, und erhält dann aus der Gleichung (7):

$$k^2 \int\!\!\int u \log\frac{\varrho}{r}\,dx\,dy = \int u\,d\varphi\,.$$

Nun hat der Voraussetzung nach u in beiden Integralen durchaus dasselbe Vorzeichen; $\log\frac{\varrho}{r}$ ist in dem Doppelintegral fortwährend negativ, so dass, wenn k^2 positiv ist, die obige Gleichung einen Widerspruch enthält, der nur durch die Annahme $u = 0$ gehoben werden kann, was der zu beweisende Satz ist.

Daraus ergeben sich nun einige Folgerungen, unter der Voraussetzung, dass Unstetigkeiten von u und seiner Differentialquotienten längs Linien, und, was in Zukunft immer stillschweigend angenommen werden soll, Unstetigkeiten von u, die durch Abänderung eines einzelnen Werthes von u gehoben werden können, ausgeschlossen sind;

1) Wenn die Werthe von u und $\frac{\partial u}{\partial p}$ längs einer endlichen, wenn auch noch so kleinen Linie gegeben sind, so ist dadurch u überhaupt gegeben.

2) Wenn u in einem Flächentheil $= 0$ ist, so muss u überhaupt $= 0$ sein.

Einen anderen constanten Werth kann u in einem Flächentheil nicht haben, weil dann die Differentialgleichung (1) nicht erfüllt wäre.

3) Wenn an einer Linie $u = 0$ ist, so scheidet diese Linie Flächentheile wo u positiv ist, von Flächentheilen wo u negativ ist.

Oder: Wenn die Function u in einer Linie ein Maximum oder Minimum erhält, in dem Sinne, dass an einer Linie nach beiden Seiten die Werthe der Function entweder abfallen oder ansteigen, so kann dieses Maximum oder Minimum zwar längs der Linie constant, aber nicht $= 0$ sein.

§. 3.

Die zuletzt nachgewiesene Eigenschaft der Function u begründet schon einen wesentlichen Unterschied der Differentialgleichung (1) und der gewöhnlichen Potentialgleichung. Noch mehr tritt aber dieser Unterschied hervor in den jetzt zu beweisenden Sätzen, welche eine allgemeine Analogie der Function u mit den periodischen Functionen darthun, immer unter der Voraussetzung, dass k reell sei.

Transformirt man die Differentialgleichung (1) durch Einführung von Polarcoordinaten r, φ mit dem beliebigen Mittelpunkt $x_0\, y_0$, so nimmt dieselbe nach bekannten Regeln die Gestalt an:

$$(8) \qquad r\,\frac{\partial\, r\frac{\partial u}{\partial r}}{\partial r} + \frac{\partial^2 u}{\partial \varphi^2} + k^2 r^2 u = 0\,.$$

Nimmt man nun wieder an, dass u und seine ersten Differentialquotienten nicht an einer Linie unstetig sind, so kann man die Gleichung (8) über einen Kreis integriren, auf welchem u und seine Derivirten nicht unendlich werden, und erhält, wenn man zur Abkürzung setzt:

$$\int_0^{2\pi} u\, d\varphi = \omega\,,$$

zur Bestimmung von ω die Differentialgleichung:

$$(9) \qquad r\,\frac{\partial\, r\frac{\partial \omega}{\partial r}}{\partial r} + k^2 r^2 \omega = 0\,,$$

eine Gleichung, die sich durch die Bessel'schen Functionen integriren lässt, und das allgemeine Integral hat:

$$(10) \qquad \omega = A\, J^{(0)}_{(kr)} + B\, Y^{(0)}_{(kr)}\,.$$

Ist nun u mit seinen Differentialquotienten im Innern des Kreises vom Radius r nirgends unstetig, so kann man in (10) die Constanten A und B dadurch bestimmen, dass man $r = 0$ setzt, und erhält, da $J^{(0)}_{(0)} = 1$, $Y^{(0)}_{(0)} = \infty$ ist:

$$B = 0 \quad A = 2\pi\, u_0,$$

wo u_0 den Werth von u im Mittelpunkte $x_0\, y_0$ des Kreises bedeutet.

Dadurch gelangt man zu der Gleichung:

$$(11) \qquad u_0\; J^{(0)}_{(kr)} = \frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi} u\, d\varphi$$

Diese Gleichung, welche den Werth von u in einem beliebigen Punkte durch ein über einen Kreis mit diesem Punkte als Mittelpunkt genommenes Integral ausdrückt, bleibt gültig für beliebige Radien r dieses Kreises, welche nur nicht so gross genommen werden dürfen, dass in den Kreis Punkte eintreten, in denen die Differentialquotienten von u unstetig werden. Unter dieser Voraussetzung sollen nun aus der Gleichung (11) einige Schlüsse gezogen werden.

Nehmen wir zunächst an, es sei $u_0 = 0$, so ist für jeden um diesen Punkt als Mittelpunkt gelegten Kreis:

$$\int\limits_0^{2\pi} u\, d\varphi = 0.$$

Es muss also auf jedem solchen Kreis u wenigstens zweimal das Zeichen wechseln, mithin durch 0 gehen, d. h. durch einen Punkt, in welchem $u = 0$ ist, geht mindestens eine Linie, in welcher $u = 0$ ist. Die Punkte also, in welchen u verschwindet, müssen auf Linien stetig vertheilt sein. Es lässt sich aber wieder nicht schliessen, dass die Punkte, in denen u einen constanten Werth hat, auf Linien stetig vertheilt sein müssen; es können sowohl Punkte als Linien des Maximums oder Minimums vorkommen, wie schon das Beispiel der Function $J^{(0)}_{(kr)}$ zeigt.

Die transcendente Gleichung:

$$J^{(0)}_{(\vartheta)} = 0$$

hat bekanntlich unendlich viele, aber nur reelle Wurzeln, von denen die kleinste nach den von Bessel berechneten Tafeln*) den Werth hat:

$$\vartheta_0 = 2,4051\ldots.$$

Nimmt man also an, dass das Gebiet, in welchem u die mehrfach erwähnten Stetigkeitsbedingungen erfüllt, eine solche Ausdeh-

*) Abhandlungen der mathematischen Classe der Berliner Akademie 1824.

nung habe, dass sich in demselben ein Kreis mit dem Radius $R = \frac{\vartheta_0}{k}$ legen lässt, so ist über die Peripherie dieses Kreises:

$$\int_0^{2\pi} u\, d\varphi = 0.$$

Daraus folgt, dass an einem solchen Kreise die Function u mindestens an zwei Stellen durch Null hindurchgehen muss; es muss also jeder Kreis, dessen Radius $= \frac{\vartheta_0}{k}$ ist, wo auch sein Mittelpunkt liegen mag, wenigstens eine Linie durchschneiden, an welcher $u = 0$ ist, vorausgesetzt, dass nur kein Theil der Kreisfläche über das Gebiet der Stetigkeit von u hinausreicht. Erfüllt daher u die Stetigkeitsbedingungen in der ganzen unendlichen Ebene, so folgt, dass in diesem Falle die unendliche Ebene in Felder getheilt sein muss, deren Ausdehnung wenigstens in einer Richtung endlich ist, in welchen u abwechselnd das positive und das negative Vorzeichen hat, und welche durch Linien von einander getrennt sind, in welchen u verschwindet.

Setzt man in der Gleichung (11)

$$u' = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} u\, d\varphi$$

so ist u' ein Werth, welchen die Function u auf dem Kreise, über den das Integral auf der rechten Seite genommen ist, mindestens einmal annimmt. Die Gleichung:

$$u' = u_0\, J^{(0)}_{(kr)}$$

zeigt dann, dass, soweit die Gleichung (11) gültig bleibt, von jedem Punkte $x_0\, y_0$ aus wenigstens eine nicht in sich zurücklaufende Linie gezogen werden kann, auf welcher, abgesehen von einem constanten Factor u_0 die Function u dieselben Werthe in derselben Reihenfolge annimmt, wie die Function $J^{(0)}_{(kr)}$ mit wachsendem r.

Ist der Punkt $x_0\, y_0$ ein solcher, in welchem u ein Maximum oder Minimum erreicht, so werden wenigstens in der nächsten Umgebung dieses Punktes geschlossene Linien um denselben gelegt werden können, an denen u constant ist. In soweit dieses der Fall ist, werden auf diesen Linien die Werthe von u gerade so aufeinander folgen, wie die Werthe von $J^{(0)}_{(kr)}$, wenn r den Abstand eines bestimmten Punktes einer solchen Curve von dem Punkte $x_0\, y_0$ bedeutet. Es gibt dies namentlich in den Fällen ein anschauliches Bild von dem Verlauf der Function u, wenn die Stetigkeitsbedingungen in der ganzen unendlichen Ebene erfüllt sind, und alle Linien, in denen u constant ist, geschlossen um einen einzigen Punkt des Maximums oder Minimums verlaufen.

Setzt man in der Gleichung (2), §. 1. $X = \frac{\partial u}{\partial x}$, $Y = \frac{\partial u}{\partial y}$, so ergibt dieselbe

$$k^2 \int\int u\, dx\, dy = \int \frac{\partial u}{\partial p}\, ds\,.$$

Wenn also an der Grenze eines endlichen Flächenstücks $\frac{\partial u}{\partial p}$ verschwindet, so zeigt die vorstehende Gleichung, dass im Innern dieses Flächenstücks u verschiedene Vorzeichen hat, also jedenfalls an einer Linie verschwindet, welche entweder im Innern in sich geschlossen verlaufen, oder auch den Rand des Flächenstücks schneiden kann.

§. 4.

Die Grenzbedingungen, welche für die Integration der Gleichung (1) bei physikalischen Problemen gewöhnlich gestellt werden, und deren Erfüllbarkeit gerade den eigenthümlichen Charakter der Lösungen dieser Gleichung bedingen, sind von folgender Beschaffenheit: Die im Innern einer begrenzten Fläche mit ihren ersten Differentialquotienten stetige Function u soll an der Grenze dieser Fläche entweder selbst verschwinden, oder es soll der nach der Normale genommene Differentialquotient $\frac{\partial u}{\partial p}$ an der Grenze verschwinden, oder endlich, wie z. B. bei der freien Ausstrahlung der Wärme, es soll am Rande eine lineare homogene Relation zwischen u und $\frac{\partial u}{\partial p}$ bestehen, wie:

$$(12) \qquad u + \alpha \frac{\partial u}{\partial p} = 0.$$

In den Wärmeproblemen bedeutet, wenn die Normale nach innen positiv gerechnet wird, α das negative Verhältniss des äusseren und inneren Leitungsvermögens, also jedenfalls eine negative Grösse. Es soll nachgewiesen werden, dass diese drei Arten von Bedingungen, die letztere unter der Voraussetzung, dass α irgend eine, nicht nothwendig constante, aber nur negative Werthe annehmende Grösse sei, durch eine andere Annahme als $u = 0$ nur dann befriedigt werden können, wenn k eine reelle Grösse ist.

Um zunächst zu zeigen, dass k nicht complex, $k = \mu + \nu i$ sein kann, wenn μ und ν von 0 verschieden sind, nehme man an, man habe eine complexe Function

$$u = v + i w$$

gefunden, welche der Gleichung genügt:

$$(13) \qquad \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + k^2 u = 0,$$

die zu u conjugirte Function

$$u' = v - i w$$

genügt dann der Gleichung:

$$(14) \qquad \frac{\partial^2 u'}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u'}{\partial y^2} + k'^2 u' = 0$$

wenn

$$k' = \mu - \nu i.$$

Setzt man nun in der Gleichung (2), §. 1.:

$$X = u \frac{\partial u'}{\partial x} - u' \frac{\partial u}{\partial x}, \quad Y = u \frac{\partial u'}{\partial y} - u' \frac{\partial u}{\partial y}$$

$$\frac{\partial X}{\partial x} + \frac{\partial Y}{\partial y} = u \left\{\frac{\partial^2 u'}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u'}{\partial y^2}\right\} - u' \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right) = (k^2 - k'^2) u.u',$$

so ergibt die Gleichung (2):

$$(15) \qquad (k^2 - k'^2) \iint u u' \, dx \, dy = - \int \left(u \frac{\partial u'}{\partial p} - u' \frac{\partial u}{\partial p}\right) ds.$$

Die rechte Seite dieser Gleichung verschwindet für die drei oben aufgestellten Bedingungen, für die dritte allgemein, so lange nur α reell ist; und da hier der Voraussetzung nach k^2 von k'^2 verschieden ist, so folgt:

$$\iint (v^2 + w^2) \, dx \, dy = 0$$

mithin:

$$v = 0 \quad w = 0.$$

Wenn k rein imaginär, also k^2 reell und negativ wäre, so müsste, wenn u complex wäre, sowohl der reelle als der imaginäre Theil für sich der Gleichung (1) genügen. Wir können also unbeschadet der Allgemeinheit u reell annehmen. Setzt man dann:

$$X = u \frac{\partial u}{\partial x} \qquad Y = u \frac{\partial u}{\partial y}$$

$$\frac{\partial X}{\partial x} + \frac{\partial Y}{\partial y} = \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2 - k^2 u^2,$$

so geht aus der Gleichung (2) die folgende hervor:

$$(16) \qquad \iint \left\{\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2 - k^2 u^2\right\} dx \, dy = - \int u \frac{\partial u}{\partial p} \, ds.$$

Die rechte Seite dieser Gleichung wird, wenn am Rande entweder u oder $\frac{\partial u}{\partial p}$ verschwindet, $= 0$; unter der Bedingung (13) aber wird die rechte Seite von (16)

$$= \int \alpha \left(\frac{\partial u}{\partial p}\right)^2 ds,$$

während die linke Seite unter der Voraussetzung, dass k^2 negativ sei, wesentlich positiv ist, wenn nicht durchweg u verschwindet. Dies führt zu dem Schlusse, dass in den drei Fällen, in dem letzteren unter der Voraussetzung eines negativen α, in der That keine andere Function, als $u = 0$ den gestellten Anforderungen genügt, falls k imaginär ist. Wir können das soeben Bewiesene folgendermassen zusammenfassen:

Wenn eine von 0 verschiedene Function u existirt, welche im Innern einer begrenzten Fläche mit ihren ersten Differentialquotienten stetig ist und der Differentialgleichung:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + k^2 u = 0,$$

ausserdem am Rande der Fläche einer der drei Bedingungen genügt:

1) u am Rande selbst $= 0$;
2) der nach der Normale genommene Differentialquotient ist am Rande $= 0$;
3) es besteht am Rande eine lineare Relation zwischen u und dem nach der inneren Normale genommenen Differentialquotienten:

$$u + \alpha \frac{\partial u}{\partial p},$$

so muss unter den beiden ersten Voraussetzungen k^2 reell und positiv sein, unter der dritten, falls α reell ist, k^2 reell, und falls α negativ ist, k^2 reell und positiv sein.

§. 5.

Die Frage nach der Lösbarkeit der Differentialgleichung (1) für gewisse Formen der Grenzbedingungen, sowie nach der Anzahl der möglichen Lösungen in den verschiedenen Fällen kann beantwortet werden, wenn man die Aufgabe der Integration dieser Gleichung als ein Problem der Variationsrechnung ansieht, ähnlich wie Riemann es bei der Gleichung $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$ durchgeführt hat. Nur muss man hier kein gewöhnliches Problem der Variationsrechnung, sondern ein sogenanntes isoperimetrisches Problem zu Grunde legen.

Die Aufgabe, die wir uns stellen, ist folgende:

Unter allen Functionen u, welche im Innern eines gegebenen, allseitig begrenzten Flächenstücks $\mathfrak{A}$ nicht an einer Linie unstetig werden, welche die Bedingung erfüllen, dass das über die Fläche $\mathfrak{A}$ ausgedehnte Integral:

$$\iint u^2\, dx\, dy \tag{17}$$

einen gegebenen constanten positiven Werth c erhält, welche am Rande der Fläche $\mathfrak{A}$ entweder:

1) beliebig gegebene, nicht längs des ganzen Randes verschwindende Werthe annehmen, oder
2) durchaus den Werth 0 haben, oder
3) gar keinen Beschränkungen unterworfen sind, oder endlich

4) der Bedingung genügen, dass das über den ganzen Rand von $\mathfrak{A}$ erstreckte Integral $\int u^2 ds$ einen gegebenen constanten positiven Werth γ erhält;

sollen diejenigen gefunden werden, welche dem über die Fläche $\mathfrak{A}$ erstreckten Integral

$$(18) \qquad \Omega = \int\int \left\{ \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2 \right\} dx\, dy$$

einen Minimumwerth ertheilen.

Dass diese Aufgabe immer eine Lösung zulässt, ergibt sich aus folgenden Bemerkungen:

Zunächst kann Ω für alle möglichen Formen der Function u nur positive Werthe annehmen, und unter diesen muss also einer der kleinste sein. Dass dieser kleinste Werth von Ω für eine den allgemeinen Bedingungen unseres Problems entsprechende Form der Function u stattfinden muss, und zwar in der Weise, dass von dieser Form aus man durch unendlich kleine, den allgemeinen Bedingungen entsprechende Aenderungen von u nie zu grösseren Werthen von Ω gelangt, ist eine Folge des von Riemann bewiesenen Satzes*), der unverändert in unserem Falle seine Gültigkeit behält, dass sich u nicht einer längs einer Linie unstetigen Function unendlich nähern kann, ohne dass Ω über alle Grenzen wächst. Denn geht man von einer beliebigen Form der Function u aus, für welche Ω einen endlichen Werth hat, und sucht solche, den allgemeinen Bedingungen genügende, unendlich kleine Veränderungen von u, für welche das Integral Ω abnimmt, verfährt dann ebenso mit der veränderten Function und setzt dieselbe Operation fort, so muss man sich allmählich einer gewissen Form der Function u nähern, für welche ein weiteres Abnehmen nicht mehr möglich ist, oder für welche wenigstens eine etwa mögliche weitere Abnahme unter einer gewissen, beliebig klein zu wählenden Grösse ε gelegen sein muss, und diese Grenzform muss ebenfalls den allgemeinen Voraussetzungen genügen, da sie nicht an einer Linie unstetig sein kann, und da die allgemeinen Voraussetzungen sich alle nur auf die Function u selbst, nicht auf ihre Differentialquotienten beziehen.

Diese Function u, welche die Eigenschaft hat, dass man durch unendlich kleine, den Bedingungen entsprechende Veränderungen das Integral Ω nicht weiter oder nur so verkleinern kann, dass die Abnahme kleiner als die beliebig kleine Grösse ε ist, deren Existenz soeben nachgewiesen wurde, soll nun in Bezug auf ihre sonstigen Eigenschaften näher untersucht werden.

Setzt man an die Stelle von u: $u + \omega$, so muss durch diese Ver-

*) l. c. §. 17.

änderung vor Allem das Integral (17) ungeändert bleiben. Es muss also ω der Bedingung genügen:

(19) $$2\iint u\,\omega\,dx\,dy + \iint \omega^2\,dx\,dy = 0.$$

Setzt man nun

$$\omega = h\,\omega_1 + h^2\,\omega_2,$$

versteht unter $\omega_1\ \omega_2$ nicht unendlich kleine, nicht in Linien unstetige Functionen, unter h eine beliebig abnehmende Constante, so kann man ω_1 von h unabhängig annehmen, während ω_2 in gewisser Weise sich mit h verändern muss. Man erhält unter dieser Voraussetzung aus (19) die Bedingungen für $\omega_1\ \omega_2$:

(20) $$\begin{cases} \iint u\,\omega_1\,dx\,dy = 0 \\ \iint \{(\omega_1^2 + 2\omega_2 u) + 2h\,\omega_1\,\omega_2 + h^2\,\omega_2^2\}\,dx\,dy = 0. \end{cases}$$

Ausserdem haben die Functionen $\omega_1\ \omega_2$ noch gewisse Bedingungen an der Grenze zu erfüllen, auf welche wir später noch des Näheren eingehen werden. Trotz dieser Beschränkungen bewahren die Functionen $\omega_1\ \omega_2$ noch einen hohen Grad von Willkürlichkeit, welche bei der Function ω_2 dadurch noch beschränkt werden soll, dass dieselbe mit ihren ersten Differentialquotienten in der ganzen Fläche $\mathfrak{A}$ endlich bleibt. Die Zulässigkeit dieser Annahme ergiebt sich daraus, dass man der zweiten Bedingung (20) z. B. dadurch genügen kann, dass man für ω_2 eine ganz willkürliche, mit einem endlichen, in gewisser Weise von h abhängigen constanten Factor multiplicirte Function setzt.

Macht man nun in dem Integral Ω für u die Substitution

$$u + h\,\omega_1 + h^2\,\omega_2,$$

so geht Ω über in:

$$\Omega + 2h\,\Omega_1 + h^2\,\Omega_2,$$

worin:

$$\Omega_1 = \iint \left(\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial \omega_1}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial \omega_1}{\partial y}\right) dx\,dy.$$

und Ω_2 eine jedenfalls endliche Grösse bedeutet, wenn man über ω_1 noch die Voraussetzung hinzufügt, dass:

$$\iint \left\{\left(\frac{\partial \omega_1}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial \omega_1}{\partial y}\right)^2\right\} dx\,dy$$

endlich sein soll. Nun soll aber der Voraussetzung nach die Abnahme von Ω, sowohl für positive als für negative Werthe von h kleiner sein als die beliebig kleine Grösse ε, welche also auch als gegen h verschwindend klein angenommen werden kann, und daher muss Ω_1 mit unendlich abnehmendem h gleichzeitig unendlich klein werden, und folglich, da ω_1 von h unabhängig sein soll:

(21) $$\iint \left(\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial \omega_1}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial \omega_1}{\partial y}\right) dx\,dy = 0.$$

Um die weitere Betrachtung von der in (20) enthaltenen Bedingung für ω_1 unabhängig zu machen, führe ich an Stelle der Function ω_1 eine Function λ ein mittels der Gleichung:

$$\omega_1 = \lambda - m u \tag{22}$$

und bestimme die Constante m so, dass die erste Gleichung (20) identisch befriedigt wird, nämlich mit Rücksicht auf die Gleichung $\iint u^2\, dx\, dy = c$:

$$m = \frac{1}{c} \iint \lambda\, u\, dx\, dy\,.$$

λ ist dann, abgesehen von den später zu besprechenden Bedingungen an der Grenze, eine ganz willkürliche, nicht längs einer Linie unstetige Function, welche so beschaffen ist, dass das Integral:

$$\iint \left\{ \left(\frac{\partial \lambda}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial \lambda}{\partial y}\right)^2 \right\} dx\, dy$$

endlich bleibt. Durch diese Substitution geht die Gleichung (21) mit Rücksicht auf den für m gefundenen Ausdruck über in folgende:

$$\iint \left\{ \frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial \lambda}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial \lambda}{\partial y} - \frac{\Omega}{c}\, u \lambda \right\} dx\, dy = 0\,. \tag{23}$$

Die Gleichung (23) erfordert nun zunächst Folgendes:

Wenn man das auf der linken Seite der Gleichung (23) stehende Integral über irgend einen Theil a der Fläche $\mathfrak{A}$ ausdehnt, so muss dieser Theil sich der Grenze 0 nähern, wenn sich der Flächenraum von a der Grenze 0 nähert, weil sonst das Integral (23) keinen bestimmten oder keinen endlichen Werth haben würde. Bildet man also aus der Fläche $\mathfrak{A}$ eine Fläche $\mathfrak{A}'$, indem man von $\mathfrak{A}$ die Linien l, und die Punkte p, in welchen u, $\frac{\partial u}{\partial x}$, $\frac{\partial u}{\partial y}$ unstetig sind, durch beliebige Curven λ und σ ausschliesst, welche sich respective den Linien l und den Punkten p allseits sehr nahe anschliessen, so muss das in (23) auf der linken Seite stehende Integral, über die Fläche $\mathfrak{A}'$ erstreckt, sich gleichfalls der Grenze 0 nähern, wenn man die Curven λ beiderseits an die Linien l, die Curven σ allerseits an die Punkte p unendlich nahe heranrücken lässt. Setzt man voraus, was jedenfalls freisteht, dass die Function λ in der Fläche $\mathfrak{A}$ stetig sei, so lässt sich auf das über $\mathfrak{A}'$ erstreckte Integral

$$\iint_{\mathfrak{A}'} \left(\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial \lambda}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial \lambda}{\partial y} \right) dx\, dy$$

der Satz (2), §. 1. anwenden, indem man in demselben setzt:

$$X = \lambda \frac{\partial u}{\partial x}\quad,\quad Y = \lambda \frac{\partial u}{\partial y}\,.$$

Bezeichnet man mit $ds\; dp$ die Elemente der Begrenzung der Fläche $\mathfrak{A}$ und der nach dem Inneren gezogenen Normalen, mit dl, dn; $d\sigma$, $d\nu$

respective die Elemente der Curven l und σ und der an sie gezogenen Normalen, so dass dn zu dl liegt, wie die positive y-Axe zur positiven x-Axe, und $d\nu$ nach dem Innern der Curven σ gezogen ist; bezeichnet man ferner mit $\left(\frac{\partial u}{\partial n}\right)'$ $\left(\frac{\partial u}{\partial n}\right)''$ die Werthe des Differentialquotienten $\frac{\partial u}{\partial n}$ in zwei in unmittelbarer Nähe zu beiden Seiten der Linie l gelegenen Punkten, so ergibt das erwähnte Theorem (2), §. 1.:

$$(24)\quad -\int\!\!\int_{\mathfrak{A}} \left(\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial \lambda}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial \lambda}{\partial y}\right) dx\, dy = \int\!\!\int_{\mathfrak{A}} \lambda \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right) dx\, dy$$
$$+ \int_s \frac{\partial u}{\partial p}\lambda\, ds + \int_l \left\{\left(\frac{\partial u}{\partial n}\right)' - \left(\frac{\partial u}{\partial n}\right)''\right\} \lambda\, dl + \sum \lambda_p \int_\sigma \frac{\partial u}{\partial \nu}\, d\sigma .$$

Hierin bezieht sich in dem letzten Glied das Zeichen Σ auf alle Punkte p, und λ_p bedeutet den Werth der Function λ im Punkte p.

Zunächst muss nun das über den Rand s der Fläche $\mathfrak{A}$ erstreckte einfache Integral näher betrachtet werden, wobei aber die verschiedenen Formen der Grenzbedingungen, welche oben unter 1, 2, 3, 4 der Function u auferlegt wurden, unterschieden werden müssen:

1) hat u am Rande gegebene, nicht durchaus verschwindende Werthe, so muss, wie die Gleichung (22) zeigt, am Rande:
$$\lambda = \frac{u}{c}\int\!\!\int u\,\lambda\, dx\, dy ,$$
mithin, wenn man die von λ unabhängige Constante $\int u \frac{\partial u}{\partial p} ds$ mit β bezeichnet:
$$\int \frac{\partial u}{\partial p}\lambda\, ds = \frac{\beta}{c}\int\!\!\int u\,\lambda\, dx\, dy .$$

2) Wenn u am ganzen Rande den vorgeschriebenen Werth 0 hat, dann muss auch λ am Rande verschwinden, mithin:
$$\int \frac{\partial u}{\partial p}\lambda\, ds = 0 .$$

3) Wenn u am Rande keiner Beschränkung unterliegt, so ist auch λ am Rande ganz willkürlich.

4) Wenn endlich das über den Rand erstreckte Integral $\int u^2 ds$ den vorgeschriebenen Werth γ haben soll, muss λ der Bedingung genügen:
$$\int \lambda\, u\, ds - \frac{\gamma}{c}\int\!\!\int u\,\lambda\, dx\, dy = 0 .$$
Setzt man daher am Rande:
$$\lambda = \mu - nu ,$$
so kann man die Constante n so bestimmen, dass für beliebige Functionen μ die obige Bedingung identisch befriedigt ist; nämlich:

$$n = \frac{1}{\gamma}\int u\,\mu\,ds - \frac{1}{c}\int\!\!\int u\,\lambda\,dx\,dy\,.$$

Demnach ergibt sich:

$$\int\frac{\partial u}{\partial p}\lambda\,ds = \int\mu\left\{\frac{\partial u}{\partial p} - \frac{\beta}{\gamma}u\right\}ds + \frac{\beta}{c}\int\!\!\int u\,\lambda\,dx\,dy\,,$$

worin, wie oben:

$$\beta = \int u\frac{\partial u}{\partial p}ds\,,$$

also eine von μ unabhängige Constante bedeutet. μ selbst aber ist eine längs des ganzen Randes willkürlich zu wählende Function.

Setzt man nun die hier gefundenen Ausdrücke für das Randintegral in (24) ein, so ergibt sich aus (23) als Bedingung, welcher die Function u genügen muss:

$$(25)\quad 0 = \int\!\!\int\lambda\left\{\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + k^2 u\right\} + S + \int_l\left\{\left(\frac{\partial u}{\partial n}\right)' - \left(\frac{\partial u}{\partial n}\right)''\right\}\lambda\,dl$$
$$+ \sum\lambda_p\,\mathrm{Lim.}\int_\sigma\frac{\partial u}{\partial \nu}d\sigma\,,$$

und darin haben k^2 und S für die 4 verschiedenen Formen der Grenzbedingung folgende Bedeutungen:

Im ersten Falle:

$$k^2 = \frac{\beta+\Omega}{c}\quad,\quad S = 0\quad,\quad \beta = \int u\frac{\partial u}{\partial p}ds\,.$$

Im zweiten Falle:

$$k^2 = \frac{\Omega}{c}\quad,\quad S = 0\,.$$

Im dritten Falle:

$$k^2 = \frac{\Omega}{c}\quad,\quad S = \int\lambda\frac{\partial u}{\partial p}ds\,.$$

Im vierten Falle:

$$k^2 = \frac{\beta+\Omega}{c}\quad,\quad S = \int\mu\left(\frac{\partial u}{\partial p} - \alpha u\right)ds\quad,\quad \alpha = \frac{\beta}{\gamma}\,,$$
$$\beta = \int u\frac{\partial u}{\partial p}ds\,.$$

Die Werthe der Functionen λ und μ, wie sie jetzt noch in der Gleichung (25) vorkommen, sind nun durchaus willkürlich, und daraus ergeben sich die Folgerungen:

Die Function u genügt in der ganzen Fläche $\mathfrak{A}$ der Differentialgleichung:

$$(26)\qquad \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + k^2 u = 0$$

oder wenigstens können die Punkte, in welchen diese Gleichung nicht erfüllt ist, keinen auch noch so kleinen Flächentheil stetig erfüllen.

Am Rande nimmt u entweder vorgeschriebene Werthe, oder den Werth 0 an, oder es ist längs des ganzen Randes, mit Ausnahme einzelner Punkte, $\frac{\partial u}{\partial p} = 0$, oder endlich längs des ganzen Randes, wieder einzelne Punkte abgerechnet, $\frac{\partial u}{\partial p} - \alpha u = 0$ (entsprechend den vier Formen der vorausgesetzten Grenzbedingungen).

An den Linien l gibt es nirgends eine, auch noch so kurze Strecke, wo nicht:

$$(27) \qquad \left(\frac{\partial u}{\partial n}\right)' - \left(\frac{\partial u}{\partial n}\right)'' = 0.$$

Für alle Punkte p ist

$$(28) \qquad \mathrm{Lim} \int_\sigma \frac{\partial u}{\partial \nu}\, d\sigma = 0,$$

wenn sich das Integral auf eine beliebig gestaltete, den Punht p in unendlicher Nähe umschliessende Curve σ erstreckt.

Die letzte Gleichung (28) erfordert eine eingehendere Discussion: Führt man um den Punkt p Polarcoordinaten ein, indem man setzt:

$$x - x_p = \varrho\vartheta \cos\varphi \;;\; y - y_p = \varrho\vartheta \sin\varphi,$$

so kann man, um die Punkte der Curve σ zu erhalten, unter ϱ eine unendlich abnehmende Constante, unter ϑ eine ganz willkürliche, endliche und stetige Function von φ verstehen. Dadurch nimmt die Gleichung (28) die Form an:

$$\mathrm{Lim}\ \varrho \int_0^{2\pi} \left(\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial \vartheta \sin\varphi}{\partial \varphi} - \frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial \vartheta \cos\varphi}{\partial \varphi}\right) d\varphi = 0,$$

oder mit Hülfe einer partiellen Integration:

$$\mathrm{Lim}\ \varrho \int_0^{2\pi} \vartheta \left\{ \sin\varphi \frac{\partial \frac{\partial u}{\partial x}}{\partial \varphi} - \cos\varphi \frac{\partial \frac{\partial u}{\partial y}}{\partial \varphi} \right\} d\varphi = 0,$$

wegen der Willkürlichkeit von ϑ folgt hieraus:

$$(29) \qquad \mathrm{Lim}\ \varrho \left\{ \sin\varphi \frac{\partial \frac{\partial u}{\partial x}}{\partial \varphi} - \cos\varphi \frac{\partial \frac{\partial u}{\partial y}}{\partial \varphi} \right\} = 0,$$

oder wenigstens können die Punkte einer Kreisperipherie, auf welchen diese Gleichung nicht erfüllt ist, kein auch noch so kurzes Stück derselben stetig erfüllen. Wenn man nun in der Gleichung (29) ϱ und φ als Polarcoordinaten in der Ebene betrachtet, so lässt sich diese Gleichung schreiben:

$$\mathrm{Lim} \left\{ \frac{\partial^2 u}{\partial \varphi^2} + \varrho \frac{\partial u}{\partial \varrho} \right\} = 0,$$

oder endlich, da die Gleichung (26) bis in beliebige Nähe des Punktes p gültig bleiben muss:

$$\text{Lim } \varrho^2 \left(\frac{\partial^2 u}{\partial \varrho^2} + k^2 u \right) = 0.$$

Es muss also auch:

$$(30) \qquad \text{Lim } \varrho^2 \frac{\partial\, e^{-ik\varrho} \left(\frac{\partial u}{\partial \varrho} + iku \right)}{\partial \varrho} = 0.$$

Setzt man an die Stelle der unter dem Differentiationszeichen stehenden Grösse U, und versteht unter U entweder den reellen oder den mit i multiplicirten Theil dieser Grösse, so hat man auch:

$$\text{Lim } \varrho^2 \frac{\partial U}{\partial \varrho} = 0.$$

Demnach kann man auf jeder von p ausgehenden Linie eine Länge R finden, so dass unterhalb dieser Länge $\varrho^2 \frac{\partial U}{\partial \varrho}$ endlich bleibt*). Ist nun M der grösste Werth, welchen auf dieser Strecke $\varrho^2 \frac{\partial U}{\partial \varrho}$ annimmt, so folgt, dass, abgesehen von Vorzeichen für gehörig kleine Werthe von ϱ

$$\varrho\, U < M$$

sein muss, also, da man wiederum dadurch, dass man R gehörig klein nimmt, M selbst beliebig klein machen kann:

$$\text{Lim } \varrho\, U = 0,$$

mithin:

$$\text{Lim } \varrho \left(\frac{\partial u}{\partial \varrho} + iku \right) = 0,$$

und daraus folgt durch eine ganz analoge Schlussweise zunächst, dass Lim $\varrho u = 0$ sein muss, und mithin auch:

$$(31) \qquad \text{Lim } \varrho \frac{\partial u}{\partial \varrho} = 0^{**}).$$

Vergleicht man nun die Gleichungen (27), (31) mit dem am Schlusse des §. 1. ausgesprochenen Theorem, so kann man die Ergebnisse der Betrachtungen dieses § in folgenden Satz zusammenfassen.

Es existirt jederzeit eine von 0 verschiedene Function u, welche im Innern eines gegebenen Flächenstücks sammt all' ihren Differentialquotienten stetig ist, welche im Innern desselben Flächenstücks einer Differentialgleichung von der Form

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + k^2 u = 0$$

genügt, und welche bei geeigneter Bestimmung der Con-

*) Vgl. Riemann l. c. §. 10.

**) Wenigstens kann es auf einer Kreisperipherie mit dem Radius ϱ keine auch noch so kurze Strecke geben, wo diese Bedingung nicht erfüllt ist.

stanten k^2 jeder der vier folgenden Bedingungen unterworfen sein kann:

a) u hat am Rande des Flächenstücks vorgeschriebene, nicht durchaus verschwindende Werthe.

b) u hat am Rande durchaus den Werth 0.

c) Der nach der Normale der Randcurve genommene Differentialquotient von u ist mit Ausnahme einzelner Punkte längs des ganzen Randes 0.

d) Zwischen den Randwerthen der Function u und des nach der Normale der Randcurven genommenen Differentialquotienten besteht mit Ausnahme einzelner Punkte eine lineare homogene Relation mit constantem Coëfficienten: $\frac{\partial u}{\partial p} - \alpha u = 0$.

§. 6.

Bei dieser ganzen Betrachtungsweise, welche von der Aufgabe des Minimums ausgeht, tritt durchweg die Constante k^2 ebenso wie α auf als eine der Grössen, welche mit Hülfe der sonstigen Bedingungen des Problems zu suchen sind, die also nicht willkürlich gegeben sein können; und dasselbe gilt daher auch in Bezug auf die Differentialgleichung mit ihren Grenzbedingungen, auf welche wir das Problem reducirt haben. Nun kommen aber in dem Problem des Minimums noch die beiden Constanten c und γ vor, welche weder in der Differentialgleichung (26) noch in den aufgestellten Grenzbedingungen enthalten sind, und es könnte die Frage sein, ob es nicht möglich ist, über diese Constanten c und γ so zu verfügen, dass die beiden Constanten k und α beliebig gegebene oder wenigstens innerhalb gewisser Grenzen beliebig gegebene Werthe erhalten. In Bezug auf die Constante α, welche jedenfalls von γ abhängig sein wird, muss diese Frage bejaht werden; was aber die Constante k anlangt, so sind dabei verschiedene Fälle zu unterscheiden, nach der Beschaffenheit der Grenzbedingungen.

Betrachten wir zunächst die unter *b*, *c*, *d* des vorigen § erwähnten Formen der Grenzbedingungen, welche in dieser Beziehung einen gemeinschaftlichen Charakter haben, so finden wir, dass weder in der Differentialgleichung (26) selbst, noch in den Grenzbedingungen irgend ein Mittel enthalten ist, um einen constanten Factor der Function u zu bestimmen. Es kann also die Constante c nur dazu angewandt werden, um einen solchen Factor zu bestimmen, und kann zur Bestimmung der Constanten k^2 nicht dienen; man kann also in diesen Fällen, ohne die Allgemeinheit zu beeinträchtigen, die Constante $c=1$

setzen, und da unter dieser Voraussetzung die Constante k^2 dem Minimumwerthe Ω selbst gleich, oder $= \gamma\alpha + \Omega$ wird, so wird es nur ganz bestimmte, wenn auch immerhin unendlich viele, jedoch nicht stetig aufeinander folgende Werthe von k^2 geben, für welche eine von 0 verschiedene Lösung der Gleichung (26) möglich ist.

Anders verhält es sich in dem Falle, wo die Grenzbedingung die unter 1) des vorigen §. angegebene Forn hat. Diese Form der Grenzbedingung lässt keinen willkürlichen Factor der Function u zu, und daher wird der Werth von k^2 von der Constanten c abhängig bleiben, also mit ihr stetig sich ändern können.

Diese Bemerkungen fassen wir in folgenden Satz zusammen:

Die Differentialgleichung $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + k^2 u = 0$ hat, wenn auch nicht für alle Werthe von k^2, doch für eine Reihe stetig aufeinander folgender Werthe dieser Constanten eine Lösung, welche an einer gegebenen Begrenzung irgend wie gegebene, nicht durchaus verschwindende Werthe annimmt.

Dagegen hat sie nur für ganz bestimmte, wenn auch unendlich viele Werthe der Constanten k^2 von 0 verschiedene Lösungen, welche an der gegebenen Begrenzung eine der drei Bedingungen *b*) *c*) *d*) §. 5. erfüllen.

Stillschweigend sind dabei immer noch die oben angeführten Bedingungen der Stetigkeit vorausgesetzt.

Dass es nicht für alle Werthe der Constanten k Lösungen der vorliegenden Gleichung gibt, welche am Rande der Fläche ganz beliebig gegebene Werthe annehmen, geht aus folgender Betrachtung hervor:

Nehmen wir an, die Constante k habe einen solchen Werth, dass Functionen $u = u'$ gefunden werden können, welche der Differentialgleichung genügen und am Rande verschwinden, so folgt, wenn u irgend eine andere, der Differentialgleichung genügende Function bedeutet, aus der Gleichung (3) §. 1.:

$$\int u \frac{\partial u'}{\partial p} ds = 0. \tag{32}$$

Es müssen daher die Randwerthe der Function u so vielen Bedingungen (32) genügen, als von einander verschiedene Functionen u' existiren, und Functionen u zu bestimmen, welche beliebige Randwerthe haben, wird nicht möglich sein. Sind aber die Randwerthe von u so beschaffen, dass sie zulässig sind, so ist durch dieselben die Function u selbst noch nicht völlig bestimmt, denn zu jeder solchen Function u kann noch eine beliebige lineare homogene Function der am Rande verschwindenden Functionen u' hinzu addirt werden, ohne dass darum

u aufhört, der Differentialgleichung zu genügen und am Rande die vorgeschriebenen Werthe anzunehmen.

Hat dagegen k einen solchen Werth, dass es nicht möglich ist, eine am Rande verschwindende, von 0 verschiedene Function u zu bestimmen, so wird durch die gegebenen Randwerthe u völlig bestimmt sein, denn die Differenz zweier solcher Functionen, u_1 u_2, welche am Rande dieselben Werthe annehmen, ist eine am Rande verschwindende Function u, die der Voraussetzung zufolge überhaupt $= 0$ sein muss.

Anmerkung. Die Bedeutung der zuletzt entwickelten Sätze tritt noch mehr hervor, wenn man die Analogieen derselben in der Theorie der gewöhnlichen Differentialgleichungen aufsucht.

Die Lösung der Gleichung:

$$\frac{d^2u}{dx^2} + k^2u = 0$$

$$u = a \cos kx + b \sin kx$$

ist im Allgemeinen völlig bestimmt, wenn für zwei Werthe von x, x_0 und x_1 die Werthe von u beliebig gegeben sind. Soll aber an den beiden Grenzen u oder $\frac{du}{dx}$ verschwinden, oder zwischen $\frac{du}{dx}$ und u eine lineare Relation bestehen, so muss, wenn a und b von 0 verschiedene Werthe erhalten sollen, k ein ganzes Vielfaches von $\frac{2\pi}{x_1 - x_0}$ sein. Ist dies aber der Fall, so kann u an den beiden Grenzen nicht beliebig gegeben sein, sondern es müssen an beiden Grenzen die Werthe einander gleich sein; und durch diesen einen Grenzwerth ist dann u nicht völlig bestimmt, sondern es bleibt noch eine der Constanten willkürlich.

§. 7.

Es soll nun die Frage nach der Anzahl der möglichen Lösungen der Gleichung (26) für eine gegebene Begrenzung für unbestimmte Werthe von k näher untersucht werden unter der Voraussetzung, dass die Function u am Rande entweder selbst verschwinden soll, oder dass ihr nach der Normale der Randcurve genommener Differentialquotient verschwinden soll.

Diese Frage lässt sich wieder mit Hülfe eines Problems der Variationsrechnung sehr einfach entscheiden.

Ich nehme an, es sei eine Function u_1 gefunden, welche einem bestimmten Werthe k_1 von k in der Differentialgleichung (26) entspricht, und es sei am Rande entweder $u_1 = 0$ oder $\frac{\partial u_1}{\partial p} = 0$. Es sei ferner der noch unbestimmte constante Factor von u_1 so bestimmt, dass

$$\iint u_1^2 \, dx \, dy = 1$$

sei. Dass eine solche Function immer existirt, wurde oben nachgewiesen.

Unter allen Functionen v, welche nicht an einer Linie unstetig sind, welche den Bedingungen genügen:

(33) $$\iint u_1 v \, dx \, dy = 0,$$

(34) $$\iint v^2 \, dx \, dy = 1,$$

welche ferner am Rande entweder verschwinden, oder ganz willkürlich sind, je nachdem u_1 oder $\frac{\partial u_1}{\partial p}$ am Rande verschwindet, soll diejenige, $v = u_2$, gefunden werden, welche dem Integral

$$\Omega_2 = \iint \left\{ \left(\frac{\partial v}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial y}\right)^2 \right\} dx \, dy$$

den kleinsten Werth ertheilt. Die Existenz einer solchen Function lässt sich wie oben in §. 5. darthun, und die Bedingungen (33), (34) zeigen, dass diese Function u_2 weder identisch 0, noch auch $= u_1$ sein kann. Es sollen die Eigenschaften der Function u_2 aufgesucht werden, was ganz in derselben Weise geschieht, wie oben. Um unnöthige Weitläufigkeiten zu vermeiden, unterdrücke ich hier alle diejenigen Betrachtungen, welche sich auf die Stetigkeit der Function u_2 beziehen, die hier wörtlich aus den Betrachtungen des §. 5. zu wiederholen wären, und zu demselben Resultate wie dort führen würden.

Die Bedingung, welche u_2 zu erfüllen hat, ist die:

(35) $$\iint \left(\frac{\partial u_2}{\partial x}\frac{\partial \omega}{\partial x} + \frac{\partial u_2}{\partial y}\frac{\partial \omega}{\partial y}\right) dx \, dy = 0,$$

vorausgesetzt, dass ω eine beliebige, nicht in Linien unstetige Function ist, welche die beiden Bedingungen erfüllt:

(36) $$\iint u_1 \omega \, dx \, dy = 0. \qquad \iint u_2 \omega \, dx \, dy = 0,$$

welche am Rande entweder 0 oder willkürlich ist.

Setzt man:

(37) $$\omega = \lambda - m_1 u_1 - m_2 u_2,$$

so lassen sich die Constanten m_1 m_2 so bestimmen, dass die Bedingungen (36) für beliebige Functionen λ erfüllt sind. Man braucht nur zu setzen:

(38) $$m_1 = \iint \lambda u_1 \, dx \, dy, \qquad m_2 = \iint \lambda u_2 \, dx \, dy.$$

Beachtet man nun, dass in Folge der gestellten Bedingungen

$$\iint \left(\frac{\partial u_1}{\partial x}\frac{\partial u_2}{\partial x} + \frac{\partial u_1}{\partial y}\frac{\partial u_2}{\partial y}\right) dx \, dy = 0$$

ist, so geht durch die Substitution (37), (38) die Gleichung (35) in folgende über:

(39) $$\iint \left(\frac{\partial \lambda}{\partial x}\frac{\partial u_2}{\partial x} + \frac{\partial \lambda}{\partial y}\frac{\partial u_2}{\partial y} - \Omega_2 \lambda u_2\right) dx \, dy = 0.$$

Und wenn man auf Grund des oben Bemerkten die etwaigen Unstetigkeiten von u_2 und seinen Differentialquotienten unberücksichtigt lässt, so ergibt sich aus (39) mittels der Gleichung (2) §. 1.:

$$(40)\qquad 0 = \int \lambda \frac{\partial u_2}{\partial p}\, ds + \iint \lambda \left\{ \frac{\partial^2 u_2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u_2}{\partial y^2} + \Omega_2 u_2 \right\} dx\, dy;$$

λ ist darin eine ganz willkürliche Function, welche entweder

1) am Rande verschwindet, oder:

2) am Rande beliebig ist, je nachdem u_1 oder $\frac{\partial u_1}{\partial p}$ am Rande verschwindet.

Daraus folgt nun zunächst, dass die Function u_2 der Differentialgleichung genügen muss:

$$(41)\qquad \frac{\partial^2 u_2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u_2}{\partial y^2} + k_2^2 u_2 = 0,$$

worin $k_2^2 = \Omega_2$ ist, und ferner, dass im ersten Falle am Rande u_2, im zweiten Falle $\frac{\partial u_2}{\partial p}$ verschwindet.

Hat man die Function u_2 gefunden, so kann man eine dritte Function u_3 suchen, welche denselben Bedingungen genügt, nur mit verändertem Werthe von k. Man hat nur unter allen Functionen v, die nicht in einer Linie unstetig sind, welche den drei Bedingungen genügen:

$$(42)\qquad \iint v^2\, dx\, dy = 1;\ \iint u_1 v\, dx\, dy = 0;\ \int u_2 v\, dx\, dy = 0,$$

und welche am Rande entweder verschwinden oder beliebig sind, diejenige $v = u_3$ zu suchen, welche das Integral:

$$\Omega_3 = \iint \left\{ \left(\frac{\partial v}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial y}\right)^2 \right\} dx\, dy$$

zu einem Minimum machen. Diese Function u_3, deren Existenz sich ebenso, wie die der Functionen u_1 u_2 nachweisen lässt, kann, wie die Bedingungen (42) zeigen, weder mit 0, noch mit einer der Functionen u_1 u_2 identisch sein, und ihre Eigenschaften ergeben sich genau in derselben Weise, wie die der Functionen u_1 u_2. Diese Operation lässt sich nun beliebig fortsetzen und führt so zu dem Satze:

Es existiren unendlich viele, mit allen ihren Differentialquotienten im Innern eines gegebenen Flächenstücks stetige, von einander verschiedene Functionen, welche am Rande des gegebenen Flächenstücks verschwinden, oder deren nach der Normale der Randcurve genommener Differentialquotient am Rande verschwindet, und die im ganzen Innern des Flächenstücks einer Differentialgleichung von der Form:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + k^2 u = 0$$

genügen, worin die Constante k zwar unendlich viele, aber nur ganz bestimmte, von der Natur der Begrenzung abhängige Werthe haben kann.

Ob für einen und denselben Werth von k verschiedene Functionen u möglich sind, welche am Rande verschwinden, oder deren nach der Normale der Randcurve genommener Differentialquotient am Rande verschwindet, darüber scheint ein allgemein gültiger Satz nicht zu existiren.

§. 8.

Bei den bisherigen Betrachtungen sind wir von der Vorstellung ausgegangen, dass in der Differentialgleichung die Constante k nicht gegeben, dagegen die Begrenzung ein für allemal gegeben sei. Es soll jetzt die Frage umgekehrt und untersucht werden, wie sich die Lösungen einer gegebenen Gleichung

(43) $$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + k^2 u = 0,$$

in welcher k irgend einen bestimmt gegebenen numerischen Werth, z. B. den Werth 1 hat, für verschiedene Begrenzungen verhalten.

Zunächst bemerken wir, dass die Differentialgleichung (43) ihre Form durchaus nicht ändert, wenn man für xy zwei neue Veränderliche einführt, welche mit xy in demselben linearen Zusammenhange stehen, in welchem zwei Systeme rechtwinkliger Coordinaten stehen, und daraus folgt unmittelbar, dass alle Sätze über die Function u, welche für irgend eine Begrenzungscurve gelten, ihre Gültigkeit nicht verlieren, wenn die Begrenzungscurve eine beliebige andere Lage in der Ebene der xy hat.

Hat man ferner eine Lösung $u\,(xy)$ der Gleichung:

(44) $$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + k'^2 u = 0,$$

so kann man daraus sofort eine Lösung der Gleichung (43) bilden, wenn man setzt:

$$u = u\left(\frac{k}{k'}\, x,\ \frac{k}{k'}\, y\right).$$

Diese Function $u\left(\frac{k}{k'}\, x, \frac{k}{k'}\, y\right)$ wird nun denselben Grenzbedingungen genügen, wie die Function $u\,(xy)$, aber an einer Grenzcurve, welche der Grenzcurve der Function $u\,(xy)$ ähnlich ist, so dass das Verhältniss der Lineardimensionen der ersten Curve zur zweiten $\frac{k}{k'}$ ist. Mit Hülfe dieser Bemerkung lassen sich die Resultate der vorigen §§. unmittelbar auf die Voraussetzungen dieses § übertragen, und ergeben folgende Sätze, wobei stillschweigend immer die Bedingungen der Stetigkeit vorausgesetzt sind:

1) Die Lösung der Gleichung (43), in welcher k eine gegebene Zahl bedeutet, ist im Allgemeinen völlig bestimmt, sobald die Werthe derselben an der Begrenzung gegeben sind.
2) Es existiren im Allgemeinen keine von 0 verschiedene Lösungen u, welche am Rande verschwinden.
3) Diese beiden Behauptungen erleiden Ausnahmen für gewisse Begrenzungscurven, deren Anzahl unendlich ist; welche so bestimmt werden können, dass sie einer beliebig gegebenen Curve ähnlich sind. Es existiren Lösungen u, welche an diesen Curven verschwinden, dagegen existiren keine, welche an diesen Curven beliebig gegebene Werthe erhalten. Auch sind die Lösungen u nicht völlig bestimmt durch die an solchen Curven gegebenen Werthe.
4) Ebenso existiren im Allgemeinen keine von 0 verschiedene Lösungen, deren nach der Normale genommenener Differentialquotient am Rande verschwindet, oder bei denen zwischen dem Randwerth selbst und dem nach der Normale genommenen Differentialquotienten eine gegebene lineare homogene Relation besteht. Aber auch hier gibt es, wie unter No. 3., Ausnahmecurven.

§. 9.

Ich wende mich nun zur Durchführung der Integration der Gleichung

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + k^2 u = 0 \tag{1}$$

in einigen Fällen, und zwar mit solchen Grenzbedingungen, wie sie in physikalischen Problemen verlangt werden. In physikalischen Problemen ist immer die Begrenzung des Flächenstücks, in welchem u gefunden werden soll, gegeben, und über die Constante k bleibt die Verfügung vorläufig frei. Es wird natürlich das Nächstliegende sein, neue Coordinaten $\xi\eta$ an Stelle der xy einzuführen, so dass die Begrenzung durch constante Werthe einer der neuen Coordinaten ausgedrückt wird. Besonders vortheilhaft werden dabei solche Substitutionen sich erweisen, bei denen die alten und die neuen Variablen zusammenhängen durch Gleichungen von der Form:

$$x + iy = f(\xi + i\eta)\ ;\ x - iy = \varphi(\xi - i\eta)$$

wenn f und φ conjugirt imaginäre Functionen bedeuten. Durch eine solche Substitution nämlich ändert der erste Theil der Gleichung (1) seine Form nicht, und man erhält die transformirte Gleichung:

$$(2)\qquad \frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2} + f'(\xi + i\eta)\,\varphi'(\xi - i\eta)\,k^2 u = 0.$$

Setzt man für f eine Exponentialfunction, führt man mit anderen Worten Polarcoordinaten ein, so kann man mit Hülfe der Bessel'schen Functionen die Differentialgleichung (2) lösen für Flächen, welche von concentrischen Kreisen und von radialen Linien begrenzt sind. Der Umstand, auf dem in diesem Falle die Möglichkeit der Lösung beruht, ist der, dass sich von der Differentialgleichung (2) particuläre Integrale finden lassen, welche das Product sind aus zwei Functionen, deren eine nur von ξ, deren andere nur von η abhängig ist. Man kann sich nun die Frage stellen, welches die allgemeinste Beschaffenheit der Function $f(\xi + i\eta)$ ist, bei welcher dieser Fall eintritt, und bei der dann ein ähnliches Verfahren wird eingeschlagen werden können. Es wird in diesen Fällen wenigstens immer möglich sein, die Lösung des Problems von der Integration gewöhnlicher Differentialgleichungen abhängig zu machen.

Um diese Frage allgemein zu untersuchen, nehme man an, es gebe eine der Gleichung (2) genügende Function u von der Form:

$$(3)\qquad u = XY,$$

in welcher X allein von ξ, Y allein von η abhängig ist. Substituirt man diesen Ausdruck in die Gleichung (2), so kann dieselbe durch Division mit XY auf die Form gebracht werden:

$$(4)\qquad \frac{1}{X}\frac{d^2 X}{d\xi^2} + \frac{1}{Y}\frac{d^2 Y}{d\eta^2} + k^2 f'(\xi + i\eta)\,\varphi'(\xi - i\eta) = 0,$$

und diese Gleichung kann, wie man sieht, nur unter der Voraussetzung befriedigt werden, dass das Product $f'(\xi + i\eta)\,\varphi'(\xi - i\eta)$ sich als die Summe zweier Functionen ΞH darstellen lässt, deren eine nur von ξ, deren andere nur von η abhängig ist, also:

$$(5)\qquad f'(\xi + i\eta)\,\varphi'(\xi - i\eta) = \Xi + H.$$

Ist aber diese Bedingung erfüllt, dann erhält man jederzeit aus (4) zwei gewöhnliche Differentialgleichungen zur Bestimmung von $X\,Y$, welche, wenn man mit λ eine willkürliche Constante bezeichnet die Form annehmen:

$$(6)\qquad \begin{aligned} \frac{d^2 X}{d\xi^2} + (k^2 \Xi + \lambda)\,X &= 0,\\ \frac{d^2 Y}{d\eta^2} + (k^2 H - \lambda)\,Y &= 0. \end{aligned}$$

Um aber die allgemeinste Form der Function f zu finden, welche der Bedingung (5) genügt, differentiirt man diese Gleichung nach einander in Bezug auf ξ und in Bezug auf η, wodurch die rechte Seite identisch verschwindet. Man erhält so die Gleichung:

$$\frac{f'''(\xi+i\eta)}{f'(\xi+i\eta)} = \frac{\varphi'''(\xi-i\eta)}{\varphi'(\xi-i\eta)},$$

eine Gleichung, die nicht anders erfüllt sein kann, als wenn beide Seiten einer und derselben, und zwar reellen, Constanten gleich sind; also:

(7) $$f'''(\xi+i\eta) = a f'(\xi+i\eta).$$

In dem speciellen Falle, in welchem $a = 0$ ist, wird f eine ganze rationale Function des zweiten Grades, und da man x und y ebenso wie ξ und η durch Addition willkürlicher Constanten verändern kann, ohne die Verhältnisse wesentlich zu ändern, so kann man setzen:

$$x + iy = f(\xi + i\eta) = A(\xi + i\eta)^2.$$

Die Curven, in denen ξ constant ist, bilden ebenso wie die, in denen η constant ist, ein System confocaler Parabeln, welche einander rechtwinklig schneiden, deren gemeinsamer Brennpunkt der Punkt $x = 0$, $y = 0$ ist, und deren gemeinschaftliche Axe, falls A reell ist, mit der x-Axe zusammenfällt. Auf den absoluten Werth von A kommt hierbei nicht viel an, weil dadurch nur das gemeinschaftliche Mass der Grössen ξ, η bestimmt wird, so dass wir, unbeschadet der Allgemeinheit, $A = \frac{1}{2}$ setzen können.

Die Gleichungen (6) werden unter dieser Voraussetzung:

(8) $$\begin{cases} \dfrac{d^2X}{d\xi^2} + (k^2\xi^2 + \lambda)\,X = 0 \\ \dfrac{d^2Y}{d\eta^2} + (k^2\eta^2 - \lambda)\,Y = 0. \end{cases}$$

Ob man in der allgemeinen Gleichung (7) a positiv oder negativ annimmt, ist ziemlich gleichgültig, weil durch die eine dieser Annahmen nur eine Vertauschung der Variablen $\xi\,\eta$ der anderen Annahme bewirkt wird. Nehmen wir daher a positiv und setzen $a = \alpha^2$, so erhält man, wenn man eines der partikulären Integrale der Gleichung (7):

$$Ae^{+\alpha(\xi+i\eta)} + B \;\; ; \;\; Ae^{-\alpha(\xi+i\eta)} + B$$

für die Function $f(\xi+i\eta)$ nimmt, gewöhnliche Polarcoordinaten, was also auf das bekannte, durch die Bessel'schen Functionen lösbare Problem führt, während das allgemeine Integral der Gleichung (7), welches sich in die Form bringen lässt:

$$f(\xi+i\eta) = A\sin\big(i\alpha(\xi+i\eta)+\beta\big) + B,$$

auf die elliptischen Coordinaten führt, also einer Begrenzung entweder durch eine Ellipse oder durch zwei confocale Ellipsen oder durch die Bögen confocaler Ellipsen und Hyperbeln entspricht. Ohne die Allgemeinheit irgend wie zu beeinträchtigen, kann man den Constanten $B\alpha\beta$ ganz beliebige Werthe ertheilen, und wir können demnach setzen:

$$x + iy = f(\xi + i\eta) = A\sin i(\xi + i\eta),$$

worin A reell angenommen werden kann, da eine andere Annahme einer Drehung des Coordinatensystems xy entsprechen würde. Bei dieser Annahme wird nun:

$$f'(\xi+i\eta)\varphi'(\xi-i\eta)=A^2\cos i(\xi+i\eta)\cos i(\xi-i\eta)=\tfrac{1}{2}A^2(\cos 2i\xi+\cos 2\eta)$$
$$=A^2(\cos^2\eta-\sin^2 i\xi)\,,$$

und demnach nehmen die Gleichungen (6) die Form an:

$$(9)\qquad \begin{cases} \dfrac{d^2X}{d\xi^2}-(A^2k^2\sin^2 i\xi-\lambda)\,X=0 \\[2ex] \dfrac{d^2Y}{d\eta^2}+(A^2k^2\cos^2\eta-\lambda)\,Y=0\,. \end{cases}$$

Damit sind alle Fälle erschöpft, in welchen eine Integration auf Grund der hier vorausgesetzten Eigenschaften möglich ist. Von den Gleichungen (9) bin ich bis jetzt nicht im Stande, Integrale in einer auch nur einigermassen übersichtlichen Form aufzustellen; hätte man solche gefunden, so wären in dem Falle, wo die Begrenzung nur durch eine oder durch zwei confocale Ellipsen gebildet ist, die beiden Constanten k und λ so zu bestimmen, dass einerseits Y eine um 2π periodische Function von η würde, andererseits X für die den Grenzen entsprechenden constanten Werthe von ξ den besonderen Grenzbedingungen genügt, z. B. dass X oder $\dfrac{dX}{d\xi}$ gleich Null werde, was für k und λ ein System von zwei transcendenten Gleichungen ergibt. Aehnliche Verhältnisse treten auch bei den Gleichungen (8) auf, deren Integration sich durchführen lässt, und die ich, wiewohl die Formeln keine besonders einfache Gestalt annehmen, mittheilen will, weil dabei einige nicht uninteressante Fragen über die verschiedenen Arten der Begrenzung zu erledigen sind, welche in allen ähnlichen Problemen in gleicher Weise auftreten, und weil sich ferner dabei, als an einem Beispiel, die Entwicklung einer willkürlichen Function von zwei Variablen nach den verschiedenen Lösungen der Gleichung (1) (allerdings ihre Möglichkeit vorausgesetzt) durchführen lässt.

§. 10.

Die den Gleichungen (8) zu Grunde liegende Substitution: $x+iy=(\xi+i\eta)^2$ oder:

$$(10)\qquad x=\xi^2-\eta^2\quad;\quad y=2\xi\eta$$

und deren Auflösung:

$$(11)\qquad x=\xi^2-\frac{y^2}{4\xi^2}\quad;\quad x=\frac{y^2}{4\eta^2}-\eta^2$$

zeigen, dass die Gleichungen $\xi=\text{const.}$ und $\eta=\text{const.}$ die Gleichungen je eines Systems confocaler Parabeln sind, deren gemeinsamer Brennpunkt im Punkte $x=0$, $y=0$ liegt, und deren gemeinsame Axe mit der x-Axe zusammenfällt. Wenn ξ von 0 bis $+\infty$ oder von 0 bis $-\infty$ geht, so erhält man der Reihe nach alle Parabeln der einen Schaar, anfangend von der mit der x-Axe zusammenfallenden

Parabel bis zu der im Unendlichen gelegenen; ebenso, wenn η von 0 bis $+\infty$ oder von 0 bis $-\infty$ geht, alle Parabeln der anderen Schaar. Mit diesem Umstande, dass man jede Parabel zweimal erhält, hängt es zusammen, dass, wie die Substitution (10) zeigt, jedem Werthsystem $\xi\eta$ nur ein einziger Punkt xy entspricht, wiewohl zwei Parabeln sich in zwei Punkten schneiden. Es repräsentiren aber die Werthe ξ, η denselben Punkt, wie die Werthe $-\xi$, $-\eta$, während die beiden Werthsysteme $\xi, -\eta$; $-\xi, \eta$ den zu $\xi\eta$ in Bezug auf die Axe symmetrisch gelegenen Punkt bezeichnen.

In Bezug auf die Begrenzung sind 3 Fälle zu unterscheiden:

1) Die Begrenzung ist gebildet durch zwei Parabeln, von denen die eine der einen, die andere der andern Schaar angehört.

2) Die Begrenzung ist gebildet von drei Parabeln, zweien der einen und einer der andern Art, so dass das Flächenstück ungefähr die Gestalt eines Ringsegmentes hat, wobei dann von der einzelnen Parabel zwei verschiedene Bögen in der Begrenzung vorkommen.

3) Die Begrenzung wird durch 4 Parabeln, zweien aus jeder Schaar, gebildet, so dass das Gebiet die Gestalt eines krummlinigen Rechtecks hat. Dieses Rechteck darf aber nicht so beschaffen sein, dass es einen Theil der Axe einschliesst, weil sonst die verlängerten Begrenzungsparabeln auch noch durch das Innere der Fläche gehen würden.

Die Integration der Gleichungen (8) lässt sich nun nach bekannten Regeln mittelst einer hypergeometrischen Reihe ausführen, welche allerdings sich in imaginärer Form darstellt; der Ausdruck der Reihe in reeller Form scheint nicht ganz einfach zu sein, und ich will daher nur die in reeller Form darstellbaren bestimmten Integrale anführen, durch welche sich die Gleichungen (8) integriren lassen, und welche, wenigstens für reelle Werthe von $\xi\eta$, stets convergiren (für imaginäre Werthe dieser Variablen, die uns hier nicht interessiren, muss eine kleine Modification eintreten). Bezeichnet man mit X', X'', Y', Y'' die partikulären Integrale der Gleichung (8), so ergibt sich:

$$(12)\quad \left\{ \begin{aligned} X' &= \int_0^1 (1-s)^{\frac{1}{4}-1} s^{\frac{1}{4}-1} \cos\left\{ k\xi^2 (s-\tfrac{1}{2}) + \frac{\lambda}{4k} \log \frac{s}{1-s} \right\} ds \\ X'' &= \xi \int_0^1 (1-s)^{\frac{3}{4}-1} s^{\frac{3}{4}-1} \cos\left\{ k\xi^2 (s-\tfrac{1}{2}) + \frac{\lambda}{4k} \log \frac{s}{1-s} \right\} ds \\ Y' &= \int_0^1 (1-s)^{\frac{1}{4}-1} s^{\frac{1}{4}-1} \cos\left\{ k\eta^2 (s-\tfrac{1}{2}) + \frac{\lambda}{4k} \log \frac{s}{1-s} \right\} ds \\ Y'' &= \eta \int_0^1 (1-s)^{\frac{3}{4}-1} s^{\frac{3}{4}-1} \cos\left\{ k\eta^2 (s-\tfrac{1}{2}) + \frac{\lambda}{4k} \log \frac{s}{1-s} \right\} ds. \end{aligned} \right.$$

Diese Lösungen der Gleichungen (8) lassen sicht leicht verificiren. Man sieht, dass eines der partikulären Integrale eine gerade, das andere eine ungerade Function der Variablen ξ resp. η ist. Die Constanten $k\,\lambda$ sind nun noch, den Grenzbedingungen entsprechend, durch transcendente Gleichungen zu bestimmen.

Fassen wir wieder die oben §. 4. schon erwähnten drei Hauptformen der Grenzbedingungen ins Auge, und berücksichtigen die drei verschiedenen Formen der Begrenzung, so muss:

1) wenn die Begrenzung durch zwei Parabeln gebildet ist:

$$\begin{array}{ll} \text{für } \xi = \pm\,\xi_1 : \\ \text{für } \eta = \pm\,\eta_1 : \end{array} \quad a)\left\{\begin{array}{l} X = 0 \\ Y = 0 \end{array}\right. \quad b)\left\{\begin{array}{l} \frac{\partial X}{\partial \xi} = 0 \\ \frac{\partial Y}{\partial \eta} = 0 \end{array}\right. \quad c)\left\{\begin{array}{l} X \pm \alpha \frac{\partial X}{\partial \xi} = 0 \\ Y \pm \alpha \frac{\partial Y}{\partial \eta} = 0 , \end{array}\right.$$

worin α eine positive Constante bedeuten soll, wenn $\xi_1\,\eta_1$ positive Werthe haben. Man erhält zur Bestimmung der beiden Constanten $k\,\lambda$ vier verschiedene Systeme von je zwei transcendenten Gleichungen, wenn man setzt:

$$\alpha)\ X = X' \ ,\ \ Y = Y' \qquad \beta)\ X = X'' \ ,\ \ Y = Y''$$
$$\gamma)\ X = X' \ ,\ \ Y = Y'' \qquad \delta)\ X = X'' \ ,\ \ Y = Y' .$$

Die beiden letzteren Annahmen $\gamma)$ $\delta)$ sind aber in diesem Falle nicht zulässig, weil die aus ihnen gebildete Lösung der Gleichung (1)

$$u = X'\,Y'' \quad ; \quad u = X''\,Y'$$

in dem Gebiete nicht eindeutig ist; beide Lösungen ändern nämlich ihr Vorzeichen, wenn man die Vorzeichen von ξ und η gleichzeitig ändert, wodurch man keinen anderen Punkt der Fläche erhält. Man hat also hier zwei Reihen von Partikularlösungen: $X'\,Y'$; $X''\,Y''$, von denen jede einzelne mit einem willkürlichen Factor versehen werden kann, und deren es so viele giebt, als das entsprechende System transcendenter Gleichungen zusammengehörige Wurzelpaare besitzt.

2) Wenn die Begrenzung durch drei Parabeln: $\xi = \xi_1$, $\xi = \xi_2$, $\eta = \pm\,\eta_1$ gebildet ist, so muss:

$$\begin{array}{l} \text{für } \xi = \xi_1 \\ \text{für } \xi = \xi_2 \\ \text{für } \eta = \pm\,\eta_1 \end{array} \quad a)\left\{\begin{array}{l} X = 0 \\ X = 0 \\ Y = 0 \end{array}\right. \quad b)\left\{\begin{array}{l} \frac{dX}{d\xi} = 0 \\ \frac{dX}{d\xi} = 0 \\ \frac{dY}{d\eta} = 0 \end{array}\right. \quad c)\left\{\begin{array}{l} X + \alpha \frac{dX}{d\xi} = 0 \\ X - \alpha \frac{dX}{d\xi} = 0 \\ Y \pm \alpha \frac{dY}{d\eta} = 0 . \end{array}\right.$$

worin, falls $0 < \xi_2 < \xi_1$, $0 < \eta_1$ ist, α wieder eine positive Constante bedeuten soll. Man erhält hier in den drei Fällen ein System von drei transcendenten Gleichungen und muss daher eine der beiden folgenden Annahmen machen:

$$\alpha)\quad X = A'\,X' + A''\,X'' \qquad Y = Y'$$
$$\beta)\quad X = B'\,X' + B''\,X'' \qquad Y = Y'' .$$

Aus den drei transcendenten Gleichungen sind die 3 Constanten $k, \lambda, A' : A''$ oder $B' : B''$ zu bestimmen und man erhält wieder zwei Reihen von Partikularlösungen der Gleichung (1):

$$Y' (A' X' + A'' X'') \quad ; \quad Y'' (B' X' + B'' X''),$$

von denen jede einzelne mit einem constanten Factor behaftet ist.

3) Die Begrenzung bestehe aus vier Parabelbögen:

$$\xi = \xi_1 \quad \xi = \xi_2 \quad ; \quad \eta = \eta_1 \quad \eta = \eta_2$$

und es sei $\qquad 0 < \xi_2 < \xi_1 \quad ; \quad 0 < \eta_2 < \eta_1 ,$

dann ergeben sich folgende Bedingungen:

$$\begin{array}{ll} \text{für } \xi = \xi_1 \,,\ \xi_2: \\ \text{für } \eta = \eta_1 \,,\ \eta_2: \end{array} \quad \alpha) \begin{cases} X = 0 \\ Y = 0 \end{cases} \quad \beta) \begin{cases} \dfrac{dX}{d\xi} = 0 \\ \dfrac{dY}{d\eta} = 0 \end{cases} \quad \gamma) \begin{cases} X + \alpha \dfrac{dX}{d\xi} = 0 \\ Y \pm \alpha \dfrac{dY}{d\eta} = 0 . \end{cases}$$

Man erhält also in diesem Falle vier transcendente Gleichungen, und, um diesen genügen zu können, muss man setzen:

$$X = A' X' + A'' X'' \quad , \quad Y = B' Y' + B'' Y'' ,$$

so dass die vier Constanten $k, \lambda, A' : A'', B' : B''$ aus den transcendenten Gleichungen bestimmt werden können. Es ergibt sich dann nur eine Reihe von Partikularlösungen der Gleichung (1) von der Form:

$$(A' X' + A'' X'') (B' X' + B'' X''),$$

in der wieder jede einzelne mit einem willkürlichen constanten Factor behaftet ist.

§. 11.

Dass die Constante k, wie sie sich aus den im vorigen §. besprochenen transcendenten Gleichungen ergibt, keine imaginären Werthe haben kann, wurde schon im §. 4. in viel allgemeinerer Form nachgewiesen. Es soll gegenwärtig gezeigt werden, dass auch die Constante λ in den Gleichungen (8), als Wurzel jener transcendenten Gleichungen betrachtet, keine imaginären Werthe haben kann. Der Beweis davon ist sehr einfach. Aus zwei Gleichungen von der Form der ersten Gleichung (8) mit verschiedenen Werthen von λ:

$$\frac{d^2 X}{d \xi^2} + (k^2 \xi^2 + \lambda) X = 0$$

$$\frac{d^2 X'}{d \xi^2} + (k^2 \xi^2 + \lambda') X' = 0$$

folgt nämlich, wenn mit $\xi' \xi''$ irgend zwei constante Werthe von ξ bezeichnet werden, zwischen denen die Functionen $X\, X'$ mit ihren ersten Differentialquotienten stetig sind:

$$(\lambda-\lambda')\int\limits_{\xi'}^{\xi''} X X' \, d\xi = \left[X \frac{dX'}{d\xi} - X' \frac{dX}{d\xi}\right]_{\xi=\xi'}^{\xi=\xi''}.$$

Nun lassen sich in Folge der Bedingungen des vorigen §. ξ' und ξ'' immer so annehmen, dass die rechte Seite dieser Gleichung verschwindet, so dass

$$(\lambda-\lambda')\int\limits_{\xi'}^{\xi''} X X' \, d\xi = 0$$

wird; man hat nur im ersten Falle $\xi' = -\xi_1$, $\xi'' = +\xi_1$, in den beiden anderen Fällen $\xi' = \xi_2$, $\xi'' = \xi_1$ anzunehmen. Sind nun λ und λ' und mithin $X\,X'$ conjugirt imaginär, so ist das Integral in vorstehender Gleichung wesentlich positiv, und es folgt $\lambda = \lambda'$, was der Annahme widerspricht, dass λ und λ' conjugirt imaginär seien. Es sind demnach alle Wurzeln k λ unserer transcendenten Gleichungen reell. Denkt man sich die Wurzeln der erwähnten transcendenten Gleichungen bestimmt, so erhält man zu jeder Wurzel k eine unendliche Reihe von Wurzeln λ, während die Reihe der Wurzeln k selbst unendlich ist. Man erhält also eine doppelt unendliche Reihe von Functionen $X\,Y$ und durch diese Functionen soll durch Vermittelung von willkürlichen Constanten eine willkürliche Function U von zwei Variablen $\xi\,\eta$ innerhalb des betrachteten Gebietes dargestellt werden. Die Möglichkeit einer solchen Darstellung vorausgesetzt, findet man dieselbe auf folgendem Wege, wobei ich mich, der Einfachheit wegen, auf den ersten Fall des vorigen §. beschränke, wo nur zwei Parabeln zur Begrenzung gebraucht werden, zumal da die Betrachtungen sich in den beiden anderen Fällen genau in derselben Weise durchführen lassen. Man setzt also:

$$(13) \qquad U = \sum_{k\lambda} (A'_{k\lambda} X'_{k\lambda} Y'_{k\lambda} + A''_{k\lambda} X''_{k\lambda} Y''_{k\lambda}).$$

In der Summe $\sum\limits_{k\lambda}$ hat man sich die einzelnen Glieder in einem Rechteck, der Grösse der Wurzeln k, λ nach angeordnet zu denken. Unter den Wurzeln λ kommen auch negative vor, welche im Allgemeinen nicht mit den positiven übereinstimmen, während bei den Wurzeln k immer positive und negative dem absoluten Werthe nach einander gleich sind, so dass man nur die eine Reihe zu benutzen braucht. Das Rechteck, in welchem die Summe (13) geschrieben ist, wächst daher in der Richtung der λ beiderseits ins Unendliche, während in der Richtung der k es nur nach einer Seite hin ins Unendliche wächst und nach der anderen Seite durch die absolut kleinste Wurzel k begrenzt bleibt.

Es sind nun in der Gleichung (13) die Coëfficienten $A'_{k\lambda}$ $A''_{k\lambda}$ zu bestimmen durch die Function U.

Zu dem Ende bemerken wir, dass die Functionen $X_{k\lambda}\ Y_{k\lambda}$, was auch λ sein mag, der Differentialgleichung genügen:

$$(14)\qquad \frac{\partial^2 X_{k\lambda} Y_{k\lambda}}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 X_{k\lambda} Y_{k\lambda}}{\partial \eta^2} + k^2 (\xi^2+\eta^2)\, X_{k\lambda}\ Y_{k\lambda} = 0\,,$$

stellt man diese Gleichung für eine zweite Function $X_{k'\lambda'}\ Y_{k'\lambda'}$ auf, multiplicirt diese letztere Gleichung mit $X_{k\lambda}\ Y_{k\lambda}$, die Gleichung (14) mit $X_{k'\lambda'}\ Y_{k'\lambda'}$, zieht beide von einander ab und integrirt über die ganze Fläche, d. h. in Bezug auf ξ von $-\xi_1$ bis $+\xi_1$, in Bezug auf η von 0 bis η_1, so ergibt sich mit Rücksicht auf die Grenzbedingungen:

$$(k'^2 - k^2) \int_0^{\eta_1}\int_{-\xi_1}^{+\xi_1} (\xi^2+\eta^2)\, X_{k\lambda} Y_{k\lambda} X_{k'\lambda'} Y_{k'\lambda'}\, d\xi\, d\eta = 0\,.$$

Daraus erhellt, dass das Integral verschwinden muss, sobald k und k' verschieden sind, mögen λ und λ' gleich oder verschieden sein.

Da $Y_{k\lambda}\ Y_{k'\lambda'}$ entweder gerade oder ungerade Functionen von η sind, so wird unter derselben Voraussetzung verschiedener k und k':

$$(15)\qquad \int_{-\eta_1}^{+\eta_1}\int_{-\xi_1}^{+\xi_1} (\xi^2+\eta^2)\, X_{k\lambda}\, X_{k'\lambda'}\, Y_{k\lambda}\, Y_{k'\lambda'}\, d\xi\, d\eta = 0\,,$$

nun folgt aber unter der Voraussetzung eines gleichen k und verschiedener λ, λ' aus den Gleichungen (8) §. 9.:

$$\int_{-\xi_1}^{+\xi_1} X_{k\lambda}\, X_{k\lambda'}\, d\xi = 0 \qquad \int_{-\eta_1}^{+\eta_1} Y_{k\lambda}\, Y_{k\lambda'}\, d\eta = 0\,,$$

und daraus ergibt sich weiter, dass die Gleichung (15) nur dann nicht erfüllt ist, wenn sowohl $k = k'$ als $\lambda = \lambda'$ ist.

Endlich folgt noch unmittelbar daraus, dass $X'_{k\lambda}\ Y'_{k\lambda}$ gerade, $X''_{k\lambda}\ Y''_{k\lambda}$ ungerade Functionen sind, die Gleichung:

$$(16)\qquad \int_{-\eta_1}^{+\eta_1}\int_{-\xi_1}^{+\xi_1} (\xi^2+\eta^2)\, X'_{k\lambda}\, X''_{k\lambda}\ Y'_{k\lambda}\ Y''_{k\lambda}\, d\xi\, d\eta = 0\,.$$

Mittelst dieser Gleichung sind die Coëfficienten in der Gleichung (13) völlig bestimmt; nämlich:

$$A'_{k\lambda} = \frac{\int_{-\eta_1}^{+\eta_1}\int_{-\xi_1}^{+\xi_1} (\xi^2+\eta^2)\, U\, X'_{k\lambda}\, Y'_{k\lambda}\, d\xi\, d\eta}{\int_{-\eta_1}^{+\eta_1}\int_{-\xi_1}^{+\xi_1} (X'_{k\lambda}\, Y'_{k\lambda})^2\, d\xi\, d\eta}$$

$$A''_{k\lambda} = \frac{\int_{-\eta_1}^{+\eta_1}\int_{-\xi_1}^{+\xi_1} (\xi^2+\eta^2)\, U\, X''_{k\lambda}\, Y''_{k\lambda}\, d\xi\, d\eta}{\int_{-\eta_1}^{+\eta_1}\int_{-\xi_1}^{+\xi_1} (\xi^2+\eta^2)\, (X''_{k\lambda}\, Y''_{k\lambda})^2\, d\xi\, d\eta}\,.$$

Wie schon bemerkt, lassen sich für den Fall einer Begrenzung durch drei oder vier Parabeln die Rechnungen genau in derselben Weise durchführen. Auch im Falle einer Begrenzung durch Ellipsen lassen sich, ohne die Ausdrücke für die Functionen X Y entwickelt zu haben, in ganz ähnlicher Weise aus den Differentialgleichungen selbst Mittel und Wege finden, um die Coëfficienten der Entwickelung einer willkürlichen Function nach diesen Functionen durch bestimmte Integrale auszudrücken. Ich gehe übrigens an dieser Stelle nicht weiter auf diesen Gegenstand ein.

Heidelberg im Juli 1868.

Einige Eigenschaften einer gewissen Gattung von Curven vierter Ordnung.

Von J. Lüroth in Karlsruhe.

Herr Clebsch hat in seinem Aufsatze über die Theorie der Curven vierter Ordnung (Crelle's Journal Bd. 59) gezeigt, dass es trotz der in genügender Anzahl vorhandenen Constanten im Allgemeinen nicht möglich sei, die Gleichung einer Curve vierter Ordnung darzustellen als eine Summe von fünf vierten Potenzen; dass vielmehr diejenigen Curven, welche diese Eigenschaft besitzen, sich auszeichnen durch das Verschwinden einer Invariante. Herr Clebsch hat im citirten Aufsatze einige Eigenschaften dieser Curven abgeleitet; im Folgenden sollen einige andere angegeben und besonders der Beweis geführt werden, dass das Verschwinden jener Invariante auch eine hinreichende Bedingung ist zur Darstellung der Curve als Summe von fünf Biquadraten.

§. 1.

Darstellung der Gleichung als Summe von fünf Quadraten.

Schreiben wir die Gleichung einer Curve vierter Ordnung in der Form

$$u = \sum_{i,k,l,m} u_{iklm}\, x_i\, x_k\, x_l\, x_m\,,$$

wo sich die Summe erstreckt über die Werthe 1, 2, 3 der Indices, so sind die Curven, welche wir hier betrachten wollen, charakterisirt durch die Bedingung, dass die Determinante

$$(1)\qquad A = \begin{vmatrix} u_{1111} & u_{1112} & u_{1122} & u_{1113} & u_{1123} & u_{1133} \\ u_{1211} & u_{1212} & u_{1222} & u_{1213} & u_{1223} & u_{1233} \\ u_{2211} & u_{2212} & u_{2222} & u_{2213} & u_{2223} & u_{2233} \\ u_{1311} & u_{1312} & u_{1322} & u_{1313} & u_{1323} & u_{1333} \\ u_{2311} & u_{2312} & u_{2322} & u_{2313} & u_{2323} & u_{2333} \\ u_{3311} & u_{3312} & u_{3322} & u_{3313} & u_{3323} & u_{3333} \end{vmatrix},$$

welche eine Invariante ist, verschwindet. Bezeichnen wir die zum Elemente $u_{ik,lm}$ gehörige Unterdeterminante von A mit $A_{ik,lm}$, so ist $A_{ik,lm} = A_{lm,ik}$, und diese Grössen haben, weil $A = 0$, die Eigenschaft, dass sechs Grössen p_{ik} existiren, welche die Gleichungen

(2) $$A_{ik,lm} = p_{ik}\, p_{lm} \qquad i,k,l,m = 1,2,3$$

erfüllen.

Diese sechs Grössen p_{ik} kann man betrachten als Coëfficienten der Gleichung einer Curve zweiter Classe K, welche dann eine zugehörige Form sein wird.

Wir fassen nun die Polare eines Punktenpaares $x\,y$ in's Auge, d. h. die erste Polare des einen dieser Punkte in Bezug auf die erste Polare des zweiten; deren Gleichung ist

$$\Sigma\, \eta_i\, \eta_k\, x_l\, y_m\, u_{iklm} = \Sigma\, a_{ik}\, \eta_i\, \eta_k = 0\,.$$

Diese Polare ist ein Kegelschnitt, dessen Coëfficienten sind:

$$a_{ik} = \sum_{l,m} x_l\, y_m\, u_{iklm}\,.$$

Multipliciren wir mit p_{ik} und summiren nach i und k, so erhalten wir, wegen der Definition der p_{ik}, die Gleichung:

(3) $$\sum_{ik} a_{ik}\, p_{ik} = 0\,.$$

Wenn umgekehrt die Coëfficienten a_{ik} eines beliebigen Kegelschnittes diese Gleichung erfüllen, so kann er als zweite Polare aufgefasst werden. Denn aus den obigen Gleichungen, die dann nur fünf unabhängige darstellen, folgen fünf der Grössen:

$$2\,x_1 y_1\ ,\ x_1 y_2 + x_2 y_1\ ,\ 2\,x_2 y_2\ ,\ x_1 y_3 + x_3 y_1\ ,\ x_2 y_3 + x_3 y_2\ ,\ 2\,x_3 y_3$$

als lineare Functionen der sechsten. Die Determinante dritten Grades dieser sechs Grössen, welche bekanntlich verschwindet, liefert dann eine Gleichung dritten Grades für diese sechste Grösse, wodurch diese bestimmt ist. Wenn man sich erinnert an die von Herrn Hesse gegebene geometrische Deutung der Gleichung (3), so erhält man den Satz: Wenn ein gegebener Kegelschnitt Polare eines Punktenpaares sein soll, so muss ein Polardreieck von K ihm eingeschrieben oder eines seiner Polardreiecke K umgeschrieben werden können. Es gibt dann 3 Punktenpaare, als deren Polare der Kegelschnitt betrachtet werden kann.

Wir bezeichnen jetzt die Coordinaten von sechs beliebigen Punktenpaaren mit $x^h\, y^h$ $(h = 1, 2, 3, 4, 5, 6)$ und multipliciren die Determinante A mit einer andern, in der eine Zeile ist:

$$x_1^h\, y_1^h\ ,\ x_1^h\, y_2^h + x_2^h\, y_1^h\ ,\ x_2^h\, y_2^h\ ,\ x_1^h\, y_3^h + x_3^h\, y_1^h\ ,\ x_2^h\, y_3^h + x_3^h\, y_2^h\ ,\ x_3^h\, y_3^h\,.$$

Wir erhalten auf diese Weise eine neue Determinante, in der die Elemente der h^{ten} Zeile entstehen aus:

$$\sum_{l,m} x_l^h y_m^h u_{iklm};$$

indem man für i, k die Werthe $1, 2, 3$ setzt. Da diese Determinante aber mit A gleichzeitig verschwindet, so kann man sechs Coëfficienten p_h so bestimmen, dass

$$\sum_h p_h \sum_{l,m} u_{iklm} x_l^h y_m^h = 0 \qquad i, k = 1, 2, 3 .$$

Multiplicirt man diese Gleichung mit $\eta_i \eta_k$ und summirt nach i und k, so entsteht die identische Gleichung:

$$(4) \qquad \sum_h p_h \sum_{iklm} \eta_i \eta_k x_l^h y_m^h u_{iklm} = 0 ,$$

wo die p_h Functionen sind der Coordinaten der sechs Punktenpaare. Diese Gleichung lehrt, dass die Gleichung der Polare eines beliebigen Punktenpaares sich linear ausdrücken lässt durch die Gleichungen der Polaren von fünf anderen beliebigen Punktenpaaren. Und wenn umgekehrt diese Eigenschaft stattfindet, so zeigt die vorhergehende Ableitung, dass auch die Invariante A verschwindet, den Fall ausgenommen, dass die Determinante, mit der oben multiplicirt wurde, selbst verschwindet. Dies tritt aber ein, wenn die sechs Punktenpaare harmonische Polenpaare eines und desselben Kegelschnittes sind; und in diesem speciellen Falle gilt der vorige Satz für alle Curven vierter Ordnung.

Die Coëfficienten p_h bestimmen sich am einfachsten, wenn man die fünf Punktenpaare passend wählt und zwar so, dass jedes Paar ein harmonisches Polenpaar ist der Polaren der anderen Punktenpaare. Dass sich solche fünf Polenpaare stets angeben lassen, zeigt sich leicht mit Hülfe des Satzes: Wenn zwei Punkte x, y harmonische Pole sind der Polare zweier anderen Punkte ξ, η, so sind umgekehrt ξ, η harmonische Pole der Polare von x, y, den die doppelte Interpretation der Gleichung

$$\sum \xi_i \eta_k x_l y_m u_{iklm} = 0$$

ergibt. Denn man gehe von einem Punktenpaare 1 aus und nehme ein harmonisches Polenpaar seiner Polare zum Punktenpaare 2. Den einen Punkt des Paares 3 kann man noch beliebig wählen, der zweite ist aber dann bestimmt als Schnitt der Polaren des ersten Punktes in Bezug auf die Polaren von 1 und 2. Wenn man nun zu den drei Kegelschnitten $1, 2, 3$ die Jacobi'sche Curve construirt, so kann man auf dieser eine unendliche Anzahl von Punktenpaaren angeben, welche harmonische Pole sind der drei Kegelschnitte $1, 2, 3$. Eines dieser wählen wir zum Punktenpaare 4. Das fünfte Paar, welches harmonisch sein muss zu den 4 jetzt construirten Kegelschnitten, ist dreideutig bestimmt, wie ein Satz aus der Educational Times lehrt (cf. Crelle's Journal Bd. 68, p. 55). Der vorhin angeführte Satz zeigt jetzt, dass die fünf Punktenpaare die Bedingung erfüllen, dass jedes harmonisch ist zu den Polaren der übrigen. Wir nehmen diese fünf Punktenpaare zu den Paaren $x^1, y^1 \ldots x^5 y^5$, setzen $p_6 = -1$, und $x\,y$ für $x^6 y^6$. Dann bestehen die Gleichungen

$$\Sigma\, x_i^h\, y_k^h\, x_l^{h'}\, y_m^{h'}\, u_{iklm} = 0\,, \tag{5}$$

wenn h' nicht $= h$ ist. Setzen wir nun in Gleichung (4), die jetzt lautet:

$$\Sigma\, x_i\, y_k\, \eta_l\, \eta_m\, u_{iklm} = \sum_h p_h\, \Sigma\, \eta_i\, \eta_k\, x_l^h\, y_m^h\, u_{iklm}$$

$x^h + \lambda y^h$ für η und vergleichen beiderseits die Coëfficienten von λ, so erhalten wir, mit Rücksicht auf (5), die Gleichung:

$$\Sigma\, x_i^h\, y_k^h\, x_l\, y_m\, u_{iklm} = p_h\, \Sigma\, x_i^h\, y_k^h\, x_l^h\, y_m^h\, u_{iklm}\,.$$

Bezeichnen wir jetzt der Kürze wegen

$$\Sigma\, x_i^h\, y_k^h\, \eta_l\, \eta_m\, u_{iklm} \quad \text{mit} \quad U_h(\eta\,\eta)\,,$$
$$\Sigma\, x_i^h\, y_k^h\, x_l\, y_m\, u_{iklm} \quad \text{mit} \quad U_h(x\,y)\,,$$

so wird:

$$\sum \eta_i\, \eta_k\, x_l\, y_m\, u_{iklm} = \sum_h \frac{U_h(x,y)}{U_h(x^h y^h)} \cdot U_h(\eta\,\eta)\,. \tag{6}$$

Hiermit ist zugleich eine Bedingung gegeben für die Wahl der Punktenpaare. Da nämlich keiner der Nenner verschwinden soll, so darf keines der Paare so gewählt sein, dass der eine seiner Punkte auf der zweiten Polare des andern liegt.

Das sechste Paar x, y ist noch ganz willkürlich. Man kann also auch den Punkt x mit y zusammenfallen lassen und hat dann, wenn man auch noch $\eta = x$ setzt, für den ganz willkürlichen Punkt x die Gleichung:

$$\sum x_i\, x_k\, x_l\, x_m\, u_{iklm} = u = \sum_h \frac{U_h(x\,x)^2}{U_h(x^h\, y^h)}\,. \tag{7}$$

Die Gleichung der Curve ist also ausgedrückt als Summe von fünf Quadraten. Wenn umgekehrt diese Darstellung möglich ist, so verschwindet, wie man sofort sieht, A. Addirt man nun zu der obigen Gleichung $\lambda\, U_h(x\,x)^2$, wo λ beliebig, so erhält man die Gleichung des Curvenbüschels, dessen Curven die gegebene in den Punkten berühren, wo sie von dem Kegelschnitt $U_h(x\,x) = 0$ getroffen wird. Da nun die so entstandene Gleichung sich noch als Summe von fünf Quadraten darstellt und $U_h(x\,x)$ als Gleichung der zweiten Polare eines beliebigen Punktenpaares angesehen werden kann, so hat man den Satz: dass alle Curven vierter Ordnung, welche die gegebene berühren in den Punkten, wo sie von der Polare eines beliebigen Punktenpaares geschnitten wird, von der hier betrachteten Art sind.

§. 2.

Darstellung der Gleichung der Curve als Summe von fünf Biquadraten.

Zunächst muss ich einige Sätze anführen über die Polaren von Punktenpaaren, welche in zwei Linien oder eine Doppellinie zerfallen, und welche Herr Clebsch a. o. a. O. bewiesen hat.

Wenn die Polare eines Punktenpaares zerfällt, so sind die beiden Linien, in welche sie zerfällt, harmonische Polaren des Kegelschnittes K und zu jedem solchen Paare von Polaren gehören drei Punktenpaare als Pole. Jeder Pol liegt auf der Determinante der ersten Polare (Polardeterminante) des andern. Jede Tangente von K und nur eine solche kann als eine in eine Doppellinie ausgeartete Polare und zwar von drei Punktenpaaren betrachtet werden. Von den beiden Punkten eines solchen Paares ist jeder ein Eckpunkt der in drei Gerade zerfallenden Polardeterminante des anderen, und die ihm gegenüberliegende Seite dieses Dreiecks ist eben die Polare der beiden Punkte. Alle diese Punkte liegen auf einer Curve vierter Ordnung $S = 0$ und jeder Punkt dieser Curve kann Punkt eines Paares sein. Die Seiten aller zerfallenden Polardeterminanten umhüllen also den Kegelschnitt K, und jede Tangente ist Seite von sechs Dreiecken, während die Ecken aller dieser Dreiecke auf S liegen und jeder Punkt von S Eckpunkt von drei Dreiecken ist, deren Pole die Ecken seiner eigenen Polardeterminante sind.

Betrachten wir nun irgend eine Tangente A_1 des Kegelschnittes K. Diese muss nach dem Vorigen Seite von sechs zerfallenden Polardeterminanten sein, deren Ecken auf S liegen müssen. 12 dieser Ecken sind also die Schnittpunkte von A_1 mit S und nach dem Vorigen liegen in jedem dieser Schnittpunkte drei Ecken. Die Seiten der sechs Dreiecke gehen durch diese Ecken und berühren K, es sind also die Tangenten, welche man durch die Schnittpunkte von A_1 mit S an K noch ziehen kann. Der Schnittpunkt je zweier ist ein Dreieckspunkt, der also auf S liegen muss. Also bilden die vier Tangenten, welche man durch die Schnittpunkte von A_1 und S an K legen kann, ein vollständiges Vierseit, dessen Ecken auf S liegen und dessen Gegenecken die Pole der Tangente A_1 sind. Nennt man die vier mit Hülfe von A_1 construirten Tangenten $A_2\, A_3\, A_4\, A_5$, so erkennt man leicht, dass, wenn man von irgend einer derselben, A_2 z. B., ausgegangen wäre, man gerade die $A_1\, A_3\, A_4\, A_5$ gefunden hätte. Diese fünf Tangenten bilden also ein vollständiges Fünfseit, dessen 10 Ecken auf S liegen. Die Polardeterminante irgend einer Ecke ist gebildet durch die drei Seiten, welche nicht durch jene Ecke gehen, und die Polare zweier

Ecken, in welchen sich vier Seiten schneiden, besteht aus der doppelt zu rechnenden fünften Seite. Die angegebene Construction zeigt ferner, dass das Fünfseit durch eine seiner Seiten oder eine seiner Ecken eindeutig bestimmt ist und dass man S unendlich viele Fünfseite einschreiben kann, welche K umschrieben sind.

Man theile nun die 10 Eckpunkte des Fünfseits so in fünf Paare, dass jeder Seite des Fünfseits die Punkte eines Paares als Pole entsprechen. Bezeichnet man mit $x^h y^h$ die Pole der Seite A_h, so ist also

$$\Sigma\, x_i^h\, y_k^h\, \eta_l\, \eta_m\, u_{iklm} = A_h\,(\eta)^2 \tag{8}$$

das Quadrat der Gleichung dieser Seite. Es besteht dann die Gleichung (5)

$$\Sigma\, x_i^h\, y_k^h\, x_l^{h'}\, y_m^{h'}\, u_{iklm} = A_h(x^{h'})\, A_h(y^{h'}) = 0\,,$$

weil stets einer der Pole von $A_{h'}$ auf der Seite A_h liegt. Die fünf Punktenpaare können also an Stelle der im vorigen §. gebrauchten treten und man erhält so die Gleichung:

$$u = \sum_h \frac{A_h\,(x)^4}{A_h(x^h)\, A_h\,(y^h)}\,. \tag{9}$$

Hiermit ist gezeigt, dass die Gleichung unserer Curve sich darstellen lässt als Summe von fünf Biquadraten und dass das Verschwinden der Invariante A nothwendige und hinreichende Bedingung dazu ist.

Durch Addition eines Gliedes $\varrho\, A_h\,(x)^4$ erkennt man, dass alle Curven vierter Ordnung, welche diese vierpunktig berühren in den Punkten einer Tangente von K, Curven der gleichen Art sind, wie die gegebene.

Die obige Darstellung verliert ihre Gültigkeit, wenn einer der Nenner verschwindet, d. h. wenn einer der Pole einer Seite in diese selbst fällt. Dies kann nur dann eintreten, wenn zwei Seiten eines Fünfseits zusammenfallen. Fallen z. B. die beiden Seiten I und IV der Figur zusammen, so rücken die Punkte $y^3 x^1 x^2$ unendlich nahe resp. an die Punkte $x^4\, y^2\, x^3$, d. h. die Linien II, III, V werden Tangenten von S. Da I und IV zwei unendlich nahe Tangenten von K sind, so muss ihr Schnittpunkt, der auf S liegt, zugleich auf K liegen.

Und umgekehrt ist unschwer zu erkennen, dass jedem Schnittpunkte von K und S ein Fünfseit entspricht, in welchem zwei Seiten zusammenfallen, so dass deren Zahl acht beträgt. Jede den Curven S und K gemeinsame Tangente liefert ebenfalls ein Fünfseit mit zusammenfallenden Seiten, das aber ausser ihr noch zwei andere solche Tangenten enthält. Die Anzahl derselben wird also auch hier $= \frac{2 \cdot 12}{3} = 8$, wie oben. Diese Uebereinstimmung zeigt auch, dass S keinen Doppelpunkt hat. Es gibt also acht Fünfseite, in welchen zwei Seiten zusammenfallen. Diese Seite schneidet S in vier Punkten, von welchen einer auf K liegt. Die Tangenten, die man in den drei anderen Schnittpunkten an S legen kann, sind die drei anderen Seiten des Fünfseits, und ihre drei Schnittpunkte liegen also auf S.

Betrachten wir nun die erste Polare eines beliebigen Punktes y. Die Gleichung derselben ist:

$$\Sigma\, y_i\, x_k\, x_l\, x_m\, u_{iklm} = 0\,.$$

Soll diese Polare einen Doppelpunkt haben in x, so muss

$$\sum_{ik} y_i\, x_k\, u_{iklm} = \alpha_l\, \beta_m + \alpha_m\, \beta_l\,,$$
$$\Sigma\, \alpha_i\, x_i = 0\,,$$
$$\Sigma\, \beta_i\, x_i = 0$$

sein. Die Tangenten des Doppelpunktes müssen also reciproke Polaren von K sein. Fallen die beiden Tangenten zusammen, so müssen sie diesen Kegelschnitt berühren. Der Pol y und der Rückkehrpunkt x seiner Polare müssen dann also Punkte von S sein, deren Polare in eine Doppelgerade degenerirt. Da aber x auf dieser Geraden liegen muss, so kann die Rückkehrtangente nur eine solche Seite eines Fünfseits sein, mit welcher eine andere zusammenfällt. y ist dann einer der zu dieser Seite gehörigen Pole. Es folgt also hieraus: In einem der acht Fünfseite, in welchem zwei Seiten coincidiren, ist diese Seite Rückkehrtangente von drei ersten Polaren. Die Pole dieser Polaren sind die Schnittpunkte der drei übrigen Seiten und jede dieser berührt S in dem Rückkehrpunkte der Polare des ihr gegenüberliegenden Pols. Es gibt also, wie bekannt, 24 Polaren, welche Rückkehrpunkte haben. Die Rückkehrpunkte selbst aber sind die Schnittpunkte von S mit der Hesse'schen Curve, wie Herr Clebsch gezeigt hat. Diese beiden Curven schneiden sich also in 24 Punkten, welche je zu dreien auf acht Geraden liegen. Die Gleichung 24ten Grades, welche diese Schnittpunkte liefert, wird sich also mit Hülfe einer Gleichung achten Grades und Gleichungen dritten Grades lösen lassen.

Die acht Geraden bilden eine Curve achter Ordnung, welche mit einer zweiten Curve achter Ordnung, die besteht aus der Hesse'schen Curve und dem Kegelschnitt K, 64 Punkte gemein hat, von welchen 32 auf der Curve vierter Ordnung S liegen. Nach einem bekannten Satze liegen also die übrigen 32 auf einer zweiten Curve vierter Ordnung S_1. Da aber jede der acht Geraden den Kegelschnitt K in zwei unendlich nahen Punkten schneidet, von welchen einer nur auf S liegt, so wird der andere auf S_1 liegen müssen, d. h. S und S_1 schneiden sich in 16 Punkten, von welchen 8 auf dem Kegelschnitt K liegen. Die übrigen 8 liegen dann auf einem zweiten Kegelschnitte. Zwischen den 5 Covarianten: der Hesse'schen Determinante Δ, der Gleichung $K' = 0$ des Kegelschnittes in Punktcoordinaten, dem Product der acht Geraden, welches wir P nennen wollen, und den beiden S und S_1 findet also eine Gleichung statt von der Form:

$$S \,.\, S_1 + \lambda P = \mu \Delta \,.\, K',$$

in welcher, wie leicht ersichtlich, λ und μ reine Zahlenfactoren sind.

§. 3.

Ableitung aller Transformationen aus einer bekannten.

Die Ausführung der Transformation der Gleichung der Curve in eine Summe von Biquadraten erfordert, wie das Obige zeigt, die Lösung einer Gleichung vierten Grades und eines Systems linearer Gleichungen. Wenn aber eine Transformation bekannt ist, so braucht man, um die übrigen zu finden, nicht mehr auf die Gleichung der Curve S zu recurriren, sondern man kann eine Gleichung fünften Grades mit einer willkürlichen Grösse aufstellen, welche alle anderen Transformationen liefert. Man kann bekanntlich die Gleichung einer Tangente des Kegelschnittes K darstellen in der Form $a + b\lambda + c\lambda^2 = 0$, wo λ ein Parameter ist. Bezeichnen wir die Parameter, welche den fünf Seiten eines Fünfseits zugehören, mit $\lambda_1 \ldots \lambda_5$, mit $A_i = 0$ die Gleichung der Seite, deren Parameter λ_i ist, und setzen

$$(\lambda - \lambda_1)(\lambda - \lambda_2) \ldots (\lambda - \lambda_5) = f(\lambda),$$

so wird durch

$$B_k^2 = \sum_i \frac{A_i^2}{f'(\lambda_i)(l_k - \lambda_i)}$$

das Quadrat der Gleichung der zum Parameter l_k gehörigen Tangente dargestellt. Schreiben wir die fünf Gleichungen an, welche zu den noch zu suchenden Parametern $l_1 \ldots l_5$ gehören, und lösen die Gleichungen auf (vergl. Baltzer, Determ., p. 88), so folgt:

$$A_i^2 = -\,g(\lambda_i) \sum_k \frac{f(l_k)}{g'(l_k)} \cdot \frac{B_k^2}{l_k - \lambda_i},$$

wo

$$g(l) = (l - l_1)(l - l_2) \ldots (l - l_5)$$

gesetzt ist.

Ist nun die Gleichung unserer Curve vierter Ordnung in Bezug auf das Fünfseit der A

$$u = \sum_i \varrho_i A_i^4 = 0,$$

so wird sie ausgedrückt in den B

$$u = \sum_i \sum_k \sum_h \varrho_i\, g(\lambda_i)^2 \frac{f(l_k)\, f(l_h)}{g'(l_k) g'(l_h)} \cdot \frac{B_h^2 \cdot B_k^2}{l_h - \lambda_i \cdot l_k - \lambda_i} .$$

Sollen nun die B wieder ein Fünfseit darstellen, so müssen die Producte $B_h^2\ B_k^2$ fortfallen und also die Gleichungen bestehen:

$$\sum_i \varrho_i\, g(\lambda_i)^2 \quad \frac{1}{l_h - \lambda_i \cdot l_k - \lambda_i} = 0 \quad , \quad h \text{ nicht gleich } k .$$

Diese 10 Gleichungen können aber zusammen bestehen, denn sie entstehen durch Subtraction je zweier der fünf Gleichungen:

$$\sum_i \varrho_i\, g(\lambda_i)^2 \quad \frac{1}{l_k - \lambda_i} = \mu \quad , \quad k = 1 \ldots 5 ,$$

wo μ willkürlich ist. Bestimmt man aus diesen fünf Gleichungen $\varrho_i\, g(\lambda_i)$, so ergibt sich

$$\varrho_i\, g(\lambda_i) = -\mu \frac{1}{f'(\lambda_i)} \sum_k \frac{f(l_k)}{g'(l_k)} \cdot \frac{1}{l_k - \lambda_i} .$$

Die im zweiten Gliede auftretende Summe ist aber nach einem bekannten Satze der Partialbruchzerlegung $= 1$ und also

$$\varrho_i\, g(\lambda_i) = -\frac{\mu}{f'(\lambda_i)} .$$

Führt man diesen Werth in die obige Gleichung ein, so ergibt sich endlich in

(10) $$\frac{1}{\mu} = \sum_i \frac{1}{\varrho_i\, f'(\lambda_i)^2\, (l - \lambda_i)}$$

eine Gleichung, die durch l_k erfüllt sein muss und also für jeden Werth von μ die fünf Parameter der Seiten eines Fünfseits liefert, welches die gewünschte Eigenschaft besitzt. Da die Discriminante einer Gleichung fünften Grades vom achten Grade in den Coëfficienten ist, so ergibt sich auch hier, dass 8 Fünfseite existiren, in welchen zwei Seiten zusammenfallen.

§. 4.

Untersuchung der Covariante S.

Bilden wir nun mit Zugrundelegung der Form (9) die Gleichung der Curve S. Wenn wir für die Coëfficienten einer ternären biquadratischen Form symbolisch Potenzen und Producte von Grössen a, b, c, d einführen, so wird nach Herrn Aronhold der symbolische Ausdruck von S gegeben durch

$$6\, S = a\, b\, c\, d\, (a\, b\, c)\, (a\, b\, d)\, (a\, c\, d)\, (b\, c\, d) ,$$

wo $a = a_1\, x_1 + a_2\, x_2 + a_3\, x_3$ und $(a\, b\, c) = \Sigma \pm a_1\, b_2\, c_3$ gesetzt ist. Schreiben wir, wie im vorigen §., u in der Form

$$u = \sum_i \varrho_i A_i^4 ,$$

und bezeichnen mit (ihk) die Determinante der drei Formen A_i, A_k, A_h, so findet man, abgesehen von einem Zahlenfactor:

$$
\begin{aligned}
(11) \qquad S = {} & \varrho_1 \varrho_2 \varrho_3 \varrho_4 \,(123)\,(124)\,(134)\,(234)\; A_1 A_2 A_3 A_4 \\
& + \varrho_1 \varrho_2 \varrho_3 \varrho_5 \,(123)\,(125)\,(135)\,(235)\; A_1 A_2 A_3 A_5 \\
& + \varrho_1 \varrho_2 \varrho_4 \varrho_5 \,(124)\,(125)\,(145)\,(245)\; A_1 A_2 A_4 A_5 \\
& + \varrho_1 \varrho_3 \varrho_4 \varrho_5 \,(134)\,(135)\,(145)\,(345)\; A_1 A_3 A_4 A_5 \\
& + \varrho_2 \varrho_3 \varrho_4 \varrho_5 \,(234)\,(235)\,(245)\,(345)\; A_2 A_3 A_4 A_5 ,
\end{aligned}
$$

wofür wir abkürzend schreiben wollen:

$$(11^*) \qquad S = k_5 A_1 A_2 A_3 A_4 + k_4 A_1 A_2 A_3 A_5 + \ldots$$

Die Curve S geht also, wie dies sein muss, durch die Ecken des Fünfseits der A. Die Gleichung der Tangente an S im Schnittpunkte der Seiten $A_1 = 0$ und $A_2 = 0$ findet sich

$$\frac{A_1}{k_1} + \frac{A_2}{k_2} = 0 .$$

Stellt man ebenso die Gleichungen der Tangenten auf für die beiden Ecken $A_1 = 0$ $A_3 = 0$, und $A_2 = 0$ $A_3 = 0$, so erkennt man leicht, dass diese drei Tangenten die gegenüberliegenden Seiten in drei Punkten einer geraden Linie schneiden. Man kann folglich einen Kegelschnitt beschreiben, der die Curve S in den Ecken eines Dreiseits des Fünfseits berührt. Die Gleichung dieses Kegelschnittes wird

$$H = k_1 A_2 A_3 + k_2 A_3 A_1 + k_3 A_1 A_2 = 0 ,$$

während S die Form annimmt

$$S = A_1 A_2 A_3 (k_4 A_5 + k_5 A_4) + A_4 A_5 \,.\, H .$$

Diese Gleichung zeigt, dass der obige Kegelschnitt S noch in zwei weiteren Punkten trifft, deren Verbindungslinie durch den Schnittpunkt der beiden anderen Seiten des Fünfseits geht und dort S berührt. Diese Ableitung verliert ihre Gültigkeit, wenn zwei Seiten des Fünfseits zusammenfallen. Die Betrachtung der Figur zeigt dann aber sofort, dass drei der Kegelschnitte, welche den vier dann existirenden Dreiseiten entsprechen, in zwei Linien zerfallen. Dass man um das vierte Dreiseit, dessen Seiten in den Schnittpunkten der zusammenfallenden Seiten S berühren, einen Kegelschnitt legen kann, von dem der obige Satz gilt, zeigt sich mit Hülfe des bekannten Theorems: Wenn man in den Schnittpunkten einer Curve n^{ter} Ordnung und einer Geraden die Tangenten an die Curve legt, so schneiden diese die Curve noch in $n(n-2)$ weiteren Punkten, welche auf einer Curve $(n-2)^{ter}$ Ordnung liegen.

Wir haben nun oben gesehen, dass zu einem Punkte von S' ein einziges Fünfseit gehört. In diesem Fünfseit ist ein Dreiseit dadurch ausgezeichnet, dass seine Seiten nicht durch jenen Punkt gehen. Der obige Satz zeigt dann, dass der Kegelschnitt, welcher S in den Ecken des Dreiseits berührt, noch in zwei Punkten schneidet, die auf der Tangente des gegebenen Punktes liegen. Wir wollen das Dreiseit und den Kegelschnitt als zu dem Punkte gehörig bezeichnen. Betrachtet man nun die zu zwei Punkten von S gehörigen Kegelschnitte und lässt den einen Punkt stetig seine Lage verändern, so wird auch der zugehörige Kegelschnitt sich stetig ändern, und wenn der eine Punkt mit dem andern zusammenfällt, so werden die beiden Kegelschnitte auch zusammenfallen. Denn wenn dies nicht der Fall wäre, so würden zwei Kegelschnitte existiren, welche zu einem Punkte gehörten, was unmöglich ist. Die zu den verschiedenen Punkten von S gehörigen Kegelschnitte bilden also nach dem von Herrn Hesse (Crelle's Journal Bd. 49, p. 243ff.) aufgestellten Begriffe ein und dasselbe System.

Betrachten wir nun zwei Punkte a und b von S. Da die beiden zugehörigen Dreiseite dem Kegelschnitte K umschrieben sind, so liegen ihre Ecken auf einem zweiten Kegelschnitte G. Dieser schneidet S noch in zwei weiteren Punkten. Um deren Lage zu finden, betrachten wir die zu a und b gehörigen Kegelschnitte H und H' zusammen als eine Curve vierter Ordnung und den doppelt gerechneten Kegelschnitt G in Verbindung mit den beiden Tangenten T und T', die man in a resp. b an S legen kann, als eine Curve sechster Ordnung. Von den Schnittpunkten dieser Curve mit der Curve vierter Ordnung S liegen dann 16 auf der Curve HH'. Nach einem bekannten Satze von Cayley (cf. Cremona, ebene Curven, p. 65) liegen also die übrigen auf einer Curve zweiter Ordnung. Diese acht Punkte sind aber die zwei Paare c, d von unendlich nahen Punkten, welche der doppelt gerechnete Kegelschnitt G ausser den Berührungspunkten von H und H' noch mit S gemein hat, und die zwei Paare a, b von unendlich nahen Punkten, in welchen T und T' schneiden. Es müsste also ein Kegelschnitt existiren, welcher die Curve S in den willkürlich gewählten Punkten a, b und in noch zwei anderen c, d berührte. Dies ist aber nicht möglich, weil schon die Zahl der Berührungskegelschnitte, welche in einem Punkte berühren, eine endliche ist. Der Kegelschnitt muss also zerfallen. Aber auch der Fall von zwei Linien ist zu verwerfen, weil sonst durch einen beliebigen Punkt von S eine Doppeltangente zu legen wäre. Es bleibt also nur der Fall übrig, dass der Kegelschnitt eine Doppellinie ist. Wir haben somit den Satz: Wenn man zu zwei Punkten a und b von S die zugehörigen Kegelschnitte construirt, so liegen deren Berührungspunkte auf einem Kegelschnitte, der S in zwei weiteren Punkten c, d schneidet. a, b, c, d liegen dann auf einer geraden Linie. Es folgt hieraus noch, dass, wenn man in der Construction ausgegangen wäre von den beiden Punkten c, d, man die Punkte a, b erhalten hätte, und Wenn man durch zwei Punkte a, b von S, eine gerade Linie legt, welche S noch in den beiden Punkten c, d trifft, so schneidet der Kegelschnitt G, welchen man durch c, d und die Ecken des zu a gehörigen Dreiseits beschreiben kann, S noch in drei Punkten, welche die Ecken des zu b gehörenden Dreiseits sind.

Die oben benutzte Ueberlegung verliert ihre Gültigkeit, wenn a und b Berührungspunkte einer und derselben Doppeltangente sind. Dann berührt aber der zu a gehörige Kegelschnitt in b und umgekehrt, und beide Kegelschnitte sind also Berührungskegelschnitte, die in allen Punkten berühren, wo sie S treffen. Da sie aber in ihrer früheren Bedeutung zum gleichen System gehören, müssen sie auch demselben System von Berührungskegelschnitten angehören. Nach einem Satze von Herrn Hesse (Crelle's Journal Bd. 49, p. 262) liegen also die Berührungspunkte wieder auf einem Kegelschnitte. Es tritt daher zu dem obigen Satze noch die Ergänzung hinzu: Sind die beiden Punkte a, b Berührungspunkte einer Doppeltangente, so geht der Kegelschnitt, den man um die Ecken der zugehörigen Dreiecke legen kann, durch die nämlichen beiden Punkte a, b hindurch.

Da die Gleichung von S auch geschrieben werden kann:

$$S = A_5 \,.\, H_5 + k_5 A_1 A_2 A_3 A_4 = 0\,,$$

wo H_5 die Gleichung:

$$k_1 A_2 A_3 A_4 + k_2 A_1 A_3 A_4 + k_3 A_1 A_2 A_4 + k_4 A_1 A_2 A_3 = 0$$

einer Curve dritter Ordnung bezeichnet, so sieht man, dass S von einer Curve dritter Ordnung berührt wird in den Ecken eines Vierseits. Da das Vierseit durch eine Tangente an K eindeutig bestimmt ist, so folgt, dass alle Berührungscurven dritter Ordnung derart einem Systeme angehören. Die hier auftretende Curve H_5 hat noch eine besondere Bedeutung. In der allgemeinen Theorie tritt eine Zwischenform auf, deren Symbol ist:

$$S_u = (uab)\,(uac)\,(ubc)\,(abc)\,abc\,;$$

führen wir hier unsern Ausdruck (9) für u ein, so erhalten wir, abgesehen von einem numerischen Factor:

$$S_u = \sum_{\varkappa\lambda\mu} \varrho_\varkappa\, \varrho_\lambda\, \varrho_\mu\, (\varkappa\lambda\mu)\,(u\varkappa\lambda)\,(u\varkappa\mu)\,(u\lambda\mu)\; A_\varkappa\, A_\lambda\, A_\mu\,,$$

wo die Summe ausgedehnt ist über die Combinationen ohne Wiederholungen der Zahlen 1, 2, 3, 4, 5 zu je dreien, und wo $(u\varkappa\lambda)$ die Determinante von $A_\varkappa$, A_λ und der Form $u_1 x_1 + u_2 x_2 + u_3 x_3$ bezeichnet. Setzen wir für $u_1\, u_2\, u_3$ die Coordinaten der Linie A_5, so geht, wie man sieht, S_u über in H_5. Da A_5 eine beliebige Tangente des Kegelschnittes K darstellt, so folgt mit Rücksicht auf die a. a. O. gegebene Bedeutung von S_u der Satz: Die Punkte, deren erste Polaren von einer gegebenen Tangente des Kegelschnittes K in solchen Punkten geschnitten werden, dass die in den Schnittpunkten an die Polare gezogenen Tangenten sich in einem Punkte schneiden, liegen auf einer Curve dritter Ordnung, welche S in den Ecken des zur gegebenen Tangente gehörigen Vierseits berührt.

Bezeichnen wir mit ϱ einen beliebigen linearen Ausdruck der Coordinaten, so stellt die Gleichung

$$\varrho S + A_1 A_2 A_3 A_4 A_5 = 0$$

ein ganzes Netz von Curven fünfter Ordnung dar, dessen Curven alle in den Eckpunkten eines Fünfseits S berühren. Die Eckpunkte zweier Fünfseite gehören zum gleichen System von Berührungspunkten. Denn da die Eckpunkte durch einen unter ihnen eindeutig bestimmt sind, so müssen sie alle zusammenfallen, wenn man einen Punkt des einen Fünfseits durch stetige Aenderung mit einem des anderen zur Deckung bringt.

Zum Beschlusse dieser Betrachtungen will ich noch den folgenden Satz anführen:

Wenn eine gegebene Curve vierter Ordnung die Eigenschaft hat, dass man ein vollständiges Fünfseit beschreiben kann, dessen Ecken alle auf ihr liegen, so kann man sie betrachten als Covariantencurve S zu einer anderen Curve vierter Ordnung, von der in §. 1. charakterisirten Art. In der That kann dann, wenn mit $A_1 \ldots A_5$ die Gleichungen der Seiten bezeichnet werden, die Gleichung der Curve stets in die Form gesetzt werden:

$$0 = \varrho_1' A_2 A_3 A_4 A_5 + \varrho_2' A_1 A_3 A_4 A_5 + \varrho_3' A_1 A_2 A_4 A_5 + \varrho_4' A_1 A_2 A_3 A_5 \\ + \varrho_5' A_1 A_2 A_3 A_4,$$

wo die $\varrho_1' \ldots \varrho_5'$ bestimmte Coëfficienten sind. Die Vergleichung mit der Form (11*) der Gleichung von S zeigt aber dann sofort, dass dieses die Covariante S ist zu der Form:

$$\frac{k_1}{\varrho_1'} A_1^4 + \frac{k_2}{\varrho_2'} A_2^4 + \frac{k_3}{\varrho_3'} A_3^4 + \frac{k_4}{\varrho_4'} A_4^4 + \frac{k_5}{\varrho_5'} A_5^4 .$$

Es gelten somit alle hier bewiesenen Eigenschaften von S allgemein für jede der Curven der im letzten Satze bezeichneten Art. Einen Satz hebe ich noch hervor, der aus dem Vorigen sich sofort ergibt: Wenn man einer Curve vierter Ordnung ein Fünfseit einschreiben kann, so kann man ihr unendlich viele einschreiben, deren Seiten alle einen Kegelschnitt berühren.

Nach einer blossen Abzählung könnte es scheinen, dass es stets möglich wäre, einer Curve vierter Ordnung ein solches Fünfseit einzuschreiben. Der vorletzte Satz zeigt, dass dies nicht richtig ist, denn eine allgemeine Curve vierter Ordnung müsste dann von einer anderen mit nur 13 Constanten abhängen, was unmöglich ist.

§. 5.

Ausnahmefälle.

Die Resultate, welche in den vorhergehenden §§. erlangt sind, stützen sich auf die Voraussetzung, dass der Kegelschnitt K nicht zerfällt. Wir wollen nun noch in Kürze die Aenderungen angeben, welche eintreten, wenn diese Voraussetzung nicht mehr gültig ist.

Der Kegelschnitt K möge zunächst bestehen aus zwei Punkten a und b. Damit dies der Fall sei, muss die Determinante der p_{ik} verschwinden. Die Coordinaten dieser beiden Punkte genügen dann den Gleichungen:

$$\sum_{i,k} a_i b_k u_{iklm} = 0 \quad , \quad l, m = 1, 2, 3 ,$$

welche sofort aussagen, dass die erste Polare von a im Punkte b, und die von b im Punkte a einen dreifachen Punkt besitzt, d. h. dass diese Polaren in drei gerade Linien zerfallen. Beziehen wir nun einen Punkt durch seine Coordinaten xyz auf ein Dreieck, dessen Ecken $x=0$ $y=0$ und $x=0$ $z=0$ in den Punkten a und b resp. liegen, während die dritte Ecke einer der Punkte ist, in welchen sich die Polare von a und die von b schneiden, so ist die Gleichung der ersten Polare von a $u_3 = 0$, wo nun u_3 eine binäre Form der Variabeln x und z ist, und ebenso ist die Polare von b $u_2 = 0$ und u_2 enthält nur die Variabeln x und y. Wenn wir also die gewöhnliche Bezeichnungsweise der dritten Differentialquotienten von u anwenden, so ist

$$u_{223} = u_{332} = u_{123} = 0 ,$$

und die Gleichung der Curve kann in die einfachere Form gesetzt werden:

$$(12)\quad ax^4 + by^4 + cz^4 + 4b'xy^3 + 4c'xz^3 + 6b''x^2y^2 + 6c''x^2z^2 = 0 .$$

Berechnet man nun den Ausdruck von S nach der von Herrn Aronhold gegebenen Darstellung, so folgt, mit Berücksichtigung der obigen Gleichungen und mit Fortlassung eines Zahlenfactors:

$$(13)\qquad S = (u^2_{122} - u_{112} \cdot u_{222})\,(u^2_{133} - u_{113} \cdot u_{333}) .$$

Der erste Factor $u^2_{122} - u_{112} \cdot u_{222}$ ist die Hesse'sche Determinante der binären Form u_2, der zweite dieselbe Covariante von u_3. Wir sehen also, dass hier die Covariante S in zwei Linienpaare zerfällt, die ihre Scheitel in a und b haben und die cyclisch-projectivischen Linien sind zu den Linien, welche die ersten Polaren von b und a bilden. Wo der Ausdruck cyclisch-projectivisch nach Herrn Clebsch (Crelle's Journal Bd. 68, p. 167) gebraucht ist, um die bekannte Beziehung anzudeuten, in welcher die Linien der Hesse'schen Determinante zu den Linien der Form selbst stehen. Es ist nun aus der Theorie der binären Formen dritten Grades bekannt, dass durch Einführung der Factoren der Hesse'schen Covariante als neuer Variabelen die Form sich darstellt als Summe zweier Cuben. Setzt man also $u^2_{112} - u_{122}\, u_{222} = Y_1\, Y_2$, wo $Y_1\, Y_2$ lineare Ausdrücke in x und y, so wird

$$u_2 = \alpha\, Y_1^3 + \beta\, Y_2^3\,,$$

und ähnlich geht u_3 über in

$$u_3 = \alpha'\, Z_1^3 + \beta'\, Z_2^3\,.$$

wenn wir $u^2_{113} - u_{133}\, u_{333} = Z_1\, Z_2$ setzen. Durch Integration ergibt sich hieraus für u die Form:

$$u = A' x^4 + B_1\, Y_1^4 + B_2\, Y_2^4 + C_1 Z_1^4 + C_2 Z_2^4\,, \tag{14}$$

so dass sich auch jetzt noch u als Summe von fünf Biquadraten darstellen lässt. Aus dieser einen Darstellung lassen sich noch unendlich viel andere ableiten. Man kann nämlich entweder die binäre Form

$$A' x^4 + B_1\, Y_1^4 + B_2\, Y_2^4$$

oder die Form

$$A' x^4 + C_1\, Z_1^4 + C_2\, Z_2^4$$

wieder auf unendlich viele Arten als Summe von drei Biquadraten darstellen, und erhält dann neue Ausdrücke für u. Die in einer solchen Darstellung angewandten Linien scheiden sich in zwei Gruppen von zwei und drei Linien. Das Linienpaar der ersten Gruppe hat seinen Scheitel in einem der beiden Punkte a, b und ist identisch mit dem von hier ausgehenden Linienpaar von S. Die drei Linien der zweiten Gruppe gehen dann durch den zweiten Punkt.

Die in (14) gegebene Darstellung wird unmöglich, wenn die Polare von b z. B. aus drei Linien besteht, von welchen zwei zusammenfallen. Dann kann man u_2 nicht mehr auf die oben angenommene Form bringen, sondern muss setzen

$$u_2 = Y_1^2\, Y_2\,.$$

Hieraus folgt für den von y abhängigen Theil von u die Form:

$$B\, Y_1^3\, Y_2 + B'\, Y_1^4\,.$$

Dagegen lässt sich u sogar als Summe von vier Biquadraten darstellen, wenn die Polare eines der Punkte a, b, des letzteren z. B., aus drei zusammenfallenden Linien besteht. Denn da u_2 dann in die Form gebracht werden kann

$$u_2 = Y^3\,,$$

so hat u den Ausdruck

$$u = A' x^4 + B\, Y^4 + C_1\, Z_1^4 + C_2\, Z_2^4\,,$$

der sich durch den oben schon angewandten Process noch auf unendlich viele andere Formen bringen lässt.

Eine Darstellung der Gleichung der Curve als Summe von vier vierten Potenzen tritt auch dann ein, wenn in dem Ausdruck (14) die Constante A' verschwindet. Dieser Fall unterscheidet sich aber von dem vorhergehenden dadurch, dass die Gleichung $u = 0$ sich nur auf eine Weise in diese Form bringen lässt. Denn eine zweite könnte nur daraus hervorgehen, dass man die Summe zweier der vorkommenden vierten Potenzen noch in anderer Weise in der gleichen Form ausdrückte. Dies ist aber unmöglich; denn wenn eine binäre Form vierten Grades als Summe von zwei Biquadraten dargestellt werden kann, so ist dies nur auf eine Weise möglich. Was nun die Bedingungen dieses Falles betrifft, so erkennt man leicht, dass, wenn man die Schnittpunkte der zwei Linienpaare, welche S bilden, bezeichnet mit $a'\,b'$, $a''\,b''$, die Polaren des Punktenpaares $a'\,b'$ und die des Punktenpaares $a''\,b''$ unbestimmt werden; und umgekehrt, wenn dies der Fall ist, so zeigt die Gleichung (14), dass $A' = 0$ ist. Es findet daher nicht nur die Gleichung statt

$$\Sigma\, a_i\, b_k\, u_{iklm} = 0\,,$$

sondern auch die beiden andern

$$\Sigma\, a'_i\, b'_k\, u_{iklm} = 0\,,$$
$$\Sigma\, a''_i\, b''_k\, u_{iklm} = 0\,.$$

Wenn andererseits diese Gleichungen bestehen, so zeigt die Untersuchung am Beginn dieses §., dass a, b, a', b', a'', b'' Doppelpunkte von S sein müssen, d. h. dass in der That vier dieser Punkte die Schnittpunkte zweier Linienpaare sind, welche von den beiden anderen ausgehen. Die Gleichungen oben aber sind nur möglich, wenn die

$$\Sigma\, p_{ik}\, u_{iklm} = 0$$

Auflösungen liefern von der Form

$$p_{ik} = p'_{ik} + \lambda\, p''_{ik}\,,$$

wo λ beliebig ist. Dann kann man in der That auf drei Arten λ so bestimmen, dass der Kegelschnitt K ein Punktenpaar wird. Auflösungen von dieser Art setzen aber bekanntlich voraus, dass ausser der Determinante der Gleichungen auch noch sämmtliche erste Unterdeterminanten verschwinden, während mindestens eine zweite Unterdeterminante nicht gleich Null sein darf. (Vergl. Baltzer, Determ. p. 62.)

Ohne mich bei den anderen leicht zu übersehenden Aenderungen aufzuhalten, die noch eintreten können, will ich noch den Fall betrachten, dass der Kegelschnitt K zerfällt in einen doppelt zu rechnenden Punkt a. Dann bestehen die Gleichungen

$$\Sigma\, a_i\, a_k\, u_{iklm} = 0\,,$$

welche aussagen, dass die Curve einen dreifachen Punkt hat in a. Dass auch der umgekehrte Schluss berechtigt ist, ist klar; es ergibt sich hieraus der Satz: Wenn eine Curve vierter Ordnung einen dreifachen Punkt haben soll, so muss erstens die Determinante A verschwinden. Dann sind die Unterdeterminanten Producte je zweier von sechs Grössen p_{ik}. Es müssen dann zweitens sämmtliche Determinanten zweiten Grades verschwinden, welche man aus diesen p_{ik} bilden kann.

Dieser Satz ist ein specieller Fall eines allgemeinen, welcher für Formen geraden Grades von beliebig vielen (n) Variabeln gilt. Soll eine solche Form $2p^{\text{ten}}$ Grades eine $(p+1)$fache Lösung besitzen, so muss ein System von (n, p) Formen p^{ten} Grades gleichzeitig annullirt werden, wo $(n, p) = \frac{n \,.\, n+1 \ldots n+p-1}{1 \,.\, 2 \ldots p}$. Diese Zahl ist aber die Anzahl der Glieder einer Form p^{ten} Grades. Aus den aufgestellten Gleichungen kann man also die Variabeln eliminiren, und erhält als erste Bedingung, dass eine Determinante verschwinden muss, welche der A, die wir hier betrachteten, ganz analog gebildet ist. Die ersten Unterdeterminanten dieser Determinante sind dann Producte je zweier von (n, p) Grössen, die man als die Coëfficienten einer zugehörigen Form p^{ten} Grades auffassen kann. Wenn diese zugehörige Form eine p^{te} Potenz eines linearen Ausdrucks ist, so geben die Coëfficienten dieses Ausdrucks die Werthe der Variabeln, für welche die $(p+1)$fache Lösung stattfindet. Die gesuchten Bedingungen lassen sich also aufstellen, wenn man die Bedingungen angeben kann, dass eine Form p^{ten} Grades die p^{te} Potenz eines linearen Ausdrucks ist.

Heidelberg, den 27. Juni 1868.

Note on the Solution of the Quartic Equation $\alpha U + 6\beta H = 0$.

By A. Cayley.

If U denote the quartic function $(a, b, c, d, e)(x, y)^4$, H its Hessian
$= (ac - b^2, 2(ad - bc), ae + 2bd - 3c^2, 2(be - cd), ce - d^2)(x, y)^4$,
α and β constants, then we may find the linear factors of the function $\alpha U + 6\beta H$ (or what is the same thing solve the equation $\alpha U + 6\beta H = 0$) by a formula almost identical with that given by me (Fifth Memoir on Quantics, Phil. Trans. t. 148 (1858) see p. 446) in regard to the original quartic function U.

In fact (reproducing the investigation) if I, J are the two invariants, $M = \frac{I^3}{4J^2}$, Φ the cubicovariant

$$= (-a^2 d + 3abc - 2b^3, \&c)(x, y)^6,$$

then the identical equation $JU^3 - IU^2H + 4H^3 = -\Phi^2$, may be written $(1, 0, -M, M)(IH, JU)^3 = -\frac{1}{4} I^3 \Phi^2$, whence if ω_1, ω_2, ω_3 are the roots of the equation $(1, 0, -M, M)(\omega, 1)^3 = 0$, or what is the same thing $\omega^3 - M(\omega - 1) = 0$; then the functions

$$IH - \omega_1 JU,\ IH - \omega_2 JU,\ IH - \omega_3 JU$$

are each of them squares: writing

$$(\omega_2 - \omega_3)(IH - \omega_1 JU) = X^2$$
$$(\omega_3 - \omega_1)(IH - \omega_2 JU) = Y^2$$
$$(\omega_1 - \omega_2)(IH - \omega_3 JU) = Z^2,$$

so that identically $X^2 + Y^2 + Z^2 = 0$, the expression $\alpha X + \beta Y + \gamma Z$ will be a square if only $\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 = 0$. (To see this observe that in virtue of the equation $X^2 + Y^2 + Z^2 = 0$, we have $X + iY$, $X - iY$ each of them a square, and thence

$$\alpha X + \beta Y + \gamma Z$$

$$= \tfrac{1}{2}(\alpha + i\beta)(X - iY) + \tfrac{1}{2}(\alpha - i\beta)(X - iY) - \gamma i \sqrt{X^2 + Y^2}.$$

is a square if the condition in question be satisfied.)

Hence in particular writing

$$\sqrt{\omega_2 - \omega_3}\ \sqrt{\alpha I + 6\beta\omega_1 J},\ \ldots,\ \sqrt{\omega_1 - \omega_2}\ \sqrt{\alpha I + 6\beta\omega_3 J}$$

for α, β, γ, we have

$$(\omega_2 - \omega_3)\,\sqrt{\alpha I + 6\beta\omega_1 J}\,\sqrt{IH + \omega_1 JU} + \cdots$$
$$+ (\omega_1 - \omega_2)\,\sqrt{\alpha I + 6\beta\omega_3 J}\,\sqrt{IH + \omega_3 JU}$$

a perfect square, and since the product of the four different values is a multiple of $(\alpha U + 6\beta H)^2$ (this is most readily seen by observing that for $\alpha U + 6\beta H = 0$, the irrational expression omitting a factor is $(\omega_2 - \omega_3)\,(\alpha I + 6\beta\omega_1 J) + \cdots + (\omega_1 - \omega_2)\,(\alpha I + 6\beta\omega_3 J)$, which vanishes identically) it follows that the expression in question is the square of a linear factor of $\alpha U + 6\beta H$.

It thus appears that the radicals (other than those arising from the solution of $U = 0$) contained in the solution of the equation

$$\alpha U + 6\beta H = 0$$

are the three roots

$$\sqrt{\alpha I + 6\beta\omega_1 J}\,,\ \sqrt{\alpha I + 6\beta\omega_2 J}\,,\ \sqrt{\alpha I + 6\beta\omega_3 J}\,.$$

Cambridge, 2nd September 1868.

Ueber die Theorie der ternären cubischen Formen.

Von A. Clebsch und P. Gordan in Giessen.

Eine typische Darstellung der ternären cubischen Formen hat, auf Grund seiner Erweiterung der Hermiteschen Theorie der „formes associées," Hr. Brioschi in den Comptes Rendus von 1863, erste Hälfte, p. 661 gegeben. Der vorliegende Aufsatz hat den Zweck, die Resultate des Hrn. Brioschi, oder vielmehr eine der seinigen ähnliche typische Darstellung aus der Theorie der ternären cubischen Formen zu entwickeln, und die dabei auftretenden Gestalten mit dieser Theorie in Zusammenhang zu bringen. In diesem Sinne wird das Folgende vielleicht für Diejenigen nicht ohne Interesse sein, welche der Theorie dieser Formen ein näheres Studium widmen.

§. 1.

Grundformeln.

Wir adoptiren im Folgenden grösstentheils die Bezeichnungen des Hrn. Aronhold. Sei f die gegebene Function dritter Ordnung von x_1, x_2, x_3,

$$f_i = \tfrac{1}{3}\frac{\partial f}{\partial x_i}, \quad f_{ik} = \tfrac{1}{6}\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_k} \text{ *)}$$

und

$$\varDelta = 6\,\Sigma \pm f_{11} f_{22} f_{33}.$$

Als zusammengesetzte Function benutzen wir $\varkappa f - \lambda \varDelta$, und haben dann nach Aronhold (indem nur das Vorzeichen des Coefficienten von λ geändert ist):

$$\varDelta_{\varkappa f - \lambda \varDelta} = \varDelta \varkappa^3 - 3\varDelta' \varkappa^2 \lambda + 3\varDelta'' \varkappa \lambda^2 - \varDelta''' \lambda^3,$$

wo

$$\varDelta' = Sf, \quad \varDelta'' = 2Tf - S\varDelta, \quad \varDelta''' = 3S^2 f - 2T\varDelta.$$

Benutzt man also die Form

$$G(\varkappa\lambda) = \varkappa^4 - 6S\varkappa^2\lambda^2 + 8T\varkappa\lambda^3 - 3S^2\lambda^4,$$

und setzt

---

*) Dieselbe Bezeichnung soll bei anderen Formen angewandt werden.

$$G_1 = \tfrac{1}{4}\frac{\partial G}{\partial \varkappa}\,,\; G_2 = \tfrac{1}{4}\frac{\partial G}{\partial \lambda}\,,\;\; G_{11} = \tfrac{1}{12}\frac{\partial^2 G}{\partial \varkappa^2} \text{ u. s. w.}$$

so ist

$$\Delta_{\varkappa f - \lambda \Delta} = G_1(\varkappa\lambda)\,.\,\Delta + G_2(\varkappa\,,\lambda)\,.\,f.$$

Als Covariante sechsten Grades wählen wir diejenige Verbindung der Covarianten sechster Ordnung, mit Producten von Covarianten dritter Ordnung, auf welche Hr. Brioschi (Crelles Journ. Bd. 63. p. 33) aufmerksam gemacht hat und welche, für die zusammengesetzte Function gebildet, der Gleichung genügt:

$$\psi_{\varkappa f - \lambda \Delta} = G^2(\varkappa\,,\lambda).\;\psi.$$

Bezeichnen wir symbolisch f durch $a_x^3 = b_x^3 \ldots$, Δ durch $\alpha_x^3 = \beta_x^3 \ldots$, und überhaupt durch $(p\,q\,r)$ die Determinante $\Sigma \pm p_1 q_2 r_3$, so hat man aus f und Δ zunächst die drei Covarianten sechster Ordnung:

$$\begin{aligned}
\varphi' &= a_x b_x\,(a\,b\,\Delta)^2\\
\varphi'' &= a_x \alpha_x\,(a\,\alpha\,f)\;(a\,\alpha\,\Delta)\\
\varphi''' &= \alpha_x \beta_x\,(\alpha\,\beta\,f)^2.
\end{aligned}$$

Dieselben werden durch ψ ausgedrückt mit Hülfe der Formeln:

$$\begin{aligned}
\varphi' &= -\frac{\psi}{3} - \tfrac{2}{3}\,Tf^2 + Sf\Delta\\
\varphi'' &= \frac{\psi}{6} + \tfrac{1}{3}\,Tf^2\\
\varphi''' &= -\frac{\psi}{3} + \tfrac{4}{3}\,Tf^2 - Sf\Delta.
\end{aligned}$$

Aus φ, Δ, f setzt sich die Covariante neunten Grades zusammen:

$$\Omega = 6\,(\psi\,f\,\Delta),$$

welche der Gleichung genügt:

$$\Omega_{\varkappa f - \lambda \Delta} = G^3(\varkappa\lambda).\;\Omega.$$

Für die Discriminante von f wählen wir (von Aronhold im Vorzeichen abweichend)

$$R = S^3 - T^2;$$

daher auch als zugehörige Formen:

$$\begin{aligned}
P_f &= TS_f - ST_f\\
R_f &= S^2 S_f - TT_f,
\end{aligned}$$

so dass

$$\begin{aligned}
P_{\varkappa f - \lambda \Delta} &= G^2(\varkappa\lambda)\;(\varkappa P_f - \lambda\,R_f)\\
R_{\varkappa f - \lambda \Delta} &= G^2(\varkappa\lambda)\,(G_1 R_f + G_2 P_f).
\end{aligned}$$

Als zugehörige Form sechsten Grades führt man statt der Form F, welche gleich Null gesetzt die Curve $f = 0$ in Liniencoordinaten darstellt, besser die Form

$$\Phi = 6\,RF + (STS_f'^2 - 2S^2 S_f T_f + TS_f^2),$$

welche, wie man sich sofort überzeugt, die Gleichung befriedigt*):

$$\Phi_{\varkappa f - \lambda \varDelta} = G^{1}(\varkappa\lambda).\ \Phi.$$

Aus ihr entspringt in Verbindung mit S_f, T_f die Hermitesche zugehörige Form neunten Grades:

$$\Pi = 6\,(\Phi,\ S_f,\ T_f).$$

Was diejenigen Zwischenformen betrifft, welche für die x und die u vom zweiten Grade sind, so entspringen aus der von **Aronhold** benutzten, Θ, ausser H noch eine dritte, K, und zwar hat man symbolisch:

$$\Theta = a_x\, b_x\, (a\, b\, u)^2,\ H = a_x\, \alpha_x\, (a\, \alpha\, u)^2,\ K = \alpha_x\, \beta_x\ (\alpha\, \beta\, u)^2,$$

und für die zusammengesetzte Function $kf - \lambda\varDelta$ findet man:

$$\begin{aligned}
\Theta_{\varkappa f - \lambda \varDelta} &= \varkappa^2\Theta - 2\varkappa\lambda H + \lambda^2 K \\
H_{\varkappa f - \lambda \varDelta} &= G_2(\varkappa\lambda)(\varkappa\Theta - \lambda H) + G_1(\varkappa\lambda)(\varkappa H - \lambda K) \\
K_{\varkappa f - \lambda \varDelta} &= G_2{}^2(\varkappa\lambda)\,\Theta + 2G_1(\varkappa\lambda)\,G_2(\varkappa\lambda)\,H + G_1{}^2(\varkappa\lambda)\ K \\
&= G(\varkappa\lambda)\,[G_{22}(\varkappa\lambda)\,\Theta + 2\,G_{12}(\varkappa\lambda)\,H + G_{11}(\varkappa\lambda)\,K] \\
&\qquad + S_{\varkappa\lambda}\,\Theta_{\varkappa f - \lambda \varDelta}.
\end{aligned}$$

§. 2.

Lineare Zwischenformen.

Die folgenden Untersuchungen beruhen wesentlich auf der Theorie derjenigen Zwischenformen, welche in Bezug auf die Liniencoordinaten u_1, u_2, u_3 vom ersten Grade sind, und welche daher kurz **lineare** genannt werden mögen. Die einfachste von diesen ist die evidente Zwischenform

$$u_x = u_1\, x_1 + u_2\, x_2 + u_3\, x_3\,.$$

Eine nächst-einfache entsteht, indem man die Determinante der u mit den ersten Differentialquotienten von f und $\varDelta$ bildet; wir bezeichnen sie durch

(1) $$N = 6(u\, f\varDelta) = 6\,(u\, a\, \alpha)\, a_x^2\, \alpha_x^2.$$

Dieselbe ist vom vierten Grade in den x, und ebenso vom vierten Grade in den Coefficienten. Man hat offenbar $\delta N = 0$; daher ist N eine Combinante und

*) Zum Beweise dieser und ähnlicher Formeln dienen folgende Sätze, welche hier ohne Beweis angeführt sein mögen, und in welchen das Zeichen δ dieselbe Bedeutung wie bei **Aronhold** hat:

Für jede Combinante φ des Systems $\varkappa f - \lambda\varDelta$ ist $\delta\varphi = 0$.

Jede Form φ, für welche $\delta\varphi$ verschwindet, genügt der Gleichung $\varphi_{\varkappa f - \lambda \varDelta} = G^{\nu}(\varkappa\lambda).\ \varphi$.

Der Beweis dieser Formeln, im Verein mit einer neuen und abgekürzten Darstellung der **Aronhold**'schen Theorie wird an einem andern Orte gegeben werden.

(2) $$N_{\varkappa f-\lambda\Delta} = G(\varkappa\lambda).\ N.$$

Aus N entspringt die weitere Form gleicher Art:

(3) $$Q = \tfrac{1}{12}\,\Sigma\,\frac{\partial N}{\partial u_i}\,\frac{\partial N}{\partial x_i}\,.$$

Diese ist ebenfalls eine Combinante; sie ist vom siebenten Grade in den x, vom achten in den Coefficienten, und des letztern Umstands wegen hat man

(4) $$Q_{\varkappa f-\lambda\Delta} = G^2(\varkappa,\lambda).\ Q.$$

Die Form Q lässt sich aus einfacheren linearen Zwischenformen zusammensetzen, welche aber nicht mehr Combinanten sind. Die symbolische Darstellung (1) von N liefert nämlich für Q den Ausdruck:

$$Q = 6\,(u\,a\,\alpha)\ a_x\,\alpha_x\,b_x^2\,\beta_x^2\,\left\{a_x\,(\alpha\,b\,\beta) + \alpha_x\,(a\,b\,\beta)\right\}.$$

Die beiden Theile dieses Ausdrucks unterscheiden sich nur dadurch von einander, dass a,b mit α,β vertauscht sind. Behandeln wir zunächst den ersten Theil, so können wir für ihn die halbe Summe der Ausdrücke setzen, welche durch Vertauschen von α und β entstehen, dieser Theil ist also:

$$3\ a_x^2\,b_x^2\,\alpha\beta_x\,(\alpha\,b\,\beta)\ \left\{(u\,a\,\alpha)\,\beta_x - (u\,a\,\beta)\,\alpha_x\right\}.$$

Aber nach einer bekannten, oft anzuwendenden Identität ist:

$$(u\,a\,\alpha)\,\beta_x - (u\,\alpha\,\beta)\,\alpha_x = (u\,\beta\,\alpha)\,a_x - (a\,\beta\,\alpha)\,u_x;$$

und der obige Ausdruck verwandelt sich also in:

$$3f.\ \alpha_x\,\beta_x\,(\alpha\beta f)\,(\alpha\beta u) - 3\,\varphi'''.\ u_x.$$

Vertauscht man α,β mit a,b, so geht f in Δ, φ''' in φ' (§. 1.) über, und man hat also für den zweiten Theil von Q:

$$3\,\Delta.\ a_x\,b_x\,(a\,b\,\Delta)\,(a\,b\,u) - 3\,\varphi'.\ u_x.$$

Indem man nun φ' und φ''' durch ψ ausdrückt (§. 1.), erhält man für Q folgende Darstellung:

(5) $$Q = \tfrac{1}{12}\,\Sigma\,\frac{\partial N}{\partial u_i}\,\frac{\partial N}{\partial x_i} = \Delta\,L - f\,M + 2\,\psi\,u_x.$$

und die neu auftretenden linearen Zwischenformen L, M sind durch die Gleichungen definirt (vgl. §. 1.).:

(6) $$\begin{cases} L = 3\,a_x\,b_x\,(a\,b\,\Delta)\ (a\,b\,u) - \Delta'\,u_x \\ M = -\,3\,\alpha_x\beta_x\,(\alpha\beta f)\,(\alpha\beta u) + \Delta''\,u_x. \end{cases}$$

Diese beiden Formen sind, wie N, von der vierten Ordnung in den x, und für die Coefficienten beziehungsweise von den Ordnungen 5 und 7. Sie stehen in ähnlicher Beziehung zu einander, wie f und Δ. Denn da Q und ψ Combinanten sind, so ist auch $\Delta L - fM$ eine solche, oder es ist:

$$\begin{aligned} \Delta_{\varkappa f-\lambda\Delta}\ L_{\varkappa f-\lambda\Delta} - (\varkappa f - \lambda\Delta)\ M_{\varkappa f-\lambda\Delta} &= G^2(\varkappa\lambda)\ (\Delta\,L - f M) \\ &= [G_2(\varkappa\lambda)\,f + G_1(\varkappa\lambda)\,\Delta]\ L_{\varkappa f-\lambda\Delta} - (\varkappa f - \lambda\,\Delta)\ M_{\varkappa f-\lambda\Delta}. \end{aligned}$$

Vergleicht man hier die Coefficienten von f und Δ, so findet man:

$$G_1(\varkappa\lambda)\, L_{\varkappa f-\lambda\Delta} + \lambda\, M_{\varkappa f-\lambda\Delta} = G^2(\varkappa\lambda).\ L$$
$$G_2(\varkappa\lambda)\, L_{\varkappa f-\lambda\Delta} - \varkappa\, M_{\varkappa f-\lambda\Delta} = -\,G^2(\varkappa\lambda).\ M,$$

oder durch Auflösung:

$$(7)\qquad \begin{cases} L_{\varkappa f-\lambda\Delta} = G(\varkappa\lambda)\,.\ (\varkappa L - \lambda M) \\ M_{\varkappa f-\lambda\Delta} = G(\varkappa\lambda)\quad (G_2(\varkappa\lambda)\, L + G_1(\varkappa\lambda)\, M). \end{cases}$$

Man schliesst hieraus unter Anderm, indem man die Glieder vergleicht, welche λ zur ersten Potenz enthalten:

$$(8)\qquad \delta L = M\ ,\ \delta M = 3SL^{*}),$$

Gleichungen, welche im Folgenden oft zur Anwendung kommen, und leicht direct zu beweisen sind.

Die ersten Theile von L und M hängen übrigens mit Θ und K genau zusammen; sie enstehen, wenn man die Ausdrücke bildet

$$\tfrac{1}{2}\,\Sigma\,\frac{\partial\Theta}{\partial u_i}\,\frac{\partial\Delta}{\partial x_i}\ ,\ \tfrac{1}{2}\,\Sigma\,\frac{\partial K}{\partial u_i}\,\frac{\partial f}{\partial x_i}.$$

Auf ähnliche Weise kann man aus Θ, H, K 6 Formen bilden, welche, wie man leicht sieht, sich in folgender Weise durch L, M ausdrücken:

$$(9)\qquad \begin{aligned} &\tfrac{1}{2}\,\Sigma\,\frac{\partial\Theta}{\partial u_i}\,\frac{\partial f}{\partial x_i} = \Delta u_x, && \tfrac{1}{2}\,\Sigma\,\frac{\partial\Theta}{\partial u_i}\,\frac{\partial\Delta}{\partial x_i} = L + \Delta' u_x \\ &\Sigma\,\frac{\partial H}{\partial u_i}\,\frac{\partial f}{\partial x_i} = -L + 2\Delta' u_x, && \Sigma\,\frac{\partial H}{\partial u_i}\,\frac{\partial\Delta}{\partial x_i} = M + 2\Delta'' u_x \\ &\tfrac{1}{2}\,\Sigma\,\frac{\partial K}{\partial u_i}\,\frac{\partial f}{\partial x_i} = -M + \Delta'' u_x, && \tfrac{1}{2}\,\Sigma\,\frac{\partial K}{\partial u_i}\,\frac{\partial\Delta}{\partial x_i} = \Delta''' u_x. \end{aligned}$$

Man verificirt diese Gleichungen sofort durch Anwendung des Processes δ, da $\delta\Theta = 2H$, $\delta H = K + 3S\Theta$, $\delta K = 6SH$ ist.

§. 3.

Transformationsformeln.

Wir bedienen uns jetzt der linearen Zwischenformen zu einer typischen Darstellung der Functionen f, Δ etc. Indem wir diese Functionen mit den Argumenten y geschrieben denken, $f(y^3)$, $\Delta(y^3)$,

---

*) Ueberhaupt folgt immer aus den Gleichungen

$$\delta\varphi = \psi\quad,\quad \delta\psi = 3S\varphi$$

dass $\Delta\varphi - f\psi$ eine Combinante ist, und dann wie oben, dass

$$\varphi_{\varkappa f-\lambda\Delta} = G^{\varrho}(\varkappa\lambda)\,\left\{\varkappa\varphi - \lambda\psi\right\}$$
$$\psi_{\varkappa f-\lambda\Delta} = G^{\varrho}(\varkappa\lambda)\,\left\{G_2(k\lambda)\,\varphi + G_1(\varkappa\lambda)\,\psi\right\},$$

wobei $4\varrho + 1$ die Ordnung von φ in der Coefficienten bedeutet, und ϱ eine ganze Zahl sein muss.

transformiren wir sie mit Hülfe von linearen Formeln, deren Coefficienten von den x abhängen. Setzen wir

$$N = n_1 u_1 + n_2 u_2 + n_3 u_3$$
$$Q = q_1 u_1 + q_2 u_2 + q_3 u_3.$$

Die anzuwendenden Transformationsformeln sind dann folgende:

$$(10) \qquad \begin{aligned} G.\, y_1 &= \xi x_1 + \eta n_1 + \zeta q_1 \\ G.\, y_2 &= \xi x_2 + \eta n_2 + \zeta q_2 \\ G.\, y_3 &= \xi x_3 + \eta n_3 + \zeta q_3. \end{aligned}$$

Der Factor G links ist die früher durch $G(\varkappa, \lambda)$ bezeichnete Function, wenn man darin $\varDelta$ für $\varkappa$ und f für λ setzt, also $G(\varDelta, f)$; die Argumente von G sollen in diesem Falle immer ausgelassen werden. Um die Gleichungen (10) aufzulösen, ist es gut, zunächst folgende Formeln zu bilden. Sei auch

$$(11) \qquad \begin{aligned} L &= l_1 u_1 + l_2 u_2 + l_3 u_3 \\ M &= m_1 u_1 + m_2 u_2 + m_3 u_3 \end{aligned}$$

Man hat dann nach (6) symbolisch:

$$(12) \qquad \left\{ \begin{aligned} \Sigma\, l_i\, f_i &= \quad 3 a_x b_x (ab\varDelta)(abf) - \varDelta' f \\ \Sigma\, l_i\, \varDelta_i &= \quad 3 a_x b_x (ab\varDelta)^2 - \varDelta' \varDelta \\ \Sigma\, m_i\, f_i &= -3 \alpha_x \beta_x (\alpha\beta f)^2 + \varDelta'' f \\ \Sigma\, m_i\, \varDelta_i &= -3 \alpha_x \beta_x (\alpha\beta f)(\alpha\beta\varDelta) + \varDelta'' \varDelta. \end{aligned} \right.$$

Die ersten Glieder rechts in der zweiten und dritten Gleichung sind direct φ' und φ''' (§. 1.); das erste Glied rechts der ersten Gleichung entsteht aus der ersten Formel (9), wenn man darin die u_i durch die $\varDelta_i$ ersetzt, und ist also $\varDelta^2$; das erste Glied rechts in der letzten Gleichung (12) entsteht ebenso, indem man in der letzten Gleichung (9) die u_i durch die f_i ersetzt, und ist also gleich $\varDelta''' f$. Demnach gehen die Gleichungen (9) in folgende über:

$$\begin{aligned} \Sigma l_i f_i &= \quad \varDelta^2 - \varDelta' f \\ \Sigma l_i \varDelta_i &= \varDelta' \varDelta - \varDelta'' f - \psi \\ \Sigma m_i f_i &= \varDelta' \varDelta - \varDelta'' f + \psi \\ \Sigma m_i \varDelta_i &= \varDelta'' \varDelta - \varDelta''' f. \end{aligned}$$

Man bemerkt aber, dass die Ausdrücke

$$\varDelta^2 - \varDelta' f\,, \; -(\varDelta' \varDelta - \varDelta'' f)\,, \; \varDelta'' \varDelta - \varDelta''' f$$

übereinstimmen mit den durch 12 dividirten zweiten Differentialquotienten von $G(\varDelta, f)$ nach $\varDelta$ und f, welche wir dem Vorigen entsprechend durch

$$G_{11}\,,\; G_{12}\,,\; G_{22}$$

bezeichnen. Und man kann also auch schreiben:

$$(13)\qquad \begin{aligned} \Sigma l_i f_i &= G_{11} & \Sigma m_i f_i &= -G_{12} + \psi \\ \Sigma l_i \Delta_i &= -G_{12} - \psi & \Sigma m_i \Delta_i &= G_{22}. \end{aligned}$$

Da nun nach (5)

$$q_i = \Delta l_i - f m_i + 2\psi x_i,$$

so findet man sofort auch:

$$(14)\qquad \begin{aligned} \Sigma q_i f_i &= G_1 + \psi f \\ \Sigma q_i \Delta_i &= -G_2 + \psi \Delta. \end{aligned}$$

Fügen wir die evidenten Gleichungen hinzu:

$$(15)\qquad \Sigma n_i f_i = 0\ ,\ \Sigma n_i \Delta_i = 0,$$

so können wir zunächst die Ausdrücke für ξ, ζ aus (10) leicht ableiten. Denn indem wir jene Gleichungen mit f_1, f_2, f_3 oder mit $\Delta_1, \Delta_2, \Delta_3$ multipliciren und jedesmal addiren, ergiebt sich mit Benutzung von (13), (14):

$$\begin{aligned} G\,\Sigma f_i y_i &= \xi f + \zeta(G_1 + \psi f) \\ G\,\Sigma \Delta_i y_i &= \xi \Delta + \zeta(-G_2 + \psi \Delta), \end{aligned}$$

oder wenn wir noch mit Δ, $-f$ oder mit G_2, G_1 multipliciren und addiren:

$$(16)\qquad \begin{aligned} \Delta\,\Sigma f_i y_i - f\,\Sigma \Delta_i y_i &= \zeta \\ G_2 \Sigma f_i y_i + G_1 \Sigma \Delta_i y_i &= \xi + \psi \zeta. \end{aligned}$$

Um η zu finden, muss man zunächst die Determinantenform betrachten, welche die directe Auflösung der Gleichungen (10) giebt. Der Nenner ist die Determinante

$$\begin{matrix} x_1 & n_1 & q_1 \\ x_2 & n_2 & q_2 \\ x_3 & n_3 & q_3 \end{matrix}\ ,$$

welche aus den Producten der einzelnen Determinanten der unvollständigen Systeme

$$\left|\begin{matrix} q_1 & q_2 & q_3 \\ x_1 & x_2 & x_3 \end{matrix}\qquad \begin{matrix} f_1 & f_2 & f_3 \\ \Delta_1 & \Delta_2 & \Delta_3 \end{matrix}\right|$$

besteht, multiplicirt mit 6, und daher gleich

$$6\left|\begin{matrix} G_1 + \psi f & f \\ -G_2 + \psi \Delta & \Delta \end{matrix}\right| = 6G$$

ist. Der Zähler von η ist die Determinante

$$\Sigma \pm x_1\, y_2\, q_3,$$

welche aus Q hervorgeht, wenn man die u durch die Unterdeterminanten der x und y ersetzt. Die Ausdrücke L und M (6) verwandeln sich hierdurch in

$$3a_x b_x (ab\Delta)(a_x b_y - b_x a_y) = 6a_x b_y (fb\Delta) = -\Sigma\Sigma f_{ik} y_i n_k$$

und in

$$-3\alpha_x \beta_x (\alpha\beta f)(\alpha_x \beta_y - \beta_x \alpha_y) = -6\beta_x \beta_y (\Delta\beta f) = -\Sigma\Sigma \Delta_{ik} y_i n_k,$$

so dass man für diesen Zähler den Ausdruck erhält:

$$f\,\Sigma\Sigma\Delta_{ik} y_i n_k - \Delta\,\Sigma\Sigma f_{ik} y_i n_k,$$

und also

$$\eta = \frac{1}{6} \left\{ f\,\Sigma\Sigma\Delta_{ik} y_i n_k - \Delta\,\Sigma\Sigma f_{ik} y_i n_k \right\}. \tag{17}$$

Führt man neben ξ, η, ζ auch die neuen Liniencoordinaten v, w, r ein mittelst der identischen Gleichung

$$v\xi + w\eta + r\zeta = u_1 y_1 + u_2 y_2 + u_3 y_3,$$

so ergiebt sich durch Vergleichung der Coefficienten der ξ, η, ζ oder der y_1, y_2, y_3 auf beiden Seiten das Formelsystem:

$$\begin{aligned} G.\,v &= u_1 x_1 + u_1 x_2 + u_3 x_3 = u_x \\ G.\,w &= u_1 n_1 + u_2 n_2 + u_3 n_3 = N \qquad (18) \\ G.\,r &= u_1 q_1 + u_2 q_2 + u_3 q_3 = Q \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} u_i = v\,(G_2 f_i + G_1 \Delta_i) + (r - v\psi)(\Delta f_i - f\Delta_i) \\ + \frac{w}{6}(f\,\Sigma_k \Delta_{ik} n_k - \Delta\,\Sigma_k f_{ik} n_k). \end{aligned} \tag{19}$$

§. 4.

Geometrische Bedeutung der Transformation.

Wir werden im Folgenden zeigen, dass es für alle in der Theorie der cubischen Formen auftretenden Bildungen genügt, die Function

$$F = \Delta(x^3)\,f(y^3) - \Delta(y^3)\,f(x^3)^{*})$$

in der transformirten Gestalt zu kennen. Bei dieser Transformation gelten die y als die eigentlichen Variabeln. Betrachten wir die x als einen beliebig gegebenen Punct, so ist $F = 0$ die Gleichung derjenigen Curve des Büschels $\varkappa f(y^3) - \lambda\Delta(y^3) = 0$, welche durch den Punct x hindurchgeht.

Die Formeln lehren, dass die eine Ecke des neuen Coordinatendreiecks ($v = 0$) in den Punkt x selbst fällt. Die Seite ζ des Coordinatendreiecks ist nach (16) die Tangente der Curve $F = 0$ im Punkte x; dieselbe schneidet die Curve $F = 0$ nochmals, und zwar in einer weitern Ecke $w = 0$ des Coordinatendreiecks. Dass der Punkt $w = 0$ diese Bedeutung hat, sieht man aus einem bekannten, auch von Aronhold benutzten Satze, nach welchem die Tangente eines Punctes x einer Curve dritter Ordnung dieselbe noch in einem Punkte schneidet, durch welchen auch die zweite Polare von x für die Hes-

*) Im Folgenden bedeutet $f(xyz)$ den Ausdruck $\Sigma\Sigma\Sigma\, a_{ikh} x_i y_k z_h$ u. s. w.

sesche Curve hindurchgeht. Ist $F = \Delta(x^3) f(y^3) - \Delta(y^3) f(x^3) = 0$ die Curve, so ist ihre Hessesche Curve

$$G_2 f(y^3) + G_1 \Delta(y^3) = 0,$$

und die Tangente in x, sowie die zweite Polare für die Hessesche Curve gehen durch den Schnitt der Geraden

$$\Sigma f_i y_i = 0, \quad \Sigma \Delta_i y_i = 0,$$

welches der Punkt $w = 0$ ist. Der Satz findet seinen analytischen Ausdruck in der von Herrn Salmon aufgestellten Identität:

$$\begin{aligned}(20)\qquad & \Delta(x^3).f(y^3) - \Delta(y^3).f(x^3) \\ & = 3\left\{\Delta(x^2y)\,.\,f(xy^2) - \Delta(xy^2)\,.\,f(x^2y)\right\}.\end{aligned}$$

Durch den Punkt x geht noch eine zweite Seite des Coordinatendreiecks, nämlich $\eta = 0$. Und zwar ist $\eta = 0$ offenbar (vgl. 17) die Polare des Punktes u oder $w = 0$ in Bezug auf die Polare von x für F, welche im Punkte x die letztere Curve berührt.

Es bleibt übrig die Lage der dritten Seite des Coordinatendreiecks, $\xi = 0$, geometrisch zu deuten. Diese Gerade ist die Tangente der Curve $F = 0$ im Puncte $w = 0$. Um dies einzusehen, muss man eine Transformation des Ausdrucks von ξ vornehmen, auf welche die Salmon'sche Formel leicht führt. Differentiirt man nämlich die Gleichung (20) zweimal nach $y_i y_k$, multiplicirt den erhaltenen Ausdruck mit $\frac{1}{6} n_i n_k$ und summirt nach i und k, so erhält man:

$$\begin{aligned}\Delta(x^3) f(yn^2) - f(x^3)\Delta(yn^2) &= \Delta(x^2y) f(xn^2) - f(x^2y)\Delta(xn^2) \\ &+ 2\left\{\Delta(x^2n) f(xyn) - f(x^2n)\Delta(xyn)\right\}.\end{aligned}$$

Der Ausdruck links giebt, gleich Null gesetzt, die Tangente der Curve $F = 0$ im Punkte n; es ist zu zeigen, dass der Ausdruck rechts auf ξ führt. Zunächst sieht man, dass die Glieder

$$f(x^2n) = \Sigma f_i n_i, \quad \Delta(x^2n) = \Sigma \Delta_i n_i$$

wegen des Ausdrucks von N verschwinden. Man hat also noch $f(xn^2)$ und $\Delta(xn^2)$ zu bilden, Ausdrücke, welche auch weiterhin noch gebraucht werden. Nun ist offenbar

$$f(xn^2) = \Sigma\Sigma f_{ik} n_i n_k = 36. \begin{vmatrix} f_{11} & f_{12} & f_{13} & f_1 & \Delta_1 \\ f_{21} & f_{22} & f_{23} & f_2 & \Delta_2 \\ f_{31} & f_{32} & f_{33} & f_3 & \Delta_3 \\ f_1 & f_2' & f_3 & 0 & 0 \\ \Delta_1 & \Delta_2 & \Delta_3 & 0 & 0 \end{vmatrix}$$

oder, wenn man die f_i zerstört:

$$= 36. \begin{vmatrix} f_{11} & f_{12} & f_{13} & 0 & \Delta_1 \\ f_{21} & f_{22} & f_{23} & 0 & \Delta_2 \\ f_{31} & f_{32} & f_{33} & 0 & \Delta_3 \\ 0 & 0 & 0 & -f & -\Delta \\ \Delta_1 & \Delta_2 & \Delta_3 & -\Delta & 0 \end{vmatrix} = -6\,\Delta^3 + 18\,f\,\varphi'$$

$$= -6\,\Delta^3 + 6\,f(-\psi - 2\,T\,f^2 + 3\,S\,f\,\Delta) = -6\,(G_1 + f\,\psi).$$

Ganz ebenso, oder auch indem man diese Gleichung dem Processe δ unterwirft, findet man

$$\Delta\,(x\,n^2) = 6\,(G_2 - \Delta\,\psi),$$

und also

$$\Delta\,(x^3)\,f\,(y\,n^2) - f\,(x^3)\,\Delta\,(y\,n^2) = -6\,[G_1\,\Delta\,(x^2 y) + G_2\,f\,(x^2 y)]$$
$$-6\,\psi\,(f\,\Delta\,(x^2 y) - \Delta\,f\,(x^2 y)) = -6\,\xi.$$

Dies ist die zu beweisende Formel, welche zugleich eine elegante Darstellung von ξ giebt.

Der in diesem Coordinatensystem gegebene analytische Apparat hat eine gewisse Verwandtschaft mit demjenigen, mittels dessen Herr Aronhold die Gleichung der Curve $f = 0$ in die Form

$$\mu^2 = 6\,(2\,T + 3\,S\,\lambda - \lambda^3)$$

übergeführt hat (Monatsberichte der Berliner Academie, Sitzung vom 25. April 1861). Aber die Transformation des Herrn Aronhold ist nicht linear, sondern quadratisch; wenn man in den Formeln des Herrn Aronhold überall unser F für f einführt, so dass der von ihm auf der Curve $f = 0$ gewählte Punkt a in unsern Punkt x übergeht, so entstehen zwischen seinen so modificirten Variabeln λ, μ, und unsern ξ, η, ζ sehr einfache Relationen. Es drücken sich unsere ξ, η, ζ als Functionen zweiten Grades von λ, μ aus, welche nur Functionen von Δ, f, ψ, Ω zu Coefficienten haben (vgl. Brioschi C. R., 1863, 1r H. p. 662).

§. 5.

Entwicklung der typischen Form.

Unter der typischen Form der Function

$$F = \Delta\,(x^3)\,f\,(y^3) - f\,(x^3)\,\Delta\,(y^3)$$

verstehen wir ihre Darstellung durch die ξ, η, ζ, wobei die Coefficienten Functionen von Δ, f, ψ, Ω werden; und zwar werden sie Combinanten, so dass Δ und f nur in den Verbindungen

$$G_1 \text{ und } S_{\Delta f} = -(G_{11}\,G_{22} - G_{12}{}^2)$$

auftreten.

Um die typische Form zu bilden, bedienen wir uns zunächst wieder der Salmon'schen Gleichung (20), und haben daher nur die vier Ausdrücke zu bilden:

$$f(x^2y)\ ,\ \Delta(x^2y)\ ,\ f(xy^2)\ ,\ \Delta(xy^2),$$

welche nicht mehr vom dritten, sondern nur noch vom ersten und zweiten Grade in den y sind.

Aus den Formeln (10) hat man nun sofort:

$$(21)\quad \begin{aligned} G.f(x^2y) &= \xi.f+\eta f(x^2n)+\zeta f(x^2q)\\ G.\Delta(x^2y) &= \xi.\Delta+\eta\Delta(x^2n)+\zeta\Delta(x^2q).\\ G^2.f(xy^2) &= \xi^2.f+2\xi\eta f(x^2n)+2\xi\zeta f(x^2q)+\eta^2 f(xn^2)\\ &\quad +2\eta\zeta f(xnq)+\zeta^2 f(xq^2)\\ G^2.\Delta(xy^2) &= \xi^2.\Delta+2\xi\eta\Delta(x^2n)+2\xi\zeta\Delta(x^2q)+\eta^2\Delta(xn^2)\\ &\quad +2\eta\zeta\Delta(xnq)+\zeta^2\Delta(xq^2). \end{aligned}$$

Man findet nun, wie sich zeigen wird, dass die entsprechend aus f und Δ gebildeten Coefficienten sich immer in folgender Weise ausdrücken:

$$(22)\quad \begin{aligned} \Delta(x^2n) &= \sigma_1\Delta-\tau_1 G_2 & f(x^2n) &= \sigma_1 f+\tau_1 G_1\\ \Delta(x^2q) &= \sigma_2\Delta-\tau_2 G_2 & f(x^2q) &= \sigma_2 f+\tau_2 G_1\\ \Delta(xn^2) &= \sigma_{11}\Delta-\tau_{11}G_2 & f(xn^2) &= \sigma_{11} f+\tau_{11}G_1\\ \Delta(xnq) &= \sigma_{12}\Delta-\tau_{12}G_2 & f(xnq) &= \sigma_{12} f+\tau_{12}G_1\\ \Delta(xq^2) &= \sigma_{22}\Delta-\tau_{22}G_2 & f(xq^2) &= \sigma_{22} f+\tau_{22}G_1. \end{aligned}$$

Bildet man aber auf der rechten Seite der Salmon'schen Formel die Determinante der Ausdrücke (21), so zerfällt dieselbe in zwei Factoren, deren einer

$$\begin{vmatrix} \Delta & -G_2\\ f & G_1 \end{vmatrix} = G$$

ist, und indem man diesen Factor durch Division fortschafft, bleibt:

$$G^2F=3\begin{vmatrix} \xi+\sigma_1\eta+\sigma_2\zeta & \xi^2+2\sigma_1\eta\xi+2\sigma_2\zeta\xi+\sigma_{11}\eta^2+2\sigma_{12}\eta\zeta+\sigma_{22}\zeta^2\\ \tau_1\eta+\tau_2\zeta & 2\tau_1\eta\xi+2\tau_2\zeta\xi+\tau_{11}\eta^2+2\tau_{12}\eta\zeta+\tau_{22}\zeta^2 \end{vmatrix},$$

oder auch, indem man die zweite Verticalreihe mit Hülfe der ersten reducirt:

$$(23)\quad \begin{aligned} G^2F &= 3\begin{vmatrix} \xi+\sigma_1\eta+\sigma_2\zeta & -\xi^2+\sigma_{11}\eta^2+2\sigma_{12}\eta\zeta+\sigma_{22}\zeta^2\\ \tau_1\eta+\tau_2\zeta & \tau_{11}\eta^2+2\tau_{12}\eta\zeta+\tau_{22}\zeta^2 \end{vmatrix}\\ &= 3\xi^2(\tau_1\eta+\tau_2\zeta)+3\xi(\tau_{11}\eta^2+2\tau_{12}\eta\zeta+\tau_{22}\zeta^2)\\ &\quad +3\begin{vmatrix} \sigma_1\eta+\sigma_2\zeta & \sigma_{11}\eta^2+2\sigma_{12}\eta\zeta+\sigma_{22}\zeta^2\\ \tau_1\eta+\tau_2\zeta & \tau_{11}\eta^2+2\tau_{12}\eta\zeta+\tau_{22}\zeta^2 \end{vmatrix}. \end{aligned}$$

Es handelt sich also nunmehr um die Bestimmung der Coefficienten σ und τ. Unter diesen ist zunächst wegen der Gleichungen

$$\begin{aligned} \Delta(x^2n) &= 0\,, & f(x^2n) &= 0\\ \Delta(x^2q) &= \psi\Delta-G_2\,, & f(x^2q) &= \psi f+G_1\,,\\ \Delta(xn^2) &= 6(G_2-\Delta\psi)\,, & f(xn^2) &= -6(G_1+f\psi), \end{aligned}$$

welche in §. 3. und 4. gebildet sind:

$$(24)\qquad \begin{array}{lll} \sigma_1 = 0 & \sigma_2 = \psi & \sigma_{11} = -6\psi \\ \tau_1 = 0 & \tau_2 = 1 & \tau_{11} = -6. \end{array}$$

Um σ_{12}, τ_{12}, σ_{22}, τ_{22} zu bestimmen, muss man einige andere Betrachtungen vorausschicken.

§. 6.

Bestimmung des vorletzten Coefficienten in F.

Zur Bestimmung von $\varDelta(xnq)$ und $f(xnq)$ führt die Berechnung der vier Ausdrücke $\varDelta(xnl)$, $f(xnl)$, $\varDelta(xnm)$, $f(xnm)$, aus denen jene sich nach (5) zusammensetzen mit Hülfe der Formeln:

$$(25)\qquad \begin{array}{l} \varDelta(xnq) = \varDelta . \varDelta(xnl) - f . \varDelta(xnm) \\ f(xnq) = \varDelta . f(xnl) - f . f(xnm). \end{array}$$

Von den vier in Rede stehenden Ausdrücken bestimmt man zunächst $f(xnl)$ dadurch, dass man in der zweiten Gleichung (6) die Grössen u_i durch die symbolischen Ausdrücke $c_x\,(cf\varDelta)\,c_i$ ersetzt, welches die Coefficienten der l_i in $f(xnl)$ sind. Hierdurch geht L in $f(xnl)$ über; der Ausdruck $u_x = (ff\varDelta)$ verschwindet, und

$$\tfrac{1}{2}\,\Sigma\,\frac{\partial\Theta}{\partial u_i}\,\frac{\partial\varDelta}{\partial x_i} = 3\,a_x\,b_x\,(abu)\,(ab\varDelta)$$

verwandelt sich in

$$3\,a_x b_x c_x\,(abc)\,(ab\varDelta)\,(cf\varDelta).$$

Vertauscht man hierin c mit a und b, so kann man für diesen Ausdruck den dritten Theil der Summe aller drei Darstellungen setzen, also

$$(abc)\;a_x b_x c_x\,\big\{(ab\varDelta)\,(cf\varDelta) - (cb\varDelta)\,(af\varDelta) - (ac\varDelta)\,(bf\varDelta)\big\}.$$

Der eingeklammerte Ausdruck aber ist nach der mehrfach benutzten Identität gleich $(abc)\,(\varDelta f\varDelta)$, also gleich Null. Und somit hat man die Formel:

$$(26)\qquad f(xnl) = 0.$$

Indem man dieselbe dem Processe δ unterwirft, wobei $\delta l_i = m_i$ ist, findet man zunächst

$$(27)\qquad \varDelta(xnl) + f(xnm) = 0;$$

und wenn man diese Formel nochmals mit demselben Processe behandelt, wobei $\delta m_i = 3S.l_i$ zu setzen ist:

$$(28)\qquad \varDelta(xnm) = 0.$$

Die Ausdrücke $\varDelta(xnl)$ und $f(xnm)$ selbst endlich, welche nach (27) gleich und entgegengesetzt sind, erhält man durch Betrachtung des Ausdrucks (vgl. §. 1.)

$$(29)\quad \Sigma \frac{\partial \varphi''}{\partial x_i} y_i = a_y \alpha_x b_x^2 \beta_x^2 (a\alpha b)(a\alpha\beta) + a_x \alpha_y b_x^2 \beta_x^2 (a\alpha b)(a\alpha\beta)$$
$$+ 2 a_x \alpha_x b_x b_y \beta_x^2 (a\alpha b)(a\alpha\beta) + 2 a_x \alpha_x b_x^2 \beta_x \beta_y (a\alpha b)(a\alpha\beta).$$

Setzen wir der Kürze wegen diesen Ausdruck

$$= A + A' + 2B + 2B'.$$

Wenn man in A die Buchstaben α, β vertauscht und für A sodann die halbe Summe des obigen und des neuen Ausdrucks setzt, so findet man

$$A = \tfrac{1}{2}\, a_y b_x^2 \alpha_x \beta_x (a\alpha\beta) \left\{ \beta_x (a\alpha b) - \alpha_x (a\beta b) \right\},$$

oder mit Anwendung der Identität auf den letzten Factor:

$$A = \tfrac{1}{2}\, a_y b_x^2 \alpha_x \beta_x (a\alpha\beta) \left\{ a_x (\beta\alpha b) - b_x (a\beta\alpha) \right\}.$$

Diesem Ausdrucke kann man die Form geben:

$$(30)\qquad A = -\tfrac{1}{2}\, a_y a_x (\alpha\beta a)\,(\alpha\beta f)\,.\,\alpha_x \beta_x + \tfrac{1}{2} f.(\alpha\beta a)^2 a_y \alpha_x \beta_x.$$

Mit Hülfe von (6) sieht man, dass der erste Theil die Form annimmt:

$$\frac{1}{6}\, a_x a_y (a_m - \Delta'' a_x) = \frac{1}{6} f(xym) - \frac{\Delta''}{6} f(x^2 y).$$

Der Factor von $\frac{1}{2} f$ im zweiten Theile hat, wie man leicht beweist, die Eigenschaft sich nicht zu ändern, wenn man die Indices x, y permutirt, und ist daher

$$\tfrac{1}{3} \Sigma \frac{\partial \Delta''}{\partial x_i} y_i = \Delta'' (x^2 y).$$

Daher hat man endlich:

$$A = \frac{1}{6} f(xym) - \frac{\Delta''}{6} f(x^2 y) + \frac{1}{2} f.\,\Delta''(x^2 y)$$

Der Term A' in (29) entsteht aus A, indem man die a, b mit den α, β vertauscht; dabei vertauscht sich f mit Δ, Δ'' mit Δ', M mit $-L$, und es ist also

$$A' = -\frac{1}{6} \Delta'(xyl) - \frac{\Delta'}{6} \Delta(x^2 y) + \frac{1}{2} \Delta.\Delta'(x^2 y).$$

In dem Ausdrucke B vertauschen wir die Buchstaben α, β und führen die halbe Summe des ursprünglichen und des neuen Ausdrucks ein. Dann ist

$$B = \tfrac{1}{2}\, a_x b_x b_y \alpha_x \beta_x (a\alpha\beta) \left\{ \beta_x (a\alpha b) - \alpha_x (a\beta b) \right\},$$

oder mit Anwendung der Identität:

$$B = \tfrac{1}{2}\, a_x b_x b_y \alpha_x \beta_x (a\alpha\beta) \left\{ a_x (\beta\alpha b) - b_x (a\beta\alpha) \right\}.$$

Hier ist der erste Theil dem ersten Theile von A in (30) gleich, und geht durch Vertauschung von a mit b in denselben über. Dieser Term hat also den Werth

$$\frac{1}{6} f(xym) - \frac{\Delta''}{6} f(x^2 y)$$

während der zweite Theil von B sogleich in

$$\tfrac{1}{2}\,\varDelta''.\, f(x^2y)$$

übergeht. Es ist daher

$$B = \frac{1}{6}\, f(x\,y\,m) + \frac{\varDelta''}{3}\, f(x^2y).$$

Denkt man sich wieder die a, b mit den α, β überall vertauscht, so erhält man:

$$B' = -\frac{1}{6}\,\varDelta(xyl) + \frac{\varDelta}{3}\,\varDelta\,(x^2y).$$

Und indem man Alles zusammenfasst und zugleich die Werthe der $\varDelta'$, $\varDelta''$ einträgt, wird:

$$\Sigma\,\frac{\partial\varphi''}{\partial x_i}\,y_i = \tfrac{1}{2}\,f(xym) - \tfrac{1}{2}\,\varDelta(xyl) + 2Tf.f(x^2y).$$

Endlich, indem man nach §. 1. φ'' durch ψ ausdrückt, hebt sich noch der mit T multiplicirte Term auf, und es bleibt:

(30*) $$\tfrac{1}{6}\;\Sigma\,\frac{\partial\psi}{\partial x_i}\,y_i = \psi(x^2y) = \tfrac{1}{2}\,f(xym) - \tfrac{1}{2}\,\varDelta(xyl).$$

Aus dieser Formel ergiebt sich, wenn man die y_i durch die Grössen n_i ersetzt, und die in §. 1. gegebene Definition von Ω beachtet:

$$f(xnm) - \varDelta(xnl) = 2\Omega,$$

und man hat also mit Hinzunahme von (26), (27), (28) das Formelsystem:

(31) $$\begin{aligned} f(xnl) &= 0 \qquad & \varDelta(xnl) &= -\Omega \\ f(xnm) &= \Omega \qquad & \varDelta(xnm) &= 0. \end{aligned}$$

Hieraus ist nun nach (25):

$$\varDelta(xnq) = -\Omega\varDelta\;,\; f(xnq) = -\Omega f,$$

und also

(32) $$\sigma_{12} = -\Omega\;,\;\tau_{12} = 0.$$

Die Formeln (31) führen noch zu einigen andern bemerkenswerthen Resultaten. Die Determinante z. B.

$$\Sigma \pm x_1\, l_2\, m_3$$

entsteht aus der Determinante $\Sigma \pm x_1\, l_2\, y_3$, wenn man die y durch die m ersetzt. Es ist aber, wenn man in L (6) für die u die Unterdeterminanten der y und x setzt:

$$\begin{aligned} \Sigma \pm x_1\, l_2\, y_3 &= (xly) = 3a_x b_x\,(ab\varDelta)\,\{a_y b_x - a_x b_y\} \\ &= 6a_x a_y b_x^2\,(ab\varDelta) = 6\,a_x a_y\,(af\varDelta) = f(xyn). \end{aligned}$$

Ersetzt man also die y durch die m, so findet man:

(33) $$(xlm) = f(xnm) = \Omega.$$

Die Determinante der drei linearen Zwischenformen x, l, m ist also gleich der Functionaldeterminante von $\psi, f, \varDelta$, dividirt durch 9.

§. 7.

Bestimmung des letzten Coefficienten von F.

Wir bilden jetzt, um zu den Ausdrücken für $f(xq^2)$, $\varDelta(xq^2)$ zu gelangen, die sechs Grössen $f(xl^2)$, $f(xlm)$, $f(xm^2)$, $\varDelta(xl^2)$, $\varDelta(xlm)$, $\varDelta(xm^2)$. Diese erhalten wir mit Hülfe einiger sehr einfachen symbolischen Rechnungen. Nach (6) ist:

$$(34)\qquad f(xl^2) = a_x a_l^2 = 3a_x b_x c_x (bc\varDelta)(bca) a_l - \varDelta'. f(x^2 l).$$

Vertauschen wir im ersten Gliede rechts die Buchstaben ac oder ab, und schreiben statt des Ausdrucks selbst die Summe der erhaltenen, dividirt durch 3, so tritt an Stelle von $3(bc\varDelta)a_l$ die Combination

$$(bc\varDelta)a_l - (ac\varDelta)b_l - (ba\varDelta)c_l = (bca)\,\Sigma \varDelta_i l_i,$$

und es ist also nach (13):

$$(35)\qquad \begin{aligned} f(xl^2) &= -\varDelta\,(G_{12}+\psi) - \varDelta' G_{11} \\ &= -\varDelta\psi - \varDelta' G_{11} + \varDelta\, G_{12}. \end{aligned}$$

Um $f(xml)$ zu erhalten, braucht man nur in (34) rechts l durch m zu ersetzen, und findet dann

$$(36)\qquad \begin{aligned} f(xml) &= \varDelta\,\Sigma\varDelta_i m_i - \varDelta' f(x^2 m) \\ &= -\varDelta'\psi + \varDelta' G_{12} + \varDelta G_{22}. \end{aligned}$$

Vertauscht man in (34) die griechischen mit den lateinischen Buchstaben, so verwandelt sich l in $-m$, $\varDelta'$ in $\varDelta''$, f in $\varDelta$, und man hat also:

$$(36^*)\qquad \begin{aligned} \varDelta(xm^2) = \alpha_x \alpha_m^2 &= -3\alpha_x\beta_x\gamma_x(\beta\gamma f)(\beta\gamma\alpha)\alpha_m + \varDelta''.\varDelta(x^2 m) \\ &= -\varDelta'''\,\Sigma f_i m_i + \varDelta''.\varDelta(x^2 m) \\ &= -\varDelta'''\psi + \varDelta''' G_{12} + \varDelta'' G_{22}. \end{aligned}$$

Ersetzt man hingegen in $\varDelta(xm^2)$ ein m durch l, so findet man

$$(37)\qquad \begin{aligned} \varDelta(xml) &= -\varDelta'''\,\Sigma f_i l_i + \varDelta''\,\varDelta(x^2 l) \\ &= -\varDelta''\psi - \varDelta''' G_{11} + \varDelta'' G_{12}. \end{aligned}$$

Um endlich $f(xm^2)$, $\varDelta(xl^2)$ zu finden unterwirft man $f(xl^2)$, $\varDelta(xm^2)$ dem Processe $\varDelta$, wo denn neben den bekannten Functionen $f(xlm)$, $\varDelta(xml)$ die gesuchten entstehen; und zwar findet man:

$$\begin{aligned} f(xm^2) &= -\varDelta''\psi + 3f(\varDelta_2^2 - \varDelta_1\varDelta_3) - \varDelta(\varDelta_1\varDelta_2 - \varDelta\varDelta_3) \\ \varDelta(xl^2) &= -\varDelta'\psi + 3\varDelta(\varDelta_1^2 - \varDelta\varDelta_2) - f(\varDelta_1\varDelta_2 - \varDelta\varDelta_3). \end{aligned}$$

Alle diese Formen gestalten sich übersichtlicher, wenn man ausser den Differentialquotienten

$$G_1 = \tfrac{1}{4}\frac{\partial G}{\partial\varDelta},\; G_{11} = \tfrac{1}{12}\frac{\partial^2 G}{\partial\varDelta^2},\; G_{111} = \tfrac{1}{24}\frac{\partial^3 G}{\partial\varDelta^3}\text{ etc.}$$

auch noch die von $S_{\varDelta f}$:

$$S_1 = \tfrac{1}{4}\frac{\partial S_{\Delta f}}{\partial \Delta}\ ,\ S_{11} = \tfrac{1}{12}\frac{\partial^2 S_{\Delta f}}{\partial \Delta^2}\ \text{etc.}$$

einführt. Es ist nämlich, wie man leicht sieht:

$$G_{111} = \Delta\ ,\ G_{112} = -\Delta'\ ,\ G_{122} = \Delta''\ ,\ G_{222} = -\Delta''',$$
$$S_{11} = \Delta'^2 - \Delta\Delta_2\ ,\ 2S_{12} = \Delta\Delta''' - \Delta'\Delta'',\ S_{22} = \Delta''^2 - \Delta'\Delta''',$$

und man hat daher folgendes Formelsystem:

$$(38)\quad \begin{aligned} f(xl^2) &= -\psi G_{111} + fS_{11} & \Delta(xl^2) &= \psi G_{112} + 2fS_{12} + 3\Delta S_{11} \\ f(xlm) &= \psi G_{112} - 2fS_{12} - \Delta S_{11} & \Delta(xlm) &= -\psi G_{122} - fS_{22} + 2\Delta S_{12} \\ f(xm^2) &= -\psi G_{122} + 3fS_{22} + 2\Delta S_{12} & \Delta(xm^2) &= \psi G_{222} + \Delta S_{22}. \end{aligned}$$

Hieraus erhält man endlich nach (5):

$$\begin{aligned} f(xq^2) &= \Delta^2 f(xl^2) - 2\Delta f f(xlm) + f^2 f(xm^2) \\ &\quad + 4\psi\ [\Delta f(x^2 l) - f f(x^2 M)] + 4\psi^2 f \\ \Delta(xq^2) &= \Delta^2\Delta(xl^2) - 2\Delta f\Delta(xlm) + f^2\Delta(xm^2) \\ &\quad + 4\psi\,[\Delta\Delta(x^2 l) - f\Delta(x^2 M)] + 4\psi^2\Delta, \end{aligned}$$

oder

$$(39)\quad \begin{aligned} f(xq^2) &= 3\,(fS_{\Delta f} + \psi G_1) \\ \Delta(xq^2) &= 3\,(\Delta S_{\Delta f} - \psi G_2). \end{aligned}$$

Daher:

$$\sigma_{22} = 3S_{\Delta f}\ ,\ \tau_{22} = 3\psi.$$

§. 8.

Typische Form von F und von f.

Setzt man die Werthe

$$(40)\quad \begin{aligned} \sigma_1 &= 0 & \tau_1 &= 0 \\ \sigma_2 &= \psi & \tau_2 &= 1 \\ \sigma_{11} &= -6\psi & \tau_{11} &= -6 \\ \sigma_{12} &= -\Omega & \tau_{12} &= 0 \\ \sigma_{22} &= 3S_{\Delta f} & \tau_{22} &= 3\psi \end{aligned}$$

nun in die Gleichung (23), so erhält man folgende typische Darstellung für die Function $F = \Delta f(y^3) - f\Delta(y^3)$:

$$(41)\quad G^2F = 3\xi^2\zeta - 18\xi\eta^2 + 9\psi\xi\zeta^2 + 6\Omega\eta\zeta^2 + 9(\psi^2 - S_{\Delta f})\,\zeta^3.$$

Die oben entwickelten Formeln führen noch zu andern bemerkenswerthen Resultaten. Setzt man in (30) $y_i = l_i$ oder $y_i = m_i$, und wendet die Gleichungen (38) an, so erhält man:

$$(42)\quad \Sigma\psi_i\, l_i = -2S_1\ ,\ \Sigma\psi_i\, m_i = 2\,S_2.$$

Multiplicirt man nun die beiden Formen von Ω [(33) und §. 1.] mit einander, so findet man:

$$\Omega^2 = 6\,(xlm)\,(\psi f \Delta) = 6 \begin{vmatrix} \psi & \Sigma \psi_i l_i & \Sigma \psi_i m_i \\ f & \Sigma f_i l_i & \Sigma f_i m_i \\ \Delta & \Sigma \Delta_i l_i & \Sigma \Delta_i m_i \end{vmatrix}$$

$$= 6 \begin{vmatrix} \psi & -2S_1 & 2S_2 \\ f & G_{11} & -G_{12}+\psi \\ \Delta & -G_{12}-\psi & G_{22} \end{vmatrix}$$

und es ist also Ω^2 durch ψ, Δ, f ausgedrückt mit Hülfe der Formel:

(43) $$\Omega^2 = 6\,(\psi^3 - 3\,\psi\,S_{\Delta f} + 2\,T_{\Delta f}),$$

wo

(44) $$T_{\Delta f} = G_2 S_1 - S_2 G_1$$

die zweite Invariante der Function F bedeutet. Man sieht daher, dass die Coefficienten der typischen Form von F rationale Functionen von f, Δ, ψ und von der irrationalen Combination

$$\Omega = \sqrt{6\,(\psi^3 - 3\,\psi\,S_{\Delta f} + 2\,T_{\Delta f})}$$

sind (vgl. Brioschi, C. R. 1863, 1[te] H. p. 305).

Aus dem Obigen ergiebt sich nun leicht auch die typische Form von f. In der That, aus der Gleichung

$$\Delta\,.\,f(y^3) - f\,.\,\Delta(y^3) = F$$

ergiebt sich sofort

$$G_2\,f(y^3) + G_1\,\Delta(y^3) = \Delta_F,$$

und man hat also durch Auflösung, wenn Δ_F gebildet ist:

(45) $$\begin{aligned} G\,.\,f(y^3) &= f\,.\,\Delta_F + G_1\,.\,F \\ G\,.\,\Delta(y^3) &= \Delta\,.\,\Delta_F - G_2\,.\,F. \end{aligned}$$

Es handelt sich also nur noch um die Bildung von Δ_F. Diese erfolgt, indem man zunächst die Determinante von F in Bezug auf die ξ, η, ζ bildet, und sie mit 6, und mit dem Quadrat der Determinante der ξ, η, ζ nach den y multiplicirt. Der Werth der letztern Determinante ist nach §. 3. gleich $\frac{G^2}{6}$. Und sonach ist ausgerechnet:

(46) $$\begin{aligned} G^2 \Delta_F = \xi^3 &+ 3\,\psi\,\xi^2\zeta - 18\,\psi\,\xi\,\eta^2 - 6\,\Omega\,\xi\,\eta\,\zeta + 9\,S_{\Delta f}\,\xi\,\zeta^2 \\ &- 12\,\Omega\,\eta^3 - 54\,(\psi^2 - S_{\Delta f})\,\eta^2\zeta - 12\,\psi\,\Omega\,\eta\,\zeta^2 \\ &- 4\,(\psi^3 - 3\,\psi\,S_{\Delta f} + 2\,T_{\Delta f})\,\zeta^3. \end{aligned}$$

Die erste Gleichung (45) liefert die typische Darstellung von $f(y^3)$. An dieselbe knüpfen sich folgende Betrachtungen sofort an.

Bilden wir wirklich eine zu $f(y^3)$ gehörige algebraische Form, so kann dies dadurch geschehen, dass wir sie zunächst für die durch G dividirte rechte Seite der ersten Gleichung (45) in Bezug auf die Variabeln ξ, η, ζ bilden, und dann mit der passenden Potenz von $\frac{G^2}{6}$

multipliciren. Ist eine solche Form von y_1, y_2, y_3, u_1, u_2, u_3 abhängig, so enthält die angegebene Bildung wegen der Identität

$$G.(u_1 y_1 + u_2 y_2 + u_3 y_3) = \xi . u_x + \eta . N + \zeta . Q$$

neben ξ, η, ζ die Grössen u_x, N, Q, welche von den neuen Liniencoordinaten v, w, r nur um den Factor G verschieden sind. Als Coefficienten der Bildung erscheinen neben G, welches allein im Nenner auftreten kann, die Functionen f, Δ, ψ, Ω, welche in den Ausdrücken (45) auftreten.

Lassen wir jetzt die y in die x übergehen, mit anderen Worten, setzen wir $\xi = G$, $\eta = 0$, $\zeta = 0$. Man erhält dann die gesuchte Form, gebildet für u_1, u_2, u_3, x_1, x_2, x_3, und zwar als rationale Function von f, Δ, ψ, Ω, u_x, N, Q, wobei als Nenner allein die Function G auftreten kann. Und man kann daher folgenden Satz aussprechen:

> Jede zu f gehörige algebraische Form, kann mit einer solchen Potenz von G multiplicirt werden, dass sie eine ganze Function der 7 Grundformen f, Δ, ψ, Ω, u_x, N, Q wird.

Das Obige lehrt aber nicht nur die Richtigkeit des Satzes erkennen, sondern zeigt auch, wie die fragliche Darstellung auszuführen ist.

Man hat aber auf diese Weise alle Formen auf ein Minimum von Grundformen zurückgeführt. Zwischen diesen selbst besteht nur eine Relation, die Gleichung (43). Diese ist nothwendig irrational, und vertritt gewissermassen die in $f(x)=0$ enthaltene Irrationalität, welche auch, wie oben erwähnt, in der That durch eine höhere Substitution in erstere übergeführt werden kann.

Zugleich liegt in dem Obigen die Lösung der Aufgabe, alle zwischen Formen des Systems bestehenden Relationen zu finden. Diese erscheinen hier immer auf die Gleichung (43), und auf den Ausdruck einer Form durch die sieben Grundformen zurückgeführt.

§. 9.

Recursionsformeln zur Bildung anderer typischen Darstellungen.

Statt alle Bildungen von der typischen Form $f(y^3)$ ausgehend vorzunehmen, kann man abgeleitete Formen direct typisch darstellen und dann aus diesen neue Combinationen bilden. Wenn dann zuvor diese abgeleiteten Formeln und ihre einfachsten Combinationen mit N und Q bereits als Function der 7 Grundformen bekannt waren, so kann man mit den typischen Darstellungen derselben genau so operiren, wie mit der typischen Darstellung von f selbst, und erhält die neuen Combinationen immer als Functionen der 7 Grundformen.

Eine solche typische Darstellung abgeleiteter Formen erhält man auf einem Wege, welche den Untersuchungen des Hrn. Hesse (Crelles Journal Bd. 36. p. 143.) analog ist. Setzen wir symbolisch für die zu betrachtende Form den Ausdruck:

$$\chi(y^m) = (\chi_1 y_1 + \chi_2 y_2 + \chi_3 y_3)^m;$$

mit Hülfe der Formeln (10) erhält man dann die transformirte Function:

$$\begin{aligned} G^m.\chi(y^m) &= \{\xi(\chi_1 x_1 + \chi_2 x_2 + \chi_3 x_3) + \eta(\chi_1 n_1 + \chi_2 n_2 + \chi_3 n_3) \\ &\quad + \zeta(\chi_1 q_1 + \chi_2 q_2 + \chi_3 q_3)\}^m = \{\xi.\chi_x + \eta.\chi_n + \zeta.\chi_q\}^m \qquad (47) \\ &= \xi^m.\chi + \frac{m}{1}\chi^{m-1} D_{(\chi)} + \frac{m.m-1}{1.2}\xi^{m-2} D^2_{(\chi)} + \cdots \end{aligned}$$

Die Function $D^\varkappa_{(\chi)}$ ist eine homogene Function $\varkappa^{\text{ter}}$ Ordnung von η und ζ, definirt durch die symbolische Gleichung:

$$D^\varkappa(\chi) = \chi_x^{m-\varkappa}(\eta\chi_n + \zeta\chi_q)^\varkappa. \qquad (48)$$

Ist nun ausser χ selbst auch $D_{(\chi)}$ bekannt, so kann man mit Hülfe von Recursionsformeln die folgenden $D^\varkappa_{(\chi)}$ aus ihnen entwickeln. Es folgt nämlich aus (48):

$$\begin{aligned} \eta\,\Sigma n_i \frac{\partial D^\varkappa_{(\chi)}}{\partial x_i} + \zeta\,\Sigma q_i \frac{\partial D^\varkappa_{(\chi)}}{\partial x_i} &= (m-\varkappa)\,D^{\varkappa+1}_{(\chi)} \\ + \varkappa\,\chi_x^{m-\varkappa}\left(\eta\,\chi_n + \zeta\chi_q\right)^{\varkappa-1} &\Big\{\eta^2\,\Sigma\Sigma\,\chi_h\,n_i\,\frac{\partial n_h}{\partial x_i} \qquad (49) \\ + \eta\zeta\,\Sigma\Sigma\chi_h\left(n_i\frac{\partial q_h}{\partial x_i} + q_i\frac{\partial n_h}{\partial x_i}\right) &+ \zeta^2\,\Sigma\Sigma q_i\frac{\partial q_h}{\partial x_i}\Big\}. \end{aligned}$$

Es kommt also, wie man sieht, darauf an, die vier linearen Zwischenformen

$$(50)\qquad \left|\begin{aligned} \Sigma\Sigma\,u_h\,n_i\,\frac{\partial n_h}{\partial x_i} &= \Sigma\,n_i\,\frac{\partial N}{\partial x_i} \\ \Sigma\Sigma\,u_h\,n_i\,\frac{\partial q_h}{\partial x_i} &= \Sigma\,n_i\,\frac{\partial Q}{\partial x_i} \\ \Sigma\Sigma\,u_h\,q_i\,\frac{\partial n_h}{\partial x_i} &= \Sigma\,q_i\,\frac{\partial N}{\partial x_i} \\ \Sigma\Sigma\,u_h\,q_i\,\frac{\partial q_h}{\partial x_i} &= \Sigma\,q_i\,\frac{\partial Q}{\partial x_i} \end{aligned}\right.$$

durch u_x, N, Q auszudrücken. Denn hat man dieses gethan, so sind sofort die letzten Glieder von (49) auf Coefficienten der Entwicklung (47) zurückgeführt, und man hat dann in (49) eine Recursionsformel zur Bestimmung von $D^{\varkappa+1}(\chi)$ aus früheren Coefficienten.

Um die Ausdrücke (50) zu bilden, von denen nur der erste direct gegeben ist (gleich 12 Q nach 3), gehen wir zu den aufgelösten Transformationsformeln des §. 3. (16), (17) zurück. Differentiirt man diese Gleichungen nach den x, und multiplicirt mit den n, und ersetzt endlich noch die y aus (10) durch ihre Werthe in den ξ, η, ζ, so hat man die Formeln:

$$(51)\quad \left\{\begin{aligned}
G\sum n_i \frac{\partial \zeta}{\partial x_i} &= 2\Delta\left\{\eta f(xn^2)+\zeta f(xqn)\right\}\\
&\quad -2f\left\{\eta\Delta(xn^2)+\zeta\Delta(xqn)\right\}\\
G\sum n_i \frac{\partial.\xi+\psi\zeta}{\partial x_i} &= 2G_2\left\{\eta f(xn^2)+\zeta f(xqn)\right\}\\
&\quad +2G_1\left\{\eta\Delta(xn^2)+\zeta\Delta(xqn)\right\}\\
G\sum n_i \frac{\partial \eta}{\partial x_i} &= \frac{f}{6}\left\{\xi\Delta(xn^2)+\eta\Delta(n^3)+\zeta\Delta(n^2q)\right\}\\
&\quad -\frac{\Delta}{6}\left\{\xi f(xn^2)+\eta f(n^3)+\zeta f(n^2q)\right\}\\
&\quad +2f\left\{\xi\Delta(x^2q)+\eta\Delta(xnq)+\zeta\Delta(xq^2)\right\}\\
&\quad -2\Delta\left\{\xi f(x^2q)+\eta f(xnq)+\zeta f(xq^2)\right\}.
\end{aligned}\right.$$

Die linken Theile sind aber offenbar Differentialquotienten der Entwickelung von G^3F und $G^3\Delta_F$ nach ξ, η, ζ; und zwar ist, indem man noch durch G dividirt:

$$(52)\quad \begin{aligned}
\sum n_i \frac{\partial \zeta}{\partial x_i} &= \frac{1}{3}\frac{\partial^2 . G^2F}{\partial\xi\,\partial\eta} = -12\eta\\
\sum n_i \frac{\partial.\xi+\psi\zeta}{\partial x_i} &= \frac{1}{3}\frac{\partial^2 . G^2\Delta_F}{\partial\xi\,\partial\eta} = -12\psi\eta-2\Omega\zeta\\
\sum n_i \frac{\partial \eta}{\partial x_i} &= -\frac{1}{36}\frac{\partial^2 . G^2F}{\partial\eta^2}-\frac{1}{3}\frac{\partial^2 . G^2F}{\partial\xi\,\partial\zeta} = -\xi-6\psi\zeta.
\end{aligned}$$

Da noch $\sum n_i \frac{\partial \psi}{\partial x_i} = 6\Omega$, so kann man die zweite Formel ersetzen durch

$$(53)\qquad \sum n_i \frac{\partial \xi}{\partial x_i} = -8\Omega\zeta.$$

Differentiirt man nun die Identität

$$G(u_1y_1+u_2y_2+u_3y_3) = \xi u_x+\eta N+\zeta Q$$

nach x_i, multiplicirt mit n_i und summirt, so findet man:

$$\begin{aligned}
0 = u_x\sum n_i\frac{\partial\xi}{\partial x_i} &+ N\sum n_i\frac{\partial\eta}{\partial x_i}+Q\sum n_i\frac{\partial\zeta}{\partial x_i}\\
&+\xi N+12\eta Q+\zeta\sum n_i\frac{dQ}{\partial x_i},
\end{aligned}$$

oder nach Eintragung der obigen Werthe:

$$(54)\qquad \sum n_i\frac{\partial Q}{\partial x_i} = 8\Omega u_x+6\psi N.$$

Setzen wir ferner

$$\sum q_i \frac{\partial N}{\partial x_i} = \alpha u_x + \beta N + \gamma Q,$$

so hat man aus (16), (17), ähnlich wie die Gleichung (51), folgende:

$$\begin{aligned}
G \sum q_i \frac{\partial \zeta}{\partial x_i} &= 3 \Sigma \varDelta_i q_i [\xi f + \zeta f(x^2 q)] - 3 \Sigma f_i q_i [\xi \varDelta + \zeta \varDelta(x^2 q)] \\
&\quad + 2 \varDelta [\xi f(x^2 q) + \eta f(xnq) + \zeta f(xq^2)] \\
&\quad - 2 f [\xi \varDelta(x^2 q) + \eta \varDelta(xnq) + \zeta \varDelta(xq^2)],
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
G \sum q_i \frac{\partial . \xi + \psi \zeta}{\partial x_i} &= 9 (G_{12} \Sigma \varDelta_i q_i + G_{22} \Sigma f_i q_i) [\xi f + \zeta f(x^2 q)] \\
&\quad + 9 (G_{11} \Sigma \varDelta_i q_i + G_{12} \Sigma f_i q_i) [\xi \varDelta + \zeta \varDelta(x^2 q)] \\
&\quad + 2 G_2 [\xi f(x^2 q) + \eta f(xnq) + \zeta f(xq^2)] \\
&\quad + 2 G_1 [\xi \varDelta(x^2 q) + \eta \varDelta(xnq) + \zeta \varDelta(xq^2)],
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
G \sum q_i \frac{\partial \eta}{\partial x_i} &= \frac{1}{2} \Sigma f_i q_i [\xi \varDelta(x^2 n) + \eta \varDelta(xn^2) + \zeta \varDelta(xnq)] \\
&\quad - \frac{1}{2} \Sigma \varDelta_i q_i [\xi f(x^2 n) + \eta f(xn^2) + \zeta f(xnq)] \\
&\quad + \frac{f}{6} [\xi \varDelta(xnq) + \eta \varDelta(n^2 q) + \zeta \varDelta(nq^2)] \\
&\quad - \frac{\varDelta}{6} [\xi f(xnq) + \eta f(n^2 q) + \zeta f(nq^2)] \\
&\quad + \frac{f}{6} \Sigma \Sigma \varDelta_{i\varkappa} (\alpha x_k + \beta n_k + \gamma q_k)(\xi x_k + \eta n_k + \zeta q_k) \\
&\quad - \frac{\varDelta}{6} \Sigma \Sigma f_{i\varkappa} (\alpha x_k + \beta n_k + \gamma q_k)(\xi x_k + \eta n_k + \zeta q_k).
\end{aligned}$$

Indem man diese Ausdrücke wieder auf Differentialquotienten von $G^2 F$ und $G^2 \varDelta_F$ zurückführt, und zugleich die Werthe der Summen $\Sigma q_i f_i$, $\Sigma q_i \varDelta_i$ aus (14) entnimmt, erhält man:

$$\begin{aligned}
\sum q_i \frac{\partial \zeta}{\partial x_i} &= \frac{1}{2} \psi \frac{\partial^2 . G^2 F}{\partial \xi^2} - \frac{1}{2} \frac{\partial^2 . G^2 \varDelta_F}{\partial \xi^2} + \frac{1}{3} \frac{\partial^2 . G^2 F}{\partial \xi \partial \zeta} \\
\sum q_i \frac{\partial . \xi + \psi \zeta}{\partial x_i} &= \frac{3}{2} \psi \frac{\partial^2 . G^2 \varDelta_F}{\partial \xi^2} - \frac{3}{2} S_{\varDelta f} \frac{\partial^2 . G^2 F}{\partial \xi^2} + \frac{1}{3} \frac{\partial^2 . G^2 \varDelta_F}{\partial \xi \partial \zeta} \\
\sum q_i \frac{\partial \eta}{\partial x_i} &= -\frac{1}{12} \psi \frac{\partial^2 . G^2 F}{\partial \xi \partial \eta} + \frac{1}{12} \frac{\partial^2 . G^2 \varDelta_F}{\partial \xi \partial \eta} - \frac{1}{36} \frac{\partial^2 . G^2 F}{\partial \eta \partial \zeta} \\
&\quad - \frac{1}{36} \left\{ \alpha \frac{\partial^2 . G^2 F}{\partial \xi^2} + \beta \frac{\partial^2 . G^2 F}{\partial \xi \partial \eta} + \gamma \frac{\partial^2 . G^2 F}{\partial \xi \partial \zeta} \right\}.
\end{aligned}$$

Trägt man nun die Werthe der Functionen $G^2 F$ und $G^2 \varDelta_F$ ein, so ergiebt sich:

$$\begin{aligned}
&\sum q_i \frac{\partial \zeta}{\partial x_i} = -\xi + 6 \psi \zeta \\
(55) \qquad &\sum q_i \frac{\partial . \xi + \psi \zeta}{\partial x_i} = 11 \psi \xi - 2 \Omega \eta + (9 \psi^2 - 3 S_{\varDelta f}) \zeta \\
&\sum q_i \frac{\partial \eta}{\partial x_i} = -\frac{\gamma}{6} \xi + \beta \eta - \left(\frac{5}{6} \Omega + \frac{\alpha}{6} + \frac{\psi \gamma}{2} \right) \zeta.
\end{aligned}$$

Da nach (5), (42)

$$\Sigma\, \psi_i\, q_i = \Delta\, \Sigma\, \psi_i\, l_i - f\, \Sigma\, \psi_i\, m_i + 2\, \psi^2 = 2\,(\psi^2 - S_{\Delta f})$$

so verwandelt sich die zweite Gleichung durch Anwendung der ersten in:

$$(56) \qquad \sum q_i \frac{\partial \xi}{\partial x_i} = 12\, \psi\, \xi - 2\, \Omega\, \eta - 9\,(\psi^2 - S_{\Delta f})\, \zeta\,.$$

Wir differentiiren jetzt die Identität

$$G\,(u_1 y_1 + u_2 y_2 + u_3 y_3) = \xi\, u_x + \eta\, N + \zeta\, Q$$

nach x_i, multipliciren mit q_i, summiren nach i und ersetzen endlich die y durch ihre Werthe in ξ, η, ζ. Man hat dann

$$\begin{aligned} \xi\, Q + \eta\,(\alpha\, u_x + \beta\, N + \gamma\, Q) + \zeta \sum q_i \frac{\partial Q}{\partial x_i} \\ + u_x\,[12\, \psi\, \xi - 2\, \Omega\, \eta - 9\,(\psi^2 - S_{\Delta f})\zeta] \\ + N\left[-\frac{\gamma}{6}\, \xi + \beta\, \eta - \left(\frac{5}{6}\, \Omega + \frac{\alpha}{6} + \frac{\psi\gamma}{2}\right)\zeta\right] \\ + Q\,(6\, \psi\, \zeta - \xi) = 12\, \psi\,(\xi\, u_x + \eta\, N + \zeta\, Q)\,. \end{aligned}$$

Die Vergleichung der Coëfficienten von ξ liefert nun $\gamma = 0$, die der Coëfficienten von η giebt $\alpha = 2\, \Omega$, $\beta = 6\, \psi$. Es wird also:

$$(57) \qquad \left\{ \begin{aligned} \sum q_i \frac{\partial \eta}{\partial x_i} &= 6\, \psi\, \eta - \frac{7}{6}\, \Omega\, \zeta \\ \sum q_i \frac{\partial N}{\partial x_i} &= \alpha\, u_x + \beta\, N + \gamma\, Q = 2\, \Omega\, u_x + 6\, \psi\, N\,. \end{aligned} \right.$$

Endlich erhält man aus Vergleichung der Coëfficienten von ζ:

$$(58) \qquad \sum q_i \frac{\partial Q}{\partial x_i} = 9\,(\psi^2 - S_{\Delta f})\, u_x + \frac{7}{6}\, \Omega\, N + 6\, \psi\, Q\,.$$

Das durch diese Formeln gegebene Schema, welches wir hier nochmals zusammenstellen:

$$(59) \qquad \left\{ \begin{aligned} \sum n_i \frac{\partial \xi}{\partial x_i} &= -8\, \Omega\, \zeta & \sum q_i \frac{\partial \xi}{\partial x_i} &= 12\, \psi\, \xi - 2\, \Omega\, \eta - 9(\psi^2 - S_{\Delta f})\zeta \\ \sum n_i \frac{\partial \eta}{\partial x_i} &= -\xi - 6\, \psi\, \zeta & \sum q_i \frac{\partial \eta}{\partial x_i} &= 6\, \psi\, \eta - \frac{7}{6}\, \Omega\, \eta \\ \sum n_i \frac{\partial \zeta}{\partial x_i} &= -12\, \eta & \sum q_i \frac{\partial \zeta}{\partial x_i} &= -\xi + 6\, \psi\, \zeta\,. \end{aligned} \right.$$

$$(60) \qquad \left\{ \begin{aligned} \sum n_i \frac{\partial N}{\partial x_i} &= 12\, Q & \sum q_i \frac{\partial N}{\partial x_i} &= 2\, \Omega\, u_x + 6\, \psi\, N \\ \sum n_i \frac{\partial Q}{\partial x_i} &= 8\, \Omega\, u_x + 6\, N\, \psi & \sum q_i \frac{\partial Q}{\partial x_i} &= 9\,(\psi^2 - S_{\Delta f})\, u_x \\ & & &\quad + \frac{7}{6}\, N\, \Omega + 6\, \psi\, Q\,, \end{aligned} \right.$$

wird im Folgenden öfters benutzt werden. Für den gegenwärtigen Zweck giebt die Einführung der Werthe (60) in (49) die Recursionsformel:

$$(61)\quad \begin{cases} \eta \sum n_i \dfrac{\partial D^\varkappa(\chi)}{\partial x_i} + \zeta \sum q_i \dfrac{\partial D^\varkappa(\chi)}{\partial x_i} = (m-\varkappa)\, D^{\varkappa+1}(\chi) \\ + \varkappa[10\Omega\,\eta\zeta + 9(\psi^2 - S_{\Delta f})\zeta^2]\, D^{\varkappa-1} + \left(12\psi\eta\zeta + \frac{7}{6}\,\Omega\zeta^2\right)\dfrac{\partial D^\varkappa(\chi)}{\partial \eta} \\ \qquad + (12\eta^2 + 6\psi\zeta^2)\,\dfrac{\partial D^\varkappa(\chi)}{\partial \zeta}\,. \end{cases}$$

Die Formel genügt, um den typischen Ausdruck von $\chi(y^m)$ herzustellen, sobald χ als Function der 7 Grundformen gegeben ist. Dann nämlich kommt die Bildung der verschiedenen $D^{\varkappa+1}(\chi)$ auf die Bildung der linken Seiten von (61) zurück; und diese wieder wird offenbar geleistet, sobald die Ausdrücke

$$\sum n_i \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} \quad , \quad \sum q_i \frac{\partial \varphi}{\partial x_i}$$

für $\varphi = \xi, \eta, \zeta, f, \Delta, \psi, \Omega, u_x, N, Q$ bekannt sind. Für die drei ersten und die zwei letzten Grössen erhält man die betreffenden Ausdrücke aus (59), (60). Sodann aber ist

$$(62)\quad \begin{cases} \sum n_i \dfrac{\partial f}{\partial x_i} = 0 & \sum q_i \dfrac{\partial f}{\partial x_i} = 3(\psi f + G_1) \qquad (14) \\ \sum n_i \dfrac{\partial \Delta}{\partial x_i} = 0 & \sum q_i \dfrac{\partial \Delta}{\partial x_i} = 3(\psi\Delta - G_2) \\ \sum n_i \dfrac{\partial \psi}{\partial x_i} = 6\,\Omega & \sum q_i \dfrac{\partial \psi}{\partial x_i} = 12(\psi^2 - S_{\Delta f}) \\ \sum n_i \dfrac{\partial u_x}{\partial x_i} = N & \sum q_i \dfrac{\partial u_x}{\partial x_i} = Q\,. \end{cases}$$

Endlich erhält man aus (43)

$$\Omega \sum n_i \frac{\partial \Omega}{\partial x_i} = 9(\psi^2 - S_{\Delta f}) \sum n_i \frac{\partial \psi}{\partial x_i} = 54\,\Omega(\psi^2 - S_{\Delta f})$$

$$\Omega \sum q_i \frac{\partial \Omega}{\partial x_i} = 9(\psi^2 - S_{\Delta f}) \sum q_i \frac{\partial \psi}{\partial x_i} - 36\psi\left(S_1 \sum q_i \frac{\partial \Delta}{\partial x_i} + S_2 \sum q_i \frac{\partial f}{\partial x_i}\right)$$

$$+ 36\left(T_1 \sum q_i \frac{\partial \Delta}{\partial x_i} + T_2 \sum q_i \frac{\partial f}{\partial x_i}\right)$$

$$= 108(\psi^2 - S_{\Delta f})^2 - 108\psi(\psi S_{\Delta f} - T_{\Delta f}) + 108(\psi T_{\Delta f} + G_1 T_2 - T_1 G_2)$$

$$= 108\psi(\psi^3 - 3\psi S_{\Delta f} + 2T_{\Delta f}) = 18\psi\Omega^2\,.$$

Man hat daher, indem man durch Ω dividirt:

$$(63)\quad \begin{cases} \sum n_i \dfrac{\partial \Omega}{\partial x_i} = 54(\psi^2 - S_{\Delta f}) \\ \sum q_i \dfrac{\partial \Omega}{\partial x_i} = 18\psi\Omega\,, \end{cases}$$

wodurch dieser Kreis von Formeln abgeschlossen ist.

§. 10.

Bildungen.

1. Indem wir dazu übergehen, Formen durch die sieben Grundformen auszudrücken, beginnen wir mit der Zwischenform

$$(64)\qquad \Theta_{\varkappa f-\lambda\Delta} = -2\begin{vmatrix} \varkappa f_{11}-\lambda\Delta_{11} & \varkappa f_{21}-\lambda\Delta_{21} & \varkappa f_{31}-\lambda\Delta_{31} & u_1 \\ \varkappa f_{12}-\lambda\Delta_{12} & \varkappa f_{22}-\lambda\Delta_{22} & \varkappa f_{32}-\lambda\Delta_{32} & u_2 \\ \varkappa f_{13}-\lambda\Delta_{13} & \varkappa f_{23}-\lambda\Delta_{23} & \varkappa f_{33}-\lambda\Delta_{33} & u_3 \\ u_1 & u_2 & u_3 & 0 \end{vmatrix}.$$

Setzen wir in diesem Ausdrucke an Stelle der Variabeln x die y, und sodann

$$\varkappa f(y^3) - \lambda\Delta(y^3) = \varrho F(y^3) - \sigma\Delta_F(y^3),$$

wo

$$G.\varrho = \varkappa G_1 + \lambda G_2 \quad , \quad G.\sigma = -(\varkappa f - \lambda\Delta).$$

Die rechte Seite von (64), welche eine in Bezug auf die y gebildete simultane Form von $\varrho F - \sigma\Delta_F$ und u_y wird, kann dann statt in Bezug auf die y, nunmehr in Bezug auf ξ, η, ζ gebildet werden, und man muss dann nur mit dem Quadrat der Determinante der ξ, η, ζ nach den y, also mit $\frac{G^4}{36}$, multipliciren. Da zugleich u_y in

$$\frac{1}{G}\left(\xi u_x + \eta N + \zeta Q\right)$$

übergeht, so kann man der Gleichung (64) jetzt die Gestalt geben:

$$G^2\Theta_{\varkappa f-\lambda\Delta}(y^2) =$$

$$-\frac{1}{18.36}\begin{vmatrix} \varrho\frac{\partial^2.G^2F}{\partial\xi^2}-\sigma\frac{\partial^2.G^2\Delta_F}{\partial\xi^2}, & \varrho\frac{\partial^2.G^2F}{\partial\xi\partial\eta}-\sigma\frac{\partial^2.G^2\Delta_F}{\partial\xi\partial\eta}, & \varrho\frac{\partial^2.G^2F}{\partial\xi\partial\zeta}-\sigma\frac{\partial^2.G^2\Delta_F}{\partial\xi\partial\zeta}, & u_x \\ \varrho\frac{\partial^2.G^2F}{\partial\xi\partial\eta}-\sigma\frac{\partial^2.G^2\Delta_F}{\partial\xi\partial\eta}, & \varrho\frac{\partial^2.G^2F}{\partial\eta^2}-\sigma\frac{\partial^2.G^2\Delta_F}{\partial\eta^2}, & \varrho\frac{\partial^2.G^2F}{\partial\eta\partial\zeta}-\sigma\frac{\partial^2.G^2\Delta_F}{\partial\eta\partial\zeta}, & N \\ \varrho\frac{\partial^2.G^2F}{\partial\xi\partial\zeta}-\sigma\frac{\partial^2.G^2\Delta_F}{\partial\xi\partial\zeta}, & \varrho\frac{\partial^2.G^2F}{\partial\eta\partial\zeta}-\sigma\frac{\partial^2.G^2\Delta_F}{\partial\eta\partial\zeta}, & \varrho\frac{\partial^2.G^2F}{\partial\zeta^2}-\sigma\frac{\partial^2.G^2\Delta_F}{\partial\zeta^2}, & Q \\ u_x & N & Q & 0 \end{vmatrix}.$$

Aber man braucht diesen Ausdruck nur für $y_i = x_i$, also für $\eta = 0$, $\zeta = 0$, $\xi = G$. Daher kann man bei der Differentiation die Terme in $G^2.F$ und $G^2.\Delta_F$, welche von der dritten Ordnung in η, ζ sind, von vornherein weglassen; und indem man in den anderen Gliedern nach der Differentiation diese Werthe von ξ, η, ζ einsetzt, hat man:

$$\Theta_{\varkappa f-\lambda\Delta} = -\frac{1}{18}\cdot\begin{vmatrix} -\sigma & 0 & \varrho-\sigma\psi & u_x \\ 0 & -6(\varrho-\sigma\psi) & \sigma\Omega & N \\ \varrho-\sigma\psi & \sigma\Omega & 3(\varrho\psi-\sigma S_{\Delta f}) & Q \\ u_x & N & Q & 0 \end{vmatrix}.$$

Setzt man also

$$
(65)\quad
\begin{aligned}
\Theta^1 &= -36\,\psi\, u_x^2 - 2\,N^2 + 24\,Q\,u_x \\
H^1 &= -18(\psi^2 + S_{\Delta f})\,u_x^2 - 2\,\Omega\,N\,u_x + \psi\,N^2 + 24\,\psi\,Q\,u_x - 6\,Q^2 \\
K^1 &= -(36\,\psi\,S_{\Delta f} + 2\,\Omega^2)\,u_x^2 - 4\,\Omega\,\psi\,N\,u_x + (6\,S_{\Delta f} - 2\,\psi^2)\,N^2 \\
&\quad + 24\,\psi^2\,Q\,u_x + 4\,\Omega\,N\,Q - 12\,\psi\,Q^2\,,
\end{aligned}
$$

so ist

$$36\,\Theta_{\varkappa f - \lambda \Delta} = \varrho^2\,\Theta^1 - 2\,\varrho\,\sigma\,H^1 + \sigma^2\,K^1\,,$$

oder endlich, wenn man die Werthe von ϱ und σ einführt:

$$
(66)\quad 36\,G^2\,.\,\Theta_{\varkappa f - \lambda\Delta} = \Theta^1\,(\varkappa G_1 + \lambda G_2)^2 + 2\,H^1\,(\varkappa G_1 + \lambda G_2)\,(\varkappa f - \lambda\,\Delta) + K^1\,(\varkappa f - \lambda\,\Delta)^2\,.
$$

Will man noch die Functionen Θ, H, K einzeln haben, so folgt durch Vergleichung der Coëfficienten:

$$
(67)\quad
\left\{
\begin{aligned}
36\,G^2\,.\,\Theta &= \Theta^1\,.\,G_1{}^2 + 2\,H^1\,G_1\,f + K^1\,f^2 \\
36\,G^2\,.\,H &= -\,\Theta^1\,.\,G_1\,G_2 + H^1\,(G_1\,\Delta - G_2\,f) + K^1\,f\,\Delta \\
36\,G^2\,.\,K &= \Theta^1\,.\,G_2{}^2 - 2\,H^1\,.\,G_2\,\Delta + K^1\,.\,\Delta^2\,.
\end{aligned}
\right.
$$

2. Die Formeln (60) dienen dazu, die Ausdrücke

$$
\begin{array}{ll}
\sum\sum \dfrac{\partial^2\psi}{\partial x_i\,\partial x_\varkappa}\,n_i\,n_\varkappa & \sum\sum \dfrac{\partial^2\Omega}{\partial x_i\,\partial x_\varkappa}\,n_i\,n_\varkappa \\
\sum\sum \dfrac{\partial^2\psi}{\partial x_i\,\partial x_\varkappa}\,n_i\,q_\varkappa & \sum\sum \dfrac{\partial^2\Omega}{\partial x_i\,\partial x_\varkappa}\,n_i\,q_\varkappa \\
\sum\sum \dfrac{\partial^2\psi}{\partial x_i\,\partial x_\varkappa}\,q_i\,q_\varkappa & \sum\sum \dfrac{\partial^2\Omega}{\partial x_i\,\partial x_\varkappa}\,q_i\,q_\varkappa
\end{array}
$$

zu bestimmen. Es ist nämlich nach (62)

$$\sum n_i\,\frac{\partial\psi}{\partial x_i} = 6\,\Omega\,,$$

also

$$\sum\sum n_i\,n_\varkappa\,\frac{\partial^2\psi}{\partial x_i\,\partial x_\varkappa} = 6\sum n_\varkappa\,\frac{\partial\,\Omega}{\partial x} - \sum\sum n_\varkappa\,\frac{\partial\psi}{\partial x_i}\cdot\frac{\partial n_i}{\partial x_\varkappa}\,,$$

oder nach (60) und (62)

$$= 324\,(\psi^2 - S_{\Delta f}) - 12\sum q_i\,\frac{\partial\psi}{\partial x_i} = 180\,(\psi^2 - S_{\Delta f})\,.$$

Indem man auf dieselbe Weise mit den übrigen gesuchten Functionen verfährt, erhält man folgendes Schema:

$$
(68)\quad
\begin{array}{ll}
\frac{1}{30}\sum\sum \dfrac{\partial^2\psi}{\partial x_i\,\partial x_\varkappa}\,n_i n_\varkappa = 6(\psi^2 - S_{\Delta f}) & \frac{1}{72}\sum\sum \dfrac{\partial^2\Omega}{\partial x_i\,\partial x_\varkappa}\,n_i n_k = 6\,\psi\,\Omega \\
\frac{1}{30}\sum\sum \dfrac{\partial^2\psi}{\partial x_i\,\partial x_\varkappa}\,n_i q_\varkappa = 2\,\psi\,\Omega & \frac{1}{72}\sum\sum \dfrac{\partial^2\Omega}{\partial x_i\,\partial x_\varkappa}\,n_i q_k = 12\,\psi^3 \\
& \qquad - 18\,S_{\Delta f}\,\psi + 6\,T_{\Delta f} \\
\frac{1}{30}\sum\sum \dfrac{\partial^2\psi}{\partial x_i\,\partial x_\varkappa}\,q_i q_\varkappa = 4\,\psi^3 - 6\,\psi\,S_{\Delta f} & \frac{1}{72}\sum\sum \dfrac{\partial^2\Omega}{\partial x_i\,\partial x}\,q_i q_k = \Omega(4\,\psi^2 - S_{\Delta f})\,. \\
\qquad + 2\,T_{\Delta f} &
\end{array}
$$

3. Die Determinante

$$-\frac{1}{30.50}\begin{vmatrix} \frac{\partial^2\psi}{\partial x_1^2} & \frac{\partial^2\psi}{\partial x_1\,\partial x_2} & \frac{\partial^2\psi}{\partial x_1\,\partial x_3} & u_1 \\ \frac{\partial^2\psi}{\partial x_1\,\partial x_2} & \frac{\partial^2\psi}{\partial x_2^2} & \frac{\partial^2\psi}{\partial x_2\,\partial x_3} & u_2 \\ \frac{\partial^2\psi}{\partial x_1\,\partial x_3} & \frac{\partial^2\psi}{\partial x_2\,\partial x_3} & \frac{\partial^2\psi}{\partial x_3^2} & u_3 \\ u_1 & u_2 & u_3 & 0 \end{vmatrix}$$

geht durch Multiplication mit dem Quadrat der Determinante

$$(x\,u\,q) = 6\,G$$

und mit Benutzung der Formeln (62), (68) über in

$$-\begin{vmatrix} \psi & \Omega & 2(\psi^2 - S_{\Delta f}) & u_x \\ \Omega & 6(\psi^2 - S_{\Delta f}) & 2\,\psi\,\Omega & N \\ 2(\psi^2 - S_{\Delta f}) & 2\,\psi\,\Omega & 4\,\psi^3 - 6\,\psi\,S_{\Delta f} + 2\,T_{\Delta f} & Q \\ u_x & N & Q & 0 \end{vmatrix},$$

ein Ausdruck, welchem man leicht die Form giebt:

$$S_{\Delta f}\,.\,K' - 2\,T_{\Delta f}\,.\,H' + S^2_{\Delta f}\,.\,\Theta', \qquad \text{(vgl. 65)}$$

so dass man die Gleichung hat:

$$-\frac{G^2}{25}\begin{vmatrix} \frac{\partial^2\psi}{\partial x_1^2} & \frac{\partial^2\psi}{\partial x_1\,\partial x_2} & \frac{\partial^2\psi}{\partial x_1\,\partial x_3} & u_1 \\ \frac{\partial^2\psi}{\partial x_1\,\partial x_2} & \frac{\partial^2\psi}{\partial x_2^2} & \frac{\partial^2\psi}{\partial x_2\,\partial x_3} & u_2 \\ \frac{\partial^2\psi}{\partial x_1\,\partial x_3} & \frac{\partial^2\psi}{\partial x_2\,\partial x_3} & \frac{\partial^2\psi}{\partial x_3^2} & u_3 \\ u_1 & u_2 & u_3 & 0 \end{vmatrix} = S_{\Delta f}\,.\,K^1 - 2\,T_{\Delta f}\,.\,H^1 + S^2_{\Delta f}\,.\,\Theta^1,$$

wodurch diese Form auf die Formen Θ, H, K zurückgeführt ist.

4. Die Determinante von ψ geht durch Multiplication mit $36\,G^2$ ebenso über in

$$\begin{vmatrix} \psi & \Omega & 2(\psi^2 - S_{\Delta f}) \\ \Omega & 6(\psi^2 - S_{\Delta f}) & 2\,\psi\,\Omega \\ 2(\psi^2 - S_{\Delta f}) & 2\,\psi\,\Omega & 4\,\psi^3 - 6\,\psi S_{\Delta f} + 2\,T_{\Delta f} \end{vmatrix} = 24\,R_{\Delta f} = 24\,G^3 R.$$

Man hat also

$$\frac{1}{30^3}\begin{vmatrix} \frac{\partial^2\psi}{\partial x_1^2} & \frac{\partial^2\psi}{\partial x_1\,\partial x_2} & \frac{\partial^2\psi}{\partial x_1\,\partial x_3} \\ \frac{\partial^2\psi}{\partial x_1\,\partial x_2} & \frac{\partial^2\psi}{\partial x_2^2} & \frac{\partial^2\psi}{\partial x_2\,\partial x_3} \\ \frac{\partial^2\psi}{\partial x_1\,\partial x_3} & \frac{\partial^2\psi}{\partial x_2\,\partial x_3} & \frac{\partial^2\psi}{\partial x_3^2} \end{vmatrix} = \frac{2}{3}\,R\,G.\text{*)}$$

---

*) Diese Gleichung involvirt den für die geometrische Theorie der Form ψ wichtigen Satz:

Die Wendepunkte der Curve 6^{ter} Ordnung $\psi = 0$ liegen zu sechs auf den 12 Seiten der Wendepunktsdreiecke von $f = 0$.

Die Curve besitzt übrigens weder Doppel- noch Rückkehrpunkte.

8. In gleicher Weise kann man die Determinante von Ω bilden. Multiplicirt man sie mit $36\,G^2$, so erhält man:

$$\begin{vmatrix} \Omega & 6(\psi^2 - S_{\Delta f}) & 2\psi\Omega \\ 6(\psi^2 - S_{\Delta f}) & 6\psi\Omega & 12\psi^3 - 18 S_{\Delta f}\psi + 6 T_{\Delta f} \\ 2\psi\Omega & 12\psi^3 - 18 S_{\Delta f}\psi + 6 T_{\Delta f} & \Omega(4\psi^2 - S_{\Delta f}) \end{vmatrix} \begin{matrix} = 36\,\Omega R_{\Delta f} \\ = 36\,G^3 R. \end{matrix}$$

Und man hat also:

$$\frac{1}{72^3} \begin{vmatrix} \frac{\partial^2 \Omega}{\partial x_1^2} & \frac{\partial^2 \Omega}{\partial x_1 \partial x_2} & \frac{\partial^2 \Omega}{\partial x_1 \partial x_3} \\ \frac{\partial^2 \Omega}{\partial x_1 \partial x_2} & \frac{\partial^2 \Omega}{\partial x_2^2} & \frac{\partial^2 \Omega}{\partial x_2 \partial x_3} \\ \frac{\partial^2 \Omega}{\partial x_1 \partial x_3} & \frac{\partial^2 \Omega}{\partial x_2 \partial x_3} & \frac{\partial^2 \Omega}{\partial x_3^2} \end{vmatrix} = G\,R\,\Omega.$$

Es ist leicht, die Anzahl dieser Beispiele beliebig zu vermehren. Wir führen nur noch die Ausdrücke an, welche $S_{\varkappa f - \lambda \Delta}$ und $T_{\varkappa f - \lambda \Delta}$ für $\varkappa = \Delta$, $\lambda = f$ annehmen, Ausdrücke, denen die Ausdrücke für S_f und T_f selbst leicht zu entnehmen sind:

$$\begin{aligned} 36\,G\,.\,S_{\varkappa f - \lambda \Delta} = {} & 4\Omega^2 u_x^3 + 6\psi\Omega N u_x^2 - 54(\psi^2 - S_{\Delta f}) Q u_x^2 - 18 S_{\Delta f} N^2 u_x \\ & - 6\,\Omega N Q u_x + 36\psi Q^2 u_x - \frac{\Omega}{3} N^3 + 3\psi N^2 Q - 6\,Q^3 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 36\,G.T_{\varkappa f - \lambda \Delta} = {} & [54 S_{\Delta f}(\psi^2 + S_{\Delta f}) - 108\psi T_{\Delta f} + \psi\Omega^2]\, u_x^3 + 3\,\Omega(\psi^2 + S_{\Delta f}) N u_x^2 \\ & + 3(\psi^3 - 3\psi S_{\Delta f} - 4 T_{\Delta f}) N^2 u_x + 3(-\Omega^2 - 36\psi S_{\Delta f} + 36 T_{\Delta f}) Q u_x^2 \\ & - 6\psi\Omega N Q u_x + 18(\psi^2 + S_{\Delta f}) Q u_x^2 + 3(2 S_{\Delta f} - \psi^2) N^2 Q \\ & + 3\,\Omega N Q^2 + \frac{\psi\Omega}{6} N^3 - 6\psi Q^3. \end{aligned}$$

§. 11.

Formensystem der conjugirten Form P_f. Zweite Art von Grundformen.

Die im Vorigen auseinandergesetzten Methoden führen dazu, alle Formen durch die vier Covarianten f, Δ, ψ, Ω auszudrücken, und durch die drei in Bezug auf die u linearen Zwischenformen u_x, N, Q. Wenn hiedurch für Covarianten und Zwischenformen das Wünschenswerthe geleistet ist, so werden doch zugehörige Formen ihren naturgemässen Ausdruck wiederum durch einfache zugehörige Formen finden. Diese Betrachtung führt dazu, neben der soeben entwickelten Typik eine zweite gleichberechtigte und parallele aufzustellen, bei welcher die Grundformen aus vier zugehörigen Formen bestehen und aus drei Zwischenformen, welche linear für die x sind.

Man knüpft die in Rede stehende Entwicklung an das Theorem (29) des Herrn Aronhold, in welchem er die aus der conjugirten Form P_f entstehenden Formen durch die aus f entstehenden ausdrückt. Die Formeln dieses Theorems, welche Herr Aronhold ohne Beweis gegeben hat, werden wir an einem anderen Orte ableiten. Indem man sie um die betreffenden Formeln für Θ, H, K vermehrt, gelangt man zu folgendem System:

$$
(69)\quad\left\{\begin{aligned}
\Theta_{\varkappa P-\lambda R} &= -\frac{R}{12}\left\{\Theta\frac{\partial^2 G(\varkappa\lambda)}{\partial\lambda^2}+2H\frac{\partial^2 G(\varkappa\lambda)}{\partial\varkappa\,\partial\lambda}+K\frac{\partial^2 G(\varkappa\lambda)}{\partial\varkappa^2}\right\}\\
H_{\varkappa P-\lambda R} &= -\frac{R^2}{15}\left\{\Theta\frac{\partial^2 T(\varkappa\lambda)}{\partial\lambda^2}+2H\frac{\partial^2 T(\varkappa\lambda)}{\partial\varkappa\,\partial\lambda}+K\frac{\partial^2 T(\varkappa\lambda)}{\partial\varkappa^2}\right\}\\
K_{\varkappa P-\lambda R} &= R^4\left\{\frac{G(\varkappa\lambda)}{3}\left(\Theta\frac{\partial^2 G(\varkappa\lambda)}{\partial\lambda^2}+2H\frac{\partial^2 G(\varkappa\lambda)}{\partial\varkappa\,\partial\lambda}+K\frac{\partial^2 G(\varkappa\lambda)}{\partial\lambda^2}\right)\right.\\
&\qquad\left.+16\,S_{(\varkappa\lambda)}(\varkappa^2\Theta-2\varkappa\lambda H+\lambda^2 K)\right\}\\
S_{\varkappa p-\lambda r} &= -4R^3 G(\varkappa\lambda)\\
T_{\varkappa p-\lambda r} &= -8R^4 T(\varkappa\lambda)\\
R_{\varkappa p-\lambda r} &= -64R^8 S^3(\varkappa\lambda)\\
\varDelta_{\varkappa P-\lambda R} &= -\frac{R}{2}\left\{R_f\frac{\partial S(\varkappa\lambda)}{\partial\varkappa}+P_f\cdot\frac{\partial S(\varkappa\lambda)}{\partial\lambda}\right\}\\
S_{\varkappa P-\lambda R} &= R^2\left(\varDelta\frac{\partial G(\varkappa\lambda)}{\partial\varkappa}+f\frac{\partial G(\varkappa\lambda)}{\partial\lambda}\right)\\
T_{\varkappa P-\lambda R} &= \frac{4R^3}{3}\left(\varDelta\frac{\partial T(\varkappa\lambda)}{\partial\varkappa}+f\frac{\partial T(\varkappa\lambda)}{\partial\lambda}\right)\\
P_{\varkappa P-\lambda R} &= -32R^6 S^2(\varkappa\lambda)(\varkappa f-\lambda\varDelta)\\
R_{\varkappa P-\lambda R} &= 8R^7 S^2(\varkappa\lambda)\left(\varDelta\frac{\partial S(\varkappa\lambda)}{\partial\varkappa}+f\frac{\partial S(\varkappa\lambda)}{\partial\lambda}\right)\\
\Phi_{\varkappa P-\lambda R} &= -\frac{4}{3}R^3 S(\varkappa\lambda)G^2(\varkappa\lambda)\,.\,\psi\\
\Psi_{\varkappa P-\lambda R} &= 48R^4 S^2(\varkappa\lambda)G^3(\varkappa\lambda)\,.\,\varphi\,.
\end{aligned}\right.
$$

Indem man nun die im Früheren entwickelten Formeln auf die Function P_f statt auf f anwendet, hat man, wie aus dieser Tabelle hervorgeht, an Stelle von Θ, H u. s. w. folgende Grössen zu setzen:

$$
(70)\quad\left\{\begin{array}{lll}
\Theta_P=-R(K-S\Theta)\;, & H_P=-2R^2(KT-2HS^2+\Theta ST)\,, & \\
K_P=4R^4(K+3S\Theta)\;, & S_p=-4R^3\;, & T_p=-8R^4T\,,\\
R_p=-64R^8S^3\;, & \varDelta_P=-2R^2S_f\;, & S_P=4R^2\varDelta\,,\\
T_P=8R^3(T\varDelta-S^2f)\;, & P_P=-32R^6S^2f\,, & \\
R_P=8R^7S^2(\varDelta S-fT)\;, & \Phi_P=512R^2S\psi\;, & \psi_P=8R^4S^2\varphi\,.
\end{array}\right.
$$

Es ergiebt sich hieraus von selbst, was unter G_P u. s. w. zu verstehen ist. Diese Function entsteht, indem man die in G auftretenden Coefficienten S, T durch S_p, T_p, und $\varkappa$, λ, resp. $\varDelta$, f, durch $-2R^2S_f$ und P_f ersetzt. Führt man dann für RS_f seinen Ausdruck in P_f und R_f ein:

$$RS_f = SR_f - TP_f\,,$$

so findet man für G_P bis auf einen constanten Factor $16R^4S^3$ denjenigen Ausdruck, welcher aus $S_{\varkappa\lambda}$ entsteht, wenn man darin $\varkappa = R_f$, $\lambda = P_f$ setzt, oder es ist

$$(71)\qquad G_P = 16R^4S^3\,.\,S(R_f, P_f)\,.$$

Die Function $S_{\Delta_P, P}$ ist die negativ genommene Hesse'sche Determinante dieses Ausdrucks als Function von Δ_{P_f} und P_f. Nach der Theorie der binären Formen vierten Grades erhält man dafür:

(72) $$S_{\Delta_P, P} = - 64\, R^7 S^4\, G(R_f, P_f)\,.$$

Und aus der Verbindung dieser und der vorigen Gleichung:

(73) $$T_{\Delta_P, P} = - 512\, R^{10} S^6\,.\, T(R_f, P_f)\,.$$

Die Function $S(R_f, P_f)$ ist übrigens durch R^2 theilbar. Man sieht dies ein, indem man S_f und T einführt. Setzt man

(74) $$\Gamma = (S^3 + 4T^2) S_f^4 - 12 STS_f^3 T_f + 6 S^2 S_f^2 T_f^2 + 4 TS_f T_f^3 - 3 ST_f^4,$$

so hat man

(75) $$\begin{cases} S(R_f, P_f) = R^2\,.\,\Gamma \\ G(R_f, P_f) = \dfrac{R}{144}\left[\dfrac{\partial^2 \Gamma}{\partial S_f^2}\dfrac{\partial^2 \Gamma}{\partial T_f^2} - \left(\dfrac{\partial^2 \Gamma}{\partial S_f \partial T_f}\right)^2\right] = R\,.\,\Delta_\Gamma \\ T(R_f, P_f) = \dfrac{R^2}{16}\left(\dfrac{\partial \Gamma}{\partial T_f}\dfrac{\partial \Delta_\Gamma}{\partial S_f} - \dfrac{\partial \Gamma}{\partial S_f}\dfrac{\partial \Delta_\Gamma}{\partial T_f}\right) = R^2\, T_\Gamma\,. \end{cases}$$

Aus den Formeln (70) ergiebt sich

(76) $$\Omega_P = - 96\, R^6 S^3 (\Phi, S_f, T_f) = - 16\, R^6 S^3\, \Pi\,, \qquad (\S.\ 1.)$$

und die Relation

(77) $$\Omega_P^2 = 6\,(\Psi_P^3 - 3\, S_{\Delta_P, P}\,.\,\Psi_P + 2\, T_{\Delta_P, P})$$

verwandelt sich in die folgende:

(78) $$\Pi^2 = 12\,\{\Phi^3 + 3\,\Delta_\Gamma\,\Phi - 2\, T_\Gamma\}\,.$$

Unter den linearen Zwischenformen bleibt zunächst u_x unverändert, abgesehen davon, dass die Variabeln u und x ihre Rollen vertauschen. Ferner wird

(79) $$N_P = - 12\, R^2 S(x, S_f, T_f) = - 2\, R^2 S\,.\, N',$$

wobei N' eine Zwischenform bezeichnet, welche Combinante ist, linear für die x, vierten Grades in den u und 8^{ten} Grades in den Coefficienten. Aus N_P entsteht die Form

(80) $$Q_P = \frac{R^4 S^2}{3} \sum \frac{\partial N}{\partial x_i}\frac{\partial N}{\partial u_i} = 4\, R^4 S^2\, \Xi\,.$$

Die Form Ξ ist ebenfalls Combinante, linear in den x, 7^{ten} Grades in den u und 16^{ten} Grades in den Coëfficienten. Aus Q_P entspringen L_P und M_P mit Hilfe der Formel (5):

(81) $$Q_P = \Delta_P\, L_P - P_f\, M_P + 2\,\psi_P\,.\, u_x\,.$$

Um L_P und M_P darzustellen, kann man sich der Gleichungen (9) bedienen. Indem man diejenigen unter ihnen, in welchen Θ und K mit f und Δ combinirt sind, auf das Formensystem von P_f überträgt, erhält man nach Division mit geeigneten Potenzen von R die Gleichungen:

$$\sum \frac{\partial K}{\partial x_i}\frac{\partial P_f}{\partial u_i} - S\sum \frac{\partial \Theta}{\partial x_i}\frac{\partial P_f}{\partial u_i} = 4\,R\,S_f\,u_x$$

$$\sum \frac{\partial K}{\partial x_i}\frac{\partial P_f}{\partial u_i} + 3\,S\sum \frac{\partial \Theta}{\partial x_i}\frac{\partial P_f}{\partial u_i} = -\frac{M_P}{2\,R^4} - (8\,T\,P_f + 4\,R\,S_f)\,u_x$$

$$\sum \frac{\partial K}{\partial x_i}\frac{\partial S_f}{\partial u_i} + 3\,S\sum \frac{\partial \Theta}{\partial x_i}\frac{\partial S_f}{\partial u_i} = (-12\,P_f + 8\,T\,S_f)\,u_x$$

$$\sum \frac{\partial K}{\partial x_i}\frac{\partial S_f}{\partial u_i} - S\sum \frac{\partial \Theta}{\partial x_i}\frac{\partial S_f}{\partial u_i} = \frac{L_P}{R^3} - 4\,P_f\,u_x\,.$$

Die Grössen M_P und L_P kann man hiernach in der Form ausdrücken:

$$\begin{aligned} &L_P = -8\,R^3\,S\,L' \\ &M_P - 2\,T\,R\,L_P = 16\,R^4\,S^2\,M'\,, \end{aligned} \tag{82}$$

wobei die neuen Formen L', M' die Bedeutung haben:

$$\begin{aligned} L' &= \tfrac{1}{2}\sum \frac{\partial \Theta}{\partial x_i}\frac{\partial S_f}{\partial u_i} - T_f\,u_x \\ M' &= \tfrac{1}{2}\sum \frac{\partial \Theta}{\partial x_i}\frac{\partial T_f}{\partial u_i} - S\,S_f\,u_x\,. \end{aligned} \tag{83}$$

Führt man diese Ausdrücke in (81) ein, so reducirt sich diese Gleichung auf:

$$\tfrac{1}{4}\,\Xi = L'\,R_f - M'\,P_f + \Phi\,u_x\,. \tag{84}$$

Da Ξ und Φ ihrer Entstehung nach Combinanten sind, so muss $\delta(L'R_f - M'P_f)$ verschwinden; man hat daher

$$\delta\,L' = M'\quad,\quad \delta\,M' = 3\,S\,L'\,, \tag{85}$$

daher für die zusammengesetzte Function $\varkappa f - \lambda \Delta$:

$$\begin{aligned} L'_{\varkappa f - \lambda\Delta} &= G\,.\,(\varkappa\,L' - \lambda\,M') \\ M'_{\varkappa f - \lambda\Delta} &= G\,.\,[G_2(\varkappa\lambda)\,L' + G_1(\varkappa\lambda)\,M']\,. \end{aligned} \tag{86}$$

Die Gleichungen (85) erlauben nun, indem man den Prozess δ auf (94) anwendet, das ganze aus der Combination von Θ, H, K mit S_f, T_f entspringende Formensystem in folgender Weise darzustellen:

$$\begin{aligned} &\tfrac{1}{2}\sum \frac{\partial \Theta}{\partial x_i}\frac{\partial S_f}{\partial u_i} = L' + T_f\,u_x & &\tfrac{1}{2}\sum \frac{\partial \Theta}{\partial x_i}\frac{\partial T_f}{\partial u_i} = M' + S\,S_f\,u_x \\ &\tfrac{1}{2}\sum \frac{\partial H}{\partial x_i}\frac{\partial S_f}{\partial u_i} = -M' + S\,S_f\,u_x & &\tfrac{1}{2}\sum \frac{\partial H}{\partial x_i}\frac{\partial T_f}{\partial u_i} = -S\,L' \\ & & &\qquad + (2\,T\,S_f - S\,T_f)\,u_x \\ &\tfrac{1}{2}\sum \frac{\partial K}{\partial x_i}\frac{\partial S_f}{\partial u_i} = -3\,S\,L' & &\tfrac{1}{2}\sum \frac{\partial K}{\partial x_i}\frac{\partial T_f}{\partial u_i} = S\,M' - 4\,T\,L' \\ &\qquad + (3\,S\,T_f - 2\,T\,S_f)\,u_x & &\qquad + (2\,T\,T_f - S^2\,S_f)\,u_x\,. \end{aligned} \tag{87}$$

Indem man die Formen N_P, Q_P zu Grunde legt, gelangt man zu Transformationsformeln, welche denen des §. 4. analog sind. Bezeichnet man durch u_1, u_2, u_3 die Coordinaten einer für den Augenblick fest gedachten Geraden, durch v_1, v_2, v_3 die Coordinaten einer neuen

Geraden, endlich durch ξ', η', ζ' die neuen Liniencoordinaten, so entsprechen den Formeln (10) folgende:

$$G_P \,.\, v_i = \xi' u_i + \eta' (N_P)_i + \zeta' (Q_P)_i ,$$

oder, wenn man die oben entwickelten Werthe einführt:

(88) $16 R^4 S^3 \,.\, S(R_f P_f) \,.\, v_i = \xi' \,.\, u_i - 2\eta' \,.\, R^2 S N_i' + 4\zeta' \,.\, R^4 S^2 \Xi_i \,.$

Diese Transformationsformeln sind auf die der Function

$$F(y^3) = \Delta \,.\, f(y^3) - f \,.\, \Delta(y^3)$$

entsprechende Function

$$\begin{aligned} F_P(v^3) &= -\,2\,R^2 \left\{S_f \,.\, P_f(v^3) - P_f \,.\, S_f(v^3)\right\} \\ &= 2\,R^2 S \left\{S_f \,.\, T_f(v^3) - T_f \,.\, S_f(v^3)\right\} \\ &= -\,2\,R\,S \left\{R_f \,.\, P_f(v^3) - P_f \,.\, R_f(v^3)\right\} \end{aligned}$$

anzuwenden. Man erhält nach (41):

$$\begin{aligned} &-512\,R^8 S^6 S^2(R_f P_f) \left\{R_f P_f(v^3) - P_f R_f(v^3)\right\} \\ (89)\qquad &= 3\,\xi'^2 \zeta' - 18\,\xi' \eta'^2 + 72\,R^4 S^2 \Phi \,.\, \xi' \zeta'^2 - 96\,R^6 S^3 \Pi\, \eta' \zeta'^2 \\ &\quad + 576\,R^8 S^4 (\Phi^2 + \Delta_P)\, \zeta'^3 \,. \end{aligned}$$

Diese Formel sowie die Transformationsformeln (88) vereinfachen sich, indem man an Stelle von ξ', η', ζ' die ihnen proportionalen Grössen

(90) $\qquad \xi'' = \frac{\xi'}{16 R^6 S^3}\,, \quad \eta'' = \frac{\eta'}{8 R^4 S^2}\,, \quad \zeta'' = \frac{\zeta'}{4 R^2 S}$

einführt. An Stelle von (89) tritt dann die Formel

(91) $\qquad \Gamma^2 \left\{S_f T_f(v^3) - T_f S_f(v^3)\right\} = 3\,\xi''^2 \zeta'' - 18\,\xi'' \eta''^2$
$\qquad\qquad + 18\,\Phi\,\xi'' \zeta''^2 - 12\,\Pi\,\eta'' \zeta''^2 + 36(\Phi^2 + \Delta_P)\zeta''^3 ,$

und die Transformationsgleichungen verwandeln sich in:

(92) $\qquad \Gamma \,.\, v_i = \xi'' u_i - \eta'' N_i' + \zeta'' \Xi_i \,.$

Die Determinante der ξ, η, ζ nach den y war früher $\frac{G^2}{6}$; daher ist jetzt die Determinante ξ', η', ζ' nach den v:

$$\frac{G_P^2}{6} = \frac{256}{6}\, R^{12} S^6\, \Gamma^2 ;$$

mithin die Determinante der ξ'', η'', ζ'' nach den v:

$$\frac{\Gamma^2}{12} .$$

Um die Hesse'sche Determinante des Ausdrucks $S_f T_f(v^3) - T_f S_f(v^3)$ zu finden, bildet man also die Hesse'sche Determinante der rechten Seite von (91) in Bezug auf ξ'', η'', ζ'', dividirt durch Γ^6, und multiplicirt mit $\frac{\Gamma^4}{144}$. Um die von Aronhold durch Δ bezeichnete Form zu erhalten, muss man dann noch mit 6 multipliciren. Andererseits geht aus der Formel (69):

$$\Delta_{\varkappa P - \lambda R} = -\frac{R}{2}\left\{R_f \frac{\partial S(\varkappa\lambda)}{\partial \varkappa} + P_f \frac{\partial S(\varkappa\lambda)}{\partial \lambda}\right\}$$

die fragliche Form hervor, indem man die u durch die v ersetzt, und die Werthe:

$$\varkappa = -\frac{R_f}{R}\ , \quad \lambda = -\frac{P_f}{R}$$

einführt. Es wird dann:

$$\Delta_{\varkappa P - \lambda R} = \frac{1}{2R^2}\left\{R_f(v^3)\frac{\partial S(R_f, P_f)}{\partial R_f} + P_f(v^3)\frac{\partial S(R_f, P_f)}{\partial P_f}\right\}$$
$$= \frac{1}{2}\left\{T_f(v^3)\frac{\partial \Gamma}{\partial T_f} + S_f(v^3)\frac{\partial \Gamma}{\partial S_f}\right\}.$$

Und so hat man neben (91) die Formel:

(93)
$$2\,\Gamma^2\left\{\frac{\partial \Gamma}{\partial T_f}T_f(v^3) + \frac{\partial \Gamma}{\partial S_f}S_f(v^3)\right\}$$
$$= \xi''^3 - 18\,\Phi\,\xi''^2\zeta'' - 36\,\Phi\,\xi''\eta''^2 + 12\,\Pi\,\xi''\eta''\zeta''$$
$$-\ 36\,\Delta_\Gamma\,\xi''\zeta''^2 + 24\,\Pi\,\eta''^3 - 216(\Phi^2 + \Delta_\Gamma)\,\eta''^2\zeta'' + 24\,\Pi\,\Phi\,\eta''\zeta''^2$$
$$-\ 32\,(\Phi^3 + 3\,\Delta_\Gamma\Phi - 2\,T_\Gamma)\,\zeta''^3.$$

Die Formeln (91), (93) lassen $T_f(v^3)$ und $S_f(v^3)$, also auch $P_f(v^3)$ und $R_f(v^3)$ typisch darstellen. Hiermit ist die Grundlage für die Darstellung aller Formen durch die 7 neuen Grundformen:

$$S_f\ ,\ T_f\ ,\ \Phi\ ,\ \Pi\ ,\ u_x\ ,\ N'\ ,\ \Xi$$

vollständig gegeben. Man hat nur jede auszudrückende Form als Glied des zu P_f gehörigen Systems darzustellen, und kann sie dann sofort ebenso durch diese Grundformen ausdrücken, wie dieses bezüglich der aus f direct abgeleiteten Formen oben auseinandergesetzt wurde. Aber diese Bildungen auf diesem Wege auszuführen ist unnöthig; vielmehr genügen die oben gegebenen Uebertragungsgleichungen, um von jeder für die Function f und ihre Formen gegebenen Relation entsprechende für P_f und sein Formensystem zu bilden, und auf diese Weise zu einer Gleichung zu gelangen, welche der ursprünglichen gewissermassen dualistisch gegenübersteht.

§. 12.

Die Aronhold'sche Darstellung eines Punktes der Curve dritter Ordnung.

Die schon oben erwähnte Darstellung der Coordinaten eines Punktes der Curve $f = 0$, welche Hr. Aronhold (Berliner Monatsberichte, Sitzung vom 25. April 1861) gegeben hat, besteht darin, dass die Coordinaten eines Punktes y auf

$$f(y^3) = 0$$

durch die Parameter $\varkappa, \lambda$ des Büschels

(94)
$$\varkappa\, f(x^2 y) - \lambda\, \Delta(x^2 y) = 0$$

ausgedrückt werden, während zugleich x auf der Curve liegt, also $f(x^3)=0$. Wegen dieser Gleichung kann man F für $\Delta . f(y^3)$ und Δ_F für $G_1 \Delta(y^3)$ oder $\Delta^3 . \Delta(y^3)$ setzen. Die beiden obigen Gleichungen kann man daher ersetzen durch die Gleichungen:

$$F(y^3)=0\,,$$
$$\varkappa \Delta^2 F(x^2 y) - \lambda \Delta_F(x^2 y) = 0\,.$$

Es ist aber, da den Werthen $y_i = x_i$ die Werthe $\xi = G$, $\eta = 0$, $\zeta = 0$ entsprechen:

$$F(x^2 y) = \frac{1}{6}\sum\sum \frac{\partial^2 F}{\partial y_i \partial y_\varkappa} x_i x_\varkappa = \frac{G^2}{6}\frac{\partial^2 F}{\partial \xi^2}$$
$$\Delta_F(x^2 y) = \frac{1}{6}\sum\sum \frac{\partial^2 \Delta_F}{\partial y_i \partial y_\varkappa} x_i x_\varkappa = \frac{G^2}{6}\frac{\partial^2 \Delta_F}{\partial \xi^2}\,.$$

Indem man also sich alles in den Variabeln ξ, η, ζ ausgedrückt denkt, hat man die beiden Gleichungen:

$$F = 0\,,$$
$$\varkappa \Delta^2 \frac{\partial^2 F}{\partial \xi^2} - \lambda \frac{\partial^2 \Delta_F}{\partial \xi^2} = 0\,.$$

Wenn man aus diesen Gleichungen und der Gleichung

$$0 = u_y \quad \text{oder} \quad 0 = u_x \xi + N\eta + Q\zeta$$

die ξ, η, ζ eliminirt, so erhält man das Produkt der Gleichungen aller derjenigen Punkte y, in welchen ein Strahl des Büschels (94) die Curve $f=0$ trifft. Unter diesen ist der Scheitel des Büschels ($N=0$), welcher nach bekannten Sätzen auf $f=0$ liegt. Der Ausdruck N muss aber ein Factor des Eliminationsresultates sein.

Nun sind von den drei gegebenen Gleichungen zwei linear, nämlich:

$$0 = u_x \xi + N\eta + Q\zeta\,,$$
$$0 = \frac{1}{6}\left(\varkappa \Delta^2 \frac{\partial^2 F}{\partial \xi^2} - \lambda \frac{\partial^2 \Delta_F}{\partial \xi^2}\right) = \varkappa \Delta^2 \zeta - \lambda(\xi + \psi\zeta)\,.$$

In Folge dieser beiden Gleichungen also kann man setzen:

$$\xi = N(\varkappa \Delta^2 - \lambda\psi)$$
$$\eta = -Q\lambda - u_x(\varkappa \Delta^2 - \lambda\psi)$$
$$\zeta = N\lambda\,;$$

und indem man diese Werthe in $F=0$ einführt, und noch bemerkt, dass $S_{\Delta f}$, $T_{\Delta f}$ für $f=0$ in $S\Delta^4$ und $T\Delta^6$ übergehen, erhält man die Gleichung:

$$\begin{aligned}0 = 3N\{N^2[(\varkappa \Delta^2 - \lambda\psi)^2\lambda + 3\psi(\varkappa \Delta^2 - \lambda\psi)\lambda^2 + 3\lambda^3(\psi^2 - S\Delta^4)]\\ - 6(\varkappa \Delta^2 - \lambda\psi)[Q\lambda + (\varkappa \Delta^2 - \lambda\psi)u_x]^2\\ - 2\Omega N\lambda^2[Q\lambda + (\varkappa \Delta^2 - \lambda\psi)u_x]\}\,.\end{aligned}$$

Uebergeht man hier den für die vorliegende Frage irrelevanten Factor $3N$, und multiplicirt mit $6\varkappa\Delta^2 - \lambda\psi$, so erhält man:

$$0 = 6\Delta^6\lambda(\varkappa^3 - 3\varkappa\lambda^2 S + 2\lambda^3 T)N^2$$
$$-\left\{6(\varkappa\Delta^2 - \lambda\psi)[Q\lambda + (\varkappa\Delta^2 - \lambda\psi)u_x] + \lambda^2\Omega N\right\}^2,$$

was man auch in der Form schreiben kann:

(95)
$$6(\varkappa\Delta^2 - \lambda\psi)[Q\lambda + (\varkappa\Delta^2 - \lambda\psi)u_x] + \lambda^2\Omega N$$
$$+\Delta^3 N\sqrt{6\lambda(\varkappa^3 - 3\varkappa\lambda^2 S + 2\lambda^3 T)} = 0\,.$$

Die ersten Glieder dieses Ausdrucks vereinfachen sich noch, wenn man für Q und Ω ihre Werthe in L und M setzt. Mit Rücksicht auf die Gleichung $f = 0$ giebt die Gleichung (5):

$$Q = \Delta L + 2\psi u_x\,.$$

Ferner ist nach (33), (13)

$$\Omega\,.\,N = 6(uf\Delta)(xlm) = 6\cdot\begin{vmatrix} u_x & L & M \\ f & \Sigma f_i l_i & \Sigma f_i m_i \\ \Delta & \Sigma\Delta_i l_i & \Sigma\Delta_i m_i \end{vmatrix}$$

$$= 6\begin{vmatrix} u_x & L & M \\ f & G_{11} & -G_{12}+\psi \\ \Delta & -G_{12}-\psi & G_{22} \end{vmatrix}$$

$$= 6\left\{u_x(\psi^2 - S_{\Delta f}) - (G_1 M + G_2 L) + \psi(\Delta L - fM)\right\},$$

oder, wenn man hier f und also auch G_2 verschwinden lässt:

$$\Omega N = 6\left\{u_x(\psi^2 - S\Delta^4) - M\Delta^3 + \psi\Delta L\right\}.$$

Indem man diese Werthe einführt, geht die Gleichung (95) über in:

$$0 = (\varkappa^2 - \lambda^2 S)\Delta u_x + \varkappa\lambda L + N\sqrt{\frac{\lambda}{6}(\varkappa^3 - 3\varkappa\lambda^2 S + 2\lambda^3 T)}\,.$$

Dieses ist die Gleichung eines Punktes y, in welchem ein Strahl des Büschels (94) die Curve $f = 0$ schneidet; die beiden verschiedenen Schnittpunkte findet man durch die beiden Vorzeichen der Quadratwurzel. Die Coefficienten von u_1, u_2, u_3 in dem vorliegenden Ausdrucke sind also die Coordinaten des auf der Curve $f = 0$ variablen Punktes y selbst, und man hat daher, wenn ϱ einen willkürlichen Factor bezeichnet:

$$\varrho y_1 = \Delta(\varkappa^2 - \lambda^2 S)x_1 + \varkappa\lambda l_1 + n_1\sqrt{\frac{\lambda}{6}(\varkappa^3 - 3\varkappa\lambda^2 S + 2\lambda^3 T)}$$

$$\varrho y_2 = \Delta(\varkappa^2 - \lambda^2 S)x_2 + \varkappa\lambda l_2 + n_2\sqrt{\frac{\lambda}{6}(\varkappa^3 - 3\varkappa\lambda^2 S + 2\lambda^3 T)}$$

$$\varrho y_3 = \Delta(\varkappa^2 - \lambda^2 S)x_3 + \varkappa\lambda l_3 + n_3\sqrt{\frac{\lambda}{6}(\varkappa^3 - 3\varkappa\lambda^2 S + 2\lambda^3 T)}\,.$$

Dieses sind die Formeln des Hrn. Aronhold, ausgedrückt durch die Coefficienten der von uns eingeführten Formen N und L.

Giessen, den 15. September 1867.

Ueber ternäre Formen dritten Grades.

Von P. Gordan in Giessen.

§. 1.

Stellung der Aufgabe. Begriff der Combination. Moduln.

In einem demnächst zu publicirenden Aufsatze, dessen wesentliche Resultate in den Comptes Rendus veröffentlicht sind, habe ich die binären Formen untersucht und von ihnen nachgewiesen, dass es zu jeder binären Form ein endliches System von Covarianten giebt, welches ich vollständiges System nenne und welches die Eigenschaft besitzt, dass jede Covariante sich als ganze Function der Formen des Systems mit numerischen Coefficienten darstellen lässt. In ähnlicher Weise will ich hier die ternären Formen zu untersuchen und die damals angewandten Methoden auf dieselben auszudehnen versuchen. Die Schwierigkeit, welche dieser Untersuchung hierbei unmittelbar entgegentritt, ist die grössere Mannichfaltigkeit von Formen, welche bei Transformation der gegebenen Form sich nicht ändern. Während die binären Formen nur Invarianten und Covarianten besitzen, haben die ternären Formen ausserdem noch zugehörige und Zwischenformen, welche ausser den ursprünglichen Variabeln $x_1\ x_2\ x_3$ noch die Variabeln $u_1\ u_2\ u_3$ enthalten, welche den ersteren contragredient sind.

Die gegebene Form, welche untersucht werden soll, sei symbolisch:

$$f = (a_1 x_1 + a_2 x_2 + a_3 x_3)^n = (b_1 x_1 + b_2 x_2 + b_3 x_3)^n \ldots$$
$$= a_x^n = b_x^n = c_x^n \ldots$$

Ihre Invarianten, Covarianten, zugehörige Formen und Zwischenformen will ich kurz die zu f gehörigen Formen nennen.

Von allen diesen Formen hat Herr Clebsch in Crelles Journal Bd. 59. p. 1 fgg. nachgewiesen, dass sie lineare Functionen mit numerischen Coefficienten (Aggregate) von Formen P sind, welche sich symbolisch als Producte der Form darstellen lassen:

$$P = a_x b_x c_x \ldots (abu)\,(acu)\,(bcu) \ldots (abc)\,(abd)\,(acd) \ldots$$

Hierbei bedeuten die Symbole (abu) und (abc) die Determinanten:

$$\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ u_1 & u_2 & u_3 \end{vmatrix} \quad \text{und} \quad \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}$$

Die Anzahl der Factoren a_x, b_x, c_x, ... (unter denen auch mehrere gleich sein können) nenne ich den Grad der Form P; die Anzahl der Factoren (abu), (acu) ... ihre Classe; die Anzahl der verschiedenen Symbole a, b, c, ... oder was derselbe ist, ihren Grad in den Coefficienten von f, ihre Ordnung, die Summe von Grad und Classe endlich ihren Rang.

Ich kann nun die Frage stellen, in welcher Weise die Form P, deren Ordnung m sein möge, aus einer Form $(m-1)^{\text{ter}}$ Ordnung entstehen kann. Demgemäss entferne ich die Factoren a_x und ersetze die symbolischen Factoren (bau), (cau), (dau), ..., in denen sowohl der Buchstabe a als auch der Buchstabe u vorkommt, b_x, c_x, d_x ..., endlich ersetze ich die symbolischen Factoren (bca), (bda), (cda), ..., in denen zwar der Buchstabe a, aber nicht der Buchstabe u vorkommt, durch (bcu), (bdu), (cdu), ...

Ich gelange durch dieses Verfahren zu einem symbolischen Product F, welches den Buchstaben a nicht mehr enthält, also von der $(m-1)^{\text{ten}}$ Ordnung ist. In dieser Weise kann ich jedes symbolische Product mit Formen niederer Ordnung in Beziehung setzen.

Umgekehrt will ich mir jetzt die Frage vorlegen, wie man das symbolische Product P bilden kann, wenn die Form

$$F = b_x\, c_x\, d_x \ldots (bcu)\,(bdu)\,(cdu) \ldots (abc)\,(abd)\,(cde)\,(cef) \ldots$$

gegeben ist. Man kann dieselbe auch folgendermassen schreiben:

$$F = r_x^{(1)}\, r_x^{(2)}\, r_x^{(3)} \ldots r_x^{(p)}\, u_{s_1}\, u_{s_2}\, u_{s_3} \ldots u_{s_q} \,.\, S,$$

wobei $r_x^{(1)}$, $r_x^{(2)}$ ... die Factoren b_x, c_x, d_x, u_{s_1}, u_{s_2}, ... die Factoren (bcu), (bdu), ... darstellen, das Zeichen S endlich bedeutet das Product (bcd) (bde) (cde) .... Es versteht sich nach dieser Bezeichnung von selbst, dass mehrere der Factoren r_x oder u_s unter einander übereinstimmen können. Der Grad von F ist hier p, die Classe q, der Rang $p+q$, die Ordnung endlich $m-1$.

Um nun P aus F abzuleiten, muss man in einigen (etwa λ) Factoren, b_x, c_x, d_x, ..., oder was dasselbe ist, $r_x^{(1)}$, $r_x^{(2)}$, ... $r_x^{(\lambda)}$ durch (bau), (cau), (dau), ..., resp. $(r^{(i)}au)$ ersetzen, ferner einige, etwa $\varkappa$ der Factoren (bcu), (bdu), ..., resp. u_{s_1}, u_{s_2}, ... durch (bca), (bda), ..., resp. a_{s_i} ersetzen und die so erhaltenen Formen mit $a_x^{\varkappa-x-\lambda}$ multipliciren.

Dieses ganze Verfahren will ich im Folgenden so ausdrücken:

> Die Form P entsteht aus der Form F mittelst einer Combination, welche die Moduln $\varkappa$ und λ besitzt.

Durch die Moduln ist eine Combination noch keineswegs bestimmt; es giebt vielmehr eine Anzahl von Combinationen, welche dieselben Moduln besitzen, ohne deshalb übereinzustimmen. Man erhält alle diese Combinationen dadurch, dass man je λ der p Factoren $r_x^{(i)}$ in $(r^{(i)}uu)$ und je $\varkappa$ der q Factoren u_{s_i} in a_{s_i} verwandelt; die Anzahl aller dieser Combinationen ist:

$$Z = \frac{p!}{(p-\lambda)!\ \lambda!} \cdot \frac{q!}{(q-\varkappa)!\ \varkappa!}.$$

Einige von ihnen werden übereinstimmen, andere wieder verschieden sein, je nachdem die Factoren r_x und u_s unter einander gleich oder von einander verschieden sind.

Man sieht, dass alle symbolischen Producte m^{ter} Ordnung mittelst Combinationen aus den Formen $(m-1)^{\text{ter}}$ Ordnung hervorgehen; ebenso gehen diese wieder durch Combination aus Formen $(m-2)^{\text{ter}}$ Ordnung hervor u. s. w., so dass man alle nur denkbaren symbolischen Producte durch wiederholte Combination aus der Form f erhalten kann.

Um sämmtliche symbolischen Producte m^{ter} Ordnung zu erhalten, bilde man sich also vorerst das System

$$F_1\ ,\ F_2\ ,\ F_3 \ldots\ldots$$

aller Formen $(m-1)^{\text{ter}}$ Ordnung.

Hierauf stelle man alle Modularsysteme auf, das heisst alle Werthepaare $(\varkappa, \lambda)$, die jedoch stets so gewählt werden müssen, dass die Summe $\varkappa + \lambda$ die Zahl n nicht übersteigt; jedem dieser Modularsysteme entspricht eine Anzahl Combinationen.

Wendet man alle diese Combinationen auf die Formen F an, so erhält man nach und nach alle symbolischen Producte φ.

Die Anordnung der Modularsysteme $\varkappa$, λ will ich hierbei in der folgenden Weise festsetzen.

Das erste Modularsystem ist dasjenige, für welches die Summe $\varkappa + \lambda$ verschwindet, mithin auch sowohl $\varkappa$ wie λ verschwindet.

Dann kommen die Systeme, für welche $\varkappa + \lambda = 1$ ist; dann diejenigen, für welche diese Summe $\varkappa + \lambda$ die Werthe 2, 3, 4, ... besitzt.

Die Systeme, für welche $\varkappa + \lambda$ denselben Werth hat, werden nach den Werthen von $\varkappa$ so geordnet, dass man dem Modul $\varkappa$ der Reihe nach die Werthe 0, 1, 2, 3, ... ertheilt.

Demgemäss enthält das zweite Modularsystem die Moduln $\varkappa = 0$, $\lambda = 1$; das dritte die Moduln $\varkappa = 1$, $\lambda = 0$; das vierte (0, 2), das fünfte (1, 1); das sechste (2, 0) u. s. w.

Die Systeme, welche bei dieser Anordnung früher erscheinen, nenne ich niedere Modularsysteme, die später auftretenden höhere Modularsysteme; desgleichen nenne ich die niederen Modularsystemen entsprechenden Combinationen niedere Combinationen. Entsprechen 2 Combinationen A und B, die man auf eine Form:

$$F = r_x^{(1)}\, r_x^{(2)}\, r_x^{(3)} \ldots r_x^{(p)}\, u_{s_1}\, u_{s_2} \ldots u_{s_q}\, S$$

anwendet, demselben Modularsystem, d. h. haben sie dieselben Moduln $\varkappa$ und λ, so nenne ich sie dann benachbart, wenn die Factoren von F, welche durch sie verändert werden, bis auf einen übereinstimmen.

Es können hierbei zwei Fälle eintreten, je nachdem die nicht übereinstimmenden Factoren die Form r_x oder u_s haben.

Ich bin jetzt im Stande, die symbolischen Producte φ von der m^{ten} Ordnung zu gruppiren, wobei ich folgendermassen verfahre:

Zuerst kommen die Formen, deren Rang 0 ist, nämlich die Invarianten, dann die Formen, die den Rang 1 besitzen, dann die mit dem Rang 2, 3, 4, ... Die Formen φ, welche denselben Rang besitzen, ordne ich wieder nach den Modularsystemen, denen die Combinationen entsprechen, durch welche die Formen φ aus den Formen F entstehen.

Die in dieser Anordnung früher auftretenden Formen φ nenne ich frühere Formen, die später auftretenden spätere Formen, während diejenigen Formen, welche denselben Rang haben und ausserdem durch Combinationen mit gleichen Moduln entstehen, als gleichzeitige angesehen werden mögen.

Nachdem nun gezeigt worden ist, wie man nach und nach alle symbolischen Producte m^{ter} Ordnung erhalten kann, liegt die Frage nahe, eine Anzahl von Formen m^{ter} Ordnung zu finden, durch welche sich alle diese Formen linear mit numerischen Coefficienten darstellen lassen.

Ehe ich jedoch die eigentliche Beantwortung dieser Frage beginne, will ich vorerst einige Beziehungen zwischen den Formen φ entwickeln, deren ich dabei bedarf.

§. 2.

Ableitung der Formen aus dem Processe der Uebereinanderschiebung.

Es ist zuerst der folgende Satz, den ich beweisen will:

Entstehen die Formen φ_1 und φ_2 aus der Form

$$F = r_x^{(1)}\, r_x^{(2)}\, r_x^{(3)} \ldots r_x^{(p)}\, u_{s_1}\, u_{s_2} \ldots u_{s_q}\, S$$

durch zwei benachbarte Combinationen A und B, welche die Moduln $\varkappa$ und λ besitzen, dann ist die Differenz $\varphi_1 - \varphi_2$ eine lineare Function von früheren Formen, in deren Coefficienten die Variabeln u und x nur noch in der Verbindung u_x vorkommen.

Beweis. Sind diejenigen symbolischen Factoren von F, welche durch die Combinationen A und B nicht übereinstimmend geändert werden, $r_x^{(1)}$ und $r_x^{(2)}$, so hat die Differenz der Formen φ_1 und φ_2 ausser den gemeinsamen Factoren dieser Formen noch den Factor:

$$r_x^{(2)}\,(r^{(1)}au) - r_x^{(1)}\,(r^{(2)}au) = a_x\,(r^{(1)}\,r^{(2)}\,u) - u_x\,(r^{(1)}\,r^{(2)}a).$$

Sie ist die Differenz zweier Formen φ' und $u_x\varphi''$, von denen die letztere φ'' den Factor u_x, also einen Rang hat, der um 2 Einheiten kleiner ist, als der Rang von φ_1 und φ_2.

Die erstere Form φ' entsteht aus der Form F_1, welche aus F dadurch hervorgeht, dass man das symbolische Product $r_x^{(1)}\,r_x^{(2)}$ durch $(r^{(1)}\,r^{(2)}\,u)$ ersetzt, durch eine Combination, welche die Moduln $\varkappa, \lambda - 1$ besitzt, also einem niederen Modularsystem entspricht.

Die Formen φ' und φ'' sind also frühere Formen als φ_1 und φ_2, und es ist in diesem Falle der Satz erwiesen.

Im zweiten Falle mögen durch die Combinationen A und B die Factoren u_{s_1} und u_{s_2} nicht übereinstimmend geändert werden. Die Form $\varphi_1 - \varphi_2$ enthält hier ausser den gemeinsamen Factoren von φ_1 und φ_2 den Factor:

$$u_{s_2}\,a_{s_1} - u_{s_1}\,a_{s_2} = (s_1\,s_2\,(au)).$$

Sie entsteht aus der Form F_2, welche aus F dadurch hervorgeht, dass man das Product $u_{s_1}\,u_{s_2}$ durch $(s_1\,s_2\,x)$ ersetzt; durch eine Combination, deren Moduln $\varkappa - 1$, $\lambda + 1$ sind, also einem niederen Modularsystem entspricht. Somit ist auch in diesem Falle der Satz erwiesen.

Der eben bewiesene Satz kann in folgender Art und Weise ausgedehnt werden:

Entstehen die Formen φ_1 und φ_2 aus der Form

$$F = r_x^{(1)}\,r_x^{(2)}\,\ldots\,r_x^{(p)}\,u_{s_1}\,u_{s_2}\,\ldots\,u_{s_q}\,S$$

mittelst der Combinationen A_1 und A_2, welche dieselben Moduln besitzen, dann ist die Differenz $\varphi_1 - \varphi_2$ eine lineare Function von früheren Formen ψ derselben Ordnung, deren Coefficienten L die Variabeln u und x nur in der Verbindung u_x enthalten. Es wird: $\varphi_1 - \varphi_2 = \Sigma_i\, L_i\, \psi_i$.

Beweis. Da A_1 und A_2 dieselben Moduln haben, so kann man stets solche Combinationen $A_{11}\,A_{12}\,A_{13}\,\ldots\,A_{1r}$ bestimmen, dass in der Reihe

$$A_1\,A_{11}\,A_{12}\,\ldots\,A_{1r}\,A_2$$

je zwei aufeinander folgende Combinationen in dem obigen Sinne benachbart sind.

Bezeichne ich nun die durch diese Combinationen aus F entstehenden Formen durch:

$$\varphi_1\,\varphi_{11}\,\varphi_{12}\,\varphi_{13}\,\ldots\,\varphi_{1r}\,\varphi_2,$$

so ist die Differenz:

$$\varphi_1 - \varphi_2 = (\varphi_1 - \varphi_{11}) + (\varphi_{11} - \varphi_{12}) + (\varphi_{1r} - \varphi_2).$$

Also eine Summe von Formen, deren jede ein Aggregat von früheren Formen ist. Somit ist die Behauptung erwiesen.

Wir wollen von jetzt ab eine neue symbolische Ausdrucksweise einführen, und die Form F, welche den Grad p und die Classe q hat, symbolisch durch $\varrho_x^p\ u_\sigma^q$ bezeichnen, so dass die Identität stattfindet:

$$F = \varrho_x^p\ u_\sigma^q = r_x^{(1)}\ r_x^{(2)} \dots r_x^{(p)}\ u_{s_1}\ u_{s_2} \dots u_{s_q}\ S.$$

Ersetze ich in der Form:

$$F = \varrho_x^p\ u_\sigma^q$$

λ der Factoren ϱ_x durch $(\varrho a u)$ und $\varkappa$ der Factoren u_σ durch a_σ, und multiplicire dann mit $a_x^{n-\varkappa-\lambda}$, so erhalte ich eine neue Form:

$$\psi = \varrho_x^{p-\lambda}\ u_\sigma^{q-\varkappa} (\varrho a u)^\lambda\ a_\sigma^\varkappa\ a_x^{n-\varkappa-\lambda},$$

welche eine lineare homogene Function der Coefficienten von F ist.

Diesen Process will ich in der Folge so ausdrücken:

Die Form ψ entsteht aus der Form F durch eine Uebereinanderschiebung, welche die Moduln $\varkappa$ und λ besitzt.

Die Uebereinanderschiebung unterscheidet sich wesentlich dadurch von der Combination, dass, während einem Modularsysteme viele Combinationen entsprechen, die Uebereinanderschiebung durch die Moduln genau bestimmt ist. Die Anordnung der durch Uebereinanderschiebung aus den Formen F entstehenden Formen möge in derselben Weise geschehen, wie die der durch Combination entstandenen.

Zuerst kommen die Invarianten und dann der Reihe nach die Formen, deren Rang die Werthe 1, 2, 3 ... n hat.

Die Formen desselben Ranges werden nach den Modularsystemen geordnet, denen die Uebereinanderschiebungen entsprechen, mittelst denen sie aus den F hervorgehen, sowie nach diesen Formen selbst, so dass hier keine gleichzeitigen Formen auftreten, sondern jede Form ihren festen Platz einnimmt.

Man kann die durch Uebereinanderschiebung entstehende Form ψ leicht durch Formen darstellen, die durch Combination entstehen. Zu dem Ende setze ich in der Identität für $x : x + \mu y$ und für $u : u + \nu v$ und vergleiche dann auf beiden Seiten die Coefficienten von $\mu^\lambda \nu^\varkappa$. Ersetze ich in der so entstehenden Gleichung die Symbole ϱ_y und $r_y^{(i)}$ durch $(\varrho a u)$ und $(r^{(i)} a u)$ und ebenso ϑ_σ und ϑ_{s_i} durch a_σ und a_{s_i}, und multiplicire dann mit $a_x{}^{n-\varkappa-\lambda}$, so gelange ich zu der Identität:

$$\frac{p!\ q!}{(p-\lambda)!\ \lambda!\ (q-\varkappa)!\ \varkappa!}\ \psi = \Sigma\, \varphi_i,$$

auf deren rechten Seite die Summation über alle Formen φ_i auszudehnen ist, welche durch die

$$\frac{p!\,q!}{(p-\lambda)!\,\lambda!\,(q-\varkappa)!\,\varkappa!}$$

Combinationen entstehen, die dem Modularsystem $\varkappa, \lambda$ entsprechen.

Bedeutet φ eine dieser Formen, so können wir unserer Gleichung die Form geben:

$$\varphi - \psi = \frac{(p-\lambda)!\,\lambda!\,(q-\varkappa)!\,\varkappa!}{p!\,q!}\,\Sigma\,(\varphi - \varphi_i).$$

Die Differenz $\varphi - \varphi_i$ ist, wie oben bewiesen wurde, eine Function $\Sigma L\varphi'$ von früheren Formen φ', mithin auch die rechte Seite, es ist:

$$\varphi = \psi + \Sigma L\varphi'$$

wo die L die Variabeln x und u nur in der Verbindung u_x, die Coefficienten von f aber gar nicht enthalten. Im Falle φ die früheste Form m^{ter} Ordnung ist, verschwinden die Formen φ' und man hat:

$$\varphi = \psi.$$

Der nämliche Fall tritt ein, wenn φ eine Invariante ist.

Die Formel $\varphi = \psi + \Sigma L\varphi'$ kann man leicht in die folgende transformiren:

$$\varphi = \psi + \Sigma M\psi',$$

in welcher die ψ' frühere durch Uebereinanderschiebung entstandene Formen ψ bedeuten und die Coefficienten M wieder die Variabeln x und u nur in der Verbindung u_x, die Coefficienten von f aber nicht enthalten.

Um diesen Satz nachzuweisen, kann ich, da er für die früheste der Formen φ gilt, die Annahme machen, er sei für alle Formen φ' nachgewiesen, welche in der Anordnung der durch Combination entstandenen Formen vor φ stehen; dass alle diese also in die Form gebracht werden können:

$$\varphi' = \psi' + \Sigma M\psi''$$

Trägt man diese Werthe in die Formel $\varphi = \psi + \Sigma L\varphi'$ ein, so erhält man die Gleichung:

$$\varphi = \psi + \Sigma L\psi' + \Sigma LM\psi'',$$

welche die verlangte Form besitzt.

Man sieht somit, dass alle Formen m^{ter} Ordnung sich linear aus solchen Formen zusammensetzen lassen, welche aus den Formen F durch Uebereinanderschiebung entstehen, dass diese letzteren also ein volles System von Formen m^{ter} Ordnung bilden. Dieses System ist jedoch keineswegs das kleinste volle System der Formen m^{ter} Ordnung; ein solches wird vielmehr erst dadurch erhalten, dass man von den oben gebildeten Formen alle diejenigen weglässt, welche durch frühere Formen linear dargestellt werden können.

Alle diese wegzulassenden Formen zu erkennen, ist im Allgemeinen sehr schwer, jedoch erhalten wir durch den folgenden Satz eine grosse Anzahl derselben.

Da nämlich die aus den Formen F durch Uebereinanderschiebung entstehenden Formen homogene lineare Functionen der Coefficienten der Form F sind, so verschwinden oder lassen sich durch frühere Formen ausdrücken alle diejenigen Formen ψ, welche aus Formen F entstehen, die diese Eigenschaft besitzen.

Somit erhält man ein volles System von Formen m^{ter} Ordnung, das weniger Formen enthält als das obige, indem man von irgend einem vollen System

$$F_1 \quad F_2 \quad F_3 \quad \ldots$$

von Formen $(m-1)^{\text{ter}}$ Ordnung ausgeht, und auf die Formen derselben alle Uebereinanderschiebungen anwendet.

Man kann dieses System durch ein anderes ersetzen, welches ebenso viel Formen enthält und zu dem man dadurch gelangt, dass man auf die Formen F Combinationen der Art anwendet, dass jedem Modularsysteme eine einzige Combination entspricht.

§. 3.

Grundlage für den Beweis, dass das vollständige System aus einer endlichen Anzahl von Formen besteht.

Den Nachweis, dass das so entstehende System ein volles System ist, werde ich dadurch führen, dass ich zeige, wie jede Form des obigen Systems der ψ sich linear durch die Formen dieses Systems, welcheich K nennen will, ausdrücken lässt. Für die erste Form ψ ist dies unmittelbar klar, da sie nach §. 2. gleich der ersten Form K ist. Um den Satz für eine andere Form ψ nachzuweisen, mache ich die Annahme, er wäre für alle früheren Formen ψ erwiesen; man könne ihnen also die Form geben:

$$\psi' = \Sigma L' K'$$

wo wieder die Coefficienten L' nur von dem Ausdruck u_x abhängen. Ersetze ich dann in der Formel $\varphi = \psi + \Sigma M \psi'$ (§. 2.) die Form φ durch K und trage für die ψ' ihre Werthe ein, so wird:

$$\psi = K + \Sigma L K',$$

wodurch unsere Behauptung erwiesen ist.

Um aus dem vollen Systeme der Formen F der $(m-1)^{\text{ten}}$ Ordnung zu dem Systeme der Formen K m^{ter} Ordnung zu gelangen, muss man mithin folgendes Verfahren einschlagen.

Zuerst bilde man sich eine Tafel aller denkbaren Modularsysteme etwa in folgender Art:

No. d. Mod. S.	u in a	x in au
1	0 mal	0 mal
2	0 -	1 -
3	1 -	0 -
4	0 -	2 -
5	1 -	1 -
6	2 -	0 -
7	0 -	3 -
8	1 -	2 -
9	2 -	1 -
10	3 -	0 -
11	0 -	4 -
12	1 -	3 -
. . .	. . .	. . .

Sodann wende man auf jede der Formen F die Combinationen

$$A_1 \quad A_2 \quad A_3 \quad \ldots$$

an, welche der Reihe nach so gewählt werden müssen, dass sie den Modularsystemen entsprechen, A_1 dem ersten, A_2 dem zweiten u. s. w.

Da man unter den Formen K diejenigen auslassen kann, welche verschwinden oder lineare Functionen von früheren sind, so wird man, um ein möglichst kleines Formensystem zu erhalten, die Combinationen A so auswählen, dass dieser Fall möglichst oft eintritt.

Diesen Zweck wird man besonders dann erreichen, wenn es eine Combination A der Art giebt, dass die durch sie entstehende Form K aus irgend einer andern Form m^{ter} Ordnung F durch eine niedere Combination zu gleicher Zeit entsteht. Sie kann dann aus dem Formengebiete der Form F weggelassen werden.

Ebenso, wie man nämlich aus der Form K zu der Form F, aus welcher sie durch die Combination A entstanden ist, dadurch gelangt, dass man nach Weglassung der Factoren a_x die Factoren (bau), (cau) $\ldots$, (bca), (bda) $\ldots$ in b_x, c_x, $\ldots$ (bcu), (bdu), $\ldots$ verwandelt, kann man auch aus K eine andere Form F' bilden, indem man nach Weglassung der Factoren b_x die Factoren (abu), (cbu), $\ldots$, (cab), (cdb), (adb), $\ldots$ durch a_x, c_x $\ldots$ (cau), (cdu), (adu), $\ldots$ ersetzt. Aus dieser Form F' entsteht dann K durch eine Combination A'. In ähnlicher Weise kann man mit den Symbolen c, d, $\ldots$ verfahren, so dass K durch eine Reihe von Combinationen aus den Formen F'', $F^{(3)}$, $\ldots\ldots$ ensteht.

Nachdem diejenigen aus F entstehenden Formen entfernt sind, welche durch frühere linear ausdrückbar sind, will ich die übrigen „zu F gehörige Formen“ nennen. Es gilt dann der folgende Satz:

Bilden die Formen:

$$F_1,\ F_2,\ F_3\ \ldots$$

ein volles System von Formen $(m-1)^{\text{ter}}$ Ordnung, dann bilden die zu ihnen gehörigen Formen ein volles System von Formen m^{ter} Ordnung.

Die Bedeutung eines vollen Systems von Formen m^{ter} Ordnung ist somit festgestellt und gezeigt, wie man zu einem solchen gelangen kann; ich gehe nun zu der allgemeinen Untersuchung über, wie man alle Covarianten, Invarianten, zugehörige Formen und Zwischenformen von f, durch eine möglichst geringe Anzahl von Formen ausdrücken kann.

Ich nenne ein System von Formen:

$$\vartheta_1,\ \vartheta_2,\ \vartheta_3,\ \ldots$$

ein vollständiges Formensystem, wenn alle Formen von f ganze Functionen der ϑ mit numerischen Coefficienten sind.

Unter diesen Formen müssen sich natürlich auch die einfachsten f und u_x befinden.

Die Frage, die ich nun untersuchen will, ist, nothwendige und hinreichende Merkmale der vollständigen Systeme zu finden und sodann für die cubische ternäre Form $f = a_x^3$ ein endliches System aufzustellen, welches diese Merkmale besitzt.

Zu dem Ende bilde ich 1) die zu den ϑ gehörigen Formen; 2) die zu den Producten der ϑ, unter welche ich auch die Potenzen und ihre Producte rechne, gehörigen Formen; sind alle dieselben ganze Functionen der ϑ mit numerischen Coefficienten, so behaupte ich, dass die Formen ϑ ein volles Formensystem bilden.

Beweis. Die einzige Form 0^{ter} Ordnung ist u_x, für diese gilt der Satz.

Ich mache daher die Annahme, dass der Satz für die Formen:

$$1^{\text{ter}}\ 2^{\text{ter}}\ 3^{\text{ter}}\ \ldots\ldots\ (m-1)^{\text{ter}}$$

Ordnung erwiesen sei, und will ihn für die Formen m^{ter} Ordnung beweisen.

Da nach Annahme alle Formen $(m-1)^{\text{ter}}$ Ordnung ganze Functionen der ϑ sind, so lassen sie sich linear durch diejenigen Formen ϑ und diejenigen Producte darstellen, welche von der $(m-1)^{\text{ten}}$ Ordnung sind. Diese letzteren bilden mithin ein volles System von Formen $m-1^{\text{ter}}$ Ordnung und die zu ihnen gehörigen Formen ein volles System von Formen m^{ter} Ordnung.

Diese letzteren Formen sind nun nach Voraussetzung ganze Functionen der Formen ϑ, mithin sind es auch alle Formen m^{ter} Ordnung, da sie sich aus ihnen linear zusammensetzen lassen. Ist ϑ ein Factor des Productes P, so nenne ich die zu P gehörigen Formen, zu ϑ uneigentlich gehörige Formen, während ich die zu ϑ gehörigen Formen eigentlich zugehörige Formen nennen will. Die zu P gehörigen Formen gehören mithin uneigentlich zu den verschiedenen Factoren von P.

Um nachzuweisen, dass das System der ϑ ein vollständiges System ist, muss man für jedes einzelne ϑ mithin zeigen, dass die zu ihm eigentlich und uneigentlich gehörigen Formen durch die ϑ ausdrückbar sind.

Um dies zu sehen, bilde ich mir die Tafel aller Modularsysteme und wende für jedes derselben eine Combination auf die Form ϑ und das Product $H = \vartheta P$ an, in dem P irgend ein Product der ϑ bedeuten möge. Ich werde diese Form P symbolisch durch $u_\sigma^\nu \; \varrho_x^\mu$ bezeichnen und bemerke hierbei, dass die Exponenten μ und ν beliebige Werthe (auch den Werth 0) besitzen können.

Bei der Anwendung der Combinationen auf H muss man die Factoren von ϑ zuerst verändern und erst, wenn diese nicht mehr ausreichen, darf man die übrigen Factoren ϱ_x und u_σ verwandeln. Würde man mit diesen beginnen, so wären die Combinationen nicht auf Formen anwendbar, für die μ und ν kleine Werthe haben, die Resultate also nicht allgemein gültig.

Denjenigen Modularsystemen, denen Combinationen entsprechen, welche auf die Form ϑ anwendbar sind, werden solche Combinationen entsprechen, die auf die Producte H angewandt nur die Factoren von ϑ ändern. Die durch dieselben aus H entstehenden Formen enthalten den Factor P, sind also durch Formen niederer Ordnung, mithin auch durch die ϑ ausdrückbar, wir brauchen sie nicht weiter zu untersuchen. Von den übrigen will ich diejenigen Modularsysteme zu ϑ gehörig nennen, deren entsprechende Combinationen auf H angewandt zu H gehörige Formen erzeugen.

Die dem Modularsystem M entsprechenden Combinationen brauche ich daher nur auf Producte solcher Formen ϑ anzuwenden, zu denen das System M gehört.

Aber auch von diesen Producten hat man nur eine geringe Anzahl zu untersuchen nöthig. Zunächst können diejenigen Producte der ϑ unberücksichtigt bleiben, welche einen so niedrigen Grad oder eine so niedrige Classe besitzen, dass die M entsprechenden Combinationen sich nicht darauf anwenden lassen. Bei Weitem wichtiger ist indess eine andere Art von Producten der ϑ, denen man unmittelbar ansieht, dass sie sich auf Formen von niedrigerer Ordnung, also auch auf Formen ϑ zurückführen lassen. Es entstehen dieselben aus allen denjenigen Producten:

$$H = \vartheta_1 \; \vartheta_2 \; \vartheta_3 \; \ldots,$$

welche als Factor R ein Product der ϑ von niedrigerer Ordnung besitzen, so dass man also eine Identität der Form hat:

$$H = RS,$$

und wo die dem Systeme M entsprechende Combination, welche auf H anzuwenden ist, so gewählt werden kann, dass nur die Factoren von R sich ändern; die resultirende Form besitzt dann immer den Factor S, ist also auf Formen niedrigerer Ordnung reducirbar.

Wenn man diese beiden Arten von Producten auslässt, so bleibt nur noch eine endliche Anzahl von Producten P übrig, von denen nachgewiesen werden muss, dass sie durch Anwendung von passenden Combinationen Formen hervorbringen, welche sich durch die Formen ϑ darstellen lassen. Diese übrigbleibenden Producte nenne ich zu dem Modularsystem M gehörige Producte.

Der Beweis, dass ein gegebenes Formensystem der ϑ ein vollständiges System ist, kann hiernach in folgende 4 Abschnitte eingetheilt werden:

1) Nachweis, dass die den ϑ eigentlich zugehörigen Formen ganze Functionen derselben sind.
2) Aufsuchung der zu jedem ϑ gehörigen Modularsysteme.
3) Aufsuchung der jedem Modularsystem M entsprechenden Producte P.
4) Nachweis, dass es für alle Modularsysteme M entsprechende Combinationen giebt, die, auf die zu ihm gehörigen Producte P angewandt, zu Formen führen, welche sich durch die ϑ darstellen lassen.

§. 4.

Beweis der Endlichkeit des vollständigen Systems für ternäre cubische Formen.

Nachdem ich nun allgemein gezeigt habe, an welchen Merkmalen man ein vollständiges Formensystem erkennen kann, will ich für die cubische Form $f = a_x^3$ den Nachweis liefern, dass die folgenden 34 Formen ϑ ein solches vollständiges System bilden.

0te Ord.	u_x
1te „	$f = a_x^3$
2te „	$a_x \, b_x \, (abu)^2$
3te „	$a_x \, c_x^2 \, (abu)^2 \, (bcu); \quad \alpha_x^3 = a_x \, b_x \, c_x \, (abc)^2;$ $u_s^3 = (abc)\,(abu)\,(acu)\,(bcu)$
4te „	$a_x^2 \, \alpha_x^2 \, (a\alpha u); \quad u_s^2 \, a_s \, a_x^2; \quad S = a_s^3;$ $(abu)^2 \, (cdu)^2 \, (bcu) \, (adu) = u_p^6$

5te Ord.	$u_s^2 a_s a_x b_x^2 (abu)$; $u_s a_s b_s a_x^2 b_x^2$; $u_s^2 a_s b_x (abu)^2$; $a_s b_s u_s (abu)^2 = u_t^3$;
6te "	$u_s a_s b_s a_x^2 b_x c_x^2 (bcu)$; $u_s^2 a_s c_x^2 (abu)^2 (bcu)$; $u_t^2 a_t a_x^2$; $a_t^3 = T$;
7te "	$u_s^2 u_p^5 (spx)$; $u_t^2 a_t a_x b_x^2 (abu)$; $a_t b_t u_t a_x^2 b_x^2$; $a_t u_t^2 b_x (abu)^2$;
8te "	$a_t b_t u_t a_x^2 b_x c_x^2 (bcu)$; $q_x^6 = a_t b_t c_t a_x^2 b_x^2 c_x^2$; $a_t u_t^2 c_x^2 (abu)^2 (bcu)$; $u_s^2 u_t^2 (stx)$;
9te "	$a_x^2 q_x^5 (aqu)$; $u_p^5 u_t^2 (ptx)$; $u_s^2 u_t a_t a_x^2 (stx)$;
10te "	$a_x^2 b_x^2 u_s^2 a_t b_t (stx)$; $u_s^2 u_t a_t b_x (stx) (abu)^2$;
11te "	$a_x^2 q_x^5 (\alpha q u)$;
12te "	$a_x^2 \alpha_x^2 q_x^5 (a \alpha q)$; $u_s^2 u_t^2 u_p^5 (spt)$.

Um die zu diesen 34 Formen eigentlich zugehörigen Formen aufzustellen und dieselben durch diese Formen selbst auszudrücken, bilde ich mir zuerst die Tafel aller hier möglichen Modularsysteme:

No. d. Mod. S.	u in a	x in au
0	0 mal	0 mal
1	0 -	1 -
2	1 -	0 -
3	0 -	2 -
4	1 -	1 -
5	2 -	0 -
6	0 -	3 -
7	1 -	2 -
8	2 -	1 -
9	3 -	0 -

und wende diesen Systemen entsprechende Combinationen auf jede der Formen ϑ an.

Das 0te Modularsystem brauche ich hierbei nie zu berücksichtigen, da durch die einzige demselben entsprechende Combination jede Form H in das Product fH übergeht, also unmittelbar durch Formen niederer Ordnung ausdrückbar ist.

Es ist also nur nöthig Combinationen, welche den übrigen Modularsystemen entsprechen, auf die Formen ϑ anzuwenden. Um dieses Verfahren übersichtlicher zu machen, stelle ich 33 Tafeln auf, denen ich die folgende Einrichtung geben will.

An der Spitze der Tafel steht die Form ϑ, deren eigentlich zugehörige Formen ich berechnen will; auf dem linken Rande dann die Ordnungszahlen aller derjenigen Modularsysteme, die den auf die Form ϑ angewandten Combinationen entsprechen; alsdann folgen daneben die durch diese passend gewählten Combinationen entstehenden Formen. Diese aus den Formen ϑ entstehenden Formen Q sind keineswegs sämmtlich ihre zugehörigen Formen; viele derselben werden aus anderen Formen R durch niedere Combinationen entstehen, als aus derjenigen Form ϑ, in deren Tafel sie sich befinden. Tritt dieser Fall ein, so will ich es dadurch andeuten, dass ich rechts unten an die Form Q das Zeichen $+$ mache Q_+, alsdann das Zeichen $:$ folgen lasse und dahinter die Form R setze, aus welcher Q durch eine niedere Combination als aus ϑ entsteht $Q_+ : R$.

Die so bezeichneten Formen Q brauchen nicht berücksichtigt zu werden. Von den andern muss nachgewiesen werden, dass sie sich auf frühere Formen zurückführen lassen; dieser Nachweis wird mit symbolischer Rechnung geführt werden, und zwar werde ich mich meistentheils der folgenden beiden Identitäten bedienen:

I. $$c_x\,(abd) - d_x\,(abc) = b_x\,(acd) - a_x\,(bcd).$$

II. $$c_x\,d_x\,(abc)\,(abd) = \tfrac{1}{2}\left\{c_x^2\,(abd)^2 + d_x^2\,(abc)^2 - b_x^2\,(acd)^2 - a_x^2\,(bcd)^2 + 2\,a_x\,b_x\,(acd)\,(bcd)\right\},$$

welche ich schlechthin als Identität I. und Identität II. citiren will.

Da ferner die symbolischen Buchstaben $a\ b\ c$ dieselbe Bedeutung haben, so wird eine Form F ihren Werth nicht ändern, wenn man sie durch die Form F' ersetzt, in welche sie durch Vertauschung der Buchstaben unter einander übergeht; in diesem Falle werde ich F durch $\dfrac{F+F'}{2}$ ersetzen.

Endlich wird F verschwinden, wenn es durch Vertauschung der symbolischen Buchstaben unter einander sein Zeichen ändert. Ich kann in diesem Falle ohne Weiteres $F = 0$ setzen.

Tafel I.

$$f = a_x^3.$$

1. $a_x^2\,b_x^2\,(abu) = 0.$
2. $a_x\,b_x\,(abu)^2.$
3. $(abu)^3 = 0.$

Tafel II.

$$a_x\,b_x\,(abu)^2.$$

1. $a_x\,c_x^2\,(bcu)\,(abu)^2.$
2. $a_x\,b_x\,(abu)\,(abc)\,c_x^2 = \tfrac{1}{3}\,a_x\,b_x\,c_x\left\{c_x\,(abu) + a_x\,(bcu) - b_x\,(acu)\right\}$
   $= \tfrac{1}{3}\,u_x\,(abc)^2$ $a_x\,b_x\,c_x$ Id. I.
3. $c_x\,(acu)\,(bcu)\,(abu)^2$
   $= \tfrac{1}{3}\,(acu)\,(bcu)\,(abu)\left\{c_x\,(abu) + a_x\,(bcu) - b_x\,(acu)\right\}$
   $= \tfrac{1}{3}\,u_x\,(abc)\,(acu)\,(bcu)\,(abu).$ Id. I.
4. $c_x\,a_x\,(bcu)\,(abu)\,(abc) = 0.$
5. $a_x\,b_x\,c_x\,(abc)^2.$
7. $(acu)\,(bcu)\,(abu)\,(abc).$
8. $a_x\,(bcu)\,(abc)^2 = 0.$

Tafel III.

$$a_x\, c_x^2\, (abu)^2\, (bcu).$$

1. $a_x\, c_x\, (abu)^2\, (bcu)\, d_x^2\, (cdu)$
$$= \tfrac{1}{2}\, a_x\, c_x\, d_x\, (abu)^2\, (cdu) \left\{d_x\, (bcu) - c_x\, (bdu)\right\}$$
$$= \tfrac{1}{2}\, a_x\, c_x\, d_x\, (abu)^2\, (cdu) \left\{u_x\, (bcd) - b_x\, (cdu)\right\}$$
2. $a_x\, c_x^2\, d_x^2\, (abu)^2\, (bcd) = 0.$
3. $c_x\, d_x\, (adu)\, (cdu)\, (abu)^2\, (bcu) = 0.$
4. $c_x^2\, d_x\, (adu)\, (abu)^2\, (bcd)_+ : d_x\, (adu)\, (abu)^2\, (bdu).$
5. $c_x^2\, a_x\, d_x\, (abd)^2\, (bcu)_+ : a_x\, d_x\, (abd)^2\, b_x.$
6. $(adu)\, (cdu)^2\, (abu)^2\, (bcu).$
7. $c_x\, (adu)\, (cdu)\, (abu)^2\, (bcd)_+ : (adu)\, d_x\, (abu)^2\, (bdu).$
8. $c_x^2\, (adu)\, (abd)^2\, (bcu)_+ : (adu)\, (abd)^2\, b_x.$
9. $a_x\, c_x^2\, (abd)^2\, (bcd)_+ : a_x\, (abd)^2\, (bdu).$

Tafel IV.

$$u_s^3 = (abc)\, (abu)\, (acu)\, (bcu).$$

1. $u_s^2\, a_s^2\, a_s.$
2. $u_s\, a_s^2\, a_x = d_x\, (abc)\, (abu)\, (acd)\, (bcd)$
$$= \tfrac{1}{3}\, (abc)\, (acd)\, (bcd) \left\{d_x\, (abu) + a_x\, (bdu) - b_x\, (adu)\right\}$$
$$= \tfrac{1}{3}\, u_x\, (abc)\, (acd)\, (acd)\, (bcd) = \tfrac{1}{3}\, S\, u_x.$$
3. $a_s^3.$

Die Identität $u_s\, a_x\, a_s^2 = \tfrac{1}{3}\, S\, u_x$ lehrt uns, dass alle Formen, die den symbolischen Factor a_s^2 enthalten, die Invariante S als wirklichen Factor besitzen.

Tafel V.

$$\alpha_x^3 = (abc)^2\, a_x\, b_x\, c_x.$$

1. $a_x^2\, \alpha_x^2\, (a\alpha u).$
3. $a_x\, \alpha_x\, (a\alpha u)^2 = a_x\, d_x\, (abc)^2\, (bdu)\, cdu)$
$$= a_x\, (abc)\, (bdu)\, (cdu) \left\{a_x\, (bcd) - b_x\, (acd) - c_x\, (abd)\right\}. \text{ Id. I.}$$

Der erste Theil dieser Summe ist $u_s^2\, a_x^2\, a_s$, die beiden anderen einander gleich, es ist daher:

$$a_x\, \alpha_x\, (a\alpha u)^2 - u_s^2\, a_s\, a_x^2 = -2 a_x\, b_x\, (abc)\, (bdu)\, (cdu)\, (acd).$$

Durch Vertauschung der Buchstaben a und b und sodann von b und d erhält man die Gleichungen:

$$a_x \alpha_x\, (a\alpha u)^2 - u_s^2 a_s a_x^2 = - a_x b_x (abc)(cdu) \left\{(bdu)\, (acd) - (adu)\, (bcd)\right\}$$
$$= - a_x\, b_x\, (abc)\, (cdu)^2\, (abd).$$

$$a_x\, \alpha_x\, (a\alpha u)^2 - u_s^2\, a_s\, a_x^2 = -(abc)\, (acd)\, (bdu)\, a_x \left\{b_x\, (cdu) + d_x\, (bcu)\right\}$$
$$= -(abc)\, (acd)\, (bdu)\, a_x \left\{u_x\, (bcd) - c_x\, (bdu)\right\},$$

und durch Addition:

$$2\, a_x\, \alpha_x\, (a\alpha u)^2 - 2\, u_s^2\, a_s\, a_x^2 = -\, u_x \,.\, a_x\, (abc)\, (acd)\, (bcd)\, (bdu)$$

$$= -\, u_x\, a_x\, a_s^2\, u_s = -\tfrac{1}{3}\, S\, u_x^2. \qquad \text{(s. Taf. IV.)}$$

$$a_x\, \alpha_x\, (a\alpha u)^2 = a_x^2\, u_s^2\, a_s - \tfrac{1}{6}\, S\, u_x^2.$$

6. $(a\alpha u)^3 = (abc)^2\, (adu)\, (bdu)\, (cdu)$

$$= (abc)\, (adu)\, (bdu)\, \{(bcd)\, (acu) - (bcu)\, (acd)\}$$

$$= 2\, (abc)\, (adu)\, (bdu)\, (bcd)\, (acu) = 0.$$

Tafel VI.

$a_x^2\, \alpha_x^2\, (a\alpha u).$

1. $\alpha_x^2\, a_x\, b_x^2\, (abu)\, (a\alpha u) = \tfrac{1}{2}\, \alpha_x^2\, a_x\, b_x\, (abu)\, \{b_x\, (a\alpha u) - a_x\, (b\alpha u)\}$

$$= \tfrac{1}{2}\, \alpha_x^2\, a_x\, b_x\, (abu)\, \{\alpha_x\, (abu) - u_x\, (ab\alpha)\}$$

2. $a_x^2\, b_x^2\, \alpha_x^2\, (a\alpha b) = 0.$
3. $a_x\, b_x\, \alpha_x^2\, (abu)\, (b\alpha u)\, (a\alpha u) = 0.$
4. $b_x\, a_x^2\, \alpha_x\, (b\alpha u)\, (a\alpha b)_+ \, : \, \alpha_x\, (b\alpha u)^2\, b_x.$
6. $a_x\, (abu)\, (b\alpha u)^2\, (a\alpha u)_+ \, : \, b_x\, \alpha_x\, (b\alpha u)^2.$
7. $a_x^2\, (b\alpha u)^2\, (a\alpha b)_+ \, : \, (b\alpha u)^3.$

Tafel VII.

$u_s^2\, a_x^2\, a_s.$

1. $u_s^2\, a_s\, a_x\, b_x^2\, (abu).$
2. $u_s\, a_s\, b_s\, a_x^2\, b_x^2.$
3. $u_s^2\, a_s\, b_x\, (abu)^2.$
4. $u_s\, a_s\, b_s\, a_x\, b_x\, (abu) = 0.$
5. $b_s^2\, a_x^2\, a_s\, b_{x+} : b_s^2\, u_s\, b_x\,.$
7. $b_s\, u_s\, (abu)^2\, a_s\,.$
8. $b_s^2\, a_x\, a_s\, (abu)_+ \, : \, b_s^2\, u_s\, b_x\,.$

Tafel VIII.

$u_p^6 = (abu)^2\, (cdu)^2\, (adu)\, (bcu).$

2. $u_p^5\, a_p\, a_x^2 = (abu)^2\, (cdu)\, (adu)\, (bcu)\, (cde)\, e_x^2$

$$= (abu)\, (cdu)\, (adu)\, (bcu)\, (cde)\, e_x$$

$$\{b_x\, (aeu) - a_x\, (beu) + u_x\, (abe)\} \qquad \text{Id. I.}$$

$$= 2\, (abu)\, (cdu)\, (adu)\, (bcu)\, (cde)\, b_x\, e_x\, (aeu)$$

$$+\, u_x \,.\, c_x\, (abu)\, (cdu)\, (adu)\, (bcu)\, (cde)\, (abe).$$

Das zweite Glied hat den Factor u_x, lässt sich also auf niedere Formen reduciren, das erste hat den Werth:

$$(adu)\, (aeu)\, (cde) \,.\, (abu)\, (bcu)\, b_x\, \{e_x\, (cdu) - d_x\, (ceu)\}$$

$$= (adu)\, (aeu)\, (cde) \,.\, (abu)\, (bcu)\, b_x\, \{u_x\, (cde) - c_x\, (deu)\}.$$

Das erste Glied kann man wieder vernachlässigen und das zweite durch die Summe ersetzen:

$$-\tfrac{1}{3}(adu)(aeu)(deu)\,.\,b_x c_x (bcu)\left\{(cde)(abu)\right.$$
$$\left.-(cda)(ebu)-(cae)(dbu)\right\}=+\tfrac{1}{3}u_s^3\,.\,b_x c_x (bcu)^2$$

5. $(abu)^2 (cde)^2 (adu)(bcu)\, e_x = (abu)^2 (\alpha a u)(b\alpha u)\,\alpha_x$
$$=(abu)(a\alpha u)(b\alpha u)\left\{b_x (a\alpha u) - a_x (b\alpha u) + u_x (ab\alpha)\right\}.$$

Das erste und zweite Glied entstehen durch niedere Combinationen aus der Form $a_x\, \alpha_x\, (a\alpha u)^2$, das dritte hat den Factor u_x.

9. $(abu)^2 (cde)^2 (ade)(bcu) = 0.$

Tafel IX.

$u_s^2\, a_s\, a_x\, b_x^2\, (abu).$

1. $u_s^2\, a_s\, a_x\, b_x\, c_x^2\, (abu)(bcu) = \tfrac{1}{2} u_s^2 a_s a_x b_x c_x (bcu)\left\{c_x (abu) - b_x (acu)\right\}$
$$=\tfrac{1}{2} u_s^2 a_s a_x b_x c_x (bcu)\left\{u_x (abc) - a_x (bcu)\right\}$$
2. $u_s^2\, a_s\, a_x\, b_x^2\, c_x^2\, (abc) = 0.$
3. $u_s^2\, a_s\, (abu)(acu)(bcu)\, b_x\, c_x = 0.$
4. $u_s^2\, a_s\, (acu)\, b_x^2\, c_x\, (abc)_+ : u_s^2\, a_s\, (acu)^2\, c_x.$
5. $c_s^2\, a_s\, a_x\, b_x^2\, c_x\, (abu)_+ : c_s^2\, a_s\, a_x^2\, c_x.$
6. $u_s^2\, a_s\, (acu)(bcu)^2 (abu) = \tfrac{1}{3} u_s^2 (acu)(bcu)(abu)$
$$\left\{a_s (bcu) - b_s (acu) + c_s (abu)\right\} = \tfrac{1}{3} u_s^3\,.\,u_{s_1}^3.$$
7. $u_s\, c_s\, a_s\, (acu)(bcu)\, b_x\, (abu) = 0.$
8. $c_s^2\, a_s\, (acu)\, b_x^2\, (abu)_+ : c_s^2\, a_s\, (acu)\, a_x.$
9. $c_s^2\, a_s\, a_x\, b_x^2\, (abc)_+ : c_s^2\, a_s\, a_x\, (acu).$

Tafel X.

$u_s\, a_s\, b_s\, a_x^2\, b_x^2.$

1. $u_s\, a_s\, b_s\, a_x^2\, b_x\, c_x^2\, (bcu).$
2. $a_s\, b_s\, c_s\, a_x^2\, b_x^2\, c_x^2.$

Diese Form kann, da nach Tafel V $u_s^2\, c_s\, c_x^2 = c_x\, \alpha_x\, (c\alpha u)^2 + \dfrac{S}{6}\, u_x^2$ ist auf die folgende Form zurückgeführt werden:

$$a_x^2\, b_x^2\, c_x\, \alpha_x\, (c\alpha a)(c\alpha b) = \tfrac{1}{2} a_x\, b_x\, c_x\, \alpha_x \left\{a_x^2 (bc\alpha)^2 + b_x^2 (ac\alpha)^2\right.$$
$$\left.- c_x^2 (ab\alpha)^2 - \alpha_x^2 (abc)^2 + 2 c_x\, \alpha_x (abc)(ab\alpha)\right\}.\quad \text{Id. II.}$$
$$=\tfrac{1}{2} a_x\, b_x\, c_x\, \alpha_x \left\{a_x^2 (bc\alpha)^2 - \alpha_x^2 (abc)^2 +\right.$$
$$\left.\tfrac{2}{3}\alpha_x (abc)\left\{c_x (ab\alpha) - b_x (ac\alpha) + a_x (bc\alpha)\right\}\right\}$$
$$=\tfrac{1}{2} a_x b_x c_x \alpha_x \left\{a_x^2 (bc\alpha)^2 - \alpha_x^2 (abc)^2 + \tfrac{2}{3}\alpha_x^2 (abc)^2\right\}.\quad \text{Id. I.}$$

3. $u_s\, a_s\, b_s\, a_x^2\, c_x\, (bcu)_+^2 : u_s^2\, b_s\, c_x\, (bcu)^2.$
4. $c_s\, a_s\, b_s\, a_x^2\, b_x\, c_x\, (bcu) = 0.$
6. $u_s\, a_s\, b_s\, a_x\, (acu)(bcu)_+^2 : u_s^2\, b_s\, c_x\, (bcu)^2.$
7. $a_s\, b_s\, c_s\, a_x^2\, (bcu)_+^2 : u_s\, b_s\, c_s\, (bcu)^2.$

Tafel XI.

$$u_s^2\; a_s\, b_x\, (abu)^2.$$

1. $u_s^2\; a_s\, (bcu)\, (abu)^2\, c_x^2.$

2. $u_s^2\; a_s\, b_x\, c_x^2\, (abu)\, (abc) = \frac{1}{2}\, u_s^2\, a_s\, b_x\, c_x\, (abc)\, \{c_x\, (abu) - b_x\, (acu)\}$

$= \frac{1}{2}\, u_s^2\, a_s b_x c_x\, (abc) \{u_x (abc) - a_x (bcu)\}$ Id. I.

$= \frac{1}{2}\, u_x\,.\, u_s^2 \alpha_s \alpha_x^2 - \frac{1}{6}\, u_s^2\, a_x b_x c_x\, (abc)\, \{a_s\, (bcu) - b_s\, (acu) + c_s\, (abu)\}$

$= \frac{1}{2}\, u_x\,.\, u_s^2 \alpha_s \alpha_x^2 - \frac{1}{6}\, u_s^3\,.\; a_x\, b_x\, c_x\, (abc)^2.$ Id. I.

4. $u_s^2\; a_s\, (bcu)\, (abu)\, (abc)\, c_x = \frac{1}{2}\, u_s^2\, (a_s\, c_x - c_s\, a_x)\, (bcu)\, (abu)\, (abc)$

$= \frac{1}{2}\, u_s^2\, [ac\, (sx)]\, (bcu)\, (abu)\, (abc)$

$= \frac{1}{2}\, u_s^2\, u_{s_1}^2\, (s_1 s x) = 0.$

5. $c_s^2\; a_s\, b_x\, c_x\, (abu)^2_{+} : c_s^2\; a_s\, c_x\, a_x^2.$

8. $c_s^2\; a_s\, (bcu)\, (abu)^2_{+} : c_s^2\; a_s\, c_x\, a_x^2.$

9. $c_s^2\; a_s\, b_x\, (abu)\, (abc)_{+} : c_s^2\; a_s\, a_x\, (acu).$

Tafel XII.

$$u_t^3 = a_s\, b_s\, u_s\, (abu)^2.$$

2. $u_t^2\; a_x^2\; a_t = \frac{1}{3}\, [a_s\, b_s\, c_s\, (abu)^2 + 2\; a_s\, b_s\, u_s\, (abu)\, (abc)]\; c_x^2$

$= \frac{1}{3} c_x^2\, a_s b_s\, (abu) \{- a_s\, (cbu) + b_s\, (acu) + u_s\, (abc)$

$+ 2\; u_s\, (abc)\}.$

Nun ist nach Tafel IV: $b_s^2\; b_x\, u_s = \frac{S}{3}\, u_x$; mithin

$\underset{3}{c_x^2}\, a_s\, b_s^2\, (abu)\, (acu) = \underset{3}{c_x^2}\, a_s^2\, b_s\, (abu)\, (cbu)$

$= \frac{S}{9}\, c_x^2\, (aau)\, (acu) = 0.$

$u_t^2\; a_t\; a_x^2 = u_s\, c_x^2\, a_s\, b_s\, (abu)\, (abc) = a_s\, b_s\, c_x\, (abc)\, u_s$

$\{u_x\, (abc) - a_x\, (bcu) + b_x\, (acu)\}$ Id. I.

$= u_x . a_s\, b_s\, c_x\, u_s\, (abc)^2 + 2\; a_s\, b_s\, b_x\, c_x\, (abc)\, (acu)\, u_s$

$= u_x . a_s b_s c_x u_s (abc)^2 + a_s b_x c_x u_s (abc) \{b_s (acu) - c_s (abu)\}$

$= u_x . a_s b_s c_x u_s (abc)^2 + a_s b_x c_x u_s (abc) \{a_s (bcu) - u_s (abc)\}$

Die Form $a_s^2 b_x c_x u_s\, (abc)\, (bcu)$ hat (Taf. IV.) den Werth: $\frac{S}{3}\; b_x\; c_x\; (bcu)^2$ also:

$u_t^2\; a_t\, a_x^2 = u_x . \alpha_s^2\, u_s\, \alpha_x + \frac{S}{3} \cdot b_x\, c_x\, (bcu)^2 - \alpha_s\, \alpha_x^2\, u_s^2.$

Eine fernere Formel für $u_t^2\; a_t\, a_x^2$ ergiebt sich in folgender Weise:

$u_t^2\; a_t\; a_x^2 = u_x . \alpha_s^2\, u_s\, \alpha_x + 2\; a_s\, b_s\, b_x\, c_x\, (abc)\, (acu)\, u_s$

$= u_s\, c_x^2\, a_s\, b_s\, (abu)\, (abc)$

$2\; u_t^2\; a_t\; a_x^2 = u_x . \alpha_s^2\, u_s\, \alpha_x + (abc)\, (abu)\, u_s\, (c_x a_s - a_x c_s)\, (c_x b_s - b_x c_s)$

$- a_x\, b_x\, (abc)\, (abu)\, u_s\, c_s^2$

$= u_x . \alpha_s^2\; u_s\, \alpha_x + u_s\, u_{s_1}\, (s\, s_1\, x)^2 - \frac{S}{3}\; a_x\, b_x\, (abu)^2.$

Um endlich eine dritte Formel für $u_t^2\, a_t\, a_x^2$ zu erlangen, gehe ich von der Gleichung aus:

$$a_x\, \alpha_x\, (a\alpha u)^2 = a_x^2\, u_s^2\, a_s - \frac{S}{6}\, u_x^2. \qquad \text{Tafel V.}$$

Nach ihr wird:

$$u_t^2\, a_t\, a_x^2 = u_s\, c_x^2\, a^s\, b_s\, (abu)\, (abc) = (a\alpha u)\, c_x^2\, (a\alpha b)\, (abc)\, (\alpha bu)$$

und

$$\begin{aligned} u_t^2\, a_t\, a_x^2 &= u\ \ .\, u_s\, \alpha_s^2\, \alpha_x + 2\, a_s\, b_s\, u_s\, b_x\, c_x\, (abc)\, (acu) \\ &= u_x\, .\, u_s\, \alpha^2\, \alpha_x + 2\, (a\alpha b)\, (a\alpha u)\, b_x\, c_x\, (abc)\, (\alpha cu) \\ &\qquad + \frac{S}{6}\, b_x\, c_x\, (bcu)^2. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 2\, u_t^2\, a_t\, a_x^2 &= u_x\, .\, u_s\, \alpha_s^2\, \alpha_x + \frac{S}{6}\, b_x\, c_x\, (bcu)^2 + (a\alpha u)\, c_x\, (abc)\, (b\alpha u) \\ &\qquad \left\{c_x\, (ab\alpha) - b_x\, (ac\alpha) + a_x\, (bc\alpha)\right\} \\ &= u_x\, .\, u_s\, \alpha_s^2\, \alpha_x + \frac{S}{6}\, b_x\, c_x\, (bcu)^2 + c_x\, \alpha_x\, (a\alpha u)\, (abc)^2\, (b\alpha u) \\ &= u_x\, .\, u_s\, \alpha_s^2\, \alpha_x + \frac{S}{6}\, b_x\, c_x\, (bcu)^2 + \alpha_x\, \beta_x\, (\alpha\beta u)^2. \end{aligned}$$

5. $$\begin{aligned} u_t\, a_t^2\, a_x &= \tfrac{1}{3}\, a_s\, b_s\, (abc)\, \left\{2\, c_s\, (abu) + u_s\, (abc)\right\}\, c_x \\ &= \tfrac{1}{3}\, a_s\, b_s\, (abc)\, c_x\, \left\{2\, c_s\, (abu) + c_s\, (abu) + a_s\, (bcu) \right. \\ &\qquad \left. - b_s\, (acu)\right\} && \text{Id. I.} \\ &= a_s\, b_s\, c_s\, (abc)\, c_x\, (abu) + \frac{2\,S}{9}\, (bbc)\, c_x\, (bcu) && \text{(Tafel IV.)} \\ &= \tfrac{1}{3}\, a_s\, b_s\, c_s\, (abc)\, [c_x\, (abu) + a_x\, (bcu) - b_x\, (acu)] \\ &= \tfrac{1}{3}\, u_x\, .\, a_s\, b_s\, c_s\, (abc)^2 = \tfrac{1}{3}\, u_x\, T. && \text{Id. I.} \end{aligned}$$

Für $u_t\, a_t^2\, a_x$ kann man noch eine andere Formel entwickeln, es ist:

$$\begin{aligned} u_t\, a_t^2\, a_x &= \tfrac{1}{3}\, a_s b_s (abc) \left\{2 u_s (abc) + 2 b_s (acu) - 2\, a_s (bcu) + u_s (abc)\right\} c_x \\ &= a_s\, b_s\, u_s\, c_x\, (abc)^2 + \tfrac{4}{3}\, a_s\, b_s^2\, (abc)\, (acu), \end{aligned}$$

und da das zweite Glied verschwindet:

$$u_t\, a_t^2\, a_x = \alpha_s^2\, \alpha_x\, u_s = \tfrac{1}{3}\, T\, u_x.$$

9. a_t^3.

Tafel XIII.

$$u_s\, a_s\, b_s\, a_x^2\, b_x\, c_x^2\, (bcu).$$

1. $$\begin{aligned} u_s\, a_s\, b_s\, a_x^2\, b_x\, c_x\, (bcu)\, (cdu)\, d_x^2 &= \tfrac{1}{2}\, u_s\, a_s\, b_s\, a_x^2\, b_x\, c_x\, d_x\, (cdu) \\ &\qquad \left\{d_x\, (bcu) - c_x\, (bdu)\right\} \\ &= \tfrac{1}{2}\, u_s\, a_s\, b_s\, a_x^2\, b_x\, c_x\, d_x\, (cdu) \\ &\qquad \left\{u_x\, (bcd) - b_x\, (cdu)\right\}. && \text{Id. I.} \end{aligned}$$

2. $u_s\, a_s\, b_s\, a_x^2\, b_x\, c_x^2\, d_x^2\, (bcd) = 0.$

3. $u_s\, a_s\, b_s\, a_x^2\, (bdu)\, c_x\, d_x\, (cdu)\, (bcu) = 0.$

4. $d_s\, a_s\, b_s\, a_x^2\, (bdu)\, c_x^2\, d_x\, (bcu)_+ \,:\, d_s\, a_s\, b_s\, a_x^2\, (bdu)\, d_x\, b_x.$

5. $d_s\, a_s\, b_s\, a_x^2\, b_x\, c_x^2\, (bcd)\, d_{x+} \,:\, d_s\, a_s\, b_s\, a_x^2\, b_x\, (bdu)\, d_x.$

6. $u_s a_s b_s (adu)^2 (bdu) c_x^2 (bcu)_+ : u_s a_s b_s (adu)^2 (bdu) b_x.$
7. $d_s a_s b_s (adu)^2 b_x c_x^2 (bcu)_+ : d_s a_s b_s (adu)^2 b_x^2.$
8. $d_s a_s b_s a_x^2 (bdu) c_x^2 (bcd)_+ : d_s a_s b_s a_x^2 (bdu)^2.$

Tafel XIV.

$u_s^2 a_s c_x^2 (abu)^2 (bcu).$

1. $$u_s^2 a_s c_x (abu)^2 (bcu) (cdu) d_x^2 = \tfrac{1}{2} u_s^2 a_s c_x d_x (abu)^2 (cdu) \{d_x (bcu) - c_x (bdu)\}$$ $$= \tfrac{1}{2} u_s^2 a_s c_x d_x (abu)^2 (cdu) \{u_x (bcd) - b_x (cdu)\}. \qquad \text{Id. I.}$$
2. $u_s^2 a_s c_x^2 d_x^2 (abu)^2 (bcd) = 0.$
3. $u_s^2 a_s d_x (cdu)^2 (abu)^2 (bcu) = \tfrac{1}{2} u_s^2 (a_s d_x - d_s a_x) (cdu)^2 (abu)^2 (bcu).$
Diese Form kann leicht auf die Form $u_s^2 u_p^5 (spx)$ zurückgeführt werden. Es ist nämlich:

$$u_s^2 u_p^5 (psx) = u_s^2 (abu)^2 (bcu) (cdu) \{\tfrac{1}{3} (cdu) [ad (sx)] + \tfrac{2}{3} (adu) [cd (sx)]\}$$
$$= u_s^2 (abu)^2 (bcu) (cdu) \{\tfrac{1}{3} (cdu) [ad (sx)] + \tfrac{2}{3} [(cdu) [ad (sx)] + [du (sx)] (cda)\} \qquad \text{Id. I.}$$
$$= u_s^2 (abu)^2 (bcu) (cdu) \{(cdu) (a_s d_x - d_s a_x) + \tfrac{2}{3} (cda) (d_s u_x - u_s d_x)\}.$$

4. $d_s u_s a_s c_x (cdu) d_x (abu)^2 (bcu)_+ : u_s d_s a_s d_x^2 (abu)^2 b_x.$
5. $d_x d_s^2 a_s c_x^2 (abu)^2 (bcu)_+ : d_x d_s^2 a_s (abu)^2 b_x.$
7. $d_s u_s a_s (cdu)^2 (abu)^2 (bcu)_+ : d_s u_s a_s d_x^2 (abu)^2 b_x.$
8. $d_s^2 a_s c_x (cdu) (abu)^2 (bcu)_+ : d_s^2 a_s d_x (abu)^2 b_x.$
9. $d_s^2 a_s c_x^2 (abu) (abd) (bcu)_+ : d_s^2 a_s (abu) (abd) b_x.$

Tafel XV.

$u_t^2 a_t a_x^2.$

1. $u_t^2 a_t (abu) a_x b_x^2.$
2. $u_t a_t b_t a_x^2 b_x^2.$
3. $u_t^2 a_t b_x (abu)^2.$
4. $u_t a_t b_t a_x b_x (abu) = 0.$
5. $b_t^2 a_t a_x^2 b_{x+} : b_t^2 u_t b_x.$
7. $u_t a_t b_t (abu)^2.$
Mit Hülfe der Formel:
$$u_t^2 b_t b_x^2 = \frac{T}{3} u_x^2 + \frac{S}{3} c_x d_x (cdu)^2 - \alpha_s \alpha_x^2 u_s^2. \qquad \text{Tafel. XII.}$$
gelange ich für die Form $u_t a_t b_t (abu)^2$ leicht zu dem Ausdruck:
$$u_t a_t b_t (abu)^2 = \frac{S}{3} (acd) (cdu) (acu) (adu) - u_s a_s \alpha_s (a\alpha u)^2,$$
welcher, da:

$$a_x\, \alpha_x\, (a\alpha u)^2 = a_s\, u_s^2\, a_x^2 + \frac{S}{6}\, u_x^2 \qquad \text{Tafel V.}$$

ist, in folgenden übergeht:

$$u_t\, a_t\, b_t\, (abu)^2 = \frac{S}{3} \cdot u_s^3 - u_s\, a_s^2\, u_{s_1}^2\, a_{s_1} + \frac{S}{6}\, u_s^3,$$

der nach Tafel V. den Factor S besitzt.

8. $b_t^2\, a_t\, a_x\, (abu)_+ \,:\, b_t^2\, u_t\, b_x.$

Tafel XVI.

$u_s^2\, u_p^5\, (spx).$

1. $u_s^2\, u_p^5\, a_x^2\, [sp\, (au)] = u_s^2\, u_p^5\, a_x^2\, \{a_s\, u_p - u_s\, a_p\}$
2. $u_s\, a_s\, u_p^5\, a_x^2\, (spx).$

Diese Form lässt sich leicht mit Hülfe der Formel:

$$A \cdot \cdot \cdot \left\{ \begin{aligned} u_s^2\, u_p^5\, (spx) &= 2\, u_s^2\, (abu)^2\, (cdu)^2\, (bcu)\, a_s\, d_x \\ &\quad - \tfrac{2}{3}\, u_s^3\, .\, (abu)^2\, (bcu)\, (cdu)\, d_x \\ &\quad - u_x\, .\, d_s\, u_s^2\, (abu)^2\, (bcu)\, (cdu). \end{aligned} \right. \qquad \text{Tafel XIV.}$$

auf die Form zurückführen:

$$a_s\, u_s^2\, (abu)^2\, (cdu)\, (bcu)\, (cde)\, e_x^2$$
$$= \tfrac{1}{2}\, u_s^2\, (abu)^2\, a_s\, (bcu)\, (cde)\, d_x\, e_x\, \{e_x\, (cdu) - d_x\, (ceu)\}$$
$$= \tfrac{1}{2}\, u_s^2\, a_s\, (abu)^2\, (bcu)\, (cde)\, d_x\, e_x\, \{u_x\, (cde) - c_x\, (deu)\}.$$

Der erste Theil hat den Factor u_x, der letztere den Werth:

$$- \tfrac{1}{6}\, u_s^2\, a_s\, (abu)^2\, c_x\, d_x\, e_x\, (cde)$$
$$\{(bcu)\, (deu) - (bdu)\, (ceu) + (beu)\, (cdu)\} = 0. \qquad \text{Id. I.}$$

4. $u_s\, a_s\, u_p^5\, \{a_s\, u_p - u_s\, a_p\}.$

Da diese Form von der 8ten Ordnung ist, so darf ich hier die Annahme machen, dass alle Formen niederer Ordnung durch die Formen ϑ darstellbar seien.

Es muss sich also auch die Form $u_p^5\, a_p\, a_x^2$ durch frühere Formen ausdrücken lassen, also ein Aggregat der Form sein:

$$u_p^5\, a_p\, a_x^2 = C_1\, u_s^3\, .\, a_x\, b_x\, (abu)^2 + C_2\, u_x^2\, u_t^3 + C_3\, u_x\, u_s^2\, a_s\, b_x\, (abu)^2,$$

worin die C numerische Constanten bedeuten.

Hieraus folgt leicht die Gleichung:

$$2\, u_p^5\, a_p\, a_x\, a_s\, u_s^2 = 2\, C_1\, u_s^3\, a_x\, b_{s_1}\, u_{s_1}^2\, (abu)^2 + 2\, C_2\, u_x . u_s^3 . u_t^3$$
$$+ C_3\, u_s^3 . u_s^2\, a_s\, b_x\, (abu)^2 + C_4\, u_x . u_s^2\, u_{s_1}^2\, a_s\, b_{s_1}\, (abu)^2.$$

5. $a_s^2\, u_p^6\, a_s\, (spx)$ hat den Factor S. (Tafel IV.)

8. $a_s^2\, u_p^5\, \{a_s\, u_p - u_s\, a_p\}$ hat den Factor S.

9. $a_s^2\, a_p\, u_p^4\, (spx)$ hat den Factor S.

Tafel XVII.

$u_t^2\, a_t\, a_x\, b_x^2\, (abu)$.

1. $u_t^2 a_t a_x b_x (abu)(bcu) c_x^2 = \frac{1}{2} u_t^2 a_t a_x b_x c_x (bcu)\{c_x (abu) - b_x (acu)\}$
$= \frac{1}{2} u_t^2 a_t a_x b_x c_x (bcu)\{u_x (abc) - a_x (bcu)\}$. Id. I.
2. $u_t^2\, a_t\, a_x\, b_x^2\, c_x^2\, (abc) = 0$.
3. $u_t^2\, a_t\, (acu)\, (bcu)\, b_x\, c_x\, (abu) = 0$.
4. $u_t\, c_t\, a_t\, (acu)\, b_x^2\, (abu)\, c_{x+} : u_t\, c_t\, a_t\, (acu)\, a_x\, c_x$.
5. $c_t^2\, a_t\, a_x\, b_x^2\, c_x\, (abu)_+ : c_t^2\, a_t\, a_x^2\, c_x$.
6. $u_t^2\, a_t\, (acu)\, (bcu)^2\, (abu) = \frac{1}{3} u_t^2\, (acu)\, (bcu)\, (abu)$
$\{a_t\, (bcu) - b_t\, (acu) + c_t\, (abu)\}$
$= \frac{1}{3} u_t^3 \,.\, u_{t_1}^3$. Id. I.
7. $u_t\, a_t\, c_t\, (acu)\, b_x\, (bcu)\, (abu) = 0$.
8. $c_t^2\, a_t\, (acu)\, b_x^2\, (abu)_+ : c_t^2\, a_t\, (acu)\, a_x$.
9. $c_t^2\, a_t\, a_x\, b_x^2\, (abc)_+ : c_t^2\, a_t\, a_x\, (acu)$.

Tafel XVIII.

$u_t\, a_t\, b_t\, a_x^2\, b_x^2$.

1. $u_t\, a_t\, b_t\, a_x^2\, b_x\, c_x^2\, (bcu)$.
2. $a_t\, b_t\, c_t\, a_x^2\, b_x^2\, c_x^2$.
3. $u_t\, a_t\, b_t\, a_x^2\, c_x\, (bcu)^2_+ : u_t^2\, b_t\, (bcu)^2\, c_x$.
4. $a_t\, b_t\, c_t\, a_x^2\, c_x\, b_x\, (bcu) = 0$.
6. $u_t\, a_t\, b_t\, a_x\, (acu)\, (bcu)^2_+ : u_t^2\, b_t\, c_x\, (bcu)^2$.
7. $a_t\, b_t\, c_t\, a_x^2\, (bcu)^2_+ : b\ \ c_t\, u_t\, (bcu)^2$.

Tafel XIX.

$a_t\, b_x\, u_t^2\, (abu)^2$.

1. $a_t\, u_t^2\, c_x^2\, (bcu)\, (abu)^2$.
2. $a_t\, b_x\, c_x^2\, u_t^2\, (abu)\, (abc) = \frac{1}{2} a_t u_t^2 b_x c_x\, (abc)\{c_x (abu) - b_x (acu)\}$
$= \frac{1}{2} a_t u_t^2 b_x c_x\, (abc)\{u_x (abc) - a_x (bcu)\}$. Id. I.

Das erste Glied hat den Factor u_x, das zweite den Werth:

$- \frac{1}{6} u_t^2\, a_x\, b_x\, c_x\, (abc)\, \{a_t\, (bcu) - b_t\, (acu) + c_t\, (abu)\}$
$= - \frac{1}{6} u_t^3 \,.\, \alpha_x^3$. Id. I.

4. $a_t\, u_t^2\, (bcu)\, (abu)\, (abc)\, c_x = \frac{1}{2} u_t^2\, (bcu)\, (abu)\, (abc)\, [ac\, (tx)]$
$= \frac{1}{2} u_t^2\, u_s^2\, (stx)$.
5. $a_t\, c_t^2\, b_x\, c_x\, (abu)^2_+ : a_t\, c_t^2\, c_x\, a_x^2$.
8. $a_t\, c_t^2\, (bcu)\, (abu)^2_+ : a_t\, c_t^2\, c_x\, a_x^2$.
9. $a_t\, b_x\, c_t^2\, (abu)\, (abc)_+ : a_t\, a_x\, c_t^2\, (acu)$.

Tafel XX.

$$a_t\, b_t\, u_t\;\; a_x^2\, b_x\, c_x^2\, (bcu)\,.$$

1. $a_t\, b_t\, u_t\;\; a_x^2\, b_x\, c_x\, (cdu)\, d_x^2\, (bcu)$
$$= \tfrac{1}{2}\, a_t\, b_t\, u_t\;\; a_x^2\, b_x\, c_x\, d_x\, (cdu)\, \{d_x(bcu) - c_x(bdu)\}$$
$$= \tfrac{1}{2}\, a_t\, b_t\, u_t\;\; a_x^2\, b_x\, c_x\, d_x\, (cdu)\, \{u_x(bcd) - b_x(cdu)\}\,.$$
2. $a_t\, b_t\, d_t\;\; a_x^2\, b_x\, c_x^2\, (bcu)\, d^2_{x+} \;:\; a_t\, b_t\, d_t\;\; a_x^2\, b_x^2\, d_x^2\,.$
3. $a_t\, b_t\, u_t\;\; a_x^2\, (bdu)\, c_x\, d_x\, (cdu)\, (bcu) = 0\,.$
4. $a_t\, b_t\, d_t\;\; a_x^2\, (bdu)\, d_x\, c_x^2\, (bcu)_+ \;:\; a_t\, b_t\, d_t\;\; a_x^2\, (bdu)\, d_x\, b_x\,.$
5. $a_t\, b_t\, d_t\;\; a_x^2\, b_x\, c_x^2\, (bcd)\, d_{x+} \;:\; a_t\, b_t\, d_t\;\; a_x^2\, b_x\, d_x\, (bdu)\,.$
6. $a_t\, b_t\, u_t\;\; a_x^2\, (bdu)\, (cdu)^2\, (bcu)_+ \;:\; u_t^2\, b_t\, (bdu)\, (cdu)^2\, (bcu)\,.$
7. $a_t\, b_t\, d_t\;\; a_x^2\, b_x\, (cdu)^2\, (bcu)_+ \;:\; u_t\, b_t\, d_t\;\; b_x\, (cdu)^2\, (bcu)\,.$
8. $a_t\, b_t\, d_t\;\; a_x^2\, b_x\, c_x\, (cdu)\, (bcd)_+ \;:\; u_t\, b_t\, d_t\;\; b_x\, c_x\, (cdu)\, (bcd)\,.$

Tafel XXI.

$$q_x^6 = a_x^2\, b_x^2\, c_x^2\;\; a_t\, b_t\, c_t\,.$$

1. $a_x^2\, q_x^5\, (aqu)\,.$
3. $a_x^2\, b_x^2\, d_x\, (cdu)^2\, a_t\, b_t\, c_{t+} \;:\; a_x^2\, d_x\, (cdu)^2\, a_t\, c_t\, u_t\,.$
6. $a_x^2\, b_x\, (bdu)\, (cdu)^2\, a_t\, b_t\, c_{t+} \;:\; b_x\, (bdu)\, (cdu)^2\, u_t\, b_t\, c_t\,.$

Tafel XXII.

$$a_t\, u_t^2\, c_x^2\, (abu)^2\, (bcu)\,.$$

1. $a_t\, u_t^2\, c_x\, (abu)^2\, (bcu)\, (cdu)\, d_x^2$
$$= a_t\, u_t^2\, c_x\, d_x\, (cdu)\, (abu)^2\, \{d_x\, (bcu) - c_x\, (bdu)\}$$
$$= a_t\, u_t^2\, c_x\, d_x\, (cdu)\, (abu)^2\, \{u_x\, (bcd) - b_x\, (cdu)\}\,. \qquad \text{Id. I.}$$
2. $a_t\, u_t^2\, c_x^2\, (abu)^2\, (bcd)\, d_x^2 = 0\,.$
3. $a_t\, u_t^2\, (cdu)^2\, d_x\, (abu)^2\, (bcu)\,.$

Diese Form lässt sich (vrgl. Tafel XIV.) leicht auf die Form $u_t^2\, u_p^5 (tpx)$ zurückführen. Es ist nämlich:

$$u_t^2\, u_p^5\, (tpx) = u_t^2\, (abu)^2\, (bcu)\, (cdu)\, \{\tfrac{2}{3}\, [cd(tx)]\, (adu) + \tfrac{1}{3}\, (cdu)\, [ad(tx)]\}$$
$$= u_t^2\, (abu)^2\, (bcu)\, (cdu)\, \{(cdu)\, [ad\, (tx)] + \tfrac{2}{3}\, (cda)\, [du\, (tx)]\}$$
$$= u_t^2\, (abu)^2\, (bcu)\, (cdu)^2\, \{a_t\, d_x - d_t\, a_x\}$$
$$+ \tfrac{2}{3}\, u_t^2\, (abu)^2\, (bcu)\, (cda)\, \{d_t\, u_x - u_t\, d_x\}\,.$$

Der zweite Theil ist eine ganze Function der ϑ, der erste hat den Werth:

$$2\, a_t\, u_t^2\, (cdu)^2\, d_x\, (abu)^2\, (bcu)\,.$$

4. $a_t\, u_t\, d_t\, c_x\, d_x\, (abu)^2\, (bcu)\, (cdu)_+ \;:\; a_t\, u_t\, d_t\, d_x^2\, (abu)^2\, b_x\,.$
5. $a_t\, d_t^2\, c_x^2\, d_x\, (abu)^2\, (bcu)_+ \;:\; a_t\, d_t^2\, d_x\, (abu)^2\, b_x^2\,.$
7. $a_t\, d_t\, u_t\, (cdu)^2\, (abu)^2\, (bcu)_+ \;:\; a_t\, d_t\, u_t\, d_x^2\, (abu)^2\, b_x\,.$
8. $a_t\, d_t^2\, c_x\, (cdu)\, (abu)^2\, (bcu)_+ \;:\; a_t\, d_t^2\, d_x\, (abu)^2\, b_x\,.$
9. $a_t\, d_t^2\, c_x^2\, (abu)\, (abd)\, (bcu)_+ \;:\; a_t\, d_t^2\, (abu)\, (abd)\, b_x\,.$

Tafel XXIII.

$u_s^2\, u_t^2\, (s\,t\,x)$.

1. $u_s^2\, u_t^2\, a_x^2\, (a_s\, u_t - u_s\, a_t)$.
2. $u_s^2\, u_t\, a_x^2\, a_t\, (stx)$.
4. $u_s^2\, u_t\, a_t\, a_x\, (a_s\, u_t - u_s\, a_t)$.

Der zweite Theil ist unmittelbar das Produkt von Formen niederer Ordnung; um den ersten Theil zu reduciren, benutze ich die Formel:

$$u_t^2\, a_t\, a_x^2 = \frac{T}{6}\, u_x^2 + \frac{1}{2}\, u_{s_1}\, u_{s_2}\, (s_1\, s_2\, x)^2 - \frac{S}{6}\, a_x\, b_x\, (abu)^2\,,$$

aus welcher die Gleichung folgt:

$$\begin{aligned} u_s^2\, u_t^2\, a_s\, a_t\, a_x &= \frac{T}{6}\, u_s^3 \,.\, u_x + \frac{1}{2}\, u_s^2\, u_{s_1}\, u_{s_2}\, (s\, s_1\, s_2)\, (s_1\, s_2\, x) \\ &\qquad - \frac{S}{6}\, u_s^2\, a_s\, b_x\, (abu)^2 \qquad \text{(Tafel XII.)} \\ &= \frac{T}{6}\, u_x \,.\, u_s^3 - \frac{S}{6}\, u_s^2\, a_s\, b_x\, (abu)^2 \\ &\qquad + \frac{1}{6}\, u_s u_{s_1} u_{s_2} (s s_1 s_2) \left\{u_s (s_1 s_2 x) - u_{s_1} (s s_2 x) + u_{s_2} (s s_1 x)\right\} \\ &= \frac{1}{6} \left\{T\, u_x \,.\, u_s^3 - S\, u_s^2\, a_s\, b_x\, (abu)^2 + u_s u_{s_1} u_{s_2}\, u_x\, (s\, s_1\, s_2)^2\right\}. \end{aligned}$$

5. $a_s^2\, u_t^2\, (stx)\, a_x$ hat den Factor S. (Tafel IV.)
8. $a_s^2\, u_t^2\, (a_s\, u_t - u_s\, a_t)$ hat den Factor S. (Tafel IV.)
9. $a_s^2\, u_t\, a_t\, (stx)$ hat den Factor S. (Tafel IV.)

Tafel XXIV.

$a_x^2\, q_x^5\, (aqu)$.

1. $a_x\, q_x^5\, (aqu)\, (abu)\, b_x^2 = \frac{1}{2}\, a_x\, b_x\, (abu)\, q_x^5 \left\{b_x\, (aqu) - a_x\, (bqu)\right\}$
$= \frac{1}{2}\, a_x\, b_x\, (abu)\, q_x^5 \left\{q_x\, (abu) - u_x\, (abq)\right\}$.
2. $a_x^2\, b_x^2\, (aqb)\, q_x^5 = 0$.
3. $a_x^2\, q_x^3\, b_x\, (bqu)^2\, (aqu)_+ : q_x^4\, b_x\, (bqu)^2$.
4. $b_x\, a_x^2\, q_x^4\, (bqu)\, (aqb)_+ : q_x^4\, b_x\, (bqu)^2$.
6. $a_x^2\, (bqu)^3\, q_x^2\, (aqu)_+ : q_x^3\, (bqu)^3$.
7. $a_x^2\, (bqu)^2\, q_x^3\, (aqb)_+ : q_x^3\, (bqu)^3$.

Tafel XXV.

$u_t^2\, u_p^5\, (tpx)$.

1. $u_t^2\, u_p^5\, (a_t\, u_p - u_t\, a_p)\, a_x^2$.
2. $u_t\, a_t\, u_p^5\, a_x^2\, (tpx)$.

Zur Untersuchung dieser Form bediene ich mich der Formel (Tafel XXII.):

$$\begin{aligned} u_t^2\, u_p^5\, (tpx) &= 2\, a_t\, u_t^2\, d_x\, (cdu)^2\, (abu)^2\, (bcu) \\ &\qquad + \tfrac{2}{3}\, u_t^2\, (abu)^2\, (cda)\, (bcu) \left\{d_t\, u_x - u_t\, d_x\right\}, \end{aligned}$$

welche zeigt, dass die Form $u_t\, a_t\, u_p^5\, a_x^2\, (tpx)$ sich auf die Form reduciren lässt:

$$a_t\, u_t^2\, (abu)^2\, (cdu)\, (cde)\, e_x^2\, d_x\, (beu)$$
$$= \tfrac{1}{2}\, a_t\, u_t^2\, (abu)^2\, (beu)\, (cde)\, d_x\, e_x \left\{e_x\, (cdu) - d_x\, (ceu)\right\}$$
$$= \tfrac{1}{2}\, a_t\, u_t^2\, (abu)^2\, (beu)\, (cde)\, d_x\, e_x \left\{u_x\, (cde) - c_x\, (deu)\right\}.$$

Das erste Glied dieser Summe hat den Factor u_x, das zweite den Werth:

$$-\tfrac{1}{6}\, c_x d_x e_x (cde)\, .\, u_t^2 a_t (abu)^2 \left\{(beu)(deu) - (bdu)(ceu) - (beu)(deu)\right\}$$
$$= 0. \qquad \text{Id. I.}$$

4. $u_t\, a_t\, a_x\, u_p^5 \left\{a_p\, u_t - u_p\, a_t\right\}$.

Das zweite Glied ist durch Formen niederen Grades ausdrückbar; um das erste zu reduciren, gehe ich von der Form (Tafel XVI.) aus:

$$u_p^5\, a_p\, a_x^2 = C_1\, u_s^3\, .\, a_x\, b_x\, (abu)^2 + C_2\, u_x^2\, u_t^3 + C_3\, u_x\, .\, u_s^2\, a_s\, b_x\, (abu)^2$$

und folgere daraus die Gleichung:

$$u_p^5\, a_p\, a_x\, a_t\, u_t^2 = C_1\, u_s^3\, .\, u_t^2\, a_t\, b_x\, (abu)^2 + C_2\, u_t^3\, u_x\, u_t^3$$
$$+ \tfrac{1}{2}\, C_3 \left\{u_t^3\, .\, u_s^2\, a_s\, b_x\, (abu)^2 + u_x\, .\, u_s^2\, a_s u_t^2\, b_t\, (abu)^2\right\}.$$

5. $u_p^5\, a_t^2\, a_x\, (ptx)$ hat den Factor T. (Tafel XII.)
8. $u_p^5\, a_t^2\, (a_t\, u_p - u_t\, a_p)$ hat den Factor T. (Tafel XII.)
9. $u_p^4\, a_p\, a_t^2\, (ptx)$ hat den Factor T. (Tafel XII.)

Tafel XXVI.

$$u_s^2\, u_t\, a_t\, a_x^2\, (stx).$$

1. $u_s^2\, u_t\, a_t\, a_x^2\, b_x^2 \left\{b_s\, u_t - u_s\, b_t\right\}$.
2. $u_s^2\, a_t\, b_t\, a_x^2\, b_x^2\, (stx)$.
3. $u_s^2\, u_t\, a_t\, b_x\, (abu)^2\, (stx)$.
4. $u_s^2\, a_t\, b_t\, a_x\, b_x\, (abu)\, (stx) = 0$.
5. $b_s^2\, u_t\, a_t\, a_x^2\, b_x\, (stx)_+ : b_s^2\, u_t^2\, b_x\, (stx)$.
6. $u_s^2\, u_t\, a_t\, (abu)^2 \left\{b_s\, u_t - u_s\, b_t\right\}$.

Zur Reduction dieser Form bedarf ich einer Hülfsformel, welche ich mir durch folgende, schon oben gemachte Betrachtung ableiten will. Da ich mich hier nämlich mit der Untersuchung der Formen 10ter Ordnung beschäftige, so kann ich die Annahme machen, dass alle Formen niederer Ordnung ganze Functionen der ϑ seien. Diese Annahme, auf die Formen $u_s\, u_t\, (stx)^2$ und $(stx)^3$ angewandt, zeigt, dass zwei Formeln folgender Form existiren müssen:

$$u_s\, u_t\, (stx)^2 = C_1\, S\, .\, a_x\, b_x\, (abu)^2 + C_2\, T\, .\, u_x^2$$
$$(stx)^3 = 0.$$

Hieraus sieht man, dass jede Form, welche zwei Factoren der Form (stx) hat, in die Form $S\varphi + T\psi$ gebracht, also auf niedere Systeme reducirt werden kann.

Die Form:

$$u_s\, u_t\, (abu)^2 \left\{b_s\, u_t - u_s\, b_t\right\} \left\{a_s\, u_t - u_s\, a_t\right\}$$
$$= u_s\, u_t\, (abu)^2 \left\{a_s\, b_s\, u_t^2 + a_t\, b_t\, u_s^2 - 2\, a_s\, b_t\, u_s\, u_t\right\}$$

lässt sich also auf niedere Formen zurückführen und somit auch die hier behandelte Form: $u_s^2\, u_t^2\, (abu)^2\, a_s\, b_t$.

7. $u_s^2\, b_t\, a_t\, a_x\, (abu)\, \{b_s\, u_t - u_s\, b_t\}$.

Das zweite Glied ist ein Product von Formen niederer Ordnung, das erstere entsteht aus: $u_s^2\, b_t\, u_t^2\, b_x\, b_s$ durch eine niedere Combination.

8. $b_s^2\, u_t\, a_t\, a_x\, (abu)\, (stx)_+ \, : \, b_s^2\, u_t^2\, b_x\, (stx)$.

9. $b_s^2\, b_t\, a_t\, a_x^2\, (stx)_+ \, : \, b_s^2\, b_t\, u_t\, (stx)$.

Tafel XXVII.

$a_x^2\, b_x^2\, u_s^2\, a_t\, b_t\, (stx)$.

1. $a_x^2\, b_x^2\, u_s^2\, a_t\, b_t\, c_x^2\, \{c_s\, u_t - u_s\, c_t\}$.

2. $a_x^2\, b_x^2\, u_s\, c_s\, a_t\, b_t\, (stx)\, c_x^2$.

Aus der Gleichung $u_s^2\, c_s\, c_x^2 = (c\alpha u)^2\, c_x\, \alpha_x$ (Tafel IV.) folgt, dass $a_x^2\, b_x^2\, u_s\, c_s\, a_t\, b_t\, (stx)\, c_x^2 = a_x^2\, b_x^2\, c_x\, \alpha_x\, (c\alpha u)\, a_t\, b_t\, \{c_x\, \alpha_t - \alpha_x\, c_t\}$.

Ferner können wir aus der Annahme, dass alle Formen 8ter Ordnung ganze Functionen der ϑ sind, die Identität folgern:

$$u_t^2\, \alpha_t\, \alpha_x^2 = C_1\, S^2\, u_x^2 + C_2\, T\, a_x\, b_x\, (abu)^2 + C_3\, S\, a_s\, u_s^2\, a_x^2,$$

welche zeigt, dass jede Form, die den Factor α_t besitzt, mithin auch unser erstes Glied, in die Form $S\varphi + T\psi$ gebracht, also auf niedere Formen reducirt werden kann. Das zweite Glied unseres Ausdrucks hat den Werth:

$$\alpha_x^2\, q_x^5\, (q\alpha u), \text{ ist also eine Form } \vartheta.$$

3. $a_x^2\, c_x\, (bcu)^2\, u_s^2\, a_t\, b_t\, (stx)_+ \, : \, c_x\, (bcu)^2\, u_s^2\, u_t\, b_t\, (stx)$.

4. $a_x^2\, b_x\, (bcu)\, c_x\, u_s\, c_s\, a_t\, b_t\, (stx)_+ \, : \, b_x\, (bcu)\, c_x\, u_s\, c_s\, u_t\, b_t\, (stx)$.

5. $a_x^2\, b_x^2\, c_x\, c_s^2\, a_t\, b_t\, (stx)_+ \, : \, b_x^2\, c_x\, c_s^2\, u_t\, b_t\, (stx)$.

6. $a_x\, (acu)\, (bcu)^2\, u_s^2\, a_t\, b_t\, (stx)_+ \, : \, c_x\, (bcu)^2\, u_s^2\, u_t\, b_t\, (stx)$.

7. $a_x^2\, (bcu)^2\, u_s\, c_s\, a_t\, b_t\, (stx)_+ \, : \, (bcu)^2\, u_s\, c_s\, u_t\, b_t\, (stx)$.

8. $a_x^2\, b_x\, (bcu)\, c_s^2\, a_t\, b_t\, (stx)_+ \, : \, b_x\, (bcu)\, c_s^2\, u_t\, b_t\, (stx)$.

Tafel XXVIII.

$u_s^2\, u_t\, a_t\, b_x\, (stx)\, (abu)^2$.

1. $u_s^2\, u_t\, a_t\, b_x\, (abu)^2\, \{u_s\, c_t - c_s\, u_t\}\, c_x^2$.

2. $u_s^2\, u_t\, a_t\, (stx)\, b_x\, c_x^2\, (abu)\, (abc)$

$$= \tfrac{1}{2}\, u_s^2\, u_t\, a_t\, b_x\, c_x\, (abc)\, (stx)\, \{c_x\, (abu) - b_x\, (acu)\}$$
$$= \tfrac{1}{2}\, u_s^2\, u_t\, a_t\, b_x\, c_x\, (abc)\, (stx)\, \{u_x\, (abc) - a_x\, (bcu)\}. \quad \text{Id. I.}$$

Das erste Glied hat den Factor u_x, das zweite den Werth:

$$-\tfrac{1}{6}\, u_s^2\, u_t\, a_x\, b_x\, c_x\, (abc)\, (stx)\, \{a_t\, (bcu) - b_t\, (acu) - c_t\, (bau)\}$$
$$= -\tfrac{1}{6}\, u_s^2\, u_t^2\, (stx)\, .\, a_x\, b_x\, c_x\, (abc)^2. \quad \text{Id. I.}$$

3. $u_s^2\, u_t\, a_t\, c_x\, (bcu)\, (abu)^2\, \{u_s\, c_t - c_s\, u_t)\}$

$$= u_s^3\, .\, u_t\, a_t\, c_x\, c_t\, (bcu)\, (abu)^2 - u_s^2\, u_t^2\, a_t\, c_x\, (bcu)\, (abu)\, \{u_s\, (abc) + b_s\, (acu) - a_s\, (bcu)\}.$$

Die ersten beiden Glieder haben den Factor u_s^2; ebenso lässt sich das dritte Glied leicht in die Form bringen:

$$-\tfrac{1}{6}\, u_s^2\, u_t^2\, (stx) \,.\, (bcu)\, (abu)\, (acu)\, (bac)\,.$$

Etwas schwieriger ist die Reduction der Form

$$u_s^2\, u_t^2\, a_t\, a_s\, c_x\, (bcu)^2\, (abu)\,;$$

um sie zu bewerkstelligen, gehe ich von der Identität aus (Tafel XII.):

$$2\, u_t^2\, a_t\, a_x^2 = \frac{T}{3}\, u_x^2 + u_{s_1}\, u_{s_2}\, (s_1\, s_2\, x)^2 - \frac{S}{3}\, a_x\, b_x\, (abu)^2\,,$$

mittelst deren diese Form auf die folgende reducirt wird:

$$u_s^2\, u_{s_1}\, u_{s_2}\, (s\, s_1\, s_2)\, c_x\, (bcu)^2\, [s_1\, s_2\, (bu)]$$
$$= \tfrac{1}{3}\, u_s u_{s_1} u_{s_2} (s s_1 s_2) \,.\, c_x (bcu)^2 \left\{u_s\, [s_1 s_2 (bu)] - u_{s_1} [s s_2 (bu)] - u_{s_2} [s_1 s (bu)]\right\}$$
$$= 0\,. \qquad \text{Id. I.}$$

4. $u_t^2\, c_t\, a_t\, b_x\, (abu)^2\, c_x \left\{u_s\, c_t - c_s\, u_t\right\}$.

Das erste Glied hat den Factor u_s^2, das zweite entsteht aus der Form: $u_s^2\, c_t\, a_t\, a_x^2\, c_x\, c_s\, u_t$ durch eine niedere Combination.

5. $c_s^2\, u_t\, a_t\, b_x\, c_x\, (stx)\, (abu)^2{}_+ \,:\, c_s^2\, u_t\, a_t\, c_x\, (stx)\, a_x^2$.

7. $u_s^2\, u_t\, a_t\, (bcu)\, (abu)^2 \left\{c_s\, u_t - u_s\, c_t\right\}$.

Das zweite Glied hat den Factor u_s^2, das erste entsteht aus der Form: $u_s^2\, c_t\, a_t\, c_x\, a_x^2\, c_s\, u_t$ durch eine niedere Combination.

8. $c_s^2\, u_t\, a_t\, (bcu)\, (stx)\, (abu)^2{}_+ \,:\, c_s^2\, u_t\, a_t\, c_x\, (stx)\, a_x^2$.

9. $c_s^2\, c_t\, a_t\, b_x\, (stx)\, (abu)^2{}_+ \,:\, c_s^2\, c_t\, a_t\, (stx)\, a_x^2$.

Tafel XXIX.

$$q_x^5\, \alpha_x^2\, (q\alpha u) = a_x^2\, b_x^2\, c_x\, \alpha_x^2\, (c\alpha u)\, a_t\, b_t\, c_t\,.$$

1. $q_x^4\, \alpha_x^2\, a_x^2\, (q\alpha u)\, (qau)$

$$= \tfrac{1}{2}\, q_x^4\, a_x\, \alpha_x \left\{\begin{aligned} &u_x^2\, (qa\alpha)^2 + 2\, u_x\, q_x\, (qa\alpha)\, (a\alpha u) - q_x^2\, (a\alpha u)^2 \\ &\qquad + a_x^2\, (q\alpha u)^2 + \alpha_x^2\, (qau)^2. \end{aligned}\right\} \quad \text{Id. II.}$$

2. $q_x^5\, \alpha_x^2\, a_x^2\, (qa\alpha)$.

3. $a_x^2\, b_x^2\, c_x\, (d\alpha u)^2\, d_x\, (c\alpha u)\, a_t\, b_t\, c_{t+} \,:\, b_x^2\, c_x\, (d\alpha u)^2\, d_x\, (c\alpha u)\, b_t\, c_t\, u_t$.

4. $a_x^2\, b_x^2\, c_x\, d_x\, \alpha_x\, (c\alpha d)\, a_t\, b_t\, c_t\, (d\alpha u)_+ \,:\, b_x^2\, c_x\, d_x\, (c\alpha d)\, \alpha_x\, b_t\, c_t\, u_t\, (d\alpha u)$.

6. $a_x^2\, b_x^2\, (cdu)\, (d\alpha u)^2\, (c\alpha u)\, u_t\, b_t\, c_{t+} \,:\, b_x^2\, (cdu)\, (c\alpha u)\, (d\alpha u)^2\, u_t\, b_t\, c_t$.

7. $a_x^2\, b_x^2\, c_x\, (d\alpha u)^2\, (c\alpha d)\, a_t\, b_t\, c_{t+} \,:\, b_x^2\, c_x\, (d\alpha u)^2\, (c\alpha d)\, u_t\, b_t\, c_t$.

Tafel XXX.

$$a_x^2\, \alpha_x^2\, q_x^5\, (a\,\alpha\, q)\,.$$

1. $a_x\, \alpha_x^2\, q_x^5\, b_x^2\, (a\,\alpha\, q)\, (abu) = \tfrac{1}{2}\, a_x b_x (abu)\, \alpha_x^2\, q_x^5 \left\{b_x (a\alpha q) - a_x (b\alpha q)\right\}$

$$= \tfrac{1}{2}\, a_x b_x (abu)\, \alpha_x^2\, q_x^5 \left\{\alpha_x (abq) - q_x (ab\alpha)\right\}. \text{ Id. I.}$$

3. $a_x^2\, (b\alpha u)^2\, b_x\, q_x^5\, (a\alpha q)_+ \,:\, (b\alpha u)^2\, b_x\, q_x^5\, (q\alpha u)$.

6. $a_x^2\, \alpha_x^2\, (qbu)^3\, q_x^2\, (a\alpha q)_+ \,:\, \alpha_x^2\, q_x^2\, (q\alpha u)\, (qbu)^3$.

Tafel XXXI.

$$u_s^2\ u_t^2\ u_p^5\ (stp)\,.$$

2. $u_s^2\ u_t^2\ u_p^4\ a_x^2\ a_p\ (stp)\,.$

Mittelst der Identität (Tafel XVI.)

$$u_p^5\ a_p\ a_x^2 = C_1\ u_s^3\ .\ a_x\ b_x\ (abu)^2 + C_2\ u_x^2\ u_t^3 + C_3\ u_x\ u_s^2\ a_s\ b_x\ (abu)^2$$

erhalten wir die Gleichung:

$$5\ u_s^2\ u_t^2\ u_p^4\ a_x^2\ a_p\ (stp) =$$

$$= 3\,C_1\ .\ u_s^2\,u_t^2\,u_{s_1}^2\,(ss_1t)\ .\ a_x b_x (abu)^2 + 2\ C_1\ u_{s_1}^3\ .\ u_s^2 u_t^2\ a_x b_x\ (abu)\ [ab\,(st)]$$
$$+ C_2\left\{2\,u_{t_1}^3\,.\,u_x u_s^2 u_t^2 (stx) + 3 u_x^2 u_{t_1}^2\ u_s^2 u_t^2\ (stt_1)\right\} + C_3\left\{u_s^2 a_s b_x (abu)^2 . u_s^2 u_t^2 (stx)\right\}$$
$$+ 2\,u_x\left\{u_s^2\ u_t^2\ u_{s_1}^2\ a_{s_1} b_x (abu)\ [a\,b\,(st)] + u_s^2\,u_t^2\,u_{s_1} a_{s_1} b_x (abu)^2 (sts_1)\right\}.$$

5. $a_s^2\ a_x\ u_t^2\ u_p^5\ (spt)$ hat den Factor S. (Tafel IV.)

9. $a_s^2\ a_t\,u_v\,u_p^5\ (spt)$ hat den Factor S. (Tafel IV.)

Es ist somit der Nachweis geführt, dass alle Formen, welche zu den Formen ϑ eigentlich gehören, ganze Functionen derselben sind; hierbei hat es sich herausgestellt, dass es für jede Form ϑ Modularsysteme giebt, deren entsprechende Combinationen auf ϑ nicht anwendbar sind.

Combinationen, welche diesen Modularsystemen entsprechen, wende ich auf die Produkte $H = \vartheta\ u_\sigma^\nu\ \varrho_x^\mu$ an und lasse von den so entstehenden Formen alle auf frühere Formen reducirbare weg; die Modularsysteme, deren entsprechende Combinationen die dann übrig bleibenden Formen erzeugen, sind die **zu ϑ gehörigen Systeme.** Um dieselben zu erhalten, werde ich, analog den früheren Tafeln, **Supplementartafeln** bilden und in jeder derselben die Modularsysteme verwenden, die sich bei der Tafel für die ϑ selbst nicht vorfinden. Selbstverständlich lasse ich hierbei diejenigen 4 Formen weg, auf die sich für alle Modularsysteme Combinationen anwenden liessen, so dass es nur 27 Supplementartafeln giebt.

Supplementartafel I.

$$a_x^3\ u_\sigma^\nu\ \varrho_x^\mu\,.$$

2. $a_x^3\ .\ u_\sigma^{\nu-1}\ \varrho_x^\mu\ b_\sigma\ b_x^2\,.$

4. $a_x^2\ (abu)\ u_\sigma^{\nu-1}\ \varrho_x^\mu\ b_\sigma\ b_{x+}\ :\ b_x^2\ b_\sigma\ u_\sigma^{\nu-1}\ \varrho_x^\mu\,.$

5. $a_x^3\ .\ u_\sigma^{\nu-2}\ \varrho_x^\mu\ b_\sigma^2\ b_x\,.$

7. $a_x\ (abu)^2\ u_\sigma^{\nu-1}\ \varrho_x^\mu\ b_{\sigma+}\ :\ b_x^2\ b_\sigma\ u_\sigma^{\nu-1}\ \varrho_x^\mu\,.$

8. $a_x^2\ (abu)\ u_\sigma^{\nu-2}\ \varrho_x^\mu\ b_{\sigma+}^2\ :\ b_x\ b_\sigma^2\ u_\sigma^{\nu-2}\ \varrho_x^\mu\,.$

9. $a_x^3\ .\ u_\sigma^{\nu-3}\ b_\sigma^3\ \varrho_x^\mu\,.$

Zu f gehört mithin kein Modularsystem.

Supplementartafel II.

$$a_x\, b_x\, (abu)^2\, u_\sigma^\nu\, \varrho_x^\mu\,.$$

6. $(acu)\,(bcu)\,(abu)^2\, u_\sigma^\nu\, \varrho_x^{\mu-1}\,(\varrho cu)$
$= \frac{1}{3}\, u_\sigma^\nu \varrho_x^{\mu-1}(abu)(bcu)(acu)\left\{(abu)(\varrho cu)-(cbu)(\varrho au)-(acu)(\varrho bu)\right\}$
$= 0\,.$ Id. I.

9. $a_x\, b_x\, (abc)^2\, u_\sigma^{\nu-1}\, \varrho_x^\mu\, c_{\sigma+} : b_x\,(bcu)^2\, u_\sigma^{\nu-1}\, \varrho_x^\mu\, c_\sigma\,.$
Zu $a_x\, b_x\,(abu)^2$ gehört kein Modularsystem.

Supplementartafel III.

$$u_s^3\,.\,u_\sigma^\nu\,\varrho_x^\mu\,.$$

1. $u_s^3\,.\,a_x^2\, u_\sigma^\nu\, \varrho_x^{\mu-1}\,(\varrho au)\,.$
4. $u_s^2\, a_s\, u_\sigma^\nu\, \varrho_x^{\mu-1}\,(\varrho au)\, a_x\,.$
6. $u_s^3\,.\,u_\sigma^\nu\, \varrho_x^{\mu-3}\,(\varrho au)^3\,.$
7. $u_s^2\, a_s\, u_\sigma^\nu\, \varrho_x^{\mu-2}\,(\varrho au)^2\,.$

Mittelst der Formel (Tafel V.):

$$a_x\,\alpha_x\,(a\alpha u)^2 = u_s^2\, a_s\, a_x^2 - \frac{S}{6}\, u_x^2$$

lässt sich diese Form auf die Form $(a\alpha u)^2\, u_\sigma^\nu\, \varrho_x^{\mu-2}\,(a\varrho u)\,(\alpha\varrho u)$ zurückführen, welche aus der Form $\alpha_x^2\, u_\sigma^\nu\, \varrho_x^{\mu-1}\,(\varrho\alpha u)$ durch eine niedere Combination entsteht.

8. $u_s\, a_s^2\, u_\sigma^\nu\, \varrho_x^{\mu-1}\,(\varrho au)$ hat den Factor S. (Tafel IV.)

Zu der Form u_s^3 gehört das vierte Modularsystem.

Supplementartafel IV.

$$\alpha_x^3\,.\,\varrho_x^\mu\, u_\sigma^\nu = a_x\, b_x\, c_x\,(abc)^2\,\varrho_x^\mu\, u_\sigma^\nu\,.$$

2. $\alpha_x^3\,.\,\varrho_x^\mu\, u_\sigma^{\nu-1}\, a_\sigma\, a_x^2\,.$
4. $\alpha_x^2\,(a\alpha u)\,\varrho_x^\mu\, u_\sigma^{\nu-1}\, a_\sigma\, a_x\,.$
5. $\alpha_x^3\,.\,\varrho_x^\mu\, u_\sigma^{\nu-1}\, a_\sigma^2\, a_x\,.$
7. $a_x\,(bdu)\,(cdu)\,(abc)^2\,.\,\varrho_x^\mu\, u_\sigma^{\nu-1}\, d_{\nu+} : (bdu)\,(cdu)\,(bcu)^2\,.\,\varrho_x^\mu\, u_\sigma^{\nu-1}\, d_\nu\,.$
8. $a_x\, b_x\,(cdu)\,(abc)^2\,\varrho_x^\mu\, u_\sigma^{\nu-2}\, d_{\nu+}^2 : b_x\,(cdu)\,(bcu)^2\,.\,\varrho_x^\mu\, u_\sigma^{\nu-2}\, d_\nu^2\,.$
9. $\alpha_x^3\,.\,\varrho_x^\mu\, u_\sigma^{\nu-3}\, a_\sigma^3\,.$

Zu der Form α_x^3 gehört das vierte Modularsystem.

Supplementartafel V.

$$a_x^2\,\alpha_x^2\,(a\alpha u)\,.\,\varrho_x^\mu\, u_\sigma^\nu\,.$$

5. $a_x^2\,\alpha_x^2\,(\alpha ab)\,.\,\varrho_x^\mu\, u_\sigma^{\nu-1}\, b_\sigma\, b_{x+} : \alpha_x^2\,(b\alpha u)\,.\,\varrho_x^\mu\, u_\sigma^{\nu-1}\, b_\sigma\, b_x\,.$
8. $a_x^2\,\alpha_x\,(b\alpha u)\,(\alpha ab)\,.\,\varrho_x^\mu\, u_\sigma^{\nu-1}\, b_{\sigma+} : \alpha_x\,(b\alpha u)^2\,\varrho_x^\mu\, u_\sigma^{\nu-1}\, b_\sigma\,.$
9. $a_x^2\,\alpha_x^2\,(\alpha ab)\,\varrho_x^\mu\, u_\sigma^{\nu-2}\, b_{\sigma+}^2 : \alpha_x^2\,(ba u)\,\varrho_x^\mu\, u_\sigma^{\nu-2}\, b_\sigma^2\,.$

Zu der Form $a_x^2\,\alpha_x^2\,(a\alpha u)$ gehört kein System.

Supplementartafel VI.

$$u_s^2\, a_s\, a_x^2 \,.\, \varrho_x^\mu\, u_\sigma^\nu\,.$$

6. $u_s^2\, a_s\, (abu)^2\, (\varrho bu)\, \varrho_x^{\mu-1}\, u_\sigma^\nu\,.$
9. $b_s^2\, a_s\, a_x^2 \,.\, \varrho_x^\mu\, u_\sigma^{\nu-1}\, b_{\sigma+} \,:\, b_s^2\, u_s\, \varrho_x^\mu\, u_\sigma^{\nu-1}\, b_\sigma\,.$

Zu der Form $u_s^2\, a_s\, a_x^2$ gehört das sechste System.

Supplementartafel VII.

$$u_p^6 \,.\, \varrho_x^\mu\, u_\sigma^\nu\,.$$

1. $u_p^6 \,.\, (\varrho a u)\, a_x^2\, \varrho_x^{\mu-1}\, u_\sigma^\nu\,.$
4. $u_p^5\, a_p\, a_x\, \varrho_x^{\mu-1}\, (\varrho a u)\, u_\sigma^\nu\,.$

Aus der Formel (Tafel XVI.):

$A.\qquad u_p^5\, a_p\, a_x^2 = C_1\, u_s^3 \,.\, a_x\, b_x\, (abu)^2 + C_2\, u_x^2 \,.\, u_t^3 + C_3\, u_x\, u_s^2\, a_s\, b_x\, (abu)^2$

folgt die Gleichung:

$$u_p^5\, a_p\, a_x\, (a\varrho u)\, \varrho_x^{\mu-1}\, u_\sigma^\nu \equiv C_1\, u_s^3 \,.\, a_x\, (b\varrho u)\, (abu)^2\, \varrho_x^{\mu-1}\, u_\sigma^\nu + \tfrac{1}{2}\, C_3\, u_x \,.\, u_s^2\, a_s\, (b\varrho u)\, (abu)^2\, \varrho_x^{\mu-1}\, u_\sigma^\nu \ldots.$$

6. $u_p^6 \,.\, \varrho_x^{\mu-3}\, u_\sigma^\nu\,.$
7. $u_p^5 a_p \,.\, \varrho_x^{\mu-2} u_\sigma^\nu (\varrho a u)^2 \equiv \varrho_x^{\mu-2} u_\sigma^\nu C_1 u_s^3 \,.\, (a\varrho u)(b\varrho u)(abu)^2 \ldots$ (Gleichung A.)
8. $u_p^4\, a_p^2\, \varrho_x^{\mu-1}\, u_\sigma^\nu\, (\varrho a u)\,.$

Zur Untersuchung dieser Form, deren Ordnung grösser als 5 ist, machen wir die nämliche Annahme, wie früher, dass nämlich alle Formen bis zur 5ten Ordnung ganze Functionen der ϑ seien; nach derselben muss $u_p^4\, a_p^2\, a_x$ in der Form enthalten sein:

$$u_p^4\, a_p^2\, a_x = C_1\, u_x\, u_t^3 + C_2\, u_s^2\, a_s\, b_x\, (abu)^2$$

und somit die Relation stattfinden:

$$u_p^4\, a_p^2\, (\varrho a u)\, \varrho_x^{\mu-1}\, u_\sigma^\nu \equiv C_2\, u_s^2\, a_s\, (b\varrho u)\, (abu)^2\, \varrho_x^{\mu-1}\, u_\sigma^\nu \ldots,$$

welche letztere Form aus $u_s^2 a_s \varrho_x^\mu a_x^2 u_\sigma^\nu$ durch eine niedere Combination entsteht.

Supplementartafel VIII.

$$u_s\, a_s\, b_s\, a_x^2\, b_x^2 \,.\, \varrho_x^\mu\, u_\sigma^\nu\,.$$

5. $a_s\, b_s\, c_s^2\, a_x^2\, b_x^2\, c_x\, \varrho_x^\mu\, c_\sigma\, u_{\sigma+}^{\nu-1} \,:\, u_s\, b_s\, c_s\, b_x^2\, c_x\, \varrho_x^\mu\, u_\sigma^{\nu-1}\, c_\sigma\,.$
8. $a_s\, b_s\, c_s\, a_x^2\, b_x\, (bcu)\, \varrho_x^\mu\, u_\sigma^{\nu-1}\, c_{\sigma+} \,:\, u_s\, b_s\, c_s\, b_x\, (bcu)\, \varrho_x^\mu\, u_\sigma^{\nu-1}\, c_\sigma\,.$
9. $c_s\, a_s\, b_s\, a_x^2\, b_x^2 \,.\, \varrho_x^\mu\, u_\sigma^{\nu-2}\, c_{\sigma+}^2 \,:\, u_s\, b_s\, c_s\, b_x^2\, \varrho_x^\mu\, u_\sigma^{\nu-2}\, c_\sigma^2\,.$

Zu der Form $u_s\, a_s\, b_s\, a_x^2\, b_x^2$ gehört kein Modularsystem.

Supplementartafel IX.

$u_s^2\, a_s\, b_x\, (abu)^2 \,.\, \varrho_x^\mu\, u_\sigma^\nu\,.$

3. $u_s^2\, a_s\, (bcu)\, (abu)^2\, c_x\, (\varrho cu)\, \varrho_x^{\mu-1}\, u_\sigma^\nu\,.$

6. $u_s^2\, a_s\, (bcu)\, (abu)^2\, (\varrho cu)^2\, \varrho_x^{\mu-2}\, u_\sigma^\nu\,.$

7. $u_\sigma^2\, a_s\, (bcu)\, (abu)\, (abc)\, (\varrho cu)\, \varrho_x^{\mu-1}\, u_\sigma^\nu$

$$= \tfrac{1}{2}\, u_s^2\, (bcu)\, (abu)\, (abc)\, \varrho_x^{\mu-1}\, u_\sigma^\nu \left\{a_s\, (\varrho cu) - c_s\, (\varrho au)\right\}$$

$$= \tfrac{1}{2}\, u_s^2\, (bcu)\, (abu)\, (abc)\, \varrho_x^{\mu-1}\, u_\sigma^\nu \left\{\varrho_s\, (acu) - u_s\, (ac\varrho)\right\} \quad \text{Id. I.}$$

$$= \tfrac{1}{2}\, u_s^2\, \varrho_x^{\mu-1}\, u_\sigma^\nu\, \varrho_s \,.\, u_{s_1}^3 - \tfrac{1}{2}\, u_s^3 \,.\, u_{s_1}^2\, \varrho_{s_1}\, \varrho_x^{\mu-1}\, u_\sigma^\nu = 0\,.$$

Zu der Form $u_s^2\, a_s\, b_x\, (abu)^2$ gehören das dritte und das sechste System.

Supplementartafel X.

$u_t^3 \,.\, \varrho_x^\mu\, u_\sigma^\nu\,.$

1. $u_t^3 \,.\, (\varrho au)\, \varrho_x^{\mu-1}\, u_\sigma^\nu\, a_x^2\,.$

3. $u_t^3 \,.\, (\varrho au)^2\, \varrho_x^{\mu-2}\, u_\sigma^\nu\, a_x\,.$

4. $a_t\, u_t^2 \,.\, (\varrho au)\, \varrho_x^{\mu-2}\, u_\sigma^\nu\, a_x\,.$

6. $u_t^3 \,.\, (\varrho au)^3\, \varrho_x^{\mu-3}\, u_\sigma^\nu\,.$

7. $a_t\, u_t^2 \,.\, (\varrho au)^2\, \varrho_x^{\mu-2}\, u_\sigma^\nu\,.$

8. $a_t^2\, u_t\, (\varrho au)\, \varrho_x^{\mu-1}\, u_\sigma^\nu$ hat den Factor T. (Tafel XII, Form 8.)

Zu der Form u_t^3 gehören das vierte und das siebente Modularsystem.

Supplementartafel XI.

$u_s\, a_s\, b_s\, a_x^2\, b_x\, c_x^2\, (bcu) \,.\, \varrho_x^\mu\, u_\sigma^\nu\,.$

9. $d_s\, a_s\, b_s\, a_x^2\, b_x\, c_x^2\, (bcd)\, \varrho_x^\mu\, u_\sigma^{\nu-1}\, d_{\sigma+}^1 : d_s\, u_s\, b_s\, b_x\, c_x^2\, (bcd)\, \varrho_x^\mu\, u_\sigma^{\nu-1}\, d_\sigma^1\,.$

Zu der Form $u_s\, a_s\, b_s\, a_x^2\, b_x\, c_x^2\, (bcu)$ gehört kein System.

Supplementartafel XII.

$u_s^2\, a_s\, c_x^2\, (abu)^2\, (bcu)\, \varrho_x^\mu\, u_\sigma^\nu\,.$

9. $u_s^2\, a_s\, (cdu)^2\, (abu)^2\, (bcu)\, \varrho_x^{\mu-1}\, (\varrho du)\, u_\sigma^\nu$

$$= \tfrac{1}{2}\, u_s^2\, (cdu)^2\, (abu)^2\, (bcu)\, \varrho_x^{\mu-1}\, u_\sigma^\nu \left\{a_s\, (\varrho du) + d_s\, (a\varrho u)\right\}$$

$$= \tfrac{1}{2}\, u_s^2\, (cdu)^2\, (abu)^2\, (bcu)\, \varrho_x^{\mu-1}\, u_\sigma^\nu \left\{\varrho_s\, (adu) - u_s\, (ad\varrho)\right\}\,.$$

Zu der Form $u_s^2\, a_s\, c_x^2\, (abu)^2\, (bcu)$ gehört kein System.

Supplementartafel XIII.

$u_t^2\, a_t\, a_x^2 \,.\, \varrho_x^\mu\, u_\sigma^\nu\,.$

6. $u_t^2\, a_t\, (abu)^2\, (\varrho bu)\, \varrho_x^{\mu-1}\, u_\sigma^\nu\,.$

9. $b_t^2\, a_t\, a_x^2\, \varrho_x^\mu\, u_\sigma^{\nu-1}\, b_{\sigma+} : b_t^2\, u_t\, \varrho_x^\mu\, u_\sigma^{\nu-1}\, b_\sigma\,.$

Zu der Form $u_t^2\, a_t\, a_x^2$ gehört das sechste System.

Supplementartafel XIV.

$$u_s^2\, u_p^5\, (spx)\,.\, \varrho_x^\mu\, u_\sigma^\nu\,.$$

3. $u_s^2\, u_p^5 \left\{a_s\, u_p - u_s\, a_p\right\} a_x\, (\varrho a u)\, \varrho_x^{\mu-1}\, u_\sigma^\nu\,.$
6. $u_s^2\, u_p^5 \left\{a_s\, u_p - u_s\, a_p\right\} (\varrho a u)^2\, \varrho_x^{\mu-2}\, u_\sigma^\nu\,.$
7. $u_s^2\, u_p^4\, a_p \left\{a_s\, u_p - u_s\, a_p\right\} (\varrho a u)\, \varrho_x^{\mu-1}\, u_\sigma^\nu\,.$

Der zweite Theil hat den Factor u_s^3, der erste Theil nimmt mittelst der Formel (Tafel XVI.)

$$u_p^5\, a_p\, a_x^2 = C_1\, u_s^3\,.\, a_x\, b_x\, (abu)^2 + C_2\, u_x^2\, u_t^3 + C_3\, u_x\, u_s^2\, a_s\, b_x\, (abu)^2$$

die Form an:

$$C_1\, u_{s_1}^3\,.\, u_s^2\, a_s\, (\varrho b u)\, (abu)^2\, \varrho_x^{\mu-1}\, u_\sigma^\nu + \tfrac{1}{2}\, C_3\, u_s^3\,.\, u_{s_1}^2\, a_{s_1}\, (\varrho b u)(abu)^2\, \varrho_x^{\mu-1}\, u_\sigma^\nu \ldots.$$

Zu der Form $u_s^2\, u_p^5\, (spx)$ gehört kein System.

Supplementartafel XV.

$$a_t\, b_t\, u_t\, a_x^2\, b_x^2\,.\, \varrho_x^\mu\, u_\sigma^\nu\,.$$

5. $a_t\, b_t\, c_t\, a_x^2\, b_x^2\, \varrho_x^\mu\, u_\sigma^{\nu-1}\, c_\sigma\, c_{x+} : u_t\, b_t\, c_t\, b_x^2\, \varrho_x^\mu\, u_\sigma^{\nu-1}\, c_\sigma\, c_x\,.$
8. $a_t\, b_t\, c_t\, a_x^2\, b_x\, (bcu)\, \varrho_x^\mu\, u_\sigma^{\nu-1}\, c_{\sigma+} : u_t\, b_t\, c_t\, b_x\, (bcu)\, \varrho_x^\mu\, u_\sigma^{\nu-1}\, c_\sigma\,.$
9. $a_t\, b_t\, c_t\, a_x^2\, b_x^2\,.\, \varrho_x^\mu\, u_\sigma^{\nu-2}\, c_{\sigma+}^2 : u_t\, b_t\, c_t\, b_x^2\, \varrho_x^\mu\, u_\sigma^{\nu-2}\, c_\sigma^2\,.$

Zu der Form $a_t\, b_t\, u_t\, a_x^2\, b_x^2$ gehört kein System.

Supplementartafel XVI.

$$a_t\, u_t^2\, b_x\, (abu)^2\, \varrho_x^\mu\, u_\sigma^\nu\,.$$

3. $a_t\, u_t^2\, (abu)^2\, (bcu)\, c_x\, \varrho_x^{\mu-1}\, (\varrho c u)\, u_\sigma^\nu\,.$
6. $a_t\, u_t^2\, (abu)^2\, (bcu)\, \varrho_x^{\mu-2}\, (\varrho c u)^2\, u_\sigma^\nu\,.$
7. $a_t\, u_t^2\, (bcu)\, (abu)\, (abc)\, (\varrho c u)\, \varrho_x^{\mu-1}\, u_\sigma^\nu$

$$= \tfrac{1}{2}\, u_t^2\, (bcu)\, (abu)\, (abc)\, \varrho_x^{\mu-1}\, u_\sigma^\nu \left\{a_t\, (\varrho c u) - c_t\, (\varrho a u)\right\}$$
$$= \tfrac{1}{2}\, u_t^2\, (bcu)\, (abu)\, (abc)\, \varrho_x^{\mu-1}\, u_\sigma^\nu \left\{\varrho_t\, (acu) - u_t\, (ac\varrho)\right\}.$$

Zu der Form $a_t\, u_t^2\, b_x\, (abu)^2$ gehören das dritte und das sechste System.

Supplementartafel XVII.

$$a_t\, b_t\, u_t\, a_x^2\, b_x\, c_x^2\, (bcu)\,.\, \varrho_x^\mu\, u_\sigma^\nu\,.$$

9. $a_t\, b_t\, d_t\, a_x^2\, b_x^2\, c_x^2\, (bcd)\,.\, \varrho_x^\mu\, u_\sigma^{\nu-1}\, d_{\sigma+} : u_t\, b_t\, d_t\, b_x^2\, c_x^2\, (bcd)\, \varrho_x^\mu\, u_\sigma^\nu\, d_\sigma\,.$

Zu der Form $a_t\, b_t\, u_t\, a_x^2\, b_x\, c_x^2\, (bcu)$ gehört kein System.

Supplementartafel XVIII.

$$\varrho_x^\mu u_\sigma^\nu \cdot q_x^6 = a_x^2 b_x^2 c_x^2 a_t b_t c_t \varrho_x^\mu u_\sigma^\nu .$$

2. $q_x^6 \cdot \varrho_x^\mu u_\sigma^{\nu-1} c_\sigma c_x^2$.
4. $a_x^2 b_x^2 c_x (cdu) a_t b_t c_t \varrho_x^\mu u_\sigma^{\nu-1} d_\sigma d_{x+} : b_x^2 c_x (cdu) u_t b_t c_t \varrho_x^\mu u_\sigma^{\nu-1} d_\sigma d_x$.
5. $q_x^6 \cdot \varrho_x^\mu u_\sigma^{\nu-2} a_\sigma^2 a_x$.
7. $a_x^2 b_x^2 c_x (cdu) a_t b_t c_t \varrho_x^\mu u_\sigma^{\nu-2} d_{\sigma+}^2 : b_x^2 c_x (cdu) u_t b_t c_t \varrho_x^\mu u_\sigma^{\nu-2} d_\sigma^2$.
8. $a_x^2 b_x^2 (cdu)^2 a_t b_t c_t \varrho_x^\mu u_\sigma^{\nu-1} d_{\sigma+} : b_x^2 (cdu)^2 u_t b_t c_t \varrho_x^\mu u_\sigma^{\nu-1} d_\sigma$.
9. $q_x^6 \cdot \varrho_x^\mu u_\sigma^{\nu-3} a_\sigma^3$.

Zu der Form q_x^6 gehört kein Modularsystem.

Supplementartafel XIX.

$$a_t u_t^2 c_x^2 (abu)^2 (bcu) \cdot \varrho_x^\mu u_\sigma^\nu .$$

6. $a_t u_t^2 (cdu)^2 (abu)^2 (bcu) (\varrho du) \varrho_x^{\mu-1} u_\sigma^\nu$

$$= \tfrac{1}{2} u_t^2 (cdu)^2 (abu)^2 (bcu) \varrho_x^{\mu-1} u_\sigma^\nu \left\{a_t (\varrho du) - d_t (\varrho au)\right\}$$
$$= \tfrac{1}{2} u_t^2 (cdu)^2 (abu)^2 (bcu) \varrho_x^{\mu-1} u_\sigma^\nu \left\{\varrho_t (adu) - u_t (ad\varrho)\right\} .$$

Zu der Form $a_t u_t^2 c_x^2 (abu)^2 (bcu)$ gehört kein System.

Supplementartafel XX.

$$u_s^2 u_t^2 (stx) \varrho_x^\mu u_\sigma^\nu .$$

3. $u_s^2 u_t^2 \left\{a_s u_t - u_s a_t\right\} a_x \varrho_x^{\mu-1} u_\sigma^\nu (\varrho au)$.
6. $u_s^2 u_t^2 \left\{a_s u_t - u_s a_t\right\} \varrho_x^{\mu-2} u_\sigma^\nu (\varrho au)^2$.
7. $a_s u_s u_t^2 \left\{a_s u_t - u_s a_t\right\} \varrho_x^{\mu-1} u_\sigma^\nu (\varrho au)$.

Der erste Theil hat den Factor u_t^3, der zweite geht durch die Formel (Tafel XII.):

$$a_t u_t^2 a_x^2 = \frac{T}{6} u_x^2 + \tfrac{1}{2} u_{s_1} u_{s_2} (s_1 s_2 x)^2 - \frac{S}{6} a_x b_x (abu)^2$$

in den Ausdruck über:

$$\tfrac{1}{2} u_s^2 u_{s_1} u_{s_2} (s_1 s_2 s) \left\{\varrho_{s_1} u_{s_2} - u_{s_1} \varrho_{s_2}\right\} \varrho_x^{\mu-1} u_\sigma^\nu - \frac{S}{6} u_s^2 a_s (b\varrho u) (abu)^2 \varrho_x^{\mu-1} u_\sigma^\nu \;\ldots .$$

Der zweite Theil hat den Factor S, der erste und zweite verschwindet.

Zu der Form $u_s^2 u_t^2 (stx)$ gehört kein System.

Supplementartafel XXI.

$$a_x^2 q_x^5 (aqu) \varrho_x^\mu u_\sigma^\nu .$$

5. $a_x^2 q_x^5 (aqb) b_x \varrho_x^\mu u_\sigma^{\nu-1} b_{\sigma+} : q_x^5 (bqu) b_x \varrho_x^\mu u_\sigma^{\nu-1} b_\sigma$.
8. $a_x^2 q_x^4 (qbu) (aqb) \varrho_x^\mu u_\sigma^{\nu-1} b_{\sigma+} : q_x^4 (qbu)^2 \varrho_x^\mu u_\sigma^{\nu-1} b_\sigma$.
9. $a_x^2 q_x^5 (qab) \varrho_x^\mu u_\sigma^{\nu-2} b_{\sigma+}^2 : q_x^5 (qbu) \varrho_x^\mu u_\sigma^{\nu-2} b_\sigma^2$.

Zu der Form $a_x^2 q_x^5 (aqu)$ gehört kein System.

Supplementartafel XXII.

$$u_p^5\, u_t^2\, (ptx)\, \varrho_x^\mu\, u_\sigma^\nu .$$

3. $u_p^5\, u_t^2\, a_x \left\{a_p\, u_t - u_p\, a_t\right\}\, \varrho_x^{\mu-1}\, (\varrho a u)\, u_\sigma^\nu .$

6. $u_p^5\, u_t^2 \left\{a_p\, u_t - u_p\, a_t\right\}\, \varrho_x^{\mu-2}\, (\varrho a u)^2\, u_\sigma^\nu .$

7. $u_p^4\, a_p\, u_t^2 \left\{a_p\, u_t - u_p\, a_t\right\}\, \varrho_x^{\mu-1}\, (\varrho a u)\, u_\sigma^\nu .$

Der erste Theil hat den Factor u_t^3, der zweite geht durch die Formel (Tafel XVI.):

$$u_p^5\, a_p\, a_x^2 = C_1\, u_s^3\, a_x\, b_x\, (abu)^2 + C_2\, u_x^2\, u_t^3 + C_3\, u_x\, a_x\, b_s\, u_s^2\, (abu)^2$$

in folgenden Ausdruck über:

$$C_1\, u_s^3\, a_t\, u_t^2\, (\varrho b u)\, (abu)^2\, \varrho_x^{\mu-1}\, u_\sigma^\nu + \tfrac{1}{2}\, C_3\, u_t^3\, .\, (\varrho a u)\, b_s\, u_s^2\, (abu)^2 \varrho_x^{\mu-1}\, u_\sigma^\nu \ldots .$$

Zu der Form $u_p^5\, u_t^2\, (ptx)$ gehört kein System.

Supplementartafel XXIII.

$$a_x^2\, b_x^2\, u_s^2\, a_t\, b_t\, (stx)\, \varrho_x^\mu\, u_\sigma^\nu .$$

9. $a_x^2\, b_x^2\, c_s^2\, a_t\, b_t\, (stx)\, \varrho_x^\mu\, u_\sigma^{\nu-1}\, c_{\sigma +} : b_x^2\, c_s^2\, u_t\, b_t\, (stx)\, \varrho_x^\mu\, u_\sigma^{\nu-1}\, c_\sigma .$

Zu der Form $a_x^2\, b_x^2\, u_s^2\, a_t\, b_t\, (stx)$ gehört kein System.

Supplementartafel XXIV.

$$u_s^2\, u_t\, a_t\, b_x\, (stx)\, (abu)^2\, \varrho_x^\mu\, u_\sigma^\nu .$$

6. $u_s^2\, u_t\, a_t\, (bcu)\, (abu)^2 \left\{c_s\, u_t - u_s\, c_t\right\}\, (\varrho c u)\, \varrho_x^{\mu-1}\, u_\sigma^\nu .$

Da wir hier die eine Form höherer Ordnung untersuchen, so ist die Annahme gestattet, dass die Form 5[ter] Ordnung

$$u_s^2\, u_t\, a_t\, (bcu)\, (abu)^2 \left\{c_s\, u_t - u_s\, c_t\right\}\, c_x$$

eine ganze Function der ϑ sei. Demgemäss muss sie sich in folgende Gestalt bringen lassen:

$$u_s^2\, u_t\, a_t\, (bcu)\, (abu)^2 \left\{c_s u_t - u_s c_t\right\} c_x = C_1\, S\, u_s^2\, u_p^5\, (spx) + C_2\, u_{s_t}^3\, .\, u_s^2\, u_t^2\, (stx)$$

und wir erhalten die Formel:

$$u_s^2\, u_t\, a_t\, (bcu)\, (abu)^2 \left\{c_s\, u_t - u_s\, c_t\right\}\, (\varrho c u)\, \varrho_x^{\mu-1}\, u_\sigma^\nu =$$

$$C_1\, S\, u_s^2\, .\, u_p^5 \left\{u_s\, \varrho_p - \varrho_s\, u_p\right\}\, \varrho_x^{\mu-1}\, u_\sigma^\nu + C_2\, u_{s_2}^3\; u_s^2\, u_t^2 \left\{u_s\, \varrho_t - \varrho_s\, u_t\right\}\, \varrho_x^{\mu-1}\, u_\sigma^\nu .$$

Zu der Form $u_s^2\, u_t\, a_t\, b_x\, (stx)\, (abu)^2$ gehört kein System.

Supplementartafel XXV.

$$\alpha_x^2\, q_x^5\, (\alpha q u)\, \varrho_x^\mu\, u_\sigma^\nu = a_t\, b_t\, c_t\, a_x^2\, b_x^2\, c_x\, \alpha_x^2\, (c\alpha u)\, \varrho_x^\mu\, u_\sigma^\nu .$$

5. $a_t\, b_t\, c_t\, d_x\, a_x^2\, b_x^2\, c_x\, (c\alpha d)\, \varrho_x^\mu\, u_\sigma^{\nu-1}\, d_\sigma\, \alpha_{x+}^2 : u_t\, b_t\, c_t\, d_x\, b_x^2\, c_x\, (c\alpha d)\, \varrho_x^\mu\, u_\sigma^{\nu-1} d_\sigma\, \alpha_x^2 .$

8. $a_t\, b_t\, c_t\, a_x^2\, b_x^2 (cdu) (c\alpha d)\, \varrho_x^\mu\, u_\sigma^{\nu-1}\, d_\sigma\, \alpha_{x+}^2 : u_t\, b_t\, c_t\, (cdu)\, b_x^2\, (c\alpha d)\, \alpha_x^2\, \varrho_x^\mu\, u_\sigma^{\nu-1}\, d_\sigma .$

9. $a_t\, b_t\, c_t\, a_x^2\, b_x^2\, c_x\, \alpha_x^2 (c\alpha d)\, \varrho_x^\mu\, u_\sigma^{\nu-2}\, d_{\sigma+}^2 : u_t\, b_t\, c_t\, a_x^2\, b_x^2\, c_x\, \alpha_x^2 (c\alpha d)\, \varrho_x^\mu\, u_\sigma^{\nu-2}\, d_\sigma^2 .$

Zu der Form $\alpha_x^2\, q_x^5\, (\alpha q u)$ gehört kein System.

Supplementartafel XXVI.

$$a_x^2\, \alpha_x^2\, q_x^5\, (a\alpha q) \,.\, u_\sigma^\nu\, \varrho_x^\mu \,.$$

2. $a_x^2\, \alpha_x^2\, q_x^5\, (a\alpha q) \,.\, u_\sigma^{\nu-1}\, \varrho_x^\mu\, b_\sigma\, b_x^2 \,.$
4. $a_x^2\, \alpha_x^2\, q_x^4\, (bqu)\, (a\alpha q)\, b_x\, b_\sigma\, u_\sigma^{\nu-1}\, \varrho_x^\mu + \;:\; \alpha_x^2\, q_x^4\, (bqu)\, (\alpha qu)\, b_x\, b_\sigma\, u_\sigma^{\nu-1}\, \varrho_x^\mu \,.$
5. $a_x^2\, \alpha_x^2\, q_x^5\, (a\alpha q) \,.\, b_x\, b_\sigma^2\, u_\sigma^{\nu-2}\, \varrho_x^\mu \,.$
7. $a_x^2\, \alpha_x^2\, q_x^3\, (a\alpha q)\, (bqu)^2\, b_\sigma\, u_\sigma^{\nu-1}\, \varrho_x^\mu + \;:\; \alpha_x^2\, q_x^3\, (q\alpha u)\, (bqu)^2\, b_\sigma\, u_\sigma^{\nu-1}\, \varrho_x^\mu \,.$
8. $a_x^2\, \alpha_x^2\, q_x^4\, (a\alpha q)\, (bqu)\, b_\sigma^2\, u_\sigma^{\nu-2}\, \varrho_x^\mu + \;:\; \alpha_x^2\, q_x^4\, (q\alpha u)\, (bqu)\, b_\sigma^2\, u_\sigma^{\nu-2}\, \varrho_x^\mu \,.$
9. $a_x^2\, \alpha_x^2\, q_x^5\, (a\alpha q) \,.\, u_\sigma^{\nu-3}\, \varrho_x^\mu\, b_\sigma^3 \,.$

Zu der Form $a_x^2\, \alpha_x^2\, q_x^5\, (a\alpha q)$ gehört kein System.

Supplementartafel XXVII.

$$u_s^2\, u_t^2\, u_p^5\, (stp)\, \varrho_x^\mu\, u_\sigma^\nu \,.$$

1. $u_s^2\, u_t^2\, u_p^5\, (stp) \,.\, (\varrho a u)\, \varrho_x^{\mu-1}\, u_\sigma^\nu\, a_x^2 \,.$
3. $u_s^2\, u_t^2\, u_p^5\, (stp) \,.\, (\varrho a u)^2\, \varrho_x^{\mu-2}\, u_\sigma^\nu\, a_x \,.$
4. $u_s^2\, u_t^2\, u_p^4\, a_p\, (stp)\, (\varrho a u)\, \varrho_x^{\mu-1}\, u_\sigma^\nu\, a_x \,.$

Diese Form geht durch die Formel (Tafel XVI.):

$$u_p^5\, a_p \,.\, a_x^2 = C_1\, u_s^3 \,.\, a_x\, b_x\, (abu)^2 + C_2\, u_x^2 \,.\, u_t^3 + C_3\, u_x \,.\, u_s^2\, a_x\, b_s\, (abu)^2$$

in die folgende über:

$$\frac{2\,C}{5} \left\{ u_s^2\, u_t^2\, (a\varrho u)\, b_x\, (abu)\, \{a_s\, b_t - b_s\, a_t\}\, \varrho_x^{\mu-1}\, u_\sigma^\nu \right\} u_s^3$$
$$+ C_2\, u_s^2\, u_t^2\, \{\varrho_s\, u_t - u_s\, \varrho_t\}\, \varrho_x^{\mu-1}\, u_\sigma^\nu \,.\, u_x \,.\, u_t^3$$
$$+ \frac{C_3}{10} \left\{ \begin{aligned} & u_s^2\, u_t^2\, (stx) \,.\, u_s^2\, a_s\, (abu)^2\, (\varrho b u)\, \varrho_x^{\mu-1}\, u_\sigma^\nu \\ & + u_s^2\, a_s\, b_x\, (abu)^2 \,.\, u_s^2\, u_t^2\, \{\varrho_s\, u_t - u_s\, \varrho_t\}\, \varrho_x^{\mu-1}\, u_\sigma^\nu \\ & + 2\, u_x \,.\, u_s^2\, u_t^2\, u_{s_1}\, (sts_1)\, (\varrho a u)\, b_{s_1}\, (abu)^2\, \varrho_x^{\mu-1}\, u_\sigma^\nu \\ & + 2\, u_x \,.\, u_s^2 u_t^2 u_{s_1}^2\, (\varrho a u)\, b_{s_1}\, (abu)\, \{a_s b_t - b_s a_t\}\, \varrho_x^{\mu-1}\, u_\sigma^\nu \,. \end{aligned} \right.$$

6. $u_s^2\, u_t^2\, u_p^5\, (stp) \,.\, (\varrho a u)^3\, \varrho_x^{\mu-3}\, u_\sigma^\nu \,.$
7. $u_s^2\, u_t^2\, u_p^4\, a_p\, (stp) \,.\, (\varrho a u)^2\, \varrho_x^{\mu-2}\, u_\sigma^\nu \,.$

Durch die eben benutzte Formel (A) geht diese Form in die folgende über:

$$\frac{2\,C_1}{5}\, u_s^3 \,.\, u_s^2\, u_t^2\, (a\varrho u)\, (b\varrho u)\, (abu)\, (a_s\, b_t - b_s\, a_t)\, \varrho_x^{\mu-2}\, u_\sigma^\nu$$
$$+ \frac{C_3}{10} \left\{ u_{s_1}^2\, a_{s_1}\, (abu)^2\, (b\varrho u) \,.\, u_s^2\, u_t^2\, \{\varrho_s\, u_t - u_s\, \varrho_t\}\, \varrho_x^{\mu-2}\, u_\sigma^\nu \right\} \ldots .$$

8. $u_s^2\, u_t^2\, u_p^5\, (stp) \,.\, (\varrho a u)\, \varrho_x^{\mu-1}\, u_\sigma^\nu$ hat den Factor S. (Tafel IV.)

Zu der Form $u_s^2\, u_t^2\, u_p^5\, (stp)$ gehört kein System.

Die in den Supplementartafeln gefundenen Resultate lassen sich in folgende Sätze zusammenfassen:

1. Das dritte Modularsystem gehört zu den Formen:
$u_s^2\, a_s\, b_x\, (abu)^2$ und $a_t\, u_t^2\, (abu)^2\, b_x$.
2. das vierte zu den Formen:
u_s^3, u_t^3, α_x^3,
3. das sechste zu den Formen:
$u_s^2\, a_s\, b_x\, (abu)^2$, $u_s^2\, a_s\, a_x^2$, $u_t^2\, a_t\, a_x^2$, $a_t\, u_t^2\, b_x\, (abu)^2$,
4. das siebente zu der Form:
u_t^3.

Man muss nun aus denjenigen Formen ϑ, zu denen ein Modularsystem gehört, solche Produkte σ bilden, dass es

1) Combinationen giebt, welche auf σ anwendbar sind und dem System entsprechen;
2) keine dem System entsprechende Combinationen giebt, welche auf einen Factor (resp. das Produkt mehrerer Factoren) von σ angewandt werden können.

Diese Produkte sind die zu dem Modularsystem gehörenden Produkte der Formen ϑ.

Dem dritten Modularsystem entsprechen die Produkte:

1. $u_s^2\, a_s\, b_x\, (abu)^2 \,.\, u_s^2\, a_s\, b_x\, (abu)^2$,
2. $u_s^2\, a_s\, b_x\, (abu)^2 \,.\, u_t^2\, a_t\, b_x\, (abu)^2$,
3. $u_t^2\, a_t\, b_x\, (abu)^2 \,.\, u_t^2\, a_t\, b_x\, (abu)^2$;

dem vierten die Produkte:

1. $u_s^3 \,.\, \alpha_x^3$,
2. $u_t^3 \,.\, \alpha_x^3$;

dem sechsten die Produkte:

1. $u_s^2\, a_s\, b_x\, (abu)^2 \,.\, u_s^2\, a_s\, b_x\, (abu)^2 \,.\, u_s^2\, a_s\, b_x\, (abu)^2$,
2. $u_s^2\, a_s\, b_x\, (abu)^2 \,.\, u_s^2\, a_s\, b_x\, (abu)^2 \,.\, u_t^2\, a_t\, b_x\, (abu)^2$,
3. $u_s^2\, a_s\, b_x\, (abu)^2 \,.\, u_t^2\, a_t\, b_x\, (abu)^2 \,.\, u_t^2\, a_t\, b_x\, (abu)^2$,
4. $u_t^2\, a_t\, b_x\, (abu)^2 \,.\, u_t^2\, a_t\, b_x\, (abu)^2 \,.\, u_t^2\, a_t\, b_x\, (abu)^2$,
5. $u_s^2\, a_s\, a_x^2 \,.\, u_s^2\, a_s\, b_x\, (abu)^2$,
6. $u_s^2\, a_s\, a_x^2 \,.\, u_t^2\, a_t\, b_x\, (abu)^2$,
7. $u_s^2\, a_s\, a_x^2 \,.\, u_s^2\, a_s\, a_x^2$,
8. $u_t^2\, a_t\, a_x^2 \,.\, u_s^2\, a_s\, b_x\, (abu)^2$,
9. $u_t^2\, a_t\, a_x^2 \,.\, u_t^2\, a_t\, b_x\, (abu)^2$,
10. $u_s^2\, a_s\, a_x^2 \,.\, u_t^2\, a_t\, a_x^2$,
11. $u_t^2\, a_t\, a_x^2 \,.\, u_t^2\, a_t\, a_x^2$.

Der letzte Theil der Untersuchung besteht darin, dass ich zeigen will, dass man für jedes Modularsystem entsprechende Combinationen auf die zu ihm gehörigen Produkte der Art anwenden kann, dass die so entstehenden Formen ganze Functionen der ϑ sind.

Bezeichne ich die Formen $a_s\, b_x\, u_s^2\, (abu)^2$ und $a_t\, b_x\, u_t^2\, (abu)^2$ kurz durch l_x und m_x, so muss also noch nachgewiesen werden, dass sich die folgenden Formen durch die ϑ ausdrücken oder sich auf frühere Formen zurückführen lassen.

1. $a_x\,(alu)^2$,
2. $a_x\,(alu)\,(amu)$,
3. $a_x\,(amu)^2$,
4. $a_x\,a_s\,u_s^2\,\alpha_x^2\,(a\alpha u)$,
5. $a_x\,a_t\,u_t^2\,\alpha_x^2\,(a\alpha u)$,
6. $(alu)^3$,
7. $(alu)^2\,(amu)$,
8. $(alu)\,(amu)^2$,
9. $(amu)^3$,
10. $u_s^2\,a_s\,(abu)^2\,(alu)$,
11. $u_s^2\,a_s\,(abu)^2\,(amu)$,
12. $u_s^2\,a_s\,(acu)^2\,u_{s_1}^2\,b_{s_1}\,(bcu)\,b_x$,
13. $u_t^2\,a_t\,(abu)^2\,(alu)$,
14. $u_t^2\,u_t\,(abu)^2\,(amu)$,
15. $u_s^2\,a_s\,(acu)^2\,u_t^2\,b_t\,(bcu)\,b_x$,
16. $u_t^2\,a_t\,(acu)^2\,u_{t_1}^2\,b_{t_1}\,(bcu)\,b_x$.

Ich beginne mit der Reduction der Form $a_x\,\alpha_x^2\,a_s\,u_s^2\,(a\alpha u)$, welche aus dem Produkt $\alpha_x^2\,u_s^3$ durch eine dem vierten Modularsystem entsprechende Combination entsteht; um sie zu bewerkstelligen, benutze ich die Identität (Tafel V.):

$$a_x\,\alpha_x\,(a\alpha u)^2 = u_s^2\,a_s\,a_x^2 - \frac{S}{6}\,u_x^2,$$

aus der man die Formel ableiten kann:

$$a_x\,\alpha_x\,(a\,\alpha\,(sx))\,(a\alpha u)\,u_s^2 = u_{s_1}\,(s_1\,s\,x)\,a_x^2\,u_s^2\,a_{s_1} - \frac{S}{6}\,u_s^2\,u_x\,(s\,x\,x),$$

$$a_x\,\alpha_x^2\,a_s\,(a\alpha u)\,u_s^2 = a_x^2\,\alpha_x\,\alpha_s\,(a\alpha u)\,u_s^2 + u_{s_1}\,u_s^2\,a_x^2\,a_{s_1}\,(s_1\,s\,x).$$

Die beiden Formen der rechten Seite gehen durch niedere Combinationen aus den Formen $\alpha_x^2\,\alpha_s\,u_s^2$ und $u_s^2\,u_{s_1}^2\,(s\,s_1\,x)$ hervor.

In gleicher Weise kann man die Identität bilden:

$$a_x\,\alpha_x^2\,a_t\,(a\alpha u)\,u_t^2 = a_x^2\,\alpha_x\,\alpha_t\,(a\alpha u)\,u_t^2 + u_t\,u_s^2\,a_x^2\,a_t\,(t\,s\,x),$$

welche lehrt, dass sich die Form $a_x\,\alpha_x^2\,a_t\,(a\alpha u)\,u_t^2$ auf zwei Formen reduciren lässt, die mittelst niederer Combinationen aus den Formen $\alpha_x^2\,\alpha_t\,u_t^2$ und $u_s^2\,u_t^2\,(stx)$ entstehen.

Die Formen:

12. $u_s^2\,a_s\,(acu)^2\,u_{s_1}^2\,b_{s_1}\,(bcu)\,b_x$,
15. $u_s^2\,a_s\,(acu)^2\,u_t^2\,b_t\,(bcu)\,b_x$,
16. $u_t^2\,a_t\,(acu)^2\,u_{t_1}^2\,b_{t_1}\,(bcu)\,b_x$,

welche hier aus den Produkten der Formen $u_s^2\,a_s\,a_x^2$ und $u_t^2\,a_t\,a_x^2$ durch Combinationen entstanden sind, die dem sechsten Modularsystem entsprechen, entstehen zugleich aus den Formen:

$$u_s^2\,a_s\,(acu)^2\,c_x\,.\,u_s^3,$$
$$u_s^2\,a_s\,(acu)^2\,c_x\,.\,u_t^3,$$
$$u_t^2\,a_t\,(acu)^2\,c_x\,.\,u_t^3$$

durch niedere Combinationen.

Die übrigen 11 Formen, welche noch durch die Formen ϑ ausgedrückt werden sollen, lassen sich aus den beiden Ausdrücken:

$$a_y\,(alu)\,(a\varrho u) \quad \text{und} \quad a_y\,(amu)\,(a\varrho u)$$

dadurch ableiten, dass man in denselben die Symbole y und ϱ passend ersetzt und dann mit passenden Symbolen multiplicirt. Anstatt sie einzeln umzuformen, will ich daher diese beiden Ausdrücke transformiren, da dadurch alle 11 Formen zu gleicher Zeit auf einfachere Formen zurückgeführt werden.

Die Form $a_y\,(alu)\,(a\varrho u)$ geht, wenn man für l seinen Werth setzt, in die folgende über:

$$\begin{aligned} & c_y\,a_s\,(bcu)\,u_s^2\,(abu)^2\,(c\varrho u) \\ = {} & c_y\,(bcu)\,u_s^2\,(abu)^2\,\{c_s\,(a\varrho u) - \varrho_s\,(acu) + u_s(ac\varrho)\} \qquad \text{Id. I.} \\ = {} & c_y\,c_s\,(bcu)\,u_s^2\,(abu)^2\,(a\varrho u) - u_s^2\,\varrho_s\,.\,c_y\,(bcu)\,(abu)^2\,(acu) \\ & \qquad + u_s^3\,.\,c_y\,(bcu)\,(abu)^2\,(ac\varrho)\,. \end{aligned}$$

Da nun:

$$\begin{aligned} c_y\,.\,(abu)^2(acu)(bcu) & = \tfrac{1}{3}\,(abu)(acu)(bcu)\,\{c_y(abu) - b_y(acu) + a_y(bcu)\} \\ & = \tfrac{1}{3}\,u_y\,u_s^3 \qquad \text{Id. I.} \end{aligned}$$

ist, so gilt die Identität:

$$1.\quad a_y\,(alu)\,(a\varrho u) = c_y\,c_s\,u_s^2\,(bcu)\,(abu)^2\,(a\varrho u) - u_s^3\,\{\tfrac{1}{3}\,u_y\,.\,u_s^2\,\varrho_s + c_y\,(abu)^2\,(bcu)\,(ac\varrho)\}\,.$$

In ähnlicher Weise gelangen wir für die Form $a_y\,(amu)\,(a\varrho u)$ zu der Formel:

$$2.\quad a_y\,(amu)\,(a\varrho u) = c_y\,c_t\,u_t^2\,(bcu)\,(abu)^2\,(a\varrho u) - \tfrac{1}{3}\,u_t^3\,u_y\,.\,u_t^2\,\varrho_t - u_t^3\,c_y\,(abu)\,(bcu)\,(ac\varrho)\,.$$

Da hier in diesen Ausdrücken das zweite und das dritte Glied der rechten Seite die Factoren u_s^3 oder u_t^3 besitzen, so lassen sich die Formen $a_y\,(alu)\,(a\varrho u)$ und $a_y\,(amu)\,(a\varrho u)$ auf das je erste Glied ihrer Ausdrücke zurückführen.

Hierdurch kann man die 11 Formen:

$a_x\,(alu)^2$,	$u_t^2\,d_t\,(dcu)^2\,(clu)$,
$a_x\,(alu)\,(amu)$,	$a_x\,(amu)^2$,
$(alu)^3$,	$(amu)^3$,
$(alu)^2\,(amu)$,	$u_s^2\,d_s\,(dcu)^2\,(cmu)$,
$(alu)\,(amu)^2$,	$u_t^2\,d_t\,(dcu)^2\,(cmu)$
$u_s^2\,d_s\,(dcu)^2\,(clu)$,	

auf die folgenden 11 Formen zurückführen:

1. $c_x\,c_s\,u_s^2\,(bcu)\,(abu)^2\,(alu)$,
2. $c_x\,c_s\,u_s^2\,(bcu)\,(abu)^2\,(amu)$,
3. $(clu)\,c_s\,u_s^2\,(bcu)\,(abu)^2\,(alu)$,
4. $(cmu)\,c_s\,u_s^2\,(bcu)\,(abu)^2\,(alu)$,
5. $(cmu)\,c_s\,u_s^2\,(bcu)\,(abu)^2\,(amu)$,
6. $u_{t_1}^2\,d_{s_1}\,(cdu)\,c_s\,u_s^2\,(bcu)\,(abu)^2\,(adu)$,
7. $u_t^2\,d_t\,(cdu)\,c_s\,u_s^2\,(bcu)\,(abu)^2\,(adu)$,
8. $c_x\,c_t\,u_t^2\,(bcu)\,(abu)^2\,(amu)$,
9. $(cmu)\,c_t\,u_t^2\,(bcu)\,(abu)^2\,(amu)$,
10. $u_s^2\,d_s\,(cdu)\,c_t\,u_t^2\,(bcu)\,(abu)^2\,(adu)$,
11. $u_{t_1}^2\,d_{t_1}\,(cdu)\,c_t\,u_t^2\,(bcu)\,(abu)^2\,(adu)$,

welche nacheinander durch die ϑ dargestellt werden sollen.

Die Form $c_x\, c_s\, u_s^2\, (bcu)\, (abu)^2\, (alu)$ geht, wenn man für das Symbol l seinen Werth einträgt, in die folgende über:

$$
\begin{aligned}
& c_x\, c_s\, u_s^2\, (bcu)\, (abu)^2\, (adu)\, u_{s_1}^2\, e_{s_1}\, (deu)^2 \\
&\qquad = \tfrac{1}{2}\, c_x\, c_s\, u_s^2\, u_{s_1}^2\, (abu)^2\, (deu)^2\, (adu) \left\{ c_{s_1}\, (beu) - b_{s_1}\, (ecu) \right\} \\
&\qquad = \tfrac{1}{2}\, c_x\, c_s\, u_s^2\, u_{s_1}^2\, (abu)^2\, (deu)^2\, (adu) \left\{ c_{s_1}\, (beu) - u_{s_1}\, (bec) \right\}.
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\text{I.}\quad c_x\, c_s\, u_s^2\, (bcu)\, (abu)^2\, (alu) &= \tfrac{1}{2}\, c_x\, c_s\, c_{s_1}\, u_s^2\, u_{s_1}^2 \,.\, u_p^6 \\
&\quad - \tfrac{1}{2}\, u_s^3 \,.\, c_x\, c_s\, u_s^2\, (abu)^2\, (deu)^2 (adu)\, (bec)\,.
\end{aligned}
$$

In derselben Weise wird:

$$
\begin{aligned}
\text{II.}\quad c_x\, c_t\, u_t^2\, (bcu)\, (abu)^2\, (al\dot{u}) &= \tfrac{1}{2}\, c_x\, c_s\, c_t\, u_t^2\, u_s^2 \,.\, u_p^6 \\
&\quad - \tfrac{1}{2}\, u_s^3 \,.\, c_x\, c_t\, u_t^2\, (abu)^2\, (deu)^2\, (adu)\, (bec)\,. \\
\text{III.}\quad c_x\, c_t\, u_t^2\, (bcu) (abu)^2 (amu) &= \tfrac{1}{2}\, c_x\, c_t\, c_{t_1}\, u_t^2\, u_{t_1}^2 \,.\, u_p^6 \\
&\quad - \tfrac{1}{2}\, u_t^3 \,.\, c_x\, c_t\, u_t^2\, (abu)^2\, (deu)^2\, (adu)\, (bec)\,.
\end{aligned}
$$

Durch diese Formeln werden die Formen 1., 2. und 8. durch niedere Formen ausgedrückt. Ersetzt man in ihnen den Factor c_x durch (clu) oder (cmu), so erhält man Ausdrücke für die Formen 3., 4., 5. und 9.

Die Formen 6. und 11. ändern ihr Zeichen, wenn man gleichzeitig a mit b und c mit d vertauscht, haben also den Werth 0.

Es bleibt mithin nur noch die Untersuchung der Formen 7. und 10. übrig, welche durch dieselbe Buchstabenänderung in einander übergehen, so dass wir nur eine unter ihnen, etwa:

$$u_s^2\, u_t^2\, c_s\, d_t\, (cdu)\, (bcu)\, (abu)^2\, (adu)$$

zu untersuchen brauchen. Diese Form hat den Werth:

$$\tfrac{1}{2}\, u_s^2\, u_t^2\, (cdu)\, (bcu)\, (abu)^2\, (cd\, (st))\, (a\dot{d}u)\,,$$

sie lässt sich leicht auf die Form $u_s^2\, u_t^2\, u_p^5\, (stp)$ zurückführen.

Diese letztere Form genügt nämlich der Gleichung:

$$
\begin{aligned}
u_s^2 u_t^2\, u_p^5\, (pst) &= u_s^2\, u_t^2\, (abu)^2 (cdu) (bcu) \left\{ \tfrac{2}{3} (cd\, (st)) (adu) + \tfrac{1}{3} (cdu) (ad\, (st)) \right\} \\
&= u_s^2\, u_t^2\, (abu)^2 (cdu)\, (bcu) \left\{ (adu) (cd(st)) + \tfrac{1}{3} (cda) (u_s d_t - d_s u_t) \right\},
\end{aligned}
$$

es ist daher:

$$
\begin{aligned}
& u_s^2\, u_t^2\, (abu)^2\, (cdu)\, (bcu)\, (adu)\, (cd\, (st)) \\
&\qquad = u_s^2\, u_t^2\, u_p^5\, (stp) + u_t^3 \,.\, u_s^2\, (abu)^2\, (cdu)\, (bcu)\, (cda)\, d_s \\
&\qquad\quad - \tfrac{1}{3}\, u_s^3 \,.\, u_t^2\, (abu)^2\, (cdu)\, (bcu)\, (cda)\, d_t\,.
\end{aligned}
$$

Demgemäss ist sowohl von den eigentlich als auch von den uneigentlich zugehörigen Formen der Formen ϑ gezeigt worden, wie sie sich durch die Formen ϑ darstellen lassen; die Formen ϑ bilden daher ein volles Formensystem für die cubische Form f.

Giessen, im October 1868.

Ueber die Doppeltangenten einer ebenen Curve vierten Grades.

Von Dr. Geiser in Zürich.

I.

Die Eigenschaften der 28 Doppeltangenten einer allgemeinen Curve vierten Grades lassen sich sehr anschaulich mit den gegenseitigen Beziehungen der 27 Geraden einer Fläche dritten Grades in Zusammenhang bringen.

Sei F_3 eine Fläche dritten Grades ohne Singularitäten, p ein willkürlich im Raum angenommener Punkt, so ist der von p aus der F_3 umschriebene Tangentenkegel vom sechsten Grade. Liegt p auf F_3 selbst, so besteht der Tangentenkegel aus der doppelt gelegten Tangentialebene E der F_3 in p und aus einem Kegel vierten Grades K_4. Sei g eine der 27 Geraden der F_3, so schneidet die durch p und g gelegte Ebene e, welche eine Doppeltangentialebene von K_4 ist, aus F_3 neben g noch einen Kegelschnitt aus, der mit g zwei Punkte (r, s) gemein hat. Werden diese Punkte durch gerade Linien mit p verbunden, so erhält man die beiden Berührungskanten von K_4 mit e. Ausser den 27 Ebenen e ist auch noch E eine Doppeltangentialebene von K_4; ihre beiden Berührungskanten sind die Haupttangenten t_1 und t_2 der F_3 in p.

Die erste Polare F_2 des Punktes p ist eine Fläche zweiten Grades, welche durch die 54 Punkte (r, s) geht, und auf welcher die Haupttangenten t_1 und t_2 ihrer ganzen Ausdehnung nach liegen. Dieselbe schneidet F_3 in einer Raumcurve sechsten Grades C_6, welche in p einen Doppelpunkt besitzt; verbindet man diesen mit allen Punkten der C_6 durch Geraden, so erhält man den Tangentenkegel K_4, oder auch: die sämmtlichen Tangenten der C_6 bestimmen mit dem Punkte p die sämmtlichen Tangentialebenen von K_4.

Es mag noch bemerkt werden, dass keine der Tangenten C_6, deren Berührungspunkt nicht p ist, diesen Punkt enthalten wird, denn sonst wäre diese Tangente eine Gerade der F_3, während, um die Allgemeinheit der Resultate zu wahren, für die vorliegende Betrachtung ausdrücklich angenommen werden muss, dass p auf keiner der Geraden der Fläche dritten Grades liege.

K_4 und F_3 berühren sich längs der C_6, haben also ausser dieser Curve, die doppelt gezählt, d. h. in zwei dicht aufeinander sich folgenden Lagen als Durchschnitt der beiden Flächen auftritt, keinen weitern Punkt gemein. K_4 und F_2 schneiden sich in einer Raumcurve achten Grades, welche aus C_6, t_1 und t_2 besteht.

Wenn $\mathfrak{E}$ eine beliebig im Raume gewählte Ebene ist, so wird dieselbe von K_4 in einer Curve vierten Grades C_4 geschnitten, welche 28 Doppeltangenten hat; denn (wenn die vorhin eingeführte Bezeichnung beibehalten wird) es schneiden sich $\mathfrak{E}$ und die Ebene e, welche durch p und g geht, in einer Geraden g', welche eine Doppeltangente der C_4 ist. Die zu g' gehörigen Berührungspunkte r' und s' ergeben sich als die Durchschnitte der Geraden pr und ps mit $\mathfrak{E}$. Schliesslich ist auch der Durchschnitt γ' von E und $\mathfrak{E}$ eine Doppeltangente, deren Berührungspunkte t_1' und t_2' die Schnittpunkte von $\mathfrak{E}$ mit t_1 und t_2 sind.

$\mathfrak{E}$ und F_3 treffen sich in einer Curve dritten Grades C_3, welche C_4 in sechs Punkten berührt, denn C_3 und C_4 können nur Punkte gemein haben, welche gleichzeitig auf F_3 und K_4 liegen, d. h. welche sich auf der doppelt gelegten C_6 befinden. In der That: Sei b einer der sechs Punkte, welche C_6 und $\mathfrak{E}$ gemein haben, so ist die Ebene $\mathfrak{e}$, welche p mit der Tangente der C_6 in b verbindet, gleichzeitig Tangentialebene an F_3 und K_4 mit dem Berührungspunkte b und demzufolge ist der Schnitt von $\mathfrak{e}$ mit $\mathfrak{E}$ gleichzeitig Tangente an C_3 und C_4, also berühren sich diese beiden Curven wirklich in sechs Punkten. Die sechs Berührungspunkte liegen auf C_6, demnach auf F_2 und also in dem Kegelschnitte, welchen $\mathfrak{E}$ und F_2 gemein haben; dieser Kegelschnitt geht ausserdem noch durch t_1' und t_2'.

II.

Dass umgekehrt jede beliebige ebene Curve vierten Grades C_4 zu einer Fläche dritten Grades in die eben auseinandergesetzte Beziehung gebracht werden kann, ergibt sich aus den nachfolgenden Entwicklungen:

Da die allgemeine Curve vierten Grades 28 Doppeltangenten hat, so kann man unter denselben eine ganz beliebige auswählen und sie mit γ' bezeichnen, während ihre Berührungspunkte t_1' und t_2' heissen mögen. Durch t_1' und t_2' lege man einen beliebigen Kegelschnitt C_2, so wird derselbe die C_4 noch in sechs Punkten b_1, $b_2 \ldots b_6$ treffen. Der doppelt gedachte Kegelschnitt C_2, der als Curve vierten Grades C_4' aufgefasst werden kann, und C_4 bestimmen ein Curvenbüschel vierten Grades, welches die Eigenschaft hat, dass jede Curve vierten Grades die durch 13 von den 16 Schnittpunkten der C_4 und C_4' geht, auch noch die drei andern enthält. Die 16 Grundpunkte des Büschels bestehen aus den Punkten $t_1', t_2', b_1, b_2 \ldots b_6$, von denen jeder doppelt gezählt werden muss; oder auch: zu den Punkten $t_1', t_2', b_1, b_2 \ldots b_6$, die auf C_4 liegen, nehme man noch jeweilen zu einem von ihnen den unendlich benachbarten Punkt auf C_4, so dass man Punkte τ_1', τ_2', $\beta_1, \beta_2 \ldots \beta_6$ erhält, so sind die t', τ', b, β die Grundpunkte. Legt man also die Gerade γ', welche $t_1', \tau_1', t_2', \tau_2'$ enthält, so kann dieselbe mit der Curve dritten Grades C_3, welche durch $b_1 \ldots b_6, \beta_1, \beta_2, \beta_3$ geht, zusammengenommen als eine zerfallende Curve C_4'' des Büschels angesehen werden. C_4'' muss also noch durch $\beta_4, \beta_5, \beta_6$ gehen, d. h. diese drei Punkte gehören auch der C_3 an, da sie offenbar nicht auf γ' liegen können.

Es ergibt sich demnach der Satz:

Legt man durch die Berührungspunkte einer Doppeltangente der allgemeinen Curve vierten Grades einen Kegelschnitt, so trifft dieselbe die Curve ausserdem noch in sechs Punkten, in welchen sie von einer Curve dritten Grades einfach berührt wird. Von diesen sechs Punkten können drei willkürlich angenommen werden, dann sind die drei andern sofort bestimmt, indem sie aus C_4 durch den Kegelschnitt ausgeschnitten werden, welcher durch die drei ersten geht, und die beiden Berührungspunkte der C_4 mit der angenommenen Doppeltangente enthält.*)

Wenn nun in einer Ebene $\mathfrak{E}$ drei Curven C_4, C_2, C_3 in der soeben angegebenen gegenseitigen Lage stehen, so wird von denselben eine Fläche dritten Grades durch folgende Elemente bestimmt:

1) Man setze fest, dass C_3 ihrer ganzen Ausdehnung nach auf F_3 liegen soll; ferner:

2) Durch einen beliebigen Punkt p ausserhalb $\mathfrak{E}$ lege man eine Ebene E, welche die Gerade γ' enthält. In dieser Ebene construire man irgend eine Curve dritten Grades C_3', welche p zum Doppelpunkte und die Geraden $p\,t_1'$ und $p\,t_2'$ zu Tangenten in diesem Doppelpunkte hat, während sie zugleich durch die drei Punkte geht, in denen C_3 und γ' sich schneiden.

3) Man verbinde schliesslich p mit dreien von den sechs Berührungspunkten der Curven C_3 und C_4, z. B. mit b_1, b_2, b_3, und bestimme auf jeder dieser Geraden den dem Berührungspunkte zunächst gelegenen Punkt, so dass man drei neue Punkte $\beta_1', \beta_2', \beta_3'$ erhält:

Dann ist es stets möglich, ein Büschel von Flächen dritten Grades zu construiren, welches durch $C_3, C_3', \beta_1', \beta_2', \beta_3'$ geht, da ja diese

*) Man vergleiche die Abhandlung des Hrn. Hesse: „Ueber Determinanten in der Geometrie". Crelle's Journal Bd. 49, pag. 258.

Elemente für 18 Punkte zählen. Die Grundcurve des Büschels enthält die beiden ebenen Curven C_3 und C_3', also noch eine dritte ebene Curve C_3'', welche β_1', β_2', β_3' enthält, so dass die Flächen des Büschels sich längs C_3 berühren. Dass auch die ersten Polaren des Punktes p nach diesen Flächen ein Flächenbüschel zweiten Grades bilden, und zwar mit einer Grundcurve, die aus C_2, pt_1' und pt_2' besteht, ist evident.

Die Tangentenkegel, welche von p aus allen diesen Flächen dritten Grades umschrieben sind, bilden ein Büschel von Kegeln mit 16 Grundkanten, welches dem Büschel der Flächen projectivisch ist, und zwar treffen sie die Ebene 𝔈 in einem Curvenbüschel vierten Grades mit 16 Grundpunkten (es sind diess, wie man sich leicht überzeugt, die Punkte t, τ, b, β), welches auch die gegebene Curve C_4 enthält. Dieser Curve C_4 entspricht also nach bekannten Gesetzen wirklich eine Fläche F_3 des vorhin definirten Flächenbüschels, d. h. es kann stets eine Fläche dritten Grades gefunden werden, welche allen gestellten Bedingungen Genüge leistet. Also:

Eine beliebige Curve vierten Grades in der Ebene kann stets aufgefasst werden als der Durchschnitt des Tangentenkegels, welcher von einem Punkte einer Fläche dritten Grades aus an diese Fläche geht, mit der Ebene der Curve.

III.

Auch analytisch ergibt sich dieser Satz leicht:

Man wähle in der Ebene U der C_4 ein Coordinatensystem, dessen z-Axe eine der Doppeltangenten der C_4 ist, während die sonst willkürlichen beiden andern Axen durch die Berührungspunkte derselben gehen; die Gleichung der Curve ist dann von der Form:

$$z\,.\,\varphi_3(x, y, z) - x^2 y^2 = 0,$$

wo $\varphi_3(x, y, z)$ eine homogene Function der drei Veränderlichen x, y, z vom dritten Grade ist. Es sei ferner p ein Punkt, welcher ausserhalb U liegt. Durch ihn und die Coordinatenaxen x, y, z lege man Ebenen X, Y, Z, welche mit U ein Coordinatentetraeder bilden sollen, so ist die Fläche

$$F_3 = \varphi_3(x, y, z) + 4\,u\,x\,y + 4\,u^2 z = 0$$

eine solche, deren Tangentenkegel im Punkte p aus der U-Ebene die Curve C_4 ausschneidet.

In Folge der genauen Einsicht, welche man in die gegenseitige Lage der 27 Geraden einer Fläche dritten Grades hat, sind die Folgerungen, welche man aus diesem Satze ziehen kann, sehr zahlreich. Dieselben sollen späterhin in einer umfassenderen Darstellung den Mathematikern vorgelegt, und mit den Resultaten aus der Theorie der Doppeltangenten einer Curve vierten Grades in Zusammenhang gebracht werden, welche man den Herren Aronhold, Clebsch, Hesse, Roch, Salmon und Steiner verdankt.

Hier mögen nur zur Erläuterung einige Beispiele angeführt werden, die zum grössten Theil auf bekannte Resultate führen.

IV.

Legt man durch einen beliebigen Punkt p und die sämmtlichen Geraden eines Hyperboloides H_2 Ebenen, so sind dieselben Tangentialebenen des H_2 und zugleich Tangentialebenen des von p aus dem Hyperboloide umschriebenen Tangentenkegels zweiten Grades. Eine beliebige Ebene wird also von den Tangentialebenen des Kegels in Tangenten eines und desselben Kegelschnittes getroffen, d. h.: Projicirt man beliebig viele Gerade eines Hyperboloids auf einer Ebene, so sind die Projectionen Tangenten eines bestimmten Kegelschnittes.*)

Bekanntlich lassen sich von den 27 Geraden einer Oberfläche dritten Grades F_3 in 360 verschiedenen Weisen je sechs zusammenstellen, die auf einem Hyperboloide liegen; werden demnach sechs solche Geraden von einem Punkte der F_3 aus auf eine beliebige Ebene projicirt, so werden sie zu sechs Tangenten eines Kegelschnittes. Es ergibt sich also unter Berücksichtigung des in II. bewiesenen Satzes, dass die Doppeltangenten einer Curve vierten Grades sich auf verschiedene Weisen so gruppiren lassen, dass sechs von ihnen einen Kegelschnitt berühren. Diess ist ein Resultat, welches bereits von den Herren Aronhold und Hesse bemerkt worden ist, und letzterer gibt zugleich an, dass $28 . 36 = 1008$ derartige Gruppirungen möglich seien. Dass in der That die 360 Kegelschnitte, welche sich unmittelbar ergeben (wenn man die mit der C_4 in Beziehung gesetzte F_3 construirt, indem man von einer bestimmten der 28 Doppeltangenten ausgeht), nicht die einzigen sind, welche sechs derselben berühren, versteht sich von selbst, da ja jede der Doppeltangenten als Fundamentaltangente gezählt wer-

*) Diess ist nur der speziellste Fall eines allgemeinern Satzes, welcher lautet: Projicirt man die sämmtlichen Erzeugenden einer Regelfläche n^{ten} Grades von einem beliebigen Punkte aus auf eine willkürliche Ebene, so umhüllen die Projectionen eine Curve n^{ter} Klasse.

den kann. Man würde so eigentlich 28 . 360 Kegelschnitte erhalten, aber die Zahl des Herrn Hesse scheint darauf hinzudeuten, dass jeder derselben durch 10 verschiedene Constructionen der Hülfsfläche dritten Grades erzeugt wird.

V.

Seien g_1, g_2, g_3 drei Geraden einer Fläche dritten Grades F_3, die zusammen ein ebenes Dreiseit bilden, sei ferner p ein Punkt der Fläche, so werden, wie in I. auseinandergesetzt worden ist, die Ebenen pg_1, pg_2, pg_3 die F_3 ausser in $g_1 g_2 g_3$ noch resp. in drei Kegelschnitten K_1, K_2, K_3 treffen. Heissen die Schnittpunkte von g_1 und K_1: r_1 und s_1, von g_2 und K_2: r_2 und s_2, von g_3 und K_3: r_3 und s_3, so befinden sich die sechs Punkte r und s auf der ersten Polaren F_2 des Punktes p in Bezug auf F_3, zugleich aber gehören sie der Ebene des Dreiecks $g_1 g_2 g_3$ an, also liegen sie in einem Kegelschnitte K. Die Fläche zweiten Grades F_2 enthält noch die beiden Haupttangenten t_1 und t_2 der F_3 in p, also trifft K sowohl t_1 als t_2.

Geht man jetzt in der bereits angewendeten Weise von der Fläche dritten Grades F_3 zur Curve vierten Grades C_4 über, so erhält man aus $g_1 g_2 g_3$ drei Doppeltangenten g_1', g_2', g_3' der C_4, deren Berührungspunkte die Projectionen r', s' der r und s sind, während t_1 und t_2 zu Berührungspunkten t_1' und t_2' einer andern Doppeltangente γ' werden. Der Kegelschnitt K verwandelt sich durch Projection in einen andern Kegelschnitt K', so dass also die C_4 nothwendigerweise in g_1', g_2', g_3', γ' vier Doppeltangenten besitzt, deren acht Berührungspunkte in einem Kegelschnitte liegen.

Die Doppeltangente γ' bestimmt mit jedem der 45 Dreiecke der F_3 einen Kegelschnitt K', und da an Stelle von γ' jede der andern 28 Doppeltangenten treten kann, so wird man 28 . 45 Kegelschnitte bekommen, von denen jeder die Berührungspunkte von vier Doppeltangenten enthält. Aber jeder Kegelschnitt wird bei vier Doppeltangenten gezählt, so dass nur $\frac{28 \, . \, 45}{4} = 315$ von einander verschiedene Kegelschnitte K' existiren, wie bereits die Herren Hesse, Salmon und Steiner angegeben haben.

VI.

Die Beziehungen der 28 Doppeltangenten einer Curve vierten Grades zerfallen in drei Gruppen:

1) in Sätze, welche die Doppeltangenten selbst,
2) in solche, welche die Berührungspunkte und
3) in solche, welche ihre gegenseitigen Schnittpunkte betreffen.

Die beiden ersten Gruppen von Sätzen stimmen darin überein, dass bei ihrer Ableitung vermittelst der Hülfsfläche dritten Grades nur eine einzige Doppeltangente (resp. ihre Berührungspunkte) eine Ausnahmestellung einnimmt, während alle 27 übrigen (resp. ihre Berührungspunkte) vollkommen gleichberechtigt nebeneinander stehen.

Anders verhält es sich aber mit der dritten Gruppe von Sätzen. Zunächst wird durch die Hülfsfläche dritten Grades F_3 auch hier eine der Doppeltangenten (nach unserer früheren Bezeichnung, die festgehalten werden soll, γ') mit den auf ihr befindlichen 27 Schnittpunkten u' isolirt. Diese Schnittpunkte u' sind die Projectionen der Punkte u, welche die 27 Geraden der F_3 mit der Tangentialebene E des Punktes p gemein haben, auf die Ebene der vorgelegten Curve C_4. Die Schnittpunkte der übrig bleibenden 27 Doppeltangenten zerfallen in zwei verschiedene Gruppen, je nachdem sie nämlich durch die Projectionen von zwei sich schneidenden Geraden der F_3, oder aber durch die Projectionen von zwei windschiefen Geraden derselben erzeugt werden. Von den Schnittpunkten der ersten Art, die mit v' bezeichnet werden sollen und welche die Projectionen der Schnittpunkte v der 27 Geraden sind, giebt es 135; von denen der zweiten Art, die man mit w' bezeichne, 216. Die gegenseitigen Schnittpunkte der 28 Doppeltangenten bestehen demnach aus 27 u' + 135 v' + 216 w', was zusammen 378 macht, wie es sein muss. Die Punkte u' liegen nach den soeben gemachten Bestimmungen auf einer und derselben Doppeltangente, die kein v' und kein w' enthält, auf jeder anderen Doppeltangente befinden sich 10 v' und 16 w', so wie natürlich auch ein u'.

VII.

Legt man durch eine Gerade g der F_3 alle möglichen Ebenen, so trifft jede derselben die F_3 ausser in g noch in einem Kegelschnitte, welcher mit g ein Punktenpaar gemein hat. Alle die so erhaltenen Punktenpaare bilden ein Punktsystem, dessen Doppelpunkte oder Asymptotenpunkte a_1 und a_2 sich durch die beiden Kegelschnitte ergeben, welche g berühren. Unter den Kegelschnitten befinden sich fünf, die in Geradenpaare zerfallen und welche aus g die auf ihr befindlichen 10 Punkte v ausschneiden. Diese 10 Punkte lassen sich also in fünf Punktenpaare ordnen, die demselben Punktsysteme angehören; diesem Punktsysteme gehören zudem noch die früher mit r und s bezeichneten (durch den Kegelschnitt der Ebene pg erzeugten) Punkte als ein Punktenpaar an. Daraus folgt für die Curve vierten Grades der Satz: Unter den 27 Punkten, in welchen eine Doppeltangente der Curve vierten Grades von den übrigen geschnitten wird, giebt es 10, die Punkte v', welche fünf Punktenpaare eines Punktsystems bilden, dem auch ihre Berührungspunkte r' und s' als ein Punktenpaar zugehören. Die Doppelpunkte dieses Punktsystems mögen als Projectionen von a_1 und a_2 mit a_1' und a_2' bezeichnet werden.

Man kennt ferner folgenden von Steiner angegebenen Satz aus der Theorie der Flächen dritten Grades: die 135 Schnittpunkte v der 27 Geraden g liegen zu drei und drei in 720 Geraden k, welche sich zu drei und drei in 240 neuen Punkten T treffen. Durch jeden Schnittpunkt v gehen je 16 Gerade k, wovon jede noch durch zwei andere Schnittpunkte, etwa v_1 und v_2 (statt v) geht. Nimmt man in jeder derselben einen vierten Punkt l, so dass $v\,v_1\,l\,v_2$ harmonisch sind, so liegen die 16 Punkte l zweimal zu vier und vier in vier Geraden, und diese acht Geraden sammt den zwei Geraden g, deren Schnitt jener erste Punkt v ist, liegen in einem Hyperboloid.

Diess giebt für die Curven vierten Grades in Ergänzung eines von Herrn Aronhold herrührenden Theorems folgende merkwürdige Eigenschaften der 135 mit v' bezeichneten Schnittpunkte ihrer Doppeltangenten g': die 135 Schnittpunkte v' liegen zu drei und drei in 720 Geraden k', welche sich zu drei und drei in 240 neuen Punkten T' treffen. Durch jeden Schnittpunkt v' gehen je 16 Gerade k', wovon jede noch durch zwei andere Schnittpunkte v_1' und v_2' (statt v) geht. Nimmt man in jeder derselben einen vierten Punkt l', so dass $v'\ v_1'\ l'\ v_2'$ harmonisch sind, so liegen die 16 Punkte l' zweimal zu vier und vier in vier Geraden, und diese acht Geraden sammt den zwei Doppeltangenten g', deren Schnitt jener erste Punkt v' ist, sind 10 Tangenten eines und desselben Kegelschnittes.

In der Ebene eines der 45 Dreiecke der F_3 liegen 16 Punkte k (welche bekanntlich die Steinerschen Triederscheitel sind). Diese Punkte k liegen allemal in einer Curve vierten Grades (da sämmtliche Triederscheitel auf der Kernfläche der F_3 liegen), welche die Seiten des Dreiecks zu Doppeltangenten hat und zwar dieselben in ihren Asymptotenpunkten berührt.

Man hat also folgenden Satz:

Von den 28 Doppeltangenten einer Curve vierten Grades lassen sich 27 beliebige auf 45 verschiedene Weisen derart zu dreien gruppiren, dass eine solche Gruppe aus drei Doppeltangenten einer neuen Curve vierten Grades besteht, welche durch 16 der vorhin mit k' bezeichneten Punkte geht und welche die drei angegebenen Doppeltangenten jede in den ihr zugehörigen Punkten a_1' und a_2' berührt.

VIII.

Auf jeder Geraden der F_3 befindet sich, wie bereits erwähnt ist, ein Punktsystem; drei von diesen Punktsystemen, die in derselben Ebene liegen, haben die Eigenschaft, dass wenn man auf jedem von ihnen ein Punktenpaar herausgreift, die sechs so erhaltenen Punkte einem und demselben Kegelschnitte angehören. In einer der 45 Dreiecksebenen befinden sich nun auf jeder der drei ihr angehörigen Geraden fünf von den r gebildete Punktenpaare, die zu 64 eigentlichen Kegelschnitten Veranlassung geben, so dass man also bei einer Fläche dritten Grades $45 \cdot 64 = 2880$ Kegelschnitte angeben kann, von denen jeder sechs der 135 Schnittpunkte r ihrer 27 Geraden g enthält. Es ergibt sich daraus sofort, dass es in mannigfacher Weise möglich sein muss, die 378 Schnittpunkte der 28 Doppeltangenten einer Curve vierten Grades derart zu gruppiren, dass je sechs von ihnen in einem Kegelschnitte liegen.

Allerdings sind hier und im Vorigen von den 378 Schnittpunkten, zu welchen die 28 Doppeltangenten der Curve vierten Grades Veranlassung geben, immer nur die 135 r' in Betracht gezogen worden, aber es leuchtet unmittelbar ein, dass durch die Veränderung der Fundamentaldoppeltangente γ' die auf dieser befindlichen 27 Punkte u' zu neuen Punkten $u' + 10\, v' + 16\, w'$ werden, und demnach die 135 r' durch jede derartige Veränderung wenigstens theilweise durch andere der Schnittpunkte sich ersetzen lassen.

Den bis jetzt gegebenen Beispielen über die Anwendung der in diesem Aufsatze auseinandergesetzten Methode sei zum Schlusse noch eines angefügt, welches zeigt, wie man auch aus der Willkürlichkeit der Hülfsconstructionen neue Sätze ziehen kann. Man halte zu dem Ende die Fläche F_3 und die Ebene $\mathfrak{E}$, in welcher sich die C_4 befinden soll, fest, während sich der Punkt p beliebig auf der F_3 bewegen möge. Es ergibt dann jede Lage des Punktes p eine Curve C_4, so dass in $\mathfrak{E}$ doppelt unendlich viele Curven vierten Grades entstehen. Die Doppeltangente γ' wird in $\mathfrak{E}$ jede beliebige Lage annehmen können und auch die durch die Geraden der F_3 erzeugten Doppeltangenten g' werden sich verändern; aber jede von diesen wird durch den Punkt gehen müssen, in welchem die ihr zugehörige Gerade g die Ebene $\mathfrak{E}$ schneidet, d. h.:

Auf einer ebenen Curve dritten Grades C_3 lassen sich immer 27 gewisse Punkte π so wählen, dass 45mal je drei von ihnen in einer Geraden und 360mal sechs in einem eigentlichen Kegelschnitte liegen. Es gibt dann doppelt unendlich viele Curven vierten Grades, welche die C_3 in sechs Punkten eines Kegelschnittes einfach berühren und welche die Eigenschaft haben, dass 27 der Doppeltangenten irgend einer unter denselben durch die Punkte π gehen. Irgend eine beliebige Gerade der Ebene ist die 28ste Doppeltangente von 12 dieser Curven.

Zürich, den 1. October 1868.

Mittheilung über den III. Band von Gauss' Werken.

Redigirt von Ernst Schering.

Herausgegeben von der königl. Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen

Dieser dritte Band enthält, wie das von mir im Jahre 1860 aufgestellte Programm bestimmte, Gauss' Arbeiten aus dem Gebiete der allgemeinen Analysis und zwar aus der Theorie der algebraischen Gleichungen, der hypergeometrischen Reihe, der Interpolation und der elliptischen Functionen. Dem letztern Abschnitte habe ich die Untersuchung des Pentagramma Mirificum angeschlossen, die eine Anwendung der Fünftheilung der elliptischen Functionen enthält; im Programm hatte ich sie den geometrischen Untersuchungen des vierten Bandes eingereiht, aber neu eingetretene Umstände bedingen eine erhebliche Erweiterung bei der Aufnahme von Gauss' Arbeiten über Gradmessung und damit eine Verstärkung des vierten Bandes.

Das verspätete Erscheinen des dritten Bandes ist durch die andauernde Krankheit und den bedauernswerthen allzufrühen Tod Riemann's veranlasst. Von ihm hatte die k. Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen die Redaction des Nachlasses über die elliptischen Functionen gewünscht, leider hat er weder eine schriftliche noch mündliche Mittheilung aus diesen seinen Studien hinterlassen.

Ueber die von mir bei der Redaction der Gauss'schen Werke befolgten Grundsätze habe ich in den am Ende des Bandes beigefügten Bemerkungen Rechenschaft abgelegt. Dort sind auch die aus dem handschriftlichen Nachlasse sich ergebenden historischen Notizen von Gauss' Arbeiten zusammengestellt; eine ausführliche geschichtliche Darstellung seiner gesammten wissenschaftlichen Thätigkeit behalte ich mir für eine besondere Schrift vor.

Bei der Aufsuchung der verschiedenen Methoden, die Gauss bei seiner Behandlung der elliptischen Functionen vermuthlich angewandt haben könnte, sind mir einige neue Seiten dieses fruchtbaren Gebiets der Analysis entgegengetreten, die mir nicht ohne Interesse zu sein scheinen.

Dem eng begrenzten Umfange dieser Mittheilung mag nur folgende Notiz über die Dreitheilung der nach Dirichlet's Vorschlage mit dem Namen der Jacobi'schen Functionen zu bezeichnenden Reihen eingefügt werden. Für den Werth des einen Arguments, welcher die eine der vier zusammengehörigen Functionen verschwinden lässt, stellt Gauss die drei andern Functionen in der Form der Reihen

$$1 + 2x + 2x^4 + 2x^9 + + \cdots$$
$$1 - 2x + 2x^4 - 2x^9 + - \cdots$$
$$2x^{\frac{1}{4}} + 2x^{\frac{9}{4}} + 2x^{\frac{25}{4}} + + \cdots$$

dar und bezeichnet sie folgeweise mit p, q, r, ferner bezeichnet er die Reihen, die aus jenen entstehen, indem man x^3 statt x setzt, mit P, Q, R. Aus den von Gauss und Jacobi gefundenen algebraischen Gleichungen zwischen diesen sechs Functionen lassen sich unter anderen auch die folgenden ableiten:

$$0 = +\sqrt{\frac{P^3}{p}} - \sqrt{\frac{Q^3}{q}} + \sqrt{\frac{R^3}{r}}$$
$$0 = +\sqrt{\frac{p^3}{P}} + \sqrt{\frac{q^3}{Q}} - \sqrt{\frac{r^3}{R}}$$

$$0 = -\sqrt{\frac{p^3}{P}} + \sqrt{\frac{Q^3}{q}} + \sqrt{\frac{R^3}{r}}$$
$$0 = -\sqrt{\frac{P^3}{p}} + \sqrt{\frac{q^3}{Q}} + \sqrt{\frac{R^3}{r}}$$
$$0 = +\sqrt{\frac{P^3}{p}} + \sqrt{\frac{Q^3}{q}} - \sqrt{\frac{r^3}{R}}$$

$$0 = -3\sqrt{\frac{P^3}{p}} + \sqrt{\frac{q^3}{Q}} + \sqrt{\frac{r^3}{R}}$$
$$0 = +\sqrt{\frac{p^3}{P}} - 3\sqrt{\frac{Q^3}{q}} + \sqrt{\frac{r^3}{R}}$$
$$0 = -\sqrt{\frac{p^3}{P}} + \sqrt{\frac{q^3}{Q}} + 3\sqrt{\frac{R^3}{r}}.$$

Göttingen, den 6. December 1868.

Ankündigung des Erscheinens des III. Bandes von **Gauss' Werken**, redigirt von Ernst Schering, herausgegeben von der K. Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen.

Karl Friedrich Gauss' Werke:

Band I. **Disquisitiones Arithmeticae.** Die Exemplare auf Druckpapier sind augenblicklich vergriffen, ein neuer Abdruck ist unter der Presse, bis zu dessen Erscheinen können Exemplare von Band I nur auf Schreibpapier zugleich mit je 1 Exemplar von Band I, II u. V für zusammen 25 Thaler Cour. unter der Bedingung der Entnahme eines vollständigen Exemplares der Werke auf Schreibpapier bezogen werden.

Band II. **Höhere Arithmetik.** Das Exemplar auf Druckpapier kostet 4 Thaler Cour.

Band III. **Analysis.** Das Exemplar auf Druckpapier kostet 4 Thaler Cour.

Band IV. **Wahrscheinlichkeits-Rechnung und Geometrie** wird binnen Kurzem erscheinen.

Band V. **Mathematische Physik.** Das Exemplar auf Druckpapier kostet 5 Thaler Cour.

Band VI. **Astronomie** wird im nächsten Jahre erscheinen.

Von den Exemplaren auf Druckpapier können die Bände einzeln bezogen werden.

Die Abgabe der erschienenen Bände geschieht gegen Franco-Einzahlung vorbemerkter Preise von dem Rendanten der Göttinger Universitäts-Casse, Herrn Universitäts-Rath Rose. Uebersendungen an auswärtige Besteller erfolgen auf deren Kosten und beim Mangel anderweitiger Bestimmung durch die Post unter Werthangabe eventuell unter Entnahme des Preises mittelst Postvorschusses.

Bei Bestellungen durch Buchhandlungen sind die Bestellzettel vorzulegen oder die Namen der betreffenden Subscribenten anzuzeigen.

INHALT.

MATHEMATISCHE ANNALEN

HERAUSGEGEBEN

VON

A. CLEBSCH UND C. NEUMANN,
PROFESSOR IN GÖTTINGEN. PROFESSOR IN LEIPZIG.

I. Band. 2. Heft.

LEIPZIG,
DRUCK UND VERLAG VON B. G. TEUBNER.
1869.

Mittheilungen

der Verlagsbuchhandlung

B. G. Teubner in Leipzig.

Diese Mittheilungen, von denen in der Regel alle zwei Monate eine Nummer erscheint, sollen das Publikum von den erschienenen, unter der Presse befindlichen und vorbereiteten Unternehmungen des Teubner'schen Verlags in Kenntnis setzen. Dieselben sind in allen Buchhandlungen gratis zu haben, werden auf Wunsch aber auch direct franco übersandt.

Auszug aus No. 1 von 1869.

Demnächst erscheint:

Einleitung in die synthetische Geometrie. Ein Leitfaden beim Unterrichte an höheren Realschulen und Gymnasien von Dr. C. F. Geiser, Privatdocent am schweiz. Polytechnikum. gr. 8.

Um bereits auf der Schule die systematische Entwicklung der Methoden vorzubereiten, welche seit Steiner's Arbeiten die synthetische Geometrie beherrschen, kann man zwei verschiedene Wege einschlagen, die beide gleich geeignet sind, den Uebergang von der Euklidischen zu der gegenwärtigen Geometrie zu vermitteln. Will man sich nämlich im Unterrichte auf planimetrische Betrachtungen beschränken, so wird die elementare, an die Lehre vom geometrischen Orte anknüpfende Behandlung der Kegelschnitte vollkommen den genannten Zweck erfüllen; wenn aber auf die fortwährende Inanspruchnahme und Ausbildung des räumlichen Anschauungsvermögens der Schüler ein wesentliches Gewicht gelegt wird, so erscheint es angemessen, die Theorie der Kegelschnitte nur in kurzen Zügen zu behandeln, dafür aber ein reichhaltiges Material aus der Stereometrie zum Vortrage zu bringen.

Die angezeigte kleine Schrift sucht vorzüglich dem zweiten Gesichtspunkte gerecht zu werden und bringt daher als ersten Theil unter dem Titel: „Transversalentheorie" die elementaren Sätze über die merkwürdigen Punkte des Dreiecks, dann, wo eine solche sich einfach darbietet, die Ausdehnung der abgeleiteten Resultate auf das Tetraeder, woran sich die Entwicklung des Begriffes der vollständigen Figuren in der Ebene und im Raume schliesst. Im Weitern folgen diesen Erörterungen eine Theorie der harmonischen und involutorischen Gebilde, so wie einzelne Beispiele von den linearen Beziehungen. Der zweite Theil handelt von „Kreis und Kegel" und giebt die Theorie der Potenz und der Aehnlichkeitspunkte, sowie die zugehörigen Polareigenschaften, daran reihen sich als Anwendungen die Berührungsprobleme, während ein Schlusskapitel, welches einer elementaren Behandlung des Princips der reciproken Radien gewidmet ist, einen Ausblick auf weitergehende Untersuchungen eröffnet.

Der Verfasser hofft mit dieser „Einleitung in die synthetische Geometrie" eine Ergänzung zu dem ersten Theile der gedruckten Steiner'schen Vorlesungen in einem Sinne zu geben, welcher dieselbe zur Grundlage des Unterrichts an den obern Klassen von Realschulen und Gymnasien geeignet macht. Die Darstellung ist derart, dass sie sowohl Lehrern als Schülern mannigfache Anregung gewähren wird.

Commentaire sur Galois

par

M. Camille Jordan à Paris.

1.

Préliminaires.

On donne le nom de substitution à l'opération par laquelle on intervertit un certain nombre de choses, que l'on peut supposer représentées par des lettres α, β, γ, ...

Le nombre des substitutions distinctes entre n lettres est $1.2.3\ldots n$, en y comprenant la substitution dite unité, qui laisse chaque lettre à sa place.

Le produit ab de deux substitutions a et b est la substitution résultante obtenue en effectuant d'abord la substitution a, puis la substitution b; a^{-1} est la substitution qui, multipliée par a, reproduit l'unité.

Un système de substitutions forme un groupe, si le produit de deux substitutions quelconques du système appartient lui-même au système. — Les diverses substitutions obtenues en opérant successivement tant qu'on voudra, et dans un ordre quelconque certaines substitutions données $a, b, c, \ldots$ forment un groupe, dérivé de $a, b, c, \ldots$; nous le désignerons par le symbole $(a, b, c, \ldots)$.

L'ordre d'un groupe est le nombre de ses substitutions: son degré est le nombre des lettres soumises à ses substitutions.

Un groupe de substitutions entre les lettres α, β, γ, ... est dit transitif si ses substitutions permettent d'amener l'une quelconque de ces lettres à la place primitivement occupée par l'une d'elles, α.

Les puissances successives d'une substitution quelconque a sont toutes distinctes, jusqu'à l'une d'elles a^λ qui se réduit à l'unité; au delà elles se reproduisent périodiquement. — Donc tout groupe contient la substitution unité; et tout groupe qui contient a contiendra $a^{\lambda-1} = a^{-1}$.

La substitution $b^{-1}ab$ est dite la transformée de la substitution a par la substitution b. Le groupe $(b^{-1}ab, b^{-1}a_1b, \ldots)$ est le groupe transformé du groupe $(a, a_1, \ldots)$ par b. S'il se confond avec $(a, a_1, \ldots)$ on dira que ce groupe est permutable à b.

Un groupe en contient un autre, s'il contient toutes ses substitutions.

Un groupe est dit aussi général que possible parmi ceux qui satisfont à certaines conditions, s'il n'est contenu dans aucun autre groupe, satisfaisant aux mêmes conditions.

Un groupe est simple, s'il ne contient aucun autre groupe auquel ses substitutions soient permutables (sauf celui qui est formé de la seul substitution 1): composé dans le cas contraire.

2.

Théorème. Si un groupe H est contenu dans un autre groupe G, son ordre n divise N, ordre de G.

Soient en effet $a_0, a_1, a_2, \ldots$ les substitutions de H. Si G contient quelque autre substitution b, il contiendra les substitutions $a_0 b, a_1 b, a_2 b, \ldots$, évidemment différentes les unes des autres, et qui en outre diffèrent des précédentes: car si l'on avait une égalité telle que $a_1 b = a_2$, $b = a_1^{-1} a_2$ ferait partie de H, contre l'hypothèse. Donc G contient au moins les $2n$ substitutions ci-dessus écrites. S'il en contient d'autres, soit c l'une d'elles: G contiendra $a_0 c, a_1 c, a_2 c, \ldots$ substitutions différentes entre elles, et distinctes des précédentes: car si l'on avait, par exemple $a_1 c = a_2 b$, $c = a_1^{-1} a_2 b$ appartiendrait à la suite $a_0 b, a_1 b, a_2 b, \ldots$, contre l'hypothèse. Donc l'ordre de G sera au moins égal à $3n$. On voit de même que s'il est $> 3n$, il sera au moins égal à $4n$, etc.

3.

Théorie des irrationnelles algébriques.

Le problème fondamental de la théorie des équations est le suivant:

„Etant donné une équation quelconque, $F(x) = 0$, trouver les fonctions de ses racines qui sont exprimables rationnellement en fonction de ses coefficients et de certaines irrationnelles données, que l'on dira adjointes à l'équation.“

On considérera comme rationnelle toute quantité ainsi exprimable: comme irréductible, toute équation dont le premier membre est indécomposable en facteurs rationnels.

4.

Lemme I^er^. Si l'une des racines d'une équation irréductible $f(x) = 0$ satisfait à une équation à coefficients rationnels $\varphi(x) = 0$, toutes y satisfont.

Car le plus grand commun diviseur $\psi(x)$ entre $\varphi(x)$ et $f(x)$ est rationnel, et divise $f(x)$; ce qui est impossible, s'il n'est pas égal à $f(x)$, à un facteur constant près.

Corollaire. Si toutes les racines de l'équation $\varphi(x) = 0$ satisfont à l'équation $f(x) = 0$, $\varphi(x)$ sera une puissance exacte de $f(x)$, à un facteur constant près.

Car on a $\varphi(x) = f(x)\,\varphi_1(x)$, d'après ce qui précède. Si $\varphi_1(x)$ ne se réduit pas à une constante, on verra de même

$$\varphi_1(x) = f(x)\,\varphi_2(x), \text{ etc.}$$

5.

Lemme II. Soit $F(x) = 0$ une équation dont les racines $x_1, \ldots, x_m$ soient toutes inégales. On peut déterminer une fonction V de ces racines, telle que les $1.2.3\ldots m$ expressions obtenues en y permutant les racines soient distinctes en valeur numérique.

Soit par exemple

$$V = M_1 x_1 + M_2 x_2 + \ldots$$

$M_1, M_2, \ldots$ étant des coefficients indéterminés. En égalant entre elles deux quelconques des fonctions qui dérivent de V par des substitutions entre les racines $x_1, x_2, \ldots$ on aurait une équation de condition entre $M_1, M_2, \ldots$. Ces équations sont en nombre limité; d'ailleurs aucune d'elle n'est identique: car les coefficients de $M_1, M_2, \ldots$ dans chacune d'elles sont les différences des racines $x_1, x_2, \ldots$ qui, par hypothèse, ne sont pas nulles. On pourra donc choisir $M_1, M_2, \ldots$ de manière à ne satisfaire à aucune d'elles.

Nous désignerons par V_1 l'une des valeurs de la fonction V, choisie arbitrairement; par $V_a, V_b, \ldots$ ce qu'elle devient lorsque on y effectue entre les racines $x_1, x_2, \ldots$ les substitutions respectivement représentées par $a, b, \ldots$.

Corollaire. Soit G un groupe quelconque de substitutions entre les racines $x_1, x_2, \ldots$. On peut former une fonction W de ces racines, dont la valeur numérique, invariable par les substitutions de G, varie par toute autre substitution.

Soient en effet $1, a, b, \ldots$ les substitutions de G. Posons:

$$W_1 = (X - V_1)(X - V_a)(X - V_b)\ldots$$

X étant une constante indéterminée. Une substitution de G, telle que a, transforme W_1 en $(X - V_a)(X - V_{a^2})(X - V_{ba})\ldots = W_a$. Mais les substitutions $1, a, b, \ldots$ formant un groupe, se confondent à l'ordre près avec $a, a^2, ba, \ldots$. Les facteurs binômes de W_a sont donc à l'ordre près les mêmes que ceux de W_1. Donc $W_a = W_1$.

Au contraire, soit α une substitution étrangère au groupe G: elle transforme W_1 en $W_\alpha = (X - V_\alpha)\ (X - V_{a\alpha})\ (X - V_{b\alpha})$. Les facteurs binômes de W_α différant de ceux de W_1, ces deux expressions ne sont pas identiques, et ne seraient numériquement égales que pour des valeurs particulières de X, qu'il sera aisé d'éviter.

6.

Lemme III. La fonction V étant choisie comme au lemme II, on pourra exprimer chacune des racines x_1, x_2, ... en fonction rationnelle de V et des coefficients de $F(x)$.

Soient en effet $V_1, \ldots, V_\mu$ les $\mu = 1.2.3 \ldots (m-1)$ valeurs que prend V lorsque on y permute les $m-1$ racines $x_2, \ldots, x_m$, sans changer la place de x_1. On pourra former une équation en V du degré μ: à savoir

$$(V - V_1)\ (V - V_2) \ldots (V - V_\mu) = 0$$

dont les racines V_1, V_2, ... V_μ seront toutes différentes, et dont les coefficients, fonctions symétriques des racines de l'équation

$$\frac{F(x)}{x - x_1} = 0$$

s'exprimeront rationnellement par les coefficients de cette équation, c'est à dire en fonction de x_1 et des coefficients de $F(x)$. Par suite l'équation

$$(V - V_1)\ (V - V_2) \ldots (V - V_\mu) = 0$$

pourra être mise sous la forme

$$f(V, x_1) = 0$$

f désignant une fonction rationnelle de V et de x_1.

Or cette équation est satisfaite pour $V = V_1$: on aura donc identiquement:

$$f(V_1, x_1) = 0$$

d'où il suit que l'équation

$$f(V_1, x) = 0$$

sera satisfaite pour $x = x_1$: donc les équations

$$F(x) = 0\ ,\ f(V_1, x) = 0$$

ont une racine commune, x_1. Mais elles n'en ont aucune autre: car si elles en avaient une autre, x_2, on aurait identiquement

$$f(V_1, x_2) = 0.$$

Par suite, l'équation

$$f(V, x_2) = 0$$

serait satisfaite pour $V = V_1$. Or cette équation se déduit de l'équation

$$f(V, x_1) = (V - V_1)\ (V - V_2) \ldots (V - V_\mu) = 0$$

en changeant x_1 et x_2 l'une dans l'autre. D'ailleurs par ce changement les quantités V_1, V_2, ..., V_μ se changent en d'autres

$$V_1', V_2' \dots, V_\mu'$$

toutes distinctes par hypothèse. Donc l'équation

$$f(V, x_2) = (V - V_1')(V - V_2') \dots (V - V_\mu') = 0$$

ne saurait avoir V_1 pour racine.

Les équations $F(x) = 0$ et $f(V_1, x) = 0$ n'ayant que la seule racine commune x_1, on déterminera aisément cette racine. Pour cela, on cherchera le plus grand commun diviseur entre $F(x)$ et $f(V_1, x)$, et l'on poussera l'opération jusqu'à ce qu'on obtienne un reste du 1er degré en x: ce reste, égalé à 0, donnera la valeur de x_1, exprimée en fonction rationnelle de V_1 et des coefficients de $F(x)$.

On pourrait opérer de même pour les autres racines, pour lesquelles on trouvera ainsi des expressions rationnelles, telles que

$$x_1 = \psi_1(V_1), \; x_2 = \psi_2(V_1), \dots .$$

7.

Théorème Ier. Soit $F(x) = 0$ une équation dont les racines $x_1, \dots, x_m$ sont toutes inégales, et à laquelle on peut supposer adjointes certaines quantités auxiliaires $y, z, \dots$. Il existera toujours entre les racines $x_1, \dots, x_m$ un groupe de substitutions tel, que toute fonction des racines, dont les substitutions de ce groupe n'altèrent pas la valeur numérique, soit rationnellement exprimable, et réciproquement.

Soit V_1 une fonction des racines, variable par toute substitution: si l'on désigne par $1, a, b, c, \dots$ toutes les substitutions possibles entre les racines, V_1 satisfera à l'équation

(1) $$(X - V_1)(X - V_a)(X - V_b)(X - V_c) \dots = 0$$

dont les coefficients, symétriques en $x_1, \dots, x_m$, sont rationnels. Si cette équation n'est pas irréductible, son premier membre se décomposera du moins en facteurs irréductibles. Soit

$$(X - V_1)(X - V_a)(X - V_b) \dots$$

celui de ces facteurs qui s'annule pour $X = V_1$: V_1 sera racine de l'équation irréductible

(2) $$(X - V_1)(X - V_a)(X - V_b) \dots = 0.$$

Cela posé, toute fonction φ des racines, invariable par les substitutions $1, a, b, \dots$ sera exprimable rationellement. En effet, chacune des racines $x_1, \dots, x_m$ étant une fonction rationnelle de V_1 et des coefficients de $F(x)$, φ sera elle-même une fonction rationnelle de V_1 et des coefficients. Soit donc $\psi(V_1)$ cette fonction. Elle doit rester invariable lorsque on y effectue entre les racines les substitutions $a, b, \ldots$. Mais ces substitutions changent V_1 respectivement en $V_a, V_b, \ldots$ et n'altèrent pas les coefficients de $F(x)$: on aura donc

$$\psi(V_1) = \psi(V_a) = \psi(V_b) = \ldots = \frac{1}{\mu}\Big(\psi(V_1) + \psi(V_a) + \psi(V_b) + \ldots\Big)$$

en désignant par μ le degré de l'équation (2). Cette dernière fonction, symétrique par rapport aux racines de l'équation (2), s'exprimera rationnellement par les coefficients de cette équation, qui sont eux-mêmes rationnels.

Réciproquement, toute fonction rationnellement exprimable sera invariable par les substitutions $1, a, b, \ldots$. Soit en effet $\varphi = \psi(V_1)$ une pareille fonction: V_1 satisfaisant à l'équation à coefficients rationnels

$$\varphi = \psi(V_1)$$

toutes les racines de l'équation irréductible (2) doivent y satisfaire. Donc la fonction $\psi(V_1)$ ne varie pas quand on y remplace successivement V_1 par $V_1, V_a, V_b, \ldots$ ce qui revient à opérer entre les racines $x_1, \ldots, x_m$ les substitutions $1, a, b, \ldots$.

Il reste à démontrer que les substitutions $1, a, b, \ldots$ forment un groupe, ce qui n'offre pas de difficulté:

Le premier membre de l'équation (2) étant une fonction de l'indéterminée X, à coefficients rationnels, ne devra varier par aucune des substitutions $1, a, b, \ldots$. Effectuons y par exemple la substitution a; il devient:

$$(X - V_a)(X - V_{a^2})(X - V_{ba}) \ldots.$$

Pour que ce nouveau polynôme soit identique à

$$(X - V_1)(X - V_a)(X - V_b) \ldots,$$

quelque soit X, il faut nécessairement que les quantités

$$V_a, V_{a^2}, V_{ba}, \ldots$$

ne soient autres que les quantités $V, V_a, V_b, \ldots$ à l'ordre près. Mais par hypothèse, deux substitutions distinctes donnent pour la fonction V des valeurs essentiellement différentes. Il faudra donc que $a, a^2, ba, \ldots$ soient identiques à l'ordre près à $1, a, b, \ldots$. Donc a et b étant deux substitutions quelconques de la suite $1, a, b, \ldots, ba$ appartiendra à cette suite. Donc les substitutions de cette suite forment un groupe.

Le groupe défini par le théorème précédent peut être appelé le groupe de l'équation relatif aux quantités adjointes $y, z, \ldots$. Le nombre de substitutions de ce groupe pourra varier suivant la nature des quantités adjointes. Parmi tous les groupes que l'on peut ainsi obtenir, il en est un G particulièrement remarquable, et que nous pourrons appeler d'une manière absolue le groupe de l'équation. C'est celui qu'on obtient en supposant qu'il n'y ait aucune quantité adjointe.

Ce groupe contient tous les autres: car soit H le groupe que l'on obtient en adjoignant à l'équation des quantités $y, z, \ldots$ arbitrairement choisies. Une fonction invariable par les substitutions de G et variable par toute autre substitution est rationnellement exprimable, avant, et a fortiori après l'adjonction de $y, z, \ldots$. Donc elle sera invariable par toutes les substitutions de H: donc toutes ces substitutions font partie de celles de G.

8.

Corollaire. Si deux fonctions φ_1, ψ_1 des racines de la proposée sont numériquement égales, la même égalité subsistera entre les fonctions φ_a, ψ_a, obtenues en effectuant dans chacune d'elles l'une quelconque des substitutions de G.

Car la fonction $\varphi_1 - \psi_1$ étant nulle, est exprimable rationnellement; donc elle n'est pas altérée par la substitution a: donc

$$\varphi_a - \psi_a = 0.$$

9.

Théorème II. Toute équation irréductible $F(x)=0$ a son groupe transitif, et réciproquement.

Car supposons que le groupe G de l'équation ne soit pas transitif: soient x_1 l'une quelconque des racines de l'équation; $x_1, \ldots, x_m$ les racines avec lesquelles elle est permutée par les substitutions de G: ces substitutions remplacent les racines $x_1, \ldots, x_m$ les unes par les autres: car si l'une d'elles, a, remplace x_m, par exemple par x_ϱ, soit b une substitution de G qui remplace x_1 par x_m: G contient la substitution ba qui remplace x_1 par x_ϱ: donc x_ϱ fait partie de la suite $x_1, \ldots, x_m$. Les substitutions de G n'altèrent donc pas les fonctions symétriques de $x_1, \ldots, x_m$: donc ces fonctions sont rationnelles, et $F(x)$ admet le diviseur rationnel $(x-x_1)\ldots(x-x_m)$.

Réciproquement, supposons G transitif: $F(x)$ ne peut admettre de diviseur rationnel tel que $(x-x_1)\ldots(x-x_m)$. Car soit x_{m+1} une racine de l'équation, outre que $x_1, \ldots, x_m$: G contient une substitution qui remplace x par x_{m+1}: elle transformera $(x-x_1)\ldots(x-x_m)$ en un nouveau produit différent de celui-là, puisque il contient le facteur $x-x_{m+1}$. Donc le produit $(x-x_1)\ldots(x-x_m)$ n'étant pas invariable par les substitutions de G, est irrationnel.

10.

Théorème III. L'ordre du groupe d'une équation irréductible de degré ν, dont les racines sont des fonctions rationnelles d'une seule d'entre elles, x_1, est égal à ν.

Car soient $x_1, \ldots, x_\nu$ les racines de l'équation, V_1 une fonction de ces racines, variable par toute substitution: elle pourra s'exprimer en fonction de x_1 seulement. Soit $V_1 = f(x_1)$: cette fonction satisfait à l'équation

$$[V - f(x_1)] \ldots [V - f(x_\nu)] = 0,$$

dont les coefficients, symétriques en $x_1, \ldots, x_\nu$, sont rationnels.

Donc l'ordre du groupe de l'équation (lequel est le degré de l'équation irreductible dont V_1 est racine) ne peut être supérieur à ν. Mais d'autre part ce groupe est transitif: donc il contient au moins, outre la substitution 1, $\nu - 1$ autres substitutions, remplaçant respectivement x_1 par $x_2, \ldots, x_\nu$. Donc cet ordre est précisément ν.

11.

Le groupe d'une équation étant connu, on peut se proposer de le diminuer progressivement par l'adjonction successive de quantités auxiliaires. A chacune de ces adjonctions deux cas pourront se présenter. 1°. Si l'équation irréductible (2) reste irréductible, il est clair que le groupe ne subira aucun changement. Si au contraire, grâce à l'adjonction nouvelle, le polynôme $(X - V_1)(X - V_a)(X - V_b)\ldots$ se décompose en facteurs plus simples $(X - V_1)(X - V_a)\ldots$, $(X - V_b)\ldots, \ldots$ on obtiendra un nouveau groupe H, moindre que G, et formé des seules substitutions $1, a, \ldots$.

Nous examinerons d'abord ce qui arrive lorsque on adjoint à l'équation proposée certaines fonctions de ses racines; puis nous passerons au cas où les quantités adjointes seraient des fonctions des racines d'autres équations.

12.

Théorème IV. Soient G le groupe d'une équation $F(x) = 0$, φ_1 une fonction rationnelle quelconque de ses racines: 1°. Celles des substitutions de G qui n'altèrent pas la valeur numérique de φ_1 forment un groupe H_1: 2°. L'adjonction de la valeur de φ_1 réduira le groupe de l'équation précisément à H_1.

1°. Soient en effet a, a_1 deux substitutions de G qui n'altèrent pas φ_1; on aura

$$\varphi_a = \varphi_1 \ , \ \varphi_{a_1} = \varphi_1.$$

De la dernière égalité on déduit (8) la suivante

$$\varphi_{a_1 a} = \varphi_a = \varphi_1.$$

Ainsi la substitution $a_1 a$ n'altérera pas la fonction φ_1, ce qui démontre la première de nos propositions.

2°. Adjoignons la valeur de φ_1 à l'équation. Après cette opération, le groupe réduit de l'équation ne peut contenir que des substitutions qui faisaient partie du groupe primitif G; d'ailleurs il ne peut contenir que des substitutions qui n'altèrent pas φ_1, la valeur de cette quantité étant supposée rationnellement connue: donc toutes ses substitutions font partie de H_1.

Réciproquement il contiendra toutes les substitutions de H_1. Soient en effet a une de ces dernières substitutions, ψ_1 une fonction des racines, exprimable rationnellement en fonction de φ_1 et des quantités précédemment connues: posons

$$\psi_1 = \chi(\varphi_1).$$

χ désignant une fonction rationnelle. La quantité $\psi_1 - \chi(\varphi_1)$ ayant une valeur nulle, et par suite rationnelle, est invariable par toute substitution de G, et notamment par a. On aura donc

$$\psi_a - \chi(\varphi_a) = \psi_1 - \chi(\varphi_1) = 0$$

et comme $\varphi_a = \varphi_1$, il viendra $\psi_a = \psi_1$.

Ainsi, toute fonction ψ_1 exprimable rationnellement sera invariable par la substitution a: cette substitution fait donc partie du groupe réduit.

Corollaire Ier. L'adjonction de plusieurs fonctions des racines, φ_1, φ_1', ... réduit le groupe de l'équation au groupe H' formé par celles de ses substitutions qui n'altèrent ni φ_1, ni φ_1', etc.

Corollaire II. Deux fonctions φ_1 et ψ_1, invariables par les mêmes substitutions de G, s'expriment rationnellement l'une par l'autre.

En effet, si l'on suppose φ_1 adjointe à l'équation, le groupe sera réduit aux substitutions qui n'altèrent pas φ_1 : ψ_1, étant invariable par ces mêmes substitutions, devient rationnellement exprimable.

13.

Théorème V. Tout étant posé comme au théorème précédent, soient $a_0, a_1, a_2, \ldots$ les substitutions de H_1:

$$a_0, a_1, a_2, \ldots; a_0 b, a_1 b, a_2 b, \ldots; a_0 c, a_1 c, a_2 c; \ldots; \ldots$$

celles de G: l'équation

$$(3) \qquad (Y-\varphi_1)(Y-\varphi_b)(Y-\varphi_c)\ldots = 0$$

dont le degré est égal au rapport des ordres de G et de H_1 aura ses coefficients rationnels, et sera irréductible.

1°. Soit σ une substitution quelconque de G; chacune des substitutions $\sigma, b\sigma, c\sigma, \ldots$ appartenant à G pourra se mettre sous l'une des formes $a_\varrho, a_\varrho b, a_\varrho c, \ldots$. D'ailleurs deux de ces substitutions ne peuvent appartenir à la même forme; car si l'on avait, par exemple, les deux égalités

$$b\sigma = a_\varrho d \quad , \quad c\sigma = a_{\varrho'} d \, ,$$

on en déduirait

$$d\sigma^{-1} = a_\varrho^{-1} b = a_{\varrho'}^{-1} c \quad , \quad \text{d'où } c = a_{\varrho'} a_\varrho^{-1} b \, ;$$

c serait donc de la forme $a_\varrho b$, ce qui n'a pas lieu, par construction (n° 2).

Cela posé, σ transforme les unes dans les autres les quantités $\varphi_1, \varphi_b, \varphi_c, \ldots$: car supposons, pour fixer les idées, que σ soit de la forme $a\,b$: elle transformera φ_1 en $\varphi_{a_\varrho b}$. Mais $\varphi_{a_\varrho} = \varphi_1$; donc $\varphi_{a_\varrho b} = \varphi_b$ (n° 8). Donc σ transformera φ_1 en φ_b; de même, si $b\sigma$ est de la forme $a_\varrho c$, elle transformera φ_b en φ_c, etc.

Les coefficients de l'équation (3), symétriques en $\varphi_1, \varphi_b, \varphi_c, \ldots$ ne seront donc pas altérés par σ: mais σ est l'une quelconque des substitutions de G: donc ils sont rationnels.

2°. L'équation (n° 3) est irréductible: car si elle admettait, par exemple, le facteur rationnel $(Y - \varphi_1)(Y - \varphi_b)$, ce facteur resterait inaltéré par la substitution c: mais cette substitution le transforme en

$$(Y - \varphi_c)(Y - \varphi_{bc}) :$$

pour qu'il restât inaltéré, Y restant indéterminé, il faudrait que φ_b, φ_{bc} fussent égaux à l'ordre près à φ_1, φ_c. Soit par exemple $\varphi_c = \varphi_b$: on en conclurait $\varphi_{cb^{-1}} = \varphi_1$ (n° 8). Donc cb^{-1} serait l'une des substitutions $1, a, a_1, \ldots$ et c serait de la forme $a_\varrho b$, ce qui est contraire à nos constructions (n° 2).

14.

Remarque. Les substitutions de G qui n'altèrent pas φ_1 étant $a_0, a_1, a_2, \ldots$, celles qui n'altèrent pas φ_b seront $b^{-1}a_0 b, b^{-1}a_1 b, \ldots$; celles qui n'altèrent pas φ_c seront $c^{-1}a_0 c, c^{-1}a_1 c, \ldots$ etc.

Car soit σ une substitution de G qui n'altère pas φ_b: on aura

$$\varphi_b = \varphi_{b\sigma} \quad , \quad \text{d'où } \varphi_1 = \varphi_{b\sigma b^{-1}} \quad , \quad \text{d'où } b\sigma b^{-1} = a_\varrho \quad , \quad \sigma = b^{-1} a_\varrho b \, .$$

15.

Théorème VI. Tout étant posé comme aux théorèmes précédents, l'adjonction simultanée des valeurs de $\varphi_1, \varphi_b, \varphi_c, \ldots$ réduira le groupe de l'équation proposée à I, I étant le groupe le plus général parmi ceux qui sont contenus dans H_1, et permutables aux substitutions de G.

En effet, le groupe se trouve réduit aux substitutions communes aux groupes

$$H_1 = (a_0, a_1, \ldots), \, H_b = (b^{-1}a_0 b, b^{-1}a_1 b, \ldots), \, H_c = (c^{-1}a_0 c, c^{-1}a_1 c, \ldots), \ldots$$

qui n'altèrent pas $\varphi_1, \varphi_b, \varphi_c, \ldots$ (n° 12). Or soient J le groupe formé par ces substitutions communes; s une quelconque de ses substitutions; σ une substitution quelconque de G: la substitution $\sigma^{-1}s\sigma$ sera commune aux groupes transformés de $H_1, H_b, H_c, \ldots$ par σ. Mais ces groupes transformés sont identiques á l'ordre près à $H_1, H_b, H_c, \ldots$. Car soit, par exemple, $b\sigma = a_\varrho d$, le groupe transformé de H_b par σ sera formé des substitutions

$$\sigma^{-1}b^{-1}a_0 b\sigma = d^{-1}a_\varrho^{-1}a_0 a_\varrho d \quad , \quad \sigma^{-1}b^{-1}a_1 b\sigma = d^{-1}a_\varrho^{-1}a_1 a_\varrho d\,, \ldots,$$

qui ne sont autres que les substitutions de H_d. Donc $\sigma^{-1}s\sigma$ appartient à J: ce groupe est donc permutable à σ: donc il est contenu dans I.

Réciproquement le groupe I étant contenu dans H_1, les transformées de ses substitutions par $b, c, \ldots$ seront contenues dans H_b, $H_c, \ldots$; mais ces transformées reproduisent à l'ordre près les substitutions de I; donc toutes les substitutions de I sont communes à $H_1, H_b, H_c, \ldots$.

16.

Remarque. Dans le cas particulier où H_1 serait permutable à toutes les substitutions de G, on aurait $H_1 = H_b = H_c, \ldots = I$, et les fonctions $\varphi_1, \varphi_b, \varphi_c, \ldots$ invariables par les mêmes substitutions de G, s'exprimeraient rationnellement en fonction de l'une quelconque d'entre elles.

Réciproquement, si les fonctions $\varphi_1, \varphi_b, \varphi_c, \ldots$ s'expriment rationnellement en fonction d'une seule d'entre elles, elles seront invariables par les mêmes substitutions de G: on aura donc $H_1 = H_b = H_c$, ... et ce groupe sera transformé en lui-même par toutes les substitutions de G.

17.

Théorème VII. Soient N l'ordre de G; $N' = \frac{N}{\nu}$ l'ordre de I. L'ordre du groupe G' de l'équation (3) sera ν.

Posons en effet $W = M_1\varphi_1 + M_b\varphi_b + M_c\varphi_c + \ldots$, M_1, M_b, M_c, ... étant des constantes indéterminées: W sera racine d'une équation irréductible d'un degré égal à l'ordre du groupe de l'équation (3) (Lemme II). Mais d'autre part W peut être considérée comme fonction des racines de l'équation $F(x) = 0$, laquelle fonction, non altérée par les substitutions de I, l'est évidemment par toute autre substitution de G. Elle dépend donc d'une équation irréductible dont le degré est égal au rapport des ordres de G et de I (nº 13).

18.

Théorème VIII. S'il n'existe aucun groupe plus général que I qui soit contenu dans G et permutable à ses substitutions, le groupe G' sera simple.

Car s'il existe un groupe I', contenu dans G' et permutable à ses substitutions, soit ν' son ordre: une fonction ψ des racines de l'équation (3), invariable par les substitutions de I' et variable par toute autre substitution, dépendrait d'une équation irréductible de degré $\frac{\nu}{\nu'}$ (nº 13), dont les racines seraient fonctions rationelles les unes des autres (nº 16). Mais ψ peut être considérée comme une fonction des racines de $F(x)=0$; soit L le groupe formé par celles des substitutions de G qui ne l'altèrent pas. 1º. L contiendra I, dont les substitutions, n'altérant pas φ_1, φ_b, φ_c, ... ne peuvent altérer ψ. 2º. H L sera plus général: car son ordre étant égal à celui de G, divisé par le degré $\frac{\nu}{\nu'}$ de l'équation irréductible dont dépend ψ (nº 13) est égal à $N.\frac{\nu'}{\nu}$, celui de I étant simplement $\frac{N}{\nu}$. 3º. Enfin les racines de l'équation en ψ étant fonctions rationnelles les unes des autres, L est permutable aux substitutions de G (nº 16).

En renversant ce raisonnement, on démontre que réciproquement, s'il existe un groupe L plus général que I, qui soit contenu dans G et permutable à ses substitutions, G' ne sera pas simple; car on pourra déterminer un groupe I' contenu dans G', et permutable à ces substitutions.

19.

Théorème IX. Soient $F(x)=0$ une équation dont le groupe G soit composé: G, I, I_1, ... une suite de groupes tels 1º. que chacun d'eux soit contenu dans le précédent et permutable à ses substitutions, 2º. qu'il soit aussi général que possible parmi ceux qui satisfont à cette double propriété; N, $\frac{N}{\nu}$, $\frac{N}{\nu\nu_1}$, ... les ordres respectifs de ces groupes:

La résolution de l'équation proposée dépendra de celle d'équations successives, dont les groupes seront simples, et contiendront respectivement ν, ν_1, ... substitutions.

Car soit φ_1 une fonction des racines de la proposée invariable par les substitutions I: elle dépend d'une équation de degré ν (nº 13), dont le groupe sera simple (nº 18), et d'ordre ν (nº 16 et 17).

Cette équation résolue, le groupe de la proposée sera réduit à I: soit maintenant φ_1 une fonction des racines invariable par les substitutions I_1: elle dépendra d'une équation de degré ν_1, dont le groupe sera simple, et d'ordre ν_1 etc.

20.

Ce théorème suggère naturellement l'idée de classer les équations à groupe composé d'après le nombre et la valeur des facteurs de composition ν, ν_1, ...: mais la suite des groupes G, I, I_1, ... peut souvent être déterminée de plusieurs manières: il est donc absolument nécessaire, pour justifier cette classification, de prouver que, de quelque manière que l'on choisisse cette suite, on trouvera toujours, à l'ordre près, les mêmes facteurs. Mais nous supprimons, pour abréger, la démonstration de ce théorème.

21.

Supposons maintenant qu'on adjoigne à l'équation proposée $F(x)=0$ une ou plusieurs fonctions des racines d'une autre équation $f(z)=0$.

Le cas où l'on adjoindrait plusieurs fonctions $\chi_1(z_1, \ldots, z_n)$, $\chi_1'(z_1, \ldots, z_n)$, ... revient à celui où l'on n'en adjoint qu'une seule: car soient G' le groupe de l'équation $f(z)=0$, H_1' le groupe formé par celles de ses substitutions qui n'altèrent aucune des fonctions χ_1, χ_1', ...: $\cancel{\chi_1}$ r_1 une fonction de $z_1, \ldots, z_n$ invariable par les substitutions de H', et variable par toute autre substitution. L'adjonction de χ_1, χ_1', ... réduisant le groupe de $f(z)=0$ à H_1', dont les substitutions n'altèrent pas $\cancel{\chi_1}$ r_1, cette fonction deviendra exprimable rationnellement. Réciproquement, l'adjonction de χ_1 r_1 réduisant ce groupe à H_1', dont les substitutions n'altèrent pas χ_1, χ_1', ... ces fonctions deviendraient rationnelles. Donc toute fonction rationnelle de $\cancel{\chi_1}$ r_1 s'exprime rationnellement en χ_1, χ_1', ... et réciproquement. Donc il est indifférent d'adjoindre à une équation quelconque, soit χ_1, χ_1', ..., soit simplement r_1.

22.

Adjoignons donc à l'équation $F(x)=0$ l'unique fonction r_1: soient H_1' le groupe formé par celles des substitutions de G' qui n'altèrent pas r_1; $\alpha_0, \alpha_1, \ldots$ ses substitutions; $\alpha_0, \alpha_1, \ldots$; $\alpha_0\beta, \alpha_1\beta, \ldots$; $\alpha_0\gamma, \alpha_1\gamma, \ldots$; ... celles de G': r_1 dépend d'une équation irréductible

$$(4) \qquad (X-r_1)(X-r_\alpha)(X-r_\beta)\ldots=0.$$

Supposons que l'adjonction de r_1 reduise le groupe de $F(x)=0$ à H_1; soient comme tout à l'heure $a_0, a_1, \ldots$ les substitutions de ce groupe, $a_0, a_1, \ldots$; $a_0 b, a_1 b, \ldots$; $a_0 c, a_1 c, \ldots$; ... celles de G. Soit enfin φ_1 une fonction des racines de $F(x)=0$, invariable par les substitutions de H_1 et variable par toute autre substitution: elle satisfera à l'équation

$$(5) \qquad (Y-\varphi_1)(Y-\varphi_b)(Y-\varphi_c)\ldots=0.$$

Mais, par hypothèse, φ_1 est une fonction rationnelle de r_1: soit $\varphi_1=\psi(r_1)$: r_1 sera racine de l'équation:

$$(6) \qquad (\psi(y)-\varphi_1)(\psi(y)-\varphi_b)(\psi(y)-\varphi_c)\ldots=0.$$

Mais d'autre part, r_1 satisfait à l'équation irréductible (4). Une des racines de cette équation satisfaisant à l'équation (6), toutes y satisferont (Lemme I[er]). Donc les quantités $\psi(r_1)$, $\psi(r_\alpha)$, $\psi(r_\beta)$, ... satisfont toutes à l'équation (5). Mais elles satisfont à l'équation

(7) $$(Y - \psi(r_1))\,(Y - \psi(r_\alpha))\,(Y - \psi(r_\beta))\,\ldots = 0$$
dont les coefficients, symétriques en $r_1, r_\alpha, r_\beta, \ldots$ sont rationnels.

Les racines de l'équation (7) satisfaisant toutes à l'équation irréductible (5), le premier nombre de (7) sera une puissance exacte du premier nombre de (5), (Lemme I^er, Corollaire), à un facteur constant près, qui se réduit ici à l'unité, les deux polynômes ayant l'unité pour coefficient de leur premier terme.

Soit μ le degré de cette puissance: la série des termes $\psi(r_1)$, $\psi(r_\alpha), \ldots$ contiendra μ termes égaux à φ_1, μ égaux à φ_b, etc.

Cela posé, adjoignons à l'équation $F(x) = 0$ l'une quelconque des racines de l'équation (4), telle que r_α: le groupe de l'équation sera réduit à H_1, à $H_b = (b^{-1}a_0 b\,,\, b^{-1}a_1 b\,,\, \ldots)$, à H_c, etc. suivant que $\psi(r_\alpha)$ sera égal à φ_1, à φ_b, à $\varphi_c, \ldots$

En effet, soit par exemple, $\psi(r_\alpha) = \varphi_b$. L'adjonction de r_α rendant φ_b rationnel, le groupe réduit H ne peut contenir que celles des substitutions de G qui n'altèrent pas φ_b, c'est à dire celles de H_b. Le nombre de ces substitutions étant égal à celui des substitutions de H_1, on voit que l'ordre de H est au plus égal à celui de H_1. Réciproquement, en partant de la racine r_α au lieu de partir de la racine r_1, on verrait que l'ordre de H_1 est au plus égal à celui de H: donc ces deux ordres sont égaux, et H contiendra toutes les substitutions de H_b.

23.

Théorème X. Les notations du numéro précédent étant conservées si H_1' est permutable aux substitutions de G', H_1 le sera à celles de G.

En effet, H_1' étant permutable aux substitutions de G', les racines de l'équation irréductible (4), dont dépend r_1, sont fonctions rationnelles les unes des autres (n° 16). Donc les fonctions $\varphi_1, \varphi_b, \varphi_c, \ldots$ qui sont respectivement des fonctions rationnelles de ces racines, sont toutes des fonctions rationnelles de r_1: donc elles sont invariables par les substitutions de H_1: mais elles le sont respectivement par celles de $H_1, H_b, H_c, \ldots$: donc ces groupes sont identiques, et H_1 est permutable à G.

24.

Théorème XI. Si l'on adjoint à l'équation $F(x) = 0$ dont le groupe est G, toutes les racines d'une équation $f(z) = 0$, le groupe réduit H_1 sera permutable à G.

Car adjoindre à la fois toutes les racines de $f(z) = 0$ équivaut à adjoindre une fonction V_1 de ces racines, variable par toute substitution, autre que l'unité (n° 6). Mais alors le groupe H_1', se réduisant à la seule substitution 1, est évidemment permutable aux substitutions de G': donc H_1 le sera à celles de G.

25.

Corollaire. Si le groupe G est simple, il ne peut être réduit par la résolution d'une équation auxiliaire sans se réduire à la seule substitution 1 (le groupe formé de cette substitution étant, par définition, le seul qui soit contenu dans G et permutable à ses substitutions); auquel cas l'équation $F(x) = 0$ sera complètement résolue.

26.

Théorème XII. Soit $F(x) = 0$ et $f(z) = 0$ deux équations dont les groupes G et G' contiennent respectivement N et N' substitutions. Si la résolution de la seconde équation réduit le groupe de la première à un groupe H_1 ne contenant plus que $\frac{N}{\nu}$ substitutions, réciproquement la résolution de la première réduira le groupe de la seconde à un groupe H_1' ne contenant plus que $\frac{N'}{\nu}$ substitutions. De plus, les deux équations sont composées avec une même équation auxiliaire $\Phi(u) = 0$ de degré ν, et dont le groupe contient ν substitutions.

En effet, soit $\psi(x_1, \dots, x_m)$ une fonction des racines de $F(x) = 0$, invariable par les seules substitutions H_1. Elle est exprimable rationnellement en fonction des racines $z_1, \dots, z_n$ de $f(z) = 0$. On a donc

$$\psi(x_1, \dots, x_m) = \chi(z_1, \dots, z_n) = u.$$

Cette quantité $\psi(x_1 \dots x_m)$ dépend d'une équation auxiliaire irréductible $\Phi(u) = 0$ de degré ν (nº 13). D'ailleurs H_1 étant permutable à G (nº 24), les racines de cette équation sont des fonctions rationnelles les unes des autres (nº 16), et son groupe contient ν substitutions (nº 10). La résolution de cette équation auxiliaire réduit le groupe de $F(x) = 0$ aux seules substitutions H_1, en nombre $\frac{N}{\nu}$. Elle abaissera de même le groupe de $f(z) = 0$ de telle sorte qu'il ne contienne plus que $\frac{N'}{\nu}$ substitutions: en effet, soit K le nombre des substitutions du groupe G' qui n'altèrent pas $\chi(z_1 \dots z_n)$; $\chi(z_1 \dots z_n) = u$ dépendra d'une équation irréductible du degré $\frac{M'}{K}$: mais le degré de cette équation est égal à ν; donc $\frac{M'}{K} = \nu$ d'où $K = \frac{M'}{\nu}$.

La résolution de l'équation $F(x) = 0$, entrainant celle de l'équation auxiliaire $\Phi(u) = 0$ dont les racines sont des fonctions rationnelles de $x_1, \dots, x_m$, réduira le groupe de $f(z) = 0$ de manière à ce qu'il contienne tout au plus $\frac{N'}{\nu}$ substitutions: il ne peut d'ailleurs en contenir un moindre nombre: car si le groupe réduit H_1' contenait seulement $\frac{N'}{\mu}$ substitutions, μ étant un nombre plus grand que ν, on verrait en répétant tous les raisonnements que nous venons de faire à partir de l'équation $f(z) = 0$, que la résolution de cette équation devrait réduire le groupe de $F(x) = 0$ à ne plus contenir que $\frac{N}{\mu}$ substitutions tout au plus; résultat contraire à notre hypothèse d'après laquelle le groupe réduit H_1 contient $\frac{N}{\nu}$ substitutions.

27.

Corollaire I. Si le groupe G de l'équation $F(x) = 0$ est simple, elle ne peut être résolue qu'au moyen d'équations dont le groupe ait pour ordre un multiple de l'ordre de G.

Car adjoignons à cette équation les racines d'une équation auxiliaire $f(z) = 0$. Si son groupe est abaissé, il est réduit à la seule substitution 1 (n° 25). Donc l'ordre du groupe de $F(x) = 0$, qui était N, sera réduit à 1 par l'adjonction des racines de $f(z) = 0$. Donc réciproquement l'adjonction des racines de $F(x) = 0$ à l'équation $f(z) = 0$ divisera par N l'ordre de son groupe. Donc cet ordre est un multiple de N.

28.

Remarque. Si la fonction $\psi(x_1 \ldots x_m)$ est variable par toute substitution, opérée entre les racines $x_1, \ldots, x_m$, ces racines sont exprimables rationnellement en fonction de $\psi(x_1, \ldots, x_m)$ (n° 6) et par suite en fonction de $z_1, \ldots, z_n$. La résolution de l'équation $f(z) = 0$ entraînera donc la résolution complète de l'équation $F(x) = 0$. Si en même temps $\chi(z_1, \ldots, z_n)$ est variable par toute substitution opérée entre les $z_1, \ldots, z_n$, la résolution de $F(x) = 0$ entraînera celle de $f(z) = 0$. Les deux équations seront dites équivalentes.

Deux équations équivalentes à une troisième sont évidemment équivalentes entre elles. Les diverses équations équivalentes à une équation donnée forment donc un système d'équations équivalentes entre elles.

29.

Corollaire II. Deux équations équivalentes $F(x) = 0$ et $f(z) = 0$ ont dans leurs groupes le même nombre de substitutions.

Soit en effet N le nombre des substitutions du groupe de l'équation $F(x) = 0$: N' celui des substitutions du groupe de $f(z) = 0$. La résolution de $f(z) = 0$ réduit le groupe de $F(x) = 0$ à la seule substitution 1: donc la résolution de $F(x) = 0$ réduira le groupe de $f(z) = 0$ à ne plus contenir que $\frac{N'}{N}$ substitutions (n° 26): mais la résolution de $F(x) = 0$ entraînant celle de $f(z) = 0$, réduit le groupe de cette dernière équation à la seule substitution 1: on doit donc avoir $\frac{N'}{N} = 1$, d'où $N = N'$.

Corollaire III. Toute adjonction de quantité auxiliaire qui abaisse le groupe de l'une de ces deux équations en divisant par ν le nombre de ses substitutions abaisse de même le groupe de l'autre.

En effet les équations étant équivalentes après l'adjonction comme avant, leurs groupes ne devront pas cesser de présenter le même nombre de substitutions.

De ce corollaire on déduit, comme conséquence immédiate, la proposition suivante:

Corollaire IV. Toute équation équivalente à une équation composée, est elle-même composée des mêmes équations auxiliaires.

30.

Problème. Déterminer toutes les équations irréductibles équivalentes à une équation donnée $F(x) = 0$.

Soit $f(z) = 0$ une de ces équations. La résolution de $F(x) = 0$ devant entraîner celle de $f(z) = 0$, les racines $z_1, \ldots, z_n$ de cette dernière équation sont des fonctions rationnelles de $x_1 \ldots x_m$. Soit $z_1 = \varphi_1(x_1 \ldots x_m)$: Désignons comme précédemment par G le groupe de $F(x) = 0$, par $a_0, a_1, \ldots, \ldots$ celles des substitutions de G qui n'altèrent pas la fonction φ_1, lesquelles substitutions forment un groupe H_1: par $a_0, a_1, \ldots; a_0 b, a_1 b, \ldots; a_0 c, a_1 c, \ldots; \ldots$ celles de G. Nous avons vu (n° 13) que l'équation irréductible dont dépend la quantité φ_1 est

$$(Z - \varphi_1)(Z - \varphi_b)(Z - \varphi_c) \ldots = 0$$

puis que l'adjonction simultanée de ses racines réduit le groupe de la proposée à I (n° 15). Mais cette adjonction doit résoudre complètement la proposée; donc I se réduit à la seule substitution 1: d'où ce résultat:

Pour qu'une équation irréductible $f(z) = 0$ soit équivalente à $F(x) = 0$, il faut et il suffit 1°. que l'une de ses racines, z_1, soit fonction rationnelle des racines de $F(x) = 0$, 2°. que le groupe H_1 formé par celles des substitutions de G (groupe de $F(x) = 0$) qui n'altèrent pas cette fonction ne contienne aucun groupe permutable aux substitutions de G (sauf celui qui est formé de la seule substitution 1).

31.

Soient H_1 un groupe quelconque satisfaisant à la condition ci-dessus: il existe une infinité de fonctions de $x_1, \ldots, x_m$ invariables par les substitutions de H_1, et variables par toute autre substitution de G. Chacune d'elles sera la racine d'une équation irréductible, équivalente à la proposée $F(x) = 0$ et dont le degré ν est égal au rapport des ordres de G et de H_1.

Soient φ_1 et φ_1' deux quelconques de ces fonctions;

$$f(Y) = (Y - \varphi_1)(Y - \varphi_b) \ldots = 0,$$
$$f'(Y) = (Y - \varphi_1')(Y - \varphi_b') \ldots = 0$$

les équations irréductibles dont elles dépendent: φ_1 et φ_1' étant invariables par les mêmes substitutions, s'expriment rationnellement l'une par l'autre.

Soit donc $\varphi_1' = \psi(\varphi_1)$. On en déduit $\varphi_b' = \psi(\varphi_b)$, etc. (nº 8). Donc les diverses racines de l'équation $f'(Y) = 0$ s'expriment par une même fonction rationnelle des diverses racines de $f(Y) = 0$: on passera donc de l'une à l'autre de ces deux équations par une transformation rationnelle.

On peut considérer comme appartenant à la même classe deux équations $f(Y) = 0$ et $f'(Y) = 0$ telles que les diverses racines de l'une d'elles s'expriment respectivement par une même fonction rationnelle des racines correspondantes de l'autre. Le nombre des classes d'équations irréductibles équivalentes à la proposée $F(x) = 0$ est nécessairement limité, et on pourra le déterminer en cherchant quels sont les divers groupes H_1 contenus dans G et jouissant de la propriété indiquée au théorème précédent: on remarquera d'ailleurs que les ν groupes

$$H_1 = (a_0, a_1, \ldots), \quad H_b = (b^{-1}a_0 b, b^{-1}a_1 b, \ldots), \ldots$$

correspondent aux diverses racines d'une même équation et ne fournissent ainsi qu'une seule et même classe.

32.

Théorème XIII. Soient $F(x) = 0$ et $f(z) = 0$ deux équations irréductibles dont les racines soient liées par des relations algébriques quelconques telles que

$$\varphi(x_1, \ldots, x_m, z_1, \ldots, z_n) = 0.$$

Toutes ces relations se déduisent d'une seule de la forme

$$\psi(x_1 \ldots x_m) = \chi(z_1 \ldots z_n)$$

où les racines des deux équations sont séparées (ψ et χ désignant ainsi que φ des fonctions rationnelles convenablement choisies).

Soit en effet V_1 une fonction de $x_1, \ldots, x_m$ variable par toute substitution; chacune des quantités $x_1 \ldots x_m$ est exprimable en fonction rationnelle de V_1; substituant ces expressions dans

$$\varphi(x_1, \ldots, x_m, z_1, \ldots, z_n) = 0,$$

il vient une équation de la forme $\varphi'(V_1, z_1, \ldots, z) = 0$.

La quantité V_1 satisfait donc à l'équation $\varphi'(X, z_1, \dots, z_n) = 0$. D'autre part V_1 saitisfait à l'équation irréductible

$$\pi(X) = (X - V_1)(X - V_a)(X - V_b) \dots = 0$$

si l'on désigne par $1, a, b, \dots$ les substitutions du groupe G de $F(x)$, et par $V_1, V_a, V_b, \dots$ les valeurs que prend la fonction V_1 par ces substitutions. Le degré de cette équation est égal au nombre N des substitutions de G.

Ordonnons les deux polynômes $\varphi'(X, z_1 \dots z_n)$ et $\pi(X)$ suivant les puissances descendantes de X, et divisons le premier par le second: il viendra

$$\varphi'(X, z_1 \dots z_n) = \varrho(X) \,.\, \pi(X) + \sigma(X)$$

$\varrho(X)$ et $\sigma(X)$ étant deux polynômes entiers par rapport à X, à coefficients rationnels en $z_1, \dots, z_n$ et le degré de $\sigma(X)$ par rapport à X étant au plus égal à $N-1$.

Soit donc $\sigma(X) = AX^{N-1} + BX^{N-2} + \dots$ deux cas pourront se présenter:

1°. Si l'on a simultanément $A = 0$, $B = 0$ etc. on aura, au lieu de l'équation unique

$$0 = \varphi'(V_1, z_1, \dots, z_n) = \varrho(V_1) \,.\, \pi(V_1) + A\,V_1^{N-1} + B\,V_1^{N-2} + \dots$$

les suivantes

$$\pi(V_1) = 0 \quad , \quad A = 0 \quad , \quad B = 0 \quad \text{etc.}$$

dont la première est une relation entre les racines $x_1, \dots, x_m$ de l'équation $F(x) = 0$, et les autres des relations entre les racines $z_1, \dots, z_n$ de $f(z) = 0$; c'est grâce à la présence de ces relations que peut exister l'équation

$$\varphi(x_1, \dots, x_m, z_1, \dots, z_n) = \Phi'(V_1, z_1, \dots, z_n) = 0,$$

qui ne lie qu'e n a p p a r e n c e les racines de $F(x) = 0$ à celles de $f(z) = 0$. Ce cas doit donc être rejeté.

2°. Si l'on n'a pas simultanément $A = 0$, $B = 0$ etc. divisons le polynôme $\sigma(X)$ par le coefficient de la plus haute puissance de X, puis cherchons le plus grand commun diviseur $\varDelta$ de ce polynôme avec le polynôme $\pi(X)$. Les coefficients de $\varDelta$ seront des fonctions rationnelles de $z_1, \dots, z_n$. D'autre part, en désignant par $V_1, V_a, V_{a_1}, \dots$ celles des racines de $\pi(X) = 0$ qui satisfont en même temps à l'équation $\sigma(X) = 0$ on aura $\varDelta = (X - V_1)(X - V_a)(X - V_{a_1}) \dots$: les quantités $V_1, V_a, V_{a_1}, \dots$ étant des fonctions rationnelles de $x_1, \dots, x_m$, si l'on développe le polynôme $\varDelta$ suivant les puissances de X, les coefficients de ces diverses puissances seront eux-mêmes des fonctions rationnelles de $x_1, \dots, x_m$. Mais nous venons de voir que ces coefficients s'expriment également en fonction rationnelle de $z_1, \dots, z_n$: égalant ces deux expressions pour chaque coefficient, on aura une série de relations de la forme

$$(8) \qquad \begin{aligned} \psi'(x_1, \ldots, x_m) &= \chi'(z_1, \ldots, z_n), \\ \psi''(x_1, \ldots, x_m) &= \chi''(z_1, \ldots, z_n) \quad \text{etc.} \end{aligned}$$

La relation initiale $\varphi(x_1, \ldots, x_m, z_1, \ldots, z_n) = \varphi'(V_1, z_1, \ldots, z_n) = 0$ n'est qu'une conséquence de celles-là: en effet les relations (8) expriment que les deux polynômes $\sigma(X)$ et $\pi(X)$ s'annulent tous deux pour $X = V_1$, $X = V_a$ etc., on aura donc en particulier

$$\varphi'(V_1, z_1, \ldots, z_n) = \varrho(V_1)\pi(V_1) + \sigma(V_1) = 0.$$

Il nous reste à démontrer que toutes les relations de la forme (8) qui peuvent exister entre les racines des deux équations $F(x) = 0$ et $f(z) = 0$ sont des conséquences d'une seule d'entre elles. Cette démonstration n'offre aucune difficulté. Soient en effet H_1 ce que devient le groupe de l'équation $F(x) = 0$ par l'adjonction des quantités $z_1, \ldots, z_n$; $\psi(x_1, \ldots, x_m)$ une fonction invariable par les seules substitutions H_1; elle sera exprimable rationnellement en fonction de $z_1, \ldots, z_n$ et l'on aura ainsi

$$\psi(x_1, \ldots, x_m) = \chi(z_1, \ldots, z_n).$$

Les autres fonctions $\psi', \psi'', \ldots$ rationnellement exprimables en fonction des $z_1, \ldots, z_n$ sont invariables par les substitutions H_1 et par suite fonctions rationnelles de ψ. Leur expression en fonction de $z_1, \ldots, z_n$ se déduit donc de celle de ψ en fonction de ces mêmes quantités.

Remarque. On voit par le théorème ci-dessus qu'on partagera les irrationnelles algébriques en catégories bien mieux définies en rattachant ensemble comme dépendant d'une même équation $F(x) = 0$ les diverses fonctions de la forme $\psi(x_1, \ldots, x_m)$, qu'en considérant seulement des fonctions d'une seule racine, comme on le fait communément.

Die Modulargleichungen der hyperelliptischen Functionen erster Ordnung für die Transformation dritten Grades.

Von Königsberger in Greifswald.

Im 67. Bande des Crelleschen Journals habe ich für die Transformation dritten Grades der hyperelliptischen Functionen erster Ordnung die nachfolgenden Relationen zwischen den für die Nullwerthe der Argumente genommenen ϑ-Functionen gefunden:

$$(1)\begin{cases} \Theta_{34}\vartheta_{34}+\Theta_{03}\vartheta_{03}+\Theta_{23}\vartheta_{23}=\Theta_5\vartheta_5\,, & \Theta_2\vartheta_2+\Theta_1\vartheta_1+\Theta_0\vartheta_0=\Theta_5\vartheta_5 \\ \Theta_4\vartheta_4\pm\Theta_{14}\vartheta_{14}+\Theta_{34}\vartheta_{34}=\Theta_5\vartheta_5\,, & \Theta_0\vartheta_0+\Theta_{03}\vartheta_{03}+\Theta_{01}\vartheta_{01}=\Theta_5\vartheta_5 \\ \Theta_{01}\vartheta_{01}\pm\Theta_{14}\vartheta_{14}+\Theta_{12}\vartheta_{12}=\Theta_5\vartheta_5\,, & \Theta_2\vartheta_2+\Theta_{12}\vartheta_{12}+\Theta_{23}\vartheta_{23}=\Theta_5\vartheta_5, \end{cases}$$

worin ϑ_α die ϑ-Functionen des vorgelegten, Θ_α die des transformirten hyperelliptischen Systemes bedeuten, und das positive Vorzeichen der Grösse $\Theta_{14}\vartheta_{14}$ für die durch die Schemata

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & -8i & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{vmatrix} \qquad \begin{vmatrix} 3 & -8i & 0 & -8i' \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 8i \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix},$$

das negative für die durch

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{vmatrix} \qquad \begin{vmatrix} 3 & 0 & -8i & -8i' \\ 0 & 3 & -8i'' & -8i \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

dargestellten Repräsentanten der nicht äquivalenten Classen gültig ist. Ich will hier eine Umformung dieser Gleichungen in drei andere vornehmen, welche nur drei der ϑ-Functionen des vorgelegten und dieselben drei des transformirten Systemes enthalten und die eine der Modulargleichung dritter Ordnung für die elliptischen Functionen

$$\sqrt[4]{\varkappa}\cdot\sqrt[4]{\lambda}+\sqrt[4]{1-\varkappa^2}\cdot\sqrt[4]{1-\lambda^2}=1$$

analoge Form annehmen.

Setzt man nämlich

$$\frac{\Theta_4}{\Theta_5} = x,\ \frac{\Theta_{34}}{\Theta_5} = y,\ \frac{\vartheta_4}{\vartheta_5} = \xi,\ \frac{\vartheta_{34}}{\vartheta_5} = \eta,$$

so ergeben sich vermöge der bekannten Relationen

$$\Theta_5^4 - \Theta_{14}^4 = \Theta_{34}^4 + \Theta_4^4 \text{ und } \vartheta_5^4 - \vartheta_{14}^4 = \vartheta_{34}^4 + \vartheta_4^4$$

die Ausdrücke:

$$\frac{\Theta_{14}}{\Theta_5} = \sqrt[4]{1-x^4-y^4}\ ,\ \frac{\vartheta_{14}}{\vartheta_5} = \sqrt[4]{1-\xi^4-\eta^4},$$

und es geht somit die zweite der oben aufgestellten sechs Gleichungen in

$$(\alpha) \qquad (1 - x\xi - y\eta)^4 = (1 - x^4 - y^4)(1 - \xi^4 - \eta^4)$$

über.

Ebenso folgen, wenn

$$\frac{\Theta_{03}}{\Theta_5} = z,\ \frac{\vartheta_{03}}{\vartheta_5} = \zeta,$$

gesetzt wird, vermöge der Beziehungen

$$\Theta_5^4 - \Theta_{23}^4 = \Theta_{34}^4 + \Theta_{03}^4\ ,\ \vartheta_5^4 - \vartheta_{23}^4 = \vartheta_{34}^4 + \vartheta_{03}^4,$$

die Gleichungen

$$\frac{\Theta_{23}}{\Theta_5} = \sqrt[4]{1-y^4-z^4}\ ,\ \frac{\vartheta_{23}}{\vartheta_5} = \sqrt[4]{1-\eta^4-\zeta^4},$$

und es ergiebt sich somit aus der ersten der obigen Gleichungen:

$$(\beta). \qquad (1 - y\eta - z\zeta)^4 = (1 - y^4 - z^4)(1 - \eta^4 - \zeta^4).$$

Aus den Gleichungen (1) erhält man ferner leicht *):

$$\Theta_5\vartheta_5 - \Theta_4\vartheta_4 - \Theta_{34}\vartheta_{34} - \Theta_{03}\vartheta_{03} = \Theta_0\vartheta_0 - \Theta_{12}\vartheta_{12},$$

oder wenn

$$\frac{\Theta_0}{\Theta_5} = m,\ \frac{\Theta_{12}}{\Theta_5} = p,\ \frac{\vartheta_0}{\vartheta_5} = \mu,\ \frac{\vartheta_{12}}{\vartheta_5} = \pi$$

gesetzt wird, mit Benutzung der obigen Bezeichnungen die Gleichung

$$(\gamma) \qquad 1 - x\xi - y\eta - z\zeta = m\mu - p\pi.$$

Nun gehen aber die bekannten ϑ-Relationen

$$\Theta_0^2\Theta_5^2 = \Theta_{34}^2\Theta_{12}^2 + \Theta_{14}^2\Theta_{23}^2 \quad , \quad \vartheta_0^2\vartheta_5^2 = \vartheta_{34}^2\vartheta_{12}^2 + \vartheta_{14}^2\vartheta_{23}^2$$

$$\Theta_{12}^2\Theta_5^2 = \Theta_{03}^2\Theta_4^2 + \Theta_0^2\Theta_{34}^2 \quad , \quad \vartheta_{12}^2\vartheta_5^2 = \vartheta_{03}^2\vartheta_4^2 + \vartheta_0^2\vartheta_{34}^2$$

nach den obigen Festsetzungen in

---

*) S. meine erste Arbeit über die Transformation der Abelschen Functionen Crelle Band 64).

$$p^2 = z^2\,x^2 + m^2\,y^2 \quad , \quad \pi^2 = \zeta^2\,\xi^2 + \mu^2\,\eta^2,$$

$$m^2 = y^2\,p^2 + \sqrt{1 - x^4 - y^4} \cdot \sqrt{1 - y^4 - z^4}\ ,$$

$$\mu^2 = \eta^2\pi^2 + \sqrt{1 - \xi^4 - \eta^4} \cdot \sqrt{1 - \eta^4 - \zeta^4}$$

über, woraus leicht die Grössen $m\mu$ und $p\pi$ in der Form

$$m\,\mu\ \sqrt{(1 - y^4)\,(1 - \eta^4)} =$$

$$= \sqrt{x^2y^2z^2 + \sqrt{(1-x^4-y^4)(1-y^4-z^4)}}\ \sqrt{\xi^2\eta^2\zeta^2 + \sqrt{(1-\xi^4-\eta^4)(1-\eta^4-\zeta^4)}}$$

$$p\,\pi\,\sqrt{(1 - y^4)\,(1 - \eta^4)} =$$

$$= \sqrt{x^2z^2 + y^2\,\sqrt{(1-x^4-y^4)(1-y^4-z^4)}}\ \sqrt{\xi^2\zeta^2 + \eta^2\sqrt{(1-\xi^4-\eta^4)(1-\eta^4-\zeta^4)}}$$

zu entwickeln sind.

Setzt man diese Ausdrücke in die Gleichung (γ) ein, so erhält man mit Hinzunahme von (α) und (β) die folgenden drei, die Stelle der Modulargleichungen vertretenden Gleichungen in x, y, z:

$$(a)\quad (1 - x\xi - y\eta)^4 = (1 - x^4 - y^4)\,(1 - \xi^4 - \eta^4)$$

$$(b)\quad (1 - y\eta - z\zeta)^4 = (1 - y^4 - z^4)\,(1 - \eta^4 - \zeta^4)$$

$$(c)\quad (1 - x\xi - y\eta - z\zeta)\,\sqrt{(1 - y^4)\,(1 - \eta^4)} =$$

$$= \sqrt{x^2y^2z^2 + \sqrt{(1-x^4-y^4)(1-y^4-z^4)}}\ \sqrt{\xi^2\eta^2\zeta^2 + \sqrt{(1-\xi^4-\eta^4)\,(1-\eta^4-\zeta^4)}}$$

$$- \sqrt{x^2z^2 + y^2\,\sqrt{(1-x^4-y^4)\,(1-y^4-z^4)}}\ \sqrt{\xi^2\zeta^2 + \eta^2\,\sqrt{(1-\xi^4-\eta^4)\,(1-\eta^4-\zeta^4)}}$$

Ich will schliesslich noch bemerken, dass ebenso wenig wie man in der Theorie der elliptischen Functionen die Gleichung

$$\sqrt{\varkappa\lambda} + \sqrt{\varkappa_1\,\lambda_1} = 1$$

als die zur Transformation dritten Grades gehörige Modulargleichung betrachten darf, da dieselbe durch Einführung der Grössen

$$\sqrt[4]{\varkappa} = \varphi(\tau)\ ,\ \sqrt[4]{\lambda} = \varphi(\tau')^{*})$$

fremde, nicht zu den Repräsentanten der unter einander nicht äquivalenten Classen gehörige Factoren annimmt, die obigen Gleichungen (a), (b), (c) die wahren Modulargleichungen der hyperelliptischen

---

*) S. die Auseinandersetzungen in meiner Schrift: Die Transformation, die Multiplication und die Modulargleichungen der elliptischen Functionen (Teubner, 1868).

Functionen erster Ordnung für die Transformation dritten Grades darstellen; es wird sich vielmehr darum handeln — und hierauf beabsichtige ich nächstens zurückzukommen — Gleichungen herzustellen unter Grössen, die in bestimmter Weise aus den Integralmoduln $\varkappa$, λ, μ, c, l, m zusammengesetzt sind und für welche die Zahl der zusammengehörigen Lösungen gerade die der Repräsentanten der nicht äquivalenten Classen, d. h.

$$1 + 3^1 + 3^2 + 3^3 = 40$$

ist.

Greifswald im November 1868.

Die Differentialgleichung der Perioden der hyperelliptischen Functionen erster Ordnung.

Von Königsberger in Greifswald.

Ich beabsichtige in der vorliegenden Note die Differentialgleichung der Perioden der hyperelliptischen Functionen erster Ordnung zu entwickeln, welche der für die elliptischen Functionen von Legendre gefundenen

$$\varkappa(1-\varkappa^2)\frac{\partial^2 K}{\partial \varkappa^2}+(1-3\varkappa^2)\frac{\partial K}{\partial \varkappa}-\varkappa\, K=0$$

analog ist, und zwar nach einer Methode, welche genau in derselben Weise angewandt für die hyperelliptischen Functionen beliebiger Ordnung zur Herstellung der linearen Differentialgleichung führt, der die zugehörigen Perioden genügen.

Setzt man nämlich, wenn

$$R(x)=x(1-x)(1-\varkappa^2 x)(1-\lambda^2 x)(1-\mu^2 x)$$

ist,

$$K=\int_0^1\frac{dx}{\sqrt{R(x)}}, \qquad K'=\int_0^1\frac{x\,dx}{\sqrt{R(x)}},$$

$$E=\int_0^1\frac{x^2\,dx}{\sqrt{R(x)}}, \qquad E'=\int_0^1\frac{x^3\,dx}{\sqrt{R(x)}},$$

worin K und K' vollständige Integrale erster Gattung, E und E' solche zweiter Gattung bedeuten, so ergeben sich zuerst sehr leicht die folgenden drei Differentialgleichungen:

(1) $$E=\frac{1}{\varkappa}\frac{\partial K'}{\partial \varkappa}-\varkappa\frac{\partial E}{\partial \varkappa}$$

(2) $$K'=\frac{1}{\varkappa}\frac{\partial K}{\partial \varkappa}-\varkappa\frac{\partial K'}{\partial \varkappa}$$

(3) $$E'=\frac{1}{\varkappa}\frac{\partial E}{\partial \varkappa}-\varkappa\frac{\partial E'}{\partial \varkappa}.$$

Zur Herleitung der vierten Differentialgleichung wenden wir nunmehr das folgende Verfahren an.

Es ist

$$(\alpha)\qquad d\cdot\frac{\sqrt{R(x)}}{x-\frac{1}{\varkappa^2}}=\left[\frac{1}{2}\,\frac{R'(x)}{x-\frac{1}{\varkappa^2}}-\frac{R(x)}{\left(x-\frac{1}{\varkappa^2}\right)^2}\right]\frac{dx}{\sqrt{R(x)}};$$

setzt man nun

$$R(x)=A\left(x-\frac{1}{\varkappa^2}\right)+B\left(x-\frac{1}{\varkappa^2}\right)^2+C\left(x-\frac{1}{\varkappa^2}\right)^3$$
$$+D\left(x-\frac{1}{\varkappa^2}\right)^4+E\left(x-\frac{1}{\varkappa^2}\right)^5,$$

worin:

$$A\varkappa^6=\lambda^2\mu^2-\varkappa^2\mu^2-\varkappa^2\lambda^2+\varkappa^4-\varkappa^2\lambda^2\mu^2+\varkappa^4\mu^2+\varkappa^4\lambda^2-\varkappa^6$$
$$B\varkappa^4=4\lambda^2\mu^2-3\varkappa^2\lambda^2\mu^2-3\varkappa^2\mu^2-3\varkappa^2\lambda^2+2\varkappa^4\mu^2+2\varkappa^4\lambda^2+2\varkappa^4-\varkappa^6$$
$$C\varkappa^2=6\lambda^2\mu^2-3\varkappa^2\mu^2-3\varkappa^2\lambda^2+\varkappa^4-3\varkappa^2\lambda^2\mu^2+\varkappa^4\mu^2+\varkappa^4\lambda^2$$
$$D\quad=4\lambda^2\mu^2-\varkappa^2\mu^2-\varkappa^2\lambda^2-\varkappa^2\lambda^2\mu^2$$
$$E\quad=\varkappa^2\lambda^2\mu^2,$$

so ergiebt sich leicht aus (α):

$$d\cdot\frac{\sqrt{R(x)}}{x-\frac{1}{\varkappa^2}}=-\frac{A}{2}\cdot\frac{dx}{\left(x-\frac{1}{\varkappa^2}\right)\sqrt{R(x)}}+$$
$$\left[\frac{C}{2}\left(x-\frac{1}{\varkappa^2}\right)+D\left(x-\frac{1}{\varkappa^2}\right)^2+\frac{3}{2}E\left(x-\frac{1}{\varkappa^2}\right)^3\right]\frac{dx}{\sqrt{R(x)}}$$

oder

$$(\beta)\qquad\int_0^{\cdot}\frac{dx}{\left(x-\frac{1}{\varkappa^2}\right)\sqrt{R(x)}}$$
$$=\int_0^{\cdot}\left[\frac{C}{A}\left(x-\frac{1}{\varkappa^2}\right)+\frac{2D}{A}\left(x-\frac{1}{\varkappa^2}\right)^2+\frac{3E}{A}\left(x-\frac{1}{\varkappa^2}\right)^3\right]\frac{dx}{\sqrt{R(x)}}$$
$$-\frac{2}{A}\cdot\frac{\sqrt{R(x)}}{x-\frac{1}{\varkappa^2}}$$
$$=\int_0^{\cdot}\left[Px^3+Qx^2+Rx+S\right]\frac{dx}{\sqrt{R(x)}}+\frac{2}{A\varkappa^2}\cdot\frac{\sqrt{R(x)}}{x-\frac{1}{\varkappa^2}},\;\ldots\ldots$$

wenn

$$\frac{3E}{A}=P\varkappa^2$$
$$-\frac{9E}{A\varkappa^2}+\frac{2D}{A}=-Q\varkappa^2$$
$$\frac{9E}{A\varkappa^4}-\frac{4D}{A\varkappa^2}+\frac{C}{A}=-R\varkappa^2$$
$$-\frac{3E}{A\varkappa^6}+\frac{2D}{A\varkappa^4}-\frac{C}{A\varkappa^2}=-S\varkappa^2$$

gesetzt wird.

Da nun ausserdem, wie unmittelbar zu sehen, die Gleichung besteht

$$\int_0^1 \frac{dx}{(x-\varkappa^2 x)\sqrt{R(x)}} = \varkappa \frac{\partial K}{\partial \varkappa} + K,$$

so ergiebt sich aus (β) die gesuchte vierte Differentialgleichung in der Form:

$$\varkappa \frac{\partial K}{\partial \varkappa} + K = P.E' + Q.E + R.K' + S.K, \tag{4}$$

worin

$$-Px^2 = \frac{3\varkappa^2\lambda^2\mu^2}{A},$$

$$+Q\varkappa^2 = \frac{\lambda^2\mu^2 + 2\varkappa^2\mu^2 + 2\varkappa^2\lambda^2 + 2\varkappa^2\lambda^2\mu^2}{A},$$

$$-R\varkappa^2 = \frac{-\lambda^2\mu^2 + \varkappa^2\mu^2 + \varkappa^2\lambda^2 + \varkappa^2\lambda^2\mu^2 + \varkappa^4 + \varkappa^4\mu^2 + \varkappa^4\lambda^2}{A\varkappa^2},$$

$$-S\varkappa^2 = \frac{-\lambda^2\mu^2 + \varkappa^2\mu^2 + \varkappa^2\lambda^2 + \varkappa^2\lambda^2\mu^2 - \varkappa^4 - \varkappa^4\lambda^2 - \varkappa^4\mu^2}{A\varkappa^4},$$

Aus den vier gleichzeitigen Differentialgleichungen (1), (2), (3), (4) in den Grössen

$$K, K', E, E'$$

folgt unmittelbar die lineare Differentialgleichung vierter Ordnung für die Perioden der hyperelliptischen Functionen erster Ordnung, deren allgemeines Integral, wenn

$$K_{11} = \int_{\frac{1}{\lambda^2}}^{\frac{1}{\varkappa^2}} \frac{dx}{\sqrt{R(x)}} \qquad K_{12} = \int_1^0 \frac{dx}{\sqrt{R(x)}}$$

$$i\overline{K}_{11} = \int_{\frac{1}{\mu^2}}^{\frac{1}{\lambda^2}} \frac{dx}{\sqrt{R(x)}} \qquad i\overline{K}_{12} = \int_{\frac{1}{\varkappa^2}}^{1} \frac{dx}{\sqrt{R(x)}}$$

$$iK_{11}' = i\overline{K}_{11} \quad , \quad iK_{12}' = i\overline{K}_{11} + i\overline{K}_{12}$$

gesetzt wird, durch

$$C_1 K_{11} + C_2 K_{12} + C_3\, iK_{11}' + C_4\, iK_{12}'$$

dargestellt wird, worin C_1, C_2, C_3, C_4 beliebige Constanten bedeuten.

In derselben Weise wird die Differentialgleichung der Perioden für die hyperelliptischen Functionen ϱ^{ter} Ordnung entwickelt, deren Ordnung alsdann die $2\varrho^{\text{te}}$ ist.

Greifswald im November 1868.

Berichtigung eines Satzes von Abel, die Darstellung der algebraischen Functionen betreffend.

Von Königsberger in Greifswald.

In der berühmten Arbeit „Beweis der Unmöglichkeit, algebraische Gleichungen von höheren Graden als dem vierten allgemein aufzulösen"*) giebt Abel eine Eintheilung der algebraischen Functionen nach Ordnung und Grad und zeigt, dass jede algebraische Function v von der Ordnung μ und dem Grade m (nach den dort gegebenen Definitionen) in der Form

(1) $$v = q_0 + q_1 p^{\frac{1}{n}} + q_2 p^{\frac{2}{n}} + \cdots + q_{n-1} p^{\frac{n-1}{n}}$$

darstellbar ist, worin $q_0, q_1, \ldots, q_{n-1}$ Functionen von der μ^{ten} Ordnung und höchstens vom $m-1^{\text{ten}}$ Grade und p eine Function von der $\mu-1^{\text{ten}}$ Ordnung ist, deren n^{te} Wurzel nicht rational durch $q_0, q_1, \ldots, q_{n-1}$ ausgedrückt werden kann. Um nun den für die Theorie der Gleichungen sehr wichtigen Satz herzuleiten, dass, wenn eine Gleichung algebraisch auflösbar ist, man der Wurzel stets eine solche Form geben kann, dass sich alle algebraischen Functionen, aus denen sie zusammengesetzt ist, als rationale Functionen der Wurzeln der gegebenen Gleichung darstellen lassen, war es nöthig, die Form (1) so umzugestalten, dass der Coefficient von $p^{\frac{1}{n}}$ die Einheit ist, und hier hat sich bei Abel ein Fehler eingeschlichen, der auf die dort gemachten Schlüsse ohne Einfluss geblieben und den ich an dieser Stelle nur deshalb ein für allemal berichtigen will, weil derselbe auch in die beiden Ausgaben des *cours d'algèbre* von Serret übergegangen ist.

Es wird nämlich, wenn q_μ eine von den Grössen

$$q_0 \; q_1 \; q_2 \cdots q_{n-1}$$

bedeutet, welche nicht Null ist, und

(2) $$q_\mu^n \cdot p^\mu = p_1$$

gesetzt wird, die Form der algebraischen Function in

*) Journal für Mathematik von Crelle Band 1.

$$(3) \qquad v = r_0 + p_1^{\frac{1}{n}} + r_2\, p_1^{\frac{2}{n}} + \cdots + r_{n-1}\, p_1^{\frac{n-1}{n}}$$

übergehen; jedoch ist nicht, wie Abel es ausspricht, p_1 eine algebraische Function von der Ordnung $\mu - 1$, folglich nicht zuzugeben, dass die durch (1) dargestellte algebraische Function v genau in derselben Weise durch (3) dargestellt wäre, worin nur der Coefficient von $p_1^{\frac{1}{n}}$ die Einheit sei. Vielmehr ist unmittelbar aus der Substitution (2) zu ersehen, dass die neue Function p_1 ebenso wie q_μ eine Function von der Ordnung μ und höchstens vom Grade $m-1$ ist, aber eine so beschaffene Function von der Ordnung μ, dass die n^{te} Wurzel daraus, wie aus

$$p_1^{\frac{1}{n}} = p^{\frac{\mu}{n}} \cdot q_\mu$$

hervorgeht, auch noch eine Function derselben Ordnung bleibt. Es ist also die transformirte Form (3) nicht mehr geordnet nach Potenzen der n^{ten} Wurzel aus einer Function der $\mu - 1^{\text{ten}}$ Ordnung, sondern geordnet nach Potenzen der n^{ten} Wurzel aus einer Specialfunction μ^{ter} Ordnung, deren n^{te} Wurzel wiederum eine Function der μ^{ten} Ordnung ist; und es lautet somit der auf Grund dieser Auseinandersetzungen berichtigte Hülfssatz von Abel folgendermassen:

Wenn v eine algebraische Function von der Ordnung μ und dem Grade m ist, so kann man immer setzen:

$$v = q_0 + p^{\frac{1}{n}} + q_2\, p^{\frac{2}{n}} + \cdots + q_{n-1} p^{\frac{n-1}{n}},$$

worin n eine Primzahl, $q_0, q_2, \ldots q_{n-1}$ algebraische Functionen von der Ordnung μ und höchstens vom Grade $m-1$ sind und p eine ebensolche Function ist, jedoch so beschaffen, dass auch $p^{\frac{1}{n}}$ von der μ^{ten} Ordnung ist und sich nicht durch eine rationale Function von $q_0, q_2, q_3, \ldots, q_{n-1}$ ausdrücken lässt.

Greifswald im November 1868.

Ueber die Curven, für welche die Classe der zugehörigen Abel'schen Functionen $p = 2$ ist.

Von A. Clebsch in Göttingen.

Die Curven des Geschlechts $p = 2$ haben als Normalcurve eine Curve 4^{ter} Ordnung mit einem Doppelpunkt, oder, was dasselbe ist, die Coordinaten eines Punktes der Curve sind rationale Functionen von λ und $\sqrt{L}$, wo L eine ganze Function 6^{ten} Grades des willkürlichen Parameters λ ist. Die Darstellung dieser Coordinaten als solche Function, welche ich in der von Hrn. Gordan und mir herausgegebenen „Theorie der Abel'schen Functionen" gegeben habe, bedarf, wie ich einer Mittheilung meines verehrten Freundes Cremona verdanke, einer Correction *), weswegen ich dieselbe hier nochmals ausführen will.

Ausser den $\frac{n-1\,.\,n-2}{2} - 2$ Doppelpunkten wähle ich beliebig auf der Curve $2n-2$ feste Punkte, und lege durch sie alle ein System von Curven $(n-1)^{\text{ter}}$ Ordnung. Diese Curven müssen dann

$$\frac{n-1\,.\,n-2}{2} - 2 + 2n - 2 = \frac{n\,.\,n+1}{2} - 3$$

linearen Bedingungen genügen, und die Gleichung des Systems wird also

$$\alpha_1\,\varphi_1 + \alpha_2\,\varphi_2 + \alpha_3\,\varphi_3 = 0\,,$$

wo die φ specielle Curven des Systems sind, welche nicht einem Büschel angehören, und die α willkürliche Parameter bedeuten. Wenn man nun durch die eindeutigen Transformationen

$$\begin{aligned} \varrho\,y_1 &= \varphi_1\,(x_1\,,\,x_2\,,\,x_3) \\ \varrho\,y_2 &= \varphi_2\,(x_1\,,\,x_2\,,\,x_3) \\ \varrho\,y_3 &= \varphi_3\,(x_1\,,\,x_2\,,\,x_3) \end{aligned}$$

die gegebene Curve $f(x_1\,,\,x_2\,,\,x_3) = 0$ in eine Curve

$$F(y_1\,,\,y_2\,,\,y_3) = 0$$

---

*) Es ist a. a. O. p. 77, Z. 9 v. o. das Wort „beliebig", p. 79, Z. 6 v. o. die Worte „einen ausgenommen" zu streichen.

überführt, so erhält man die x dabei als homogene Functionen der y:

$$\sigma x_1 = \Phi_1 (y_1, y_2, y_3)$$
$$\sigma x_2 = \Phi_2 (y_1, y_2, y_3)$$
$$\sigma x_3 = \Phi_3 (y_1, y_2, y_3)$$

und die Curve $F = 0$ ist von der Ordnung (vgl. a. a. O. p. 55)

$$n(n-1) - (2n-2) - \{(n-1)(n-2) - 4\} = 4,$$

also eine Curve 4ter Ordnung mit einem Doppelpunkt.

Jedem System von 4 Punkten, in welchen eine Curve

$$\alpha_1 \varphi_1 + \alpha_2 \varphi_2 + \alpha_3 \varphi_3 = 0$$

die Curve $f = 0$ (ausser den festen Schnittpunkten) noch schneidet, entspricht das System der vier Punkte, in welchen die Gerade

$$\alpha_1 y_1 + \alpha_2 y_2 + \alpha_3 y_3 = 0$$

die neue Curve $F = 0$ schneidet. Betrachten wir unter den letztern Geraden insbesondere diejenigen, welche durch den Doppelpunkt von $F = 0$ gehen. Diese, und diese Geraden allein, haben die Eigenschaft, dass für alle Geraden des aus ihnen gebildeten Büschels zwei Schnittpunkte fest liegen, nämlich die im Doppelpunkt von $F = 0$ vereinigten. Ist aber für die Geraden dieses Büschels λ ein Parameter, und

$$\alpha_1 = a_1 + \lambda b_1$$
$$\alpha_2 = a_2 + \lambda b_2$$
$$\alpha_3 = a_3 + \lambda b_3,$$

so dass

$$a_2 b_3 - b_2 a_3 \quad , \quad a_3 b_1 - b_3 a_1 \quad , \quad a_1 b_2 - b_1 a_2$$

die Coordinaten des Doppelpunktes von $F = 0$ sind, so ist der entsprechende Curvenbüschel

$$(a_1 \varphi_1 + a_2 \varphi_2 + a_3 \varphi_3) + \lambda (b_1 \varphi_1 + b_2 \varphi_2 + b_3 \varphi_3) = 0$$

ein solcher, welcher mit $f = 0$ ausser den oben genannten $\frac{n-1 \,.\, n-2}{2} + 2n - 4$ Punkten noch zwei weitere gemein hat, also einen mehr, als im Allgemeinen geschehen kann. Während im Allgemeinen durch jeden weitern auf $f = 0$ gewählten festen Punkt ein Büschel von Curven $\varphi = 0$ bestimmt wird, welcher die Curve $f = 0$ in drei beweglichen Punkten schneidet, sieht man hier einen solchen besondern Büschel vor sich, bei welchem noch einer dieser beiden Punkte fest geworden ist. Man hat somit folgenden Satz:

Zu je $2n - 2$ Punkten von $f = 0$ giebt es immer ein, und nur ein, Punktepaar auf $f = 0$, welches mit jenen und den Doppelpunkten von $f = 0$ Grundpunkte eines Büschels bildet, welcher $f = 0$ nur in zwei beweglichen Punkten schneidet.

Legt man als $\varphi_1 = 0$ und $\varphi_2 = 0$ zwei Curven eines solchen Büschels zu Grunde, so gehen die Geraden $y_1 = 0$, $y_2 = 0$ durch den Doppelpunkt von $F = 0$; und setzt man also $y_2 = \lambda y_1$, so muss $F = 0$ in die Form übergehen

$$P y_3^2 + 2 Q y_3 y_1 + R y_1^2 = 0,$$

wo P, Q, R rationale Functionen von λ sind, die respective die Grade 2, 3, 4 haben. Daher wird $y_3 : y_1$ eine rationale Function von λ und von $\sqrt{Q^2 - PR}$, von der Quadratwurzel aus einem Ausdruck sechsten Grades. Daher werden auch die x, welche rationale Functionen der y waren, jetzt rationale Functionen von λ und $\sqrt{Q^2 - PR}$, was die gesuchte Darstellung liefert. Der eben gefundene Büschel giebt aber auch sofort das Mittel, die a. a. O. p. 77 gegebene Darstellungsweise durchzuführen.

Göttingen, den 21. October 1868.

Ueber die Invarianten der einfachsten Systeme simultaner binärer Formen.

Von A. Bessel in St. Petersburg.

§. 1.

Aus der allgemeinen Theorie der Invarianten, wie sie von H. Aronhold im 62. Bande des Borchardt'schen Journals entwickelt worden ist, geht hervor, dass jede Invariante einer gegebenen Form oder eines gegebenen Formensystems eine algebraische Function gewisser Fundamentalinvarianten der Form oder des Systems ist. Es ist interessant, die Beschaffenheit dieser algebraischen Function für einzelne Formen und Formensysteme näher zu untersuchen. So gelangt z. B. H. Hermite in seiner Abhandlung „Sur la résolution de l'équation du cinquième degré" zu dem eleganten Lehrsatz, dass jede Invariante einer binären Form 5ten Grades sich als eine ganze rationale Function der 3 Fundamentalinvarianten und der Invariante 18ten Grades, welche gleich der Quadratwurzel aus einer ganzen Function jener 3 Invarianten ist, darstellen lässt. Ich habe gefunden, dass mehrere Systeme simultaner binärer Formen einer ganz ähnlichen Behandlung, wie die Form 5ten Grades, zugänglich sind, und bin dadurch zu ganz analogen Theoremen geführt worden. Der leichtern Verständigung willen werde ich die Hermite'sche Unterscheidung directer und windschiefer Invarianten (inv. directs und inv. gauches) beibehalten. Ist nämlich

$$\varphi(A_i, B_i, \ldots) = r^\lambda \varphi(a_i, b_i, \ldots), \tag{1}$$

wo $a_i, b_i, \ldots$ die Coefficienten der gegebenen Formen, $A_i, B_i, \ldots$ die der transformirten Formen, r der Modul der linearen Substitution, so ist nach Hermite die Invariante $\varphi(a_i, b_i, \ldots)$ eine directe, wenn λ eine gerade Zahl ist, im entgegengesetzten Falle eine windschiefe. Im letztern Falle ändert $\varphi(a_i, b_i, \ldots)$ das Zeichen, wenn man die beiden Variabeln x_1 und x_2 mit einander vertauscht. Denn diese Vertauschung kommt auf die Substitution $x_1 = X_2$, $x_2 = X_1$ hinaus, deren Modul gleich -1 ist. Die Vertauschung der beiden Variabeln ist aber auch gleichbedeutend mit der Umkehrung der Reihenfolge der Coefficienten jeder einzelnen gegebenen Form. Führt man also für die gegebenen Formen folgende Bezeichnung ein:

$$u = a_0 x_1^m + m a_1 x_1^{m-1} x_2 + \dots \quad , \quad v = b_0 x_1^n + n b_1 x_1^{n-1} x_2 + \dots , \dots ,$$

so können die windschiefen Invarianten auch als solche definirt werden, welche das Zeichen ändern, wenn man a_i mit a_{m-i}, b_i mit b_{n-i}, u. s. w. vertauscht, während die directen Invarianten dabei unverändert bleiben.

Der Exponent λ spielt bei der soeben eingeführten Bezeichnung der Formen noch eine andere Rolle. Jede Invariante hat nämlich die Eigenschaft, dass die Summe der Indices der Coefficienten in allen ihren Gliedern dieselbe, und zwar gleich λ ist. Denn vertauscht man x_2 mit ϱx_2, ohne x_1 zu ändern, so muss, da dies eine Substitution vom Modul ϱ ist, die Invariante

$$\varphi(a_0, a_1\varrho, a_2\varrho^2, \dots b_0, b_1\varrho, \dots) = \varrho^\lambda \varphi(a_0, a_1, a_2, \dots b_0, b_1, \dots)$$

werden, was nur dann möglich ist, wenn in jedem Gliede der Invariante φ die Summe aller Indices $= \lambda$ ist. Ich werde diese Summe nach H. Fiedler's Vorgange das Gewicht der Invariante nennen. Ist die Invariante $\varphi(a_i, b_i, \dots)$ in Bezug auf die Coefficienten jeder einzelnen Form homogen, und zwar in Bezug auf die der Form u vom Grade μ, in Bezug auf die der Form v vom Grade ν, u. s. w., so ist

$$\lambda = \tfrac{1}{2}(m\mu + n\nu + \dots), \tag{2}$$

wie man sofort einsieht, wenn man sich in die Gleichung (1) für die Coefficienten $A_i, B_i, \dots$ deren Werthe als Functionen der $a_i, b_i, \dots$ und der Substitutionscoefficienten substituirt denkt, wodurch diese Gleichung identisch werden muss. Ich werde mich in nachstehenden Untersuchungen auf solche Invarianten beschränken, die in Bezug auf die Coefficienten jeder einzelnen Form homogen sind, da jede andere Invariante sich durch Invarianten der eben angegebenen Beschaffenheit linear ausdrücken lässt, wie man sich leicht überzeugt, indem man, wenn etwa $\varphi(a_i, b_i, \dots)$ in Bezug auf die a_i nicht homogen ist, ϱa_i statt a_i, und folglich auch ϱA_i statt A_i, schreibt und die Coefficienten der einzelnen Potenzen von ϱ in beiden Theilen der Gleichung (1) mit einander vergleicht.

§. 2.

1. Das System zweier quadratischer binärer Formen.

Zwei simultane quadratische Formen $u = a_{11}x_1^2 + 2a_{12}x_1x_2 + a_{22}x_2^2$, $v = b_{11}x_1^2 + 2b_{12}x_1x_2 + b_{22}x_2^2$ haben bekanntlich folgende 3 Invarianten:

$$A = a_{11}a_{22} - a_{12}^2, \quad 2B = a_{11}b_{22} + a_{22}b_{11} - 2a_{12}b_{12}, \quad C = b_{11}b_{22} - b_{12}^2.$$

Es lässt sich nachweisen, dass jede Invariante der Formen u und v eine ganze rationale Function dieser 3 Invarianten ist. (In dieser Abhandlung ist durchgängig nur von solchen Invarianten die Rede, welche ganze Functionen der Coefficienten sind.) Ich wende zu diesem Zweck eine Substitution vom Modul 1 an, welche die Form u in $2\,a_1 X_1 X_2$ verwandelt. Geht alsdann zugleich v in $b_0 X_1^2 + 2\,b_1 X_1 X_2 + b_2 X_2^2$ über, so nehmen die Transformationsrelationen die Gestalt an:

$$-a_1^2 = A \quad , \quad -a_1 b_1 = B \quad , \quad b_0 b_2 - b_1^2 = C\,.$$

Hieraus folgt:

$$a_1 = \sqrt{(-A)} \quad , \quad b_1 = -\frac{B}{\sqrt{(-A)}} \quad , \quad b_0 b_2 = C - \frac{B^2}{A}\,. \qquad (1)$$

Es ist nun offenbar, da die Coefficienten der äussern Glieder in der transformirten Form u verschwinden, jede Invariante des Systems

$$\varphi\,(a_{11}\,, a_{12}\,, a_{22}\,, b_{11}\,, b_{12}\,, b_{22}) = a_1^\nu\,\psi\,(b_0\,, b_1\,, b_2)\,,$$

wo ν der Grad der Invariante φ in Bezug auf die Coefficienten von u, und ψ eine ganze rationale Function ist. Versteht man nun unter ν' den Grad von φ in Bezug auf die Coefficienten von v, so ist das Gewicht der Invariante φ gleich $\nu + \nu'$, mithin die Summe der Indices in jedem Gliede von ψ gleich ν'. Es hat nun jedes Glied von ψ bis auf eine numerische Constante die Gestalt

$$b_0^p\, b_1^q\, b_2^s\,,$$

wo $p + q + s = \nu'$. Da nun gleichfalls $0\,.\,p + 1\,.\,q + 2\,.\,s = \nu'$ sein soll, so ergiebt sich $p = s$. Mithin ist ψ eine ganze rationale Function von b_1 und dem Product $b_0\,b_2$. Es folgt hieraus zunächst, dass 2 simultane quadratische Formen keine Invariante von ungeradem Grade oder, was hier dasselbe ist, von ungeradem Gewicht, haben können. Denn eine solche Invariante müsste das Zeichen ändern, wenn man b_0 mit b_2 vertauscht, was offenbar unmöglich ist, wenn diese 2 Coefficienten nicht anders, als im Product $b_0\,b_2$ vorkommen. Setzt man in ψ für b_1 und $b_0 b_2$ die oben erhaltenen Werthe ein, so wird

$$\varphi\,(a_{11}\,, a_{12}\,, a_{22}\,, b_{11}\,, b_{12}\,, b_{22}) = (-A)^{\frac{\nu-\nu'}{2}}\,f\,(A\,, B\,, C)\,, \qquad (2)$$

wo f eine ganze rationale Function, und $\frac{\nu-\nu'}{2}$ eine ganze Zahl ist, weil $\nu + \nu'$ stets gerade sein muss. Diese Gleichung ist zwar unter der Voraussetzung hergeleitet, dass sich u in $2\,a_1\,X_1 X_2$ verwandeln lasse, was natürlich nur dann möglich ist, wenn A nicht verschwindet. Ist aber die Gleichung für alle Werthe von B und C und alle Werthe von A ausser $A = 0$ gültig, so muss sie offenbar auch für $A = 0$ fortbestehen. Denn giebt man allen Coefficienten, ausser einem der Coefficienten von u, etwa a_{12}, beliebige constante Werthe, so ist die Gleichung (2), oder, wie man sie, falls $\nu < \nu'$ ist, auch schreiben kann

$$(-A)^{\frac{\nu'-\nu}{2}} . \varphi = f(A, B, C)$$

für alle Werthe der Variabeln a_{12}, ausser $a_{12} = \sqrt{a_{11} a_{22}}$, erwiesen. Alsdann ist sie aber nothwendig identisch, und folglich auch für $a_{12} = \sqrt{a_{11} a_{22}}$, d. h. für $A = 0$, richtig. Es ist nun auch klar, dass $f(A, B, C)$, falls $\nu < \nu'$ ist, durch $A^{\frac{\nu'-\nu}{2}}$ theilbar sein muss: da die 3 Invarianten A, B, C von einander unabhängig sind, so könnte eine wesentlich gebrochene Function derselben, deren Nenner eine Potenz von A ist, unmöglich gleich einer ganzen Function φ der Coefficienten a_i und b_i sein.

Es ist also **jede Invariante zweier simultaner quadratischer binärer Formen eine ganze rationale Function der 3 Fundamentalinvarianten A, B, C.**

Wenn $\nu' > \nu$ ist, so kommt man rascher zum Ziele, wenn man eine solche Substitution vom Modul 1 wählt, dass v dem Producte der neuen Variabeln proportional werde: dann erhält man für φ unmittelbar eine ganze Function von A, B, C, indem an die Stelle der Gleichung (2) folgende tritt:

$$\varphi = C^{\frac{\nu'-\nu}{2}} f_1(A, B, C) .$$

wo $\frac{\nu'-\nu}{2}$ eine positive ganze Zahl, und f_1 eine ganze rationale Function ist. Ich habe jedoch die obige Beweisführung nicht übergehen wollen, weil dieselbe auch auf andere Systeme von binären Formen anwendbar ist.

Das in Rede stehende Formensystem hat bekanntlich eine quadratische Covariante $w = u_1 v_2 - u_2 v_1 = w_{11} x_1^2 + 2 w_{12} x_1 x_2 + w_{22} x_2^2$, wo u_1, u_2 und v_1, v_2 resp. die halben Ableitungen von u und v bezeichnen. Diese Covariante hängt mit u und v folgendermassen zusammen:

$$w^2 = -(A v^2 - 2 B u v + C u^2) ,$$

während die Coefficienten derselben folgenden Relationen genügen:

$$\begin{aligned} w_{11} a_{22} - 2 w_{12} a_{12} + w_{22} a_{11} &= 0 , \\ w_{11} b_{22} - 2 w_{12} b_{12} + w_{22} b_{11} &= 0 , \\ w_{11} w_{22} - w_{12}^2 &= A C - B^2 \text{*)}. \end{aligned}$$

Diese Relationen werden in der Folge öfter zur Anwendung kommen.

---

*) S. Cayley, Fifth memoir upon Quantics, Phil. Trans. Bd. 148, oder Clebsch e Gordan, Sulla rappresentazione tipica delle forme binarie §. 1, Anali di Matematica, Serie II, Tomo I.

§. 3.

2. Das System dreier quadratischer binärer Formen.

Es seien $u = a_{11}x_1^2 + 2\,a_{12}\,x_1 x_2 + a_{22}x_2^2$, $v = b_{11}x_1^2 + \ldots$, $w = c_{11}x_1^2 + \ldots$ drei beliebige quadratische Formen. Setzt man symbolisch $u = a_x^2 = a_x'^2 = \ldots$, $v = b_x^2 = b_x'^2 = \ldots$, $w = c_x^2 = c_x'^2 = \ldots$, so lassen sich deren 6 Invarianten 2^{ten} Grades mittels der von H. Clebsch mehrfach angewandten Bezeichnung folgendermassen darstellen

$$A = \tfrac{1}{2}(a\,a')^2 \;,\quad B = \tfrac{1}{2}(b\,b')^2 \;,\quad C = \tfrac{1}{2}(c\,c')^2 \;,\quad D = \tfrac{1}{2}(b\,c)^2 \;,$$
$$E = \tfrac{1}{2}(c\,a)^2 \;,\quad F = \tfrac{1}{2}(a\,b)^2 \,.$$

Bildet man die 3 Covarianten

$$p = p_x^2 = (bc)\,b_x c_x \;,\quad q = q_x^2 = (ca)\,c_x a_x \;,\quad r = r_x^2 = (ab)\,a_x b_x$$

und fügt sie zu den 3 gegebenen Formen hinzu, so hat das so erweiterte System noch folgende simultane Invarianten:

$$(pa)^2 \;,\; (qb)^2 \;,\; (rc)^2 \,, \tag{1}$$

während alle übrigen ähnlicher Gestalt, wie z. B. $(pb)^2$, $(pc)^2$, identisch Null sind. Setzt man in dem symbolischen Ausdruck von p $x_1 = a_2$, $x_2 = -a_1$, so findet man

$$(pa)^2 = (bc)\,(ba)\,(ca) \,.$$

Auf ähnliche Weise ergiebt sich, dass $(qb)^2 = (ca)\,(cb)\,(ab)$, und $(rc)^2 = (ab)\,(ac)\,(bc)$. Es sind mithin alle 3 Invarianten (1) einander gleich. Um den wirklichen Ausdruck dieser Invariante leichter zu finden, bemerke ich zunächst, dass

$$(ab)\,(ac)\,(bc) = a_2^2\,b_2^2\,c_2^2 \left(\frac{a_1}{a_2} - \frac{b_1}{b_2}\right) \left(\frac{a_1}{a_2} - \frac{c_1}{c_2}\right) \left(\frac{b_1}{b_2} - \frac{c_1}{c_2}\right)$$

$$= -\,a_2^2\,b_2^2\,c_2^2 \begin{vmatrix} 1 & \frac{a_1}{a_2} & \left(\frac{a_1}{a_2}\right)^2 \\ 1 & \frac{b_1}{b_2} & \left(\frac{b_1}{b_2}\right)^2 \\ 1 & \frac{c_1}{c_2} & \left(\frac{c_1}{c_2}\right)^2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1^2 & a_1 a_2 & a_2^2 \\ b_1^2 & b_1 b_2 & b_2^2 \\ c_1^2 & c_1 c_2 & c_2^2 \end{vmatrix} .$$

Setzt man also

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{22} \\ b_{11} & b_{12} & b_{22} \\ c_{11} & c_{12} & c_{22} \end{vmatrix} = 2\,K \,,$$

so ist K eine Invariante 3^{ten} Grades, welche durch jeden der 4 Ausdrücke

$$\tfrac{1}{2}(ab)\,(ac)\,(bc) \;,\quad \tfrac{1}{2}(pa)^2 \;,\quad \tfrac{1}{2}(qb)^2 \;,\quad \tfrac{1}{2}(rc)^2$$

symbolisch dargestellt werden kann. Diese Invariante ist eine windschiefe, denn nach Gleichung (2) §. 1 findet man für den vorliegenden Fall $\lambda = 3$. Sie kann also jedenfalls keine rationale Function der obigen 6 directen Invarianten sein. Für das Quadrat von K findet man mittels des von HH. Clebsch und Gordan angewandten Verfahrens folgenden Ausdruck:

$$K^2 = \frac{1}{8} \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{22} \\ b_{11} & b_{12} & b_{22} \\ c_{11} & c_{12} & c_{22} \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} a_{22} & -2a_{12} & a_{11} \\ b_{22} & -2b_{12} & b_{11} \\ c_{22} & -2c_{12} & c_{11} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} A & F & E \\ F & B & D \\ E & D & C \end{vmatrix} . \quad (2)$$

Da man aus den 3 Gleichungen, welche u, v, w als Functionen von x_1 und x_2 bestimmen, diese beiden Variabeln eliminiren kann, so muss offenbar zwischen u, v und w eine identische Relation stattfinden. Diese Relation kann folgendermassen dargestellt werden:

$$\begin{vmatrix} A & F & E & u \\ F & B & D & v \\ E & D & C & w \\ u & v & w & 0 \end{vmatrix} = 0 ,$$

oder:

$$Lu^2 + Mv^2 + Nw^2 + 2\,Pvw + 2\,Qwu + 2\,Ruv = 0 . \quad (3)$$

wo L, M, ... die ersten Minoren der Determinante (2) bezeichnen. Was die Herleitung dieser Relation, wie auch der folgenden:

$$\left.\begin{aligned} K(v_1 w_2 - v_2 w_1) = \tfrac{1}{2}\,\Phi'(u) \quad , \quad K(w_1 u_2 - w_2 u_1) = \tfrac{1}{2}\,\Phi'(v) , \\ K(u_1 v_2 - u_2 v_1) = \tfrac{1}{2}\,\Phi'(w) \end{aligned}\right\} \quad (4)$$

betrifft, wo Φ den ersten Theil der Gleichung (3) bezeichnet, so verweise ich auf die schon citirte Abhandlung der HH. Clebsch und Gordan.

Ich werde jetzt den Ausdruck einer beliebigen Invariante untersuchen. Geht u in Folge einer linearen Substitution vom Modul 1 in $2a_1 X_1 X_2$ über, während
$v = b_0 X_1^2 + 2b_1 X_1 X_2 + b_2 X_2^2$ und $w = c_0 X_1^2 + 2c_1 X_1 X_2 + c_2 X_2^2$ wird, so ist

$$-a_1^2 = A \quad , \quad b_0 b_2 - b_1^2 = B \quad , \quad c_0 c_2 - c_1^2 = C ,$$
$$b_0 c_2 + b_2 c_0 - 2b_1 c_1 = 2D \quad , \quad -a_1 c_1 = D \quad , \quad -a_1 b_1 = F .$$

Hieraus ergiebt sich

$$\left.\begin{aligned} a_1 = \sqrt{(-A)} \quad , \quad b_1 = -\frac{F}{\sqrt{(-A)}} \quad , \quad c_1 = -\frac{E}{\sqrt{(-A)}} , \\ b_0 b_2 = B - \frac{F^2}{A} \quad , \quad c_0 c_2 = C - \frac{E^2}{A} . \end{aligned}\right\} \quad (5)$$

$$\tfrac{1}{2}(b_0 c_2 + c_0 b_2) = \frac{AD - EF}{A}$$

$$\begin{aligned} \tfrac{1}{4}(b_0 c_2 - c_0 b_2)^2 &= \tfrac{1}{4}(b_0 c_2 + c_0 b_2)^2 - b_0 b_2 \,.\, c_0 c_2 \\ &= -\frac{1}{A}\,(ABC - AD^2 - BE^2 - CF^2 + 2DEF) \end{aligned}$$

$$\left.\begin{aligned} b_0 c_2 &= \frac{1}{A}\,(AD - EF - \sqrt{-A}\,\sqrt{M}) , \\ b_2 c_0 &= \frac{1}{A}\,(AD - EF + \sqrt{-A}\,\sqrt{M}) , \end{aligned}\right\} \quad (6)$$

wo der Kürze halber $ABC - AD^2 - BE^2 - CF^2 + 2DEF = M$ gesetzt ist.

Bildet man die Invariante K aus den Coefficienten der transformirten Formen, so findet man

$$K = \tfrac{1}{2} a_1 (b_2 c_0 - b_0 c_2) = \sqrt{M}\,,$$

was auch mit Gleichung (2) übereinstimmt.

Ich werde nun nachweisen, dass die 4 Coefficienten b_0, b_2, c_0, c_2 in keiner Invariante anders vorkommen können, als in den Verbindungen $b_0 b_2$, $c_0 c_2$, $b_0 c_2$ und $b_2 c_0$. Jede Invariante nimmt, aus Coefficienten der transformirten Formen gebildet, die Gestalt

$$a_1^\nu \, \psi (b_0, b_1, b_2, c_0, c_1, c_2)$$

an, wo ν den Grad derselben in Bezug auf die Coefficienten von u, und ψ eine ganze rationale Function bezeichnet. Ist nun die Invariante vom Grade ν' in Bezug auf die Coefficienten von v, und vom Grade ν'' in Bezug auf die der Form w, so ist das Gewicht derselben $= \nu + \nu' + \nu''$, und mithin die Summe der Indices in jedem Gliede von ψ gleich $\nu' + \nu''$. Mithin muss in jedem Gliede von ψ die Anzahl der Factoren b_2 und c_2, deren Indices den Mittelwerth 1 übersteigen, eben so gross sein, wie die der Factoren b_0 und c_0, deren Indices unter demselben zurückbleiben, und folglich kann ψ als eine ganze Function der Coefficienten b_1 und c_1 und obiger 4 Producte angesehen werden.

Die weitere Untersuchung hängt davon ab, ob das Gewicht (hier zugleich der Grad) der betreffenden Invariante gerade oder ungerade ist.

1. Ist $\nu + \nu' + \nu''$ gerade, so enthält jedes Glied der Invariante nothwendig eine gerade Anzahl von Coefficienten mit dem Index 1, und setzt man in die Function ψ die Werthe (5) und (6) ein, so verschwinden folglich die Quadratwurzeln, welche die Coefficienten a_1, b_1, c_1 mit sich bringen, und die Invariante reducirt sich auf einen Ausdruck von der Form

$$P + Q \sqrt{-A} \sqrt{M}\,, \tag{7}$$

wo P und Q rationale Functionen der 6 Fundamentalinvarianten sind, welche nur eine Potenz von A im Nenner haben können. Die in Rede stehende Invariante muss aber, weil ihr Gewicht gerade ist (§. 1), unverändert bleiben, wenn man gleichzeitig b_0 mit b_2, und c_0 mit c_2 vertauscht. In Folge dieser Vertauschung gehen nur die Producte $b_0 c_2$ und $b_2 c_0$ in einander über, während alles Uebrige unverändert bleibt; und da die Werthe (6) dieser Producte sich nur durch das Vorzeichen von $\sqrt{M}$ von einander unterscheiden, so darf also auf den Ausdruck (7) eine Aenderung des Zeichens von $\sqrt{M}$ keinen Einfluss haben, d. h. es muss

$$P + Q \sqrt{-A} \sqrt{M} = P - Q \sqrt{-A} \sqrt{M}$$

sein, woraus $Q = 0$ folgt. Mithin ist die zu untersuchende Invariante $= P$. Es lässt sich nun ebenso wie in §. 2 nachweisen, dass diese Gleichheit auch für den Fall $A = 0$ fortbestehen muss, obgleich in diesem Falle die obige Transformation nicht ausführbar ist, und dass P nothwendig eine ganze Function der 6 Invarianten 2^{ten} Grades ist. Man hat mithin folgendes Theorem:

„Jede directe Invariante dreier simultaner quadratischer binärer Formen ist eine ganze rationale Function der 6 Invarianten A, B, C, D, E und F.“

2. Ist das Gewicht $\nu + \nu' + \nu''$ ungerade, so muss jedes Glied der Invariante eine ungerade Anzahl von Coefficienten mit dem Index 1 enthalten, und der Ausdruck der Invariante nimmt folglich, wenn man die Werthe (5) und (6) substituirt, folgende Gestalt an:

$$\sqrt{-A}\;(R + S\sqrt{-A}\sqrt{M}) = \sqrt{-A}\,.\,R + T\sqrt{M}\,,$$

wo R, S, T rationale Functionen der 6 Fundamentalinvarianten sind, welche nur eine Potenz von A im Nenner haben können. Im vorliegenden Falle ist die Invariante eine windschiefe, und muss folglich das Zeichen ändern, wenn man b_0 mit b_2, c_0 mit c_2 vertauscht; es muss mithin

$$R\sqrt{-A} + T\sqrt{M} = -\,(R\sqrt{-A} - T\sqrt{M})$$

sein, d. h. $R = 0$. Der allgemeinste Ausdruck einer windschiefen Invariante ist also

$$T\sqrt{M}\,.$$

Da $\sqrt{M}$ nicht mit A zugleich verschwindet, so überzeugt man sich leicht, dass die rationale Function T, welche der Herleitung nach eine Potenz von A im Nenner haben kann, nothwendig eine ganze Function von A, B, C, D, E und F sein muss.

Da $\sqrt{M} = K$, so ist hiermit folgendes Theorem bewiesen:

„Jede windschiefe Invariante dreier simultaner quadratischer binärer Formen ist gleich dem Product einer directen Invariante in die windschiefe Invariante K.“

Die 3 Gleichungen $\frac{1}{2}(pa)^2 = K$, $\frac{1}{2}(pb)^2 = 0$, $\frac{1}{2}(pc)^2 = 0$ beweisen, dass, falls K verschwindet, das Punktpaar $p = 0$ mit jedem der 3 Paare $u = 0$, $v = 0$, $w = 0$ harmonisch ist, und diese 3 letzteren mithin eine Involution bilden. Was für p gilt, gilt auch für q und r. Da es aber nur ein Punktpaar giebt, das mit 2 gegebenen Punktpaaren harmonisch ist, so können die 3 Formen p, q, r sich nur durch constante Factoren unterscheiden. In der That führt das Verschwinden der Invariante K unter den 3 gegebenen Formen eine lineare Relation herbei, welche durch die Gleichungen (4) in dreierlei Gestalt dargestellt wird, und in Folge dessen werden auch die 3 Functionaldeterminanten p, q, r einander proportional.

§. 4.

3. Das System einer quadratischen und einer kubischen binären Form.

Es seien die Formen

$u = \alpha x_1{}^2 + 2\beta x_1 x_2 + \gamma x_2{}^2$ und $v = a x_1{}^3 + 3 b x_1{}^2 x_2 + 3 c x_1 x_2{}^2 + d x_2{}^3$ gegeben. Setzt man symbolisch $v = a_x^3 = a_x'^3 = \cdots$ und bildet die quadratische Covariante $h = (a a')^2 a_x a'_x$, so haben die simultanen Formen $u = \alpha_x^2 = \alpha_x'^2 = \cdots$ und $h = b_x^2 = b_x'^2 = \cdots$ folgende 3 Invarianten:

$$A = \tfrac{1}{2}(\alpha\alpha')^2 \quad , \quad B = \tfrac{1}{2}(\alpha b)^2 \quad , \quad C = \tfrac{1}{2}(b b')^2 ,$$

und eine Covariante $w = (\alpha b)\,\alpha_x b_x$, die mit u und h durch die Relation

$$w^2 = -(A h^2 - 2 B h u + C u^2) \tag{1}$$

verbunden ist (§. 2). Andrerseits erhält man unmittelbar die simultanen Covarianten:

$$(a\alpha)\, a_x^2 \alpha_x \quad , \quad (a\alpha)^2 a_x ,$$

deren letztere linear ist. Setzt man $(a\alpha)^2 a_x = l = l_1 x_1 + l_2 x_2 = l_x = \cdots$, so erhält man als Resultanten von l und resp. v, w, h und u noch folgende 4 Invarianten:

$$\alpha l_2{}^2 - 2\beta l_1 l_2 + \gamma l_1{}^2 = 2E \quad , \quad w_{11} l_2{}^2 - 2 w_{12} l_1 l_2 + w_{22} l_1{}^2 = 2F,$$
$$h_{11} l_2{}^2 - 2 h_{12} l_1 l_2 + h_{22} l_1{}^2 = 2G \quad , \quad a l_2{}^3 - 3 b l_2{}^2 l_1 + 3 c l_2 l_1{}^2 - d l_1{}^3 = 2K.$$

Man bemerkt leicht, dass F und K einander gleich sind. Es ist nämlich

$$2F = (wl)(wl') = (\alpha b)(\alpha l)(b l') = (l\alpha)(a a')^2 (a\alpha)(a' l')$$
$$= (a' l')(a a')(a\alpha)\{(a' l)(\alpha a) + (l a)(\alpha a')\}$$

in Folge der Identität $(a a')(l\alpha) = (a' l)(\alpha a) + (l a)(\alpha a')$. Der Ausdruck $(a a')(a\alpha)(a l)(a'\alpha)(a' l')$ ändert aber das Zeichen, wenn man a mit a' und l mit l' vertauscht, und liefert folglich den Werth Null, wenn man die symbolischen Substitutionen ausführt. Mithin ist

$$2F = (a\alpha)^2 (a'\alpha)(a' l)(a' l') = (a' l)(a' l')(a' l'') = 2K .$$

Ferner lässt sich G durch A, B und C ausdrücken. Betrachtet man zunächst die Covariante

$$\tau = \tau_x^2 = (b a)(b a')(a\alpha)^2 a_x'^2 ,$$

so findet man

$$\tau = \tfrac{1}{2}(b a)(b a')\{(a\alpha)^2 a_x'^2 + (a'\alpha)^2 a_x^2\}$$
$$= \tfrac{1}{2}(b a)(b a')\{2(a\alpha)(a'\alpha)\, a_x a'_x + (a a')^2 \alpha_x^2\}$$
$$= \tfrac{1}{2} a_x a'_x \{(b a)^2 (a'\alpha)^2 + (a' b)^2 (a\alpha)^2 - (a a')^2 (b\alpha)^2\} + \tfrac{1}{2}(b b')^2 . \alpha_x^2 .$$

Die beiden ersten Glieder dieses Ausdrucks verschwinden, weil sie die lineare Covariante $(b a)^2 a_x = (b a')^2 a'_x$ der kubischen Form v als Factor enthalten; es ist mithin

$$\tau = C u - B h$$

und folglich, da $2G = (b l)(b l') = (b a)(b a')(a\alpha)^2 (a'\alpha)^2 = (\tau\alpha)^2$,

$$G = AC - B^2 .$$

Die Invariante K ist eine windschiefe, indem man für K nach Gleichung (2) §. 1 $\lambda = 9$ findet. Es kann sich also nur das Quadrat von K, nicht K selber, durch A, B, C und E rational ausdrücken lassen. Der Ausdruck

$$2K = w_{11} l_2^2 - 2 w_{12} l_1 l_2 + w_{22} l_1^2$$

weist darauf hin, dass man in Gleichung (1) $x_1 = l_2$, $x_2 = - l_1$ zu setzen hat, um den Werth von K^2 zu erhalten. Es ergiebt sich alsdann

$$K^2 = - (AG^2 - 2BGE + CE^2)$$

oder

$$K^2 = - A(AC-B^2)^2 + 2BE(AC-B^2) - CE^2 . \qquad (2)$$

Ich werde nun nachweisen, dass jede Invariante der simultanen Formen u und v sich als eine ganze rationale Function von A, B, C, E und K darstellen lässt. Ich transformire zu diesem Zweck die gegebenen Formen u und v mittels einer linearen Substitution vom Modul 1, so dass u dem Product der neuen Variabeln X_1 und X_2 proportional wird, und in v die beiden mittleren Coefficienten einander gleich werden. Die Möglichkeit einer solchen Transformation ist evident; da indessen die Transformationsrelationen sich nach den übrig bleibenden Coefficienten der transformirten Formen thatsächlich auflösen lassen, so folgt hieraus auch nachträglich sowohl die Unabhängigkeit der 4 Invarianten A, B, C, E, als auch die Möglichkeit der Transformation. Man erhält nämlich, wenn man $u = 2\delta X_1 X_2$, $v = g X_1^3 + 3\sqrt{\varkappa}\, X_1^2 X_2 + 3\sqrt{\varkappa}\, X_1 X_2^2 + g' X_2^3$ setzt, zur Bestimmung von $\delta, g, \varkappa, g'$ folgende Relationen:

$$-\delta^2 = A \quad , \quad \delta(\varkappa - gg') = B \quad , \quad -4\delta^3\varkappa = E ,$$
$$-g^2 g'^2 - 4\sqrt{\varkappa^3}\,(g+g') + 3\varkappa^2 + 6\varkappa gg' = C ,$$

aus denen sich folgende Werthe von δ , $\varkappa$, g , g' ergeben:

$$\delta = \sqrt{(-A)} \quad , \quad \varkappa = -\frac{E}{4\sqrt{(-A^3)}} ,$$
$$g = \frac{1}{\sqrt[4]{(-A^3)}\,\sqrt{(-E)}} \left\{ L - \sqrt{(-A^3)}\sqrt{M} \right\} ,$$
$$g' = \frac{1}{\sqrt[4]{(-A^3)}\,\sqrt{(-E)}} \left\{ L + \sqrt{(-A^3)}\sqrt{M} \right\} ,$$

wo $L = 2A^3C - 2A^2B^2 - 2ABE + E^2$, und

$$M = - A^3C^2 - AB^4 + 2A^2B^2C + 2ABCE - 2B^3E - CE^2 .$$

Da $l = - 2\delta\sqrt{\varkappa}\,(X_1 + X_2)$, so ergiebt sich hieraus sofort

$$K = - 4\delta^3\sqrt{\varkappa^3}\,(g - g') = \sqrt{M} ,$$

was mit Gleichung (2) übereinstimmt.

Es sei nun φ $(\alpha , \beta , \gamma , a , b , c , d)$ eine beliebige Invariante der simultanen Formen u und v. Ersetzt man die Coefficienten der gegebenen Formen durch die der transformirten, so erhält man einen Ausdruck von der Form

$$\delta^m f(g, \sqrt{\varkappa}, \sqrt{\varkappa}, g'),$$

wo m der Grad der Invariante φ in Bezug auf α, β, γ, und f eine ganze homogene Function ist; und setzt man für $\delta, \varkappa, g, g'$ die obigen Werthe ein, so erhält man:

$$\varphi = (-A)^{\frac{m}{2}} f\left(\frac{L - \sqrt{-A^3 M}}{E\sqrt[4]{-A^3}\sqrt{-E}}, \frac{E}{2\sqrt[4]{-A^3}\sqrt{-E}}, \frac{E}{2\sqrt[4]{-A^3}\sqrt{-E}}, \frac{L + \sqrt{-A^3 M}}{E\sqrt[4]{-A^3}\sqrt{-E}}\right).$$

Dieser Ausdruck lässt sich jedenfalls auf die Form

$$\varphi = (-A)^{\frac{m}{2} - \frac{3n}{4}} (-E)^{-\frac{n}{2}} E^{-\mu} \{P + Q\sqrt{-A^3 M}\}$$

bringen, wo P und Q ganze Functionen der 4 Fundamentalinvarianten, μ eine positive ganze Zahl und n den Grad von φ in Bezug auf die Coefficienten von v bezeichnet. Diese letzte Zahl ist stets gerade. Denn nach Gleichung (2) §. 1 ist das Gewicht der Invariante $\varphi = \frac{1}{2}(3n + 2m)$, und damit dies eine ganze Zahl sei, muss n gerade sein. Setzt man $n = 2p$, $\mu + p = q$, so wird

$$\varphi = (-A)^{\frac{1}{2}(m-3p)} (-E)^{-q} \{P + Q\sqrt{-A^3 M}\}.$$

Es kommt jetzt darauf an, ob die Invariante φ eine directe oder eine windschiefe ist. Im ersten Falle muss sie unverändert bleiben, wenn man g mit g' vertauscht, was auf eine Aenderung des Zeichens von $\sqrt{-A^3 M}$ in dem Ausdruck von φ hinauskommt. Es muss also, falls das Gewicht $3p + m$ eine gerade Zahl ist,

$$P + Q\sqrt{-A^3 M} = P - Q\sqrt{-A^3 M}$$

sein, d. h. es muss $Q = 0$ sein.

Ist hingegen die Invariante φ eine windschiefe, so muss sie das Zeichen ändern, wenn man g mit g' vertauscht, es muss also

$$P + Q\sqrt{-A^3 M} = -(P - Q\sqrt{-A^3 M}),$$

mithin $P = 0$ sein. Der allgemeinste Ausdruck einer directen Invariante ist also

$$(-A)^{\frac{1}{2}(m-3p)} (-E)^{-q} P,$$

wo P eine ganze Function von A, B, C, E, und der einer windschiefen Invariante

$$(-A)^{\frac{1}{2}(m-3p+3)} (-E)^{-q} Q\sqrt{M},$$

wo Q eine ganze Function von A, B, C, E, und M das oben erwähnte Polynom. In beiden Ausdrücken ist der Exponent von $-A$ eine ganze Zahl. Ist das Gewicht $3p + m$ gerade, etwa $= 2\varrho$, so ist $\frac{1}{2}(m - 3p) = \varrho - 3p$; ist $3p + m = 2\varrho + 1$, also ungerade, so ist $\frac{1}{2}(m - 3p + 3) = \varrho - 3p + 2$. Was nun die Nenner betrifft, die in diesen Ausdrücken auftreten können, so überzeugt man sich leicht, dass dieselben sich hinwegheben müssen, falls φ eine **ganze** Function der Coefficienten ist. Dies gilt auch für die windschiefe Invariante, da M weder für $A = 0$, noch für $E = 0$ verschwindet. Es ergiebt sich also folgender Lehrsatz:

„Jede directe Invariante der Formen u und v ist eine ganze rationale Function von A, B, C und E, und jede windschiefe Invariante derselben das Product einer directen Invariante in die windschiefe Invariante K."

Ich übergehe die typische Darstellung der Formen u und v, da dieselbe von H. Clebsch im 68. Bande des Borchard'schen Journals schon gegeben ist, und bemerke nur, dass man, falls die Invariante E, die Determinante der von H. Clebsch eingeführten linearen Covarianten, verschwindet, andere lineare Covarianten als neue Variabeln einführen kann, z. B. die Covarianten l und $l' = \frac{1}{2}(w\,l)\,w_x$, deren Determinante K ist. Diese letztere Darstellung ist der von HH. Clebsch und Gordan für die binäre Form 5ten Grades gegebenen, in welcher gleichfalls die windschiefe Invariante als Substitutionsdeterminante auftritt, ganz analog. Es lässt sich überhaupt das in Rede stehende Formensystem ganz ebenso behandeln, wie die Form 5ten Grades; ja es wäre vielleicht sachgemäss, die Behandlung dieses Formensystems der Form 5ten Grades vorausgehen zu lassen, indem man alsdann, um zur letzteren überzugehen, nur $u = i$, $v = j$ *) anzunehmen braucht, um alle Resultate der Untersuchung der Form 5ten Grades zu erhalten, die von der Entstehungsweise von i und j aus der Form 5ten Grades unabhängig sind.

§. 5.

4. Das System einer quadratischen und einer biquadratischen binären Form.

Es seien $\alpha = \alpha_{11}\,x_1^{\,2} + 2\,\alpha_{12}\,x_1\,x_2 + \alpha_{22}\,x_2^{\,2} = \alpha_x^2 = \alpha_x'^2$ und $u = a\,x_1^{\,4} + 4\,b\,x_1^{\,3}x_2 + 6\,c\,x_1^{\,2}x_2^{\,2} + 4\,d\,x_1\,x_2^{\,3} + e\,x_2^{\,4} = a_x^4 = a_x'^4 = \cdots$ die gegebenen Formen. Ich bilde zunächst die Covarianten 2ten Grades

$$\left.\begin{array}{l} \beta = (a\,\alpha)^2\,a_x^2 = \beta_{11}\,x_1^{\,2} + \cdots = \beta_x^2 = \beta_x'^2 = \cdots \\ \gamma = (a\,\beta)^2\,a_x^2 = \gamma_{11}\,x_1^{\,2} + \cdots = \gamma_x^2 = \gamma_x'^2 = \cdots \\ \delta = (a\,\gamma)^2\,a_x^2 = \delta_{11}\,x_1^{\,2} + \cdots = \delta_x^2 = \delta_x'^2 = \cdots \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \end{array}\right\}, \tag{1}$$

deren Bildungsgesetz leicht ersichtlich ist. Die Covariante δ und alle nachfolgenden Covarianten dieses Systems lassen sich durch die vorhergehenden linear ausdrücken. Um dies nachzuweisen, betrachte man

*) S. die mehrmals citirte Abhandlung.

irgend welche 4 auf einanderfolgende Covarianten l, m, n, p. Setzt man $l = l_x^2$, so wird $m = m_x^2 = (a\,l)^2\,a_x^2$, $n = n_x^2 = (a\,m)^2\,a_x^2$, $p = p_x^2 = (a\,n)^2\,a_x^2$, und mithin auch

$$p = (n\,a')^2\,a_x'^2 = (m\,a)^2\,(a\,a')^2\,a_x'^2 = (a\,a')^2\,(l\,a'')^2\,(a''\,a)^2\,a_x'^2$$
$$= \tfrac{1}{2}\,(a\,a')^2\,(l\,a'')^2\,\{(a''\,a)^2\,a_x'^2 + (a''\,a')^2\,a_x^2\},$$

oder, da aus der identischen Gleichung

$$a_x\,(a'\,a'') + a_x'\,(a''\,a) + a_x''\,(a\,a') = 0,$$
$$a_x^2\,(a'\,a'')^2 + a_x'^2\,(a''\,a) = 2\,a_x\,a_x'\,(a\,a'')\,(a'\,a'') + a_x''^2\,(a\,a')^2$$

folgt,

$$2p = (a\,a')^4\,(l\,a'')^2\,a_x''^2 + 2\,a_x\,a_x'\,(a\,a'')\,(a'\,a'')\,(a\,a')^2\,(l\,a'')^2.$$

Bezeichnet man nun die Invarianten von u, deren symbolische Ausdrücke $\frac{1}{2}\,(a\,a')^4$ und $\frac{1}{6}\,(a\,a')^2\,(a'\,a'')^2\,(a''\,a)^2$ sind, resp. mit i und j, so wird das erste Glied dieser Summe $= 2\,i\,m$; das zweite reducirt sich in Folge der leicht herzuleitenden Identität

$$a_x\,a_x'\,(a\,a')\,(a''\,l)^2 + a_x'\,a_x''\,(a'\,a'')\,(a\,l)^2 + a_x''\,a_x\,(a''\,a)\,(a'\,l)^2$$
$$= -\,(a\,a')\,(a'\,a'')\,(a''\,a)\,.\,l_x^2$$

auf $\frac{2}{3}\,(a\,a')^2\,(a'\,a'')^2\,(a''\,a)^2\,.\,l_x^2$, und wird also $= 4\,j\,l$. Mithin ist

$$p = i\,m + 2\,j\,l. \tag{2}$$

Diese Gleichung lehrt, dass jede der Covarianten (1) sich durch die 2 vorhergehenden, die von ihr durch eine zwischenliegende getrennt sind, linear ausdrücken lässt.

Unter den Invarianten der Formen l, m, n, p finden gleichfalls lineare Relationen statt. Versteht man überhaupt unter A_{qr} oder A_{rq} die Invariante $\frac{1}{2}\,(q\,r)^2$ der quadratischen Formen $q = q_x^2$ und $r = r_x^2$ und bildet das Invariantensystem:

$$\left.\begin{matrix} A_{ll} & A_{lm} & A_{ln} & A_{lp} \\ A_{ml} & A_{mm} & A_{mn} & A_{mp} \\ A_{nl} & A_{nm} & A_{nn} & A_{np} \\ A_{pl} & A_{pm} & A_{pn} & A_{pp} \end{matrix}\right\},$$

so ist zunächst

$$A_{nl} = \tfrac{1}{2}\,(nl)^2 = \tfrac{1}{2}\,(ma)^2\,(al)^2 = \tfrac{1}{2}\,(mm')^2 = A_{mm},$$

und ebenso $A_{pm} = A_{nn}$, und

$$A_{pl} = \tfrac{1}{2}\,(pl)^2 = \tfrac{1}{2}\,(na)^2\,(al)^2 = \tfrac{1}{2}\,(mn)^2 = A_{mn};$$

ferner findet man, wenn man in Gleichung (2) $x_1 = l_2'$, $x_2 = -\,l_1'$ setzt:

$$(pl')^2 = i\,(ml')^2 + 2\,j\,(ll')^2$$

oder

$$A_{pl} = A_{mn} = i\,A_{lm} + 2\,j\,A_{ll}.$$

Setzt man hingegen in (2) $x_1 = m_2'$, $x_2 = -\,m_1'$, so ergiebt sich

$$(pm')^2 = i\,(mm')^2 + 2\,j\,(lm')^2$$

oder

$$A_{pm} = A_{nn} = i\,A_{mm} + 2\,j\,A_{lm}.$$

Indem man in Gleichung (2) noch der Reihe nach die Variabeln durch die Symbole n_2 und $-n_1$, p_2 und $-p_1$ ersetzt, überzeugt man sich, dass auch A_{np} und A_{pp} sich durch A_{ll}, A_{lm} und A_{mm} linear ausdrücken lassen. Setzt man also voraus, dass l die gegebene quadratische Form α sei, so ergiebt sich, dass das Covariantensystem (1) nur 3 von einander unabhängige Invarianten $A_{\alpha\alpha}$, $A_{\alpha\beta}$, $A_{\beta\beta} = A_{\alpha\gamma}$ liefern kann, indem alle übrigen Invarianten des Systems (3) lineare Functionen dieser 3 sind. So z. B. giebt die Gleichung (2), welche unter der Voraussetzung $l = \alpha$ folgende Gestalt annimmt:

$$\delta = i\beta + 2j\alpha,$$

wenn man an die Stelle von x_1 und x_2 das eine Mal α_2 und $-\alpha_1$, das andere Mal β_2 und $-\beta_1$ setzt, für $A_{\beta\gamma}$ und $A_{\gamma\gamma}$ folgende Werthe

$$A_{\delta\alpha} = A_{\beta\gamma} = iA_{\alpha\beta} + 2jA_{\alpha\alpha}\ ,\ A_{\beta\delta} = A_{\gamma\gamma} = iA_{\beta\beta} + 2jA_{\alpha\beta}\ \ .\ . \quad (4)$$

Die simultane Invariante der drei Formen α, β, γ (§. 3).

$$K = \frac{1}{2}\begin{vmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \alpha_{22} \\ \beta_{11} & \beta_{12} & \beta_{22} \\ \gamma_{11} & \gamma_{12} & \gamma_{22} \end{vmatrix},$$

welche offenbar windschief ist, indem man für dieselbe (§. 1) $\lambda - 9$ findet, hängt nach §. 3 mit den obigen Invarianten durch folgende Relation zusammen:

$$K^2 = \begin{vmatrix} A_{\alpha\alpha} & A_{\alpha\beta} & A_{\alpha\gamma} \\ A_{\beta\alpha} & A_{\beta\beta} & A_{\beta\gamma} \\ A_{\gamma\alpha} & A_{\gamma\beta} & A_{\gamma\gamma} \end{vmatrix}.$$

Man kann in den Gleichungen (1) die Form u durch deren Covariante $h = (aa')^2 a_x^2 a_x'^2 = b_x^4 = b_x'^4$ ersetzen, und ein ähnliches System von Covarianten bilden, wie das obige. Die so entstehenden Covarianten $(b\alpha)^2 b_x^2$, $(b\beta)^2 b_x^2 \ldots$ bieten aber nichts Neues, sondern lassen sich alle durch α, β, γ linear ausdrücken. Ich werde die Ausdrücke der beiden ersten entwickeln, da dieselben, als in die Theorie des hier behandelten Formensystems gehörend, in der mehrmals erwähnten Abhandlung der Herren Clebsch und Gordan blos citirt werden. Aus der Gleichung

$$b_x^4 = (aa')^2 a_x^2 a_x'^2$$

ergiebt sich zunächst

$$2b_x^3 (b\alpha) = (aa')^2 \left\{ a_x a_x'^2 (a\alpha) + a_x' a_x^2 (a'\alpha) \right\}$$

$$6b_x^2 (b\alpha)^2 = (aa')^2 \left\{ 4a_x a'_x (a\alpha)(a'\alpha) + a_x'^2 (a\alpha)^2 + a_x^2 (a'\alpha)^2 \right\}.$$

Quadrirt man aber die identische Gleichung

$$a_x (a'\alpha) + a_x' (\alpha a) = \alpha_x (a'a)$$

und entnimmt aus der Gleichung

$$a_x^2\,(a'\alpha)^2 + a_x'^2(a\alpha)^2 - 2\,a_x\,a_x'\,(a\alpha)\,(a'\alpha) = \alpha_x^2\,(aa')^2$$

den Werth des doppelten Products, so findet man

$$6\,b_x^2\,(b\alpha)^2 = \{3\,a_x'^2\,(a\alpha)^2 + 3\,a_x^2\,(a'\alpha)^2\}\,(aa')^2 - (aa')^4\,\alpha_x^2\,,$$

oder, wenn man von den Symbolen zu den wirklichen Werthen übergeht, und dabei beachtet, dass $a_x'^2\,(aa')^2\,(a\alpha)^2 = (a'\beta)^2\,a_x'^2 = \gamma$ ist,

$$b_x^2\,(b\alpha)^2 = \tfrac{2}{3}\,\gamma - i\,\alpha.$$

Schreibt man in der vorhergehenden Gleichung β anstatt α, so hat man

$$6\,b_x^2\,(b\beta)^2 = \{3\,a_x'^2\,(a\beta)^2 + 3\,a_x^2\,(a'\beta)^2\}\,(aa')^2 - (aa')^4.\beta_x^2\,,$$

oder da $(a\beta)^2\,(aa')^2\,a_x'^2 = (\gamma a')^2\,a_x'^2 = \delta$,

$$b_x^2\,(b\beta)^2 = \delta - \tfrac{2}{3}\,i\beta.$$

Setzt man für δ den Werth $i\beta + 2j\alpha$ ein, so nimmt diese Gleichung folgende Gestalt an:

$$b_x^2\,(b\beta)^2 = \tfrac{1}{3}\,i\beta + 2j\alpha.$$

§. 6.

Die 3 Invarianten $A_{\alpha\alpha}$, $A_{\alpha\beta}$, $A_{\beta\beta}$ bilden zusammen mit den Invarianten i und j der Form u ein System von 5 Invarianten, durch welche alle übrigen Invarianten des Systems sich algebraisch ausdrücken lassen. Um einen möglichst einfachen Ausdruck einer beliebigen Invariante durch die 5 eben erwähnten zu erhalten, wende ich wieder eine Substitution vom Modul 1 an, welche die gegebene quadratische Form α in $2\mu\,X_1\,X_2$ verwandelt. Geht alsdann gleichzeitig u in $a_0\,X_1^4 + 4\,a_1\,X_1^3\,X_2 + 6\,a_2\,X_1^2\,X_2^2 + 4\,a_3\,X_1\,X_2^3 + a_4\,X_2^4$ über, so hat man folgende Transformationsrelationen:

$$-\mu^2 = A\,,\ 2\,a_2\mu^2 = B\,,\ 4\mu^2\,(a_1\,a_3 - a_2^2) = C$$

$$a_0 a_4 - 4\,a_1 a_3 + 3\,a_2^2 = i\,,\ a_0\,a_2 a_4 - a_1^2 a_4 - a_3^2 a_0 + 2\,a_1 a_2 a_3 - a_2^3 = j,$$

wo der Kürze halber A, B, C resp. für $A_{\alpha\alpha}$, $A_{\alpha\beta}$, $A_{\beta\beta}$ gesetzt ist. Aus diesen Gleichungen ergiebt sich zunächst

$$\mu = \sqrt{(-A)},\ a_2 = -\frac{B}{2A}\,,\ a_1\,a_3 = \frac{B^2 - AC}{4\,A^2}\,,\ a_0\,a_4 = i + \frac{B^2 - 4\,AC}{4\,A^2}$$

$$-(a_0\,a_3^2 + a_4\,a_1^2) = \frac{2\,j\,A + i\,B}{2\,A} + \frac{B^3 - 3\,ABC}{4\,A^3}\,.$$

Ferner ist

$$a_0 a_3^2 \cdot a_4\,a_1^2 = \frac{1}{64\,A^6}\,(B^2 - AC)^2\,(4\,A^2 i + B^2 - 4\,AC),$$

und mithin

$$a_1^2 a_4 - a_0 a_3^2 = \tfrac{1}{2}\,(-A)^{-\frac{3}{2}}\,\sqrt{M},$$

wo $M = - A(2jA + iB)^2 + 2j(3ABC - B^3) + i(B^2C + AC^2) - C^3$. Setzt man noch $A^2(2jA + iB) + \frac{1}{2}(B^3 - 3ABC) = L$, so ist folglich

$$a_0 a_3^2 = \frac{1}{4A^3}\left(- L + \sqrt{- A^3 M}\right),\ a_4 a_1^2 = \frac{1}{4A^3}\left(L - \sqrt{-A^3 M}\right).$$

Ist nun $\varphi(\alpha_{11}, \alpha_{12}, \alpha_{22}, a, b, c, d, e)$ eine beliebige Invariante, der Formen α und u, so erhält man jedenfalls, wenn man sie aus den Coefficienten der transformirten Formen bildet, einen Ausdruck von der Form

$$\mu^m \psi(a_0, a_1, a_2, a_3, a_4),$$

wo m den Grad von φ in Bezug auf die Coefficienten von α, und ψ eine ganze homogene Function bezeichnet. Es sei nun n der Grad von φ in Bezug auf die Coefficienten von u, dann ist das Gewicht der Invariante φ gleich $m + 2n$, und da μ einen Coefficienten vom Index 1 vertritt, so muss folglich die Summe der Indices in jedem Gliede von ψ gleich $2n$ sein. Jedes Glied von ψ kann nun bis auf einen numerischen Factor durch die Formel

$$a_0^\pi\ a_1^\varrho\ a_2^\sigma\ a_3^{\varrho'}\ a_4^{\pi'},$$

wo $\pi + \varrho + \sigma + \varrho' + \pi' = n$ sein muss, dargestellt werden, und zwar muss, damit die Summe der Indices $= 2n$ sein könne, wenn $\pi > \pi'$ ist, $\varrho < \varrho'$ sein, und umgekehrt. Es sei zunächst $\pi = \pi' + \delta$; dann folgt aus der Relation

$$\varrho + 2\sigma + 3\varrho' + 4\pi' = 2n = 2(\pi + \varrho + \sigma + \varrho' + \pi'):$$
$$\varrho' - \varrho = 2(\pi - \pi') = 2\delta.$$

Hiernach nimmt die obige Formel die Gestalt

$$(a_0 a_4)^{\pi'}\ (a_1 a_3)^\varrho\ a_2^\sigma\ (a_0 a_3^2)^\delta$$

an. Ist hingegen $\pi' > \pi$, etwa $\pi' = \pi + \varepsilon$, so findet man $\varrho - \varrho' = 2\varepsilon$, und das allgemeine Glied von ψ lässt sich auf die Form

$$(a_0 a_4)^\pi\ (a_1 a_3)^{\varrho'}\ a_2^\sigma\ (a_4 a_1^2)^\varepsilon$$

bringen. Man sieht also, dass alle Glieder von ψ sich aus den 5 Grössen

$$a_2,\ a_0 a_4,\ a_1 a_3,\ a_0 a_3^2,\ a_1^2 a_4,$$

deren Werthe wir oben gefunden, rational zusammensetzen lassen. Es ist demnach

$$\varphi = (-A)^{\frac{m}{2} - n} \left\{P + Q\sqrt{-A^3 M}\right\}, \quad \ldots \tag{5}$$

wo P und Q ganze Functionen von A, B, C, i und j sind.

Die weitere Discussion dieses Ausdrucks hängt davon ab, ob m gerade oder ungerade ist.

1. Ist $m = 2p$, so ist das Gewicht $m + 2n$ gleichfalls gerade,

folglich φ eine directe Invariante, und darf sich nicht ändern, wenn man gleichzeitig a_1 mit a_3, a_0 mit a_4 vertauscht. Diese Vertauschung hat auf a_2, a_0a_4 und a_1a_3 gar keinen Einfluss, während $a_0a_3^2$ und $a_1^2a_4$ in einander übergehen. Mithin ersieht man aus den obigen Werthen dieser fünf Grössen, dass diese Vertauschung auf eine Aenderung des Zeichens von $\sqrt{-A^3M}$ hinausläuft. Es muss also

$$P + Q\sqrt{-A^3M} = P - Q\sqrt{-A^3M},$$

d. h. $Q = 0$ sein. Der allgemeinste Ausdruck einer directen Invariante ist also

$$A^{p-n} \,.\, P,$$

wo P eine ganze Function von A, B, C, i und j ist, welche, falls $n > p$, wie man sich leicht überzeugt, durch A^{n-p} theilbar sein muss.

Ehe ich zu dem Falle eines ungeraden m übergehe, bemerke ich zuvor, dass

$$K = 2\mu^2 \begin{vmatrix} 0 & a_1 & a_0a_3 - a_1a_2 \\ \mu & a_2 & 2(a_1a_3 - a_2^2) \\ 0 & a_3 & a_1a_4 - a_2a_3 \end{vmatrix} = 2\mu^3(a_0a_3^2 - a_1^2a_4) = \sqrt{M}$$

ist, was auch mit dem obigen Werthe von K^2 zusammenstimmt.

2. Ist $m = 2p + 1$, so ist $m + 2n$ gleichfalls ungerade, und die Invariante φ eine windschiefe. Es muss folglich in diesem Falle, wie man leicht einsieht, der Ausdruck (5) mit $\sqrt{-A^3M}$ zugleich sein Zeichen ändern, mithin $P = 0$ sein. Der allgemeinste Ausdruck einer windschiefen Invariante ist also

$$A^{p-n+2} \,.\, Q\sqrt{M},$$

wo Q eine ganze Function von A, B, C, i und j. Da M nicht mit A zugleich verschwindet, muss $A^{p-n+2}\,Q$ jedenfalls eine ganze Function der Fundamentalinvarianten sein.

Die erhaltenen Resultate lassen sich folgendermassen zusammenfassen:

Jede directe Invariante zweier simultaner binärer Formen 2ten und 4ten Grades ist eine ganze rationale Function von A, B, C, i und j, und jede windschiefe Invariante dieser Formen — das Product einer directen Invariante in die windschiefe Invariante K.

§. 7.

Die typische Darstellung der Form u mittels der 3 Covarianten α, β, γ ergiebt sich unmittelbar aus dem von den Herren Clebsch und Gordan aufgestellten Princip. Setzt man allgemein

$$\frac{1}{4\,.\,3}\;\frac{\partial^2 u}{\partial x_i\,\partial x_x} = u_{ix},$$

so ist

$$\begin{aligned} u_{11}\,\alpha_{22} - 2u_{12}\,\alpha_{12} + u_{22}\,\alpha_{11} &= \beta \\ u_{11}\,\beta_{22} - 2u_{12}\,\beta_{12} + u_{22}\,\beta_{11} &= \gamma \\ u_{11}\,\gamma_{22} - 2u_{12}\,\gamma_{12} + u_{22}\,\gamma_{11} &= \delta \\ u_{11}\,x_1^2 + 2u_{12}x_1x_2 + u_{22}\,x_2^2 &= u. \end{aligned}$$

Aus diesen 4 Gleichungen kann man, wenn K nicht verschwindet, die 3 Grössen u_{11}, u_{12}, u_{22} eliminiren, und erhält dadurch folgende Gleichung:

$$\begin{vmatrix} \alpha_{22} & -2\alpha_{12} & \alpha_{11} & \beta \\ \beta_{22} & -2\beta_{12} & \beta_{11} & \gamma \\ \gamma_{22} & -2\gamma_{12} & \gamma_{11} & \delta \\ x_1^2 & 2x_1x_2 & x_2^2 & u \end{vmatrix} = 0,$$

oder

$$4Ku = -\begin{vmatrix} \alpha_{22} & -2\alpha_{12} & \alpha_{11} & \beta \\ \beta_{22} & -2\beta_{12} & \beta_{11} & \gamma \\ \gamma_{22} & -2\gamma_{12} & \gamma_{11} & \delta \\ x_1^2 & 2x_1x_2 & x_2^2 & 0 \end{vmatrix}.$$

Multiplicirt man diese Gleichung mit

$$2K = \begin{vmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \alpha_{22} & 0 \\ \beta_{11} & \beta_{12} & \beta_{22} & 0 \\ \gamma_{11} & \gamma_{12} & \gamma_{22} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix},$$

so ergiebt sich

$$2K^2u = -\begin{vmatrix} A_{\alpha\alpha} & A_{\alpha\beta} & A_{\alpha\gamma} & \beta \\ A_{\beta\alpha} & A_{\beta\beta} & A_{\beta\gamma} & \gamma \\ A_{\gamma\alpha} & A_{\gamma\beta} & A_{\gamma\gamma} & \delta \\ \alpha & \beta & \gamma & 0 \end{vmatrix}$$

$$= -\begin{vmatrix} A_{\alpha\alpha} & A_{\alpha\beta} & A_{\beta\beta} & \beta \\ A_{\alpha\beta} & A_{\beta\beta} & 2jA_{\alpha\alpha}+iA_{\alpha\beta} & \gamma \\ A_{\beta\beta} & 2jA_{\alpha\alpha}+iA_{\alpha\beta} & 2jA_{\alpha\beta}+iA_{\beta\beta} & 2j\alpha+i\beta \\ \alpha & \beta & \gamma & 0 \end{vmatrix},$$

während zwischen α, β und γ folgende Relation stattfindet:

$$B_{\alpha\alpha}\,\alpha^2 + B_{\beta\beta}\,\beta^2 + B_{\gamma\gamma}\,\gamma^2 + 2B_{\beta\gamma}\beta\gamma + 2B_{\gamma\alpha}\,\gamma\alpha + 2B_{\alpha\beta}\,\alpha\beta = 0,$$

wo $B_{\alpha\alpha}$, $B_{\beta\beta}$, ... die ersten Minoren der Determinante darstellen, welche gleich K^2 ist (vgl. §. 3.).

Die soeben aufgestellte typische Darstellung wird illusorisch, wenn $K=0$ ist. Es muss alsdann eine der 3 Covarianten α, β, γ durch eine neue ersetzt werden. Ist β nicht α proportional, so kann man γ

durch die Covariante $\vartheta = (\alpha\beta)\alpha_x\beta_x$ ersetzen, welche mit α und β folgendermassen zusammenhängt:

$$\vartheta^2 = -(A_{\alpha\alpha}\beta^2 - 2A_{\alpha\beta}\beta\alpha + A_{\beta\beta}\alpha^2) \text{ (s. §. 2.).}$$

Es sei zunächst φ eine beliebige binäre Form vom Grade n, und $\varphi_{11}, \varphi_{12}, \varphi_{22}$ deren durch $n\,(n-1)$ dividirte 2te Ableitungen. Setzt man

$$\begin{aligned} \varphi_{11}\,\alpha_{22} - 2\varphi_{12}\,\alpha_{12} + \varphi_{22}\,\alpha_{11} &= \varphi_\alpha \\ \varphi_{11}\,\beta_{22} - 2\varphi_{12}\,\beta_{12} + \varphi_{22}\,\beta_{11} &= \varphi_\beta \\ \varphi_{11}\,\vartheta_{22} - 2\varphi_{12}\,\vartheta_{12} + \varphi_{22}\,\vartheta_{11} &= \varphi_\vartheta, \end{aligned}$$

und fügt zu diesen 3 Gleichungen noch die vierte

$$\varphi_{11}\,x_1^2 + 2\varphi_{12}\,x_1x_2 + \varphi_{22}\,x_1^2 = \varphi$$

hinzu, so kann man aus diesen 4 Gleichungen die 3 zweiten Ableitungen $\varphi_{11}, \varphi_{12}, \varphi_{22}$ eliminiren, vorausgesetzt, dass die Determinante

$$\begin{vmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \alpha_{22} \\ \beta_{11} & \beta_{12} & \beta_{22} \\ \vartheta_{11} & \vartheta_{12} & \vartheta_{22} \end{vmatrix} = (\vartheta\vartheta')^2 = 2A_{\vartheta\vartheta} \quad \text{(vergl. §. 3.)}$$

nicht verschwindet. Das Eliminationsresultat ist

$$\begin{vmatrix} \alpha_{11} & -2\alpha_{12} & \alpha_{22} & \varphi_\alpha \\ \beta_{11} & -2\beta_{12} & \beta_{22} & \varphi_\beta \\ \vartheta_{11} & -2\vartheta_{12} & \vartheta_{22} & \varphi_\vartheta \\ x_1^2 & 2x_1x_2 & x_2^2 & \varphi \end{vmatrix} = 0,$$

oder

$$4A_{\vartheta\vartheta}\,.\,\varphi = -\begin{vmatrix} \alpha_{11} & -2\alpha_{12} & \alpha_{22} & \varphi_\alpha \\ \beta_{11} & -2\beta_{12} & \beta_{22} & \varphi_\beta \\ \gamma_{11} & -2\gamma_{12} & \gamma_{22} & \varphi_\vartheta \\ x_1^2 & 2x_1x_2 & x_2^2 & 0 \end{vmatrix}.$$

Multiplicirt man diese letzte Gleichung mit $A_{\vartheta\vartheta}$ und beachtet zugleich, dass

$$A_{\alpha\vartheta} = A_{\beta\vartheta} = 0\,,\; A_{\vartheta\vartheta} = \tfrac{1}{2}\,(\vartheta\vartheta')^2 = A_{\alpha\alpha}A_{\beta\beta} - A_{\alpha\beta}^2 = B_{\gamma\gamma}$$

ist (s. den Schluss von §. 2.), so findet man

$$2A_{\vartheta\vartheta}^2\,.\,\varphi = -\begin{vmatrix} A_{\alpha\alpha} & A_{\alpha\beta} & 0 & \varphi_\alpha \\ A_{\beta\alpha} & A_{\beta\beta} & 0 & \varphi_\beta \\ 0 & 0 & A_{\vartheta\vartheta} & \varphi_\vartheta \\ \alpha & \beta & \vartheta & 0 \end{vmatrix}$$

oder

$$2A_{\vartheta\vartheta}\,\varphi = \vartheta\varphi_\vartheta - \alpha\,(A_{\beta\alpha}\,\varphi_\beta - A_{\beta\beta}\,\varphi_\alpha) + \beta\,(A_{\alpha\alpha}\,\varphi_\beta - A_{\alpha\beta}\,\varphi_\alpha).$$

Diese Formel giebt für $\varphi = u$:

$$2A_{\vartheta\vartheta}\,u = \vartheta u_\vartheta - \alpha\,(A_{\beta\alpha}\gamma - A_{\beta\beta}\beta) + \beta\,(A_{\alpha\alpha}\gamma - A_{\alpha\beta}\beta),$$

und für $\varphi = u_\vartheta$:

$$2A_{\vartheta\vartheta}\, u_\vartheta = \vartheta u_{\vartheta\vartheta} - \alpha\,(A_{\beta\alpha} u_{\vartheta\beta} - A_{\beta\beta} u_{\vartheta\alpha}) + \beta\,(A_{\alpha\alpha} u_{\vartheta\beta} - A_{\alpha\beta} u_{\vartheta\alpha})\,.$$

In Folge der Relation, welche ϑ mit α und β verbindet, ist nun

$$u_{\vartheta\vartheta} = -(A_{\alpha\alpha} u_{\beta\beta} - 2A_{\alpha\beta} u_{\beta\alpha} + A_{\beta\beta} u_{\alpha\alpha}),$$

oder da

$$\begin{aligned} u_{\alpha\alpha} &= (a\alpha)^2\,(a\alpha')^2 = (\beta\alpha')^2 = 2A_{\alpha\beta},\\ u_{\alpha\beta} &= (a\alpha)^2\,(a\beta)^2 = (\beta\beta')^2 = 2A_{\beta\beta},\\ u_{\beta\beta} &= (a\beta)^2\,(a\beta')^2 = (\gamma\beta')^2 = 2A_{\beta\gamma},\\ u_{\vartheta\vartheta} &= 2(A_{\alpha\beta} A_{\beta\beta} - A_{\alpha\alpha} A_{\beta\gamma}) = 2B_{\beta\gamma}; \end{aligned}$$

ferner ist

$$\begin{aligned} u_{\vartheta\alpha} &= (a\alpha)^2\,(a\vartheta)^2 = (a\alpha)^2\,(\alpha''\beta)\,(\alpha''a)\,(\beta a)\\ &= (a\alpha)^2\,(a'\alpha')^2\,(a'a)\,(\alpha''a)\,(\alpha''a') = 0\,, \end{aligned}$$

weil dieser Ausdruck das Zeichen ändert, wenn man a mit a' und α mit α' vertauscht; und

$$u_{\vartheta\beta} = (\vartheta a)^2\,(a\beta)^2 = (\vartheta\gamma)^2 = 2K \quad (\S.\ 3.).$$

Mithin ist

$$A_{\vartheta\vartheta}\,.\,u_\vartheta = B_{\beta\gamma}\vartheta - K\,(A_{\alpha\beta}\,\alpha - A_{\alpha\alpha}\,\beta)$$

und folglich

$$\begin{aligned} 2A_{\vartheta\vartheta}^2\, u = B_{\beta\gamma}\vartheta^2 &- K\vartheta\,(A_{\alpha\beta}\,\alpha - A_{\alpha\alpha}\beta)\\ &+ A_{\vartheta\vartheta}\,\{\gamma\,(A_{\alpha\alpha}\beta - A_{\alpha\beta}\alpha) - \beta\,(A_{\beta\alpha}\beta - A_{\beta\beta}\alpha)\}\,. \end{aligned}$$

Setzt man für γ seinen Werth aus der Gleichung

$$K\vartheta = B_{\gamma\alpha}\alpha + B_{\gamma\beta}\beta + B_{\gamma\gamma}\gamma$$

(§. 3, Gleichung 4) ein, so findet man, da $B_{\gamma\gamma} = A_{\vartheta\vartheta}$,

$$\begin{aligned} 2A_{\vartheta\vartheta}^2\, u = B_{\beta\gamma}\vartheta^2 &+ (A_{\alpha\alpha}\beta - A_{\alpha\beta}\alpha)\,\{2K\vartheta - B_{\gamma\alpha}\alpha - B_{\gamma\beta}\beta\}\\ &- A_{\vartheta\vartheta}\beta\,(A_{\beta\alpha}\beta - A_{\beta\beta}\alpha). \end{aligned}$$

Diese Gleichung enthält die typische Darstellung der Form u mittels der 3 quadratischen Covarianten α, β und ϑ, welche durch die Gleichung

$$\vartheta^2 = -(A_{\alpha\alpha}\beta^2 - 2A_{\alpha\beta}\beta\alpha + A_{\beta\beta}\alpha^2)$$

mit einander verbunden sind.

Ich habe bisher nicht vorausgesetzt, dass $K = 0$ sei. Dieser Fall hat hier ein besonderes Interesse. Es wird nämlich, wenn K verschwindet, u eine rationale Function von α und β allein, indem die erste Potenz von ϑ sich heraushebt. Setzt man für ϑ^2 seinen Werth, so findet man

$$2A_{\vartheta\vartheta}^2 u = P\alpha^2 + 2Q\alpha\beta + R\beta^2,$$

wo

$$P = A_{\beta\alpha} B_{\gamma\alpha} - A_{\beta\beta} B_{\gamma\beta} = A_{\alpha\beta}^2 A_{\beta\gamma} + A_{\alpha\alpha} A_{\beta\beta} A_{\beta\gamma} - 2 A_{\alpha\beta} A_{\beta\beta}^2$$

$$Q = \tfrac{1}{2}(3 A_{\alpha\beta} B_{\gamma\beta} - A_{\alpha\alpha} B_{\gamma\alpha} + A_{\beta\beta} B_{\gamma\gamma}) = A_{\alpha\alpha} A_{\beta\beta}^2 - 2 A_{\alpha\alpha} A_{\alpha\beta} A_{\beta\gamma} + A_{\alpha\beta}^2 A_{\beta\beta}$$

$$R = -2 A_{\alpha\alpha} B_{\gamma\beta} - A_{\beta\alpha} B_{\gamma\gamma} = A_{\alpha\beta}^3 + 2 A_{\alpha\alpha} A_{\beta\gamma} - 3 A_{\alpha\alpha} A_{\alpha\beta} A_{\beta\beta}.$$

In diesem Falle lässt sich die Gleichung $u = 0$ durch blosse Quadratwurzeln auflösen.

Ist $A_{\vartheta\vartheta}$ nicht $= 0$, so kann man α und β gleichzeitig in 2 von einander verschiedene Summen je zweier Quadrate transformiren. Dann enthält auch der Ausdruck $P\alpha^2 + 2 Q\alpha\beta + R\beta^2$, welcher gleich $2 A_{\vartheta\vartheta}^2 u$ wird, wenn $K = 0$, nur gerade Potenzen der neuen Variabeln. Es lassen sich also, wenn $K = 0$, und $A_{\vartheta\vartheta} = B_{\gamma\gamma}$ von Null verschieden ist, aus α und u gleichzeitig alle ungeraden Potenzen der Variabeln mittels einer linearen Transformation wegschaffen. Umgekehrt ist K nothwendig gleich Null, wenn in α und u alle ungeraden Potenzen der Variabeln fehlen. Denn K ist eine windschiefe Invariante, jedes Glied von K enthält also mindestens e i n e n Coefficient mit ungeradem Index, und folglich ist $K = 0$, wenn in α und u alle Coefficienten ungerader Potenzen von y gleich Null sind. Es ist mithin $K = 0$ die nothwendige und hinreichende Bedingung für die Möglichkeit einer solchen Transformation, dass in beiden Formen, α und u, nur gerade Potenzen der neuen Variabeln auftreten. Geometrisch aufgefasst, ist also $K = 0$ die Bedingung der Involution der 6 Punkte $\alpha u = 0$.

Die Untersuchung derjenigen Fälle, in welchen b e i d e gegebenen typischen Darstellungen illusorisch werden, lässt sich nach dem Vorbilde analoger Untersuchungen der Herren C l e b s c h und G o r d a n leicht ausführen. Ohne hierauf einzugehen, schliesse ich mit folgender Bemerkung. Die vorhergehenden Berechnungen setzen uns in den Stand, für die behandelten Formensysteme die Ausdrücke der Resultanten mittels der Fundamentalinvarianten unmittelbar niederzuschreiben. Die beiden Formen

$$u = 2\varrho X_1 X_2 \text{ und } v = a_0 X_1^n + n a_1 X_1^{n-1} X_2 + \cdots\cdots + a_n X_2^n$$

können nämlich nur dann einen gemeinsamen Factor haben, wenn einer der beiden Coefficienten a_0 und a_n verschwindet, und umgekehrt, jedesmal, wenn dies der Fall ist, haben sie einen gemeinsamen Factor. Hat man also das gegebene System 2[er] Formen, deren eine quadratisch ist, so transformirt, dass diese letztere nur das Product der Variabeln enthält, so lässt sich aus dem Werthe von $a_0 a_n$ als Function der Fundamentalinvarianten der Ausdruck der Resultante leicht entnehmen. So ergiebt sich unmittelbar aus §. 2., dass die Resultante zweier quadratischen binären Formen gleich $AC - B^2$,

aus §. 4., dass die Resultante einer quadratischen und einer cubischen binären Form gleich $4AB - E$,

aus §. 6., dass die Resultante einer quadratischen und einer biquadratischen binären Form gleich $4A(Ai - C) + B^2$

ist.

St. Petersburg, $\frac{21.\ \text{October}}{2.\ \text{November}}$ 1868.

Geometrische Untersuchung über die Bewegung eines starren Körpers.

Von Carl Neumann in Leipzig.

Der Satz, dass ein starrer Körper aus einer beliebig gegebenen ersten Position in eine beliebig gegebene zweite Position übergeführt werden kann vermittelst einer Schraubenbewegung, wird offenbar (wenn man sich den Körper in starrer Verbindung denkt mit irgend einer Dreieckfläche) auch so ausgesprochen werden können: Ist die relative Lage von zwei congruenten Dreiecken in beliebiger Weise im Raume gegeben, so existirt jederzeit eine Schraubenbewegung, durch welche das eine Dreieck zur Deckung gebracht werden kann mit dem andern. Dieser Satz soll hier in rein geometrischer Weise deducirt, und zugleich gezeigt werden, wie die Achse jener Bewegung durch Construction gefunden werden kann, sobald die Dreiecke gegeben sind.

§. 1.

Vorläufige Untersuchung.

Es seien a_1, a_2, a_3 und b_1, b_2, b_3 die Ecken zweier im Raume gegebener Dreiecke A und B, welche unter einander congruent sind, und deren Flächeninhalt von Null verschieden ist. Gleichzeitig mögen gezogen sein die drei Linien a_1b_1, a_2b_2, a_3b_3, durch welche die Ecken des einen Dreiecks verbunden sind mit den analogen Ecken des andern.

Als Instrument für die vorzunehmenden Operationen construiren wir gleich zu Anfang mit Hülfe der vorliegenden Daten eine gewisse Figur, die sich befinden kann an irgend welcher andern Stelle des Raumes. Diese Figur besteht aus drei Linien $\alpha\beta_1$, $\alpha\beta_2$, $\alpha\beta_3$, die von einem willkürlich gewählten Punkt α ausgehen, und parallel-congruent*) sind zu a_1b_1, a_2b_2, a_3b_3; sie besteht sodann aus einer Ebene

*) Zwei congruente Figuren sollen parallel-congruent genannt werden, wenn die Linien der einen parallel liegen mit den analogen Linien der andern. So werden z. B. zwei gerade Linien parallel-congruent genannt, wenn sie gleiche Länge und Richtung besitzen.

Ω, welche durch die Punkte β_1, β_2, β_3 hindurchgeht; sie besteht ferner aus einem von α auf Ω herabgelassenen Perpendikel $\alpha\sigma$; und sie besteht endlich aus drei Linien $\sigma\beta_1$, $\sigma\beta_2$, $\sigma\beta_3$, welche in der Ebene Ω von dem Fusspunkt des genannten Perpendikels hinlaufen nach den Punkten β_1, β_2, β_3.

Wir construiren nun über den drei Linien $a_\varkappa b_\varkappa$ (d. i. über den Linien $a_1 b_1$, $a_2 b_2$, $a_3 b_3$) als Hypotenusen drei rechtwinklige Dreiecke $a_\varkappa s_\varkappa b_\varkappa$, parallel-congruent zu den Dreiecken $\alpha\sigma\beta_\varkappa$, und erhalten in solcher Weise drei neue Punkte s_1, s_2, s_3. Das von diesen gebildete Dreieck mag S heissen.

In den construirten rechtwinkligen Dreiecken sind die Katheten $a_\varkappa s_\varkappa$ senkrecht zur Ebene Ω, nämlich parallel-congruent mit dem Perpendikel $\alpha\sigma$. Demnach wird das Dreieck A durch eine gewisse Parallelverschiebung, deren Richtung senkrecht gegen Ω ist, zur Coincidenz gebracht werden können mit dem Dreieck S; woraus augenblicklich folgt, dass S congruent ist mit A, also auch mit B.

Um nun ferner diejenige Bewegung zu ermitteln, durch welche S zur Coincidenz mit B gelangen könnte, bemerken wir zunächst, dass die drei Katheten $s_\varkappa b_\varkappa$ parallel sind zur Ebene Ω, und dass demnach drei zu Ω parallele Ebenen Ω_1, Ω_2, Ω_3 existiren, von welchen die erste die Punkte s_1, b_1, die zweite die Punkte s_2, b_2, die dritte die Punkte s_3, b_3 in sich enthält. Die Ecken des Dreiecks S befinden sich also in drei Parallelebenen Ω_1, Ω_2, Ω_3, und in denselben drei Ebenen befinden sich gleichzeitig auch die Ecken des (mit S congruenten) Dreiecks B. Daraus folgt augenblicklich, dass durch senkrechte Projection von S und B auf eine der Ebenen Ω_1, Ω_2, Ω_3 oder auch auf Ω selber zwei Dreiecke entstehen werden, die gleich lange Seiten haben, mithin congruent sind.

Denken wir uns die drei gegen Ω senkrechten Linien $a_1 s_1$, $a_2 s_2$, $a_3 s_3$ so weit verlängert, bis sie die Ebene Ω schneiden, und bezeichnen wir die so entstandenen Schnittpunkte mit a_1', a_2', a_3', und das von denselben gebildete Dreieck mit A', so repräsentirt A' die senkrechte Projection von A auf Ω, gleichzeitig aber auch die senkrechte Projection von S auf Ω. Denken wir uns andererseits durch die Ecken b_1, b_2, b_3 des Dreiecks B ebenfalls drei die Ebene Ω senkrecht schneidende Linien gelegt, und das von den Schnittpunkten b_1', b_2', b_3' gebildete Dreieck mit B' bezeichnet, so ist B' die senkrechte Projection von B auf Ω.

Die so erhaltenen Dreiecke A' und B' sind also unter einander congruent. Und ebenso sind natürlich unter einander congruent diejenigen senkrecht auf Ω stehenden dreikantigen Prismata (A', S), (B', B), deren Grundflächen durch A', B' und deren obere Begrenzungsflächen durch S, B repräsentirt sind. Diese Prismata (A', S), (B', B) können daher angesehen werden als zwei verschiedene Positionen ein und desselben Prismas, und können daher durch eine geeignete Bewegung mit einander zur Deckung gebracht werden, wobei selbstverständlich auch A' mit B', und S mit B zur Coincidenz kommen wird. Können aber zwei in derselben Ebene befindliche Dreiecke (wie A', B') angesehen werden als zwei verschiedene Positionen ein und desselben Dreiecks, so wird (nach bekanntem Satz, vgl. Jullien, Problèmes de Mécanique. Paris 1855. Tome I. pag. 164) das eine mit dem andern zur Deckung gebracht werden können durch Drehung um eine gewisse zur Ebene senkrechte Achse. Denkt man sich diese Achse construirt für die Dreiecke A', B', so wird das Prisma (A', S) mit dem Prisma (B', B) zur Deckung gebracht werden können durch Drehung um ebendieselbe Achse. Diese Achse — sie mag m heissen — muss offenbar gleich weit abstehen von a_1' und b_1', ebenso gleich weit abstehen von a_2' und b_2', und endlich auch gleich weit entfernt sein von a_3' und b_3'. Sie wird daher liegen in der Mittelebene $\mathfrak{M}_1$ von $a_1'\,b_1'$ (d. i. in einer Ebene $\mathfrak{M}_1$, durch welche der geometrische Ort derjenigen Punkte repräsentirt wird, welche von a_1' und b_1' gleich weit abstehen); ebenso in der Mittelebene $\mathfrak{M}_2$ von $a_2'\,b_2'$; und ebenso in der Mittelebene $\mathfrak{M}_3$ von $a_3'b_3'$. Bemerkt mag werden, dass diese Ebenen $\mathfrak{M}_1$, $\mathfrak{M}_2$, $\mathfrak{M}_3$ auch aufgefasst werden können als die Mittelebenen von s_1b_1, s_2b_2, s_3b_3.

Das Dreieck A gelangte zur Coincidenz mit S durch eine Parallelbewegung, deren Richtung gegen Ω senkrecht, also identisch ist mit der Richtung der Linie m; und das Dreieck S seinerseits kommt, wie wir gegenwärtig sehen, zur Coincidenz mit B durch Anwendung einer Rotationsbewegung, deren Achse ebenfalls durch die Linie m repräsentirt ist. Zwei Bewegungen solcher Art bilden aber zusammengenommen eine sogenannte Schraubenbewegung. Wir gelangen somit zu folgendem

Satz. *Ein starrer Körper kann aus einer beliebig gegebenen Position in eine beliebig gegebene andere Position jederzeit übergeführt werden vermittelst einer Schraubenbewegung.*

Sind a_1, a_2, a_3 die Lagen, welche drei mit dem Körper fest verbundene Punkte bei der ersten, ferner b_1, b_2, b_3 diejenigen Lagen, welche dieselben bei der zweiten Position inne haben, und zieht man von einem willkürlich gewählten Punkte α aus drei Linien $\alpha\beta_1$, $\alpha\beta_2$, $\alpha\beta_3$ parallel-congruent zu a_1b_1, a_2b_2, a_3b_3, so wird die Achse jener Schraubenbewegung immer senkrecht stehen gegen die durch die Punkte β_1, β_2, β_3 bestimmte Ebene Ω.

Soll die Schraubenbewegung genauer determinirt werden, so construire man über den drei Linien $a_\varkappa\, b_\varkappa$ als Hypotenusen drei rechtwinklige Dreiecke $a_\varkappa s_\varkappa b_\varkappa$, bei denen die Katheten $a_\varkappa s_\varkappa$ senkrecht, die Katheten $s_\varkappa b_\varkappa$ parallel zur Ebene Ω sind; construire ferner für die drei *letztgenannten Linien $s_x b_x$ die Mittelebenen $\mathfrak{M}_x$; und lege endlich von derjenigen Linie* m *aus, in welcher diese drei Mittelebenen sich schneiden, nach jedem der drei Punktpaare* (s_x, b_x) *ein Ebenenpaar* $(\mathfrak{S}_x, \mathfrak{B}_x)$. — *Alsdann ist* m *die Achse der Schraubenbewegung; und gleichzeitig wird alsdann, was die beiden Bestandtheile dieser Bewegung anbelangt, die Grösse der gleitenden Bewegung durch die gemeinschaftliche Länge der drei Katheten $a_x s_x$, und die Grösse der drehenden Bewegung durch den gemeinschaftlichen Werth der drei Winkel $\mathfrak{S}_x \mathfrak{B}_x$ repräsentirt sein.*

Unter $\mathfrak{S}_x \mathfrak{B}_x$ ist der Winkel zu verstehen, den die beiden (durch m gelegten) Ebenen $\mathfrak{S}_x$ und $\mathfrak{B}_x$ mit einander bilden.

§. 2.

Zweifel über die Richtigkeit des erhaltenen Satzes. — Kriterium für die directe oder inverse Congruenz zweier Dreiecke.

Die eben durchgeführte Untersuchung enthält einen sehr bedenklichen Passus. Durch unsere Constructionen hatten sich zwei Dreiecke A' und B' ergeben, beide gelegen in ein und derselben Ebene Ω; es war nachgewiesen worden, dass diese Dreiecke gleich lange Seiten besitzen, mithin congruent sind. Hieraus aber folgt noch keineswegs, dass die Dreiecke durch eine in der Ebene Ω bleibende Bewegung mit einander zur Deckung gebracht werden können. Sollte solches aber nicht möglich sein, so würde das aufgeführte Gebäude zusammenstürzen.

Um über diese Dinge ins Klare zu kommen, müssen wir irgend welche Kriterien zu ermitteln suchen, mit Hülfe deren sich erkennen lässt, ob zwei in derselben Ebene befindliche congruente Dreiecke durch eine in dieser Ebene bleibende Bewegung mit einander zur Deckung gebracht werden können, oder nicht. Mit andern Worten: Wir müssen Kriterien entdecken, durch welche sich entscheiden lässt, ob die zwischen zwei gegebenen Dreiecken bereits erkannte Congruenz eine directe oder eine inverse ist*).

---

*) Zwei in derselben Ebene befindliche Figuren mögen direct-congruent heissen, falls sie mit einander zur Deckung gebracht werden können durch eine in jener Ebene bleibende Bewegung. Dagegen sollen sie invers-congruent genannt werden, sobald sie durch eine solche Bewegung symmetrisch zu einander gestellt werden können in Bezug auf irgend eine in der Ebene liegende Linie, so dass noch eine gewisse aus der Ebene heraustretende Bewegung (nämlich eine Drehung von 180° um jene Symmetrielinie) hinzukommen müsste, falls die Figuren zur Deckung gelangen sollen.

Ferner mag sogleich bemerkt werden, dass wir eine gegebene Figur cubisch oder quadratisch oder linear oder punktuell nennen werden, jenachdem

Lineare oder gar punktuelle Dreiecke in diese Untersuchung mit hineinzuziehen, würde offenbar keinen Sinn haben, weil bei derartigen Dreiecken der Unterschied zwischen directer und inverser Congruenz völlig verschwindet. Demgemäss werden wir uns beschränken können auf die Untersuchung quadratischer Dreiecke, d. i. auf die Untersuchung von Dreiecken, deren Flächeninhalt von Null verschieden ist.

Es mögen also in ein und derselben Ebene zwei quadratische Dreiecke gegeben sein, $x_1\ x_2\ x_3$ oder X, und $y_1\ y_2\ y_3$ oder Y; und es sei bekannt, dass diese Dreiecke einander congruent sind. — Gleichzeitig mögen von einem willkürlich gewählten Punkte ξ aus drei Linien gezogen sein $\xi\eta_1$, $\xi\eta_2$, $\xi\eta_3$, parallel-congruent zu den Linien x_1y_1, x_2y_2, x_3y_3. — Wir werden zeigen, dass das so erhaltene Dreieck $\eta_1\ \eta_2\ \eta_3$ oder H massgebend ist für den Charakter der zwischen X, Y vorhandenen Congruenz, dass nämlich die Frage, ob jene Congruenz eine directe oder inverse ist, augenblicklich beantwortet werden kann, sobald nur bekannt ist, ob das Dreieck H ein quadratisches, ein lineares oder ein punktuelles ist.

Wird das Dreieck Y in der gegebenen Ebene sich selber parallel verschoben in irgend welcher Richtung und um irgend welche Strecke, so werden sich die Punkte η_1, η_2, η_3 in derselben Richtung und um dieselbe Strecke verschieben, so dass die Figur des Dreiecks H völlig ungeändert bleibt. Andererseits ist zu bemerken, dass bei einer solchen Verschiebung auch der Charakter der zwischen X und Y vorhandenen Congruenz ungeändert bleibt. Denn war diese Congruenz vor der Verschiebung eine directe, so wird sie nach der Verschiebung ebenfalls eine directe sein; und war sie vor der Verschiebung eine inverse, so wird sie nachher ebenfalls eine inverse sein.

Die Figur des Dreiecks H und der Charakter der zwischen X, Y vorhandenen Congruenz sind aber diejenigen Ob-

der Raum, in welchem sie Platz findet, 3 oder 2 oder 1 oder 0 Dimensionen besitzt. So werden wir z. B. ein Dreieck quadratisch nennen, wenn sein Flächeninhalt von Null verschieden. Ist hingegen der Flächenraum des Dreiecks gleich Null, liegen also seine drei Seiten in derselben geraden Linie, und ist gleichzeitig unter diesen drei Seiten wenigstens eine von Null verschieden, so wird das Dreieck ein lineares zu nennen sein. Sind endlich die Seiten des Dreiecks sämmtlich gleich Null, so wird dasselbe zu bezeichnen sein als ein punktuelles Dreieck.

Sind in ein und derselben Ebene zwei einander congruente Figuren gegeben, und ist jede dieser Figuren linear, so verschwindet der Unterschied zwischen directer und inverser Congruenz. Sind z. B. in der Ebene zwei lineare Dreiecke gegeben, so werden dieselben, falls sie überhaupt congruent sind, jederzeit sowohl direct-congruent als auch invers-congruent sein.

jecte, mit denen wir es hier zu thun haben, diejenigen Objecte, zwischen denen ein bestimmter Nexus entdeckt werden soll. Da nun diese Objecte durch die vorhin genannte Parallelverschiebung keinerlei Aenderung erleiden, so ist es einerlei, ob wir das Dreieck Y in seiner ursprünglich gegebenen Lage verharren lassen, oder ob wir uns dasselbe durch irgend welche Parallelverschiebung in eine andere, für die Untersuchung bequemere Lage, etwa in eine Lage versetzt denken, bei welcher eine Ecke des Dreiecks zusammenfällt mit der analogen Ecke des Dreiecks X. Gelingt es uns nämlich nach einer solchen Verschiebung zwischen jenen beiden Objecten irgend welchen bestimmten Nexus zu entdecken, so wird derselbe, weil die Objecte während der Verschiebung keinerlei Aenderung erleiden, auch schon bestanden haben vor der Verschiebung. Mit anderen Worten: Gelingt es zwischen den in Rede stehenden Objecten unter der Voraussetzung, dass eine Ecke von X mit der analogen von Y coincidirt, einen bestimmten Nexus aufzufinden, so wird dieser Nexus auch dann vorhanden sein, wenn jene Voraussetzung **nicht** erfüllt ist.

Fällt x_1 mit y_1 zusammen, so fällt auch ξ zusammen mit η_1; und demgemäss verwandeln sich die Linien $\xi\eta_1$, $\xi\eta_2$, $\xi\eta_3$ in $\eta_1\eta_1$, $\eta_1\eta_2$, $\eta_1\eta_3$, d. i. in einen Punkt und zwei Seiten des Dreiecks H. Die Verbindungslinien x_1y_1, x_2y_2, x_3y_3 sind demnach ihrer Länge und Richtung nach repräsentirt durch $\eta_1\eta_1$, $\eta_1\eta_2$, $\eta_1\eta_3$. Mit anderen Worten: Die erste von jenen Verbindungslinien ist repräsentirt durch einen Punkt, und die beiden andern sind repräsentirt durch zwei Seiten des Dreiecks H. Was diese beiden letztern Verbindungslinien x_2y_2 und x_3y_3 anbelangt, so sind folgende drei Fälle möglich und zugleich die einzigen, welche überhaupt vorkommen können:

A. Die Linien x_2y_2, x_3y_3 sind beide $= 0$, mithin H punktuell (weil die mit x_2y_2, x_3y_3 parallel-congruenten Linien $\eta_1\eta_2$, $\eta_1\eta_3$ alsdann ebenfalls $= 0$ sind). In diesem Falle findet eine vollständige Coincidenz, folglich eine directe Congruenz statt zwischen X und Y.

B. Von den Linien x_2y_2, x_3y_3 ist nur eine $= 0$, mithin H linear. Alsdann ist die Congruenz zwischen X, Y offenbar eine inverse.

C. Von den Linien x_2y_2, x_3y_3 ist keine $= 0$, mithin H linear oder quadratisch, jenachdem x_2y_2, x_3y_3 parallel zu einander sind oder nicht. Dieser dritte Fall kann offenbar in erschöpfender Weise in folgende zwei Unterabtheilungen zerlegt werden:

Cα. Die Congruenz zwischen X, Y ist eine directe. Alsdann kann das Dreieck X durch eine gewisse Drehung um die gemeinschaftliche Ecke $(x_1 y_1)$, welche m genannt werden mag, zur Deckung gebracht werden mit Y. Demnach sind $x_2 m y_2$ und $x_3 m y_3$ zwei einander ähnliche gleichschenklige Dreiecke, deren Spitzen in m liegen. Folglich ist der gemeinschaftliche Werth der Winkel $x_2 m x_3$, $y_2 m y_3$ gleich gross mit demjenigen Winkel, welchen die Höhen jener Dreiecke, d. i. die Mittellinien von $x_2 y_2$, $x_3 y_3$ mit einander machen, also auch gleich gross mit demjenigen Winkel, den die Linien $x_2 y_2$, $x_3 y_3$ selber mit einander einschliessen. Daraus ergiebt sich, dass diese Linien $x_2 y_2$, $x_3 y_3$ nicht parallel sind. Denn die genannten Winkel $x_2 m x_3$, $y_2 m y_3$ sind Winkel der gegebenen Dreiecke X, Y, und können daher (weil vorausgesetzt wurde, dass diese Dreiecke quadratisch sind) weder 0^0 noch 180^0 betragen.

$C\beta$. Die Congruenz zwischen X, Y ist eine inverse. Alsdann existirt für diese Dreiecke eine durch m, d. i. durch die gemeinschaftliche Ecke $(x_1 y_1)$ hindurchgehende Symmetrielinie, gegen welche die Verbindungslinien $x_2 y_2$, $x_3 y_3$ senkrecht stehen müssen. Demnach sind die Linien $x_2 y_2$, $x_3 y_3$ parallel.

Sind also, um Alles zusammenzufassen, die gegebenen Dreiecke X, Y direct-congruent, so müssen die Linien $x_2 y_2$, $x_3 y_3$ den in A. oder den in $C\alpha$. angegebenen Charakter besitzen; folglich wird H punktuell oder quadratisch sein. Und sind andererseits die Dreiecke X, Y invers-congruent, so werden die Linien $x_2 y_2$, $x_3 y_3$ jederzeit den in B. oder den in $C\beta$. angegebenen Charakter besitzen; folglich wird H linear sein. Wir können somit auch umgekehrt sagen: Die zwischen X, Y vorhandene Congruenz ist eine directe, sobald H punktuell oder quadratisch, hingegen eine inverse, wenn H linear ist. Da nun dieses Resultat, obwohl gefunden unter der Voraussetzung, dass zwei analoge Ecken der Dreiecke X, Y zusammenfallen, dennoch (zufolge unserer früheren Betrachtungen) auch für solche Fälle gültig sein muss, wo jene Voraussetzung nicht erfüllt ist, so gelangen wir zu folgendem

Satz. *Sind in einer und derselben Ebene irgend zwei congruente quadratische Dreiecke gegeben $x_1 x_2 x_3$ und $y_1 y_2 y_3$, und denkt man sich von einem beliebigen Punkte ξ aus drei Linien gezogen $\xi\eta_1$, $\xi\eta_2$, $\xi\eta_3$, parallel-congruent zu $x_1 y_1$, $x_2 y_2$, $x_3 y_3$, so wird die zwischen den Dreiecken $x_1 x_2 x_3$ und $y_1 y_2 y_3$ vorhandene Congruenz eine directe sein, sobald das Dreieck $\eta_1 \eta_2 \eta_3$ punktuell oder quadratisch, hingegen eine inverse sein, sobald jenes Dreieck linear ist.*

Sind die gegebenen congruenten Dreiecke nicht quadratisch, sondern linear oder punktuell, so ist ihre Congruenz gleichzeitig sowohl eine directe, als auch eine inverse.

§. 3.

Revision der in §. 1 durchgeführten Untersuchung.

Unter Ω war diejenige Ebene verstanden worden, welche durch die drei Punkte β_1, β_2, β_3 hindurchgeht. Demnach ist diese Ebene nur dann eine völlig bestimmte, wenn das Dreieck $\beta_1 \beta_2 \beta_3$ ein quadratisches ist, einer gewissen Willkür aber überlassen, wenn dieses Dreieck linear oder punktuell sein sollte.

In dieser Ebene Ω hatten sich durch unsere Constructionen zwei Dreiecke A', B' ergeben, deren Congruenz ausser Zweifel steht. Es soll untersucht werden, ob diese Congruenz eine directe oder inverse ist.

Um diese Frage zu entscheiden, wird der eben gefundene Satz in Anwendung zu bringen sein. Wir werden daher für die Dreiecke A', B' die Verbindungslinien der analogen Ecken, d. i. die Linien $a_1'b_1'$, $a_2'b_2'$, $a_3'b_3'$ ziehen, sodann von einem willkürlich gewählten Punkte aus drei andere Linien ziehen, welche mit jenen Verbindungslinien parallel-congruent sind, und endlich das Dreieck zu untersuchen haben, welches von den Endpunkten dieser letztern drei Linien gebildet wird.

Nun sind aber (zufolge unserer Constructionen) $a_1'b_1'$, $a_2'b_2'$, $a_3'b_3'$ parallel-congruent mit den Linien s_1b_1, s_2b_2, s_3b_3, und diese letztern wiederum parallel-congruent mit $\sigma\beta_1$, $\sigma\beta_2$, $\sigma\beta_3$. Demnach repräsentiren β_1, β_2, β_3 dasjenige Dreieck, von dessen Beschaffenheit die Antwort auf die hier vorliegende Frage abhängig ist. Mit andern Worten: Die in Rede stehenden Dreiecke A', B' werden direct-congruent sein, sobald das Dreieck $\beta_1 \beta_2 \beta_3$ punktuell oder quadratisch, hingegen invers-congruent sein, sobald $\beta_1 \beta_2 \beta_3$ ein lineares Dreieck ist. Die Gültigkeit unserer in §. 1 durchgeführten Untersuchung wird daher, falls das Dreieck $\beta_1 \beta_2 \beta_3$ ein punktuelles oder quadratisches ist, keinem weiteren Zweifel unterworfen sein.

Hingegen scheint jene Untersuchung fehlerhaft für den Fall, dass das Dreieck $\beta_1 \beta_2 \beta_3$ linear ist. Doch bedarf die Sache noch einer genaueren Ueberlegung. Versetzen wir uns in die Verhältnisse, welche ein solcher Fall darbietet!

Gegeben sind die Dreiecke A, B. Aus ihnen deducirt ist die Figur $\alpha\, \beta_1 \beta_2 \beta_3$. Das Dreieck $\beta_1 \beta_2 \beta_3$ ist ein lineares. Die mit Ω bezeichnete Ebene ist eine beliebige unter den unendlich vielen, welche durch die Linie $\beta_1 \beta_2 \beta_3$ hindurchgelegt werden können. Und die durch senkrechte Projection von A, B auf diese Ebene Ω erhaltenen Dreiecke A', B' sind (wie aus den zuletzt angestellten Ueberlegungen hervorgeht) zu einander invers-congruent. Lassen wir die Ebene Ω um jene gerade Linie $\beta_1\beta_2\beta_3$ (wie um eine feste Achse) rotiren, so werden die Projectionen A', B' der gegebenen Dreiecke A, B von Augenblick zu Augenblick andere werden, beständig aber invers-congruent zu einander bleiben. In einem gewissen Augenblicke der Rotationsbewegung wird Ω senkrecht sein gegen die Ebene von A, mithin A' linear sein, folglich das (zu A' invers-congruente) Dreieck B' ebenfalls linear sein. Zwei einander invers-congruente lineare Dreiecke sind aber gleichzeitig auch direct-congruent. Somit sehen wir, dass die Dreiecke A', B' in dem genannten Augenblicke der Rotationsbewegung direct-congruent sind, und ausserdem, dass in jenem Augenblicke die Ebene Ω nicht nur senkrecht ist zur Ebene von A, sondern gleichzeitig auch zu der von B. — Unsere in §. 1 angestellte Untersuchung wird daher, wenn das Dreieck $\beta_1\beta_2\beta_3$ linear ist, ebenfalls gültig sein, vorausgesetzt, dass man über die Lage der Ebene Ω, welche für diesen Fall noch einer gewissen Willkür überlassen war, in geeigneter Weise disponirt, sie nämlich senkrecht wählt gegen die Ebenen von A und B.

Wir gelangen somit zu dem

Resultat. *Der in §. 1 (pag. 197) aufgestellte Satz ist unter allen Umständen richtig; nur ist in denjenigen Fällen, wo die durch die Punkte β_1, β_2, β_3 definirte Ebene Ω keine völlig bestimmte ist, in Betreff der Wahl dieser Ebene eine gewisse Vorsicht zu beobachten. Das Dreieck $\beta_1\beta_2\beta_3$ ist quadratisch oder linear oder punktuell. Im ersten Falle ist die Ebene Ω völlig bestimmt; hinsichtlich der beiden letztern Fälle aber Folgendes zu bemerken:*

Ist das Dreieck $\beta_1\beta_2\beta_3$ linear, so existirt jederzeit eine durch die Linie $\beta_1\beta_2\beta_3$ hindurchgehende Ebene, welche gleichzeitig senkrecht steht zur Ebene des Dreiecks $a_1a_2a_3$ und zu der des Dreiecks $b_1b_2b_3$. Diese Ebene ist es, welche in solchem Falle zur Ebene Ω genommen werden muss.

Ist andererseits das Dreieck $\beta_1\beta_2\beta_3$ ein punktuelles, fallen also die Punkte β_1, β_2, β_3 zusammen zu einem einzigen Punkt, so kann zur Ebene Ω jede beliebige Ebene genommen werden, welche durch diesen Punkt hindurchgeht, also überhaupt jede beliebige Ebene. Denn der in Rede stehende Punkt besitzt, weil α willkürlich zu wählen ist, ebenfalls eine willkürliche Lage.

Sind die gegebenen Dreiecke $a_1a_2a_3$ und $b_1b_2b_3$ parallel-congruent, so sind die Verbindungslinien a_1b_1, a_2b_2, a_3b_3 sämmtlich von gleicher Richtung und Länge. Demnach sind in diesem Falle die Linien

$\alpha\beta_1$, $\alpha\beta_2$, $\alpha\beta_3$ untereinander identisch; und es entsteht also ein Zusammenfallen der Punkte β_1, β_2, β_3 zu einem einzigen Punkt. Folglich kann in diesem Falle jede beliebige Ebene zur Ebene Ω gewählt werden.

Nimmt man für Ω diejenige Ebene, welche senkrecht steht zur gemeinschaftlichen Richtung der Linien $a_1 b_1$, $a_2 b_2$, $a_3 b_3$, so erhält man eine Schraubenbewegung, bei welcher der eine Bestandtheil, nämlich die drehende Bewegung, null ist. Wählt man hingegen für Ω irgend eine andere Ebene, so gelangt man zu einer Schraubenbewegung, deren Achse unendlich weit entfernt ist. Eine solche Bewegung ist aber zusammengesetzt aus zwei Parallelbewegungen, von denen die eine parallel zur Achse, die andere senkrecht zur Achse ist, und demgemäss reducirbar auf eine einzige Parallelbewegung. In solcher Weise gelangt man bei Anwendung dieser letztern Ebene Ω auf einem gewissen Umwege schliesslich zu demselben Resultate, wie bei der zuerst benutzten Ebene Ω.

§. 4.

Anhang. — Congruente Figuren auf einer Linie, in der Ebene und im Raume.

Zwei in derselben geraden Linie gegebene congruente Figuren sind entweder durch eine in der Linie bleibende Bewegung zur gegenseitigen Deckung zu bringen, oder sind symmetrisch (die eine das Spiegelbild der andern) in Bezug auf einen in der Linie befindlichen Punkt. Bei Besitz der ersten Eigenschaft mögen sie direct-, bei Besitz der zweiten invers-congruent genannt werden. Offenbar gilt alsdann der

Satz I. *Sind in derselben geraden Linie irgend zwei congruente lineare Figuren $a_1\, a_2 \ldots a_n$ und $b_1\, b_2 \ldots b_n$ gegeben, und denkt man sich von einem willkürlich gewählten Punkt α aus n Linien gezogen $\alpha\beta_1$, $\alpha\beta_2$, ..., $\alpha\beta_n$ parallel-congruent zu $a_1 b_1$, $a_2 b_2$, ... $a_n b_n$, so wird die zwischen jenen Figuren vorhandene Congruenz eine directe oder inverse sein, jenachdem die Figur $\beta_1\, \beta_2 \ldots \beta_n$ punktuell oder linear ist.*

Sind die gegebenen Figuren $a_1\, a_2 \ldots a_n$ und $b_1\, b_2 \ldots b_n$ nicht linear, sondern punktuell, so ist selbstverständlich ihre Congruenz gleichzeitig sowohl eine directe als auch eine inverse.

Zwei in derselben Ebene gegebene congruente Figuren sind durch eine in der Ebene bleibende Bewegung entweder in eine Lage versetzbar, bei welcher die eine mit der andern coincidirt, oder versetzbar in eine Lage, bei welcher sie zu einander symmetrisch sind in Bezug auf eine in der Ebene befindliche Linie. Bezeichnen wir nun ebenso wie früher (vgl. Note p. 198) die im erstern Fall vorhandene Congruenz als eine directe, die im letztern Fall vorhandene als inverse, so gelangen wir durch Verallgemeinerung unseres über congruente Dreiecke gefundenen Satzes (p. 201) mit Leichtigkeit zu folgendem allgemeineren Resultate.

Satz II. *Sind in ein und derselben Ebene irgend zwei congruente quadratische Figuren gegeben, bestehend aus den Punkten $a_1, a_2, \ldots, a_n$ und $b_1, b_2, \ldots, b_n$, und denkt man sich von einem willkürlich gewählten Punkte α aus n Linien gezogen $\alpha\beta_1, \alpha\beta_2, \ldots, \alpha\beta_n$ parallel-congruent zu $a_1b_1, a_2b_2, \ldots, a_nb_n$, so wird die zwischen jenen Figuren vorhandene Congruenz eine directe sein, sobald die Figur $\beta_1\beta_2\ldots\beta_n$ punktuell oder quadratisch ist, hingegen eine inverse sein, wenn die Figur $\beta_1\beta_2\ldots\beta_n$ linear ist.*

Und zwar wird im Falle der directen Congruenz die eine gegebene Figur mit der andern durch eine parallele Verschiebung zur Deckung gebracht werden können oder nicht, jenachdem jene auxiliäre Figur $\beta_1\beta_2\ldots\beta_n$ punktuell oder quadratisch ist.

Sind die gegebenen congruenten Figuren $a_1 a_2 \ldots a_n$ und $b_1 b_2 \ldots b_n$ nicht quadratisch, sondern linear oder punktuell, so ist ihre Congruenz gleichzeitig sowohl eine directe als auch eine inverse. Demgemäss ist in dem vorstehenden Satz nur der Fall berücksichtigt worden, dass jene Figuren quadratisch sind.

Ausser diesem Satze existiren noch andere Methoden, um zu entscheiden, ob zwei in der Ebene gegebene Figuren, deren Congruenz bereits erkannt ist, eine directe oder eine inverse Congruenz besitzen. Diese Methoden werden dargeboten durch Umkehrung folgender beiden bekannten*) Sätze:

Satz IIa. *Sind in einer Ebene zwei direct-congruente Figuren $a_1 a_2 \ldots a_n$ und $b_1 b_2 \ldots b_n$ gegeben, so schneiden sich die n Mittellinien von $a_1b_1, a_2b_2, \ldots, a_nb_n$ in einem einzigen Punkt. Durch Drehung um diesen Punkt wird die eine Figur mit der andern zur Deckung gebracht werden können.*

Dabei ist unter der Mittellinie von $a_\varkappa b_\varkappa$ der geometrische Ort derjenigen Punkte zu verstehen, welche von $a_\varkappa$ und $b_\varkappa$ gleich weit abstehen.

Satz IIb. *Sind in einer Ebene zwei invers-congruente Figuren $a_1 a_2 \ldots a_n$ und $b_1 b_2 \ldots b_n$ gegeben, so liegen die Mitten (d. i. die Halbirungspunkte) der n Linien $a_1b_1, a_2b_2, \ldots, a_nb_n$ in einer Geraden.*

---

*) Man findet die Ableitung dieser Sätze und zugleich historische Notizen über dieselben in dem Werke von Baltzer: Die Elemente der Mathematik. Leipzig, 1865. Band II, p. 87 seq.

Durch eine Schraubenbewegung um diese Gerade (als Achse) wird die eine Figur mit der andern zur Deckung gebracht werden können.

Die Umkehrung dieser Sätze IIa. und IIb. darf indessen nicht ohne Vorsicht geschehen. Die Umkehrung des Satzes IIa. z. B. führt zu folgendem Ergebniss:

Satz IIα. *Sind in der Ebene zwei congruente quadratische Figuren $a_1\, a_2 \ldots a_n$ und $b_1\, b_2 \ldots b_n$ gegeben, und sind M_1, M_2, ..., M_n die Mittellinien von $a_1 b_1$, $a_2 b_2$, ..., $a_n b_n$, so können folgende Fälle eintreten: Entweder sämmtliche Linien M fallen zusammen; oder die Linien M schneiden sich in einem einzigen Punkte; oder sie schneiden sich in mehreren Punkten. Im ersten und dritten Falle sind die Figuren invers-congruent, im zweiten Falle aber direct-congruent.*

Andrerseits führt die Umkehrung des Satzes IIb. zu folgendem Resultate:

Satz IIβ. *Sind in einer Ebene zwei congruente quadratische Figuren $a_1\, a_2 \ldots a_n$ und $b_1\, b_2 \ldots b_n$ gegeben, und sind m_1, m_2, ..., m_n die Mitten der Verbindungslinien $a_1 b_1$, $a_2 b_2$, ..., $a_n b_n$, so werden jene gegebenen Figuren direct-congruent sein, sobald die Figur $m_1\, m_2 \ldots m_n$ punktuell oder quadratisch, hingegen invers-congruent sein, sobald die Figur $m_1\, m_2 \ldots m_n$ linear ist.*

Sind die in der Ebene gegebenen congruenten Figuren linear oder punktuell, so ist ihre Congruenz gleichzeitig sowohl eine directe, als auch eine inverse. Demgemäss ist in den Sätzen IIα. und IIβ. (ebenso wie bei Satz II.) nur auf den Fall Rücksicht genommen worden, dass jene Figuren quadratisch sind.

Bemerkt mag noch werden, dass den vier Sätzen IIa., IIb., IIα., IIβ. vier andere Sätze parallel stehen, welche gelten für Figuren auf einer gegebenen Kugelfläche. Parallel dem Satze IIb. z. B. steht folgender:

Sind auf einer Kugelfläche zwei invers-congruente Figuren $a_1\, a_2 \ldots a_n$ und $b_1\, b_2 \ldots b_n$ gegeben, und verbindet man jedes der n Punktpaare (a_1, b_1), (a_2, b_2), ..., (a_n, b_n) durch den Bogen eines grössten Kreises, so liegen die Halbirungspunkte dieser n Bogen auf ein und demselben grössten Kreise. Ist E die Ebene dieses grössten Kreises und D der zu E senkrechte Kugeldurchmesser, so kann die eine Figur durch Drehung um die Achse D in eine Lage versetzt werden, bei welcher sie als das Spiegelbild der andern erscheint in Bezug auf die Ebene E.

Aehnlich ergeben sich die übrigen Parallelsätze, nämlich einfach dadurch, dass man in den Sätzen IIa., IIα., IIβ. die geraden Linien durchweg durch Bogen grösster Kreise ersetzt.

Zwei im Raume gegebene Figuren sollen congruent heissen, wenn je zwei analoge Linien dieser Figuren von gleicher Länge sind. Zwei solche congruente Figuren werden durch geeignete Bewegungen (Verschiebungen und Drehungen) entweder in eine Lage versetzbar sein, bei welcher die Figuren mit einander coincidiren, oder in eine Lage versetzbar sein, bei welcher die eine Figur als Spiegelbild der andern erscheint in Bezug auf irgend eine Ebene. Bei Besitz der erstern Eigenschaft mögen die Figuren direct-congruent, bei Besitz der letztern invers-congruent genannt werden. Alsdann gilt folgender, mit den Sätzen I. und II. völlig conformer Satz.

Satz III. *Sind im Raume zwei congruente cubische Figuren $a_1\, a_2 \dots a_n$ und $b_1\, b_2 \dots b_n$ gegeben, und denkt man sich von einem willkürlich gewählten Punkt α aus n Linien gezogen $\alpha\beta_1$, $\alpha\beta_2$, ..., $\alpha\beta_n$, parallel-congruent zu $a_1 b_1$, $a_2 b_2$, ..., $a_n b_n$, so wird die zwischen jenen Figuren vorhandene Congruenz eine directe sein, sobald die Figur $\beta_1\, \beta_2 \dots \beta_n$ punktuell oder quadratisch ist, hingegen eine inverse sein, sobald die Figur $\beta_1\, \beta_2 \dots \beta_n$ linear oder cubisch ist.*

Im Falle der directen Congruenz kann die gegenseitige Deckung der beiden gegebenen Figuren durch eine parallele Verschiebung bewerkstelligt werden oder nicht, jenachdem die auxiliäre Figur $\beta_1\, \beta_2 \dots \beta_n$ punktuell oder quadratisch ist.

Im Falle der inversen Congruenz kann diejenige relative Lage der beiden gegebenen Figuren, bei welcher die eine als Spiegelbild der andern erscheint in Bezug auf irgend eine Ebene, vermittelst einer parallelen Verschiebung hervorgebracht werden oder nicht, jenachdem die auxiliäre Figur $\beta_1\, \beta_2 \dots \beta_n$ linear oder cubisch ist.

Sind die im Raume gegebenen congruenten Figuren $a_1\, a_2 \dots a_n$ und $b_1\, b_2 \dots b_n$ punktuell oder linear oder quadratisch, so ist ihre Congruenz gleichzeitig sowohl eine directe als auch eine inverse. Demgemäss ist im vorstehenden Satz nur auf den Fall Rücksicht genommen worden, dass jene Figuren cubisch sind.

Es ist leicht, für diesen Satz III. einen rein geometrischen Beweis zu geben, ähnlich demjenigen auf pag. 200. Einfacher übrigens und übersichtlicher gestaltet sich die analytische Beweisführung; sie leitet zu einer gewissen Gleichung dritten Grades, und zeigt, dass der Charakter der zu untersuchenden Figur $\beta_1\, \beta_2 \dots \beta_n$ unmittelbar abhängig ist von der Anzahl derjenigen Wurzeln dieser Gleichung, welche Null sind.

Zur Theorie der Functionaldeterminanten.

Von Carl Neumann in Leipzig.

Es seien u_1, u_2, u_3 gegebene Functionen von x_1, x_2, x_3, mithin auch umgekehrt x_1, x_2, x_3 gegebene Functionen von u_1, u_2, u_3; gleichzeitig sei

(1) $$\sum \pm \frac{\partial x_1}{\partial u_1}\,\frac{\partial x_2}{\partial u_2}\,\frac{\partial x_3}{\partial u_3} = \Delta\,.$$

Ferner bezeichne V eine unbestimmte Function von x_1, x_2, x_3. Endlich sei F eine gegebene Function von

(2) $$x_1,\ x_2,\ x_3,\ V,\ \frac{\partial V}{\partial x_1},\ \frac{\partial V}{\partial x_2},\ \frac{\partial V}{\partial x_3},$$

welche sich durch Einführung der Variablen u_1, u_2, u_3 für x_1, x_2, x_3 in eine Function von

(3) $$u_1,\ u_2,\ u_3,\ V,\ \frac{\partial V}{\partial u_1},\ \frac{\partial V}{\partial u_2},\ \frac{\partial V}{\partial u_3}$$

verwandeln wird.

Bildet man das über ein beliebig gegebenes Gebiet sich erstreckende Integral

(4) $$\iiint F\,dx_1\,dx_2\,dx_3 = \iiint F\,\Delta\,du_1\,du_2\,du_3\,,$$

und lässt man in diesem Integral (und zwar in seinen beiderlei Ausdrücken) die darin enthaltene unbestimmte Function V übergehen in $V + \delta V$, so gelangt man zu der Formel:

(5) $$\Delta\left(\frac{\partial F}{\partial V} - \sum \frac{\partial}{\partial x_i}\,\frac{\partial F}{\partial\frac{\partial V}{\partial x_i}}\right) = \Delta\,\frac{DF}{DV} - \sum \frac{\partial}{\partial u_i}\,\frac{\Delta\,.\,DF}{D\frac{\partial V}{\partial u_i}}\,,$$

wo die partiellen Differentialquotienten der Function F, jenachdem dieselbe als abhängig von den Grössen (2), oder als abhängig von den Grössen (3) angesehen werden soll, mit ∂ oder mit D bezeichnet sind, und wo die Summe Σ sich erstrecken soll auf $i = 1, 2, 3$.

In solcher Weise wird die Formel (5) von Jacobi abgeleitet (Jacobi's Werke II, p. 40). Sodann zeigt Jacobi, wie die Formel (5), sobald man für F die specielle Gestalt

(6) $$F = \sum \left(\frac{\partial V}{\partial x_i}\right)^2$$

wählt, mit grosser Leichtigkeit zur Transformation der Potential-Gleichung $\sum \frac{\partial^2 V}{\partial x_i^2} = 0$ hinleitet, nämlich diejenige Form liefert, welche diese Gleichung annimmt bei Einführung von u_1, u_2, u_3 für x_1, x_2, x_3.

Es scheint der Mühe werth, auf ein anderes aus der Gleichung (5) sich ergebendes Resultat hier aufmerksam zu machen. Wir wählen für F eine andere specielle Gestalt, setzen nämlich:

$$F = C_1 \frac{\partial V}{\partial x_1} + C_2 \frac{\partial V}{\partial x_2} + C_3 \frac{\partial V}{\partial x_3} = \sum C_i \frac{\partial V}{\partial x_i}, \tag{7}$$

oder, was dasselbe ist:

$$F = \sum \left(C_1 \frac{\partial u_i}{\partial x_1} + C_2 \frac{\partial u_i}{\partial x_2} + C_3 \frac{\partial u_i}{\partial x_3} \right) \frac{\partial V}{\partial u_i}, \tag{7a.}$$

wo C_1, C_2, C_3 beliebige Constanten sein sollen, und erhalten alsdann aus (5):

$$0 = \sum \frac{\partial \Delta \left(C_1 \frac{\partial u_i}{\partial x_1} + C_2 \frac{\partial u_i}{\partial x_2} + C_3 \frac{d u_i}{\partial x_3} \right)}{\partial u_i}. \tag{8}$$

Da C_1, C_2, C_3 willkürliche Constante sind, so zerfällt diese Gleichung in drei Gleichungen, von denen die der Constanten C_k entsprechende so lautet:

$$0 = \sum \frac{\partial \Delta \frac{\partial u_i}{\partial x_k}}{\partial u_i}, \tag{8a.}$$

oder ausführlicher geschrieben:

$$0 = \frac{\partial \Delta \frac{\partial u_1}{\partial x_k}}{\partial u_1} + \frac{\partial \Delta \frac{\partial u_2}{\partial x_k}}{\partial u_2} + \frac{\partial \Delta \frac{\partial u_3}{\partial x_k}}{\partial u_3}. \tag{8b.}$$

Nun ergeben sich bekanntlich aus den drei Gleichungen

$$d x_k = \frac{\partial x_k}{\partial u_1} du_1 + \frac{\partial x_k}{\partial u_2} du_2 + \frac{\partial x_k}{\partial u_3} du_3 \quad , \quad (k = 1, 2, 3)$$

durch Auflösung nach du_1, du_2, du_3 augenblicklich die Formeln:

$$\Delta\, du_i = \frac{\partial \Delta}{\partial \frac{\partial x_1}{\partial u_i}} dx_1 + \frac{\partial \Delta}{\partial \frac{\partial x_2}{\partial u_i}} dx_2 + \frac{\partial \Delta}{\partial \frac{\partial x_3}{\partial u_i}} dx_3 \quad , \quad (i = 1, 2, 3);$$

woraus folgt:

$$\Delta \frac{\partial u_i}{\partial x_k} = \frac{\partial \Delta}{\partial \frac{\partial x_k}{\partial u_i}} \quad , \quad (i, k = 1, 2, 3).$$

Hierdurch aber gewinnt die Gleichung (8b.) folgende Gestalt:

$$0 = \frac{\partial}{\partial u_1} \frac{\partial \Delta}{\partial \frac{\partial x_k}{\partial u_1}} + \frac{\partial}{\partial u_2} \frac{\partial \Delta}{\partial \frac{\partial x_k}{\partial u_2}} + \frac{\partial}{\partial u_3} \frac{\partial \Delta}{\partial \frac{\partial x_k}{\partial u_3}}; \tag{8c.}$$

und diese Formel (8c.) repräsentirt, wie man augenblicklich erkennt, einen bekannten Satz aus der Theorie der Functional-Determinanten. (Vgl. Jacobi, Crelle's Journ. Bd. 27.)

Das simultane System einer biquadratischen und einer quadratischen binären Form.

Von Dr. F. Harbordt in Düren.

Nach Untersuchung der einfachsten simultanen Invarianten und Covarianten, werde ich die biquadratische Form auf 2 verschiedene Arten jedesmal durch Anwendung dreier quadratischer Formen, zwischen welchen eine Relation besteht, typisch darstellen. Die Untersuchung der Bedeutung, die das Verschwinden der in Betracht kommenden Invarianten und Covarianten hat, wird dann gestatten, die einfachsten Contravarianten der entsprechenden ternären Formen zu discutiren. — Die Abhandlung ist aus der Anregung erwachsen, die ich den Vorlesungen des Herrn Professor Clebsch über algebraische Formen verdanke, und schliesst sich den von ihm angewandten Methoden an, insbesondere an die in den Annali di Matematica pura ed applicata Serie IIª Tomo Iº erschienene Abhandlung der Herren Clebsch und Gordan über binäre Formen 5^{ten} und 6^{ten} Grades.

§. 1.

Die Covarianten zweiten Grades.

Wir bezeichnen unsere gegebene biquadratische und quadratische Form symbolisch durch die Ausdrücke:

$$u = (a_1 x_1 + a_2 x_2)^4 = a_x^4 = b_x^4 = c_x^4 = \cdots$$
$$v = (\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2)^2 = \alpha_x^2 = \beta_x^2 = \gamma_x^2 = \cdots$$

Bedienen wir uns für eine Form n^{ten} Grades f der Bezeichnungen:

$$f_i = \frac{1}{n} \frac{\partial f}{\partial x_i} \qquad\qquad f_{ik} = \frac{1}{n.n-1} \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \, \partial x_k}$$

so ist:

$$u = u_{11} x_1^2 + 2 u_{12} x_1 x_2 + u_{22} x_2^2$$
$$v = v_{11} x_1^2 + 2 v_{12} x_1 x_2 + v_{22} x_2^2.$$

Wir erhalten dann durch folgende Bildungen, bei welchen wir noch $(m_1 n_2 - m_2 n_1) = (mn)$ setzen, eine Reihe von quadratischen Covarianten:

$$\begin{aligned} w &= u_{11}\, v_{22} - 2u_{12}\, v_{12} + u_{22}\, v_{11} = a_x^2\, (a\alpha)^2 \\ t &= u_{11}\, w_{22} - 2u_{12}\, w_{12} + u_{22}\, w_{11} = a_x^2\, (ab)^2\, (b\alpha)^2 \qquad (1) \\ r &= u_{11}\, t_{22} - 2u_{12}\, t_{12} + u_{22}\, t_{11} = a_x^2\, (ab)^2\, (bc)^2\, (c\alpha)^2. \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{aligned}$$

Durch Bildung von Functionaldeterminanten erhalten wir hieraus eine neue Reihe von quadratischen Covarianten:

$$\begin{aligned} l &= v_1\, w_2 - w_1\, v_2 = \alpha_x\, a_x\, (\beta a)^2\, (\alpha a) \\ m &= w_1\, t_2 - t_1 w_2 = a_x\, b_x\, (a\alpha)^2\, (bc)^2\, (c\beta)^2\, (ab) \qquad (2) \\ n &= t_1\, v_2 - t_2\, v_1 = a_x\, \alpha_x\, (ab)^2\, (b\beta)^2\, (a\alpha). \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{aligned}$$

Die Relationen zwischen diesen Covarianten ergeben sich*), wenn $\lambda\mu\nu$ willkürliche Grössen sind, und

$$D_{pq} = p_{11}\, q_{22} - 2p_{12}\, q_{12} + p_{22}\, q_{11}$$

gesetzt wird, aus der Identität:

$$\begin{vmatrix} v_{11} & v_{12} & v_{22} & 0 \\ w_{11} & w_{12} & w_{22} & 0 \\ t_{11} & t_{12} & t_{22} & 0 \\ x_2^2 & -x_1x_2 & x_1^2 & 1 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} v_{22} & -2\,v_{12} & v_{11} & \lambda \\ w_{22} & -2w_{12} & w_{11} & \mu \\ t_{22} & -2\,t_{12} & t_{11} & \nu \\ x_1^2 & +2x_1x_2 & x_2^2 & 0 \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} D_{vv} & D_{vw} & D_{vt} & v \\ D_{wv} & D_{ww} & D_{wt} & w \\ D_{tv} & D_{tw} & D_{tt} & t \\ v+\lambda & w+\mu & t+\nu & 0 \end{vmatrix}$$

$$= 2 \begin{vmatrix} v_{11} & v_{12} & v_{22} \\ w_{11} & w_{12} & w_{22} \\ t_{11} & t_{12} & t_{22} \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} v_2 & v_1 & \lambda \\ w_2 & w_1 & \mu \\ t_2 & t_1 & \nu \end{vmatrix}$$

Setzen wir:

$$R = \begin{vmatrix} v_{11} & v_{12} & v_{22} \\ w_{11} & w_{12} & w_{22} \\ t_{11} & t_{12} & t_{22} \end{vmatrix},$$

also:

$$\begin{vmatrix} v_{11} & v_{12} & v_{22} \\ w_{11} & w_{12} & w_{22} \\ t_{11} & t_{12} & t_{22} \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} v_{22} & -2\,v_{12} & v_{11} \\ w_{22} & -2w_{12} & w_{11} \\ t_{22} & -2\,t_{12} & t_{11} \end{vmatrix} =$$

$$\begin{vmatrix} D_{vv} & D_{vw} & D_{vt} \\ D_{wv} & D_{ww} & D_{wt} \\ D_{tv} & D_{tw} & D_{tt} \end{vmatrix} = 2\, R^2$$

*) Diese Methode ist in der Abhandlung der Herren Clebsch und Gordan über binäre Formen sechsten Grades l. c. gegeben.

und nennen die Coefficienten der D_{pq} in der Determinante derselben B_{pq}, so lauten die Relationen, die sich aus obiger Identität ergeben:

$$
(3) \qquad \begin{aligned}
v B_{vv} + w B_{vw} + t B_{vt} &= 2R\,(w_1 t_2 - w_2 t_1) = 2Rm \\
v B_{wv} + w B_{ww} + t B_{wt} &= 2R\,(t_1 v_2 - v_1 t_2) = 2Rn \\
v B_{tv} + w B_{tw} + t B_{tt} &= 2R\,(v_1 w_2 - v_2 w_1) = 2Rl.
\end{aligned}
$$

Dieselben erlauben zugleich die quadratischen Covarianten der ersten Reihe durch v, w, t auszudrücken. Durch Anwendung der Identität

$$
\begin{vmatrix}
p_1 & p_2 & p_1 x_1 + p_2 x_2 \\
q_1 & q_2 & q_1 x_1 + q_2 x_2 \\
r_1 & r_2 & r_1 x_1 + r_2 x_2
\end{vmatrix} = 0
$$

oder:

$$
p_x\,(qr) + q_x\,(rp) + r_x\,(pq) = 0
$$

erhalten wir nämlich:

$$
\begin{aligned}
u_{11} l_{22} - 2 u_{12} l_{12} + u_{22} l_{11} &= a_x^2\,(ab)\,(a\alpha)\,(\beta b)^2\,(\alpha b) \\
&= a_x\,(ab)\,(a\alpha)\,(\beta b)^2 \,.\, \{\alpha_x\,(ab) + b_x\,(a\alpha)\}
\end{aligned}
$$

Da das zweite Glied bei Vertauschung der gleichbedeutenden Buchstaben a und b nur das Vorzeichen ändert, so bleibt nur der erste Term zurück:

$$
a_x \alpha_x\,(ab)^2\,(b\beta)^2\,(a\alpha) = t_1 v_2 - v_1 t_2 = n.
$$

Wir erhalten somit aus (3):

$$
w B_{tv} + t B_{tw} + v B_{tt} = v B_{wv} + w B_{ww} + t B_{wt}
$$

oder:

$$
(4) \qquad v B_{tt} = v B_{wv} + w\,(B_{ww} - B_{tv}).
$$

Da wir statt v, w, t irgend 3 aufeinanderfolgende Glieder der Reihe (1) einsetzen können, so ergibt sich, dass wir jedes Glied derselben linear durch das 2te und 3te vorhergehende ausdrücken können.

Aus den aufgestellten Relationen ersehen wir jetzt, dass alle andern quadratischen Covarianten auf lineare Combinationen von v, w, t zurückkommen, wobei alle auftretenden Coefficienten Invarianten sind, und zwar Aggregate der 9 Terme D^{pq}.

§. 2.

Die aus den Covarianten zweiten Grades gebildeten Invarianten.

Das Resultat des vorigen §. lehrt auch, dass alle aus unseren quadratischen Covarianten entstehenden Invarianten Aggregate der 9 Invarianten D_{pq} sind. Aber auch diese können nicht von einander unabhängig sein. Nach einem allgemeinen Satze ist die Anzahl der von einander unabhängigen Invarianten, die sich für gegebene Formen bilden lassen, gleich der Anzahl der Coefficienten in denselben weniger der Anzahl der Substitutionscoefficienten bei linearer Transformation, vermehrt um die Einheit. In unserem Falle gibt es also 5 von einander unabhängige Invarianten. Wir nehmen zu den von u oder v allein gebildeten:

$$j = \tfrac{1}{6}\,(ab)^2\,(bc)^2\,(ca)^2$$
$$i = \tfrac{1}{2}\,(ab)^4$$
$$D_{vv} = (\alpha\beta)^2$$

die beiden simultanen Invarianten hinzu:

$$D_{vw} = (a\alpha)^2\,(\alpha\beta)^2$$
$$D_{ww} = (ab)^2\,(a\alpha)^2\,(b\beta)^2$$

und suchen alle übrigen durch diese 5 auszudrücken.

Wir finden ohne weiteres:

$$D_{vt} = (a\alpha)^2\,(ab)^2\,(b\beta)^2 = D_{ww}$$

und unter fortwährender Anwendung der oben erwähnten Grundidentität:

$$D_{wt} = (ab)^2\,(cb)^2\,(a\alpha)^2\,(c\beta)^2$$
$$= (ab)^2\,(cb)\,(a\alpha)\,(c\beta)^2\,.\,\{(ab)\,(c\alpha) + (ca)\,(b\alpha)\}$$
$$(ab)^3\,(c\beta)^2\,(c\alpha)\,(cb)\,(a\alpha) = \tfrac{1}{2}\,(ab)^4\,(c\beta)^2\,(c\alpha)^2 = i\,D_{vw}.$$

Der zweite Term kann durch Vertauschung der gleichbedeutenden Buchstaben a, b, c so dargestellt werden:

$$(ab)^2\,(cb)\,(ca)\,(a\alpha)\,(b\alpha)\,(c\beta))^2$$
$$= \tfrac{1}{3}\,(ab)\,(cb)\,(ca)\left\{\begin{array}{l} \quad (ab)\,(a\alpha)\,(b\alpha)\,(c\beta)^2 \\ +\,(bc)\,(b\alpha)\,(c\alpha)\,(a\beta)^2 \\ +\,(ca)\,(c\alpha)\,(a\alpha)\,(b\beta)^2 \end{array}\right\}.$$

Das zweite Glied zerfällt in zwei Ausdrücke:

$$(bc)\,(b\alpha)\,(a\beta)^2\,(c\alpha) = (b\alpha)\,(c\alpha)\,(\alpha\beta)\,\{(ac)\,(b\beta) + (ba)\,(c\beta)\}.$$

Vereinigen wir den ersten Term mit dem ersten, den zweiten mit dem dritten Gliede unserer Summe:

$$(ab)\,(b\alpha)\,(c\beta)\,\{(a\alpha)\,(c\beta) - (c\alpha)\,(a\beta)\} = (ab)\,(ac)\,(c\beta)\,(\alpha\beta)\,(b\alpha)$$
$$(ca)\,(b\beta)\,(c\alpha)\,\{(a\alpha)\,(b\beta) - (b\alpha)\,(a\beta)\} = (ab)\,(ca)\,(b\beta)\,(c\alpha)\,(\alpha\beta),$$

so bleibt nach Vereinigung dieser beiden Ausdrücke

$$(ab)\,(ca)\,(\alpha\beta)\,\{(b\beta)\,(c\alpha) - (c\beta)\,(b\alpha)\} = (ab)\,(ca)\,(cb)\,(\alpha\beta)^2$$
$$\tfrac{1}{3}\,(ab)^2\,(bc)^2\,(ca)^2\,(\alpha\beta)^2 = 2\,j\,D_{vv}$$

zurück, und wir haben:

$$D_{wt} = i\,D_{vw} + 2j\,D_{vv}. \tag{1}$$

Führen wir für

$$D_{tt} = (bd)^2\ (ab)^2\ (cd)^2\ (a\alpha)^2\ (c\beta)^2$$

dieselben Operationen durch, so ergiebt sich:

$$D_{tt} = i\,D_{ww} + 2j\,D_{vw} \tag{2}$$

Vermöge der Gleichungen (3) und (4) §. 1 drücken sich jetzt alle Invarianten, die aus den quadratischen Covarianten entstehen, durch unsere 5 einfachsten Invarianten aus. Von Interesse ist für uns nur die Combination von m, n, l mit einander und mit v, w, t. Wir brauchen nur die Gleichungen:

$$\begin{aligned} 2\,Rm &= 2\,R\,(w_1 t_2 - w_2 t_1) = v\,B_{vv} + w\,B_{vw} + t\,B_{vt} \\ 2\,Rn &= 2\,R\,(t_1 v_2 - v_1 t_2) = v\,B_{wv} + w\,B_{ww} + t\,B_{wt} \\ 2\,Rl &= 2\,R\,(v_1 w_2 - w_1 v_2) = v\,B_{tv} + w\,B_{tw} + t\,B_{tt} \end{aligned}$$

zu überblicken und uns der Relation:

$$\begin{vmatrix} D_{vv} & D_{vw} & D_{vt} \\ D_{wv} & D_{ww} & D_{wt} \\ D_{tv} & D_{tw} & D_{tt} \end{vmatrix} = 2\,R^2$$

zu erinnern, um die gesuchten Resultate zu erhalten. Nennen wir p, q irgend 2 von den Covarianten v, w, t und die aus letzteren gebildeten Functionaldeterminanten, bei welchen resp. p und q unberücksichtigt bleibt, P und Q, so lauten dieselben folgendermassen:

$$\begin{aligned} D_{PQ} &= \tfrac{1}{2}\,B_{pq} & \qquad D_{PP} &= \tfrac{1}{2}\,B_{pp} \\ D_{Pq} &= 0 & D_{Pp} &= R. \end{aligned} \tag{3}$$

Es ergiebt sich hieraus auch die Entstehung von R durch den Functionalinvariantenprocess. Dass sich R nicht rational durch die 5 einfachsten Invarianten kann ausdrücken lassen, lehrt eine Abzählung der Ordnungen in den Coefficienten von u und v. Für R^2 ist diese Darstellung:

$$R^2 = \frac{1}{2}\begin{vmatrix} D_{vv} & D_{vw} & D_{ww} \\ D_{vw} & D_{ww} & i\,D_{ww} + 2j\,D_{vv} \\ D_{ww} & i\,D_{vw} + 2j\,D_{vv} & i\,D_{ww} + 2j\,D_{vw} \end{vmatrix}.$$

§. 3.

Erste typische Form von u.

Die typische Darstellung*) von u durch v, w, t geschieht durch Bildung der Determinante aus:

$$\begin{aligned} v_{11}\,u_{22} - 2\,v_{12}\,u_{12} + v_{22}\,u_{11} &= w \\ w_{11}\,u_{22} - 2w_{12}\,u_{12} + w_{22}\,u_{11} &= t \\ t_{11}\,u_{22} - 2\,t_{12}\,u_{12} + t_{22}\,u_{11} &= r \\ x_2^2\,u_{22} + 2x_1 x_2 u_{12} + x_1^2\,u_{11} &= u. \end{aligned}$$

*) Dieselbe findet sich in der citirten Abhandlung der Herren Clebsch und Gordan.

$$\begin{vmatrix} v_{11} & -v_{12} & v_{22} & w \\ w_{11} & -w_{12} & w_{22} & t \\ t_{11} & -t_{12} & t_{22} & r \\ x_2^2 & x_1x_2 & x_1^2 & u \end{vmatrix} = 0.$$

Durch Multiplication mit:

$$\begin{vmatrix} v_{22} & 2\,v_{12} & v_{11} & 0 \\ w_{22} & 2\,w_{12} & w_{11} & 0 \\ t_{22} & 2\,t_{12} & t_{11} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = -2R$$

erhalten wir daraus

$$\begin{vmatrix} D_{vv} & D_{vw} & D_{vt} & w \\ D_{wv} & D_{ww} & D_{wt} & t \\ D_{tv} & D_{tw} & D_{tt} & r \\ v & w & t & u \end{vmatrix} = 0 \tag{1}$$

Ueberzeugen wir uns noch, dass die Relation (4) §. 1.

$$rB_{tt} = vB_{vw} + w\,(B_{ww} - B_{tt})$$

jetzt die Form annimmt:

$$r = 2jv + iw, \tag{2}$$

so sehen wir, dass uR^2 sich als quadratische Form von v, w, t darstellt, deren Coefficienten ganze rationale Functionen der 5 einfachsten Invarianten sind. Die weitere Ausrechnung wäre von keinem Interesse.

Zwischen den neuen durch eine Substitution 2ter Ordnung eingeführten Variablen v, w, t muss noch eine Relation bestehen. Sie wird geliefert durch die Identität:

$$\begin{vmatrix} v_{11} & v_{12} & v_{22} & 0 \\ w_{11} & w_{12} & w_{22} & 0 \\ t_{11} & t_{12} & t_{22} & 0 \\ x_1^2 & -x_1x_2 & x_2^2 & 0 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} v_{22} & -2v_{12} & v_{11} & 0 \\ w_{22} & -2w_{12} & w_{11} & 0 \\ t_{22} & -2t_{12} & t_{11} & 0 \\ x_2^2 & 2x_1x_2 & x_1^2 & 0 \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} D_{vv} & D_{vw} & D_{vt} & v \\ D_{wv} & D_{ww} & D_{wt} & w \\ D_{tv} & D_{tw} & D_{tt} & t \\ v & w & t & 0 \end{vmatrix} = 0. \tag{3}$$

§. 4.

Zweite typische Form von u.

Um u durch die quadratischen Formen

$$\begin{aligned} v &= \alpha_x^2 \\ w &= a_x^2\,(a\beta)^2 \\ t &= b_x\gamma_x\,(\gamma b)\,(b\delta)^2 \end{aligned}$$

darzustellen, wollen wir den Weg der directen Elimination der x mittelst dieser Gleichungen gehen. Da die Determinante des Systems:

$$\begin{vmatrix} \alpha_1^2 & 2\alpha_1\alpha_2 & \alpha_2^2 \\ a_1^2 & 2a_1a_2 & a_2^2 \\ b_1\gamma_1 & b_1\gamma_2+b_2\gamma_1 & b_2\gamma_2 \end{vmatrix} (a\beta)^2\,(\gamma b)\,(b\delta)^2$$

$$= (a\beta)^2\,(\gamma b)\,(b\delta)^2\,(\alpha a)\,\{(a\gamma)\,(\alpha b) + (ab)\,(\alpha\gamma)\} = 2\,D_{ll}$$

ist, so ergiebt diese Elimination:

$$\begin{aligned} 4D_{ll}^2\,u = \big\{ & v\,\{(c\gamma)\,(ab) + (cb)\,(a\gamma)\}\,(c\alpha)\,(a\beta)^2\,(b\delta)^2\,(\gamma b) \\ (1)\qquad & + w\,\{(c\gamma)\,(b\alpha) + (cb)\,(\gamma\alpha)\}\,(b\delta)^2\,(c\alpha)\,(\gamma b) \\ & + 2l\,(c\alpha)\,(ca)\,(\alpha a)\,(a\beta)^2\big\}^2 \end{aligned}$$

$$= m_1v^2 + 2m_2vw + 2m_3vl + m_4w^2 + 2m_5wl + m_6l^2.$$

Es handelt sich jetzt nur noch darum, die 6 Invarianten m durch unsere 5 einfachsten auszudrücken. Wir finden:

$$m_1 = \{(ca)\,(\gamma b) + 2(cb)\,(a\gamma)\}\cdot\{(cd)\,(\varepsilon e) + 2(ee)\,(d\varepsilon)\}$$
$$.\,(ca)\,(cd)\,(a\beta)^2\,(b\delta)^2\,(b\gamma)\,(d\alpha)^2\,(e\eta)^2\,(e\varepsilon).$$

Das erste Glied in diesem Product ist:

$$(ca)^2\,(cd)^2\,(a\beta)^2\,(d\alpha)^2\,(b\delta)^2\,(b\gamma)^2\,(e\varepsilon)^2\,(e\eta)^2 = D_{tw}D_{vw}^2.$$

Die beiden folgenden Glieder sind gleich, vereinigen wir sie und zerlegen sie wieder folgendermassen:

$$-4(ca)(cd)(ce)(a\beta)^2(b\delta)(d\alpha)^2(e\eta)^2(e\varepsilon)(b\gamma)^2(d\varepsilon)\left\{\begin{matrix}(ca)\,(b\delta) = \\ (ba)\,(c\delta) + (cb)\,(a\delta)\end{matrix}\right\},$$

so hebt sich der zweite Term gegen das letzte Glied unseres Productes weg und es bleibt:

$$-2\,(cd)\,(ce)\,(ba)(a\beta)^2\,(c\delta)\,(d\alpha)^2(e\eta)^2(b\gamma)^2(e\varepsilon)\,(d\varepsilon)\left\{\begin{matrix}(ca)\,(b\delta) - (cb)(a\delta) \\ = (ba)\,(c\delta)\end{matrix}\right\}$$

$$= -\,(ce)\,(ba)^2\,(a\beta)^2\,(c\delta)^2\,(d\alpha)^2\,(e\eta)^2\,(b\gamma)^2\,(d\varepsilon)\left\{\begin{matrix}(cd)\,(e\varepsilon) - (ed)\,(c\varepsilon) \\ = (ce)\,(d\varepsilon)\end{matrix}\right\}$$

$$= -\,D_{ww}^2\,D_{vw}.$$

Daher ist

$$m_1 = D_{vw}\,\{D_{tw}\,D_{vw} - D_{ww}^2\}$$

$$m_2 = \{(c\gamma)\,(ab) + (cb)\,(a\gamma)\}\,(cd)\,(ca)\,(a\beta)^2\,(b\delta)^2\,(d\eta)^2\,(d\varepsilon)\,(b\gamma)\,(c\alpha)\,(\varepsilon\alpha)$$
$$= \tfrac{1}{2}\,\{2\,(c\gamma)\,(ab) + (\gamma b)\,(ac)\}\,(ca)\,(a\beta)^2\,(b\delta)^2\,(d\eta)^2\,(b\gamma)\,(cd)\,(\varepsilon\alpha)\cdot$$
$$\left\{\begin{matrix}(d\varepsilon)\,(c\alpha) - (d\alpha)\,(c\varepsilon) \\ = (dc)\,(\varepsilon\alpha)\end{matrix}\right\}.$$

Das erste dieser Glieder ist:

$$\tfrac{1}{2}(a\beta)^2(b\delta)^2(d\eta)^2(cd)^2(\varepsilon\alpha)^2(ba)(c\gamma)\left\{\begin{matrix}(b\gamma)(ca) - (a\gamma)(cb) \\ = (ba)\,(c\gamma)\end{matrix}\right\} = \tfrac{1}{2}\,D_{ww}^2\,D_{vv};$$

das zweite:

$$-\tfrac{1}{2}(cd)^2(ac)^2(\alpha\beta)^2(d\eta)^2(b\gamma)^2(b\delta)^2(\varepsilon\alpha)^2 = -\tfrac{1}{2} D_{tw} D_{ew} D_{ee},$$

und somit:

$$m_2 = \tfrac{1}{2} D_{ee}\left\{D_{tw} D_{ew} - D_{ww}^2\right\}.$$

Einfacher ergiebt sich:

$$m_3 = 2\left\{2(c\gamma)(ab) + (ca)(b\gamma)\right\}(ca)(\alpha\beta)^2(b\delta)^2(b\gamma)(c\alpha)(cd)(ad)(d\varepsilon)^2,$$

$$-2(ca)^2(\alpha\beta)^2(cd)(c\alpha)(d\alpha)(d\varepsilon)^2(b\delta)^2(b\gamma)^2 = -2 D_{tt} D_{ew},$$

$$2(c\gamma)(ab)(\alpha\beta)^2(b\delta)^2(c\alpha)(cd)(\alpha d)(d\varepsilon)^2\left\{\begin{matrix}(ca)(b\gamma) - (cb)(a\gamma)\\ = (ba)(c\gamma)\end{matrix}\right\} = 0,$$

wie die Vertauschung von c und d lehrt. Demnach ist

$$m_3 = -2 D_{tt} D_{ew} = -2 D_{ew} R$$

$$m_4 = \left\{(c\gamma)(b\alpha) + (cb)(\gamma\alpha)\right\}.\left\{(c\varepsilon)(a\beta) + (ca)(\varepsilon\beta)\right\}(b\delta)^2(b\gamma)(c\alpha)(a\eta)^2(a\varepsilon)(c\beta)$$

$$= \left\{(b\gamma)(c\alpha) + 2(cb)(\gamma\alpha)\right\}.\left\{(c\beta)(a\varepsilon) + 2(ca)(\varepsilon\beta)\right\}(b\delta)^2(b\gamma)(c\alpha)(a\eta)^2(a\varepsilon)(c\beta),$$

$$(b\delta)^2(b\gamma)^2(c\alpha)^2(c\beta)^2(a\varepsilon)^2(a\eta)^2 = D_{ew}^3,$$

$$-(ca)(\beta\varepsilon)(b\delta)^2(b\gamma)^2(c\alpha)^2(a\eta)^2\left\{\begin{matrix}(a\varepsilon)(c\beta) - (a\beta)(c\varepsilon)\\ = (\beta\varepsilon)(ca)\end{matrix}\right\} = -D_{ee} D_{ww} D_{ew},$$

$$(cb)(\gamma\alpha)(ca)(\varepsilon\beta)(b\delta)^2(a\eta)^2.\left\{\begin{matrix}(b\gamma)(c\alpha) - (b\alpha)(c\gamma)\\ = (bc)(\gamma\alpha)\end{matrix}\right\}.\left\{\begin{matrix}(a\varepsilon)(c\beta) - (a\beta)(c\varepsilon)\\ = (ac)(\varepsilon\beta)\end{matrix}\right\}$$

$$= D_{tw} D_{ee}^2,$$

$$m_4 = D_{ew}^3 - 2 D_{ee} D_{ww} D_{ew} + D_{tw} D_{ee}^2.$$

$$m_5 = 2\left\{(b\gamma)(c\alpha) + 2(cb)(\gamma\alpha)\right\}(b\delta)^2(b\gamma)(c\alpha)(c\varepsilon)(ca)(\varepsilon a)(\alpha\beta)^2.$$

Das erste Glied verschwindet, wie die Vertauschung von c und a lehrt.

$$2(cb)(b\delta)^2(c\varepsilon)(ca)(\varepsilon a)(\alpha\beta)^2(\gamma\alpha)\left\{\begin{matrix}(b\gamma)(c\alpha) - (b\alpha)(c\gamma)\\ = (\gamma\alpha)(bc)\end{matrix}\right\} = 2 D_{ee} D_{tt}.$$

$$m_5 = 2 D_{ee} D_{tt} = 2 D_{ee} R.$$

$$m_6 = 4(c\alpha)(ca)(\alpha\beta)^2(cb)(\gamma b)(b\delta)^2\left\{\begin{matrix}(\alpha a)(c\gamma)\\ = (ca)(\alpha\gamma) + (ac)(a\gamma)\end{matrix}\right\},$$

$$2(ca)^2(\alpha\beta)^2(b\delta)^2(cb)(\alpha\gamma)\left\{\begin{matrix}(c\alpha)(\gamma b) - (c\gamma)(\alpha b)\\ = (\gamma\alpha)(cb)\end{matrix}\right\} = -2 D_{tw} D_{ee},$$

$$2(c\alpha)^2(ca)(\alpha\beta)^2(b\gamma)(b\delta)^2\left\{\begin{matrix}(cb)(a\gamma) - (ab)(c\gamma)\\ = (ca)(b\gamma)\end{matrix}\right\} = 2 D_{ew} D_{ww},$$

$$m_6 = 2 D_{ww} D_{ew} - 2 D_{tw} D_{ee}.$$

Hiermit sind unter Benutzung des Früheren alle Coefficienten in der typischen Darstellung durch unsere 5 einfachsten Invarianten ausgedrückt, und wir haben nur noch die Relation zwischen den angewandten quadratischen Formen aufzustellen.

Setzen wir symbolisch $v = \alpha_x^2 = \beta_x^2$, $w = a_x^2 = b_x^2$, so ist $l = \alpha_x a_x (\alpha a)$, also:

$$l^2 = \alpha_x \beta_x a_x (\beta b) . \begin{Bmatrix} (\alpha a) b_x = \\ (b a) \alpha_x + (a b) \alpha_x \end{Bmatrix},$$

$$\tfrac{1}{2} \alpha_x^2 \beta_x (b a) . \begin{Bmatrix} a_x (\beta b) - b_x (\beta a) \\ = \beta_x (a b) \end{Bmatrix} = - \tfrac{1}{2} v^2 D_{ww},$$

$$\alpha_x a_x^2 (\beta b) . \begin{Bmatrix} (\alpha b) \beta_x = \\ \alpha_x (\beta b) + b_x (\alpha \beta) \end{Bmatrix} = vw\, D_{vw} - \tfrac{1}{2} w^2 D_{vv},$$

$$l^2 = - \tfrac{1}{2} v^2 D_{ww} + vw\, D_{vw} - \tfrac{1}{2} w^2 D_{vv}. \tag{2}$$

Es drückt sich somit l^2 typisch durch v und w aus.

§. 5.

Ausnahmefälle.

Verstehen wir unter x_1, x_2 die Abstände des durch diese Coordinaten bezeichneten Punktes von 2 festen Punkten der Geraden, auf der er liegt, so giebt $u = 0$ 4 Punkte derselben, $v = 0$ zwei. Was hat es für diese 6 Punkte für eine Bedeutung, wenn R verschwindet? Da diese Invariante die Determinante von v, w, t ist, so bilden dann die 6 Punktepaare $v = 0$, $w = 0$, $t = 0$ eine Involution.*) Derselben gehören in Folge von (2) §. 3. alle Punktepaare, welche die Covarianten erster Reihe liefern, an. Da die Functionaldeterminante zweier quadratischer binärer Formen x das zu den von diesen dargestellten Punktepaaren harmonische liefert, so geben die Covarianten zweiter Reihe

$$l = 0 \quad , \quad m = 0 \quad , \quad n = 0 \quad , \quad \ldots$$

alle dasselbe, nämlich die Doppelpunkte der Involution. So lange D_{ll} nicht verschwindet, lehrt die zweite typische Darstellung, dass für den Fall $R = 0$ u sich durch v und w ausdrücken lässt, denn l kommt dann nur im Quadrat in dieser Darstellung vor und kann daher mittelst (1) §. 4. entfernt werden. Führen wir nun die Punkte $l = 0$ als Grundpunkte ein, so kommen in v und w nur die Quadrate der Variablen vor und damit in u auch. Die 4 Punkte $u = 0$ gehören also ebenfalls unserm involutorischen System an. Umgekehrt verschwindet R, sobald $u = 0$ und $v = 0$ 3 Punktepaare einer Involution geben. Nach Einführung der Doppelpunkte als Grundpunkte kommen in u und v und damit auch in w und t nur die Quadrate der Variabeln vor; es ist also R die Determinante von v, w und t gleich Null.

Verschwindet ausser R auch noch D_{ll}, fallen also die Punkte $l = 0$ zusammen, so wird die ganze Hälfte der Involution, der die Punkte:

$$u = 0 \quad , \quad v = 0 \quad , \quad w = 0 \quad , \quad t = 0 \quad , \quad \ldots$$

*) Salmon: Lessons on higher Algebra. Sec. Ed. p. 160.

angehören, in den Doppelpunkt $l = 0$ hineinrücken, in welchem die Grundpunkte der Involution zusammenfallen, welche getrennt sind, so lange l nicht identisch verschwindet.

Es könnte fraglich erscheinen, ob die 4 Punkte $u = 0$ auch jetzt noch unserer Involution angehören, da keine der beiden typischen Darstellungen mehr möglich ist. Dass dies aber in der That der Fall ist, lehrt die canonische Darstellung unserer Formen, die aus der Einführung der Punkte $v = 0$ als Grundpunkte resultirt:

$$
\begin{aligned}
u &= a x_1^4 + 4 b x_1^3 x_2 + 6 c x_1^2 x_2^2 + 4 d x_1 x_2^3 + e x_2^4 \\
v &= x_1 x_2 \\
w &= -(b x_1^2 + 2 c x_1 x_2 + d x_2^2) \\
t &= (cb - ad) x_1^2 - 4 (bd - c^2) x_1 x_2 + (cd - be) x_2^2 \\
l &= b x_1^2 - d x_2^2.
\end{aligned}
$$

Denn soll l sich auf ein Quadrat reduciren und v, w, t einen Factor mit demselben gemein haben, ohne dass $l = 0$ ist, so muss u diesen Factor, wie man sieht, im Quadrat enthalten. Umgekehrt verschwindet auch D_u und R, wenn u einen Factor von v im Quadrat enthält.

Da die Covarianten der Reihe: $l, m, n \ldots$ sich im Fall $R = 0$ nur um constante Factoren unterscheiden, so ist dies nach (3) §. 2. auch mit den Unterdeterminanten von:

$$
2 R^2 = \begin{vmatrix} D_{vv} & D_{vw} & D_{vt} \\ D_{wv} & D_{ww} & D_{wt} \\ D_{tv} & D_{tw} & D_{tt} \end{vmatrix}
$$

der Fall. Diese verschwinden also in unserem Fall:

$$
D_{ll} = \tfrac{1}{2} B_{ll} = 0
$$

sämmtlich.

Wenn l, die Functionaldeterminante von v und w, verschwindet, so ist:

$$
w = \varepsilon v \quad , \quad t = \varepsilon^2 v \quad , \quad r = \varepsilon^3 v \quad , \quad \ldots
$$

Die Punktepaare $v = 0$, $w = 0$, $t = 0$, ... fallen also vollständig zusammen und zwar in den Doppelpunkten der Involution, der die 4 Punkte $u = 0$ angehören, da in unserer canonischen Form von u dann nur noch die Quadrate der Variabeln vorkommen.

Ist $w = 0$, so reducirt sich u in der canonischen Form auf die Biquadrate der Variabeln, d. h. die 4 Punkte $u = 0$ bilden ein cyclisch-projectivisches System mit den 2 Punkten $v = 0$; ihre Doppelverhältnisse in Bezug auf dieselben ändern sich bei cyclischer Vertauschung nicht. In beiden zuletzt behandelten Fällen ist offenbar auch die Umkehrung richtig.

Hiermit haben wir die wichtigsten Ausnahmefälle behandelt. Die Bedeutung, die das Verschwinden unserer übrigen Invarianten hat, liegt auf der Hand, und wenn eine der Formen $l, m, n, \ldots$ verschwindet, so ist dies auch mit l der Fall, ebenso wie w gleich Null wird, wenn eine Covariante erster Reihe verschwindet.

§. 6.

Das System $\varkappa u + \lambda \varDelta$.

Erinnern wir uns aus der Theorie der biquadratischen binären Formen, in welcher Beziehung das System von Formen $\varkappa u + \lambda \varDelta$, wenn $\varDelta$ die Hesse'sche Determinante von u ist, zu u steht, so liegt der Gedanke nahe, dass die Formen dieses Systems an den untersuchten Singularitäten von u Antheil haben. In der That werden wir uns davon überzeugen.

Wir haben:

$$\begin{aligned} u &= a_x^4 = b_x^4 = \cdots \\ \varDelta &= 6\,(u_{11}u_{22} - u_{12}^2) = 3\,a_x^2 b_x^2 (ab)^2 \\ v &= \alpha_x^2 \\ w &= a_x^2\,(a\alpha)^2 \\ t &= a_x^2\,(ba)^2\,(b\alpha^2)\,. \end{aligned}$$

Durch unsern so oft angewandten Process erhalten wir:

$$\begin{aligned} D_{v\varDelta} &= 3\,t - 2\,vi \\ D_{w\varDelta} &= iw + 6\,jv \\ \varDelta_{t\varDelta} &= it + 6\,jw \end{aligned}$$

Mit Hülfe dieser Relationen ergeben sich unsere Bildungen für $\varkappa u + \lambda \varDelta$ sofort. Wir wollen sie durch Striche unterscheiden von den entsprechenden für u.

$$\begin{aligned} v' &= v\,. \\ w' &= \varkappa w + \lambda\,(3\,t - 2\,vi) \\ t' &= \varkappa^2 t + 2\,\lambda\varkappa\,(iw + 6\,jv) + \lambda^2\,(4\,i^2 v + 18\,jw - 3\,it) \\ m' &= \varkappa^3 m + \varkappa^2\lambda\,(2\,ni - 12\,jl) - \varkappa\lambda^2\,(8\,i^2 l + 9\,im - 36\,jn) \\ &\quad + \lambda^3\,(-36\,ijl - 54\,jm + 6\,i^2 n) \\ n' &= \varkappa^2 n - 2\,\lambda\varkappa\,il - \lambda^2\,(18\,jl + 3\,in) \\ l' &= \varkappa l - 3\,\lambda\,n\,. \end{aligned}$$

Erinnern wir uns der Formeln (3) §. 2, so finden wir durch Combination etwa von v' und m':

$$R' = R\,\{\varkappa^3 - 9\,i\varkappa\lambda^2 - 54\,j\lambda^3\}\,.$$

Wenn R verschwindet, ist auch $R' = 0$; sämmtliche Systeme von 4 Punkten

$$\varkappa u + \lambda \varDelta = 0$$

gehören also unserer Involution

$$u = 0\quad,\quad v = 0\quad,\quad w = 0\quad,\quad t = 0\quad,\quad \ldots$$

ebenfalls an. Drei dieser Systeme, für die

$$\varphi = \varkappa^3 - 9\, i \varkappa \lambda^2 - 54\, j \lambda^3$$

verschwindet, gehören mit jedem Punktepaar $v = 0$ einer Involution an. Sie repräsentiren also je ein doppeltes Punktepaar.

Ist ausser $R = 0$ auch noch $D_{tt} = 0$, so verschwindet auch D'_{tt}, indem $l, m, n, \ldots$ sich, wie wir sahen, nur um constante Factoren von einander unterscheiden. Es rücken also auch von den 4 Punkten $\varkappa u + \lambda \Delta = 0$ je 2 in jenen Punkt $l = 0$ zusammen, in welchem die Doppelpunkte der Involution zusammenfallen.

Noch einen Schritt weiter werden wir $\varkappa u + \lambda \Delta$ mit u gehen sehen. Wenn nämlich

$$l = 0$$

und damit auch $m = 0$, $n = 0$, ... ist, so verschwindet auch l'. Es fallen also mit $v = 0$ auch $w' = 0$, $t' = 0$, ... zusammen und damit gehört nicht nur $u = 0$, sondern auch $\varkappa u + \lambda \Delta = 0$ der Involution an, deren Doppelpunkte $v = 0$ giebt.

Hiermit hört aber auch die Gemeinsamkeit der Eigenschaften von u und $\varkappa u + \lambda \Delta$ auf, denn, wenn auch noch w verschwindet und damit auch $t \ldots$, so ist nicht auch $w' = 0$, $t' = 0$, ..., sondern diese Formen unterscheiden sich von v nur um constante Factoren. Die Punkte $\varkappa u + \lambda \Delta = 0$ hören also nicht auf dem involutorischen System mit den Doppelpunkten $v = 0$ anzugehören, nur haben $u = 0$ und $\Delta = 0$ besondere Bedeutungen. Es giebt, wie wir wissen, $u = 0$ ein cyclisch-projectivisches System von 4 Punkten zu dem Punktepaar $v = 0$, während $\Delta = 0$, wie aus der Bildungsweise von Δ folgt, die Doppelpunkte der Involution repräsentirt.

Die von uns für u und v aufgestellten Invarianten können wir jetzt auch für $\varkappa u + \lambda \Delta$ und v sofort hinschreiben. Wir finden:

$$\begin{aligned}
D'_{vv} &= D_{vv} \\
D'_{vw} &= \varkappa D_{vw} + \lambda\,(3\, D_{ww} - 2\, i D_{vv}) = \psi \\
D'_{ww} &= \tfrac{1}{3}\,\{\varphi_1 \psi_2 - \varphi_2 \psi_1) + 2\, D_{vv}\, i'\} \\
D'_{wt} &= i' \psi + 2\, j' D_{vv} \\
D'_{tt} &= \tfrac{1}{3}\, i'\, \{(\varphi_1 \psi_2 - \varphi_2 \psi_1) + 2\, i' D_{vv}\} + 2\, j' \psi .
\end{aligned}$$

Und da nach der Theorie der biquadratischen Formen die Relationen bestehen:

$$\begin{aligned}
i' &= -\tfrac{1}{3}\,(\varphi_{11} \varphi_{22} - \varphi_{12}^2). \\
j' &= \tfrac{1}{9}\,(\varphi_1 i_2' - \varphi_2 i_1'),
\end{aligned}$$

so kommen in unsern Invarianten von $\varkappa u + \lambda \Delta$ $\varkappa$ und λ nur mittelst φ und ψ vor.

§. 7.

Anwendungen für ternäre Formen.

Die unsern binären Formen entsprechenden ternären geben 2 Curven, die eine vom vierten, die andere vom zweiten Grade:

$$U = (a_1 x_1 + a_2 x_2 + a_3 x_3)^4 = 0$$
$$V = (\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \alpha_3 x_3)^2 = 0\,.$$

Erweitern wir in unsern als symbolische Determinantenproducte dargestellten Invarianten die Determinanten durch die Liniencoordinaten, so erhalten wir zugeordnete Formen für die ternären. Wir gehen von der Curve 8. Classe aus, die wir durch Erweiterung von D_u erhalten:

$$D_u^{(8)} = \tfrac{1}{2}\left\{(\alpha\gamma u)\,(abu) + (abu)\,(\alpha\gamma u)\right\}\,(\alpha\beta u)^2\,(\gamma bu)\,(b\delta u)^2\,(\alpha au) = 0\,.$$

Jede Tangente derselben schneidet die beiden gegebenen Curven so, dass die 6 Schnittpunkte die Eigenschaft haben, welche das Verschwinden der Invariante D_u für sie geben würde. Eine solche Tangente schneidet V in 2 Punkten; bilden wir die zweite Polare derselben für U, d. h. die Polare eines der Punkte in Beziehung auf die Polare des andern für U. Die Schnittpunkte der Tangente mit diesem Kegelschnitt sind die Punkte $w = 0$ für das Punktesystem auf der Geraden. Die Tangenten unserer Curve $D_u^{(8)}$ gehen also durch einen Schnittpunkt dieser zugehörigen 2 Polaren mit V. Nun muss, wenn die Polare eines Punktes für eine Curve durch den Punkt gehen soll, derselbe auf der Curve liegen. Wenn daher die 2te Polare zweier Punkte durch einen derselben gehen soll, so muss auch die erste Polare eines der Punkte durch den andern gehen und umgekehrt. Betrachten wir also irgend einen Punkt von V und verbinden ihn mit den 6 Schnittpunkten seiner Polaren für U mit V, so sind diese 6 Geraden Tangenten von $D_u^{(8)}$. Nun gehen aber durch jeden Punkt 8 Tangenten an eine Curve 8ter Classe; es müssen also jedem Punkt von V noch andere Punkte von V derart zugeordnet sein, dass die Polaren derselben für U durch jenen hindurchgehen; die Geraden, die nach diesen Punkten gehen, geben die beiden fehlenden Tangenten. Rückt der betrachtete Punkt in einen Schnittpunkt von U und V, so fällt offenbar daselbst in der Tangente von V eine der 6 Tangenten mit einer der 2 Tangenten, die von da an D_u^8 sich legen lassen, zusammen, da die Polare eines jeden der beiden zusammenfallenden Schnittpunkte unserer Geraden mit V natürlich durch den andern geht. Es giebt also von einem dieser 8 Punkte aus ausserdem nur noch 6 Tangenten an D_u^8, nämlich die Tangente von U, die sich daselbst ziehen lässt, und die 5 Geraden, die nach den anderen Schnittpunkten des Kegelschnittes mit der Polaren gehen. Wir können also den Satz aussprechen: Wenn wir die Polare eines Punktes des Kegelschnittes V für die Curve U bilden und nach den 6 Schnittpunkten dieser Polaren mit V Gerade ziehen, so umhüllen dieselben eine Curve 8ter Classe $D_u^{(8)}$, welche V in den 8 Schnittpunkten mit U berührt und welche ausserdem von den Tangenten von U, die in diesen Schnittpunkten mit V sich ziehen lassen, berührt wird. — Die 8 Tangenten von V in den Schnittpunkten mit

U sind zugleich die gemeinsamen Tangenten der Curven 2ter und 4ter Classe

$$V^{(2)} = (\alpha\beta u)^2 = 0$$
$$D^{(4)}_{vw} = (a\alpha u)^2 (a\beta u)^2 = 0\,,$$

die sich durch Erweiterung von D_{vv}, D_{vw} ergeben. Man sieht hier wieder, dass $D^{(8)}_{u}$ und V in diesen 8 Schnittpunkten sich berühren, denn in Folge von

$$D_u = \tfrac{1}{2}(D_{vv} D_{ww} - D^2_{vw})$$

sind die 8 Tangenten die einzigen gemeinsamen von $D^{(8)}_{u}$ und V.

Die 8 Tangenten von U in den Schnittpunkten mit V berühren zugleich die Curve 9ter Classe:

$$R^{(9)} = (abu)^2 (\alpha\beta u)^2 (bcu)(b\alpha u)(c\alpha u)(c\delta u)^2 = 0\,.$$

Denn wir finden, dass R und D_u verschwinden, wenn in u ein Factor von v zweimal vorkommt. Der andere Fall, in welchem $D_u = 0$ und $R = 0$ noch zusammen bestehen können, ist der, dass die Covariante l verschwindet. Nun lassen sich von unsern 8 Punkten ausserdem jedesmal nur noch 7 Tangenten an die Curve 9ter Classe legen; denn wenn nicht die Doppelpunkte einer Involution zusammenfallen, so muss, wenn 2 Punkte zweier Paare zusammenrücken, dies auch mit den beiden entsprechenden der Fall sein. Von den Geraden, die durch einen Schnittpunkt von U und V gehen, berühren also ausser der daselbst an U gelegten Tangente nur die Verbindungslinien mit den 7 andern Schnittpunkten von U und V unsere Curve 9ter Classe $R^{(9)}$. Da demnach von diesen 8 Punkten immer nur 8 Tangenten an $R^{(9)}$ gehen, so muss $R^{(9)}$ entweder durch dieselben hindurchgehen, oder es müssen jene 8 Tangenten von U Doppeltangenten von $R^{(9)}$ sein. Sehen wir, wie viel Tangenten noch ausserdem $D^{(8)}_{u}$ und $R^{(9)}$ gemeinsam haben. Für das Punktsystem auf diesen Geraden muss l verschwinden; es müssen also die beiden Punkte $v = 0$ mit den Punkten $w = 0$ zusammenfallen. Die Gerade muss also V in 2 Punkten schneiden, deren zweite Polare in Beziehung auf U durch sie hindurchgeht. In diesem Falle muss aber die erste Polare eines jeden der Punkte durch den andern hindurchgehen, und zwar geht dann auch immer die zweite Polare der beiden Punkte durch beide hindurch, verschwindet also l, den Fall ausgenommen, dass beide Punkte $v = 0$ zusammenfallen, in welchem daraus nur folgen würde, dass ein Punkt w in diesen Doppelpunkt hineinrückt. Nennen wir die beiden Schnittpunkte der Geraden, die gemeinsame Tangente von $D^{(8)}_{u}$ und $R^{(9)}$ sein soll, mit dem Kegelschnitt V y und z, so muss zunächst bestehen:

$$V(y_1 y_2 y_3) = 0 \quad , \quad V(z_1 z_2 z_3) = 0\,;$$

und da die Polare eines jeden der beiden Punkte in Beziehung auf U durch den andern gehen muss, bestehen noch die Gleichungen:

$$y_1 \frac{\partial U}{\partial z_1} + y_2 \frac{\partial U}{\partial z_2} + y_3 \frac{\partial U}{\partial z_3} = 0\,,$$
$$z_1 \frac{\partial U}{\partial y_1} + z_2 \frac{\partial U}{\partial y_2} + z_3 \frac{\partial U}{\partial y_3} = 0\,.$$

Diese 4 Gleichungen für die 4 Verhältnisse der y und der z geben 64 Lösungen, von welchen aber die abzuzählen sind, für die y und z zusammenfallen. Die letzteren sind die 8 gemeinsamen Lösungen von

$$U(y_1\, y_2\, y_3) = 0\,,$$
$$V(y_1\, y_2\, y_3) = 0\,.$$

Es bleiben also 56 Lösungen, und eben so viel Gerade giebt es, für welche l und damit D_u und R verschwindet. Nun müssten $D_u^{(8)}$ und $R^{(9)}$ 72 gemeinsame Tangenten haben, es werden also die 8 Tangenten von U in den Schnittpunkten mit V Doppeltangenten sein und zwar von $R^{(9)}$, da wir früher gesehen haben, dass sie einfache Tangenten von $D_u^{(8)}$ sind und auch diese Curve nicht in jenen 8 Punkten berühren.

Noch eine Curve 6ter Classe können wir in Betracht ziehen:

$$D_{ww}^{(6)} = (a\,b\,u)^2\,(a\,\alpha\,u)^2\,(b\,\beta\,u)^2 = 0\,,$$

den geometrischen Ort aller Geraden, welche V in 2 Punkten schneiden, deren zweite Polaren in Beziehung auf U sie berühren. Die 24 gemeinsamen Tangenten von $D_{vw}^{(4)}$ und $D_{ww}^{(6)}$ sind die einzigen gemeinsamen Tangenten von $D_u^{(8)}$ und $D_{ww}^{(6)}$ in Folge von

$$D_u = \tfrac{1}{2}\,(D_{vv}\, D_{ww} - D_{vw}^2)\,.$$

Diese letzteren beiden Curven berühren sich also überall, wo sie sich treffen. Wir können auch sagen: Es giebt 24 Gerade, die den Kegelschnitt V so schneiden, dass die Polare des einen Punktes in Beziehung auf die Curve 4ter Ordnung U die Gerade in dem andern Schnittpunkte berührt, und diese Geraden sind die gemeinsamen Tangenten von $D_{ww}^{(6)}$ und $D_u^{(8)}$ in ihren 24 Berührungspunkten.

Ueber die Differentialgleichungen für Lichtschwingungen.

Von A. Brill in Giessen.

1.

Wenn ein elastisches Medium sich in einem solchen stationären Schwingungszustande befindet, dass von einem Erschütterungspunkte aus Wellen in geschlossenen Flächen von irgend welcher Form ununterbrochen ausgehen, so lassen sich die Componenten u, v, w des Schwingungsausschlags eines Punktes xyz für geradlinige Schwingungen darstellen durch Ausdrücke von der Form:

$$\Omega \, . \cos \frac{2\pi}{\tau} (\lambda - t)$$

oder (indem man der bequemeren Form wegen noch einen imaginären Theil hinzunimmt) durch:

$$\Omega \, . \, e^{\frac{2\pi i}{\tau}(\lambda - t)}, \tag{1}$$

wo λ eine reelle Function der Coordinaten bedeutet, welche für alle Punkte einer jener Flächen denselben Werth hat (λ also ein „Parameter" der Fläche ist), Ω eine reelle Function der Coordinaten, t die Zeit, τ eine Constante (die Schwingungsdauer) ist.

Mit solchen Schwingungen wollen wir uns in der Folge beschäftigen, unter der vereinfachenden Voraussetzung, dass die Componenten derselben längs des Radius vector vom Erschütterungspunkte Null sind, und unter der weiteren Voraussetzung, dass in jedem Punkte die Gleichung erfüllt ist:

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0 \, . \tag{2}$$

Die durch die genannten Eigenschaften definirten Schwingungen sollen kurzweg „Lichtschwingungen" genannt werden, weil jene Bedingungen erfahrungsgemäss bei der Ausbreitung der Wellen von geradlinig polarisirtem Lichte erfüllt werden. Die Flächen, in welchen die Ausbreitung der letztgenannten vor sich geht, hat für isotrope und krystallinische Medien Fresnel theoretisch und experimentell festgestellt. Wir wollen nun im Nachfolgenden Lösungen der Differentialgleichungen für die verschiedenen Medien unter der Annahme suchen, dass in der obigen Form, welche den Lösungen zukommen soll, λ eine beliebige Function des Parameters σ der, nach Fresnel, entsprechenden Wellenfläche ist. Bezeichnet man mit „Fortpflanzungsgeschwindigkeit" der Welle den Differentialquotienten des Parameters σ nach der Zeit, gebildet unter Voraussetzung einer constanten Phase, so hat man zufolge unserer Annahme für die Form derselben die Gleichung

$$\frac{2\pi i}{\tau}\left(\frac{d\lambda}{d\sigma}\cdot\frac{d\sigma}{dt}-1\right)=0\,. \tag{3}$$

Wir können demnach in anderer Form die Aufgabe, mit der wir uns beschäftigen wollen, dahin aussprechen: einen allgemeinen Ausdruck für die Fortpflanzungsgeschwindigkeit von Lichtschwingungen, welche sich in den dem Medium entsprechenden Wellenflächen ausbreiten, aus den Differentialgleichungen für dasselbe abzuleiten.

Im Folgenden wird nun gezeigt, dass jene Aufgabe für ein isotropes Medium sich zurückführen lässt auf die Integration einer Differentialgleichung zweiter Ordnung, für welche Euler das allgemeine Integral in Form einer Reihe aufgestellt hat. Dieses Integral, in Verbindung mit Lösungen einer partiellen Differentialgleichung zweiter Ordnung mit zwei Variabeln, von welcher die Schwingungsrichtung abhängt, erweist sich zugleich als Quelle für eine bemerkenswerthe Gattung von Lösungen der partiellen Differentialgleichung:

$$\frac{\partial^2\omega}{\partial t^2}=b^2\left(\frac{\partial^2\omega}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\omega}{\partial y^2}+\frac{\partial^2\omega}{\partial z^2}\right).$$

Für krystallinische Medien sind die von Lamé aufgestellten Differentialgleichungen zu Grunde gelegt. Die genannte Frage, für optisch einaxige Krystalle gestellt, lässt sich auf die für isotrope Medien zurückführen. Man erkennt dies auf besonders einfachem Wege, wenn man die allgemeinen Integrale der Differentialgleichungen für optisch einaxige Krystalle kennt, die wir deshalb zuvor aufgestellt haben. Für optisch zweiaxige Krystalle führen unsere Voraussetzungen auf zwei partikuläre Lösungen, zu welchen, wenn auch unter specielleren Annahmen, schon Lamé gelangt ist.

Hierbei ergiebt sich der Umstand, dass die Fortpflanzungsgeschwindigkeit für Kugelwellen in isotropen und für die ellipsoidischen Wellen in optisch einaxigen Medien eine sehr mannigfaltige sein kann, während für die Kugelwellen in optisch einaxigen und für die Wellen der Fresnel'schen Wellenfläche in optisch zweiaxigen Krystallen nur eine gleichförmige Geschwindigkeit möglich ist.

Bevor wir zur Behandlung der Differentialgleichungen für die einzelnen Medien übergehen, wollen wir aus der Einführung der beiden ersten der oben gemachten Annahmen einige Schlüsse ziehen, die in der Folge vielfache Anwendung finden werden.

2.

Zu Coordinaten wählen wir für die Folge die Parameter ϱ, ϱ_1, ϱ_2 dreier orthogonalen Flächensysteme, deren eines (ϱ) jedenfalls aus concentrischen Kugeln bestehe. Die beiden anderen sind dann entweder Kegel oder Ebenen. Man bemerkt, dass für ein Coordinatensystem der bezeichneten Art in dem Ausdruck für das Quadrat des Linienelements:

$$ds^2 = \frac{d\varrho^2}{h^2} + \frac{d\varrho_1^2}{h_1^2} + \frac{d\varrho_2^2}{h_2^2},$$

in welchem $\frac{d\varrho}{h}$, $\frac{d\varrho_1}{h_1}$, $\frac{d\varrho_2}{h_2}$ Seiten eines unendlich kleinen Parallelepipeds vorstellen, h immer gleich 1 sein muss, wenn $d\varrho$ den Zuwachs des Kugelradius bedeutet, sowie dass $\frac{1}{h_1}$, $\frac{1}{h_2}$ beide mit ϱ proportional sind. Der Quotient $\frac{h_2}{h_1}$ ist demnach von ϱ unabhängig und $\frac{1}{h_1 h_2}$ mit ϱ^2 proportional. — Ferner bezeichnen wir mit U die Componente des Schwingungsausschlags eines Punktes längs des Radius vector, mit V, W diejenigen längs der Linienelemente, welche die beiden anderen Flächen auf der Kugel in dem betreffenden Punkte markiren. Alsdann fasst man die erste unserer Annahmen in die Gleichung:

$$U = 0.$$

Ferner lautet die Bedingungsgleichung (2), in orthogonalen Coordinaten ausgedrückt*), da $U = 0$ ist:

$$(3^a)\qquad \frac{\partial}{\partial\varrho_1}\frac{V}{h h_2} + \frac{\partial}{\partial\varrho_2}\frac{W}{h h_1} = 0,$$

wo die h die schon oben angeführte Bedeutung haben. Die Annahme über die Form der Componenten ergiebt:

$$V = \Phi \, . \, e^{(\lambda - t)\frac{2i\pi}{\tau}} \quad ; \quad W = \Psi \, . \, e^{(\lambda - t)\frac{2i\pi}{\tau}},$$

wo Φ und Ψ reelle Functionen von ϱ, ϱ_1, ϱ_2 sind, welche sich durch Einsetzen von V und W in die obige Gleichung näher bestimmen. Man erhält nämlich hierbei einen reellen und einen imaginären Theil, von denen jeder für sich verschwinden muss, so dass:

$$\frac{\partial}{\partial\varrho_1}\frac{\Phi}{h h_2} + \frac{\partial}{\partial\varrho_2}\frac{\Psi}{h h_1} = 0,$$

$$\frac{\Phi}{h h_2} \cdot \frac{\partial\lambda}{\partial\varrho_1} + \frac{\Psi}{h h_1} \cdot \frac{\partial\lambda}{\partial\varrho_2} = 0.$$

Man erfüllt nun die erste dieser Bedingungen in ganz allgemeiner Weise, indem man setzt:

---

*) Die Transformation der in der Theorie der Elasticität gebräuchlichen Ausdrücke und Gleichungen in ein krummliniges orthogonales Coordinatensystem findet man in: Neumann, zur Theorie etc.; Crelle-Borchardt, Bd. 57; oder Lamé, coordinées curvilignes.

$$\frac{\Phi}{h h_2} = \frac{\partial F}{\partial \varrho_2} \quad ; \quad \frac{\Psi}{h h_1} = - \frac{\partial F}{\partial \varrho_1},$$

wo F eine reelle Function der Coordinaten ist. Die letztere ergiebt dann:

$$\frac{\partial F}{\partial \varrho_2} \cdot \frac{\partial \lambda}{\partial \varrho_1} - \frac{\partial F}{\partial \varrho_1} \cdot \frac{\partial \lambda}{\partial \varrho_2} = 0 .$$

Aus dieser Gleichung folgt entweder:

$$\frac{\partial \lambda}{\partial \varrho_1} = 0 \quad ; \quad \frac{\partial \lambda}{\partial \varrho_2} = 0 ;$$

also λ eine Function von ϱ allein; alsdann ist F völlig unbestimmt gelassen.

Oder man schliesst aus dem Verschwinden der Functional-Determinante auf eine Beziehung zwischen F und λ, unabhängig von ϱ_1 und ϱ_2, vermittelst deren man F durch λ und ϱ ausgedrückt sich vorstellen kann. Alsdann hat man:

$$\frac{\partial F}{\partial \varrho_1} = \frac{\partial F}{\partial \lambda} \cdot \frac{\partial \lambda}{\partial \varrho_1} \quad ; \quad \frac{\partial F}{\partial \varrho_2} = \frac{\partial F}{\partial \lambda} \cdot \frac{\partial \lambda}{\partial \varrho_2} ;$$

also

$$V : W = h_2 \cdot \frac{\partial \lambda}{\partial \varrho_2} : - h_1 \frac{\partial \lambda}{\partial \varrho_1} .$$

Nun ist aber andererseits:

$$d\lambda = d\varrho_1 \cdot \frac{\partial \lambda}{\partial \varrho_1} + d\varrho_2 \cdot \frac{\partial \lambda}{\partial \varrho_2} + d\varrho \cdot \frac{\partial \lambda}{\partial \varrho} .$$

Für die Elemente der Durchschnittscurve einer Wellenfläche mit dem Parameter λ mit der Kugel ϱ (für welche sowohl $d\lambda$ als $d\varrho$ Null ist) hat man demnach:

$$0 = d\varrho_1 \cdot \frac{\partial \lambda}{\partial \varrho_1} + d\varrho_2 \cdot \frac{\partial \lambda}{\partial \varrho_2}$$

oder

$$\frac{d\varrho_1}{h_1} : \frac{d\varrho_2}{h_2} = h_2 \cdot \frac{\partial \lambda}{\partial \varrho_2} : - h_1 \frac{\partial \lambda}{\partial \varrho_1} .$$

Durch Vergleichung folgt:

$$V : W = \frac{d\varrho_1}{h_1} : \frac{d\varrho_2}{h_2} .$$

Die Glieder des letzten Verhältnisses sind aber nichts Anderes, als die absoluten Längen der Projectionen eines Bogenelementes der Durchschnittscurve auf die beiden orthogonalen Curvenelemente, längs deren V und W gezählt sind. Man hat also für eine beliebig gestaltete Wellenfläche den Satz:

Die Lichtschwingungen finden statt längs der Elemente der Durchschnittscurven der Wellenfläche mit concentrischen Kugeln, und zwar stellen sich für irgend einen Punkt die Componenten längs der orthogonalen Curvenelemente, die sich in diesem Punkte schneiden, dar in der Form:

$$(4) \qquad U = 0 \ ; \ V = h_2 \cdot \frac{\partial F}{\partial \varrho_2} \cdot e^{(\lambda - t)\frac{2\pi i}{\tau}} \ ; \ W = - h_1 \cdot \frac{\partial F}{\partial \varrho_1} \cdot e^{\frac{2\pi i}{\tau}(\lambda - t)},$$

wo F eine Function von λ und ϱ allein ist für den Fall, dass λ noch ϱ_1 und ϱ_2 ausser ϱ enthält; im entgegengesetzten F eine beliebige Function von ϱ, ϱ_1, ϱ_2 sein kann.

Enthält λ ausser ϱ nur eine der Variabeln ϱ_1, ϱ_2, so enthält auch F blos noch diese eine, daher ist für diesen Fall ausser U auch noch entweder V oder W gleich Null.

3.

Isotrope Medien.

Die Differentialgleichungen für Lichtschwingungen in einem isotropen Medium haben in orthogonalen Coordinaten folgende Form (s. die vorige Note):

$$(5)\quad \begin{aligned}
\omega^2 \cdot \frac{1}{h_1 h_2} \cdot \frac{\partial^2 U}{\partial t^2} &= \frac{\partial}{\partial \varrho_1}\left[\frac{h_1 h}{h_2}\left(\frac{\partial}{\partial \varrho_1}\frac{U}{h} - \frac{\partial}{\partial \varrho}\frac{V}{h_1}\right)\right] \\
&\quad - \frac{\partial}{\partial \varrho_2}\left[\frac{h h_2}{h_1}\left(\frac{\partial}{\partial \varrho}\frac{W}{h_2} - \frac{\partial}{\partial \varrho_2}\frac{U}{h}\right)\right];\\
\omega^2 \cdot \frac{1}{h_2 h} \cdot \frac{\partial^2 V}{\partial t^2} &= \frac{\partial}{\partial \varrho_2}\left[\frac{h_2 h_1}{h}\left(\frac{\partial}{\partial \varrho_2}\frac{V}{h_1} - \frac{\partial}{\partial \varrho_1}\frac{W}{h_2}\right)\right] \\
&\quad - \frac{\partial}{\partial \varrho}\left[\frac{h_1 h}{h_2}\left(\frac{\partial}{\partial \varrho_1}\frac{U}{h} - \frac{\partial}{\partial \varrho}\frac{V}{h_1}\right)\right];\\
\omega^2 \cdot \frac{1}{h h_1} \cdot \frac{\partial^2 W}{\partial t^2} &= \frac{\partial}{\partial \varrho}\left[\frac{h h_2}{h_1}\left(\frac{\partial}{\partial \varrho}\frac{W}{h_2} - \frac{\partial}{\partial \varrho_2}\frac{U}{h}\right)\right] \\
&\quad - \frac{\partial}{\partial \varrho_1}\left[\frac{h_2 h_1}{h}\left(\frac{\partial}{\partial \varrho_2}\frac{V}{h_1} - \frac{\partial}{\partial \varrho_1}\frac{W}{h_2}\right)\right];
\end{aligned}$$

statt die unseren Voraussetzungen entsprechende Form der Lösungen, wie wir sie aus dem vorigen Abschnitte entnehmen können, hier sogleich einzuführen, wollen wir, um übersichtlicher verfahren zu können, die folgenden allgemeineren Lösungen der Gleichung (3^a) benutzen:

$$(6)\qquad U = 0\ ;\quad \frac{V}{h_2} = \frac{\partial G}{\partial \varrho_2}\ ;\quad \frac{W}{h_1} = -\frac{\partial G}{\partial \varrho_1},$$

wo G zunächst noch eine beliebige Function der Coordinaten und der Zeit sein soll. Alsdann ergiebt die erste der drei Gleichungen (5) die in (6) bereits verwendete Bedingung (3^a); die beiden letzten in Gemeinschaft ergeben:

$$(7)\quad \omega^2 \cdot \frac{\partial^2 G}{\partial t^2} = h_1 h_2\left[\frac{\partial}{\partial \varrho_1}\left(\frac{h_1}{h_2}\cdot\frac{\partial G}{\partial \varrho_1}\right) + \frac{\partial}{\partial \varrho_2}\left(\frac{h_2}{h_1}\cdot\frac{\partial G}{\partial \varrho_2}\right)\right] + \frac{\partial^2 G}{\partial \varrho^2},$$

wo eine willkürliche Function von ϱ und t, welche auf den Werth von G keinen Einfluss hat, additiv in G hereingezogen ist. Diese eine partielle Differentialgleichung umfasst alle diejenigen Lösungen der drei simultanen Differentialgleichungen für isotrope Medien (und, wie wir später sehen werden, auch für optisch einaxige Krystalle), welche sich unter der Voraussetzung bilden lassen, dass die Schwingungen transversal zum Radius vector vom Mittelpunkt des Kugelsystems und ohne kubische Dilatation stattfinden. — Führt man nun aber die im Vorigen aufgestellte speciellere Form der Lösungen (4) ein und setzt dabei, um noch der letzten Annahme zu genügen, λ als Function von ϱ allein voraus, indem bekanntlich die Form der Lichtwellen in einem isotropen Medium die von Kugeloberflächen ist, so ergiebt die Vergleichung der Werthe für $\frac{V}{h_2}$ und $-\frac{W}{h_1}$ in (4) und (6) sofort die Beziehung:

(8) $$G = F \cdot e^{(\lambda - t)\frac{2\pi i}{\tau}}.$$

Dieser Werth in die Differentialgleichung (7) für G eingesetzt, ergiebt einen reellen und einen imaginären Theil. Der letztere (durch das letzte Glied der rechten Seite allein gebildet) ergiebt:

$$2\frac{\partial F}{\partial \varrho} \cdot \frac{d\lambda}{d\varrho} + F \cdot \frac{d^2\lambda}{d\varrho^2} = 0$$

oder

$$2\frac{\partial}{\partial \varrho} \log F + \frac{d}{d\varrho} \log \frac{d\lambda}{d\varrho} = 0 .$$

Hieraus folgt durch Integration:

$$F^2 \cdot \frac{d\lambda}{d\varrho} = \Omega^2(\varrho_1, \varrho_2),$$

wo Ω^2 eine beliebige Function der eingeklammerten Grössen ist. Daher durch Eintragung des hieraus sich ergebenden Werthes von F in die Gleichung (8):

(9) $$G = \Omega(\varrho_1, \varrho_2) \cdot R \cdot e^{-\frac{2\pi i}{\tau} \cdot t},$$

wo

$$R = \frac{e^{\frac{2\pi i}{\tau} \cdot \lambda}}{\sqrt{\frac{d\lambda}{d\varrho}}},$$

also R eine Function von ϱ allein ist. Aus dieser Form für G folgt mit Rücksicht auf das über die h Gesagte, dass auch V und W in zwei Factoren zerfällt werden können, deren einer blos ϱ, deren anderer blos ϱ_1 und ϱ_2 enthält. Daher haben die Lichtschwingungen für entsprechende Punkte zweier concentrischen Kugeloberflächen um den Erschütterungspunkt das gleiche Amplitudenverhältniss, und zwar ist dasselbe gleich dem Produkt aus dem reciproken Verhältniss der Quadratwurzeln aus den Fortpflanzungsgeschwindigkeiten einer Kugelwelle, welche die eine und die andere Kugelfläche passirt, in das reciproke Verhältniss der Kugelradien. Indem wir statt auch noch den reellen Theil der Gleichung für F und λ herzustellen, zweckmässiger zu der Gleichung (7) für G zurückkehren, setzen wir den Werth (9) in dieselbe ein und erhalten:

$$-\frac{4\pi^2}{\tau^2}\cdot\omega^2\cdot\Omega\cdot R = R\cdot\delta^2\Omega + \Omega\cdot\frac{\partial^2 R}{\partial\varrho^2},$$

indem wir hier wie in der Folge mit $\delta^2\bar{\omega}$ die Operation bezeichnen:

$$(9^a)\qquad \delta^2\bar{\omega} = h_1 h_2\left[\frac{\partial}{\partial\varrho_2}\left(\frac{h_2}{h_1}\frac{\partial\bar{\omega}}{\partial\varrho_2}\right) + \frac{\partial}{\partial\varrho_1}\left(\frac{h_1}{h_2}\frac{\partial\bar{\omega}}{\partial\varrho_1}\right)\right].$$

Weil nun aber in einer Bestimmungsgleichung für R ϱ_1 und ϱ_2 nicht mehr vorkommen können, ebensowenig wie ϱ in einer solchen für Ω, so muss diese Gleichung in zwei zerfällbar sein, deren jede die verlangte Bedingung für Ω und R erfüllt. Dies geschieht nun, wie ersichtlich, in allgemeinster Weise, indem man setzt:

$$(10)\qquad \left\{\begin{array}{l} \varrho^2\cdot\delta^2\Omega + \beta\,\Omega = 0 \qquad \text{und} \\ \dfrac{d^2 R}{d\varrho^2} = R\left(T^2 + \dfrac{\beta}{\varrho^2}\right), \end{array}\right.$$

wo man

$$(10^a)\qquad T = \frac{2i\pi}{\tau}\cdot\omega$$

gesetzt hat, und β eine willkürliche Constante bedeutet.

Die Gleichungen (9) (10) sind eine nothwendige und hinreichende Folge der Annahme (8) und der Gleichung (7) für G und somit der in (1) gemachten Annahmen in ihrer Anwendung auf isotrope Medien. — Es handelt sich nun um die Aufstellung von Lösungen für die Gleichung, welcher Ω genügt, und um die Integration der Gleichung für R.

4.

Die Gleichung für Ω ist eine partielle Differentialgleichung zweiter Ordnung mit noch zwei willkürlich Veränderlichen. Eine Zerfällung derselben in zwei gewöhnliche Differentialgleichungen kann erst nach Einführung eines bestimmten Coordinatensystems auf der Kugel vorgenommen werden. Man hat nun vorzugsweise zwei solcher orthogonaler Systeme näher studirt, deren eines aus zwei Schaaren homofokaler Kugelellipsen, deren anderes aus zwei Schaaren von Kugelkreisen gebildet wird. Für das letztere, das gewöhnliche Polarcoordinatensystem, sei hier die Trennung und Integration der daraus entstehenden Differentialgleichungen zweiter Ordnung bis zu Ende durchgeführt.*)

*) Führt man die Trennung auch für das erstgenannte Coordinatensystem aus, so erhält man Gleichungen, die man auf die bemerkenswerthe Form bringen kann:

$$\frac{\partial^2\Omega}{\partial v_1^2} = k\,.\,\Omega\left[\frac{\sin^2 am\, v_1}{b^2} + \frac{\cos^2 am\, v_1}{a^2}\right];\quad \frac{\partial^2\Omega}{\partial v_2^2} = -k\,.\,\Omega\left[\frac{\sin^2 am\, v_2}{b^2} - \frac{\cos^2 am\, v_2}{c^2}\right],$$

wo zu dem Argument v_1 der Modul $\varkappa = \frac{c}{b}\frac{\sqrt{a^2-b^2}}{\sqrt{a^2-c^2}}$, zu v_2 der complementäre

Wir führen statt der Bezeichnungen ϱ, ϱ_1, ϱ_2 die üblichen ein: r, φ, ψ. Ferner bestehe für das Linienelement die Gleichung:

$$ds^2 = dr^2 + r^2\, d\varphi^2 + r^2 \cos^2\varphi\, d\psi^2, \tag{11}$$

dann hat die Gleichung für Ω die Form:

$$\frac{1}{\cos\varphi} \cdot \frac{\partial}{\partial\varphi}\left(\cos\varphi \cdot \frac{\partial\Omega}{\partial\varphi}\right) + \frac{1}{\cos^2\varphi} \cdot \frac{\partial^2\Omega}{\partial\psi^2} + \beta\Omega = 0\,.$$

Man spaltet diese Gleichung in die folgenden mit getrennten Veränderlichen:

$$\frac{\partial^2\Omega}{\partial\psi^2} + \alpha\,.\,\Omega = 0, \tag{12a}$$

$$\frac{1}{\cos\varphi} \cdot \frac{\partial}{\partial\varphi}\left(\cos\varphi \cdot \frac{\partial\Omega}{\partial\varphi}\right) = \frac{\alpha\Omega}{\cos^2\varphi} - \beta\Omega, \tag{12b}$$

wo α eine neue willkürliche Constante. Die erste dieser beiden Gleichungen liefert bekanntlich das Integral:

$$\Omega = \Phi_1 \cos(\psi\sqrt{\alpha}) + \Phi_2 \sin(\psi\sqrt{\alpha}),$$

wo die Φ noch zu bestimmende Functionen von φ sind. Für $\alpha = 0$ kommt:

$$\Omega = \Phi_3\psi + \Phi_4\,.$$

Die Summe beider Integrale:

$$\Omega = \Phi_1 \cos(\psi\sqrt{\alpha}) + \Phi_2 \sin(\psi\sqrt{\alpha}) + \Phi_3\psi + \Phi_4\,. \tag{13}$$

in (12^b) eingesetzt, genügt dieser Gleichung, wenn Φ_1 und Φ_2 einzeln genügen und Φ_3, Φ_4 für den Werth $\alpha = 0$ genügt.

Nun lässt sich aber mit Hilfe einer von Euler*) angegebenen Methode das allgemeine Integral der Gleichung (12^b) für die Function Φ in Form einer nach Potenzen von $\cos\varphi$ oder $\sin\varphi$ entwickelten Reihe aufstellen. Führt man nämlich als unabhängige Variabele in jener Gleichung ein:

$$x = \cos\varphi,$$

so kommt:

$$x^2(1-x^2)\frac{\partial^2\Phi}{\partial x^2} + x(1-2x^2)\frac{\partial\Phi}{\partial x} + \Phi(-\alpha + \beta x^2) = 0\,. \tag{14}$$

Nimmt man für Φ die Reihenentwicklung an:

$$v = x^\nu(A_0 + A_1x^2 + A_2x^4 + A_3x^6 + \cdots),$$

so sind die Constante ν und die A so zu bestimmen, dass der vorliegenden Differentialgleichung identisch genügt wird. Setzt man die obige Reihe ein und ordnet nach Potenzen von x, so müssen die Coefficienten dieser letzteren einzeln verschwinden. Man erhält so durch Betrachtung des Coefficienten von x^ν die Bedingung:

Modul $\varkappa'$ gehört. a, b, c sind Constante, die von dem Coordinatensystem abhängen, k eine willkürliche Constante.

*) Institutiones calc. int. II, p. 183 sqq.

$$\nu = \pm \sqrt{\alpha}\ .$$

Die höheren Potenzen ergeben Gleichungen, aus denen ein Coefficient (A_p) durch den vorhergehenden (A_{p-1}) ausgedrückt werden kann, und zwar findet man:

$$4p(p+\nu)\ .\ A_p = A_{p-1}\left[2(p-1)(2p+2\nu-1) + \nu^2 + \nu - \beta\right].$$

Weil nun das Verhältniss $A_p : A_{p-1}$ mit wachsendem p sich der 1 nähert, so convergirt die Reihe, so lange φ reell ist, indem $x = \cos\varphi$ alsdann unterhalb 1 bleibt. — Die beiden Werthe von ν geben zwei verschiedenen Integralen v und u Entstehung, jedes mit einer willkürlichen Constanten, deren Summe:

(14) $$\Phi = u + v$$

das vollständige Integral bildet. Nur für den Fall, dass $\sqrt{\alpha}$ eine ganze Zahl ist, lassen sich die Terme der einen Reihe nicht mehr bestimmen; aber man genügt alsdann allgemein durch den Werth:

(14ª) $$\Phi = u + v\ .\ \log kx\ ,$$

wo k eine willkürliche Constante, v eine Reihe der oben beschriebenen Art, u eine ähnliche mit ν weiteren Gliedern vor A_0 mit negativen geraden Exponenten ist. Man überzeugt sich leicht hiervon durch Einsetzen. Hiernach erhält man für $\alpha = 0$ das Integral:

(14ᵇ) $$\Phi = (A + B\log x)\,(A_0 + A_1 x^2 + A_2 x^4 + A_3 x^6 + \cdots)\ ,$$

wo die A sich aus der oben angegebenen Formel bestimmen.

Wenn von den Coefficienten A in der angegebenen Reihe v einmal einer Null wird, so werden alle folgenden Null und man erhält ein Integral in geschlossener Form. Die Bedingung dafür, dass der p.Coefficient verschwindet, ist aber einfach dadurch erfüllt, dass in der Gleichung zwischen A_p und A_{p-1} die eckige Klammer verschwindet. — Die Einführung von $y = \sin\varphi$ als unabhängige Variable in die Gleichung für Φ würde ebenfalls und zwar auf andere Integrale in geschlossener Form führen. Doch mag es genügen, dies erwähnt zu haben.

Die Differentialgleichung, von der R abhängt:

$$\frac{d^2R}{d\varrho^2} = R\left(T^2 + \frac{\beta}{\varrho^2}\right),$$

lässt sich nach der soeben angewandten Methode gleichfalls integriren.*) In der That, man setze für R die Reihe ein:

$$v = \varrho^{\mu}(A_0 + A_1\varrho^2 + A_2\varrho^4 + \cdots)\ ,$$

*) Neuerdings hat man die Riccati'sche Differentialgleichung 2ter Ordnung, auf welche sich die obige zurückführen lässt, mittelst Bessel'scher Functionen integrirt (Lommel, Bessel'sche Functionen).

so bestimmt sich, wie früher μ aus der Gleichung, die dem Coefficienten von ϱ^{μ} entstammt:

$$\mu^2 - \mu - \beta = 0 .$$

Ferner ergiebt die Methode der unbestimmten Coefficienten:

$$p\,(2p + 2\mu - 1)\,A_p = -\frac{T}{2} \cdot A_{p-1} ;$$

daher nach Einsetzung:

$$v = A \cdot \varrho^{\mu}\left[1 + \frac{T^2\varrho^2}{2} \cdot \frac{1}{2\mu+1} + \frac{T^4\varrho^4}{2\,.\,4} \cdot \frac{1}{2\mu+1\,.\,2\mu+3} + \right.$$
$$\left. + \frac{T^6\varrho^6}{2\,.\,4\,.\,6} \cdot \frac{1}{2\mu+1\,.\,2\mu+2\,.\,2\mu+3} + \cdots\right].$$

Diese Reihe convergirt für jeden endlichen Werth von ϱ. A ist eine willkürliche Constante. Die Gleichung für μ ist quadratisch und giebt somit zweien Integralen u und v Entstehung, deren Summe:

$$R = u + v$$

das allgemeine Integral darstellt, so lange nicht:

$$\beta = -\tfrac{1}{4} + q^2 ,$$

wo q eine ganze Zahl. In diesem Falle genügt man allgemein durch den Werth:

$$R = u + v \,.\, \log k\varrho , \tag{15a}$$

wo k eine willkürliche Constante, v die obige Reihe für den einen Werth von μ ist, u eine ähnliche mit noch q Gliedern vor A_0, die aus negativen geraden Potenzen gebildet sind. Setzt man nun je nach dem Werth von β für R den Werth (15) oder (15ª) in die Gleichung (9) für G ein, verfährt ebenso mit dem Ausdruck für Ω (13), nachdem man darin Φ_1 und Φ_2 aus (14) oder (14ª) (je nach dem Werthe von α), sowie Φ_3 und Φ_4 aus (14ᵇ) eingetragen, so hat man hierdurch eine solche Lösung G der Gleichung (7), welche, unter den vorgeschriebenen Bedingungen, zugleich in Rücksicht auf R die allgemeinste ist.

Aus diesem Grunde lässt sich aber auch das allgemeine Gesetz für die Fortpflanzungsgeschwindigkeit unter den gegebenen Bedingungen in eine Formel zusammenfassen. Es folgt nämlich aus (9):

$$R = \frac{e^{\frac{2\pi i}{\tau}\lambda}}{\sqrt{\frac{d\lambda}{d\varrho}}} ,$$

durch Integration und nachmalige Differentiation:

$$\frac{d\lambda}{d\varrho} = -\frac{1}{\frac{4i\pi}{\tau} \cdot R^2 \cdot \int \frac{d\varrho}{R^2}} ,$$

das Integral mit beliebiger unterer Grenze genommen. **Daher hat man für die Fortpflanzungsgeschwindigkeit den Ausdruck:**

$$(16) \qquad \frac{d\varrho}{dt} = -\frac{4i\pi}{\tau} \cdot R^2 \cdot \int \frac{d\varrho}{R^2},$$

welcher nach Einsetzung von R aus (15), (15ª) ausführbar wird.

Die Reihe v für R bricht zwar niemals ab, doch lässt sich für manche Werthe von β v auf die Entwicklung von bekannten Functionen zurückführen. So hat man für $\beta = 2$ ($\mu = +2$ oder $\mu = -1$) durch Zusammenziehen der beiden Entwicklungen das Integral:

$$(17) \quad R = A\left(\frac{1}{\varrho T} - 1\right)e^{T\varrho} + B\left(\frac{1}{\varrho T} + 1\right)e^{-T\varrho}, \quad \text{wo } T = \frac{2i\pi}{\tau}.$$

Man findet alsdann für die Fortpflanzungsgeschwindigkeit:

$$1 - \frac{1}{T^2\varrho^2}.$$

Für diesen Fall ($\beta = 2$) mögen beispielsweise noch zwei Lösungen vollständig hingeschrieben werden. Man stelle G auf und findet alsdann aus (6) und (11):

$$V = \frac{1}{r\cos\varphi} \cdot \frac{\partial G}{\partial \varphi} \quad ; \quad W = -\frac{1}{r} \cdot \frac{\partial G}{\partial \psi};$$

also für $\alpha = 1$:

$$V = (-A\sin\psi + B\cos\psi) \cdot \frac{R}{\varrho} \; ; \; W = (A\cos\psi + B\sin\psi) \cdot \sin\varphi \cdot \frac{R}{\varrho};$$

für $\alpha = 4$:

$$V = (-A\sin 2\psi + B\cos 2\psi) \cdot \frac{1}{\cos^3\varphi} \cdot \frac{R}{\varrho} \; ; \; W = -(A\cos 2\psi + B\sin 2\psi)\frac{\sin\varphi}{\cos^3\varphi} \cdot \frac{R}{\varrho};$$

wo R in beiden Fällen den Werth (17) hat.

Wir wollen diese Beispiele von Lösungen der gegebenen Differentialgleichungen in geschlossener Form hier nicht vermehren, sondern nur gelegentlich der beiden angeschriebenen auf ein wesentliches Unterscheidungsmerkmal derselben, sowie überhaupt aller Lösungen, die sich bei Einführung von Polarcoordinaten ergeben, aufmerksam machen. Die letztere der beiden Lösungen wird unstetig für $\varphi = 0$, also längs der ganzen Axe der Kegel φ; die erstere nur für den einen Punkt $\varrho = 0$. Soll nun die Unstetigkeit längs einer geraden Linie vermieden werden, so darf die Reihenentwicklung v für Φ nur Potenzen von x enthalten, deren Exponenten ≥ 1 sind. Man erreicht dies dadurch, dass man $\alpha \geq 1$ annimmt, und für Φ diejenige Reihenentwicklung als partikuläres Integral annimmt, welche dem positiven Werthe von ν entspricht. Soll endlich die Lösung V, W auch nicht für den Punkt $\varrho = 0$ unstetig werden, also für jeden im Endlichen liegenden Punkt endlich bleiben, so ist ausserdem für R diejenige Reihenentwicklung als partikuläres Integral anzusetzen, welche, nachdem β jedenfalls positiv angenommen, dem positiven Werthe von μ entspricht (in der Lösung (17) z. B. für $B = -A$). Diese Bedingungen sind gleichzeitig erfüllbar.

Die in diesem Abschnitte aufgestellten Lösungen der Differentialgleichungen (5) liefern aber zugleich eine Quelle von Lösungen der auch in anderen Gebieten der Physik vielfach auftretenden Differentialgleichung:

$$\frac{\partial^2 \tilde{\omega}}{\partial t^2} = b^2 \left(\frac{\partial^2 \tilde{\omega}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \tilde{\omega}}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \tilde{\omega}}{\partial z^2} \right).$$

Denn dieser Gleichung genügen bekanntlich die Componenten:

$$(19) \quad \begin{aligned} u &= U \sin\varphi && + V \cos\varphi \\ v &= U \cos\varphi \sin\psi && - V \sin\varphi \sin\psi + V \cos\psi \\ w &= U \cos\varphi \cos\psi && - V \sin\varphi \cos\psi - W \sin\psi, \end{aligned}$$

für rechtwinklige Coordinaten:

$$(19^a) \quad x = r \sin\varphi \quad ; \quad y = r \cos\varphi \sin\psi \quad ; \quad z = r \cos\varphi \cos\psi,$$

wenn die U, V, W den Differentialgleichungen (5), für Polarcoordinaten specialisirt, genügen. Man hat $b^2 = \frac{1}{\omega^2}$ zu setzen und irgend eine der für U, V, W gefundenen Lösungen in den Gleichungen (19) für die u, v, w anzunehmen. So genügt beispielsweise (T aus 10^a):

$$\tilde{\omega} = \frac{x}{r^2} \left[\frac{1}{rT} - 1 \right] e^{\left(r - \frac{t}{\omega}\right) T} \quad ; \quad \tilde{\omega} = \frac{z}{z^2 + y^2}\, e^{\left(r - \frac{t}{\omega}\right) T};$$

$$\tilde{\omega} = \sqrt{\frac{x^2}{\sqrt{z^2 + y^2}^3} - \frac{z x^2}{(z^2 + y^2)^2}}\, (A + B \log kr) \left[1 + \left(\frac{Tr}{2} \right)^2 + \left(\frac{T^2 r^2}{2 \cdot 4} \right)^2 + \right.$$
$$\left. + \left(\frac{T^3 r^3}{2 \cdot 4 \cdot 6} \right)^2 + \cdots \right] e^{-\frac{tT}{\omega}};$$

nebst den Differentialquotienten nach x, y, z, $z + iy$, $z - iy$, u. s. w. Lösungen, die wir hierher gesetzt haben, um daran auf die der Trennung der Variabeln in der Gleichung für Ω entstammende Einseitigkeit aufmerksam zu machen.

5.

Optisch einaxige Krystalle.

Für die Fortpflanzung des Lichts in Krystallen hat Lamé, indem er die von Green aufgestellte Behandlungsweise adoptirte, homogene Differentialgleichungen 2ter Ordnung angegeben, welche sich durch ihre Einfachheit empfehlen und, ohne weitere Annahmen nöthig zu machen, einen raschen Uebergang zu der Gleichung der Fresnel'schen Wellenfläche ermöglichen. Wir werden uns bei der Betrachtung von krystallinischen Medien dieser Gleichungen bedienen. Dieselben enthalten drei Constante und sind unter der Voraussetzung gebildet, dass die kubische Dilatation Null sei*). Der Uebergang von optisch

*) Lamé, Elastic. S. 297.

zweiaxigen auf optisch einaxige Medien wird dadurch bewirkt, dass man zwei jener Constanten einander gleich setzt. Demnach kann man die hieraus oder aus den (weiter unten (38ᵃ) angeführten) Laméschen Differentialgleichungen für $b = c$ sich ergebenden Differentialgleichungen auf die Form bringen:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} &= b^2 \cdot \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}\right) \\ \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} &= b^2 \cdot \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + a^2 \left(\frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial z^2}\right) - (b^2 - a^2) \frac{\partial^2 u}{\partial x \, \partial y} \\ \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} &= b^2 \cdot \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + a^2 \left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial z^2}\right) - (b^2 - a^2) \frac{\partial^2 u}{\partial x \, \partial z} \, . \end{aligned} \tag{21}$$

Diese Gleichungen schliessen, wie leicht ersichtlich, die Bedingung ein:

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0.$$

Die Lösungen u, v, w eines Systems von Differentialgleichungen der obigen Art enthalten nun im Allgemeinen je zwei willkürliche Functionen. Doch bestehe in unserem Falle die obige Gleichung für zweimal drei derselben, so dass die Anzahl der in die vollständigen Integrale eingehenden willkürlichen Functionen nur noch 4 beträgt.

Die Form (21) der Gleichungen für optisch einaxige Medien ist nun aber eine so einfache, dass man die allgemeinsten Integrale derselben noch in übersichtlicher Gestalt aufstellen kann. Wir wollen dieselben hier geben, um so mehr, als sich aus ihnen mit grosser Leichtigkeit die Lösung der im ersten Abschnitt gestellten Frage ableiten lässt. Man wird sehen, dass die Integrale von den Lösungen zweier partieller Differentialgleichungen zweiter Ordnung von bekannter Form abhängen, deren jede zwei willkürliche Functionen mit sich führt, so dass die Gesammtzahl der erforderlichen willkürlichen Functionen erfüllt wird. Die Integrale lassen sich in eine solche Form bringen, welche der von Herrn Clebsch für isotrope Medien gebildeten ähnlich ist.

Setzt man:

$$-\frac{\partial u}{\partial x} = U', \text{ also } U' = \frac{\partial v}{\partial y} - \frac{\partial w}{\partial z}\,,$$

so besteht für U' dieselbe Differentialgleichung, wie für u, für welche wir den Weg zu partikulären Integralen schon oben gezeigt haben. Differentiirt man ferner die zweite der vorliegenden Gleichungen nach z, die dritte nach y, und zieht die letztere ab, so kommt eine Differentialgleichung für

$$\frac{\partial v}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial y} = U;$$

man hat nämlich alsdann:

$$\frac{\partial^2 U}{\partial t^2} = b^2 \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + a^2 \left(\frac{\partial^2 U}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial z^2}\right).$$

Diese Differentialgleichung geht in die für u über, wenn man darin statt y, z resp. $\frac{a}{b} \cdot y$, $\frac{a}{b} \cdot z$ setzt. Daher liefert jede Lösung der einen Gleichung eine solche für die andere.

Es bleibt also nur noch die Berechnung von u, v, w aus den Gleichungen übrig:

$$(22) \qquad \begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial x} &= -U' \\ \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} &= U' \\ \frac{\partial v}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial y} &= U, \end{aligned}$$

wo U und U' Integrale der Gleichungen sind:

$$(22^a) \qquad \begin{aligned} \frac{\partial^2 U'}{\partial t^2} &= b^2 \left(\frac{\partial^2 U'}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U'}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 U'}{\partial z^2}\right) \\ \frac{\partial^2 U}{\partial t^2} &= b^2 \cdot \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + a^2 \left(\frac{\partial^2 U}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial z^2}\right). \end{aligned}$$

u zunächst ergiebt sich durch Quadratur.

Um v und w zu erhalten, setze man:

$$(23) \qquad \begin{aligned} z + iy &= \lambda \\ z - iy &= \mu \end{aligned} \qquad \text{also} \qquad \begin{aligned} z &= \frac{\mu + \lambda}{2} \\ y &= i\,\frac{\mu - \lambda}{2}. \end{aligned}$$

Alsdann hat man noch:

$$(23^a) \quad \frac{\partial}{\partial z} = \frac{\partial}{\partial \lambda} + \frac{\partial}{\partial \mu}\,;\ \frac{\partial}{\partial y} = -i\,\frac{\partial}{\partial \lambda} + i\,\frac{\partial}{\partial \mu}\ ;\ \frac{\partial^2}{\partial z^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} = 4\,\frac{\partial^2}{\partial \lambda\,\partial \mu}\,;$$

die letzten beiden der obigen Geichungen gehen alsdann über in:

$$2.\frac{\partial (v + iw)}{\partial \mu} = U + iU'\ ;\ 2.\frac{\partial (v - iw)}{\partial \lambda} = U - iU';$$

daher folgt:

$$\begin{aligned} 4\,v &= \int (U + iU')\,d\mu + \int (U - iU')\,d\lambda \\ 4\,w &= \int (U + iU')\,d\mu - \int (U - iU')\,d\lambda, \end{aligned}$$

wo die dabei auftretenden willkürlichen Functionen von μ und λ in die Integralzeichen herein gezogen sind.

Setzt man, um die Bezeichnung mittelst Integralzeichen zu vermeiden:

$$U = 4 \cdot \frac{\partial^2 S}{\partial \lambda\,\partial \mu} \quad ; \quad U' = 4 \cdot \frac{\partial^3 T}{\partial \lambda\,\partial \mu\,\partial x},$$

so lassen sich in dem Ausdrucke für v und w die Differentialquotienten nach λ und μ wieder zusammenfassen und man hat (23^a):

$$
(24) \qquad
\begin{aligned}
u &= -\frac{\partial^2 T}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 T}{\partial z^2};\\
v &= \frac{\partial S}{\partial z} + \frac{\partial^2 T}{\partial y\,\partial x};\\
w &= -\frac{\partial S}{\partial y} + \frac{\partial^2 T}{\partial z\,\partial x};
\end{aligned}
$$

Diese Form für die u, v, w umfasst jedenfalls die allgemeinen Integrale. Ob dieselbe nicht noch zu specialisiren ist, damit sie wirklich Integrale der gegebenen Gleichungen sind, muss man durch Einsetzen entscheiden. Diese Operation liefert die Differentialgleichungen, denen alsdann S und T zu genügen haben, und zwar findet man, dass die nothwendige und hinreichende Form der Integrale der gegebenen Differentialgleichungen die oben aufgestellte (24) ist, wenn S und T aus den Gleichungen bestimmt werden:

$$
(24^a) \qquad
\begin{aligned}
\frac{\partial^2 T}{\partial t^2} &= b^2 \left(\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2}\right)\\
\frac{\partial^2 S}{\partial t^2} &= b^2 \frac{\partial^2 S}{\partial x^2} + a^2 \left(\frac{\partial^2 S}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 S}{\partial z^2}\right)
\end{aligned}
$$

Es sei uns erlaubt, einige für isotrope Medien bekannte Lösungen für optisch einaxige zu erweitern.

Auf Lösungen von der Form:

$$
(25) \qquad
\begin{aligned}
u &= \frac{\partial W}{\partial y} - \frac{\partial V}{\partial z}\\
v &= \frac{\partial U}{\partial z} - \frac{\partial W}{\partial x}\\
w &= \frac{\partial V}{\partial x} - \frac{\partial U}{\partial y}
\end{aligned}
$$

kommt man, wenn man setzt (λ und μ in der obigen Bedeutung):

$$
(26) \quad T = -\tfrac{1}{4}\int\left(\frac{\partial W}{\partial y} - \frac{\partial V}{\partial z}\right) d\lambda\, d\mu\,; \quad S = U - \tfrac{1}{4}\int \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial V}{\partial y} + \frac{\partial W}{\partial z}\right) d\lambda\, d\mu,
$$

wo
$$
\frac{\partial W}{\partial y} - \frac{\partial V}{\partial z} = M \text{ und } \frac{\partial V}{\partial y} + \frac{\partial W}{\partial z} = N
$$

bezüglich den Gleichungen für T und S Genüge leisten. Auch U muss der letzteren genügen.

Setzt man z. B.

$$
\begin{aligned}
U &= A \,.\, e^{p-mt}\\
V &= B \,.\, e^{p-mt}\\
W &= C \,.\, e^{p-mt},
\end{aligned}
$$

wo $p = \alpha x + \beta y + \gamma z$ α, β, γ die Cosinus der Neigungswinkel irgend einer Richtung gegen die Axen sind, m eine Constante, so kommt:

$$
M = (B\gamma - C\beta)\, e^{p-mt};\; N = (B\beta + C\gamma)\, e^{p-mt}.
$$

Daher hat man: $(B\gamma - C\beta)\,(m^2 - b^2) = 0$

$$(B\beta' + C\gamma'\,(m^2 - a^2\alpha^2 - b^2\,[\gamma^2 + \beta^2]) = 0,$$

dies giebt zwei Lösungen:

$$1)\ B\gamma - C\beta = 0 \text{ und } m^2 = a^2\alpha^2 + b^2\,(\beta^2 + \gamma^2);$$

$$2)\ B\beta + C\gamma = 0 \text{ und } m^2 = b^2 \text{ u. s. w.}$$

Für isotrope Medien folgt aus den Bedingungsgleichungen für S und T, dass U, V, W, wenn $a = b$, alle dieselben Gleichungen, welchen T für optisch einaxige genügt, befriedigen müssen. Diese Form ist dann die allgemeinste für Lösungen der Differentialgleichungen für isotrope Medien*).

Man genügt den Bedingungsgleichungen für M, N und U auch, indem man setzt

$$V = 0; \quad W = 0; \quad U = \frac{e^{(q-t)\frac{2\pi i}{\tau}}}{q},$$

$$\text{wo } q = \sqrt{\frac{x^2}{b^2} + \frac{y^2 + z^2}{a^2}}$$

oder für U irgend ein anderes Integral der Gleichung für S. Auf die von Lamé**) für optisch zweiaxige Krystalle angegebenen Lösungen, specialisirt für den Fall optisch einaxiger, kommt man, indem man setzt:

$$(27)\ T = -\tfrac{1}{2}\int e^{\left(\frac{r}{b} - t\right)\frac{2\pi i}{\tau}} \left(\frac{d\lambda}{\lambda} + \frac{d\mu}{\mu}\right); \ S = -\tfrac{1}{2}\int e^{(q-t)\frac{2\pi i}{\tau}} \left(\frac{d\lambda}{\lambda} + \frac{d\mu}{\mu}\right),$$

wo q in der eben erwähnten Bedeutung genommen ist, λ und μ in der früher angewandten.

6.

Die Lösungen, die wir oben gefunden, setzen sich additiv je aus zwei wesentlich verschiedenen Theilen zusammen, deren einer, von S herrührend, den in optisch einaxigen Medien auftretenden ellipsoidischen Wellen entspricht, während der andere, T entstammend, den Kugelwellen Entstehung giebt. Der letztere Theil genügt der Gleichung:

$$(28) \qquad \frac{\partial w}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial z} = 0,$$

welche Gleichung aber auch zugleich den erstern Theil der Lösungen ausschliesst, indem sich daraus sofort ergiebt:

$$S = 0.$$

---

*) Für isotrope Medien wurde diese Form schon von Herrn Clebsch angegeben. Crelle-Borchardt, Bd. 61.

**) Elasticité, p. 319, 23. leç.

Umgekehrt ist die Gleichung:

$$(29) \qquad u = 0$$

der Repräsentant für den ersteren Theil der Lösungen allein und umfasst dieselben vollständig.

Diese Bemerkungen genügen, um die Ableitung und Behandlung der aus Einführung der Form der Lösungen, die im 1. und 2. Abschnitt aufgestellt worden, sich ergebenden Differentialgleichungen zurückzuführen auf die nämliche Aufgabe für isotrope Medien, eine Aufgabe, die wir bereits gelöst. In der That, betrachten wir blos diejenigen Schwingungen, welche durch die Gleichungen definirt sind:

$$(30) \qquad u_1 = -\frac{\partial^2 T}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 T}{\partial z^2}\,;\; v_1 = \frac{\partial^2 T}{\partial y\,\partial x}\,;\; w_1 = \frac{\partial^2 T}{\partial z\,\partial x}\,,$$

wo T der Gleichung zu genügen hat:

$$(30^a) \qquad \frac{\partial^2 T}{\partial t^2} = b^2\left(\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2}\right),$$

so bemerkt man, dass der Buchstabe a, das Unterscheidungszeichen der optisch einaxigen von isotropen Medien, daraus verschwunden ist. — Andererseits haben wir im vorigen Abschnitt gesehen, dass die Lösungen (25) die allgemeinsten sind für isotrope Medien, wenn die U, V, W der zuletzt angeschriebenen Gleichung (30^a) genügen. Führt man in die Gleichungen (25) die Bedingung (28) ein, so folgen Lösungen von eben der Form (30). Fügt man also den unter irgend welchen besonderen Voraussetzungen für isotrope Medien aufgestellten Lösungen die Bedingung hinzu:

$$(28) \qquad \frac{\partial w}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial z} = 0,$$

so sind dadurch alle diejenigen unter jenen Voraussetzungen sich ausbreitenden Schwingungen charakterisirt, welche den optisch einaxigen und den isotropen Medien zugleich zukommen. Wir haben oben durch die Gleichung:

$$(7) \qquad w^2 \cdot \frac{\partial^2 G}{\partial t^2} = \delta^2 G + \frac{\partial^2 G}{\partial \varrho^2}\,,$$

wo $\delta^2 G$ die frühere Bedeutung (9^a) hat, alle diejenigen Schwingungen definirt gesehen, welche ohne kubische Dilatation und transversal zum Radius vector von einem gewissen Punkte aus vor sich gehen. Die obige Bedingungsgleichung (28) in die hier benutzten Coordinaten ϱ, ϱ_1, ϱ_2 transformirt, lautet*):

$$\frac{\partial x}{\partial \varrho} \cdot \mathsf{A} \cdot h^2 + \frac{\partial x}{\partial \varrho_1} \cdot \mathsf{B} \cdot h_1^2 + \frac{\partial x}{\partial \varrho_2} \cdot \Gamma \cdot h_2^2 = 0,$$

*) Lamé, coordonnées curvilignes, p. 288.

$$(31)\left\{\begin{aligned} &\text{wo } \mathsf{A} = \frac{h_1 h_2}{h}\left(\frac{\partial}{\partial\varrho_2}\frac{V}{h_1} - \frac{\partial}{\partial\varrho_1}\frac{W}{h_2}\right)\,;\quad \mathsf{B} = \frac{h_2 h}{h_1}\left(\frac{\partial}{\partial\varrho}\frac{W}{h_2} - \frac{\partial}{\partial\varrho_2}\frac{U}{h}\right); \\ &\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad \Gamma = \frac{h h_1}{h_2}\left(\frac{\partial}{\partial\varrho_2}\frac{U}{h} - \frac{\partial}{\partial\varrho}\frac{V}{h_1}\right).\end{aligned}\right.$$

Nun hat man aber, unter den beiden soeben citirten Voraussetzungen:

$$U = 0;\ \frac{V}{h_2} = \frac{\partial G}{\partial\varrho_2}\quad;\quad \frac{W}{h_1} = -\frac{\partial G}{\partial\varrho_1}.$$

Daher ist die transformirte Gleichung:

$$(32)\qquad \frac{\partial x}{\partial\varrho}\cdot\delta^2 G - \frac{\partial x}{\partial\varrho_1}h_1^2\cdot\frac{\partial^2 G}{\partial\varrho\,\partial\varrho_1} - \frac{\partial x}{\partial\varrho_2}h_2^2\,\frac{\partial^2 G}{\partial\varrho\,\partial\varrho_2} = 0,$$

wo $\delta^2 G$ die obige Bedeutung (9^a) hat.

Diese Gleichung (32) zusammen mit der Gleichung (7) für G umfasst nun alle diejenigen Schwingungen, welche sich sowohl in einem isotropen, wie in einem optisch einaxigen Medium in Kugelwellen fortpflanzen können, unter der Voraussetzung, dass die Schwingungen ohne Dilatation und in den Kugeloberflächen selbst vor sich gehen.

Fügen wir dieser Voraussetzung noch diejenige über die Form der Lösungen G hinzu (8, 9), welche die Schwingungen zu Lichtschwingungen machen, indem wir dem Obigen zufolge λ als eine Function von ϱ allein voraussetzen, so muss, zufolge der Bedingung (9), die Gleichung (32) in zwei zerfallen, eine für R und eine andere für Ω allein. Dieselben sondern alsdann aus den Lösungen der Gleichungen (10) diejenigen aus, welche auch optisch einaxigen Krystallen genügen. Setzt man die Form (9) in (32) ein, so kommt:

$$(33)\qquad \frac{\partial x}{\partial\varrho}\cdot\delta^2\Omega\cdot R - \left[\frac{\partial x}{\partial\varrho_1}h_1^2\cdot\frac{\partial\Omega}{\partial\varrho_1} + \frac{\partial x}{\partial\varrho_2}\cdot h_2^2\cdot\frac{\partial\Omega}{\partial\varrho_2}\right]\frac{\partial R}{\partial\varrho} = 0.$$

Nun ist $\frac{\partial x}{\partial\varrho_1}$, $\frac{\partial x}{\partial\varrho_2}$ proportional mit ϱ, wenn ϱ_1, ϱ_2 Parameter von Kegel-(Ebenen-)Systemen sind, h_1^2, h_2^2 proportional mit $\frac{1}{\varrho^2}$, $\frac{\partial x}{\partial\varrho}$ aber von der 0^{ten} Ordnung für ϱ. Man hat daher, wenn diese Gleichung in zwei zerfallen soll, in denen die Variabeln getrennt vorkommen, zu setzen: die eckige Klammer gleich:

$$\frac{\Omega}{\varrho}\cdot\frac{\partial x}{\partial\varrho}\cdot\gamma,$$

wo γ eine Constante ist. Man hat ferner die Gleichung für Ω (10):

$$\varrho^2\,.\,\delta^2\Omega + \beta\Omega = 0.$$

Alsdann kommt für R die Gleichung:

$$\beta\,.\,R - \frac{\partial R}{\partial\varrho}\cdot\frac{\gamma}{\varrho} = 0;$$

dieselbe hat aber als einzige Lösung die mit (10) nicht verträgliche:

$$R = k \,.\, \varrho,$$

welche somit unbrauchbar ist. — Aber jene Gleichung für R wird andererseits auch noch erfüllt durch:

$$\gamma = \beta = 0.$$

Die eckige Klammer in (33) verschwindet alsdann gleichfalls. Man kann dieselbe auch in solche Form schreiben, dass man erhält:

$$\frac{\partial \Omega}{\partial x} = 0.$$

Wir wollen diese Gleichung in den oben (19^a) eingeführten Polarcoordinaten schreiben, für welche:

$$x = r \sin \varphi \; ; \; y = r \cos \varphi \sin \psi ; \; z = r \cos \varphi \cos \psi.$$

Man hat alsdann:

$$\frac{\partial \Omega}{\partial \varphi} = 0$$

und aus: $\delta^2 \Omega = 0$ folgt nunmehr:

$$\frac{\partial^2 \Omega}{\partial \psi^2} = 0,$$

also $\Omega = m\psi + n,$

wo m und n Constante. Ferner folgt aus der Gleichung (10) für R, wenn $\beta = 0$:

$$R = \text{const. } e^{\varrho \cdot \frac{2\pi i}{\tau} \cdot w}.$$

Daher sind die einzig denkbaren Lichtschwingungen, welche sich in Kugelwellen in einem optisch einaxigen Medium ausbreiten können, darstellbar in Polarcoordinaten durch:

$$(34) \qquad U = 0 \; ; \; V = \frac{E \,.\, e^{\left(\frac{r}{b} - t\right)\frac{2\pi i}{\tau}}}{r \,.\, \cos \varphi} \; ; \; W = 0.$$

Man bemerkt, dass dieselben der Richtung wie der Fortpflanzungsgeschwindigkeit nach eindeutig bestimmt sind.

Ganz anders verhält sich der Theil der Lösungen, welcher den ellipsoidischen Wellen entspricht. Wenn man die Gleichung:

$$u = 0,$$

welche diesen Theil von den Kugelwellen absondert, in die allgemeinen Lösungen für isotrope Medien (25) einführt, und vergleicht alsdann dieselben mit den für optisch einaxige aus derselben Bedingung entspringenden:

$$u_2 = 0; \qquad v_2 = \frac{\partial S}{\partial z} \; ; \; w_2 = - \frac{\partial S}{\partial y},$$

so stimmen beide in der Form genau überein, nachdem man in der

Gleichung, welcher S zu genügen hat, die Transformation vorgenommen hat:

$$x = x' \quad ; \quad y = y' \cdot \frac{a}{b} \quad ; \quad z = z' \cdot \frac{a}{b} \cdot$$

Die Bedingung $u = 0$ für isotrope Medien sagt aber nur aus, dass die Schwingungen parallel der YZ Ebene vor sich gehen, also, in den vorhin eingeführten Polarcoordinaten ausgedrückt, dass:

$$(35) \qquad \frac{\partial G}{\partial \psi} = 0,$$

also dass die Constante α (12ᵃ) verschwindet.

ψ geht mithin in die Lösung G nicht ein. Daher erstreckt sich die Transformation von x, y, z blos auf r, wenn man dieselbe in Polarcoordinaten ausdrücken will. Alle unter der Voraussetzung $\frac{\partial G}{\partial \psi} = 0$ für isotrope Medien abgeleiteten Lösungen der Gleichung (7) für G, nachdem dieselbe in Polarcoordinaten ausgedrückt, gelten also, nachdem man überall für $\frac{r^2}{b^2}$ die Grösse: $q^2 = \frac{x^2}{b^2} + \frac{y^2 + z^2}{a^2}$ eingesetzt, auch noch für die ellipsoidischen Wellen in optisch einaxigen Medien, indem dabei λ als Function des Parameters q eines Rotationsellipsoids vorausgesetzt wird. Weil durch die obige Bedingung die Gleichung für R (10) nicht alterirt wird, so hat man den Satz:

Nach denselben Gesetzen, nach welchen in isotropen Medien eine Verbreitung von Lichtschwingungen in Kugelwellen möglich ist, kann auch, abgesehen von der Schwingungsrichtung, eine solche in ellipsoidischen Wellen in einem optisch einaxigen Krystall stattfinden. Dagegen giebt es nur eine einzige Art der Verbreitung von Kugelwellen in dem letztgenannten.

7.

Optisch zweiaxige Krystalle.

Die Frage nach dem Gesetz für die Fortpflanzungsgeschwindigkeit von Lichtschwingungen, die sich in Fresnel'schen Wellenflächenwellen in einem optisch zweiaxigen Medium ausbreiten, beantworten wir, aus Gründen, die wir schon in 5. angegeben, durch Untersuchung derjenigen Differentialgleichungen, welche Lamé hierfür aufgestellt, indem wir in dieselben die Bedingungen, durch welche wir Lichtschwingungen definirt haben (1) und (2), einführen. Diese Operation ist aber wie im Vorigen so auch hier wesentlich erleichtert, wenn die Differentialgleichungen für ein solches Coordinatensystem aufgestellt sind, wie wir es in 2. beschrieben haben. Wegen der in den Differentialgleichungen auftretenden Constanten (3 an der Zahl) wollen wir, um die Transformation übersichtlich bis zu Ende durchführen zu können, ein gleichfalls mit 3 willkürlichen Parametern versehenes Coordinatensystem wählen, welches unten näher bezeichnet werden soll. Man kann nun die mühsame Rechnung, welche eine directe Transformation der Differentialgleichungen verursachen würde, auf die weit einfachere Aufgabe der Transformation eines gewissen vielfachen Integrals zurückführen, dessen erste Variation, gleich Null gesetzt, jene Gleichungen ergiebt. Nun lässt sich zwar in vielen Fällen die Form desselben sofort errathen, wenn die Differentialgleichungen gegeben vorliegen. Doch soll hier eine directe Ableitung aus einem bekannten Princip der Mechanik wenigstens angedeutet werden.

Ueber die zwischen den einzelnen Theilen eines elastischen homogenen Mediums wirkenden Kräfte machen wir die Voraussetzung, dass sie eine Kräftefunction, U, besitzen. Sind äussere Kräfte nicht vorhanden, so verschwindet nach einem von Hamilton aufgestellten Princip der Mechanik die erste Variation des Integrals

$$\int dt\,(U - T),$$

wo t die Zeit, T die lebendige Kraft des ganzen Systems (das man sich von beliebiger räumlicher Ausdehnung vorstellen kann) bedeutet. Die Variation der Kräftefunction stellt nun aber die bei einer virtuellen Verschiebung des Systems geleistete Arbeit dar. Andererseits ist dieselbe gleich der Summe der Arbeiten der auf ein (als starr gedachtes) Elementarparallelepiped des Mediums wirkenden Kräfte und Kräftepaare, diese Summe ausgedehnt über das ganze Medium. Nimmt man nun an, dass jene Kräfte und Kräftepaare lineare Functionen der als sehr klein aufzufassenden sechs Verschiebungsgrössen in diesem Punkte seien, so sind die virtuellen Arbeiten lineare Functionen sowohl der Verschiebungsgrössen selbst, als ihrer Variationen, der virtuellen Wege. Die Kräftefunction also, deren Variation zufolge der Definition ein vollständiges Differential ist, kann als quadratischer (homogener) Ausdruck der sechs Verschiebungsgrössen dargestellt werden. Derselbe enthält noch $\frac{6\,.\,7}{1\,.\,2}$ unabhängige Constante. Geht man von der durch das Experiment wahrscheinlich gemachten Annahme aus, dass das lichtfortpflanzende Medium incompressibel sei, so wird man *) zu einer Reduction der obigen Constantenzahl veranlasst, welche Zahl durch die weitere Annahme von drei ausgezeichneten, aufeinander senkrechten Richtungen in dem Medium (die Schnitte der Symmetrieebenen, parallel den Coordinatenaxen gedacht) auf drei herabzudrücken ist. Werden statt der oben genannten Verschiebungsgrössen die Componenten u, v, w der Verschiebungen eines Punktes

*) Lamé, elasticité, 17. leç.

x, y, z (durch welche auch die Grösse T ausgedrückt werden muss) vermittelst der bekannten Ausdrücke in den partiellen Differentialquotienten eingeführt, so erhält man für U, T die folgenden Ausdrücke:

$$(36)\begin{cases} U = \int\int\int dx\,dy\,dz\left[a^2\left(\frac{\partial v}{\partial z}-\frac{\partial w}{\partial y}\right)^2+b^2\left(\frac{\partial w}{\partial x}-\frac{\partial u}{\partial z}\right)^2+c^2\left(\frac{\partial u}{\partial y}-\frac{\partial v}{\partial x}\right)^2\right] \\ \quad = \int\int\int dx\,dy\,dz\cdot\Omega; \\ T = \int\int\int dx\,dy\,dz\left[\left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)^2+\left(\frac{\partial v}{\partial t}\right)^2+\left(\frac{\partial w}{\partial t}\right)^2\right] \\ \quad = \int\int\int dx\,dy\,dz\cdot S. \end{cases}$$

Man hat daher die Gleichung:

$$(37)\qquad \delta \int\int\int\int dx\,dy\,dz\,dt\,(\Omega - S) = 0.$$

Aus derselben fliessen sofort drei partielle Differentialgleichungen von der Form:

$$(38)\qquad -\frac{\partial(\Omega-S)}{\partial\omega}+\frac{\partial}{\partial t}\frac{\partial(\Omega-S)}{\partial\frac{\partial\omega}{\partial t}}+\frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial(\Omega-S)}{\partial\frac{\partial\omega}{\partial x}}+\frac{\partial}{\partial y}\frac{\partial(\Omega-S)}{\partial\frac{\partial\omega}{\partial y}}+ \\ +\frac{\partial}{\partial z}\frac{\partial(\Omega-S)}{\partial\frac{\partial\omega}{\partial z}}=0.$$

Setzt man darin für ω der Reihe nach u, v, w, so kommt das von Lamé behandelte System von Differentialgleichungen für die Bewegung in einem krystallinischen Medium:

$$(38^a)\qquad \begin{aligned} c^2\cdot\frac{\partial\left(\frac{\partial u}{\partial y}-\frac{\partial v}{\partial x}\right)}{\partial y}-b^2\cdot\frac{\partial\left(\frac{\partial w}{\partial x}-\frac{\partial u}{\partial z}\right)}{\partial z}&=\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}\\ a^2\cdot\frac{\partial\left(\frac{\partial v}{\partial z}-\frac{\partial w}{\partial y}\right)}{\partial z}-c^2\cdot\frac{\partial\left(\frac{\partial u}{\partial y}-\frac{\partial v}{\partial x}\right)}{\partial x}&=\frac{\partial^2 v}{\partial t^2}\\ b^2\cdot\frac{\partial\left(\frac{\partial w}{\partial x}-\frac{\partial u}{\partial z}\right)}{\partial x}-a^2\cdot\frac{\partial\left(\frac{\partial v}{\partial z}-\frac{\partial w}{\partial y}\right)}{\partial y}&=\frac{\partial^2 w}{\partial t^2}. \end{aligned}$$

Wir wollen uns hierbei nicht aufhalten, sondern gleich zur Transformation des Integrals (37) übergehen.

Sind die neuen Coordinaten $\varrho, \varrho_1, \varrho_2$, und haben die U, V, W wieder die frühere Bedeutung (1), desgleichen die h, h_1, h_2, so bestehen zwischen den u, v, w und U, V, W lineare Relationen, dieselben, welche zwischen den Projectionen einer Strecke auf je die drei Axen zweier rechtwinkliger Coordinatensysteme bestehen.

Man hat nun (36):

$$S - \Omega = \Sigma \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \Sigma\, a^2 \left(\frac{\partial v}{\partial y} - \frac{\partial w}{\partial z}\right)^2.$$

Alsdann ist zunächst wegen der zwischen den u, v, w und U, V, W bestehenden Relationen:

$$S = \left(\frac{\partial U}{\partial t}\right)^2 + \left(\frac{\partial V}{\partial t}\right)^2 + \left(\frac{\partial W}{\partial t}\right)^2. \tag{39}$$

Man kann ferner leicht die Formeln beweisen*):

$$\begin{aligned}
\frac{\partial v}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial y} &= \frac{\partial x}{\partial \varrho} \cdot Ah^2 + \frac{\partial x}{\partial \varrho_1} \cdot Bh_1^2 + \frac{\partial x}{\partial \varrho_2} \cdot \Gamma \cdot h_2^2 \\
\frac{\partial w}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial z} &= \frac{\partial y}{\partial \varrho} \cdot Ah^2 + \frac{\partial y}{\partial \varrho_1} \cdot Bh_1^2 + \frac{\partial y}{\partial \varrho_2} \cdot \Gamma \cdot h_2^2 \\
\frac{\partial u}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial x} &= \frac{\partial z}{\partial \varrho} \cdot Ah^2 + \frac{\partial z}{\partial \varrho_1} \cdot Bh_1^2 + \frac{\partial z}{\partial \varrho_2} \cdot \Gamma \cdot h_2^2,
\end{aligned} \tag{40}$$

wo $A = \frac{h_1 h_2}{h}\left(\frac{\partial}{\partial \varrho_2}\frac{V}{h_1} - \frac{\partial}{\partial \varrho_1}\frac{W}{h_2}\right)$; $B = \frac{h_2 h}{h_1}\left(\frac{\partial}{\partial \varrho}\frac{W}{h_2} - \frac{\partial}{\partial \varrho_2}\frac{U}{h}\right)$;

$$\Gamma = \frac{hh_1}{h_2}\left(\frac{\partial}{\partial \varrho_1}\frac{U}{h} - \frac{\partial}{\partial \varrho}\frac{V}{h_1}\right).$$

Wir wollen nun die Werthe $\frac{\partial x}{\partial \varrho}$ etc. wirklich berechnen und zwar durch Einführung eines Coordinatensystems, das durch die drei Flächenschaaren**):

$$\begin{aligned}
&x^2 + y^2 + z^2 = \varrho^2 \\
&\frac{a^2 x^2}{a^2 - \varrho_1^2} + \frac{b^2 y^2}{b^2 - \varrho_1^2} + \frac{c^2 z^2}{c^2 - \varrho_1^2} = 0 \\
&\frac{a^2 x^2}{a^2 - \varrho_2^2} + \frac{b^2 y^2}{b^2 - \varrho_2^2} + \frac{c^2 z^2}{c^2 - \varrho_2^2} = 0
\end{aligned} \tag{41}$$

mit drei positiven beliebigen Constanten ($a^2 > b^2 > c^2$) gebildet wird.

Sie sollen mit den in dem Integralausdruck vorkommenden identisch sein. Die erste der drei Flächenschaaren sind concentrische Kugeln, die beiden letzten confocale Kegel 2ter Ordnung. Bedient man sich der abkürzenden Bezeichnungen ($i = 1, 2$):

$$\begin{aligned}
&a_i^2 = \varrho_i^2 - a^2 \;;\; b_i^2 = \varrho_i^2 - b^2 \;;\; c_i^2 = \varrho_i^2 - c^2 \;;\; n_i^2 = a_i^2 b_i^2 c_i^2 \\
&A^2 = \frac{a^2}{a^2 - b^2 \cdot a^2 - c^2} \;;\; B^2 = \frac{b^2}{b^2 - a^2 \cdot b^2 - c^2} \;;\; C^2 = \frac{c^2}{c^2 - a^2 \cdot c^2 - b^2} \;;\; n^2 = a^2 b^2 c^2,
\end{aligned} \tag{41a}$$

so bestehen zwischen A, B, C und a, b, c bekannte Relationen, mit Hülfe deren man leicht die aus (41) folgenden Formeln verificirt:

---

*) Lamé, coord. curv. p. 288.

**) Herr Hesse (Geometrie des Raumes) hat für dieses System die Bezeichnung: elliptische Kugelcoordinaten.

$$
(42)\qquad
\begin{aligned}
x^2 &= \frac{\varrho^2 n^2}{\varrho_1^2 \varrho_2^2} \cdot a_1^2 a_2^2 \frac{A^2}{a^4}\,;\\
y^2 &= \frac{\varrho^2 n^2}{\varrho_1^2 \varrho_2^2} \cdot b_1^2 b_2^2 \cdot \frac{B^2}{b^4}\,;\\
z^2 &= \frac{\varrho^2 n^2}{\varrho_1^2 \varrho_2^2} \cdot c_1^2 c_2^2 \cdot \frac{C^2}{c^4}\,.
\end{aligned}
$$

Bildet man hieraus die partiellen Differentialquotienten der rechtwinkligen Coordinaten nach den neuen, alsdann das Quadrat des Linienelements, so erhält man für die h die Ausdrücke:

$$
(43)\qquad h = 1;\quad h_1 = \frac{\varrho_1 \varrho_2 \cdot n_1}{\varrho . n . \sqrt{\varrho_2^2 - \varrho_1^2}}\;;\quad h_2 = \frac{\varrho_1 \cdot \varrho_2 \cdot n_2}{\varrho . n \sqrt{\varrho_1^2 - \varrho_2^2}}\,.
$$

Setzt man diese Werthe sowie die für die partiellen Differentialquotienten in die Gleichungen (40) ein, und addirt, nachdem man quadrirt und resp. mit a^2, b^2, c^2 multiplicirt hat, so kommt der transformirte Ausdruck für Ω. — Derselbe nimmt eine einfache Gestalt an, wenn man die mit Hülfe der zwischen den A, B, C, a, b, c bestehenden Relationen aufgestellten Beziehungen bemerkt ($i = 1, 2$):

$$
\sum a^2 \left(\frac{\partial x}{\partial \varrho}\right)^2 h^2 = \frac{h^2}{\varrho^2} \cdot \frac{\varrho^2 n^2}{\varrho_1^2 \varrho_2^2}\;;\quad \sum a^2 \left(\frac{\partial x}{\partial \varrho_i}\right)^2 \cdot h_i^2 = \varrho_i^2 + \frac{h_i^2}{\varrho_i^2} \cdot \frac{\varrho^2 n^2}{\varrho_1^2 \varrho_2^2}\,;
$$

$$
\sum a^2 \left(\frac{\partial x}{\partial \varrho_1}\right)\left(\frac{\partial x}{\partial \varrho_2}\right) = \frac{h_1 h_2}{\varrho_1 \varrho_2} \cdot \frac{\varrho^2 n^2}{\varrho_1^2 \varrho_2^2}\;;\quad \sum a^2 \left(\frac{\partial x}{\partial \varrho}\right)\left(\frac{\partial x}{\partial \varrho_i}\right) = -\frac{h_i h}{\varrho_i \varrho} \cdot \frac{\varrho^2 n^2}{\varrho_1^2 \varrho_2^2}\,.
$$

So ergiebt sich, wenn man zusammenfasst:

$$
(44)\qquad \Omega = .B^2 . h_1^2 . \varrho_1^2 + \Gamma^2 . h_2^2 \varrho_2^2 + \frac{\varrho}{\varrho_1 \varrho_2}\left[-\frac{A h^2}{\varrho} + \frac{B h_1^2}{\varrho_1} + \frac{\Gamma h_2^2}{\varrho_2}\right]^2;
$$

für die Transformation des Volumelementes entnehmen wir der Theorie der Functionaldeterminanten:

$$
(45)\qquad dx\, dy\, dz = \Delta . d\varrho\, d\varrho_1\, d\varrho_2 = \frac{1}{h_1 h_2}\, d\varrho\, d\varrho_1\, d\varrho_2
$$

9.

Aus den Formeln (39), (44), (45) des voranstehenden Abschnittes ergiebt sich sofort die Transformation des Integrals. Wir schliessen sie ein in die folgenden Formeln:

$$
\delta \iiiint dx\, dy\, dz\, dt\, (\Omega - S) = \delta \iiiint d\varrho\, d\varrho_1\, d\varrho_2\, dt\, (\Omega' - S') = 0
$$

$$
S' = \frac{1}{h_1 h_2}\left(\frac{\partial U'}{\partial t}\right)^2 + \frac{h_1}{h_2}\left(\frac{\partial V'}{\partial t}\right)^2 + \frac{h_2}{h_1}\left(\frac{\partial W'}{\partial t}\right)^2;
$$

$$
(46)\qquad
\begin{aligned}
\Omega' = {} & \varrho_1^2 \cdot \frac{h_2}{h_1}\left(\frac{\partial W'}{\partial \varrho} - \frac{\partial U'}{\partial \varrho_2}\right)^2 + \varrho_2^2 \cdot \frac{h_1}{h_2}\left(\frac{\partial U'}{\partial \varrho_1} - \frac{\partial V'}{\partial \varrho}\right)^2 + \\
& + \frac{\varrho . h_1 h_2 . a b c}{\varrho_1 \varrho_2}\left[\left(\frac{1}{\varrho_2}\,\frac{\partial U'}{\partial \varrho_1} - \frac{1}{\varrho_1}\,\frac{\partial U'}{\partial \varrho_2}\right) - \left(\frac{1}{\varrho} \cdot \frac{\partial V'}{\partial \varrho_2} + \frac{1}{\varrho_2}\,\frac{\partial V'}{\partial \varrho}\right) + \right.\\
& \left. + \left(\frac{1}{\varrho_1} \cdot \frac{\partial W'}{\partial \varrho} + \frac{1}{\varrho_1}\,\frac{\partial W'}{\partial \varrho_1}\right)\right]^2;
\end{aligned}
$$

wo für einen Augenblick:

(46a) $$U = U'; \quad \frac{V}{h_1} = V'; \quad \frac{W}{h_2} = W'$$

gesetzt ist. Die hieraus fliessenden Differentialgleichungen haben die Form:

$$-\frac{\partial(\Omega' - S')}{\partial \omega} + \frac{\partial}{\partial t}\frac{\partial(\Omega' - S')}{\partial \frac{\partial \omega}{\partial t}} + \frac{\partial}{\partial \varrho}\frac{\partial(\Omega' - S')}{\partial \frac{\partial \omega}{\partial \varrho}} + \frac{\partial}{\partial \varrho_1}\frac{\partial(\Omega' - S')}{\partial \frac{\partial \omega}{\partial \varrho_1}} +$$
$$+ \frac{\partial}{\partial \varrho_2}\frac{\partial(\Omega' - S')}{\partial \frac{\partial \omega}{\partial \varrho_2}} = 0,$$

wo für ω die drei Functionen U, V, W oder auch die U', V', W' der Reihe nach zu setzen sind. Wählen wir die letzteren, um das erste (mit negativem Vorzeichen versehene) Glied in der letztangeschriebenen Gleichung zum Verschwinden zu bringen. Wenn man die Gleichungen, welche man auf diese Weise erhält, addirt, nachdem man sie beziehungsweise mit $\frac{1}{\varrho}, \frac{1}{\varrho_1}, \frac{1}{\varrho_2}$ multiplicirt hat, so heben sich die von der eckigen Klammer in Ω' stammenden Glieder gegenseitig auf. Setzt man noch in der so entstandenen Gleichung $U = 0$, d. h. führt man die Bedingung ein, dass die Schwingungen senkrecht zum Radius vector vom Ursprung stattfinden, so kommt die folgende einfache Gleichung (in welcher blos noch die Coordinaten in den Coefficienten auftreten):

(47) $$\frac{1}{\varrho_1}\left(\frac{\partial^2 V''}{\partial t^2} - \varrho_2^2 \frac{\partial^2 V''}{\partial \varrho^2}\right) + \frac{1}{\varrho_2}\left(\frac{\partial^2 W''}{\partial t^2} - \varrho_1^2 \frac{\partial^2 W''}{\partial \varrho^2}\right) =$$
$$= \frac{1}{\varrho}\frac{\partial}{\partial \varrho}\left(\varrho_2^2 \frac{\partial V''}{\partial \varrho_1} + \varrho_1^2 \frac{\partial W''}{\partial \varrho_2}\right);$$

wo wir der Kürze wegen gesetzt haben:

$$\frac{V}{h_2} = V'' \quad ; \quad \frac{W}{h_1} = W''.$$

Man bemerkt zunächst, dass die Gleichung (47) eine besonders einfache Lösung zulässt, wenn V'' oder W'' gleich Null ist. Verfolgen wir z. B. den ersten Fall weiter. Wenn man die früher (1) und (2) besprochenen Eigenschaften der Schwingungen auch hier einführt, so kommt die Annahme $V'' = 0$ darauf hinaus, λ unabhängig von ϱ_2 zu setzen, d. h. auf die Voraussetzung, dass durch den Durchschnitt der Kegel ϱ_1 mit der Kugel je eine Wellenfläche hindurchgehe. Wir setzen hierbei über die Form der Function λ nichts Näheres fest. Alsdann ist aber auch W'' selbst nur noch Function von ϱ_1 und ϱ; die Gleichung (47) reducirt sich somit auf:

$$\frac{\partial^2 W''}{\partial t^2} - \varrho_1^2 \frac{\partial^2 W''}{\partial \varrho^2} = 0,$$

deren Integration sofort ergiebt:

$$W'' = \Pi\left(\frac{\varrho}{\varrho_1} - t, \varrho_1\right),$$

wo Π eine willkürliche Function der eingeklammerten Grössen ist. — Andererseits folgt aber aus den ersten der drei Differentialgleichungen für U', V', W' (die wir als leicht herleitbar hier nicht angeschrieben haben), wenn man darin U' und V' gleich Null, W'' als von ϱ_2 unabhängig annimmt:

$$\frac{1}{\varrho_1}\frac{\partial W'}{\partial \varrho} + \frac{1}{\varrho}\frac{\partial W'}{\partial \varrho_1} = 0,$$

$$\text{oder } W' = \Pi_1\left(\frac{\varrho}{\varrho_1}, \varrho_2, t\right).$$

Daher, weil $W'' = \frac{W}{h_1}$ (47ᵃ); $W' = \frac{W}{h_2}$ (46ᵃ) und mit Rücksicht auf die Werthe der h_1, h_2:

$$\frac{h_2}{h_1} = \frac{n_2}{n_1} = \frac{\Pi\left(\frac{\varrho}{\varrho_1} - t, \varrho_1\right)}{\Pi_1\left(\frac{\varrho}{\varrho_1}, \varrho_2, t\right)}.$$

Hieraus folgt, dass $n_2\Pi_1$ nicht mehr Function von ϱ_2 sein kann, ebenso wie $n_1\Pi$ nicht mehr Function von ϱ_1 allein sein kann. Vielmehr sind beide Functionen von $\frac{\varrho}{\varrho_1} - t$ allein, daher man schliesslich hat (zufolge unserer Annahme über die Form der periodischen Function):

$$(48) \qquad U = 0 \quad ; \quad V = 0 \quad ; \quad W = \text{const.}\,\frac{h_1}{n_1}\cdot e^{\left(\frac{\varrho}{\varrho_1} - t\right)\frac{2\pi i}{\tau}}.$$

Durch Vertauschung der Indices 1 und 2, sowie von V und W erhält man noch eine andere Lösung der gegebenen Differentialgleichungen.

Man überzeugt sich leicht, dass der hierbei nicht benutzte Theil der Differentialgleichungen nichts Widersprechendes oder Beschränkendes ergiebt.

Es lässt sich aber zeigen, dass die zwei hier auftretenden Wellenflächen

$$\lambda = \frac{\varrho}{\varrho_1} \text{ und } \lambda = \frac{\varrho}{\varrho_2}$$

identisch sind mit den beiden Mänteln der von Fresnel angegebenen Wellenfläche. Die Form der Gleichung der letzteren ist bekanntlich:

$$(49) \qquad \frac{a^2x^2}{r^2 - \lambda^2 a^2} + \frac{b^2y^2}{r^2 - \lambda^2 b^2} + \frac{c^2z^2}{r^2 - \lambda^2 c^2} = 0,$$

wo $r^2 = x^2 + y^2 + z^2$ (also unser ϱ^2) ist. Nun bemerkt man aber, dass diese Gleichung zusammenfällt mit der zweiten, bezüglich dritten der Gleichungen (41) (welche von den x, y, z in (42) identisch erfüllt werden), je nachdem man setzt:

$$\frac{r^2}{\lambda^2} = \varrho_1^2 \text{ oder } \frac{r^2}{\lambda^2} = \varrho_2^2,$$

daher wird die Gleichung der Wellenfläche identisch befriedigt durch die beiden Werthe von λ:

$$\lambda_1^2 = \frac{\varrho^2}{\varrho_1^2} \quad ; \quad \lambda_2^2 = \frac{\varrho^2}{\varrho_2^2}.$$

Dies sind zugleich die einzigen Werthe von λ, welche diese Gleichung befriedigen, weil dieselbe in λ quadratisch ist. Soll nun die oben allgemein gestellte Frage nach den Gesetzen der Fortpflanzung von Wellenflächen auch hier beantwortet werden, so geschieht dies durch die Einführung beliebiger Functionen von λ_1 oder von λ_2 für λ. Aber man erhält alsdann sofort bezüglich:

$$\frac{\partial \lambda}{\partial \varrho_2} = 0 \text{ oder } \frac{\partial \lambda}{\partial \varrho_1} = 0,$$

also bezüglich

$$V = 0 \text{ oder } W = 0,$$

mithin nichts Anderes als den bereits oben behandelten Fall, welcher uns auf $\lambda = \lambda_1$ oder $= \lambda_2$ geführt hat. **Dieser Fall ist also der einzig denkbare.** Es ist bemerkenswerth, dass die grosse Mannigfaltigkeit von Formen, welche für isotrope und für die ellipsoidischen Wellen in optisch einaxigen Krystallen jene Function λ noch haben kann, hier für beide Wellen auf eine einzige Form herabsinkt.

Durch Addition der beiden oben angegebenen Lösungen erhält man die allgemeinere (indem man für die h die Werthe aus (43) entnimmt):

$$U = 0 \quad ; \quad V = \varepsilon_2 \cdot \frac{\varrho_1 \varrho_2}{\varrho \sqrt{\varrho_2^2 - \varrho_1^2}} \cdot e^{\left(\frac{\varrho}{\varrho_2} - t\right)\frac{2\pi i}{\tau}} \;;$$

$$W = \varepsilon_1 \cdot \frac{\varrho_1 \varrho_2}{\varrho \sqrt{\varrho_1^2 - \varrho_2^2}} \cdot e^{\left(\frac{\varrho}{\varrho_1} - t\right)\frac{2\pi i}{\tau}} \;;$$

wo die ε Constante bedeuten. Setzt man diese Werthe für U, V, W in die für die u, v, w bestehenden linearen Ausdrücke derselben, so erhält man die von Lamé unter specielleren Voraussetzungen und, wie es scheint, auf weniger organischem Wege abgeleiteten Lösungen*).

Das hier angewandte Coordinatensystem besteht nicht mehr, wenn zwei der Constanten a, b, c einander gleich werden. Man hilft sich

*) Elasticité, p. 318, 319, 23. leç.

alsdann zweckmässig durch die Einführung von Winkeln, welche das System in Polarcoordinaten transformiren. Sollen z. B. die oben gegebenen Lösungen für isotrope Medien specialisirt werden, so hat man zu setzen:

$$\begin{aligned} \varrho_1^2 &= b^2 \sin^2\varphi + a^2 \cos^2\varphi \\ \varrho_2^2 &= c^2 \sin^2\varphi + b^2 \cos^2\varphi \\ \varrho^2 &= r^2. \end{aligned}$$

Nach vorgenommener Transformation setze man $a = b = c$, indem man zugleich über den Grenzwerth des Verhältnisses:

$$\frac{b^2 - c^2}{a^2 - b^2}$$

irgendwie verfügt. Ist derselbe z. B. gleich Null, so ergeben sich Polarcoordinaten, für welche $h_1 = r$; $h_2 = r \cos\varphi$, und die Lösungen erhalten die Form:

$$U = 0 \quad ; \quad V = \frac{\varepsilon_2}{r \cdot \cos\varphi}\, e^{\left(\frac{r}{b} - t\right)\frac{2\pi i}{\tau}} \quad ; \quad W = \frac{\varepsilon_1}{r \cos\varphi} \cdot e^{\left(\frac{r}{b} - t\right)\frac{2\pi i}{\tau}}.$$

Giessen, 20. October 1868.

Ueber die Abbildung algebraischer Flächen, insbesondere der vierten und fünften Ordnung.

Von A. Clebsch in Göttingen.

§. 1.

Ueber den Grad der Doppelcurve einer auf einer Ebene abbildbaren Fläche.

Denken wir uns eine Fläche N^{ter} Ordnung, welche die Eigenschaft hat, dass die Coordinaten ihrer Punkte als rationale homogene Functionen dreier Parameter darstellbar sind. Diese Functionen seien von der Ordnung n; bezeichnen wir die Parameter durch ξ_1, ξ_2, ξ_3, so ist die Fläche dargestellt durch Gleichungen der Form:

$$(1)\qquad \begin{aligned} \varrho x_1 &= f_1(\xi_1, \xi_2, \xi_3) \\ \varrho x_2 &= f_2(\xi_1, \xi_2, \xi_3) \\ \varrho x_3 &= f_3(\xi_1, \xi_2, \xi_3) \\ \varrho x_4 &= f_4(\xi_1, \xi_2, \xi_3); \end{aligned}$$

wobei ϱ ein unbestimmter Factor ist, und die f homogene rationale Functionen n^{ter} Ordnung ihrer Argumente bedeuten. Nehmen wir an, dass aus den Gleichungen (1) sich auch, und zwar dann natürlich auf unendlich viele Arten, die ξ als rationale Functionen der x ausdrücken lassen. Alsdann kann man die ξ als Coordinaten eines Punktes einer Ebene auffassen; jedem Punkte der Ebene entspricht dann im Allgemeinen *ein* Punkt der Fläche und umgekehrt, oder, wie ich mich ausdrücken will, *die Fläche ist auf der Ebene eindeutig abgebildet*. Im Folgenden sollen einige Fälle untersucht werden, in welchen eine solche Abbildung möglich ist.

Schneidet man die Fläche (1) mit der Ebene

$$(2)\qquad \alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \alpha_3 x_3 + \alpha_4 x_4 = 0,$$

so erhält man eine Curve auf der Fläche, deren Abbildung die Gleichung hat:

$$(3)\qquad \alpha_1 f_1 + \alpha_2 f_2 + \alpha_3 f_3 + \alpha_4 f_4 = 0.$$

Indem man den Coefficienten α alle möglichen Werthe beilegt, erhält man aus (3) alle möglichen Abbildungen ebener Schnitte, ein System von Curven n^{ter} Ordnung mit drei linear auftretenden Parametern.

Auf dieses System kann man zunächst einige ähnliche Betrachtungen anwenden, wie Herr Cremona (Mem. dell' Acc. di Bologna ser. 2. tom. 5) dieselben bezüglich eindeutig sich entsprechender ebener Systeme gemacht hat. Die Curven (3) werden im Allgemeinen gewisse Punkte sämmtlich gemein haben; und zwar seien dies a_1 einfache, a_2 doppelte, a_3 dreifache u. s. w. Punkte, welche allen Curven des Systems, oder, was dasselbe ist, den Curven

$$f_1 = 0 \quad , \quad f_2 = 0 \quad , \quad f_3 = 0 \quad , \quad f_4 = 0$$

gemeinsam sind. Und zwar nehme ich zunächst an, dass unter diesen Punkten keine solchen Systeme vorkommen, welche als vollständigen Schnittpunktsystemen angehörig besondern Bedingungen der Lage unterworfen sind.

Zwei der Curven (3) schneiden sich ausser in diesen festen Schnittpunkten noch in

$$n^2 - a_1 - 4a_2 - 9a_3 \ldots$$

beweglichen Schnittpunkten. Diese Zahl muss gleich der Anzahl der Punkte sein, in welchen der Schnitt der entsprechenden beiden Ebenen, also eine Gerade, die Oberfläche trifft, also gleich N. Und so hat man die Gleichung:

$$(4) \qquad N = n^2 - a_1 - 4a_2 - 9a_3 \ldots .$$

Eine zweite Gleichung gewinnt man, indem man das Geschlecht p_1 einer Curve (3) und der entsprechenden ebenen Schnittcurve der Oberfläche einander gleich setzt. Ist d der Grad der Doppelcurve der Oberfläche, gleichviel ob diese Curve eine einzige oder eine aus mehreren bestehende ist, und ist r der Grad der Rückkehrcurve, oder die Summe der Grade von solchen, so hat die ebene Schnittcurve d Doppelpunkte und r Rückkehrpunkte, besondere Lagen abgerechnet, wo sie deren mehr hat. Für eine allgemeine Lage der schneidenden Ebene ist also

$$(5) \qquad p_1 = \frac{N-1 \,.\, N-2}{2} - d - r.$$

Die in der Abbildungsebene liegende entsprechende Curve (3) ist von der Ordnung n, und hat a_2 Doppelpunkte, a_3 dreifache Punkte u. s. w. Besondere Werthe der Parameter abgerechnet, hat man also

$$(6) \qquad p_1 = \frac{n-1 \,.\, n-2}{2} - a_2 - 3a_3 - 6a_4 \ldots .$$

Endlich erhält man eine Ungleichung, indem man von der Forderung ausgeht, dass die Functionen f_i sich nicht aus dreien derselben linear zusammensetzen lassen, wie es sein muss, damit wirklich die Gleichungen (1) eine Fläche darstellen. Die in der Annahme der festen Punkte, Doppelpunkte u. s. w. der Abbildung liegenden Bestimmungen müssen daher wenigstens um 4 kleiner sein, als die Anzahl von willkürlichen Constanten, welche eine allgemeine Curve n^{ter} Ordnung mit sich führt. Es muss also sein:

(7) $$4 \overline{\gtrless} \frac{n+1 \cdot n+2}{2} - a_1 - 3a_2 - 6a_3 \ldots .$$

Aus der Combination der Gleichungen (4) (6) (7) ergiebt sich nun sofort die einfache Ungleichung:

(8) $$p_1 \overline{\gtrless} N - 2 ,$$

oder, wenn man aus (5) den Werth von p einführt:

(9) $$d + r \overline{\gtrless} \frac{N-2 \cdot N-3}{2} .$$

Hierdurch ist im Allgemeinen eine untere Grenze gegeben, welche die Ordnung der Doppelcurve einer Fläche erreichen muss, damit eine eindeutige Abbildung auf der Ebene denkbar sei. Aber allerdings kann es unter Umständen eintreten, dass gewisse Flächen mit einer Doppelcurve niederen Grades abbildbar werden, indem nämlich der oben gemachten Annahme entgegen, Fundamentalpunkte der Abbildung Schnittpunktsystemen angehören. In einem solchen Falle verringert sich die Anzahl von Bestimmungen, welche die gegebenen Fundamentalpunkte für die Curvenschaar (3) mit sich führen, und es wird, wenn etwa α diese Verringerung angiebt, die Gleichung (7) zu ersetzen sein durch

$$4 \overline{\gtrless} \frac{n+1 \cdot n+2}{2} - a_1 - 3a_2 - 6a_3 \ldots + \alpha ,$$

wodurch zugleich (8) (9) übergehen in:

$$p_1 \overline{\gtrless} N - 2 + \alpha \quad , \quad d + r \overline{\gtrless} \frac{N-2 \cdot N-3}{2} - \alpha .$$

So führt bei den Flächen 4^{ten} Grades die Gleichung (9) auf die Nothwendigkeit wenigstens einer geraden Doppellinie, bei den Flächen 5^{ten} Grades auf die Nothwendigkeit wenigstens einer Doppelcurve 3^{ter} Ordnung. Aber bei den Flächen 5^{ten} Grades tritt der besondere Umstand ein, dass schon eine Fläche 5^{ter} Ordnung mit einer Doppelcurve 2^{ten} Grades abbildbar wird, wenn diese in zwei sich nicht schneidende Gerade zerfällt.

§. 2.

Geometrische Abbildung der hier zu behandelnden Flächen auf einer Ebene.

Ob eine gegebene Flächenart sich eindeutig auf einer Ebene abbilden lässt, ist häufig einfach zu entscheiden, indem man eine Abbildung wirklich herstellt, unbekümmert darum, ob bei derselben die Functionen f_i möglichst niedern Grades sind oder nicht. So braucht man bei der Abbildung der Flächen 3^{ter} Ordnung nur zwei sich nicht schneidende Geraden der Fläche zu betrachten. Lässt man eine dritte Gerade sich so bewegen, dass sie beide stets trifft, so bestimmt sie in jeder Lage einen Punkt der Fläche, und einen entsprechenden Punkt einer beliebig gewählten Ebene. Und zwar ist durch einen dieser letztern Punkte die jedesmalige Lage der Geraden vollständig bestimmt, so dass im Allgemeinen zu jedem Punkte der Fläche nur ein Punkt der Ebene und umgekehrt gehört, also eine eindeutige Abbildung eintritt. Ebenso kann man bei den Flächen 4^{ter} Ordnung mit einer zusammenhängenden Doppelcurve zweiten Grades die Möglichkeit der Abbildung sofort einsehen. Nehmen wir irgend eine der 16 Geraden, g, welche, wie ich an einem andern Orte gezeigt habe, den Doppelkegelschnitt treffen, und lassen wir eine Gerade g' sich so bewegen, dass sie stets sowohl jene Gerade g als diesen Kegelschnitt trifft. Die bewegte Gerade g' schneidet dann die Oberfläche nur noch in einem Punkte (A), und schneidet eine beliebig gegebene Ebene in einem Punkte B. Durch das gegenseitige Entsprechen der Punktpaare A, B ist die Fläche auf der Ebene eindeutig abgebildet. Denn ist einer dieser Punkte gegeben, so legt man durch ihn und g eine Ebene; diese schneidet den Doppelkegelschnitt nur noch einmal, und die Verbindungslinie des Schnittpunkts mit dem gegebenen Punkte giebt eindeutig die Grade g', also auch eindeutig den andern der beiden Punkte A, B.

Die gleiche Construction kann man auf Flächen vierter Ordnung mit einer Doppelgeraden anwenden, wenn nur zuvor bewiesen wird, wie unten geschehen soll, dass eine gewisse Zahl von Kegelschnitten existirt, welche ganz in der Fläche liegen, und einen Punkt mit der Doppelgeraden gemein haben.

Was die Flächen fünfter Ordnung anbetrifft, so erkennt man bei denjenigen, deren Doppelcurve aus zwei sich nicht schneidenden Geraden besteht, sofort die Ausführbarkeit einer ähnlichen Construction. Denn man braucht nur eine bewegliche Gerade g sich so bewegen lassen, dass sie die beiden Doppelgeraden stets trifft, so schneidet g in jeder Lage die Fläche noch einmal, in A, und eine gegebene Ebene in einem entsprechenden Punkte B. Diese Punkte A und B entsprechen sich eindeutig, weil durch jeden derselben g eindeutig bestimmt ist, und die Fläche ist also auf der Ebene eindeutig abgebildet.

Wenn zweitens die Fläche fünfter Ordnung eine Doppelcurve dritten Grades hat, so kann diese nur eine Raumcurve sein, weil sonst die Ebene derselben die Fläche in einer doppelten Curve dritter Ordnung, also in einer Curve 6^{ter} Ordnung schneiden würde, was unmöglich ist. Die Raumcurve kann in eine Gerade und in einen Kegelschnitt zerfallen, welche sich treffen, oder in drei Gerade, deren zwei die dritte schneiden. In allen diesen Fällen kann man als Projectionsstrahlen der Abbildung die Sehnen der Raumcurve betrachten. Jede solche Sehne schneidet die Fläche noch in einem Punkte A, eine gegebene Ebene in einem entsprechenden Punkte B. Das Entsprechen aber ist eindeutig; denn durch jeden Punkt des Raumes geht nur eine Sehne der Raumcurve, daher ist, wenn A oder B gegeben vorliegt, g und damit der andere der beiden Punkte A, B eindeutig bestimmt. — Dass die Doppelcurve dritten Grades nicht aus Gerade und Kegelschnitt, welche sich nicht schneiden, oder aus drei sich nicht schneidenden Geraden bestehen kann, ersieht man leicht. Im ersten Falle schneiden alle Geraden, die in der Ebene des Kegelschnitts liegen und zugleich die Doppelgerade treffen, die Fläche in 6 Punkten; daher muss die Fläche in eine Fläche 4ter Ordnung und jene Ebene zerfallen. In dem andern Falle schneiden alle die 3 Geraden treffenden Geraden die Fläche in 6 Punkten und liegen also ganz in ihr; die Fläche zerfällt also in ein Hyperboloid und in eine Fläche dritter Ordnung. Ein Zerfallen der Doppelcurve kann demnach nur so eintreten, dass das Resultat ein specieller Fall der Raumcurve 3ter Ordnung bleibt.

Ich wende mich nun zur Untersuchung der zuletzt genannten drei Flächenarten, und werde zeigen, wie man sie auf die einfachste Art, d. h. mittelst möglichst niedriger Functionen f auf einer Ebene abbildet.

§. 3.

Flächen 4ter Ordnung mit einer Doppelgeraden. Gerade und Kegelschnitte auf denselben.

Bezeichnet man durch $A = 0$, $B = 0$ zwei Ebenen, welche sich in der Doppelgeraden einer mit einer solchen begabten Fläche vierter Ordnung durchschneiden, so nimmt die Gleichung der Fläche die Form an:

$$A^2 w - 2BAv + B^2 u = 0, \tag{10}$$

wo u, v, w Ausdrücke zweiter Ordnung sind. Diese Gleichungsform lehrt nach Hrn. Kummer (Monatsber. der Berl. Acad. Sitzung vom 16ten Juli 1863) sofort, dass die Fläche eine Schaar von Kegelschnitten enthält, deren Ebenen sämmtlich durch die Doppelgerade gehen. In der That, wenn man die Gleichung des Ebenenbüschels $A + \lambda B = 0$ mit der Gleichung (10) combinirt, erhält man die Kegelschnittschaar als Durchschnitt des Büschels mit einer Schaar von Flächen zweiter Ordnung, indem für jeden Kegelschnitt und ein entsprechendes λ die Gleichungen zusammenbestehen:

$$A + \lambda B = 0 \quad , \quad u + 2\lambda v + \lambda^2 w = 0. \tag{11}$$

Aber die Fläche enthält noch gewisse andere Kegelschnitte, welche aus dreipunktig berührenden Ebenen entspringen, und auf welche man kommt, indem man zunächst gerade Linien auf der Fläche aufsucht.

Unter den Kegelschnitten (11) sind nämlich gewisse, welche in Linienpaare zerfallen. Ein solches Zerfallen tritt immer ein, wenn die Ebene $A + \lambda B = 0$ die entsprechende Fläche zweiter Ordnung berührt. Bezeichnet man durch A_i, B_i, u_{ik}, v_{ik}, w_{ik} die Coefficienten in (11), so ist die Bedingung dafür die folgende:

$$\begin{vmatrix} u_{11}+2\lambda v_{11}+\lambda^2 w_{11} & u_{21}+2\lambda v_{21}+\lambda^2 w_{21} & u_{31}+2\lambda v_{31}+\lambda^2 w_{31} & u_{41}+2\lambda v_{41}+\lambda^2 w_{41} & A_1+\lambda B_1 \\ u_{12}+2\lambda v_{12}+\lambda^2 w_{12} & u_{22}+2\lambda v_{22}+\lambda^2 w_{22} & u_{32}+2\lambda v_{32}+\lambda^2 w_{32} & u_{42}+2\lambda v_{42}+\lambda^2 w_{42} & A_2+\lambda B_2 \\ u_{13}+2\lambda v_{13}+\lambda^2 w_{13} & u_{23}+2\lambda v_{23}+\lambda^2 w_{23} & u_{33}+2\lambda v_{33}+\lambda^2 w_{33} & u_{43}+2\lambda v_{43}+\lambda^2 w_{43} & A_3+\lambda B_3 \\ u_{14}+2\lambda v_{14}+\lambda^2 w_{14} & u_{24}+2\lambda v_{24}+\lambda^2 w_{24} & u_{34}+2\lambda v_{34}+\lambda^2 w_{34} & u_{44}+2\lambda v_{44}+\lambda^2 w_{44} & A_4+\lambda B_4 \\ A_1+\lambda B_1 & A_2+\lambda B_2 & A_3+\lambda B_3 & A_4+\lambda B_4 & 0 \end{vmatrix} = 0$$

Dies ist eine Gleichung 8ten Grades für λ; es giebt also auf der Fläche 8 Paare von je zwei sich schneidenden Geraden, welche alle durch die Doppelgerade gehen. Es wird sich weiterhin zeigen, dass diese 16 Geraden die einzigen sind, welche auf der Fläche existiren.

Nehmen wir nun aus 7 der 8 Paare je eine Gerade, und suchen einen Kegelschnitt, welcher diese 7 Geraden und die Doppellinie selbst schneidet. Ich verdanke Hrn. Dr. Lüroth die folgende Ableitung der Modificationen, welche die für beliebig liegende 8 Gerade von ihm in Borchardt's Journal Bd. 68, p. 185 angestellten Betrachtungen bei diesem sehr speciellen Falle, wo 7 Gerade die 8te treffen, erfahren.

Die a. a. O. gemachten Abzählungen lehren, dass die Classe einer Fläche, deren Tangentenebenen sechs gegebene Gerade in Punkten eines Kegelschnittes treffen, nicht grösser als 8, vielmehr im Allgemeinen gleich 8 ist. Nehmen wir als solche 6 Gerade die von den 7 andern (b, c, d, e, f, g, h) geschnittene Gerade (a) und fünf der andern (b, c, d, e, f). In diesem Falle schneidet offenbar jede durch den Schnitt von a mit b, c, d, e oder f gelegte Ebene die 6 Geraden in Punkten eines Kegelschnittes, nämlich in nur 5 Punkten. Daher muss die Fläche 8ter Classe sich in die Gleichungen der fünf Schnittpunkte von a mit b, c, d, e, f auflösen und in eine Fläche 3ter Classe. Andererseits kann man diese Fläche 3ter Classe leicht direct nachweisen. Denn zunächst bestimmen 6 Gerade der gegebenen Art nach dem Principe der Dualität eine Fläche 3ter Classe, welche dieselben enthält, genau analog, wie sie eine sie enthaltende Fläche 3ter Ordnung bestimmen (vgl. Salmon, Geometry of three dimensions, 2. edition, Art. 498). Herr Lüroth aber hat folgenden Satz bemerkt:

Alle Tangentialebenen einer Fläche dritter Classe schneiden eine Gerade der Fläche und fünf solche Gerade, welche jene aber nicht einander schneiden, in 6 Punkten eines Kegelschnittes;

ein Satz, welchem dualistisch folgender entspricht:

Jeder Punkt einer Fläche 3ter Ordnung ist Spitze eines

Kegels 2^{ter} Ordnung, welcher eine gegebene ihrer 27 Geraden und irgend 5 andere ihrer Geraden berührt, welche die erste aber nicht einander treffen.

Den letzteren Satz, welcher den ersten unmittelbar nach sich zieht, beweist man leicht an einer Abbildung der Fläche 3^{ter} Ordnung, welche unter allen die directeste ist, und folgendermassen entsteht. Wählen wir auf der Fläche eine Gerade a, und einen Kegelschnitt C_2, welcher sie nur einmal, und ebenso je einmal jede der fünf Geraden b, c, d, e, f, die jene schneiden, trifft, was immer möglich ist. Um einen Punkt χ der Fläche abzubilden, zieht man durch ihn die einzige Gerade, welche zugleich a und C_2 trifft. Durch diese und einen beliebig aber fest auf C_2 gewählten Punkt P legt man sodann eine Ebene; sie schneidet die Bildebene in einer Geraden ξ, welche die Abbildung von χ ist. Bei dieser Abbildung entspricht also jedem Punkte χ der Fläche eine Gerade der Bildebene, und die ebenen Schnitte bilden sich als Curven 3^{ter} Classe mit 6 festen Tangenten ab, dualistisch entsprechend der Abbildung durch Curven 3^{ter} Ordnung mit 6 festen Punkten. Von den 6 festen Tangenten sind fünf die Bilder von b, c, d, e, f; a bildet sich als Kegelschnitt ab, der diese berührt.

Der Punkt P kann durch andere Wahl von C_2 in jeden Punkt der Fläche verlegt werden. Daher genügt es, zu zeigen, dass von ihm aus ein Kegel 2^{ter} Ordnung gelegt werden kann, welcher a, b, c, d, e, f berührt, oder die durch P und diese Geraden gelegten Ebenen zu Tangentenebenen hat. Es ist leicht zu sehen, dass der Kegel, welcher durch das Bild von a geht, diese Eigenschaft hat. Derselbe wird beschrieben bei Abbildung der verschiedenen Punkte von a; man legt in irgend einem Punkte P' von a die Tangentenebene der Fläche; diese schneidet C_2 in einem Punkte P'', und die Ebene $PP'P''$ schneidet die Bildebene in einer Tangente des Bildes von a, also in einer Tangentenebene eines Kegels zweiter Ordnung, da dieses Bild ein Kegelschnitt ist. Aber hierbei benutzt man alle durch a gehenden Ebenen, also auch die Ebene von P nach a, und diese ist also Tangentenebene jenes Kegels. Und ebenso benutzt man alle von a durch b, c, d, e, f gelegte Ebenen, welche die Bilder von b, c, d, e, f liefern, indem man durch P und diese Geraden Ebenen legt, welche daher, wie die Abbildung lehrt, den Kegel ebenfalls berühren müssen; w. z. b. w.

Der geometrische Ort der Ebenen, welche a, b, c, d, e, f in Punkten von Kegelschnitten treffen, ohne durch einen ihrer Schnittpunkte zu gehen, ist also eine Fläche 3^{ter} Classe, welche diese 6 Geraden enthält.

Construiren wir nun ebenso die Flächen 3^{ter} Classe, welche a, b, c, d, e, g und a, b, c, d, e, h enthalten. Die gemeinsamen Tangentenebenen aller drei Flächen sind dann die gesuchten Ebenen, welche die 8 Geraden in Punkten eines Kegelschnittes treffen. Aber diese drei Flächen haben 6 tangirende Ebenenbüschel gemeinsam, die nämlich, welche a, b, c, d, e und die zweite b, c, d, e gleichzeitig treffende Gerade a' zu Axen haben. Die Abzählung der Erniedrigung, welche die Anzahl der gemeinsamen Tangentenebenen hierdurch erfährt, berechnet man wie die Verminderung der Anzahl der Schnittpunkte, welche drei Flächen 3^{ter} Ordnung gemein haben, welche sich in einer Curve 6^{ter} Ordnung sämmtlich treffen; und zwar einer Curve 6^{ter} Ordnung, welche nicht auf einer Fläche 2^{ter} Ordnung liegt, und deren Ergänzungscurve also eine Raumcurve 3^{ter} Ordnung ist. Indem man nach Salmon's Raumgeometrie, Fiedler's Uebersetzung, p. 123, verfährt, erhält man als übrig bleibende Zahl von Tangentenebenen 1, und also den Satz:

Es giebt nur einen Kegelschnitt, welcher eine Gerade a, und sieben andere Gerade b, c ... h gleichzeitig trifft, welche sämmtlich die erste treffen, einander aber nicht.

Kehren wir nun zu der Fläche 4^{ter} Ordnung zurück. Die obige Entwicklung giebt einen Kegelschnitt, welcher die Doppelgerade und je eine Gerade aus 7 der 8 Paare trifft. Dieser Kegelschnitt schneidet also die Fläche 4^{ter} Ordnung, da der Schnittpunkt mit der Doppelgeraden doppelt zu nehmen ist, in 9 Punkten, und liegt daher ganz in der Fläche. Die Ebene des Kegelschnittes aber schneidet die Fläche noch in einem zweiten Kegelschnitt, welcher durch denselben Punkt der Doppelgeraden hindurchgeht. Betrachten wir nun den Schnitt der Ebene dieses Kegelschnittpaares mit der Ebene eines der Geradenpaare. Die Schnittlinie kann die Fläche ausser in der Doppelgeraden nur noch in zwei Punkten schneiden; sie schneidet aber jeden der Kegelschnitte noch einmal, und jede Gerade des Paares einmal. Daher müssen diese letzteren Punktpaare zusammenfallen, und man sieht also, dass jeder dieser Kegelschnitte auch noch eine Gerade des 8^{ten} Paares trifft. Aber während aus 7 Geradenpaaren je eine Gerade beliebig gewählt werden kann, ist sie bei dem 8^{ten} dadurch völlig bestimmt.

Ich fasse diese Resultate in folgenden Satz zusammen:

Es giebt 64 dreifach berührende Ebenen, welche die Fläche in je 2 (also im Ganzen in $2^7 = 128$) Kegelschnitten treffen, wobei denn immer ein Schnittpunkt eines Kegelschnittpaares auf der Doppellinie liegt. Jeder Kegelschnitt trifft je eine Gerade jedes Geradenpaares, der ergänzende immer die andern Geraden; und zwar giebt es immer einen Kegelschnitt, der je eine beliebig gewählte

Gerade aus 7 der Paare trifft, während die Gerade des 8^{ten} Paares dadurch bestimmt ist.

Die unmittelbare Aufsuchung dieser 64 Ebenen würde auf eine Gleichung 64^{ten} Grades führen. Man sieht, wie die Auflösung derselben auf die Auflösung von einer Gleichung 8^{ten} Grades (um die 8 Paare zu finden) und von 7 Gleichungen 2^{ten} Grades (um 7 Paare zu zerlegen) zurückkommt.

§. 4.

Niedrigste Abbildung dieser Flächen und geometrische Deutung derselben.

Die Auffindung der aus den dreifach berührenden Ebenen entspringenden Kegelschnitte führt sofort auf die Abbildung, und zwar auf die einfachste Abbildung der Fläche auf einer Ebene. Die Functionen f_i müssen in diesem Falle wenigstens von der 4^{ten} Ordnung sein; denn Flächen 4^{ter} Ordnung, für welche die f_i von der 3^{ten} Ordnung sind, haben eine Doppelcurve 2^{ten} Grades. Es wird sich im Folgenden zeigen, dass in der That eine Abbildung existirt, bei welcher die f_i vom 4^{ten} Grade sind.

Zu diesem Zwecke bezeichne ich durch $C=0$ eine der dreipunktig berührenden Ebenen, welche oben gefunden wurden. Da $C=0$ die Fläche in zwei Kegelschnitten schneidet, so muss mit Hilfe von $C=0$ sich die Gleichung der Fläche in zwei Factoren 2^{ten} Grades zerfällen lassen, welche aber beide nach dem Obigen für $A=0$, $B=0$, $C=0$ verschwinden müssen, und welche also nach Absonderung der mit C behafteten Terme mit $A=0$, $B=0$ verschwinden. Daher wird das Produkt dieser Factoren homogen vom 2^{ten} Grade in A, B gemacht werden können; und da wegen der Doppelgeraden die ganze Flächengleichung homogen vom 2^{ten} Grade in A, B gemacht werden kann, so muss der Rest der Flächengleichung, welcher den Factor C hat, in einem andern Factor ebenfalls homogen vom 2^{ten} Grade in A, B sein. Die Gleichung der Fläche nimmt also folgende Form an:

$$(12)\qquad (AB'-BA')(AB''-BA'')-C(PA^2-2NAB+MB^2)=0,$$

wo A', B', A'', B'', M, N, P lineare Ausdrücke sind.

Diese Gleichungsform führt ohne Weiteres zu den gesuchten Abbildungen; denn man kann die Gleichung (12) in die Gleichungen auflösen:

$$(13)\qquad \begin{aligned} &\xi_1 A+\xi_2 B=0\,,\\ &\xi_1 A'+\xi_2 B'+\xi_3 C=0\,,\\ &\xi_3(A''\xi_1+B''\xi_2)+(M\xi_1^2+2\xi_1\xi_2 N+\xi_2^2 P)=0\,, \end{aligned}$$

welche für die x linear sind, und in welchen die Verhältnisse der ξ die Stelle von zwei Parametern vertreten. Indem man die Verhältnisse der x aus diesen Gleichungen berechnet, findet man die x proportional mit Functionen 4^{ter} Ordnung der ξ, wie es sein sollte.

Solcher Abbildungen giebt es 128, deren je zwei conjugirt sind. Denn die Form (12) lässt sich auf 64 Arten herstellen; aus der Form (12) aber kann man ausser den Gleichungen (13) noch andere, ganz ähnliche, ableiten, in denen nur A', B' mit A'', B'' vertauscht erscheinen, oder, was dasselbe ist, in welcher die beiden in der dreifach berührenden Ebene enthaltenen Kegelschnitte gerade umgekehrt benutzt sind, wie in (13). Sehen wir nun, wie sich die in (13) enthaltene Abbildung gestaltet.

Die Gleichungen (13) hängen genau mit der Abbildung zusammen, von welcher in §. 2 gesprochen wurde. Denn die ersten beiden Gleichungen (13) stellen für constante ξ, also für die Abbildung eines bestimmten Punktes der Fläche, zusammen eine Gerade dar, welche durch diesen Punkt geht. Aber diese Gerade geht ausserdem erstens durch die Doppelgerade, da für $A = 0$, $B = 0$ die eine jener Gleichungen identisch erfüllt ist; zweitens durch den Kegelschnitt, dessen Gleichungen sind:

(14) $$C = 0 \quad , \quad AB' - BA' = 0 \, ,$$

da für $C = 0$ jene Gleichungen nach Elimination von ξ_1, ξ_2 die zweite dieser Gleichungen liefern. Die ersten beiden Gleichungen (13) führen also in der That auf den oben benutzten Projectionsstrahl, und die dritte Gleichung dient nur dazu, die Lage des Punktes der Fläche auf diesem Projectionsstrahle zu fixiren. Aber die Grössen ξ sind keineswegs die Coordinaten des Punktes, welchen der Projectionsstrahl auf einer gegebenen Ebene trifft. Vielmehr kann man diese Grössen auf eine ganz andere Art unmittelbar geometrisch deuten.

Die zweite Gleichung (13) kann man, wenn in derselben ξ_1, ξ_2, ξ_3 als Parameter betrachtet werden, als Gleichung eines Ebenenbündels ansehen, welches den Punkt $A' = 0$, $B' = 0$, $C = 0$ zum Scheitel hat. Nach den Gleichungen (14) ist dieses ein Punkt des Kegelschnittes (14) selbst, also des einen Kegelschnittes in der doppelt berührenden Ebene. Und zwar ist es ein beliebiger Punkt P dieses Kegelschnittes. Denn da die Functionen A', B' nur aus der Gleichung der Fläche (12) bestimmt werden, so sind sie keineswegs absolut bestimmt, sondern man kann sie noch dadurch modificiren, dass man an Stelle von A', B' die Ausdrücke $A' + mA$, $B' + mB$ setzt, in denen m eine Constante bedeutet. Benutzt man aber diese Ausdrücke an Stelle von A', B', so wird der Scheitel des Bündels durch die Gleichungen dargestellt:

$$C = 0 \quad , \quad A' + mA = 0 \quad , \quad B' + mB = 0 \, ,$$

welche einen beliebigen Punkt des Kegelschnittes bezeichnen.

Nehmen wir also an, man hätte A', B' in bestimmter Weise gewählt, und den Scheitel des Bündels demnach vollständig gegeben. Da nun jedem Punkte der Fläche ein Projectionsstrahl entspricht, und durch diesen wiederum nur eine Ebene (im Allgemeinen) des Bündels geht, so kann man als Bild des Punktes die Gerade ansehen, in welcher die Ebene des Bündels eine gegebene feste Ebene schneidet. Auf der festen Ebene entsteht dann das Bild der Fläche, wobei allerdings jedem Punkte der Fläche eine Gerade entspricht, und welches man dualistisch übertragen muss, um zu der Abbildung zu gelangen, in welcher jedem Punkte ein Punkt entspricht.

Ich behaupte nun, dass ξ_1, ξ_2, ξ_3 die Coordinaten der dem Punkte x entsprechenden Geraden in dieser beliebig gegebenen festen Ebene sind. Hierbei lege ich als Definition von Coordinaten eines Punktes und einer Geraden im Dreieckcoordinatensystem folgende Definitionen zu Grunde, welche ich in meinen Vorlesungen zu geben pflege, und welche, von den üblichen leicht abweichend, sich in vielen Beziehungen empfehlen:

> Coordinaten eines Punktes in der Ebene sind drei Zahlen, welche sich zu einander verhalten, wie die Abstände des Punktes von den Seiten des Coordinatendreiecks, multiplicirt mit drei beliebig gewählten Constanten;
>
> Coordinaten einer Geraden in der Ebene sind drei Zahlen, welche sich zu einander verhalten, wie die Abstände der Geraden von den Ecken des Dreiecks, multiplicirt mit drei beliebig gewählten Constanten.

Die Constanten, welche in der einen Definition vorkommen, sind von der in der andern auftretenden abhängig; man bestimmt sie so, dass, wenn x_1, x_2, x_3 die Coordinaten eines Punktes, u_1, u_2, u_3 die einer Geraden sind, die Bedingung, dass der Punkt auf der Linie liege, durch die Gleichung

$$u_1 x_1 + u_2 x_2 + u_3 x_3 = 0$$

ausgedrückt wird. Aehnliche Definitionen nehme ich in Bezug auf das Coordinatentetraeder im Raume an.

Wenn man nun in dem Ausdrucke $\frac{\xi_1 A' + \xi_2 B' + \xi_3 C}{N}$, welcher, gleich Null gesetzt, eine beliebige Ebene des Bündels repräsentirt, und in welchem $N = 0$ die Gleichung der unendlich fernen Ebene bedeutet, die Coordinaten irgend welcher Punkte im Raume einsetzt, so erhält man Zahlen, welche sich zu einander verhalten, wie die Abstände dieser Punkte von der Ebene des Bündels. Als solche Punkte wähle ich nun die Ecken des Dreiecks, in welchem die Ebenen $A' = 0$, $B' = 0$, $C = 0$, die Grundebenen des Bündels, die beliebig für die

Abbildung gegebene Ebene schneiden. Für jede dieser Ecken verschwinden zwei der Ausdrücke A', B', C, während der Quotient des dritten durch N einen constanten Werth annimmt. Man erhält daher aus dem obigen Ausdrucke der Reihe nach die ξ, multiplicirt mit Constanten. Die Grössen ξ verhalten sich also wie die Abstände der Ecken des durch A', B', C auf der Abbildungsebene bestimmten Dreiecks von der beweglichen Ebene des Bündels, deren Parameter die ξ sind. Und diese Abstände verhalten sich offenbar wieder, wie die Abstände der Dreiecksecken von der Geraden, in welcher die Abbildungsebene von der Ebene des Bündels geschnitten wird. Die Grössen ξ sind also die Coordinaten dieser Schnittlinie in Bezug auf das durch die Grundebenen des Büschels gegebene Dreieck.

§. 5.

Eigenschaften der entwickelten Abbildung.

Sehen wir jetzt, welchen Charakter die Abbildung hat. Da die x Functionen 4^{ter} Ordnung der ξ proportional werden, so führt die Gleichung einer Ebene auf eine Gleichung 4^{ter} Ordnung in den ξ, oder jeder ebene Schnitt wird durch eine Curve 4^{ter} Classe abgebildet.

Das System von Curven 4^{ter} Classe, welches so das System ebener Schnittcurven abbildet, hat 8 feste einfache, und eine feste Doppeltangente, und ist dadurch vollständig definirt. Das letztere ist sofort klar, wenn man erwägt, dass die allgemeine Curve 4^{ter} Classe 15 willkürliche Constanten homogen enthält. Die 8 einfachen und die Doppeltangente führen 11 lineare Bedingungen für diese Constanten mit sich; es bleiben also nur 4 übrig, d. h. so viel, als das System nothwendig enthalten muss.

Eine feste einfache Tangente erhält man jedesmal für den Durchschnittspunkt des abzubildenden Schnittes mit einer der 8 Geraden, welche den Kegelschnitt (14) treffen. Denn da eine solche Gerade sowohl die Doppelgerade als den Kegelschnitt trifft, so wird sie Projectionsstrahl für jeden ihrer Punkte; nehmen wir von dem Scheitel des Ebenenbündels nur an, dass er nicht auf einer dieser Geraden liege, so giebt also unsere Construction, auf jeden Punkt einer solchen Geraden angewandt, in der Abbildung immer dasselbe, nämlich die Schnittlinie der Abbildungsebene mit der durch die Gerade gehenden Ebene des Bündels. So entstehen also 8 Gerade in der Abbildung, welche nicht Punkten, sondern wieder Geraden entsprechen, und welche Tangenten an die Abbildung jedes ebenen Schnittes sind, weil jeder ebene Schnitt einen Punkt mit jeder der entsprechenden Geraden im Raume gemein hat.

Dagegen wird man auf eine feste Doppeltangente geführt durch Betrachtung des Kegelschnittes, welcher sich mit dem Kegelschnitt (14) zu einem ebenen Schnitte ergänzt. Wenden wir unsere Construction auf einen Punkt dieses durch die Gleichungen

$$(15) \qquad C = 0 \quad , \quad AB'' - BA'' = 0$$

dargestellten Kegelschnitts an, so sehen wir, dass der Projectionsstrahl ganz in die Ebene $C = 0$ fallen muss. Er ist also die Verbindungslinie eines Punktes in dem Kegelschnitte (15) mit demjenigen Punkte, in welchem die Doppelgerade von der Ebene $C = 0$ des Kegelschnittes getroffen wird. Und da der Scheitel des Ebenenbündels in eben dieser Ebene liegt, so wird es immer die Ebene $C = 0$ selbst sein, welche als projicirende Ebene auftritt, und jedem Punkte des Kegelschnittes (15) entspricht also dieselbe Gerade, der Durchschnitt von $C = 0$ mit der Bildebene. Aber jeder ebene Schnitt der Fläche hat mit dem Kegelschnitt (15) zwei Punkte gemeinsam. Daher ist jene feste Gerade zweimal Tangente der Bildcurve des ebenen Schnittes, und alle solche Curven haben sie zur festen Doppeltangente.

Obgleich diese Art der Abbildung auf solche Weise geometrisch entstanden ist, so werde ich doch im Folgenden der Bequemlichkeit wegen nicht sie, sondern ihre dualistische Uebertragung gebrauchen. In dieser also bildet sich jeder ebene Schnitt als Curve 4^{ter} Ordnung ab; und zwar bilden alle diese Abbildungscurven das vollständige System von Curven 4^{ter} Ordnung, welches einen festen Doppelpunkt und 8 feste einfache Punkte gemein hat.

Man kann darauf aufmerksam machen, dass die 9 Punkte, welche hier als Fundamentalpunkte der Abbildung erscheinen, nicht die Schnittpunkte zweier Curven 3^{ter} Ordnung sein können. In der That, wäre dies der Fall, und wären $u = 0$, $v = 0$ zwei solche Curven 3^{ter} Ordnung, so müsste die Abbildung jedes ebenen Schnittes die Form haben

$$Mu + Nv = 0,$$

wo M, N lineare Ausdrücke wären. Da nun in einem der Schnittpunkte von $u = 0$, $v = 0$ diese Curven einen festen Doppelpunkt haben sollen, so müssten M, N für diesen Punkt ebenfalls verschwinden, oder, wenn $P = 0$, $Q = 0$ zwei durch diesen Punkt gehende Gerade wären, müsste die allgemeine Form der Gleichung für die Abbildung eines ebenen Schnittes diese sein:

$$(\alpha_1 P + \alpha_2 Q)\, u + (\alpha_3 P + \alpha_4 Q)\, v = 0\,.$$

Man könnte also setzen, um die Coordinaten eines Punktes der Fläche auszudrücken:

$$\varrho x_1 = Pu \quad , \quad \varrho x_2 = Qu \quad , \quad \varrho x_3 = Pv \quad , \quad \varrho x_4 = Qv\,,$$

und man erhielte $x_1 x_4 - x_2 x_3 = 0$, was die Gleichung einer Fläche 2^{ter} Ordnung wäre.

Ausserdem werde ich im Folgenden diejenigen Besonderheiten ausschliessen, welche eintreten, wenn von den 9 Fundamentalpunkten der Abbildung drei auf einer Geraden oder 6 auf einem Kegelschnitte liegen.

Im Vorbeigehen bemerke ich, dass die hier entwickelte Abbildung ganz ebenso bei den Flächen 3^{ter} Ordnung eintritt, wo nur an Stelle der Doppelgeraden eine einfache zu setzen ist (vgl. p. 259).

§. 6.

Allgemeines über Flächen, welche auf einer Ebene abbildbar sind. Vollständige Durchschnitte.

Gehen wir jetzt von der Abbildung aus, um die auf der Fläche liegenden krummen Linien zu untersuchen. Ich will, ehe ich zu den Anwendungen der hier in Rede stehenden Abbildung übergehe, die nöthigsten allgemeinen Principien entwickeln. Es seien

$$(16) \qquad \varrho x_1 = f_1 \;, \quad \varrho x_2 = f_2 \;, \quad \varrho x_3 = f_3 \;, \quad \varrho x_4 = f_4 ,$$

wie in (1) die Gleichungen einer Oberfläche, die f seien vom Grade n; die Curven $f_i = 0$, also auch das System der Abbildungen ebener Schnitte

$$(17) \qquad \alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \alpha_3 x_3 + \alpha_4 x_4 = 0$$

mögen a_1 einfache, a_2 doppelte u. s. w. Punkte gemein haben. Zunächst hat man dann den Satz:

Ein $r$facher gemeinsamer Schnittpunkt der Curven (17) (Fundamentalpunkt der Abbildung) stellt eine auf der Fläche liegende Curve r^{ter} Ordnung dar, welche die Eigenschaft hat, ihre Coordinaten als rationale Functionen eines Parameters ausdrücken zu lassen.

In der That braucht man nur die Form der Grenze zu untersuchen, welche die Gleichungen (16) annehmen, wenn man die ξ sich einem $r$fachen Fundamentalpunkte nähern lässt. Zu diesem Ende kann man eines der ξ, etwa ξ_3, constant lassen, dagegen ξ_1 durch $\xi_1 + \varepsilon\varkappa$, ξ_2 durch $\xi_2 + \varepsilon\lambda$ ersetzen; sind dann ξ_1, ξ_2, ξ_3 die Coordinaten des Fundamentalpunktes, und ordnet man nach den Potenzen von ε, um diese Grösse schliesslich gegen Null convergiren zu lassen, so verschwinden rechts in (16) alle Glieder bis zu ε^r, und indem man diesen Factor in ϱ eingehen lässt, dann aber ε gleich Null setzt, erhält man:

$$(17^{\text{a}}) \qquad \varrho x_i = \frac{\partial^r f_i}{\partial \xi_1{}^r}\varkappa^r + r\cdot\frac{\partial^r f_i}{\partial \xi_1{}^{r-1}\partial \xi_2}\varkappa^{r-1}\lambda \cdots + \frac{\partial^r f_i}{\partial \xi_2{}^r}\lambda^r ,$$

also die ξ als rationale Functionen r^{ter} Ordnung von $\frac{\lambda}{\varkappa}$, was zu beweisen war.

Dass, wenn zwei Curven in der Abbildung sich in einem Fundamentalpunkte schneiden, daraus kein Schnitt der entsprechenden Curven auf der Fläche folgt, ist schon oben benutzt. Haben wir also eine Curve m^{ter} Ordnung in der Abbildung, und untersuchen wir die entsprechende Curve M^{ter} Ordnung im Raume, so finden wir zunächst ihre Ordnung M, wenn wir die Anzahl der beweglichen Schnittpunkte der Abbildungscurve mit der Abbildung eines ebenen Schnittes bestimmen. Die Curve m^{ter} Ordnung gehe α_1, α_2 ... mal durch die einfachen, β_1, β_2 ... mal durch die doppelten Fundamentalpunkte u. s. w. Dann ist hiernach:

$$M = nm - \Sigma\alpha - 2\Sigma\beta - 3\Sigma\gamma \dots . \tag{18}$$

Hat die Curve m^{ter} Ordnung ausserdem noch d Doppelpunkte und r Rückkehrpunkte, so ist ihr Geschlecht, welches mit dem der Raumcurve übereinstimmen muss:

$$p = \frac{m-1 \,.\, m-2}{2} - d - r - \sum \frac{\alpha \,.\, \alpha-1}{2} - \sum \frac{\beta \,.\, \beta-1}{2} - \sum \frac{\gamma \,.\, \gamma-1}{2} \dots \tag{19}$$

Zwischen den Zahlen m, β, γ ... besteht, wenn die Fundamentalpunkte keinen Schnittpunktsystemen angehören (§. 1), noch immer die Bedingung, dass die durch sie geforderten Bedingungsgleichungen für die Coefficienten der ebenen Curve an Zahl nicht grösser seien, als die Anzahl der Coefficienten selbst, weniger 1, also:

$$1 \leqq \frac{m+1 \,.\, m+2}{2} - \sum \frac{\alpha \,.\, \alpha+1}{2} - \sum \frac{\beta \,.\, \beta+1}{2} - \sum \frac{\gamma \,.\, \gamma+1}{2} \dots - 3d - 4r. \tag{20}$$

Hat, wie ich annehmen will, die Fläche keine Rückkehrcurve, so können in der Raumcurve im Allgemeinen keine Rückkehrpunkte enthalten sein, die nicht auch in der Abbildung solche wären. Die Anzahl der Rückkehrpunkte der Raumcurve ist dann also:

$$B = r. \tag{21}$$

Und aus (18) (19) (20) folgt sofort mit Hilfe der Gleichungen, welche ich in Crelle's Journal Bd. 67, p. 8 gegeben habe,*) für Rang (R) und Classe (K) der Curve, so wie für die Zahl A ihrer 4punktig berührenden Ebenen:

$$\begin{aligned}
R &= m(m-3+2n) - 2d - 3r - \Sigma\alpha(\alpha+1) - \Sigma\beta(\beta+3) - \Sigma\gamma(\gamma+5) \dots \\
K &= 3m(m-3+n) - 6d - 8r - 3\Sigma\alpha^2 - 3\Sigma\beta(\beta+1) - 3\Sigma\gamma(\gamma+2) \dots \\
A &= 2m(3m+2n-9) - 12d - 15r - 2\Sigma\alpha(3\alpha-1) - 2\Sigma\beta(3\beta+1) \\
&\qquad - 2\Sigma\gamma(3\gamma+3) \dots .
\end{aligned} \tag{22}$$

*) $R = 2p - 2 + 2M - B$
$K = 2p - 2 + 2R - M$
$A = 2p - 2 + 2K - R.$

Diese Formeln gehen in eine sehr merkwürdige und einfache Form über, wenn man sie auf den vollständigen, nicht zerfallenden Durchschnitt der gegebenen Fläche mit einer beliebigen Fläche L^{ter} Ordnung anwendet. In diesem Falle ist die Ordnung der Schnittcurve

(23) $$M = LN.$$

Die Gleichung der Abbildungscurve erhält man, indem man in die Gleichung der Fläche L^{ter} Ordnung für die Coordinaten die Functionen f_i einsetzt. Dieselbe ist also von der Ln^{ten} Ordnung, oder es ist $m = Ln$. Ferner wird jede durch einen einfachen Fundamentalpunkt dargestellte Gerade von der Fläche L^{ter} Ordnung in L Punkten geschnitten; daher muss in der Abbildung von dem Bilde der Schnittcurve jeder einfache Fundamentalpunkt L mal getroffen werden, oder jeder solche Fundamentalpunkt muss ein Lfacher Punkt der Bildcurve sein. Jeder doppelte Fundamentalpunkt repräsentirt einen Kegelschnitt, welcher von der Fläche L^{ter} Ordnung in $2L$ Punkten geschnitten wird. Durch jeden solchen Punkt muss also die Bildcurve $2L$ mal gehen, u. s. w. Man sieht also, dass alle α gleich L, alle β gleich $2L$, alle γ gleich $3L$ zu setzen sind, u. s. w. Endlich mögen sich die Fläche L^{ter} Ordnung und die Fläche N^{ter} Ordnung in d Punkten so berühren, dass im Berührungspunkte ein Doppelpunkt der Schnittcurve entsteht, und in r Punkten so, dass im Berührungspunkte ein Rückkehrpunkt erscheint. Dann verwandelt sich also die Gleichung (19) in folgende:

(24) $$\begin{aligned} p = \frac{\overline{Ln-1}\,.\,\overline{Ln-2}}{2} - d - r - a_1\frac{L\,.\,\overline{L-1}}{2} - a_2\frac{2L\,.\,\overline{2L-1}}{2} \\ - a_3\frac{3L\,.\,\overline{3L-1}}{2}\dots \\ = \frac{\overline{Ln-1}\,.\,\overline{Ln-2}}{2} - d - r - \frac{L^2}{2}(a_1 + 4a_2 + 9a_3 \dots) \\ + \frac{L}{2}(a_1 + 2a_2 + 3a_3 \dots). \end{aligned}$$

Nun kann man die beiden Summen

$$a_1 + 4a_2 + 9a_3 \dots \quad , \quad a_1 + 2a_2 + 3a_3 \dots$$

durch die Ordnung N der gegebenen Fläche und durch das Geschlecht p_1 ihrer ebenen Schnittcurven ausdrücken. Es wird nämlich nach (4) (6):

(25) $$\begin{aligned} a_1 + 4a_2 + 9a_3 \dots &= n^2 - N \\ a_2 + 3a_3 + 6a_4 \dots &= \frac{\overline{n-1}\,.\,\overline{n-2}}{2} - p_1, \end{aligned}$$

daher auch, wenn man das Doppelte der zweiten Gleichung von der ersten abzieht:

(26) $$a_1 + 2a_2 + 3a_3 \dots = 3n - 2 - N + 2p_1.$$

Mit Hilfe der Gleichungen (25) (26) aber verwandelt sich (24) in:

(26ª) $$p = Lp_1 + \frac{(LN-2)\,(L-1)}{2} - d - r.$$

Aus dieser Gleichung ist die Zahl n, die Ordnung der abbildenden Functionen f_i ganz verschwunden, und dasselbe gilt also auch von den aus p gebildeten Zahlen R, K, A. Die Singularitäten des vollständigen Durchschnitts hängen also nur von der Ordnung der beiden Flächen, von der Zahl ihrer Berührung, und dem Geschlecht p_1 des ebenen Schnittes der gegebenen Fläche ab. Und zwar findet man sofort:

$$
\begin{aligned}
R &= L^2 N + L(N + 2p_1 - 2) - 2d - 3r \\
K &= 3L^2 N + 6L(p_1 - 1) - 6d - 8r \qquad (27) \\
A &= 6L^2 N + L(12(p_1 - 1) - 2N) - 12d - 15r.
\end{aligned}
$$

Unter den Fällen, wo die Schnittcurve zerfällt, hebe ich nur einen hervor, welcher von besonderem Interesse ist. Wenn nämlich die vollständige Schnittcurve eine derjenigen Curven enthält, welche durch Fundamentalpunkte abgebildet werden, etwa die einem $r$fachen Fundamentalpunkte entsprechende, so ist der Rest des vollständigen Durchschnittes von der Ordnung $LN - r$. Trotzdem entsteht dieser Rest in der Abbildung noch immer, indem man die Functionen f_i statt der x in die Gleichung der Fläche L^{ter} Ordnung einsetzt. Die Erniedrigung des Grades der Raumcurve kann also nur dadurch entstehen, dass die Abbildung öfters, als im Allgemeinen bei der Abbildung des vollständigen Durchschnittes geschieht, durch einen oder mehrere der Fundamentalpunkte geht. Nun sieht man aber sogleich folgenden Satz ein:

Wenn die Abbildung des vollständigen Durchschnittes der gegebenen Fläche mit einer Fläche L^{ter} Ordnung durch einen $r$fachen Fundamentalpunkt $(rL+1)$mal hindurch geht, so besteht der vollständige Durchschnitt nicht nur aus der entsprechenden Raumcurve, sondern auch aus der durch den Fundamentalpunkt selbst dargestellten Raumcurve r^{ter} Ordnung.

In der That sah man bei Ableitung der Gleichung (17^{a}), dass jeder Fortschreitungsrichtung, in welcher man sich in der Bildebene von einem $r$fachen Fundamentalpunkte aus bewegen konnte, ein Punkt $\varkappa$, λ der durch den Fundamentalpunkt dargestellten Curve entspricht. Die in dem eben ausgesprochenen Satze aufgestellte Bedingung sagt also aus, dass die Curve r^{ter} Ordnung von der Fläche L^{ter} Ordnung in $rL+1$ Punkten geschnitten werde, also der Fläche L^{ter} Ordnung ganz angehört. Diese Curve ist also ein Bestandtheil des vollständigen Durchschnittes der Fläche L^{ter} Ordnung mit der gegebenen Fläche. In Verbindung mit dem Vorhergehenden folgt nun aber auch umgekehrt, dass nur bei dem in Rede stehenden Falle die durch den Fundamentalpunkt dargestellte Curve aus dem vollständigen Durchschnitte ausscheidet.

§. 7.

Allgemeines. Die Abbildung der Doppelcurve.

Die Doppelcurve der Fläche N^{ter} Ordnung ist dadurch charakterisirt, dass jeder ihrer Punkte durch zwei Punkte der Abbildung dargestellt wird; so dass also die Abbildung der Doppelcurve dem Geschlechte nach mit ihr selbst nicht übereinstimmt. Sind ξ, η zwei Punkte der Abbildung, welche sich zu einem Punkte der Doppelcurve vereinigen, so hat man die nothwendigen und hinreichenden Gleichungen:

$$(28)\qquad \begin{aligned} f_1(\xi) &= f_1(\eta) \\ f_2(\xi) &= f_2(\eta) \\ f_3(\xi) &= f_3(\eta) \\ f_4(\xi) &= f_4(\eta)\,. \end{aligned}$$

In diesen Gleichungen ist unter den Functionszeichen der Kürze wegen immer nur ein Buchstabe geschrieben, an Stelle der drei entsprechenden Coordinaten.

Um aus diesen Gleichungen die Gleichung der Abbildung der Doppelcurve zu erhalten, eliminirt man die η. Und zwar kann man dies auf folgende Art ausgeführt denken. Aus den Gleichungen

$$(29)\qquad x_i = f_i(\eta)$$

erhält man durch Elimination der η die Gleichung der Fläche N^{ter} Ordnung selbst:

$$(30)\qquad F(x_1, x_2, x_3, x_4) = 0\,.$$

Wollte man nun, um von der Resultante der Gleichungen (29) zu der Resultante der Gleichungen (28) überzugehen, in (30) an Stelle der x_i die Grössen $f_i(\xi)$ setzen, so würde identisch Null entstehen, weil diese Functionen, für die x gesetzt, die Gleichung der Oberfläche für alle Werthsysteme der ξ befriedigen. Man muss daher in (30) für die x_i die Ausdrücke

$$(31)\qquad x_i = f_i(\xi) + \varepsilon\,.\,z_i$$

setzen, wo die z beliebige Grössen sind, und dann ε gegen Null convergiren lassen. Durch Eintragung der Werthe (31) in (30) erhält man aber einen Ausdruck, dessen erstes Glied bei einer Entwicklung nach Potenzen von ε verschwindet. Daher dividirt man durch ε, setzt sodann ε gleich Null, und erhält:

$$(32)\qquad \Omega = 0 = z_1 F'(x_1) + z_2 F'(x_2) + z_3 F'(x_3) + z_4 F'(x_4)\,,$$

in welcher Gleichung jetzt die x_i durch die $f_i(\xi)$ ersetzt werden können. Der so entstehende Ausdruck muss in zwei Factoren zerfallen; in die Gleichung der gesuchten Abbildung, und in einen von den willkürlichen Grössen z abhängigen überflüssigen Factor. Um diesen zu ermitteln, geht man auf die Gleichungen zurück, in welche die Gleichungen (29) durch Einführung der Werthe (31) übergehen. Diese Gleichungen werden:

$$(33) \qquad f_i(\eta) = f_i(\xi) + \varepsilon z_i\,.$$

Diese Gleichungen werden erfüllt, wenn man die η den ξ gleich setzt, vermehrt um die Grössen von der Ordnung ε, also wenn man setzt:

$$(34) \qquad \eta_i = \xi_i + \varepsilon \zeta_i\,.$$

Indem man diese Werthe einführt, durch ε dividirt, und dann ε gleich Null setzt, erhält man:

$$(35) \qquad \frac{\partial f_i(\xi)}{\partial \xi_1}\zeta_1 + \frac{\partial f_i(\xi)}{\partial \xi_2}\zeta_2 + \frac{\partial f_i(\xi)}{\partial \xi_3}\zeta_3 = z_i\,.$$

Eliminirt man aus diesen Gleichungen die ζ, so erhält man die Gleichung

$$(36) \qquad \Theta = 0 = \begin{vmatrix} \frac{\partial f_1(\xi)}{\partial \xi_1} & \frac{\partial f_1(\xi)}{\partial \xi_2} & \frac{\partial f_1(\xi)}{\partial \xi_3} & z_1 \\ \frac{\partial f_2(\xi)}{\partial \xi_1} & \frac{\partial f_2(\xi)}{\partial \xi_2} & \frac{\partial f_2(\xi)}{\partial \xi_3} & z_2 \\ \frac{\partial f_3(\xi)}{\partial \xi_1} & \frac{\partial f_3(\xi)}{\partial \xi_2} & \frac{\partial f_3(\xi)}{\partial \xi_3} & z_3 \\ \frac{\partial f_4(\xi)}{\partial \xi_1} & \frac{\partial f_4(\xi)}{\partial \xi_2} & \frac{\partial f_4(\xi)}{\partial \xi_3} & z_4 \end{vmatrix},$$

welche linear in den z ist. Da im Allgemeinen die Coefficienten der z keinen gemeinschaftlichen Factor besitzen (dasselbe tritt beim Vorhandensein von Rückkehrcurven ein, welche ich ausschloss, oder wenn drei der Functionen f_i einen gemeinsamen Factor besitzen, so dass ein Punkt der Fläche als Curve abgebildet wird), so muss Θ ein Factor von Ω sein, und indem die z aus dem Quotienten ausscheiden, wird die Gleichung der Abbildung der Doppelcurve:

$$(37) \qquad \frac{\Omega}{\Theta} = 0\,.$$

Da nun Ω von der Ordnung $(N-1)n$ in den ξ, Θ von der Ordnung $3(n-1)$ ist, so wird die Abbildung der Doppelcurve von der Ordnung $(N-4)n+3$.

Untersuchen wir jetzt, wie oft die Abbildung der Doppelcurve durch die verschiedenen Fundamentalpunkte hindurchgeht. Da jede der Curven $f_i = 0$ einen $r$fachen Fundamentalpunkt zum $r$fachen Punkte hat, so hat die Curve $\Omega = 0$ einen solchen zum $(N-1)r$fachen Punkt. Aber die aus je drei f_i gebildete Jacobi'sche Curve hat denselben (vgl. Cremona, sulla trasformazioni geometriche delle curve piane, Nota 2$^{\text{da}}$, Bd. 5, Ser. 2 der Abhandlungen der Akademie von Bologna) zum $3r-1$fachen Punkte, die Curve $\frac{\Omega}{\Theta}$ also zum $(N-4)r+1$fachen. Und man hat also den Satz:

Die Abbildung der Doppelcurve geht durch einen $r$fachen Fundamentalpunkt $(N-4)r+1$ mal.

Für das Geschlecht p' der Doppelcurve ergiebt sich hieraus, wenn man voraussetzt, dass die Curve nicht zerfällt; und dass keine weitern Doppel- und Rückkehrpunkte eintreten, welche übrigens dann auch in der Raumcurve solche wären, und demnach einfach in Abzug zu bringen wären:

$$p' = \frac{\overline{(N-4)n+1}\,.\,\overline{(N-4)n+2}}{2} - \sum a_r \frac{\overline{(N-4)r+1}\,.\,\overline{(N-4)r}}{2},$$

oder, wenn man die Gleichungen (25) (26) zu Hilfe nimmt:

$$p' = \frac{\overline{N^2-4N+2}\,.\,\overline{N-3}}{2} - (N-4)\,p_1,$$

oder wenn $g = \frac{\overline{N-1}\,.\,\overline{N-2}}{2} - p_1$ die Ordnung der Doppelcurve ist, $p' = (N-4)g+1$, was von der Ordnungszahl n der Abbildungsfunctionen und von den Fundamentalpunkten ganz unabhängig ist.

Das Geschlecht der Abbildung der Doppelcurve ist also das nämliche für eine gegebene Fläche, wie auch die Abbildung geschehen mag. Dies Resultat war vorauszusehen. Denn zwei verschiedene Abbildungsarten derselben Fläche auf einer Ebene geben zwei ebene Systeme, welche sich, bis auf die Punkte der Doppelcurve, eindeutig entsprechen. Solche Systeme gehören also zu denen, welche Hr. Cremona a. a. O. betrachtet hat. In diesen aber giebt es niemals Ausnahmscurven, sondern nur Ausnahmspunkte. Daher müssen auch die beiden Abbildungen der Doppelcurve einander Punkt für Punkt entsprechen, d. h. beide müssen dasselbe Geschlecht haben, was zu beweisen war. — Beiläufig folgt aus dieser Betrachtung, dass alle Abbildungen einer Fläche aus einer derselben durch Cremona'sche Transformationen abgeleitet werden können.

Verbindet man je zwei aus demselben Punkte der Doppelcurve entspringende Punkte ihrer Abbildung durch eine Gerade, so umhüllen diese eine Curve, deren Tangenten den Punkten der Doppelcurve eindeutig entsprechen, und deren Geschlecht daher dem der Doppelcurve selbst gleich ist.

Man sieht daraus, dass die Abbildung der Doppelcurve ausser den oben angeführten Doppelpunkten noch gewisse Specialitäten besitzt, welche sie von anderen Curven mit gleichem Grade und Geschlecht unterscheiden. Sind nämlich die Coordinaten eines Punktes der Doppelcurve durch Ausdrücke der Form

$$\varrho x_i = \varphi_i(\lambda, \mu)$$

gegeben, wo zwischen den Parametern λ, μ eine algebraische Gleichung

$$\psi(\lambda, \mu) = 0$$

stattfindet, so müssen die Coordinaten einer Geraden in der Abbildung, welche die beiden einem Punkte der Doppelcurve entsprechenden Punkte verbindet, sich ähnlich darstellen; die Coordinaten eines Punktes der Abbildung der Doppelcurve müssen also die Form annehmen:

$$\varrho \xi_i = \chi_i(\lambda, \mu) + \vartheta_i(\lambda, \mu) \sqrt{\Omega(\lambda, \mu)},$$

wo χ_i, ϑ_i, Ω rationale Functionen ihrer Argumente sind. Ist also insbesondere für die Doppelcurve $p = 0$, und kann man also μ durch λ rational ausdrücken, so führt die Abbildung der Doppelcurve niemals auf allgemeine Abel'sche, sondern immer auf hyperelliptische Functionen.

§. 8.

Flächen 4ter Ordnung mit einer Doppelgeraden. Vollständige Discussion ihrer Geraden und Kegelschnitte.

Indem ich mich nunmehr zur Betrachtung der Fläche 4ter Ordnung mit einer Doppelgeraden zurückwende, will ich zunächst eine für die weitere Discussion wichtige Ungleichung ableiten, welche gilt, wenn die Fundamentalpunkte keine Schnittpunktsysteme enthalten, und wenn ausser einem Doppelpunkte nur einfache Fundamentalpunkte vorhanden sind. Diese Ungleichung bezieht sich auf die ebenen Curven, welche Abbildungen auf der Fläche gelegener Raumcurven werden können. Indem ich von Doppelpunkten und Rückkehrpunkten der Raumcurve abstrahire, erhalte ich für diesen Fall aus (18) (19) (20):

$$\begin{aligned} & M = nm - 2\beta - \Sigma\alpha \\ (38) \qquad & p = \frac{m-1 \,.\, m-2}{2} - \frac{\beta \,.\, \beta-1}{2} - \sum \frac{\alpha \,.\, \alpha-1}{2} \\ & 1 < \frac{m+1 \,.\, m+2}{2} - \frac{\beta \,.\, \beta+1}{2} - \sum \frac{\alpha \,.\, \alpha+1}{2}. \end{aligned}$$

Aus diesen Gleichungen folgt sogleich:

$$M + p - 1 \overline{\overline{>}} nm - 3m - \beta$$

oder

$$(39) \qquad m \overline{\overline{<}} \frac{M+p-1+\beta}{n-3}.$$

Dagegen ist, wenn man von dem Falle $\beta = 1$ absieht, ein βfacher Punkt der Abbildung erst bei einer Curve $(\beta+1)^{\text{ter}}$ Ordnung möglich, also für $\beta > 1$ immer

$$(40) \qquad m \overline{\overline{>}} \beta + 1.$$

Aus beiden Ungleichungen zusammen folgt nun für $n > 4$ die folgende Begränzung für β:

$$(41) \qquad \beta < \frac{M+p+2-n}{n-4},$$

während zugleich m in die Grenzen (39) (40) eingeschlossen ist.

Aber für den vorliegenden Fall, wo $n = 4$, gehen die Ungleichungen über in

(40) $\qquad m < M + p - 1 + \beta \;,\; m \overline{\gtrless} 1 + \beta$ (für $\beta > 1$).

Es knüpfen sich daran sofort folgende Schlüsse:

I. Gerade Linien auf der Fläche geben $M = 1$, $p = 0$; ferner, da der durch den Doppelpunkt dargestellte Kegelschnitt von einer Geraden höchstens in zwei Punkten geschnitten wird, kann β höchstens 2, also $\beta = 0, 1, 2$ sein. Im ersten Falle wäre $m = 0$; in der That geben die 8 einfachen Fundamentalpunkte Gerade der Fläche. Im zweiten Falle kann $m = 1$ sein; man erhält Gerade, die durch den Doppelpunkt gehen. Diese stellen Gerade im Raume vor, wenn eine der Zahlen α auch noch $= 1$ ist; man erhält also die 8 Verbindungslinien des Doppelpunkts mit den einfachen Fundamentalpunkten. Jede hierdurch dargestellte Gerade bildet mit der dem zugehörigen Fundamentalpunkte entsprechenden ein Paar. Für $\beta = 2$ müsste $m < \beta$ und $m \overline{\gtrless} 1 + \beta$ sein, was unmöglich ist. Es giebt ausser den oben (§. 3) gefundenen 8 Paaren keine Geraden auf der Fläche.

II. Kegelschnitte. $M = 2$, $p = 0$. Die Zahl β der Durchschnitte mit dem durch den Doppelpunkt dargestellten Kegelschnitt kann 4 werden, also $\beta = 0, 1, 2, 3, 4$. Die beiden Grenzen von m fallen für $\beta > 1$ zusammen, und man erhält für $\beta > 1$ immer $m = 1 + \beta$. Man hat daher folgende Fälle:

1) $\beta = 0$, $m \overline{\lessgtr} 1$. Abgesehen von dem durch den Doppelpunkt dargestellten Kegelschnitt erhält man als Bilder von Kegelschnitten die Geraden, welche die einfachen Fundamentalpunkte verbinden. Ihre Zahl ist $\frac{8\,.\,7}{2} = 28$.

2) $\beta = 1$, $m = 1$, oder $m = 2$. Die Annahme $m = 1$ giebt den Strahlbüschel, dessen Scheitel der Doppelpunkt ist. Er stellt eine Schaar von Kegelschnitten dar. Die Annahme $m = 2$ fordert, dass vier der α gleich 1 seien, und führt daher auf Kegelschnitte, welche durch den Doppelpunkt und durch vier einfache Fundamentalpunkte gehen. Ihre Zahl ist $\frac{8\,.\,7\,.\,6\,.\,5}{1\,.\,2\,.\,3\,.\,4} = 70$.

3) $\beta = 2$, $m = 3$. Die erste Gleichung (38) giebt $2 = 4\,.\,3 - 4 - \Sigma\alpha$, oder $\Sigma\alpha = 6$. Man hat also völlig bestimmte Curven dritter Ordnung in der Abbildung, welche durch 6 einfache Fundamentalpunkte gehen, und in dem doppelten einen Doppelpunkt haben. Ihre Zahl ist $\frac{8\,.\,7}{1\,.\,2} = 28$.

4) $\beta = 3$, $m = 4$. Die erste Gleichung (38) giebt $\Sigma\alpha = 8$. Man hat eine Curve vierter Ordnung, welche in dem doppelten Fundamen-

talpunkte einen dreifachen Punkt hat, und durch alle einfachen Fundamentalpunkte geht. Sie ist vollständig bestimmt.

5) $\beta = 4$, $m = 5$. Wenigstens eines der α müsste > 1 sein, wodurch die Curve fünfter Ordnung zerfallen würde. Dieser Fall liefert also nichts.

Bemerken wir, dass alle Curven vierter Ordnung, welche einen gegebenen Doppelpunkt haben und durch 8 gegebene Punkte gehen, 11 Bedingungen genügen, also nur vier Parameter enthalten, so erkennt man, dass jede diesen Bedingungen in der vorliegenden Abbildung genügende Curve vierter Ordnung auch die Abbildung eines ebenen Schnittes ist. Dies trifft für die unter 4) behandelte Curve zu; und zwar tritt der in §. 6 erwähnte Fall ein, in welchem die durch den doppelten Fundamentalpunkt dargestellte Curve dem vollständigen Durchschnitte zuzuzählen ist. Die Curve 4) gehört also mit der durch den doppelten Fundamentalpunkt dargestellten Curve dem vollständigen Schnitte einer dreifach berührenden Ebene zu. Der vierte Schnittpunkt der Kegelschnitte liegt auf der Doppelcurve, und erscheint also in der Abbildung in zwei Punkte aufgelöst. — Ebenso vereinigt sich je eine der Curven 1) mit je einer der Curven 3), und 35 Paare der 70 Curven 2) zu Abbildungen vollständiger Durchschnitte.

Ausser den $1 + 28 + 70 + 28 + 1 = 128$ Kegelschnitten, die von den 64 dreifach berührenden Ebenen herrühren, giebt es also nur noch die unter 2) erwähnte Schaar von Kegelschnitten auf der Fläche. Sie stellt also die Schaar dar, in der ein durch die Doppelgerade gelegter Ebenenbüschel die Fläche schneidet.

Bezüglich der Lage dieser Kegelschnitte zu einander und zu den 16 Geraden genügt es, das Verhalten eines Kegelschnittes zu betrachten, etwa des durch den doppelten Fundamentalpunkt dargestellten. Denn die verschiedenen Kegelschnitte verhalten sich ganz gleichförmig, indem nach §. 3 jeder in einer entsprechenden Abbildung die Stelle des doppelten Fundamentalpunktes einnimmt.

Jeder der 128 Kegelschnitte ist acht Geraden zugeordnet, welche ihn treffen. Und zwar haben zwei Kegelschnitte unter ihren zugeordneten Geraden immer eine gerade Anzahl gemein. Man erkennt nun aus der Betrachtung der Kegelschnitte (1), (2), (3) sofort Folgendes:

Jeder der 128 Kegelschnitte wird **nicht** getroffen von den 28 Kegelschnitten, deren zugeordnete Geradensysteme mit dem seinigen 6 Gerade gemein haben; einmal getroffen von den 70 Kegelschnitten, deren Geradensysteme mit dem seinigen vier Gerade gemein haben; zweimal von den

28 Kegelschnitten, deren Geradensysteme mit dem seinigen nur 2 Gerade gemein haben.

Unter den dreifach berührenden Ebenen giebt es daher $\frac{64 \,.\, 28}{2} = 896$ Paare, welche sich so schneiden, dass immer ein Kegelschnitt einer Ebene einen der andern zweimal trifft; hingegen $\frac{64 \,.\, 35}{2} = 1120$ Paare, welche sich so schneiden, dass jeder Kegelschnitt der einen Ebene jeden der andern trifft.

Jeder Kegelschnitt der **Schaar** wird von jedem der 128 einzelnen Kegelschnitte **einmal** getroffen.

§. 9.

Raumcurven und ebene Curven dritter Ordnung, welche auf der Fläche liegen.

III. Raumcurven dritter Ordnung. $M = 3$, $p = 0$, $m \overline{<} 2 + \beta$. Ein Kegelschnitt kann eine Raumcurve dritter Ordnung höchstens in drei Punkten schneiden, wenn sie nicht zerfallen soll; daher ist β höchstens 3. Man hat also folgende Fälle:

1) $\beta = 0$; $m = 1$ oder $m = 2$. Für $m = 1$ erhält man acht einfache Schaaren, abgebildet durch Strahlbüschel, deren Scheitel die einfachen Fundamentalpunkte sind. Für $m = 2$ giebt es die $\frac{8 \,.\, 7 \,.\, 6}{1 \,.\, 2 \,.\, 3} = 56$ einzelnen Curven, deren Bilder Kegelschnitte durch fünf einfache Fundamentalpunkte sind.

2) $\beta = 1$; $m = 1, 2, 3$. Der Fall $m = 1$ giebt nichts, denn Gerade durch den festen Doppelpunkt stellen Kegelschnitte dar. Aus $m = 2$ erhält man die $\frac{8 \,.\, 7 \,.\, 6}{1 \,.\, 2 \,.\, 3} = 56$ Schaaren, deren Bilder Kegelschnitte durch den doppelten und drei einfache Fundamentalpunkte sind. Aus $m = 3$ findet man eine Anzahl von einzelnen Curven, deren Bilder Curven dritter Ordnung sind, welche durch den doppelten Fundamentalpunkt gehen, und fünf einfache Fundamentalpunkte zu einfachen, einen sechsten zum Doppelpunkt haben. Sie sind hierdurch völlig bestimmt (9 Bedingungen); ihre Zahl ist $8 \,.\, \frac{7 \,.\, 6}{1 \,.\, 2} = 168$.

3) $\beta = 2$; $m = 3, 4$. Für $m = 3$ haben wir einfache Curvenschaaren 3ter Ordnung, welche in dem doppelten Fundamentalpunkte einen Doppelpunkt haben, und durch 5 der einfachen hindurchgehen. Die Zahl dieser Schaaren ist $\frac{8 \,.\, 7 \,.\, 6}{1 \,.\, 2 \,.\, 3} = 56$. — Für $m = 4$ erhalten wir Curven 4ter Ordnung, welche in dem doppelten und in zwei einfachen

Fundamentalpunkten Doppelpunkte haben und durch fünf weitere einfache Fundamentalpunkte hindurchgehen. Diese Curven sind hierdurch völlig bestimmt (14 Bedingungen); ihre Zahl ist $\frac{8.7}{1.2} \cdot 6 = 168$.

4) $\beta = 3$; $m = 4, 5$. Bei $m = 4$ erhält man 8 Schaaren von Curven vierter Ordnung, welche in dem doppelten Fundamentalpunkte einen dreifachen Punkt haben, und durch je 7 einfache Fundamentalpunkte hindurchgehen (13 Bedingungen). Bei $m = 5$ könnten zwei verschiedene Fälle eintreten. Damit $p = 0$ sei, muss die Curve 5ter Ordnung ausser dem in den doppelten Fundamentalpunkt fallenden dreifachen Punkt noch entweder drei Doppelpunkte in dreien der einfachen Fundamentalpunkte, oder einen weitern dreifachen Punkt in einem derselben haben. Indessen ist der zweite Fall nicht möglich, denn es müsste $\Sigma\alpha = 11$ sein, also nach Abzug von 3 noch $\Sigma\alpha = 8$ übrig bleiben, während doch nur 7 Fundamentalpunkte übrig sind, deren keiner der Curve mehr als einfach angehören kann. In dem erstern Falle hingegen bleiben von $\Sigma\alpha = 11$ nach Abzug von 6 wegen der drei in drei Fundamentalpunkte fallenden Doppelpunkte noch 5 übrig; durch jeden der übrigen Fundamentalpunkte geht also die Curve einmal hindurch. Solcher Curven giebt es $\frac{8.7.6}{1.2.3} = 56$; sie sind durch $6 + 3.3 + 5 = 20$ Bedingungen völlig bestimmt.

Es giebt also im Ganzen $8 + 56 + 56 + 8 = 128$ einfache Schaaren von Raumcurven 3ter Ordnung auf der Fläche; ausserdem aber $56 + 168 + 168 + 56 = 448$ einzelne Raumcurven 3ter Ordnung, welche keiner der Schaaren angehören.

Die hier auftretenden Zahlen erklären sich leicht, wenn man das Verhalten der Curven 3ter Ordnung zu den 8 Paaren von Geraden ins Auge fasst. Was zunächst die Schaaren von Raumcurven betrifft, so muss man sich erinnern, dass es 128 Combinationen von je 8 Geraden, je eine aus jedem Paar, gab, welche je von einem Kegelschnitt getroffen wurden. Aber es giebt noch 128 andere Combinationen von je 8 Geraden, je eine aus jedem Paar. Jede Schaar von Curven 3ter Ordnung hat nun die Eigenschaft, die Geraden einer solchen Combination einmal, die übrigen gar nicht zu treffen; was aus der Abbildung sofort erkannt wird.

Die einer solchen Curvenschaar 3ter Ordnung zugeordnete Combination von Geraden hat mit der einem der 128 Kegelschnitte zugeordneten immer eine ungerade Combination gemein. Eine Curve aus einer Schaar dritter Ordnung schneidet einen jener Kegelschnitte gar nicht, 1mal, 2mal, 3mal, je nachdem die zugeordneten Combinationen 7, 5, 3, 1 Gerade gemeinsam haben. Die Curven einer Schaar treffen also 8 Kegelschnitte gar nicht, 56 einmal, 56 zweimal, 8 dreimal. Eine Curve der Kegelschnittschaar wird von jeder Curve aus den Schaaren 3^{ter} Ordnung einmal geschnitten.

Curven 3^{ter} Ordnung aus derselben Schaar schneiden einander nicht; Curven verschiedener Schaaren schneiden sich in 1, 2, 3, 4 Punkten, je nachdem die zugeordneten Combinationen 6, 4, 2, 0 Gerade gemein haben; dies tritt bei jeder Schaar beziehungsweise 28, 70, 28, 1mal ein.

Die 448 einzelnen Raumcurven 3^{ter} Ordnung, welche ausserdem auf der Fläche existiren, zerfallen in 56 Gruppen zu 8. Jede Gruppe ist 5 Paaren von Geraden zugeordnet, deren Gerade die 8 Curven der Gruppe sämmtlich einmal schneiden. Ausserdem schneidet jede der 8 Curven je eine Gerade der 3 übrigen Paare zweimal, die andern keinmal.

Nach den drei einzelnen Geraden, welche eine solche Curve trifft, richtet sich ihr Schnitt mit den einzelnen Kegelschnitten. Ein Kegelschnitt wird von der Curve 0, 1, 2, 3mal geschnitten, je nachdem unter der dem Kegelschnitte conjugirten Combination sich 3, 2, 1, 0 jener drei Geraden befinden. Demnach schneidet jede jener Curven 16 Kegelschnitte 0mal, 48 einmal, 48 zweimal, 16 dreimal. Jeder Kegelschnitt aus der Schaar ferner wird von einer solchen Curve zweimal getroffen.

Die Schaaren von Curven 3^{ter} Ordnung werden von einer solchen einzelnen Curve 3^{ter} Ordnung in 1, 2, 3, 4 Punkten getroffen, je nachdem von den 3 einzelnen die letztere schneidenden Geraden 3, 2, 1, 0 unter der zu der Schaar gehörigen Combination enthalten sind.

Die 448 einzelnen Curven 3^{ter} Ordnung schneiden einander nach folgender Regel: Curven aus derselben Gruppe, welche beide dieselben 5 Paare schneiden, in 1, 3, 5 Punkten, je nachdem unter den 3 einzelnen Geraden, welche jede noch trifft, 2, 1 oder 0 gemeinsam sind; dies tritt bei jeder Curve beziehungsweise 3, 3 und 1mal ein.

Curven aus zwei Gruppen, bei denen unter den 5 von jeder Gruppe getroffenen Paaren 4 gemeinsam sind, in 0, 2, 4 Punkten, je nachdem von den drei einzelnen Geraden, welche jede der Curven noch trifft, 2, 1, 0 gemeinsam sind; dies tritt bei jeder Curve beziehungsweise 60, 30, 30mal ein.

Curven aus zwei Gruppen, bei denen unter den 5 von jeder Gruppe getroffenen Paaren 3 gemeinsam sind, in 1, 3 Punkten, je nachdem von den 3 einzelnen Geraden, welche jede der Curven noch trifft, 1 oder 0 gemeinsam sind; dies tritt bei jeder Curve beziehungsweise 120, 120mal ein.

Curven aus zwei Gruppen, bei denen unter den 5 von jeder Gruppe getroffenen Paaren nur zwei gemeinsam sind, 2mal; was bei jeder Curve 80mal eintritt.

Jede dieser Curven wird also beziehungsweise von 60, 123, 110, 123, 30, 1 der übrigen 0, 1, 2, 3, 4, 5mal getroffen.

IV. Ebene Curven 3ter Ordnung. Da diese Curven nothwendig durch eine Gerade zum vollständigen ebenen Schnitte ergänzt werden, so erkennt man, dass auf der Fläche 16 Schaaren solcher Curven liegen; jede solche Schaar entsteht durch den Schnitt der Fläche mit einem Ebenenbüschel, welche eine der 16 Geraden zur Axe hat. Ihre Abbildungen theilen sich in zwei Classen, welche man aus der Bemerkung erhält, dass die Abbildung eines ebenen Schnittes immer eine Curve 4ter Ordnung mit einem Doppelpunkt in dem doppelten Fundamentalpunkte ist, welche durch alle einfachen Fundamentalpunkte hindurchgeht; und dass umgekehrt jede solche Curve Abbildung eines ebenen Schnittes ist. Ist daher die Axe des Ebenenbüschels eine der Geraden, welche sich als Verbindungslinien des Doppelpunktes mit einem der einfachen Fundamentalpunkte abbilden, so wird der Büschel von ebenen Curven dritter Ordnung durch Curven dritter Ordnung abgebildet, welche ebenfalls durch den Doppelpunkt, nicht aber durch den erwähnten einfachen Fundamentalpunkt, sondern statt dessen durch die 7 übrigen gehen, und welche sich also ausser diesen 8 Punkten noch immer in einem festen neunten Punkte durchschneiden. Dieser neunte Punkt gehört der Abbildung der Doppelgeraden an; er ist die Abbildung des Punktes, welcher mit dem Durchschnitt der Axe des Büschels und der Doppelgeraden auf der Fläche vereinigt liegt.

Wird dagegen die Axe des Ebenenbüschels durch einen der einfachen Fundamentalpunkte abgebildet, so bilden sich die Curven des Büschels dritter Ordnung als Curven vierter Ordnung ab, welche durch die einfachen Fundamentalpunkte gehen und in dem doppelten einen Doppelpunkt haben. Aber damit zu dem hierdurch dargestellten ebenen Schnitte auch die Axe des Büschels gerechnet werde, muss auch noch in dem ihr entsprechenden Fundamentalpunkte ein Doppelpunkt stattfinden (§. 6.). In der That sind dadurch die Curven 4ter Ordnung 13 Bedingungen unterworfen, so dass nur noch ein Büschel übrig bleibt. Die Curven dieses Büschels schneiden sich in zwei festen Doppelpunkten und in sieben festen einfachen Punkten; sie haben also noch einen weitern festen Punkt gemeinsam; und dieses ist wieder die Abbildung des Punktes, welcher mit dem Durchschnitt der Doppellinie und der Büschelaxe auf ersterer vereinigt liegt.

Unter den 16 Büscheln von ebenen Curven 3^{ter} Ordnung sind 8mal zwei conjugirt, deren entsprechende Geraden ein Paar bilden. Zwei Curven aus conjugirten Büscheln schneiden sich dreimal, zwei Curven aus nicht conjugirten zweimal.

Betrachten wir einen dieser Büschel, etwa einen solchen, welcher sich als Büschel von Curven dritter Ordnung abbildet. Die Gleichung des Büschels in der Abbildung ist von der Form $\varphi + \lambda\psi = 0$. Die Discriminante von $\varphi + \lambda\psi$ gleich Null gesetzt, giebt eine Gleichung 12^{ten} Gerades für λ. Es giebt also in jedem Büschel 12 Curven mit Doppelpunkt, welchen denn auch auf der Fläche Curven mit Doppelpunkt entsprechen. Die hierdurch gegebenen $12 \,.\, 16 = 192$ Ebenen bilden eine zweite Classe von dreifach berührenden Ebenen*), welche von der oben betrachteten gänzlich verschieden ist. Denn bei der letztern zerfiel die Schnittcurve der Ebene mit der Oberfläche in zwei Kegelschnitte, von deren vier Schnittpunkten einer in die Doppelgerade fiel, die andern aber wirkliche Berührungspunkte wurden. Hingegen bei diesen neuen Ebenen zerfällt die Schnittcurve mit der Oberfläche in eine Gerade und in eine Curve dritter Ordnung mit Doppelpunkt. Während also ein Schnittpunkt der Geraden mit der Curve 3^{ter} Ordnung auf die Doppelgerade fällt, bleiben die übrigen beiden und der Doppelpunkt wirkliche Berührungspunkte der Ebene mit der Oberfläche.

Wenn eine Gerade einer Oberfläche sich als Gerade abbildet, welche der erstern Punkt für Punkt entspricht, so sind die Reihen der auf ersterer liegenden Punkte und ihrer auf letztern liegenden Abbildungen nothwendig projectivisch. Dasselbe gilt von einer Geraden, welche sich als Fundamentalpunkt abbildet, und von dem Strahlbüschel, welcher in der Abbildung diesen Punkt zum Scheitel hat; wobei denn jedem Punkte der Geraden ein Strahl entspricht und umgekehrt. Was man aber über die projectivischen Beziehungen der Elemente in der Abbildung der Geraden feststellt, gilt auch für die Punkte der Geraden selbst. Betrachten wir z. B. den Büschel von Curven 3^{ter} Ordnung in der Abbildung, welche eine als Gerade abgebildete Gerade zur Abbildung ebener Schnitte ergänzen, so schneidet jede dieser Curven die Abbildung der Geraden ausser dem doppelten Fundamentalpunkt noch zweimal, und die so entstehenden Punktepaare bilden eine Involution. In dieser entspricht unter

*) Als eine dritte Classe kann man die 8 Ebenen durch die Doppelgerade ansehen, welche die Oberfläche in Linienpaaren schneiden.

anderm dem auf der Geraden liegenden einfachen Fundamentalpunkte derjenige Punkt, in welchem eine durch alle neun Fundamentalpunkte gehende Curve 3[ter] Ordnung die Gerade schneidet. Diese Curve 3[ter] Ordnung aber ist, wie sogleich näher entwickelt werden wird, die Abbildung der Doppelgeraden; im Raume entsteht also eine Involution, bei welcher ein Paar von Punkten der Schnitt mit der Doppelgeraden und der Schnitt mit der conjugirten einfachen Geraden ist. Ferner hat die Involution der Abbildung nur zwei Doppelpunkte; es giebt also im Raume auch nur zwei Curven des Büschels, welche die Gerade ausserhalb ihres Schnittes mit der Doppelgeraden berühren. Man kann so den Satz aussprechen:

Legt man durch eine der 16 Geraden Ebenen, so schneiden diese in Curven dritter Ordnung, welche alle durch den Schnitt mit der Doppelgeraden gehen. Sie schneiden die Gerade in Punktepaaren einer Involution; zwei von ihnen berühren die Gerade in den Doppelpunkten der Involution; der Schnittpunkt mit der Doppelgeraden bildet ein Paar mit dem Punkte, in welchem die Gerade von der ihr conjugirten getroffen wird.

§. 10.

Die Abbildung der Doppelgeraden.

Die Doppelgerade bildet sich nach §. 7. als Curve dritter Ordnung ab, welche durch alle einfachen sowie durch den doppelten Fundamentalpunkt einmal hindurchgeht, und also dadurch völlig bestimmt ist. Das Verhalten der Punkte der Doppelgeraden studirt man also, indem man die elliptischen Integrale erster Gattung einführt, welche den Punkten der Curve entsprechen, indem sie ihre Coordinaten zur obern Grenze haben, und indem die absolute Invariante der Curve mit dem Modul durch eine Gleichung mit numerischen Coefficienten verbunden ist; die untere Grenze der Integrale ist ein beliebiger fester Punkt der Curve.

Bezeichnen wir durch $u_1, u_2, \ldots u_{3n}$ die Werthe des Integrals, welche den Schnittpunkten der Curve 3[ter] Ordnung mit einer Curve m^{ter} Ordnung entsprechen, so ist immer

$$u_1 + u_2 \ldots + u_{3m} = mc, \tag{1}$$

wo c eine gewisse Constante bedeutet (vgl. Crelles Journal, Bd. 63, p. 197); und umgekehrt sind die $3n$ Punkte Schnittpunkte mit einer Curve m^{ter} Ordnung, sobald diese Gleichung besteht.

Der Werth des Integrals für den doppelten Fundamentalpunkt sei b, die Werthe für die einfachen Fundamentalpunkte $b_1, b_2, \ldots b_8$.

Betrachten wir nun die Abbildungen ebener Schnitte der Oberfläche. Dieselben sind Curven 4^{ter} Ordnung, welche durch die einfachen Fundamentalpunkte gehen, und in dem doppelten einen Doppelpunkt haben; und da eine solche Curve nur drei willkürliche Parameter enthalten kann, so sind auch alle solche Curven Abbildungen ebener Schnitte. Die Curve 3^{ter} Ordnung wird von jeder derselben in zwei weitern Punkten geschnitten, deren entsprechende Integrale u, v seien. Die Gleichung (1) geht also für die Abbildungen ebener Schnitte über in:

$$(2) \qquad u + v + 2b + b_1 + b_2 \ldots + b_8 = 4c.$$

Wir können nun einen Punkt P auf der Curve dritter Ordnung so bestimmen, dass das ihm zugehörige Integral der Gleichung

$$p = 2b + b_1 + b_2 \ldots + b_8 - 3c$$

genügt, und erhalten dann aus (2):

$$(3) \qquad u + v + p = c,$$

eine Gleichung, welche aussagt, dass die zu u, v, p gehörigen Punkte auf einer Geraden liegen. Die Abbildungen ebener Schnitte treffen also die Abbildung der Doppelgeraden, abgesehen von festen Schnittpunkten, in Punktepaaren, deren Verbindungslinien sich auf einem Punkte P der letztern Abbildung treffen, und solche Punktepaare Q, Q' sind also die Durchschnitte der Curve 3^{ter} Ordnung mit dem von P ausgehenden Strahlbüschel.

Die Punkte Q, Q', welche den Integralen u, v zugehören, sind Abbildungen der Schnittpunkte eines ebenen Schnittes mit der Doppelgeraden, d. h. der beiden Punkte, welche in einem solchen Schnittpunkte vereinigt liegen. Die Schaar der Paare Q, Q' liefert also die Abbildung der Punkte der Doppelcurve.

Um dieses geometrisch zu deuten, bemerke ich, dass geraden Linien in der Bildebene Raumcurven 4^{ter} Ordnung und 2^{ter} Species entsprechen, und zwar bilden sie eine doppelt unendliche Schaar, welche dem bei der Abbildung bevorzugten Kegelschnitte (doppelter Fundamentalpunkt) so zugeordnet ist, dass sie ihn nicht trifft. Solcher Schaaren giebt es also 128; wodurch die auf der Fläche liegenden Curven 4^{ter} Ordnung und 2^{ter} Species übrigens durchaus nicht erschöpft sind.

Unter der hier bevorzugten Schaar giebt es nun eine einfach unendliche, bei welcher ein wirklicher Doppelpunkt auftritt; sie giebt in der Abbildung die Schaar von Geraden, welche Punkte Q, Q' verbinden. Alle diese Geraden gehen durch einen Punkt P in der Abbildung der Doppelcurve, mithin gehen auch alle Curven der einfachen Schaar auf der Oberfläche durch einen festen Punkt Π der

Doppelcurve, dessen Bild P ist, und zwar so, dass die Tangente der Curve immer in der nämlichen Tangentenebene der Doppelcurve liegen. So giebt es 128 Punkte Π, den 128 Curvenschaaren entsprechend. Betrachtet man insbesondere den Strahl QQ', dessen einer Punkt Q mit P zusammenfällt (Tangente der Abbildung der Doppelcurve in P), so sieht man, dass ihm eine besondere Curve 4ter Ordnung und 2ter Species entspricht, welche in Π einen wirklichen Doppelpunkt hat, und zugleich mit ihrem einen Zweige die Doppelgerade berührt. Ferner kann man noch diejenigen vier besondern Curven der einfachen Schaar betrachten, deren Abbildungen die von P an die Abbildung der Doppelgeraden gezogenen Tangenten sind. Für diese fällt das Punktepaar QQ' zusammen; die vier so gegebenen Punkte der Doppelgeraden sind daher Rückkehrpunkte, d. h. Punkte, deren beide Tangentenebenen zusammenfallen. Und jede der vier entsprechenden Raumcurven hat also in einem dieser Punkte einen Rückkehrpunkt; es sind dies die einzigen Fälle, in denen ein Rückkehrpunkt eintreten kann. Dagegen kann achtmal eine Curve einer Schaar durch die Verbindungslinie des Punktes P mit einer einfachen, einmal durch die Verbindungslinie mit dem doppelten Fundamentalpunkte abgebildet werden; im ersten Falle zerfällt die Raumcurve 4ter Ordnung in die durch den einfachen Fundamentalpunkt abgebildete Gerade und in eine Curve dritter Ordnung; im andern Falle in den durch den doppelten Fundamentalpunkt repräsentirten Kegelschnitt und in einen Kegelschnitt der einfachen Kegelschnittschaar (§. 8). Ich fasse diese Verhältnisse in folgenden Satz zusammen:

Auf der Doppelgeraden giebt es vier Rückkehrpunkte. Durch jeden derselben gehen 128 Raumcurven vierter Ordnung und 2ter Species, welche daselbst einen wirklichen Rückkehrpunkt haben, und ausserdem durch je einen von 128 festen auf der Doppelgeraden liegenden Punkten Π gehen. Jede jener Curven ist ein Glied einer von 128 Schaaren solcher Raumcurven 4ter Ordnung und 2ter Species, welche durch den betreffenden Punkt Π gehen, in irgend einem Punkte der Doppelgeraden einen wirklichen Doppelpunkt haben, und einen gewissen der 128 einzelnen Kegelschnitte nicht treffen. In jeder solchen Schaar giebt es 8 Curven, welche in eine Gerade und eine Raumcurve dritter Ordnung, eine, welche in zwei Kegelschnitte zerfällt.

Ich glaube hiermit die Verhältnisse, welche bei dieser Art von Oberflächen eintreten, hinreichend angedeutet zu haben und wende mich einer andern Flächenart zu.

§. 11.

Flächen fünfter Ordnung mit einer Doppelcurve dritter Ordnung. Niedrigste Abbildung auf einer Ebene.

Verstehen wir unter L_i, M_i lineare Ausdrücke in den x, so stellen die Gleichungen

$$(1)\qquad \begin{aligned} L_1 + \lambda M_1 &= 0 \\ L_2 + \lambda M_2 &= 0 \\ L_3 + \lambda M_3 &= 0 \end{aligned}$$

eine Raumcurve dritter Ordnung dar, welche der gemeinsame Durchschnitt der drei Flächen 2[ter] Ordnung

$$(2)\qquad \Phi_1 = L_2M_3 - L_3M_2 = 0\ ,\ \Phi_2 = L_3M_1 - L_1M_3 = 0,\ \Phi_3 = L_1M_2 - L_2M_1 = 0$$

ist. Eine Fläche 5[ter] Ordnung, welche diese Curve zur Doppelcurve hat, muss eine Gleichung von der Form

$$\Sigma\Sigma\, A_{i\varkappa}\, \Phi_i\, \Phi_\varkappa = 0$$

haben, wobei die $A_{i\varkappa}$ lineare Functionen sind. Dieser Gleichung aber kann man die folgende Gestalt geben:

$$(3)\qquad 0 = \begin{vmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} & L_1 & M_1 \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} & L_2 & M_2 \\ A_{31} & A_{32} & A_{33} & L_3 & M_3 \\ L_1 & L_2 & L_3 & 0 & 0 \\ M_1 & M_2 & M_3 & 0 & 0 \end{vmatrix},$$

welche als Eliminationsresultat der Gleichungen

$$(4)\qquad \begin{aligned} A_{11}\xi_1 + A_{12}\xi_2 + A_{13}\xi_3 &= L_1\lambda + M_1\mu \\ A_{21}\xi_1 + A_{22}\xi_2 + A_{23}\xi_3 &= L_2\lambda + M_2\mu \\ A_{31}\xi_1 + A_{32}\xi_2 + A_{33}\xi_3 &= L_3\lambda + M_3\mu \\ L_1\xi_1 + L_2\xi_2 + L_3\xi_3 &= 0 \\ M_1\xi_1 + M_2\xi_2 + M_3\xi_3 &= 0 \end{aligned}$$

betrachtet werden können. Multiplicirt man die ersten dieser drei Gleichungen aber mit ξ_1, ξ_2, ξ_3 und addirt, so verschwinden die rechten Theile wegen der letzten beiden Gleichungen und man hat die für die x lineare Gleichung

$$(5)\qquad \Sigma\Sigma A_{i\varkappa}\, \xi_i\, \xi_\varkappa = 0.$$

Diese, zusammen mit den beiden letzten Gleichungen (4) genügt, um die Verhältnisse der x als rationale Functionen der ξ darzustellen, und liefert also die Abbildung der Fläche auf einer Ebene.

Da wir über die Coefficienten der A, L, M nichts vorausgesetzt haben, so haben diese drei Gleichungen, nach den x geordnet, zu ihren Coefficienten ganz willkürliche Functionen der ξ, welche in den letzten beiden Gleichungen (4) vom 1ten, in der Gleichung (5) vom 2ten Grade sind. Schreiben wir daher diese Gleichungen jetzt so:

$$(6)\qquad \begin{aligned} \Sigma L_i \xi_i \quad &= \Sigma \lambda_i x_i = 0 \\ \Sigma M_i \xi_i \quad &= \Sigma \mu_i x_i = 0 \\ \Sigma\Sigma A_{i\varkappa} \xi_i \xi_\varkappa &= \Sigma \varphi_i x_i = 0, \end{aligned}$$

wo die λ, μ lineare, die φ quadratische Functionen der ξ sind. Bezeichnen wir durch f_1, f_2, f_3, f_4 die Determinanten:

$$(7)\qquad f_1 = \Sigma \pm \lambda_2 \mu_3 \varphi_4\ ,\ f_2 = -\Sigma \pm \lambda_1 \mu_3 \varphi_4\ ,\ f_3 = \Sigma \pm \lambda_1 \mu_2 \varphi_4\ , \\ f_4 = -\ \Sigma \pm \lambda_1 \mu_2 \varphi_3,$$

so sind die Gleichungen der Fläche wieder:

$$(8)\qquad \varrho x_1 = f_1\ ,\ \varrho x_2 = f_2\ ,\ \varrho x_3 = f_3\ ,\ \varrho x_4 = f_4.$$

Die Functionen f sind hier vom 4ten Grade. Dies ist in der That der niedrigste Grad, den sie im vorliegenden Falle haben können. Denn damit die ebenen Schnitte dieser Fläche 5ter Ordnung durch Curven 3ter Ordnung abgebildet werden können, muss $p_1 = 1$, jeder ebene Schnitt also mit 5 Doppelpunkten begabt sein, oder eine Doppelcurve fünften Grades stattfinden.

Die Gleichungen $f_i = 0$ haben eine Reihe von Punkten gemein. Da die Gleichungen

$$\begin{aligned} \Sigma\, f_i \lambda_i &= 0 \\ \Sigma\, f_i \mu_i &= 0 \\ \Sigma\, f_i \varphi_i &= 0 \end{aligned}$$

bestehen, so folgt aus $f_1 = 0$, $f_2 = 0$ entweder auch $f_3 = 0$, $f_4 = 0$, oder die beiden Reihen λ_3, μ_3, φ_3 und λ_4, μ_4, φ_4 müssen einander proportional sein, so dass die Gleichungen bestehen:

$$\begin{aligned} \lambda_3 &= \varrho \lambda_4 \\ \mu_3 &= \varrho \mu_4 \\ \varphi_3 &= \varrho \varphi_4. \end{aligned}$$

Die Elimination der x aus diesen Gleichungen giebt eine Gleichung 5ten Grades für ϱ, und man hat also für dieselben 5 gemeinsame Lösungen. Die 16 Lösungen der Gleichungen $f_1 = 0$, $f_2 = 0$ enthalten also 5 solche, für welche f_3, f_4 nicht verschwinden, 11, für welche sie verschwinden.

Das System der Abbildungen ebener Schnitte ist also ein System von Curven 4ter Ordnung mit 11 gemeinsamen Punkten. Da solche Curven dann nur noch 3 Parameter, und zwar linear enthalten können, so umfasst das System alle Curven 4ter Ordnung, welche durch diese 11 Punkte gehen, und ist also durch dieselben vollständig definirt.

Man kann die 11 Punkte ganz beliebig annehmen. Denn wie man sie auch wählt, gewisse specielle Lagen ausgeschlossen, immer bilden die durch sie gehenden Curven vierter Ordnung ein System von allgemeinem Charakter, welches aus vier Curven $f_i = 0$ linear zusammengesetzt wird, und welches eine Fläche von der Ordnung $N = 4^2 - 11 = 5$ liefert, deren ebene Schnitte $p = 3$ haben, und welche also eine Doppelcurve 3ter Ordnung enthalten muss. Die ausgeschlossenen Lagen der Fundamentalpunkte beziehen sich darauf, dass drei jener Punkte auf einer Geraden, 6 auf einem Kegelschnitt, 10 auf einer Curve 3ter Ordnung, oder endlich 9 im Schnittpunktsystem zweier solcher liegen können. Was aber die Doppelcurve dritter Ordnung betrifft, so ist zwar ein Zerfallen derselben in Kegelschnitt und Gerade, welche sich treffen, oder in drei Gerade, deren eine die beiden andern trifft, nicht ausgeschlossen; aber wohl der Fall von Kegelschnitt und Gerade, welche sich nicht treffen, oder drei sich nicht schneidende Gerade, also alle diejenigen Fälle, welche nicht Specialitäten einer Raumcurve 3ter Ordnung sind. Denn in beiden Fällen giebt es unendlich viele Gerade, welche eine so zerfallende Curve dreimal treffen, und also die Oberfläche sechsmal schneiden, daher ganz in derselben liegen; während sich sogleich zeigen wird, dass die hier zu betrachtende Abbildung nur eine endliche Anzahl von geraden Linien liefert.

Die wirkliche Construction der Abbildung, oder vielmehr einer der später zu benutzenden dualistisch entgegengesetzten, bei welcher jedem Punkte der Oberfläche im Allgemeinen eine Gerade entspricht, erhält man leicht aus den Gleichungen (6). In diesen kann man die L_i, M_i auch beliebig durch $L_i + \sigma M_i$, $L_i + \tau M_i$ ersetzen; die Gleichung aber

$$\Sigma_i \, (L_i + \sigma M_i) \, \xi_i = 0$$

ist die Gleichung eines Ebenenbündels, welches in dem Punkte

$$L_1 + \sigma M_1 = 0 \;,\; L_2 + \sigma M_2 = 0 \;,\; L_3 + \sigma M_3 = 0,$$

d. h. in einem beliebigen Punkte der Raumcurve seinen Scheitel hat. Da nach dem eben Gesagten schon der Punkt $L_1 = 0$, $L_2 = 0$, $L_3 = 0$ ein ganz beliebiger Punkt der Curve ist, so will ich diesen zum Scheitel des zu betrachtenden Bündels nehmen, dessen Gleichung

$$L_1 \xi_1 + L_2 \xi_2 + L_3 \xi_3 = 0$$

ist. Nach §. 4 sind dann die ξ die Coordinaten einer Geraden, die der Durchschnitt der betreffenden Ebene des Bündels mit einer beliebig gewählten festen Ebene ist, auf welcher letztern die Abbildung geschieht. Es ist nur die Frage, welcher Punkt der Fläche durch diese Gerade abgebildet wird. Man construirt diesen Punkt folgendermassen. Eine Ebene des Bündels $\Sigma L_i \xi_i = 0$ schneidet ausser am Scheitel die Curve 3ter Ordnung noch in zwei Punkten. Da für Punkte der Curve die L_i den M_i proportinal sind, so besteht für diese beiden Punkte auch die Gleichung $\Sigma M_i \xi_i = 0$, also die zweite Gleichung (6). Die durch eine Ebene des Bündels $\Sigma L_i \xi_i = 0$ bestimmte Sehne der Curve ist somit durch die ersten beiden Gleichungen (6) gegeben, und geht also durch den Punkt x, welchen die Gleichungen (6) bestimmen, und welcher der Geraden ξ der eben erwähnten Bildebene entspricht. In der That geht jene Sehne nur noch durch einen Punkt der Fläche, da sie die Doppelcurve zweimal schneidet. Die Construction der Abbildung ist also folgende:

Durch einen Punkt x der Fläche legt man die Sehne der Curve dritter Ordnung, welche durch ihn geht. Fixirt man nun auf der Curve dritter Ordnung irgendwo einen Punkt, und legt von ihm aus durch die Sehne eine Ebene, so schneidet diese die Bildebene in einer Geraden, welche das Bild des Punktes x ist.

Im Folgenden wird, wo es nicht besonders bemerkt wird, die dieser Abbildung dualistisch entsprechende zu Grunde gelegt.

§. 12.

Die Curven erster, zweiter und dritter Ordnung, welche die Fläche enthält.

Für die Abbildung einer auf der Fläche liegenden Raumcurve M^{ter} Ordnung, welche in der Abbildung durch eine Curve m^{ter} Ordnung ersetzt wird, die durch die Fundamentalpunkte $\alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_{11}$ mal hindurchgeht, erhält man hier aus §. 6 (18) (19) (20) die Gleichungen:

$$M = 4m - \Sigma\alpha$$

$$(9) \qquad p = \frac{m-1 \,.\, m-2}{2} - \Sigma \frac{\alpha \,.\, \alpha - 1}{2}$$

$$1 \overline{<} \frac{m+1 \,.\, m+2}{2} - \Sigma \frac{\alpha \,.\, \alpha+1}{2}.$$

Aus denselben ergiebt sich die einfache Combination

$$(10) \qquad m \overline{<} M + p - 1,$$

welche zur Untersuchung der einfachsten auf der Fläche liegenden Curvensysteme sehr bequem ist. Ich betrachte die folgenden:

I. Gerade. Für $M = 1$, $p = 0$ hat man aus (10) $m = 0$. Es giebt also keine anderen Geraden auf der Fläche, als die 11 durch die Fundamentalpunkte dargestellten. Sie schneiden einander nicht. Da hier also alle Geraden gleichmässig in der

Abbildung berücksichtigt sind, so giebt es nur eine Art, die Fläche durch Functionen f_i vom 4^{ten} Grade abzubilden, wie auch aus der Ableitung der Abbildung erhellt.

II. Kegelschnitte. $M = 2$, $p = 0$ giebt $m \overline{\gtrless} 1$, oder vielmehr $m = 1$. Nur die Verbindungslinien zweier Fundamentalpunkte können in der ersten Gleichung (9) $M = 2$ machen. Es giebt also $\frac{11\,.\,10}{2} = 55$ Kegelschnitte auf der Fläche. Jeder schneidet 2 Fundamentalgerade je einmal und ist diesen gewissermassen zugeordnet. Zwei Kegelschnitte treffen sich nicht oder treffen sich, je nachdem sie eine zugeordnete Gerade gemein haben oder nicht.

III. Raumcurven dritter Ordnung. $M = 3$, $p = 0$ giebt $m \overline{\gtrless} 2$. Man hat also erstlich 11 Schaaren solcher Curven, welche durch Strahlbüschel abgebildet werden, die in je einem Fundamentalpunkte ihren Scheitel haben. Curven verschiedener Schaaren schneiden sich einmal, Curven derselben Schaar nicht. Die Curven einer Schaar schneiden die zugehörige Fundamentalgerade, die übrigen nicht; sie schneiden einmal die 45 Kegelschnitte, für welche ihre Fundamentalgerade nicht zugeordnet ist, die übrigen nicht. In jeder Schaar zerfällt zehnmal eine Curve in eine Gerade und einen Kegelschnitt, wobei denn alle nicht von der Schaar getroffenen Kegelschnitte auftreten. — Es giebt zweitens $\frac{11\,.\,10\,.\,9\,.\,8\,.\,7}{1\,.\,2\,.\,3\,.\,4\,.\,5} = 462$ einzelne Raumcurven dritter Ordnung, welche sich als Kegelschnitte durch fünf Fundamentalpunkte abbilden, und solchen Fünfen zugeordnet sind. Zwei derselben treffen sich 0, 1, 2, 3, 4mal, je nachdem ihre Fünfen 4, 3, 2, 1, 0 Gerade gemein haben. Jede schneidet die 15 Kegelschnitte zweimal, deren zugeordnete Gerade in ihrer Fünf nicht vorkommen, 30 Kegelschnitte einmal, bei denen eine zugeordnete Gerade der Fünf angehört, zehn Kegelschnitte nicht, deren Gerade beide in der Fünf enthalten sind. Jede dieser einzelnen Curven schneidet die Schaaren von Raumcurven einmal oder zweimal, je nachdem die der Schaar zugehörige Gerade in ihrer Fünf vorkommt oder nicht.

IV. Ebene Curven dritter Ordnung. Sie sind nur in Verbindung mit den Kegelschnitten möglich, indem man die Ebenen derselben mit der Fläche zum weitern Durchschnitt bringt. Ihre Zahl ist daher ebenfalls 55. Da sie sich je mit einem Kegelschnitte zu einem vollständigen ebenen Schnitte vereinigen, so müssen sie in der Abbildung mit den Verbindungsgeraden der Fundamentalpunkte sich zu Curven 4^{ter} Ordnung durch alle Fundamentalpunkte vereinigen, also durch Curven 3^{ter} Ordnung durch 9 Fundamentalpunkte abgebildet werden. Jede trifft also 9 Gerade je einmal, einen Kegelschnitt dreimal auf der Doppelcurve und dreimal ausserhalb derselben, 18 zweimal, 36 einmal; sie schneidet die Raumcurve dritter Ordnung von zwei Schaaren dreimal, von 9 Schaaren zweimal. Sie trifft endlich von den einzelnen Raumcurven dritter Ordnung 126 einmal, 252 zweimal, 84 dreimal, u. s. w,

Es ist leicht, diese Aufzählungen beliebig fortzusetzen.

Die dreifach berührenden Tangentenebenen der Fläche müssen in Curven schneiden, welche drei nicht auf der Doppelcurve gelegene Doppelpunkte besitzen. Es giebt solcher Ebenen hier drei Arten; entweder solche, deren Schnittcurven nicht zerfallende Curven fünfter Ordnung sind, oder solche, deren Schnittcurven in Gerade und Curven 4^{ter} Ordnung, oder drittens solche, deren Schnittcurven in Kegelschnitte und Curven dritter Ordnung zerfallen. — Im ersten Falle müssen sich die Schnittcurven als Curven 4^{ter} Ordnung durch die 11 Fundamentalpunkte abbilden, welche ausserdem drei wirkliche Doppelpunkte haben; und ihre Zahl ist gleich der Anzahl solcher Curven, welche in dem Systeme von Curven 4^{ter} Ordnung durch 11 Punkte vorkommen; eine Zahl, welche nicht leicht zu bestimmen scheint. — Im zweiten Falle muss die Curve 4^{ter} Ordnung sich als Curve 4^{ter} Ordnung abbilden, welche einen Fundamentalpunkt zum Doppelpunkte hat. Da nun die Curve vierter Ordnung im Raume von der Geraden viermal geschnitten wird, der Doppelpunkt in der Abbildung aber nur zwei Durchschnitte anzeigt, so müssen die beiden andern sich dadurch in der Abbildung aufgelöst haben, dass sie im Raume in die Doppelcurve gefallen sind. Jede durch eine der Geraden gelegte Ebene berührt also in der That die Fläche zweimal, nämlich in den Schnittpunkten der Geraden mit der ergänzenden Curve vierter Ordnung, welche nicht auf der Doppelcurve liegen. Da ferner die Ebene die Doppelcurve dreimal treffen muss, so muss die Curve vierter Ordnung im Raume noch einen Doppelpunkt besitzen, welcher aber kein Berührungspunkt mit der Fläche ist, und in der Abbildung aufgelöst erscheint. Unter den Ebenen nun, welche durch eine bestimmte Gerade der Fläche gehen, giebt es eine gewisse Zahl von solchen, welche noch einmal die Fläche berühren, und also dreifach berührende Ebenen der Fläche sind. Bei diesen müssen die ergänzenden Curven 4^{ter} Ordnung zwei Doppelpunkte besitzen. In der Abbildung erhält man ihre Bilder, indem man das Büschel von Curven 4^{ter} Ordnung untersucht, welches durch 10 Fundamentalpunkte geht und im 11^{ten} einen Doppelpunkt hat, und die Frage stellt, wie viele Curven des Büschels einen weitern Doppelpunkt besitzen. Nach Hrn. Cayley ist die Zahl der Curven n^{ter} Ordnung in einem Büschel mit α gemeinsamen Doppelpunkten, welche noch einen weitern Doppelpunkt besitzen, gleich

$$3\,(n-1)^2 - 7\,\alpha,$$

(Crelles Journal, Bd. 64. p. 167); man erhält also hier für $n = 4$,

$\alpha = 1$ die Zahl 20. Es giebt also für die hier betrachtete Fläche 11.20 dreifach berührende Tangentenebenen, welche durch eine der Geraden gehen. — Endlich ist noch die Ebene jedes der oben angegebenen 55 Kegelschnitte eine dreifach berührende Ebene. Denn jede dieser Ebenen schneidet noch in einer Curve dritter Ordnung, welche mit dem entsprechenden Kegelschnitte 6 Punkte gemein hat. Der ebene Schnitt hat also 6 Doppelpunkte, von denen nur drei auf die Doppelcurve fallen, während die drei übrigen wirkliche Berührungspunkte sein müssen.

Es wurde schon oben erwähnt, dass jede durch eine der Geraden gelegte Ebene noch in einer Curve vierter Ordnung schneidet, die mit der Geraden zwei feste Punkte gemein hat, ihre Schnittpunkte mit der Doppelcurve. Die übrigbleibenden beweglichen Punktepaare bilden eine Involution, welche man leicht in der Abbildung nachweist. In der Abbildung werden diese Curven vierter Ordnung wieder Curven vierter Ordnung, die in dem betreffenden Fundamentalpunkte einen Doppelpunkt haben. In der Abbildung stellen sich also alle diese Curven zusammen als Büschel dar, und die Tangentenpaare des Doppelpunktes entsprechen den beweglichen Schnittpunktpaaren der Geraden und der Curve vierter Ordnung im Raume. Da nun die Tangentenpaare jenes Doppelpunkts eine Involution bilden, so hat man den Satz:

Legt man durch eine der Geraden der Oberfläche Ebenen, so schneiden dieselben immer in Curven vierter Ordnung, deren jede die Gerade nur in zwei veränderlichen Punkten trifft. Diese Punktepaare bilden eine Involution. Es giebt also nur zwei Ebenen des Büschels, bei welchen die Curve vierter Ordnung die Gerade in Punkten berührt, welche nicht der Doppelcurve angehören. (Doppelpunkte der Involution.)

§. 13.

Die Abbildung der Doppelcurve. Hyperelliptischer Charakter derselben.

Die Doppelcurve bildet sich im vorliegenden Falle nach den Abzählungen des §. 7 als Curve 7ter Ordnung mit 11 Doppelpunkten, den Fundamentalpunkten ab, und die Abbildung gehört also zum Geschlecht $p' = 4$. Jede Abbildung eines ebenen Schnittes trifft die Curve in sechs beweglichen Punkten, oder vielmehr in drei beweglichen Punktepaaren, entsprechend den drei Durchschnittspunkten der Ebene mit der Raumcurve. Untersuchen wir zunächst die Curve, welche von der Verbindungslinie solcher Paare umhüllt wird, und welche der Raumcurve selbst Punkt für Punkt eindeutig entspricht.

Zum Zwecke dieser Untersuchung muss ich auf die Construction zurückgehen, welche in §. 11 entwickelt wurde, und bei welcher jedem Punkte der Oberfläche eine Gerade in der Bildebene entsprach. Um die zu einem Punkte x gehörige Gerade zu finden, legte man durch x die einzig mögliche Sehne der Curve, verband sie mit einem beliebig gewählten Punkte L der Doppelcurve durch eine Ebene, und schnitt Letztere mit der Bildebene. Liegt nun x der Doppelcurve sehr nahe, so kann man diese Construction folgendermassen auffassen. In einem Punkte y der Doppelcurve giebt es zwei Tangentenebenen E, E' der Oberfläche. Jede dieser Ebenen schneidet die Doppelcurve noch in einem Punkte, z oder z'. Die Geraden yz, yz' sind Sehnen der Doppelcurve, welche die Oberfläche in zwei dem Punkte y in den beiden Ebenen EE' sehr nahe liegenden Punkten schneiden. Diese, und bei einem Grenzübergange also auch den Punkt y selbst, bildet man also ab, indem man die oben erwähnte Construction auf die Sehnen yz, yz' anwendet, und die beiden dadurch auf der Bildebene erhaltenen Geraden bilden also zusammen den Punkt y der Doppelcurve ab. Man sieht, dass der Schnittpunkt der beiden auf der Bildebene erhaltenen Geraden direct erhalten wird, wenn man die Verbindungslinie von L mit y durch die Bildebene schneidet. Der Ort solcher Punkte ist also der Durchschnitt der Bildebene mit dem Kegel zweiter Ordnung, welcher L zum Scheitel hat, und die Doppelcurve enthält, ist also ein Kegelschnitt.

Ueberträgt man dieses dualistisch, so tritt an die Stelle des Linienpaars, welches einen Punkt y der Doppelcurve abbildet, ein Punktepaar, an Stelle seines Durchschnitts ihre Verbindungslinie, und also hat man folgenden Satz:

Die Verbindungslinien der Punktepaare auf der Abbildung der Doppelcurve umhüllen einen Kegelschnitt.

Die Punkte der Doppelcurve sind durch die Gleichungen

$$(11) \qquad L_1 + \lambda M_1 = 0 \quad , \quad L_2 + \lambda M_2 = 0 \quad , \quad L_3 + \lambda M_3 = 0$$

gegeben. Von den Gleichungen (6) wird für Punkte, welche diesen Gleichungen genügen, die zweite eine Folge der ersten, oder man kann die ersten beiden Gleichungen (6) durch eine Combination beider

$$(12) \qquad (L_1 + \mu M_1)\,\xi_1 + (L_2 + \mu M_2)\,\xi_2 + (L_3 + \mu M_3)\,\xi_3 = 0$$

ersetzen, zu der dann die dritte Gleichung (6):

$$(13) \qquad \Sigma\Sigma A_{i\varkappa}\,\xi_i\,\xi_\varkappa = 0$$

hinzuzufügen ist, um die Abbildung der Doppelcurve analytisch auszudrücken. Entwickelt man aus (11) die Verhältnisse der x, so erhält man die Coordinaten eines beweglichen Punkts der Doppelcurve als ganze Functionen dritter Ordnung von λ. Führt man diese Werthe in (12) ein, so wird die Gleichung durch $\lambda - \mu$ theilbar, und nach Entfernung dieses Factors bleibt ein Ausdruck von der Form

$$(14) \qquad K_1\,\xi_1 + K_2\,\xi_2 + K_3\,\xi_3 = 0 = J + \lambda J_1 + \lambda^2 J_2$$

zurück, in welchem die K quadratische Functionen von λ, die J lineare der ξ sind. Dagegen geht die Gleichung (13) in

$$(15) \qquad \Sigma\Sigma Q_{ix}\,\xi_i\,\xi_x = 0 = P + \lambda P_1 + \lambda^2 P_2 + \lambda^3 P_3$$

über, wo die Q kubische Functionen von λ sind, die P quadratische der ξ. Eliminirt man aus (14) und (15) die Grösse λ, so erhält man die Gleichung der Curve 7ten Grades, welche die Doppelcurve abbildet:

$$0 = \begin{vmatrix} P & P_1 & P_2 & P_3 & 0 \\ 0 & P & P_1 & P_2 & P_3 \\ J & J_1 & J_2 & 0 & 0 \\ 0 & J & J_1 & J_2 & 0 \\ 0 & 0 & J & J_1 & J_2 \end{vmatrix}.$$

Bezeichnet man aber durch v_1, v_2, v_3 Coordinaten einer Geraden in der Bildebene, so erhält man die Gleichung des beweglichen Punktepaares dieser Abbildung, indem man aus den Gleichungen (14), (15) und der Gleichung

$$v_1\,\xi_1 + v_2\,\xi_2 + v_3\,\xi_3 = 0$$

die ξ eliminirt, also die Gleichung bildet:

$$(16) \qquad 0 = \begin{vmatrix} Q_{11} & Q_{12} & Q_{13} & K_1 & v_1 \\ Q_{12} & Q_{22} & O_{23} & K_2 & v_2 \\ Q_{13} & Q_{23} & Q_{33} & K_3 & v_3 \\ K_1 & K_2 & K_3 & 0 & 0 \\ v_1 & v_2 & v_3 & 0 & 0 \end{vmatrix} = \Sigma\Sigma R_{ik}\,v_i\,v_k.$$

Die rechte Seite dieser Gleichung ist immer in zwei für die v lineare Factoren (Punkte eines Paares) zerlegbar, und darf daher identisch gleich

$$(\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \alpha_3 v_3)\,(\beta_1 v_1 + \beta_2 v_2 + \beta_3 v_3)$$

gesetzt werden, wo die α, β die Coordinaten der Punkte eines Paares sind. Diese beiden linearen Factoren werden getrennt, indem man nach einem bekannten Determinantensatz:

$$\Sigma\Sigma R_{ix}\,v_i v_x \;.\; \Sigma\Sigma R_{ix} c_i c_x - (\Sigma\Sigma R_{ix} v_i c_x)^2 =$$

$$= - \begin{vmatrix} Q_{11} & Q_{12} & Q_{13} & K_1 \\ Q_{12} & Q_{22} & Q_{23} & K_2 \\ Q_{13} & Q_{23} & Q_{33} & K_3 \\ K_1 & K_2 & K_3 & 0 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} K_1 & v_1 & c_1 \\ K_2 & v_2 & c_2 \\ K_3 & v_3 & c_3 \end{vmatrix}^2$$

setzt, wo die c ganz beliebige Grössen sind. Denn bezeichnet man durch Ω den Ausdruck

$$\Omega = \begin{vmatrix} Q_{11} & Q_{12} & Q_{13} & K_1 \\ Q_{21} & Q_{22} & Q_{23} & K_2 \\ Q_{31} & Q_{32} & Q_{33} & K_3 \\ K_1 & K_2 & K_3 & 0 \end{vmatrix}, \tag{16a}$$

so kann man die Gleichung (16) jetzt durch die in den c lineare Gleichung ersetzen:

$$0 = \Sigma\Sigma R_{i\varkappa}\, v_i\, c_\varkappa \pm \begin{vmatrix} k_1 & v_1 & c_1 \\ k_2 & v_2 & c_2 \\ k_3 & v_3 & c_3 \end{vmatrix} . \sqrt{\Omega}\,,$$

und man hat also für die Coordinaten eines Punktes α der Abbildung die Ausdrücke:

$$\begin{aligned} \varrho\alpha_1 &= R_{11}\, c_1 + R_{12}\, c_2 + R_{13}\, c_3 + (k_2\, c_3 - k_3\, c_2) \sqrt{\Omega} \\ \varrho\alpha_2 &= R_{12}\, c_1 + R_{22}\, c_2 + R_{23}\, c_3 + (k_3\, c_1 - k_1\, c_3) \sqrt{\Omega} \\ \varrho\alpha_3 &= R_{13}\, c_1 + R_{23}\, c_2 + R_{33}\, c_3 + (k_1\, c_2 - k_2\, c_1) \sqrt{\Omega}\,, \end{aligned} \tag{17}$$

während die Coordinaten β des zugehörigen Punktes aus diesen durch Veränderung des Zeichens von $\sqrt{\Omega}$ entsteht.

Die Gleichungen (17) sind die Gleichungen der Abbildung der Doppelcurve in einer Form, welche sogleich zeigt, dass die Curve auf die hyperelliptischen Functionen führt, bei welchen die Irrationalität $\sqrt{\Omega}$ auftritt. Die Grösse Ω ist von der 10ten Ordnung in λ, was mit dem Geschlecht $p' = 4$ übereinstimmt.

Die Tangentenebenen eines Punktes der Doppelcurve fallen zusammen, sobald die jenem Punkte entsprechenden Punkte der Abbildung sich vereinigen, also bei $\Omega = 0$. Die Doppelcurve enthält daher zehn Punkte, welche Rückkehrpunkte der Oberfläche sind.

Aus der Gleichung (16) folgt, wenn man eine Reihe der v durch die K, die andere durch die c ersetzt, dass identisch

$$\Sigma\Sigma R_{i\varkappa}\; K_i\, c_\varkappa = 0.$$

Multiplicirt man daher die Gleichungen (17) mit K_1, K_2, K_3 und addirt, so erhält man:

$$\alpha_1 K_1 + \alpha_2 K_2 + \alpha_3 K_3 = 0,$$

und ebenso für die β, welche von den α nur durch das Vorzeichen von $\sqrt{\Omega}$ unterschieden sind:

$$\beta_1 K_1 + \beta_2 K_2 + \beta_3 K_3 = 0.$$

Die K verhalten sich daher wie die Coordinaten v_1, v_2, v_3 der Verbindungslinie α, β, und die Coordinaten der Tangenten des oben erwähnten von diesen Verbindungslinien umhüllten Kegelschnittes sind also durch die Gleichungen gegeben:

$$\begin{aligned} \varrho v_1 &= K_1 \\ \varrho v_2 &= K_2 \\ \varrho v_3 &= K_3 \,, \end{aligned} \tag{18}$$

deren rechte Seiten in der That quadratisch in λ sind.

§. 14.

Eigenschaften der Fläche, welche mit dem hyperelliptischen Charakter der Abbildung der Doppelcurve zusammenhängen.

Die Curve 7^{ter} Ordnung, durch welche die Doppelcurve abgebildet wird, hat die 11 Fundamentalpunkte zu Doppelpunkten, was 33 Bedingungen für die Coefficienten einer Curve 7^{ter} Ordnung ergiebt. Da nun eine Curve 7^{ter} Ordnung erst durch 35 Bedingungen völlig bestimmt ist, so sind noch wenigstens zwei weitere Punkte nöthig, um die hier zu betrachtende Curve geometrisch zu bestimmen. Solche Punkte construirt man leicht in grösserer Anzahl, indem man die ebenen Schnitte der Oberfläche betrachtet, welche durch eine der 11 Geraden gehen. Ein Büschel von Ebenen, welches durch dieselbe Gerade geht, schneidet die Fläche noch in einem Büschel von Curven vierter Ordnung, und diese bilden sich nach §. 12 als ein Büschel von Curven vierter Ordnung ab, welche durch alle Fundamentalpunkte gehen, in dem jener Geraden entsprechenden aber einen Doppelpunkt besitzen. Diese Curven sind dadurch in der That 13 Bedingungen unterworfen, und ihre Gleichungen haben also die Form $\varphi + \varkappa\psi = 0$; sie müssen sich also in 16 festen Punkten schneiden. Von diesen werden 14 durch die Fundamentalpunkte absorbirt; es bleiben also nur zwei weitere übrig. Indem man sie construirt, erhält man jedesmal zwei weitere Punkte der Curve 7^{ter} Ordnung. Denn diese beiden Punkte, da sie in der Ebene allen Curven des Büschels angehören, müssen auch im Raume auf Punkte führen, welche allen Curven des Raumbüschels gemein sind. Solcher Punkte aber giebt es in der That zwei; denn da die Gerade die Doppelcurve in zwei Punkten trifft, so liegen mit diesen auf der Fläche zwei Punkte vereinigt, durch welche alle Curven vierter Ordnung gehen, welche mit der Geraden zusammen ebene Schnitte bilden. Und zwar sieht man hieraus, dass die beiden so construirten Punkte Paare bilden mit den beiden Punkten der Curve 7^{ter} Ordnung, welche in dem entsprechenden Doppelpunkte vereinigt liegen. Wenn man also auf die 11 verschiedenen Arten solche zwei Punkte construirt, so hat man nicht nur 22 weitere Punkte der Curve 7^{ter} Ordnung; sondern indem man sie mit dem jedesmal entsprechenden Fundamentalpunkte verbindet, hat man auch 22 Tangenten des Kegelschnitts, welcher von den Verbindungslinien der Paare umhüllt wird.

Dieser Kegelschnitt selbst ist die Abbildung einer Raumcurve 8^{ter} Ordnung, welche auf der Oberfläche liegt. Um diese Curve geometrisch zu charakterisiren, stellt man folgende Betrachtung an. Bei der in §. 11 gegebenen Construction einer Abbildung, in welcher jedem Punkte eine Gerade entspricht, hatte man von dem Punkte L der Raumcurve aus, wie in §. 13 gezeigt ist, die Raumcurve zu projiciren, um einen Kegelschnitt zu erhalten, welcher den Punkten der Doppelcurve eindeutig entsprach. Legt man also durch L und eine Tangente der Raumcurve eine Ebene, so schneidet diese die Bildebene in einer Tangente dieses Kegelschnitts. Sonach sind also die Tangenten des Kegelschnittes die Bilder derjenigen Punkte, in welchen die Tangenten der Doppelcurve die Fläche nochmals schneiden. Und indem man dieses dualistisch überträgt, findet man den Satz:

Der von den Verbindungslinien der Paare umhüllte Kegelschnitt ist die Abbildung der Curve achter Ordnung, in welcher die Fläche fünfter Ordnung von der abwickelbaren Fläche der Tangenten der Doppelcurve geschnitten wird.

Der Umstand, dass die Tangenten des Kegelschnittes die Curve 7^{ter} Ordnung immer so treffen, dass unter den Schnittpunkten ein Paar ist, führt auf den Satz:

Es giebt auf der Fläche eine einfache Schaar von Raumcurven vierter Ordnung, welche die erwähnte Curve achter Ordnung berühren, und der Reihe nach die Punkte der Doppelcurve zu wirklichen Doppelpunkten haben.

Da es unter den Punkten der Doppelcurve 10 Rückkehrpunkte giebt, d. h. 10 Fälle, in welchen die Punkte eines Paares unendlich nahe zusammenrücken, so enthält jene Schaar 10 Curven mit Rückkehrpunkt; ihre Bilder befinden sich unter den gemeinsamen Tangenten des Kegelschnittes und der Curve 7^{ter} Ordnung, deren Zahl 40 ist, da die Classe der Curve 7^{ter} Ordnung gleich $7 \,.\, 6 - 2 \,.\, 11 = 20$ wird.

Die Punktepaare, welche auf der Curve 7^{ter} Ordnung auftreten, geben ihr nicht nur die Eigenschaft auf hyperelliptische Functionen zu führen, sondern geben ihr zugleich besondere Eigenschaften, die von denen der andern Curven 7^{ter} Ordnung mit jenen 11 Doppelpunkten, welche auf allgemeinere Abel'sche Functionen führen, wesentlich verschieden sind.

Jede Curve vierter Ordnung, welche durch die 11 Fundamentalpunkte geht, schneidet unsere Punktepaare 7^{ter} Ordnung in 3 Punktepaaren. Obgleich also $p' = 4$, so bestimmen doch nicht 2 solcher 6 Schnittpunkte die 4 übrigen, sondern jeder bestimmt einen gewissen andern, welcher mit ihm ein Paar bildet. Alle Curven vierter Ordnung durch jene 11 Punkte bilden ein System mit drei Parametern, und schneiden die Curve 7^{ter} Ordnung in 6 beweglichen Punkten; alle Curven aber dieser dreifach unendlichen Schaar, welche durch einen weitern festen Punkt gehen, enthalten noch einen andern, und bilden eine zweifach unendliche Schaar, welche die Curve 7^{ter} Ordnung nur noch in vier beweglichen Punkten trifft; alle Curven der Doppelschaar, welche durch einen dritten festen Punkt der Curve 7^{ter} Ordnung gehen, treffen sie dann noch in einem vierten, haben nur zwei bewegliche Schnittpunkte mit ihr und bilden eine einfach unendliche Schaar. Während es also im Allgemeinen bei $p' = 4$ zu jedem Punkte einer Curve n^{ter} Ordnung nur zwei Punktepaare giebt, welche mit ihm und den Doppelpunkten der Curve eine Curve $(n-3)^{\text{ter}}$ Ordnung nicht bestimmen (vgl. Clebsch und Gordan, Theorie der Abel'schen Functionen, p. 213), so giebt es hier zu jedem Punkte unendlich viel solcher Punktepaare, von denen immer einer mit dem erstern ein Paar bildet, während der zweite beliebig ist, oder welche beide zusammen ein Paar bilden.

Diese besonderen Verhältnisse zeigen sich weiter insbesondere bei den Curven vierter Ordnung, welche durch die Fundamentalpunkte gehen und die Curve 7^{ter} Ordnung in gegebener Weise berühren. Erstlich kann eine solche Curve in einem Punkte berühren. Dieser Punkt aber muss dann mit dem ihm unendlich nahen ein Paar bilden, muss also die Abbildung eines Rückkehrpunktes sein; und es giebt also 10 doppelt unendliche Schaaren solcher Curven. Sie bilden die 10 doppelt unendlichen Schaaren von ebenen Schnitten ab, deren Ebenen durch je einen der Rückkehrpunkte gehen. Zweitens kann eine der Curven vierter Ordnung die Forderung erfüllen müssen, die Curve 7^{ter} Ordnung in zwei Punkten zu berühren. Dies sind entweder Abbildungen zweier Rückkehrpunkte, oder zwei Punkte eines Paares. Im ersten Falle erhält man die Bilder der $\frac{10 \cdot 9}{2} = 45$ Schaaren von Schnittcurven, deren Ebenen durch zwei Rückkehrpunkte gehen; im andern Falle die doppelt unendliche Schaar von Bildern ebener Schnitte, deren Ebenen die Doppelcurve berühren. Endlich können Curven vierter Ordnung die Curve 7^{ter} Ordnung dreimal berühren. Dabei erhält man zunächst $2^{p-1}(2^p - 1) = 120$ einzelne Curven (vgl. Crelles Journal, Bd. 63. p. 208), Bilder ebener Schnitte, welche durch drei Rückkehrpunkte gehen. Aber ausserdem treten 10 einfach unendliche Schaaren auf, welche in den Punkten eines Paares und der Abbildung eines Rückkehrpunktes berühren; Abbildungen von ebenen Schnitten, deren Ebenen die von einem Rückkehrpunkte an die Doppelcurve gezogenen Tangentenebenen sind.

Ausserdem können Curven vierter Ordnung durch die 11 Fundamentalpunkte die Curve 7^{ter} Ordnung zweimal dreipunktig berühren, wo denn beide Berührungspunkte ein Paar bilden. Die so erhaltene einfache Curvenschaar bildet die ebenen Schnitte ab, deren Ebenen die Schmiegungsebenen der Raumcurve dritter Ordnung sind.

§. 15.

Flächen zweiter Ordnung, welche durch die Doppelcurve gehen. Die Gleichung der Abbildung der Doppelcurve.

Durch die Doppelcurve dritter Ordnung lassen sich unendlich viele Flächen zweiter Ordnung legen, deren jede die gegebene Oberfläche noch in einer Curve vierter Ordnung schneidet. Es ist eine Doppelschaar von Raumcurven vierter Ordnung, welche so entstehen. Nun sind die Gleichungen der durch die Raumcurve dritter Ordnung gelegten Flächen zweiter Ordnung in der Form enthalten:

$$(19) \qquad 0 = \begin{vmatrix} L_1 & M_1 & \gamma_1 \\ L_2 & M_2 & \gamma_2 \\ L_3 & M_3 & \gamma_3 \end{vmatrix},$$

in welcher die γ willkürliche Constante bedeuten. Aber nach den letzten beiden Gleichungen (4) verhalten sich für Punkte der Fläche fünfter Ordnung die Unterdeterminanten der L, M wie die ξ, so dass, wenn man statt der x_i die Functionen f_i setzt, die Gleichungen stattfinden:

$$(20) \qquad \begin{aligned} L_2M_3 - L_3M_2 &= S.\,\xi_1 \\ L_3M_1 - L_1M_3 &= S.\,\xi_2 \\ L_1M_2 - L_2M_1 &= S.\,\xi_3. \end{aligned}$$

Die Gleichung (19) verwandelt sich hierdurch in:

$$(21) \qquad S\,.\,(\gamma_1\,\xi_1 + \gamma_2\,\xi_2 + \gamma_3\,\xi_3) = 0,$$

wo die Parameter nur im zweiten Factor vorkommen. Dieser stellt also die bewegliche Schnittcurve des Systems (19) mit der Oberfläche dar, $S = 0$ die feste, also die Doppelcurve, wie denn in der That auch S von der 7^{ten} Ordnung ist. Man hat also erstlich den Satz:

Die geraden Linien der Abbildung stellen diejenigen Curven vierter Ordnung und 2^{ter} Species dar, in welchen die durch die Doppelcurve gelegten Flächen zweiter Ordnung die Oberfläche schneiden.

Die Gleichung der Abbildung der Doppelcurve aber findet man, indem man die Gleichung (19) wirklich in die Form (20) überführt. Um diese Ueberführung zu bewerkstelligen, bemerke ich, dass die Gleichung (19) durch Elimination der η aus den Gleichungen:

$$(22)\qquad \begin{cases} L_1\eta_1 + L_2\eta_2 + L_3\eta_3 = 0 \\ M_1\eta_1 + M_2\eta_2 + M_3\eta_3 = 0 \\ \gamma_1\eta_1 + \gamma_2\eta_2 + \gamma_3\eta_3 = 0 \end{cases}$$

entsteht. An Stelle der ersten dieser Gleichungen kann man nach (6) setzen:

$$\Sigma\left(\frac{\partial\lambda_i}{\partial\xi_1}\eta_1 + \frac{\partial\lambda_i}{\partial\xi_2}\eta_2 + \frac{\partial\lambda_i}{\partial\xi_3}\eta_3\right)x_i = 0,$$

oder, wenn man für die x aus (8) ihre Werthe setzt, die Determinante:

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial\lambda_1}{\partial\xi_1}\eta_1 + \frac{\partial\lambda_1}{\partial\xi_2}\eta_2 + \frac{\partial\lambda_1}{\partial\xi_3}\eta_3 & \lambda_1 & \mu_1 & \varphi_1 \\ \frac{\partial\lambda_2}{\partial\xi_1}\eta_1 + \frac{\partial\lambda_2}{\partial\xi_2}\eta_2 + \frac{\partial\lambda_2}{\partial\xi_3}\eta_3 & \lambda_2 & \mu_2 & \varphi_2 \\ \frac{\partial\lambda_3}{\partial\xi_1}\eta_1 + \frac{\partial\lambda_3}{\partial\xi_2}\eta_2 + \frac{\partial\lambda_3}{\partial\xi_3}\eta_3 & \lambda_3 & \mu_3 & \varphi_3 \\ \frac{\partial\lambda_4}{\partial\xi_1}\eta_1 + \frac{\partial\lambda_4}{\partial\xi_2}\eta_2 + \frac{\partial\lambda_4}{\partial\xi_3}\eta_3 & \lambda_4 & \mu_4 & \varphi_4 \end{vmatrix} = 0.$$

Führt man nun für λ_i den Werth

$$\lambda_i = \frac{\partial\lambda_i}{\partial\xi_1}\xi_1 + \frac{\partial\lambda_i}{\partial\xi_2}\xi_2 + \frac{\partial\lambda_i}{\partial\xi_3}\xi_3$$

ein, so übersieht man leicht, dass man dieser Gleichung auch die Form geben kann:

$$0 = \begin{vmatrix} \frac{\partial\lambda_1}{\partial\xi_1} & \frac{\partial\lambda_1}{\partial\xi_2} & \frac{\partial\lambda_1}{\partial\xi_3} & \mu_1 & \varphi_1 \\ \frac{\partial\lambda_2}{\partial\xi_1} & \frac{\partial\lambda_2}{\partial\xi_2} & \frac{\partial\lambda_2}{\partial\xi_3} & \mu_2 & \varphi_2 \\ \frac{\partial\lambda_3}{\partial\xi_1} & \frac{\partial\lambda_3}{\partial\xi_2} & \frac{\partial\lambda_3}{\partial\xi_3} & \mu_3 & \varphi_3 \\ \frac{\partial\lambda_4}{\partial\xi_1} & \frac{\partial\lambda_4}{\partial\xi_2} & \frac{\partial\lambda_4}{\partial\xi_3} & \mu_4 & \varphi_4 \\ \eta_2\xi_3 - \eta_3\xi_2 & \eta_3\xi_1 - \eta_1\xi_3 & \eta_1\xi_2 - \eta_2\xi_1 & 0 & 0 \end{vmatrix}$$

oder, indem man nach der letzten Reihe ordnet, und unter p_1, p_2, p_3 die nicht mit Null multiplicirten Unterdeterminanten versteht:

$$0 = \begin{vmatrix} p_1 & \eta_1 & \xi_1 \\ p_2 & \eta_2 & \xi_2 \\ p_3 & \eta_3 & \xi_3 \end{vmatrix}.$$

Ganz ebenso verwandelt sich die zweite Gleichung (22) in:

$$0 = -\begin{vmatrix} \frac{\partial u_1}{\partial \xi_1} & \frac{\partial u_1}{\partial \xi_2} & \frac{\partial u_1}{\partial \xi_3} & \lambda_1 & \varphi_1 \\ \frac{\partial u_2}{\partial \xi_1} & \frac{\partial u_2}{\partial \xi_2} & \frac{\partial u_2}{\partial \xi_3} & \lambda_2 & \varphi_2 \\ \frac{\partial u_3}{\partial \xi_1} & \frac{\partial u_3}{\partial \xi_2} & \frac{\partial u_3}{\partial \xi_3} & \lambda_3 & \varphi_3 \\ \frac{\partial u_4}{\partial \xi_1} & \frac{\partial u_4}{\partial \xi_2} & \frac{\partial u_4}{\partial \xi_3} & \lambda_4 & \varphi_4 \\ \eta_2\xi_3 - \eta_3\xi_2 & \eta_3\xi_1 - \eta_1\xi_3 & \eta_1\xi_2 - \eta_2\xi_1 & 0 & 0 \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} q_1 & \eta_1 & \xi_1 \\ q_2 & \eta_2 & \xi_2 \\ q_3 & \eta_3 & \xi_3 \end{vmatrix}$$

Benutzt man nun die so transformirten Gleichungen, so wird

$$\begin{vmatrix} L_1 & M_1 & \gamma_1 \\ L_2 & M_2 & \gamma_2 \\ L_3 & M_3 & \gamma_3 \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} p_1\xi_3 - p_3\xi_2 & q_2\xi_3 - q_3\xi_2 & \gamma_1 \\ p_3\xi_1 - p_1\xi_3 & q_3\xi_1 - q_1\xi_3 & \gamma_2 \\ p_1\xi_2 - p_2\xi_1 & q_1\xi_2 - q_2\xi_1 & \gamma_3 \end{vmatrix} =$$
$$= -(\gamma_1\xi_1 + \gamma_2\xi_2 + \gamma_3\xi_3)\, \Sigma \pm p_1 q_2 \xi_3 .$$

Man hat daher

$$S = - \Sigma \pm p_1 q_2 \xi_3 ,$$

und die Gleichung der Abbildung der Doppelcurve wird:

$$\Sigma \pm p_1 q_2 \xi_3 = 0.$$

§. 16.

Flächen vierter Ordnung, welche längs einer Raumcurve zehnter Ordnung berühren.

Eine bemerkenswerthe Schaar von Curven erhält man durch Betrachtung einer Art von Oberflächen vierter Ordnung, welche die gegebene Fläche längs einer Curve berühren. Bezeichnet man durch $\Phi_{\varkappa\varkappa'}$ den Ausdruck

$$(23) \qquad \Phi_{\varkappa\varkappa'} = \begin{vmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} & L_1 + \varkappa M_1 \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} & L_2 + \varkappa M_2 \\ A_{31} & A_{32} & A_{33} & L_3 + \varkappa M_3 \\ L_1 + \varkappa' M_1 & L_2 + \varkappa' M_2 & L_3 + \varkappa' M_3 & 0 \end{vmatrix},$$

so ist nach bekannten Sätzen $\Phi_{\varkappa\varkappa}\Phi_{\varkappa'\varkappa'} - \Phi^2_{\varkappa\varkappa'}$ gleich dem Produkt der Determinante der A mit einer andern Determinante, welche entsteht, indem man jene mit den beiden Reihen $L_i + \varkappa M_i$, $L_i + \varkappa' M_i$ gleichzeitig horizontal und vertikal rändert. Aber die letztere Determinante ist $(\varkappa - \varkappa')^2$ multiplicirt mit der Determinante, welche nach (3) gleich Null gesetzt die gegebene Fläche darstellt. Jede Fläche $\Phi_{\varkappa\varkappa'}$ schneidet daher die gegebene Fläche so, dass im Durchschnitt $\Phi^2_{\varkappa\varkappa'} = 0$, d. h. sie schneidet in zwei zusammenfallenden Curven, oder sie berührt längs einer Curve. Man hat so den Satz:

Die Flächen $\Phi_{\varkappa\varkappa} = 0$ bilden eine einfache Schaar von Flächen vierter Ordnung, welche die gegebene Fläche längs Raumcurven zehnter Ordnung berühren, und je zwei solcher Raumcurven, welche von den Berührungen mit den Flächen $\Phi_{\varkappa\varkappa} = 0$, $\Phi_{\varkappa'\varkappa'} = 0$ herrühren, liegen auf einer Fläche der doppelt unendlichen Schaar $\Phi_{\varkappa\varkappa'} = 0$.

Um nun die Lage der Fläche $\Phi_{\varkappa\varkappa'} = 0$ näher zu untersuchen, kann man zunächst ihre 12 Durchschnittspunkte mit der Doppelcurve der Fläche fünfter Ordnung bestimmen. Von diesen Punkten sind zwei die durch die Parameter $\varkappa$ und $\varkappa'$ bestimmten Punkte der Raumcurve dritter Ordnung, welche durch die Gleichungen

$$L_1 + \varkappa M_1 = 0 \quad , \quad L_2 + \varkappa M_2 = 0 \quad , \quad L_3 + \varkappa M_3 = 0$$

und

$$L_1 + \varkappa' M_1 = 0 \quad , \quad L_2 + \varkappa' M_2 = 0 \quad , \quad L_3 + \varkappa' M_3 = 0$$

gegeben sind. Die Flächen $\Phi_{\varkappa\varkappa} = 0$ berühren also die Raumcurve in dem durch den Parameter $\varkappa$ auf ihr bestimmten Punkte. Die anderen 10 Schnittpunkte der Doppelschaar $\Phi_{\varkappa\varkappa'} = 0$ mit der Curve dritter Ordnung sind fest; es sind nämlich keine andern, als die auf letzterer gelegenen Rückkehrpunkte der Fläche fünfter Ordnung. Um dieses nachzuweisen, genügt es, auf die Betrachtungen des §. 13 zurückzugehen. Indem man nämlich für die x_i die Functionen dritter Ordnung von λ einsetzt, welche jene Grössen als Coordinaten eines Punktes der Raumcurve charakterisiren, verwandelten sich die $A_{i\varkappa}$ in $Q_{i\varkappa}$, die Grössen $L_i + \varkappa M_i$ und $L_i + \varkappa' M_i$ in $(\varkappa - \lambda)\, K_i$ und $(\varkappa' - \lambda)\, K_i$. Daher verwandelt sich der Ausdruck (23) in (vgl. 16ᵃ)

$$(\varkappa - \lambda)\ (\varkappa' - \lambda)\,.\,\Omega = 0.$$

Die oben erwähnten Punkte der Doppelcurve werden durch die ersten beiden Factoren gegeben; der letzte führt auf die 10 Rückkehrpunkte.

Der vollständige Durchschnitt der Fläche 4ter Ordnung $\Phi_{\varkappa\varkappa'} = 0$ mit der gegebenen Fläche muss sich als Curve von der Ordnung $4 \cdot 4 = 16$ abbilden; aber da sich nach dem Vorigen dieser Durchschnitt in die Berührungscurven der letztern Fläche mit den Flächen $\Phi_{\varkappa\varkappa} = 0$ und $\Phi_{\varkappa'\varkappa'} = 0$ auflöst, so muss jede einzelne dieser Berührungscurven sich als Curve achter Ordnung abbilden. Die Gleichung der Abbildung einer solchen Curve findet man leicht aus den Gleichungen (4), indem man bemerkt, dass, sobald man $\mu = \varkappa\lambda$ setzt, und an Stelle der letzten beiden Gleichungen (4) die Combination

$$(L_1 + \varkappa' M_1)\,\xi_1 + (L_2 + \varkappa' M_2)\,\xi_2 + (L_3 + \varkappa' M_3)\,\xi_3 = 0$$

treten lässt, die Elimination der ξ sofort $\Phi_{\varkappa\varkappa'} = 0$ liefert. Begnügt man sich also $\mu = \varkappa\lambda$ zu setzen, ohne von dieser letzten Combination Gebrauch zu machen, so erhält man die Gleichungen für die gemeinsame Schnittcurve der gegebenen Fläche mit den Flächen $\Phi_{\varkappa\varkappa'} = 0$, welches auch $\varkappa'$ sei, d. h. die Berührungscurve mit $\Phi_{\varkappa\varkappa} = 0$. Die fraglichen Gleichungen sind also:

$$
(23^a)\qquad
\begin{aligned}
A_{11}\xi_1 + A_{12}\xi_2 + A_{13}\xi_3 &= (L_1 + \varkappa M_1)\,\lambda \\
A_{21}\xi_1 + A_{22}\xi_2 + A_{23}\xi_3 &= (L_2 + \varkappa M_2)\,\lambda \\
A_{31}\xi_1 + A_{32}\xi_2 + A_{33}\xi_3 &= (L_3 + \varkappa M_3)\,\lambda \\
L_1\,\xi_1 + L_2\,\xi_2 + L_3\,\xi_3 &= 0 \\
M_1\,\xi_1 + M_2\,\xi_2 + M_3\,\xi_3 &= 0.
\end{aligned}
$$

Die gesuchte Abbildung findet man, indem man aus diesen Gleichungen λ und die x eliminirt. Zu diesem Ende schreibt man die obigen Gleichungen passender in der folgenden Form, in welche sie durch die identischen Gleichungen (6) sogleich übergeführt werden:

$$
\begin{aligned}
x_1\frac{\partial\varphi_1}{\partial\xi_1} + x_2\frac{\partial\varphi_2}{\partial\xi_1} + x_3\frac{\partial\varphi_3}{\partial\xi_1} + x_4\frac{\partial\varphi_4}{\partial\xi_1} &= 2\lambda\,(L_1 + \varkappa M_1) \\
x_1\frac{\partial\varphi_1}{\partial\xi_2} + x_2\frac{\partial\varphi_2}{\partial\xi_2} + x_3\frac{\partial\varphi_3}{\partial\xi_2} + x_4\frac{\partial\varphi_4}{\partial\xi_2} &= 2\lambda\,(L_2 + \varkappa M_2) \\
x_1\frac{\partial\varphi_1}{\partial\xi_3} + x_2\frac{\partial\varphi_2}{\partial\xi_3} + x_3\frac{\partial\varphi_3}{\partial\xi_3} + x_4\frac{\partial\varphi_4}{\partial\xi_3} &= 2\lambda\,(L_3 + \varkappa M_3) \\
x_1\lambda_1 + x_2\lambda_2 + x_3\lambda_3 + x_4\lambda_4 &= 0 \\
x_1\mu_1 + x_2\mu_2 + x_3\mu_3 + x_4\mu_4 &= 0.
\end{aligned}
$$

Aus diesen Gleichungen folgt das Verschwinden der Determinante:

$$
(24)\qquad \Psi_\varkappa = \begin{vmatrix}
\frac{\partial\varphi_1}{\partial\xi_1} & \frac{\partial\varphi_2}{\partial\xi_1} & \frac{\partial\varphi_3}{\partial\xi_1} & \frac{\partial\varphi_4}{\partial\xi_1} & L_1 + \varkappa M_1 \\
\frac{\partial\varphi_1}{\partial\xi_2} & \frac{\partial\varphi_2}{\partial\xi_2} & \frac{\partial\varphi_3}{\partial\xi_2} & \frac{\partial\varphi_4}{\partial\xi_2} & L_2 + \varkappa M_2 \\
\frac{\partial\varphi_1}{\partial\xi_3} & \frac{\partial\varphi_2}{\partial\xi_3} & \frac{\partial\varphi_3}{\partial\xi_3} & \frac{\partial\varphi_4}{\partial\xi_3} & L_3 + \varkappa M_3 \\
\lambda_1 & \lambda_2 & \lambda_3 & \lambda_4 & 0 \\
\mu_1 & \mu_2 & \mu_3 & \mu_4 & 0
\end{vmatrix} = 0.
$$

Dieser Ausdruck ist vom vierten Grade in den ξ, enthält aber auch noch die x, und zwar linear, in der letzten Vertikalreihe. Setzt man für diese die ihnen proportionalen Grössen f_i ein, so erhält man eine Gleichung achten Grades, die Gleichung der gesuchten Abbildungscurve.

Man sieht aus der Form (24), dass die Abbildungen der Berührungscurven der Flächen $\Phi_{\varkappa\varkappa} = 0$ mit der gegebenen Flächedie Gleichungsform

$$U + \varkappa V = 0$$

annehmen, also ein Büschel von Curven achter Ordnung bilden. Von den 64 Grundpunkten dieses Büschels sind 10 die Abbildungen der Rückkehrpunkte, 44 fallen in die Fundamentalpunkte, von den letzten 10 wird weiterhin zu sprechen sein. Was das Verhalten des Büschels gegen die Fundamentalpunkte betrifft, so ist leicht zu sehen, dass jede Curve des Büschels jeden Fundamentalpunkt zum Doppelpunkt hat, wodurch denn in der That jeder Fundamentalpunkt vierfacher Grundpunkt des Büschels wird. Multiplicirt man nämlich die Gleichung (24), welche eine Curve des Büschels darstellt, mit der Gleichung einer beliebigen in der Bildebene liegenden Geraden:

$$\alpha_1 \xi_1 + \alpha_2 \xi_2 + \alpha_3 \xi_3 = 0,$$

so kann man das Product als Determinante mit sechs Reihen darstellen, welche aus der Determinante (24) entsteht, indem man die Vertikalreihe

$$\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, 0, 0, \quad \alpha_1 \xi_1 + \alpha_2 \xi_2 + \alpha_3 \xi_3$$

hinzufügt, und die fehlenden Glieder der letzten Vertikalreihe durch Nullen ergänzt. Zieht man nun die ersten drei Horizontalreihen, mit ξ_1, ξ_2, ξ_3 multiplicirt, von der letzten ab, und dividirt diese durch -2, so bleibt die Gleichung:

$$0 = \begin{vmatrix} \frac{\partial \varphi_1}{\partial \xi_1} & \frac{\partial \varphi_2}{\partial \xi_1} & \frac{\partial \varphi_3}{\partial \xi_1} & \frac{\partial \varphi_4}{\partial \xi_1} & L_1 + \varkappa M_1 & \alpha_1 \\ \frac{\partial \varphi_1}{\partial \xi_2} & \frac{\partial \varphi_2}{\partial \xi_2} & \frac{\partial \varphi_3}{\partial \xi_2} & \frac{\partial \varphi_4}{\partial \xi_2} & L_2 + \varkappa M_2 & \alpha_2 \\ \frac{\partial \varphi_1}{\partial \xi_3} & \frac{\partial \varphi_2}{\partial \xi_3} & \frac{\partial \varphi_3}{\partial \xi_3} & \frac{\partial \varphi_4}{\partial \xi_3} & L_3 + \varkappa M_3 & \alpha_3 \\ \lambda_1 & \lambda_2 & \lambda_3 & \lambda_4 & 0 & 0 \\ \mu_1 & \mu_2 & \mu_3 & \mu_4 & 0 & 0 \\ \varphi_1 & \varphi_2 & \varphi_3 & \varphi_4 & 0 & 0 \end{vmatrix},$$

ein Ausdruck, welcher für die vier Unterdeterminanten f_i homogen vom zweiten Grade ist; denn eine Anordnung nach den letzten drei Reihen giebt die einfachere Form

$$(24^a) \qquad 0 = \begin{vmatrix} f_1 \frac{\partial \varphi_1}{\partial \xi_1} + f_2 \frac{\partial \varphi_2}{\partial \xi_1} + f_3 \frac{\partial \varphi_3}{\partial \xi_1} + f_4 \frac{\partial \varphi_4}{\partial \xi_1} & L_1 + \varkappa M_1 & \alpha_1 \\ f_1 \frac{\partial \varphi_1}{\partial \xi_2} + f_2 \frac{\partial \varphi_2}{\partial \xi_2} + f_3 \frac{\partial \varphi_3}{\partial \xi_2} + f_4 \frac{\partial \varphi_4}{\partial \xi_2} & L_2 + \varkappa M_2 & \alpha_2 \\ f_1 \frac{\partial \varphi_1}{\partial \xi_3} + f_2 \frac{\partial \varphi_2}{\partial \xi_3} + f_3 \frac{\partial \varphi_3}{\partial \xi_3} + f_4 \frac{\partial \varphi_4}{\partial \xi_3} & L_3 + \varkappa M_3 & \alpha_3 \end{vmatrix},$$

wo die beiden ersten Vertikalreihen für die f_i linear sind. Die 11 gemeinsamen Verschwindungspunkte sind also Doppelpunkte dieser, und daher auch der Curve (24).

Die 56 Schnittpunkte der Abbildung der Doppelcurve mit den Abbildungen der in Rede stehenden Berührungscurven sind hiernach die 11 viermal zu rechnenden Fundamentalpunkte, die Abbildungen der 10 Rückkehrpunkte, und endlich ein bewegliches Punktepaar, die Abbildung des die Berührungscurve charakterisirenden Punktes der Doppelcurve.

Die 10 fehlenden Grundpunkte des Büschels achter Ordnung sind Abbildungen der Punkte, in denen sich alle Flächen $\Phi_{\varkappa\varkappa'}$ mit der Fläche fünfter Ordnung noch treffen, und welche nicht der Doppelcurve angehören, welche also wirkliche Berührungspunkte dieser Flächen mit der Fläche fünfter Ordnung sind. Man findet diese Abbildungen in folgender Weise. Die Gleichungen (24) werden erfüllt, unabhängig von $\varkappa$, indem man in (4) λ und μ verschwinden lässt, und also von dem Systeme ausgeht:

$$(25) \quad \left\{\begin{aligned} 0 &= A_{11}\xi_1 + A_{12}\xi_2 + A_{13}\xi_3 = \tfrac{1}{2}\Sigma \frac{\partial \varphi_i}{\partial \xi_1} x_i \\ 0 &= A_{21}\xi_1 + A_{22}\xi_2 + A_{23}\xi_3 = \tfrac{1}{2}\Sigma \frac{\partial \varphi_i}{\partial \xi_2} x_i \\ 0 &= A_{31}\xi_1 + A_{32}\xi_2 + A_{33}\xi_3 = \tfrac{1}{2}\Sigma \frac{\partial \varphi_i}{\partial \xi_3} x_i \\ 0 &= L_1\xi_1 + L_2\xi_2 + L_3\xi_3 = \Sigma \lambda_i x_i \\ 0 &= M_1\xi_1 + M_2\xi_2 + M_3\xi_3 = \Sigma \mu_i x_i \end{aligned}\right.$$

Dies sind fünf Gleichungen, in denen die drei Verhältnisse der x mit den zwei Verhältnissen der ξ die Unbekannten bilden, welche also dadurch bestimmt sind. Die Punkte x, welche durch diese Gleichungen gegeben werden, liegen nicht auf der Doppelcurve; denn wenn man

$$L_1 + \lambda M_1 = 0\ ,\ L_2 + \lambda M_2 = 0\ ,\ L_3 + \lambda M_3 = 0$$

setzt, und die x aus diesen Gleichungen durch λ ausdrückt, so reduciren sich nach §. 13 die Gleichungen (25) auf das System

$$\begin{aligned} Q_{11}\xi_1 + Q_{12}\xi_2 + Q_{13}\xi_3 &= 0 \\ Q_{21}\xi_1 + Q_{22}\xi_2 + Q_{23}\xi_3 &= 0 \\ Q_{31}\xi_1 + Q_{32}\xi_2 + Q_{33}\xi_3 &= 0 \\ K_1\xi_1 + K_2\xi_2 + K_3\xi_3 &= 0, \end{aligned}$$

welche keine gemeinsame Lösung gestatten. Um die Anzahl der gemeinsamen Lösungen der Gleichungen (25) zu bestimmen, eliminirt man die x der Reihe nach aus je vier der Gleichungen. Die Eliminationsresultate seien, je nachdem man die erste, zweite u. s. w. Gleichung ausgelassen hat:

$$F_1 = 0\ ,\ F_2 = 0\ ,\ F_3 = 0\ ,\ A = 0\ ,\ M = 0.$$

Die Ausdrücke F_1, F_2, F_3, A, M sind dann durch die vier Gleichungen verbunden ($i = 1, 2, 3, 4$):

$$F_1 \frac{\partial \varphi_i}{\partial \xi_1} + F_2 \frac{\partial \varphi_i}{\partial \xi_2} + F_3 \frac{\partial \varphi_i}{\partial \xi_3} + A\lambda_i + M\mu_i = 0.$$

Nun haben die Curven $A = 0$, $M = 0$, welche von der vierten Ordnung sind, 16 Punkte gemein. Diese Punkte sind theils solche, für welche F_1, F_2, F_3 verschwinden, und welche also zu den gesuchten gehören, theils solche, für welche die F_h irgend welchen Werth η_h haben, so dass aus der obigen Identität die 4 Gleichungen folgen:

$$\eta_1 \frac{\partial \varphi_i}{\partial \xi_1} + \eta_2 \frac{\partial \varphi_i}{\partial \xi_2} + \eta_3 \frac{\partial \varphi_i}{\partial \xi_3} = 0 .$$

Die Lösungen dieser für die ξ, η symmetrischen Gleichungen erhält man aber aus den Punkten der Paare, welche für die vier Kegelschnitte

$$\varphi_1 = 0 \ , \ \varphi_2 = 0 \ , \ \varphi_3 = 0 \ , \ \varphi_4 = 0$$

gleichzeitig harmonisch sind, und deren Anzahl gleich 3 ist, wie ich in Crelles Journal Bd. 67, p. 3 gezeigt habe. Die Gleichungen (25) haben daher $16 - 6 = 10$ Lösungen, wie zu beweisen war. Die Doppelschaar $\Phi_{\varkappa\varkappa'} = 0$ berührt also die gegebene Fläche in 10 festen Punkten, deren Bestimmung durch das Vorliegende erreicht ist.

Aber es giebt unendlich viele Systeme von Flächen $\Phi_{\varkappa\varkappa'} = 0$. Denn aus der Gleichung der Fläche sind die $A_{i\varkappa}$ nicht völlig bestimmt, sondern man kann statt der $A_{i\varkappa}$ die Ausdrücke

$$A'_{i\varkappa} = A_{i\varkappa} + \gamma_i L_\varkappa + \gamma_\varkappa L_i + \delta_i M_\varkappa + \delta_\varkappa M_i \tag{26}$$

setzen, wobei die γ_i, δ_i willkürliche Constante sind. In den Gleichungen (4) ändert sich dadurch nichts, als dass an Stelle von λ, μ die Grössen

$$\begin{aligned} \lambda' &= \lambda + \gamma_1 \xi_1 + \gamma_2 \xi_2 + \gamma_3 \xi_3 \\ \mu' &= \mu + \delta_1 \xi_1 + \delta_2 \xi_2 + \delta_3 \xi_3 \end{aligned} \tag{27}$$

treten. Wohl aber ändern sich die Flächen $\Phi_{\varkappa\varkappa'} = 0$ sowohl, als ihre Schnittcurven mit den Flächen fünfter Ordnung. Die neuen Flächen $\Phi'_{\varkappa\varkappa'} = 0$ erhält man, indem man in (23) die $A'_{i\varkappa}$ an Stelle der $A_{i\varkappa}$ setzt. Eine kleine Rechnung zeigt, dass $\Phi'_{\varkappa\varkappa'}$ dann folgenden Ausdruck annimmt:

$$\begin{aligned} \Phi'_{\varkappa\varkappa'} = \Phi_{\varkappa\varkappa'} &- \begin{vmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} & L_1 + \varkappa M_1 & \delta_1 - \varkappa'\gamma_1 \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} & L_2 + \varkappa M_2 & \delta_2 - \varkappa'\gamma_2 \\ A_{31} & A_{32} & A_{33} & L_3 + \varkappa M_3 & \delta_3 - \varkappa'\gamma_3 \\ L_1 & L_2 & L_3 & 0 & 0 \\ M_1 & M_2 & M_3 & 0 & 0 \end{vmatrix} \\ &- \begin{vmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} & L_1 + \varkappa' M_1 & \delta_1 - \varkappa\gamma_1 \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} & L_2 + \varkappa' M_2 & \delta_2 - \varkappa\gamma_2 \\ A_{31} & A_{32} & A_{33} & L_3 + \varkappa' M_3 & \delta_3 - \varkappa\gamma_3 \\ L_1 & L_2 & L_3 & 0 & 0 \\ M_1 & M_2 & M_3 & 0 & 0 \end{vmatrix} \\ &+ \begin{vmatrix} L_1 & M_1 & \delta_1 - \varkappa\gamma_1 \\ L_2 & M_2 & \delta_1 - \varkappa\gamma_2 \\ L_3 & M_3 & \delta_3 - \varkappa\gamma_3 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} L_1 & M_1 & \delta_1 - \varkappa'\gamma_1 \\ L_2 & M_2 & \delta_2 - \varkappa'\gamma_2 \\ L_3 & M_3 & \delta_3 - \varkappa'\gamma_3 \end{vmatrix} . \end{aligned}$$

Den Einfluss des Einführens der $A'_{i\varkappa}$ an Stelle der $A_{i\varkappa}$ auf die Schnittcurven der Flächen $\Phi_{\varkappa\varkappa'} = 0$ mit der Fläche fünfter Ordnung, oder die Berührungscurven der Flächen $\Phi_{\varkappa\varkappa} = 0$ findet man am einfachsten aus den Gleichungen $\Psi_\varkappa = 0$ ihrer Abbildungen (24). Aus (26) folgt

$$\Sigma\Sigma A'_{i\varkappa}\,\xi_i\,\xi_\varkappa = \Sigma\varphi'_i\,x_i = \Sigma\varphi_i\,x_i + 2\,\Sigma\lambda_i\,x_i\;\Sigma\gamma_\varkappa\,\xi_\varkappa + 2\,\Sigma\mu_i x_i\;\Sigma\delta_\varkappa\,\xi_\varkappa;$$

daher

$$\varphi'_i = \varphi_i + 2\lambda_i\;\Sigma\gamma_\varkappa\,\xi_\varkappa + 2\mu_i\;\Sigma\delta_\varkappa\,\xi_\varkappa,$$

so dass die Functionen f_i offenbar nicht geändert werden, also $f'_i = f_i$ ist. Nehmen wir daher an Stelle der Gleichung (24) die Gleichung (24ª), deren rechte Seite den Werth $-\frac{1}{2}\,\Psi_\varkappa\,(\alpha_1\,\xi_1 + \alpha_2\,\xi_2 + \alpha_3\,\xi_3)$ hat, und ersetzen in ihr die $A_{i\varkappa}$ durch die $A'_{i\varkappa}$, so hat man nur die Functionen φ in der ersten Vertikalreihe zu verändern, und man erhält also für die transformirte Function $\Psi'_\varkappa$ die Gleichung:

$$-\tfrac{1}{2}\,\Psi'_\varkappa\,(\alpha_1\,\xi_1 + \alpha_2\,\xi_2 + \alpha_3\,\xi_3) = -\tfrac{1}{2}\,\Psi_\varkappa\,(\alpha_1\,\xi_1 + \alpha_2\,\xi_2 + \alpha_3\,\xi_3) +$$

$$+\,2\,\Sigma\gamma_\varkappa\xi_\varkappa \begin{vmatrix} \Sigma\frac{\partial\lambda_i}{\partial\xi_1}f_i & L_1 + \varkappa M_1 & \alpha_1 \\ \Sigma\frac{\partial\lambda_i}{\partial\xi_2}f_i & L_2 + \varkappa M_2 & \alpha_3 \\ \Sigma\frac{\partial\lambda_i}{\partial\xi_3}f_i & L_3 + \varkappa M_3 & \alpha_3 \end{vmatrix}$$

$$+\,2\,\Sigma\delta_\varkappa\xi_\varkappa \begin{vmatrix} \Sigma\frac{\partial\mu_i}{\partial\xi_1}f_i & L_1 + \varkappa M_1 & \alpha_1 \\ \Sigma\frac{\partial\mu_i}{\partial\xi_2}f_i & L_2 + \varkappa M_2 & \alpha_2 \\ \Sigma\frac{\partial\mu_i}{\partial\xi_3}f_i & L_3 + \varkappa M_3 & \alpha_3 \end{vmatrix}.$$

Bemerken wir, dass hier die Grössen L_i, M_i so verstanden werden, dass in ihnen die x_i durch die f_i ersetzt werden, so sehen wir, dass in den beiden letzten Determinanten die ersten Vertikalreihen beziehungsweise von den L_i, M_i nicht verschieden sind. Daher hat man einfacher:

$$\Psi'_\varkappa\,(\alpha_1\,\xi_1 + \alpha_2\,\xi_2 + \alpha_3\,\xi_3) = \Psi_\varkappa\,(\alpha_1\,\xi_1 + \alpha_2\,\xi_2 + \alpha_3\,\xi_3)$$
$$+\,4\,\Sigma\,(\delta_\varkappa - \varkappa\gamma_\varkappa)\,\xi_\varkappa\cdot\Sigma\pm L_1\,M_2\,\alpha_3.$$

Nun ist nach §. 15

$$\Sigma\pm L_1\,M_2\,\alpha_3 = S\cdot(\alpha_1\,\xi_1 + \alpha_2\,\xi_2 + \alpha_3\,\xi_3),$$

wo $S = 0$ die Abbildung der Doppelcurve ist. Daher bleibt übrig:

(28) $$\Psi'_\varkappa = \Psi_\varkappa + (m_1\,\xi_1 + m_2\,\xi_2 + m_3\,\xi_3)\,S$$

wobei nur m_i für den ganz beliebigen Coefficienten $4\,(\delta_\varkappa - \varkappa\gamma_\varkappa)$ gesetzt ist.

Die Curven zehnter Ordnung, welche die Berührungscurven der Flächen vierter Ordnung mit der gegebenen

Fläche sind, bilden daher eine vierfach unendliche Schaar. Ihre Abbildungen setzen sich aus einem der oben beschriebenen besondern Büschel und aus der Combination der Abbildung der Doppelcurve mit einer willkürlichen Geraden zusammen. Alle haben mit der Abbildung der Doppelcurve die Doppelpunkte und die Abbildungen der Rückkehrpunkte gemein; und durch jedes Punktepaar von $S = 0$ geht noch eine dreifach unendliche Schaar von Curven, so dass also im Raume eine dreifach unendliche Schaar von Berührungscurven durch jeden Punkt der Doppelcurve hindurchgeht.

Jede Gerade der Abbildung stellt nach §. 15 eine Curve vierter Ordnung und 2ter Species dar, welche der Schnitt der Oberfläche fünfter Ordnung mit einer durch die Doppelcurve gelegten Fläche zweiter Ordnung ist. Eine jede solche bestimmt eine Gerade der Abbildung, also in (28) die Verhältnisse der m; die Raumcurve vierten Grades wird von der durch $\Psi_\varkappa = 0$ abgebildeten Raumcurve zehnter Ordnung in 8 Punkten (Schnittpunkte der Geraden mit $\Psi_\varkappa = 0$ in der Abbildung) getroffen, und jedes solche Punktsystem bestimmt dann mit der Raumcurve zehnter Ordnung zusammen eine einfach unendliche Schaar von Berührungscurven zehnter Ordnung, welche durch jene acht Punkte hindurchgehen, u. s. w.

§. 17.

Flächen fünfter Ordnung mit zwei sich nicht schneidenden Doppelgeraden. Niedrigste Abbildung auf einer Ebene.

Ich gehe jetzt zur Betrachtung der Fläche fünfter Ordnung mit zwei sich nicht schneidenden Doppelgeraden über, die einfachste auf einer Ebene abbildbare Fläche, bei welcher die Ordnung von dem Geschlechte des ebenen Schnittes der allgemeinen Regel (§. 1) entgegen um weniger als 3 verschieden ist. Die Doppelgeraden seien $x_1 = 0$, $x_2 = 0$ und $x_3 = 0$, $x_4 = 0$. Dann muss jeder Term der Flächengleichung wenigstens von der zweiten Dimension für x_1, x_2 und ebenso von der zweiten für x_3, x_4 sein. Setzt man daher in jener Gleichung

$$(1) \qquad x_2 = \lambda x_1 \quad , \quad x_4 = \mu x_3 ,$$

so geht die Gleichung der Fläche nach Division mit $x_1^2 x_3^2$ in eine Form über, welche die x nur noch linear enthält, während sowohl λ als μ quadratisch darin vorkommt, also, wenn man nach den x ordnet:

$$(2) \qquad 0 = A_1 x_1 + A_2 x_2 + A_3 x_3 + A_4 x_4 ,$$

wo die A Functionen sind, welche sowohl λ als μ quadratisch enthalten. Aus (1) und (2) zusammen folgt:

$$
(3)\qquad \begin{aligned}
\varrho x_1 &= \quad A_3 + \mu A_4 \\
\varrho x_2 &= \quad \lambda (A_3 + \mu A_4) \\
\varrho x_3 &= \; - (A_1 + \lambda A_2) \\
\varrho x_4 &= - \mu (A_1 + \lambda A_2),
\end{aligned}
$$

wodurch die Abbildung gegeben ist. Setzt man in diesen Gleichungen

$$
(4)\qquad \lambda = \frac{\xi_1}{\xi_3}, \quad \mu = \frac{\xi_2}{\xi_3},
$$

und multiplicirt mit ξ_3^6, so gehen aus den A_i homogene Functionen vierter Ordnung B_i hervor, welche sowohl ξ_1 als ξ_2 nur quadratisch enthalten. Und die Gleichungen der Abbildung werden also:

$$
(5)\qquad \begin{aligned}
\varrho x_1 &= \quad (\xi_3 B_3 + \xi_2 B_4)\, \xi_3 \\
\varrho x_2 &= \quad (\xi_3 B_3 + \xi_2 B_4)\, \xi_1 \\
\varrho x_3 &= - (\xi_3 B_1 + \xi_1 B_2)\, \xi_3 \\
\varrho x_4 &= - (\xi_3 B_1 + \xi_1 B_2)\, \xi_2.
\end{aligned}
$$

Diese Gleichungen zeigen zunächst, dass die Doppelgeraden

$$x_1 = 0, \; x_2 = 0 \text{ und } x_3 = 0, \; x_4 = 0$$

durch die beiden Curven fünfter Ordnung

$$
(6)\qquad \xi_3 B_3 + \xi_2 B_4 = 0, \quad \xi_3 B_1 + \xi_1 B_2 = 0
$$

abgebildet werden. Die erste dieser Gleichungen ist für ξ_2, ξ_3 homogen von der dritten, für ξ_1, ξ_3 homogen von der zweiten Ordnung, bei der zweiten ist es umgekehrt. Die erste Curve hat daher bei $\xi_2 = 0$, $\xi_3 = 0$ einen dreifachen, bei $\xi_1 = 0$, $\xi_3 = 0$ einen Doppelpunkt, die andere umgekehrt. Und zwar sind die beiden Curven (6) übrigens ganz allgemeiner Natur, da über die Coefficienten in den B nichts vorausgesetzt wurde, und da jede Curve der angegebenen Art sehr leicht und zwar auf unendlich viele Arten in der Form (6) dargestellt werden kann. Die beiden Curven (6) schneiden sich ausserdem noch in 13 einfachen Punkten.

Die Abbildung des Schnittes der Fläche mit der Ebene

$$a_1 x_1 + a_2 x_2 + a_3 x_3 + a_4 x_4 = 0$$

wird nach (5) durch die Curve sechsten Grades gegeben:

$$
(7)\quad (a_1 \xi_3 + a_2 \xi_1)(\xi_3 B_3 + \xi_2 B_4) - (a_3 \xi_3 + a_4 \xi_2)(\xi_3 B_1 + \xi_1 B_2) = 0.
$$

Betrachtet man die a_i als Parameter, so hat man ein System von Curven sechster Ordnung vor sich, welches erstlich durch alle Schnittpunkte der Curven (6) geht, zugleich aber durchaus homogen dritter Ordnung sowohl für ξ_1, ξ_3 als für ξ_2, ξ_3 ist, und also die beiden vielfachen Punkte der Curven (6) zu dreifachen Punkten hat. Zugleich umfasst die Gleichung (7) offenbar alle Curven sechster Ordnung, die das vollständige Schnittpunktsystem der Curven (6) enthalten, sich also aus den Ausdrücken (6) zusammensetzen, und zugleich die beiden vielfachen Punkte jener Curven zu dreifachen Punkten haben.

Die Abbildung enthält also zwei dreifache und 13 einfache Fundamentalpunkte. Die letztern stellen 13 auf der Fläche liegende Gerade dar, und zwar, wie sich weiterhin zeigen wird, die einzigen Geraden, welche die Fläche ausser der Doppelgeraden enthält. Jede der erstern schneidet beide Doppelgerade, da sie in der Abbildung durch Schnittpunkte der Abbildungen der Doppelgeraden dargestellt werden.

Um die Construction der Abbildung zu erhalten, braucht man nur auf die Gleichungen (1) zurückzugehen. Legt man durch den Schnitt der Ebenen $x_1 = 0$, $x_3 = 0$ eine Bildebene, so bilden in dieser die genannte Schnittlinie zusammen mit den Schnittlinien der Ebenen $x_2 = 0$ und $x_4 = 0$ ein Dreieck, dessen Seiten in der angeführten Folge a, b, c seien. Aus der Gleichung $x_2 - \lambda x_1 = 0$ sieht man, dass λ bis auf einen constanten Factor das Abstandsverhältniss des Punktes λ, μ der Fläche, also auch jedes Punktes in einer Linie ist, welcher von dem Punkte der Fläche aus nach dem Durchschnitte der Ebenen $x_1 = 0$, $x_2 = 0$ gezogen ist. Dies trifft für jeden Punkt des zum Punkte λ, μ der Fläche nach §. 2 zugehörigen Constructionsstrahles zu, also auch für den Punkt, wo dieser Strahl die angenommene Bildebene schneidet. Daher ist endlich λ bis auf einen andern constanten Factor das Abstandsverhältniss des so construirten Bildpunktes von den Geraden b, a in der Bildebene. Genau auf dieselbe Weise sieht man ein, dass μ bis auf einen constanten Factor das Abstandsverhältniss des Bildpunktes von den Geraden c, a ist. Endlich also, setzt man $\frac{\xi_1}{\xi_3}$ für λ, $\frac{\xi_2}{\xi_3}$ für μ, so sieht man, dass die ξ sich bis auf constante Factoren wie die Abstände des Bildpunktes von den Geraden b, c, a verhalten. Indem man also das Dreieck a, b, c zum Coordinatendreieck in der Bildebene wählt, werden die ξ nach §. 4 die Coordinaten des abbildenden Punktes der Bildebene, womit die geometrische Interpretation des in den Formeln (5) enthaltenen Abbildungsprocesses aufs einfachste gegeben ist, und zwar diesmal in einer Form, in welcher wirklich jedem Punkte der Fläche ein Punkt der Bildebene zugehört, während bei den früheren Abbildungen immer einem Punkte eine Gerade entsprach.

Die Schnittlinie der Ebenen $x_1 = 0$, $x_3 = 0$, welche als die Seite a des Coordinatendreiecks der Bildebene bezeichnet wurde, schneidet die Oberfläche fünfter Ordnung in einem Punkte. Wendet man die eben erwähnte Construction auf diesen Punkt an, so wird sein Constructionsstrahl die Seite a selbst. Aber diese schneidet die Bildebene nicht in einem Punkte, sondern gehört ganz der Bildebene an; daher entspricht dem gedachten Punkte der Oberfläche nicht ein Punkt der

Bildebene, sondern die ganze Gerade $\xi_3 = 0$. Man erkennt dies auch aus den Formeln (5). Denn setzt man in diesen $\xi_3 = 0$, so wird $x_1 = 0$, $x_3 = 0$, und die andern beiden Gleichungen nehmen die Form an:

(8) $$\varrho x_2 = \alpha\, \xi_1{}^3 \xi_2{}^3 \quad , \quad \varrho x_4 = \beta\, \xi_1{}^3 \xi_2{}^3,$$

also noch

$$\alpha x_4 - \beta x_2 = 0.$$

Für $\xi_3 = 0$ erhält man also drei lineare Gleichungen zwischen den x, d. h. einen einzigen Punkt der Oberfläche, welcher der Geraden $\xi_3 = 0$ entspricht.

Aber es liegt sehr nahe, den besondern Fall zu untersuchen, in welchem die Gerade a eine der 13 Geraden der Oberfläche ist. Denn im Vorigen wurde über die besondere Lage der Ebenen $x_1 = 0, x_2 = 0$ nichts vorausgesetzt, als dass sie durch die eine Doppelgerade gehen sollten, und ebenso, dass $x_3 = 0$, $x_4 = 0$ durch die andere gingen. Daher kann man immer noch die Ebenen $x_1 = 0$, $x_3 = 0$ so bestimmen, dass ihre Schnittlinie eine beliebige, die beiden Doppelgeraden schneidende Linie ist. Da nun jede der 13 Geraden beide Doppelgeraden trifft, so kann man eine derselben zur Geraden a wählen, und erhält dadurch eine besondere Art von Abbildungen, deren es 13 verschiedene giebt, je nachdem man eine oder die andere der 13 Geraden zu Grunde legt.

In diesem besondern Falle ist die Gerade a nicht mehr Abbildung eines Punktes, sondern das Bild der ganzen auf der entsprechenden Geraden im Raume liegenden Punktreihe. Die Gleichungen (8) also müssen nicht mehr auf einen bestimmten Punkt x führen, das Verhältniss $x_2 : x_4$ muss unbestimmt sein, die Coefficienten α , β müssen verschwinden. In diesem Falle also sind B_2 und B_4 nicht mehr zugleich quadratisch in ξ_1 und quadratisch in ξ_2, sondern sie erhalten den Factor ξ_3, und die übrig bleibenden Factoren stellen, gleich Null gesetzt, Curven dritter Ordnung dar, welche durch die Punkte $\xi_1 = 0$, $\xi_3 = 0$ und $\xi_2 = 0$, $\xi_3 = 0$ hindurchgehen. Die beiden Curven (6), die Abbildungen der Doppelgeraden, sind jetzt durch Gleichungen von der Form

$$\xi_3 \cdot \varphi = 0 \quad , \quad \xi_3 \cdot \psi = 0$$

dargestellt, und $\varphi = 0$, $\psi = 0$ sind jetzt zwei Curven vierter Ordnung, von denen die erste bei $\xi_2 = 0$, $\xi_3 = 0$ einen Doppelpunkt, bei $\xi_1 = 0$, $\xi_3 = 0$ einen einfachen Punkt hat, die andere umgekehrt, und zwar sind dieselben ganz allgemeine Curven solcher Art. Sie schneiden sich ausserdem noch in 12 Punkten, den Abbildungen der 12 übrigen Geraden, während die 13te durch $\xi_3 = 0$ abgebildet ist.

Indem nun aus allen Functionen (5) der Factor ξ_3 sich absondert, sind es nur noch Functionen fünfter Ordnung, durch welche die Abbildung vor sich geht, und zwar sind die Gleichungen der Fläche jetzt:

$$(9) \qquad \begin{aligned} \varrho x_1 &= \xi_3 \varphi \\ \varrho x_2 &= \xi_1 \varphi \\ \varrho x_3 &= \xi_3 \psi \\ \varrho x_4 &= \xi_2 \psi , \end{aligned}$$

wobei $\varphi = 0$ und $\psi = 0$ jetzt die Abbildungen der Doppelgeraden werden.

§. 18.

Gerade und Kegelschnitte der Fläche. Ebenen, welche durch sie gelegt werden.

Die Abbildung des allgemeinsten ebenen Schnittes:

$$(10) \qquad (a_1 \xi_3 + a_2 \xi_1) \varphi - (a_3 \xi_3 + a_4 \xi_2) \psi = 0$$

ist zugleich die allgemeinste Curve fünfter Ordnung, welche durch die Schnittpunkte von $\varphi = 0$ und $\psi = 0$ geht, und in den Doppelpunkten dieser Curven Doppelpunkte hat. Unter den zerfallenden Curven, welche in diesem Systeme enthalten sein können, sind zunächst diejenigen zu bemerken, deren zugehörige Ebenen im Raume durch die Doppelcurven gehen. Es geschieht dies, wenn entweder $a_1 = 0$, $a_2 = 0$ oder $a_3 = 0$, $a_4 = 0$. In beiden Fällen zerlegt sich die Abbildung in die Abbildung einer Doppelgeraden und in den Büschel von Geraden, welcher im Doppelpunkte der Abbildung der andern Doppelgeraden seinen Scheitel hat. Die beiden so entstehenden Büschel von Geraden sind Abbildungen von zwei Schaaren ebener Curven dritter Ordnung, welche auf der Fläche liegen; ein solcher Büschel ist der Durchschnitt der Fläche mit den durch diejenige Doppelgerade gelegten Ebenen, in deren Abbildung der Scheitel des Büschels nur ein einfacher Punkt ist. Jede solche Ebene schneidet noch die andere Doppelgerade, und die Curven dritter Ordnung erhalten dadurch je einen Doppelpunkt.

Unter diesen Curven sind insbesondere 2 . 13, welche in eine Gerade und einen Kegelschnitt zerfallen, indem die erzeugende Ebene durch eine der 13 einfachen Geraden der Oberfläche hindurchgehen. Es giebt also 26 Kegelschnitte auf der Fläche, welche den 13 Geraden in der Art paarweise zugeordnet sind, dass jede Gerade der Schnitt der Ebenen eines solchen Paares ist. Von diesen 26 Kegelschnitten bilden sich 24 als die Verbindungslinien der doppelten Fundamentalpunkte mit den 12 übriggebliebenen einfachen ab; die beiden letzten aber, welche der bevorzugten unter den 13 Geraden zugeordnet sind, werden durch die doppelten Fundamentalpunkte selbst dargestellt.

Da jede Ebene, welche durch eine Doppelgerade geht, die andere nur in einem Punkte schneidet, so giebt in der Abbildung der Schnitt der Abbildung einer Curve dritter Ordnung mit der Abbildung der letztern Doppelgeraden ein Punktepaar an, welches einen Punkt dieser Geraden abbildet. Indem man also von dem Doppelpunkte der Abbildung einer Doppelgeraden die Strahlen zieht, erhält man auf jedem zwei Punkte, die Punktepaare der Abbildung. Unter diesen sind die sechs Tangenten, welche man von dem Doppelpunkte der Abbildung an diese ziehen kann; auf jeder Doppelgeraden liegen also sechs Rückkehrpunkte*). Dagegen wird von den Strahlen des genannten Büschels die Abbildung der andern Doppelgeraden in je 3 Punkten geschnitten; sie entsprechen den Schnitten dieser Doppelgeraden mit den Curven dritter Ordnung. Da unter den Strahlen, deren Scheitel für die Abbildung dieser Doppelgeraden nur ein einfacher Punkt ist, sich 8 Tangenten befinden, so berühren unter den Curven dritter Ordnung eines Ebenenbüschels immer 8 die Doppelgerade, welche Axe des Büschels ist.

Sämmtliche durch eine der Doppelgeraden gehende Ebenen sind als dreifach berührende zu betrachten; denn jede solche Ebene schneidet noch in einer Curve dritter Ordnung, und diese wieder die Doppelgerade in drei Punkten; in diesen letztern muss also die Ebene einen Mantel der Oberfläche berühren. Es giebt also zunächst zwei unendliche Schaaren dreifach berührender Ebenen, welche auf diese Weise erhalten werden.

Unter diesen Ebenen sind diejenigen 26 besonders hervorzuheben, welche durch eine einfache Gerade der Oberfläche gehen. Bei diesen treten die beiden Schnittpunkte der Geraden mit dem entsprechenden der oben erwähnten Kegelschnitte auf; von diesen Schnittpunkten aber liegt der eine (wie bei den Curven dritter Ordnung immer der Doppelpunkt) auf der Doppelgeraden, durch welche die Ebene nicht geht; es bleibt also nur ein weiterer Schnittpunkt übrig. Diese 26 Ebenen berühren also jede in vier Punkten die Fläche, von welchen immer drei auf einer der Doppelgeraden liegen.

*) Man erkennt dies auch leicht direct. Betrachten wir z. B. die Doppelgerade $x_1 = 0$, $x_2 = 0$, und schreiben die Gleichung der Fläche in der Form

$$Ax_1^2 + 2Bx_1x_2 + Cx_2^2 = 0,$$

wo A, B, C von der dritten Ordnung sind. Das Paar von Tangentenebenen eines Punktes der Doppelgeraden ist dann

$$A_0X_1^2 + 2B_0X_1X_2 + C_0X_2^2 = 0,$$

wo X_1, X_2 laufende Coordinaten sind, und A_0, B_0, C_0 aus A, B, C entstehen, indem man $x_1 = 0$, $x_2 = 0$ setzt. Die Bedingung für den Rückkehrpunkt ist also $A_0C_0 - B_0^2 = 0$, eine Gleichung sechsten Grades für $\frac{x_3}{x_4}$.

Nächst den Ebenenbüscheln, welche eine der Doppelgeraden zur Axe haben, verdienen nun insbesondere diejenigen Beachtung, deren Axe eine der einfachen Geraden der Oberfläche ist, und deren jeder zwei der zuletzt genannten vierpunktigen Berührungsebenen enthält. Betrachten wir insbesondere den Büschel, dessen Axe die in der Abbildung bevorzugte Gerade ist. Die Curven vierter Ordnung, in welchen die Ebenen des Büschels die Fläche noch schneiden, bilden sich in diesem Falle als Curven vierter Ordnung ab, welche durch die 12 einfachen und die beiden doppelten Fundamentalpunkte hindurchgehen. Man erhält die Gleichung der Abbildungen, indem in (10) a_2 und a_4 verschwinden lässt, wobei denn nach Auslassung des Factors ξ_3 die Gleichung eines Büschels übrig bleibt:

$$a_1\,\varphi + a_3\,\psi = 0. \tag{11}$$

Ausser den oben genannten 14 Punkten müssen diese Curven also noch zwei Schnittpunkte gemein haben. Man sieht aber, dass man in einem der doppelten Fundamentalpunkte die Tangente des Büschels (11) bildet, einmal der von φ und einmal der von ψ herrührende Theil identisch verschwindet, dass also der Parameter $a_1 : a_3$ in beiden Fällen herausgeht, und also die Curven (11) sich in diesen Punkten *berühren*, wodurch denn die richtige Zahl von Schnittpunkten hergestellt ist. Uebrigens bedeutet dies für die auf der Oberfläche liegenden Curven nur, dass alle die beiden durch die doppelten Fundamentalpunkte dargestellten Kegelschnitte in constanten Punkten schneiden, was selbstverständlich ist.

Jede dieser Curven vierter Ordnung in der Abbildung schneidet die Gerade $\xi_3 = 0$ ausser in den beiden doppelten Fundamentalpunkten in zwei beweglichen Punkten, und da diese aus dem Büschel 11 erhalten werden, so bilden sie eine Involution. Es giebt also den Doppelpunkten derselben entsprechend zwei Berührungscurven. Ferner erhält man zwei bemerkenswerthe Punktepaare, indem man die Curven $\varphi = 0$, $\psi = 0$ betrachtet, welche gleichfalls dem Büschel angehören. In diesem Falle rückt der eine Punkt des Paares in einen der doppelten Fundamentalpunkte, und wird also die Abbildung des Punktes, indem einer der durch die Gerade gehenden Kegelschnitte dieselbe ausserhalb der Doppelgeraden trifft, während der andere Punkt des Paares den Schnittpunkt der Geraden mit derjenigen Doppelgeraden abbildet, mit welcher der Kegelschnitt in einer Ebene liegt. Man hat also folgenden Satz:

Die durch eine einfache Gerade gelegten Ebenen schneiden die Fläche in Curven vierter Ordnung; von den Schnittpunkten derselben mit der Geraden fallen zwei in die Schnittpunkte A, B der Geraden mit den Dop-

pelgeraden α, β. Die andern beiden Schnittpunkte sind beweglich und bilden eine Involution. Es giebt daher zwei berührende Curven. Die Involution bestimmt sich durch zwei Paare, nämlich A mit dem andern Schnittpunkte des durch B in einer Ebene mit α gehenden Kegelschnittes, und durch B mit dem andern Schnittpunkte des durch A in einer Ebene mit β gehenden Kegelschnittes.

Alle diese Ebenen sind doppelt berührend. Unter den Ebenen jedes solchen Büschels aber sind 25 dreifach berührende. Man findet ihre Abbildungen, indem man in dem betrachtenden Curvenbüschel vierter Ordnung diejenigen Curven aufsucht, welche einen Doppelpunkt haben. Man hat also die Discriminante von (11) gleich Null zu setzen, was eine Gleichung 27. Grades für $a_1 : a_3$ giebt. Aber diese Gleichung hat zwei evidente Lösungen, nämlich $a_1 = 0$ und $a_3 = 0$, da die Discrminante von φ und ψ selbst verschwindet. Diese Lösungen führen nur auf die Curven $\varphi = 0$, $\psi = 0$, welche auszuscheiden sind; es bleiben daher nur 25 Lösungen übrig. Die ganze Zahl solcher dreipunktig berührenden Ebenen ist daher 13. 25 = 325.

Die noch übrigen dreipunktig berührenden Ebenen werden in der Abbildung durch Curven fünfter Ordnung mit fünf Doppelpunkten dargestellt. Ihre Zahl scheint schwer direct zu bestimmen.

§. 19.

Beweis, dass keine andern Geraden und Kegelschnitte auf der Fläche liegen. Hyperboloide, welche durch die Doppelgeraden gehen.

Ich werde jetzt zeigen, dass auf der Oberfläche keine andern Geraden und Kegelschnitte existiren, als die oben angegebenen. Zu diesem Zwecke benutze ich die Formel §. 6 (18) in der Form

$$m = \frac{M + \Sigma\alpha + 2\Sigma\beta \ldots}{n}.$$

Hier ist $n = 5$, ferner für Gerade $M = 1$. Sodann kann eine Gerade der Fläche keinen durch einen doppelten Fundamentalpunkt dargestellten Kegelschnitt zweimal treffen, ohne in seiner Ebene zu liegen; was aber in einer solchen Ebene lag, ist oben bereits behandelt worden. Man kann also annehmen, dass die beiden Zahlen β höchstens gleich 1 seien. Sodann kann eine auf der Fläche liegende neue Gerade höchstens 5 der 13 oben betrachteten Geraden der Fläche schneiden; schnitte sie deren 6, so läge sie mit diesen und den Doppelgeraden auf einem Hyperboloid, und dieses schnitte seinerseits die Fläche fünfter Ordnung in einer Curve 6^{ten} Grades (2 Doppelgerade + 7 einfachen Geraden), würde also ganz der Fläche angehören. Demnach kann $\Sigma\alpha$ höchstens 5 sein, und man hat also

$$m < \frac{1 + 5 + 2 \cdot 2}{5}, \text{ d. h. } m < 2.$$

Nun giebt eine Gerade der Abbildung im Allgemeinen eine Curve fünfter Ordnung im Raume, und dieser Grad kann sich um vier Einheiten nur dadurch reduciren, dass die Gerade durch beide doppelte Fundamentalpunkte geht; dann aber ist sie eine der früheren Geraden. Ein Kegelschnitt ($m = 2$) stellt im Allgemeinen eine Curve zehnter Ordnung im Raume dar, und deren Ordnung kann sich höchstens um 7 Einheiten reduciren, wenn nämlich der Kegelschnitt durch die beiden doppelten und durch drei einfache Fundamentalpunkte geht. Es giebt also in der That keine weitern Geraden auf der Fläche.

Bei der Aufsuchung von Kegelschnitten hat man $M = 2$ zu setzen. Weil etwa vorhandene Kegelschnitte nicht in der Ebene eines der früheren liegen können, so ist jedes β höchstens 2, ferner kann jedes α höchstens 1 sein, wenn man nicht auf Kegelschnitte in einer Ebene mit einer Geraden kommen will, welche schon behandelt sind. Es ist also

$$m < \frac{2 + 12 + 2 \cdot 4}{5} < 4.$$

Nun können Gerade nur Bilder von Kegelschnitten sein, wenn sie einen doppelten Fundamentalpunkt mit einem einfachen verbinden; diese Geraden stellen aber die oben gefundenen Kegelschnitte dar. Dass Kegelschnitte in der Abbildung mindestens Curven dritter Ordnung im Raume darstellen, ist vorhin schon gezeigt. Eine Curve dritter Ordnung in der Abbildung stellt im Allgemeinen eine Curve 15ter Ordnung dar; diese Ordnung erniedrigt sich höchstens um 10 Einheiten, wenn nämlich die Curve dritter Ordnung in einem doppelten Fundamentalpunkte einen Doppelpunkt hat, und durch den andern, so wie durch 5 einfache Fundamentalpunkte hindurchgeht. Endlich stellt eine Curve vierter Ordnung im Allgemeinen eine Curve 20ter Ordnung im Raume dar. Damit sie einen Kegelschnitt darstelle, muss sie drei Doppelpunkte oder einen dreifachen Punkt enthalten ($p = 0$), und die Ordnung muss sich um 18 erniedrigen. Nun sind offenbar die günstigsten Fälle die, in welchen zwei Doppelpunkte in die doppelten Fundamentalpunkte fallen, einer in einen einfachen, und die Curve noch durch fünf einfache hindurchgeht; oder in welchen ein doppelter Fundamentalpunkt dreifacher Punkt wird, und die Curve noch durch den andern und durch 7 einfache Fundamentalpunkte geht. In beiden Fällen aber beträgt die Erniedrigung nur 15 Einheiten.

Es giebt also auch keine weitern Kegelschnitte, und demnach auch keine andern ebenen Curven dritter Ordnung auf der Fläche, als diejenigen, deren Ebenen durch eine Doppelgerade gehen. Die Anzahl der zerfallenden ebenen Schnitte ist also erschöpft.

Nächst den ebenen Schnitten nehmen die Schnitte derjenigen Flächen zweiter Ordnung die Aufmerksamkeit in Anspruch, welche durch die beiden Doppelgeraden gelegt werden. Die neben den Doppelgeraden selbst dabei auftretenden Schnittcurven sind von der 6ten Ordnung; und da die Flächen zweiter Ordnung, von welcher hier die Rede ist, die Gleichungsform

$$\alpha x_1 x_3 + \beta x_1 x_4 + \gamma x_2 x_3 + \delta x_2 x_4 = 0$$

haben, so bilden dieselben sich als die Kegelschnittschaar:

$$\alpha \xi_3^2 + \beta \xi_2 \xi_3 + \gamma \xi_1 \xi_3 + \delta \xi_1 \xi_2 = 0$$

ab, d. h. als die Kegelschnitte, welche durch die doppelten Fundamentalpunkte gehen. Diese Curvenschaar ist eine dreifach unendliche, wie die Schaar der Flächen zweiter Ordnung selbst. In jedem Punkte der Fläche vierter Ordnung wird diese von einer Fläche zweiter Ordnung berührt; dann zerfällt in der Abbildung der Kegelschnitt in zwei von den doppelten Fundamentalpunkten ausgehende Gerade, welche sich in der Abbildung des Berührungspunktes treffen; in diesem Falle zerlegt sich also die Curve sechster Ordnung in zwei Curven dritter Ordnung. Eine andere Zerlegung tritt ein, wenn man die Fläche zweiter Ordnung durch eine der 13 Geraden gehen lässt. Dann bleibt eine Curve fünfter Ordnung übrig; und wählt man zu jener Geraden die bei der Abbildung bevorzugte, so bildet die Curve fünfter Ordnung sich als allgemeine Gerade ab. Die Geraden der Abbildung sind also Bilder solcher Curven fünfter Ordnung, welche mit den Doppelgeraden und der bevorzugten einfachen Geraden zusammen den vollständigen Durchschnitt der gegebenen Fläche mit einem Hyperboloid darstellen.

Da die Durchschnitte der Hyperboloide, welche durch die Doppelgeraden gehen, mit der Fläche in der Abbildung Kegelschnitte geben, welche durch zwei feste Punkte gehen, so haben diese Raumcurven sechster Ordnung für die Geometrie der Fläche die Eigenschaften von Kreisen, während die bevorzugte Gerade die Linie im Unendlichen vertritt, und die ersterwähnten Raumcurven fünfter Ordnung die Stelle der geraden Linien einnehmen. So giebt z. B. der Satz über den Mittelpunkt des gemeinsamen Orthogonalkreises dreier Kreise hier Folgendes:

Man lege durch die Doppelgeraden drei Hyperboloide; je zwei der drei so entstehenden Schnittcurven mit der Fläche treffen sich in zwei Punkten. Durch jedes dieser

Punktepaare und eine fest gewählte einfache Gerade der Fläche, sowie durch die Doppelgeraden lege man drei weitere Hyperboloide; dieselben treffen sich dann in ein und demselben Punkte der Fläche.

Indem ich hiermit diese Untersuchungen beschliesse, muss ich mich begnügen, einige Richtungen angedeutet zu haben, in denen für die betrachteten Flächen Quellen fruchtbarer Untersuchungen sich finden. Aber zugleich muss ich bemerken, dass die gefundenen Eigenschaften eben nur für die allgemeinen Flächen der gedachten Arten gelten, während sie sich in besonderen Fällen auf die mannigfaltigste Art ändern; wie z. B. wenn die Flächen Knotenpunkte erhalten, oder wenn die Doppelcurven zu Rückkehrcurven werden, u. s. w.; eine Reihe von Möglichkeiten, welche so mannigfaltig ist, dass es schwer wird, auch nur eine Uebersicht über dieselben zu gewinnen.

Göttingen, den 8ten October 1868.

INHALT.

Verantwortliche Redaction: A. Clebsch und C. Neumann.

MATHEMATISCHE ANNALEN

HERAUSGEGEBEN

VON

Carl (Friedrich)

A. CLEBSCH UND **C. NEUMANN,**

PROFESSOR IN GÖTTINGEN. PROFESSOR IN LEIPZIG.

I. Band. 3. Heft.

LEIPZIG,

DRUCK UND VERLAG VON B. G. TEUBNER.

1869.

1870, Mar. 9.
Gift of
Thomas Wren Ward,
of New York.

Notizen zu einer kürzlich erschienenen Schrift über die Principien der Elektrodynamik.

Von Carl Neumann in Leipzig.

Meine zum Jubiläum der Universität Bonn verfasste Schrift: *Die Principien der Elektrodynamik (Tübingen, 1868)*, über deren Inhalt eine vorläufige Mittheilung schon enthalten war in den Nachrichten der Göttinger Societät der Wissenschaften (Juni 1868), ist von Clausius im letzten Hefte von Poggendorff's Annalen (Bd. 135. S. 606) einer Beurtheilung unterworfen worden, mit welcher ich mich nicht einverstanden erklären kann, und durch welche ich mich zu einigen kurzen Notizen über jene Schrift veranlasst sehe.

Meine Schrift kann, wenn ich gegenwärtig auf dieselbe zurückblicke, als zusammengesetzt betrachtet werden aus zwei verschiedenen Theilen, von denen der eine, sowohl mit Bezug auf die Natur seines Inhalts als auch mit Bezug auf die Festigkeit seiner Begründung, dem andern voranzustellen ist. Demgemäss erscheint es mir angemessen, zuerst den wichtigeren, sodann den mehr untergeordneten Theil zur Sprache zu bringen, und in solcher Weise eine Trennung eintreten zu lassen, welche in meiner Schrift nicht vorhanden ist.

§. 1.

Der in erste Linie zu stellende Theil der citirten Schrift.

Als Ausgangspunkt dieses Theiles sind zweierlei Vorstellungen anzusehen, einerseits die Vorstellung, dass für die elektrischen Kräfte ein Potential existiren müsse, dass aber dieses Potential nicht allein von der relativen Lage der elektrischen Massen, sondern gleichzeitig auch noch von ihren Geschwindigkeiten abhängig sei, andererseits die Vorstellung, dass das bekannte (die ganze Mechanik beherrschende) Hamilton'sche Princip auf Potentiale solcher Art ebenso gut anwendbar sei, wie auf gewöhnliche nur von der relativen Lage abhängende Potentiale. Meine Untersuchung geht demgemäss aus von einer gewissen hypothetischen Formel für das Potential elektrischer Massen:

$$(1) \qquad w = \frac{mm_1}{r}\left[1 + \frac{1}{c^2}\left(\frac{dr}{dt}\right)^2\right].$$

Hier bedeuten m und m_1 die beiden Massen, und r ihre gegenseitige Entfernung zur Zeit t; daneben ist unter c die im Weber'schen Gesetz enthaltene Constante zu verstehen*).

Meine Untersuchung zeigt nun, wie man von der Hypothese (1) aus, bei Anwendung des Hamilton'schen Princips, unmittelbar hin geführt wird zu den bekannten Gesetzen der elektrischen Repulsion und Induction, gleichzeitig aber auch hingeführt wird zu einer die Elektrodynamik mitumfassenden Form des Princips der lebendigen Kraft. — An letzteres Resultat lehnt sich unmittelbar eine neuerdings von mir angestellte Untersuchung über die oscillirende Entladung einer Franklin'schen Tafel (vergl. die Nachrichten der Göttinger Gesellschaft der Wissenschaften. 13. Januar 1869), in welcher gezeigt wird, dass man zu der von Kirchhoff für dieses Phänomen aufgestellten Differentialgleichung gelangen kann auf einem ganz andern (schon von W. Thomson angedeuteten) Wege, nämlich direct durch Anwendung jenes Princips der lebendigen Kraft. — Es dürfte bei dieser Gelegenheit darauf aufmerksam zu machen sein, dass in meiner Schrift bei Beurtheilung der Grösse einer gegebenen Masse zwischen der nach ihrer Wirkung und zwischen der nach ihrer Trägheit gemessenen Grösse keinerlei Unterscheidung gemacht ist. Eine solche Unterscheidung eintreten zu lassen, ist aber durchaus nothwendig, falls man Massen von verschiedener Materie (wie z. B. elektrische und ponderable Massen) gleichzeitig in Betracht zieht. Setzt man daher (wie es z. B. bei elektrischen Massen üblich ist) die nach der Wirkung gemessene Grösse einer Masse gleich m, so ist die nach der Trägheit gemessene Grösse derselben keineswegs gleich m, sondern gleich fm zu setzen, wo f einen constanten Factor repräsentirt, dessen Werth lediglich abhängt von der Natur der betrachteten Materie. Dieser constante Factor ist an einigen Stellen meiner Schrift hinzuzufügen, versäumt worden. Das Versehen ist leicht zu corrigiren; die erhaltenen Resultate bleiben dabei völlig intact.

In meiner Schrift wird übrigens, was das Potential zweier Massen aufeinander anbelangt, neben der Formel (1) gleichzeitig auch die allgemeinere Formel

*) Diese Formel ist in meiner Schrift gleich zu Anfang (Seite 2) als der eigentliche Ausgangspunkt meiner Betrachtungen bezeichnet worden; die Constante $\frac{1}{c^2}$ ist dort G genannt. Dabei mag mir gestattet sein zu bemerken, dass dieselbe Formel an einer andern Stelle meiner Schrift (S. 24) behaftet ist mit einem störenden Druckfehler; statt $\frac{1}{ccr}$ ist nämlich dort zu lesen $\frac{1}{cc}$.

$$(1^a) \qquad w = mm_1 \left[\varphi(r) - \frac{r}{c^2} \frac{d\varphi(r)}{dr} \left(\frac{dr}{dt}\right)^2\right]$$

in Betracht gezogen, wo $\varphi(r)$ eine beliebige Function von r repräsentirt. Ebenso wie man bei Zugrundelegung der Hypothese (1) zu den Gesetzen der elektrischen Repulsion und Induction gelangt, genau ebenso gelangt man, wie meine Schrift zeigt, bei Zugrundelegung der Hypothese (1^a) zu demjenigen Gesetze, welches ich (im Jahre 1858) bei meiner Untersuchung über die magnetische Drehung der Polarisationsebene des Lichtes supponirt habe für die zwischen Elektricität und Aether vorhandenen Kräfte.

Gegen den bisher besprochenen Theil meiner Schrift sind von Clausius keinerlei Bedenken vorgebracht. Seine Bedenken richten sich vielmehr nur gegen denjenigen Theil, welchen ich hier als den in zweite Linie zu stellenden bezeichnet habe. Auf diesen letztern werde ich daher ausführlicher eingehen.

§. 2.

Der in zweite Linie zu stellende Theil der citirten Schrift.

Derselbe beschäftigt sich mit der vorhin genannten, hypothetisch für das Potential angenommenen Formel (1). Er sucht dieser Formel einen weiteren Unterbau zu geben; er sucht die Formel zu ersetzen durch Vorstellungen.

Das zwischen zwei Körpern oder Massen m und m_1 vorhandene Newton'sche Potential (das Product der Massen dividirt durch die Entfernung) wird von mir aufgefasst als ein Bewegungsantrieb oder (besser ausgedrückt) als ein Befehl, der von dem einen Körper gegeben und emittirt, von dem andern recipirt und befolgt wird. Gleichzeitig wird angenommen, dass der Befehl einer gewissen Zeit bedürfe, um vom Orte der Emission hinzugelangen zum Orte der Reception, dass er also (mit andern Worten) einer gewissen Zeit bedürfe, um den Raum zwischen beiden Körpern zu durchlaufen.

Die Entfernung der beiden Körper von einander mag zur Zeit t_0 bezeichnet werden mit r_0. Im Augenblick t_0 wird von dem einen Körper ein gewisser Befehl gegeben, und zwar gegeben mit Rücksicht auf die augenblicklichen Verhältnisse, d. i. mit Rücksicht auf die augenblickliche Entfernung r_0; demgemäss lautet der Befehl: $\frac{mm_1}{r_0}$. Gegeben und emittirt zur Zeit t_0, durchläuft dieser Befehl den Raum zwischen beiden Körpern, ohne unterwegs irgend welche Aenderung zu erleiden; er wird daher, weil zur Durchlaufung jenes Zwischenraums eine gewisse Zeit erforderlich ist, von dem gehorchenden Körper recipirt und befolgt werden nicht zur Zeit t_0, sondern zu einer etwas späteren Zeit t, also zu einer Zeit, wo die gegenseitige Entfernung der beiden Körper nicht mehr die Grösse r_0, sondern bereits eine etwas andere Grösse r besitzt.

Der Befehl oder Potentialwerth $\frac{mm_1}{r_0}$ kann demgemäss einerseits bezeichnet werden als das der Zeit t_0 entsprechende emissive Potential, und andererseits auch bezeichnet werden als das der Zeit t entsprechende receptive Potential. Zur Zeit t_0 wird der Befehl gegeben, zur Zeit t tritt er in Kraft*).

Die Zwischenzeit $t - t_0$ ist diejenige, deren der Befehl bedarf, um den Raum zwischen beiden Körpern zu durchlaufen. In Betreff dieser Durchlaufung ist in meiner Schrift diejenige Vorstellung zu Grunde gelegt, welche sich (wie mir scheint) als die **einfachste** darbietet, nämlich angenommen, dass der Befehl mit der constanten Geschwindigkeit c vorwärts schreitet auf demjenigen Radiusvector, dessen Anfangspunkt der befehlende und dessen Endpunkt der gehorchende Körper ist. Die mit c bezeichnete Geschwindigkeit bezieht sich also auf eine relative Bewegung; denn der Radiusvector, auf welchem der Befehl entlang geht, befindet sich selber in Bewe-

---

*) Hiermit in voller Uebereinstimmung heisst es z. B. auf Seite 6 und 7 meiner Schrift wörtlich: *„Betrachtet man nur zwei Punkte m und m_1, so sind ausgehend von der Vorstellnng einer progressiven Fortpflanzung des Potentials für jeden Zeitaugenblick t zwei verschiedene Potentiale zu unterscheiden, das emissive und das receptive.“*

„Das emissive Potential ist dasjenige, welches von jedem der beiden Punkte ausgesandt wird zur Zeit t, und welches also erst ein wenig später den andern Punkt erreicht . . . .“

„Das receptive Potential andererseits ist dasjenige, welches von jedem der beiden Punkte empfangen wird zur Zeit t, und welches also schon ein wenig früher von dem andern Punkte abgesendet ist. Das der gegebenen Zeit zugehörige receptive Potential ist demnach identisch mit dem einer früheren Zeit entsprechenden emissiven Potential . . . .“

Der letzte Satz hätte, auf Grund der eben citirten Definitionen für das emissive und receptive Potential, auch so ausgesprochen werden können: *„Der zur gegebenen Zeit von dem einen Punkte recipirte Potentialwerth ist identisch mit dem, welcher zu einer etwas früheren Zeit von dem andern Punkte emittirt wird.“* Denn unter den Potentialen sind auf den citirten Seiten meiner Schrift überall bestimmte, durch Formeln ausgedrückte Werthe verstanden.

Hieraus aber geht deutlich hervor, wie wenig in meiner Schrift die Rede sein sollte von einer unmittelbaren Achnlichkeit zwischen der Fortpflanzung des Potentiales und der des Lichtes. Würde es doch völlig ungereimt sein, wenn man sagen wollte, der in einem gegebenen Augenblicke von dem einen Punkte recipirte Lichtwerth (etwa Lichtmenge oder Lichtintensität) sei identisch mit dem, welcher zu einer etwas früheren Zeit von dem andern Punkte emittirt wird.

Ueberhaupt besitzen, wie man sieht, die von mir über das Potential gemachten Suppositionen den Gesetzen des Lichtes gegenüber eine so ausserordentlich grelle Verschiedenheit, dass es mir kaum einfallen konnte, dieselbe besonders urgiren zu wollen.

gung, fortgetragen durch die auf irgend welchen Bahnen dahinlaufenden Körper*).

Der zur Zeit t vom gehorchenden Körper recipirte Befehl $\frac{mm_1}{r_0}$ hat nun offenbar diejenige Radiusvector-Länge zu durchlaufen gehabt, welche vorhanden ist im Augenblick seiner Reception, also zu durchlaufen gehabt die zur Zeit t vorhandene Radiusvector-Länge r. Die hierzu erforderliche Zeit ist aber $\frac{r}{c}$; folglich $t - t_0 = \frac{r}{c}$.

Wird das der Zeit t entsprechende receptive Potential $\frac{mm_1}{r_0}$ mit ω bezeichnet, und wird ausserdem $t_0 = t - \Delta t$, $r_0 = r - \Delta r$ gesetzt, so ergiebt sich:

(2) $$\omega = \frac{mm_1}{r_0} = \frac{mm_1}{r - \Delta r};$$

und gleichzeitig ergiebt sich für das mit Δr correspondirende Zeitintervall Δt die Formel:

(3) $$\Delta t = t - t_0 = \frac{r}{c}.$$

Dass nun aber diese Formeln (2) und (3), bei weiterer Behandlung und bei Vernachlässigung der dritten Potenz von $\frac{1}{c}$, für das receptive Potential ω den Werth liefern: $\omega = w + \frac{d\mathfrak{w}}{dt}$, wo w den Ausdruck (1), andererseits $\mathfrak{w}$ einen aus log r und $\frac{dr}{dt}$ rational zusammengesetzten Ausdruck vorstellt; und dass ferner der eben genannte Werth bei Anwendung des Hamilton'schen Princips äquivalent wird mit dem einfacheren Werthe: $\omega = w$; — unterliegt keinem Bedenken, und ist auch in der That von Niemand in Zweifel gezogen.

Somit ist gezeigt; dass die angegebenen Vorstellungen wirklich hinleiten zu der hypothetisch angenommenen Potentialformel (1). Ob allerdings diese Ersetzung einer fremdartigen Formel durch nicht minder fremdartige Vorstellungen, einen Fortschritt involvirt, dürfte vorläufig schwer zu beurtheilen sein. Auch

---

*) Die Worte, deren ich mich hier bediene zur Explication dieser Vorstellung, haben sich mir erst gegenwärtig dargeboten. Damals, bei Abfassung meiner Schrift, hatte ich die Vorstellung etwas anders, mehr bildlich, mir eingekleidet. Ich dachte mir nämlich damals den befehlenden Körper von einer ins Unendliche ausgedehnten Atmosphäre umgeben, die gewissermassen starr mit dem Körper verbunden ist, und an allen seinen Bewegungen Theil nimmt; sodann dachte ich mir den vom Körper emittirten Befehl, mit constanter Geschwindigkeit und ohne in seiner ursprünglichen Fassung irgend welche Aenderung zu erleiden, fortlaufend in dieser rein ideellen Atmosphäre. Demgemäss brauchte ich damals das Wort *„Fortpflanzung,"* welches besser hätte ersetzt werden können durch *„Transmission"*.

habe ich bei Abfassung meiner Schrift diesem, in zweite Linie zu stellendem, Theile derselben kein zu grosses Gewicht beigelegt. Hieraus erklärt sich die auffallende Kürze, mit welcher derselbe behandelt ist; von den 38 Seiten meiner Schrift nimmt er nur etwa 3 Seiten in Anspruch. So kommt es, dass die diesem Theile zu Grunde liegenden Vorstellungen in meiner Schrift keineswegs ausführlich dargelegt, sondern nur kurz, nur im Vorübergehen angedeutet sind*). Dem Leser blieb es gewissermassen überlassen, diese Vorstellungen erst zu extrahiren aus den gegebenen Formeln; und das war (wie ich gern zugebe) keine leichte und gewiss auch keine dankbare Aufgabe. Denn jene Vorstellungen sind, wie man sieht, (wenigstens in ihrer gegenwärtigen Gestalt) sehr heterogen gegenüber denjenigen Vorstellungen, aus welchen man die Erklärungen physikalischer Processe herzuholen gewohnt ist.

Immerhin erscheint es, mir**) wenigstens, merkwürdig, dass dieselben Vorstellungen auch hinleiten zum Gesetze der gegenseitigen Einwirkung zwischen Elektricität und Aether. Substituirt man nämlich im Newton'schen Potential statt der Function $\frac{1}{r}$ eine beliebige Function $\varphi(r)$, so ergeben sich durch Zugrundelegung jener Vorstellungen an Stelle der Formeln (2) und (3) die allgemeineren Formeln:

$$(2^a) \qquad \omega = mm_1\,\varphi(r_0) = mm_1\,\varphi(r - \Delta r),$$

$$(3^a) \qquad \Delta t = t - t_0 = \frac{r}{c}.$$

Diese aber führen bei weiterer Behandlung sofort zu der Potentialformel (1^a), folglich auch zu jenem Gesetze der gegenseitigen Einwirkung zwischen Elektricität und Aether.

---

*) Ich glaubte mir solches um so eher erlauben zu dürfen, als ich jene Schrift nur als eine provisorische betrachtete, der eine ausführlichere Publication des Gegenstandes folgen sollte, und nach meiner Absicht auch folgen wird. Mit diesem provisorischen Charakter der Schrift steht in Einklang die sehr ungleichmässige Behandlung ihrer einzelnen Abschnitte; denn einige derselben sind in grösster Ausführlichkeit niedergeschrieben; von anderen nur die Resultate mitgetheilt. Demgemäss ist auch meine Schrift bisher nicht allgemein publicirt, nämlich absichtlich von mir nicht in den Buchhandel gegeben worden.

**) Ich kann nicht verlangen, dass das hier vorzubringende Argument allgemein als gültig anerkannt werde. Denn das Gesetz für die gegenseitige Einwirkung zwischen Elektricität und Aether, auf welches ich mich hier stützen werde, könnte in Zweifel gezogen werden in Folge der Verdet'schen Experimentaluntersuchungen über die bei der magnetischen Drehung der Polarisationsebene des Lichts auftretende Dispersion (Ann. d. chim. (3) T. 69. p. 415). Was mich allerdings anbelangt, so glaube ich (gestützt auf nahe liegende Gründe), dass den Resultaten von Dispersions-Beobachtungen vorläufig keine entscheidende Stimme über die Richtigkeit oder Unrichtigkeit jenes Gesetzes einzuräumen sei.

Ueberhaupt möchte ich diesen in zweite Linie zu stellenden Theil meiner Schrift keineswegs für völlig überflüssig ansehen. Vielmehr bin ich geneigt, denselben als eine Vorarbeit zu betrachten, durch welche die einer tiefer gehenden Einsicht entgegenstehenden Hindernisse, wenn auch nicht beseitigt, so doch analysirt und beleuchtet werden.

Gegen diesen in zweite Linie zu stellenden Theil meiner Schrift richten sich die Bedenken von Clausius. Ich werde im nächstfolgenden Paragraphen Gelegenheit haben, auf dieselben einzugehen.

§. 3.
Potential und Licht.

Die von mir über das Potential gemachten Suppositionen zeigen den Gesetzen des Lichtes gegenüber eine überaus grosse Verschiedenheit. So fallen z. B. was die Emission, Transmission und Reception anbelangt, unmittelbar folgende Differenzen ins Auge: Das von einem leuchtenden Körper emittirte Licht ist unabhängig von dem beleuchteten Körper; hingegen ist das in irgend einem Augenblicke von einem anziehenden Körper emittirte Potential in strictester Weise abhängig von der augenblicklichen Lage des angezogenen Körpers, (es ist dasselbe nämlich $= \frac{mm_1}{r}$ oder $= mm_1\,\varphi(r)$, wo r die augenblickliche Entfernung bedeutet). Ferner: Das von dem leuchtenden Körper in einem gegebenen Zeitaugenblicke emittirte Licht verliert an Intensität, je weiter es sich vom Körper entfernt; das emittirte Potential hingegen läuft ohne irgend welche Abänderung seines ursprünglichen Werthes bis zum angezogenen Körper. Endlich: Das von dem beleuchteten Körper recipirte (d. i. absorbirte) Licht ist im Allgemeinen ein Bruchtheil des auffallenden Lichtes; hingegen ist das von dem angezogenen Körper recipirte Potential identisch (d. i. gleichwerthig) mit dem ankommenden Potential.

Die Gesetze, nach denen das Potential von einem Körper zum andern transmittirt wird, sind also (zufolge meiner Suppositionen) von den entsprechenden Gesetzen des Lichtes so ausserordentlich verschieden, dass von einer Aehnlichkeit kaum die Rede sein kann. Wenigstens wäre nur ein einziger Umstand geltend zu machen, in Bezug auf welchen eine Art Aehnlichkeit stattfindet. Dieser besteht darin, dass Licht wie Potential mit einer sehr grossen constanten Geschwindigkeit sich fortpflanzen; und auch diese Aehnlichkeit ist keine vollkommene; denn jene constante Geschwindigkeit besitzt für Licht und Potential verschiedene Werthe, und bezieht sich beim Licht auf eine absolute, beim Potential aber auf eine relative Bewegung.

Zufälliger Weise ist auf die eben genannte Aehnlichkeit hingewiesen worden durch einen gewissen Passus in der Einleitung meiner

Schrift (Seite 3). Denn dort wird bemerkt, Riemann habe die Voraussetzung gemacht, dass das *„Potential — ähnlich wie das Licht — mit einer gewissen constanten Geschwindigkeit durch den Raum sich fortpflanze“*; zugleich wird hinzugefügt, dass diese Annahme auch meiner Untersuchung zu Grunde liege.

Dass dieser Vergleich mit dem Lichte ein ganz zufälliger und beiläufiger war, dürfte (abgesehen von dem eigentlichen Texte meiner Schrift) schon daraus hervorgehen, dass ein solcher Vergleich in meiner ganzen Schrift nur an dieser **einen** Stelle sich vorfindet, noch viel deutlicher aber daraus erkennbar sein, dass ein solcher Vergleich mit dem Lichte in meiner Mittheilung an die Göttinger Societät **nirgends** vorkommt. (Das Wort *„Licht“* ist in jener Mittheilung gar nicht enthalten.)

Jedenfalls muss übrigens von mir zugegeben werden, dass der genannte Passus der Einleitung meiner Schrift, welcher nur eine gelegentliche historische Notiz geben, nämlich Riemann als den eigentlichen Urheber der Idee einer progressiven Bewegung des Potentiales bezeichnen sollte, wenig Genauigkeit besitzt. Bei Abfassung meiner Schrift erschien es mir kleinlich, in der Einleitung betonen zu wollen, dass meine Idee über diese progressive Bewegung von der Riemann'schen (soweit mir letztere verständlich geworden) sich noch wesentlich unterscheide. So unterliess ich dieses Unterschiedes zu erwähnen; was um so leichter zu Missverständnissen führen konnte, als die betreffenden Auseinandersetzungen im eigentlichen Texte meiner Schrift äusserst kurz gehalten sind.

Demgemäss ist es leicht erklärlich, dass Clausius bei Beurtheilung meiner Schrift von der Meinung ausgeht, ich hätte die Supposition gemacht, dass das Potential von einem Körper zum andern sich ähnlich wie das Licht fortpflanze; während doch in Wirklichkeit meine Suppositionen über die progressive Bewegung des Potentiales den Gesetzen des Lichtes gegenüber die grösste Verschiedenheit zeigen. — Es kann mir nur erwünscht sein, dass ich auf die Gefahr eines solchen Missverständnisses aufmerksam gemacht, und dieselbe zu beseitigen veranlasst worden bin.

Leipzig, 19. Januar 1869.

Ueber die Aetherbewegung in Krystallen.

Von Carl Neumann in Leipzig.

Die vorliegende Untersuchung wird sich beschränken auf die sogenannten zwei und zweigliedrigen Krystalle, d. i. auf Krystalle, welche symmetrisch sind in Bezug auf drei zu einander senkrechte Ebenen. Es mögen zunächst diejenigen Prämissen, von denen die Untersuchung ausgehen wird, kurz angegeben werden.

§. 1.

Die Prämissen der Untersuchung.

I. Hypothese. *Das Aethermedium besteht aus einem System äusserst feiner Theilchen, welche sowohl ihren gegenseitigen Einwirkungen, als auch den Einwirkungen der ponderablen Molecüle unterworfen sind. Diese Einwirkungen finden statt in der Richtung der Entfernung; hängen ferner, was ihre Intensität anbelangt, von der Grösse der Entfernung ab; und werden Null, sobald die Entfernung eine gewisse sehr kleine Länge übersteigt.*

II. Hypothese. *Ausserdem hat der Aether die Eigenschaft, denjenigen Bewegungen, welche mit einer Aenderung seiner Dichtigkeit verknüpft sind, mit unverhältnissmässig viel grösserer Energie zu widerstehen, als andern Bewegungen, bei welchen solches nicht der Fall ist. Die Dichtigkeit des Aethers ist demnach sehr starken Kräften gegenüber allerdings veränderlich, hingegen schwachen Kräften gegenüber so gut wie unveränderlich.*

Die Kräfte, unter welchen bei Entstehung eines Körpers die ponderablen Molecüle des Körpers und die in ihm enthaltenen Aethertheilchen zum Gleichgewicht gelangten, und unter deren spannender Thätigkeit dieses Gleichgewicht fortdauert, betrachte ich als so stark, dass sie den Widerstand, welchen der Aether seiner Compression oder Dilatation entgegensetzt, in grösserem oder geringerem Grade überwunden haben. Demgemäss ist die Dichtigkeit des Aethers einerseits in verschiedenen Körpern eine verschiedene, andererseits auch eine verschiedene an verschiedenen Stellen ein und desselben Körpers. So werden z. B. die um irgend ein ponderables Molecül herumgelagerten Aetherschichten verschiedene Dichtigkeiten besitzen; es wird nämlich die Dichtigkeit dieser Schichten, wenn man sich dem Molecül nähert, zu- oder abnehmen, je nachdem die Einwirkung des Moleculs auf den Aether eine anziehende oder abstossende ist. Bei einem homogenen Körper wird demnach die Dichtigkeit des in ihm enthaltenen Aethers eine periodische Function des Raumes sein.

Anders verhält es sich mit denjenigen Kräften, welche während einer vorübergehenden oscillatorischen Bewegung des Aethers ins Spiel kommen. Diese Kräfte, welche von den ungemein geringen Ortsveränderungen herrühren, welche die Aethertheilchen bei ihren Oscillationen erleiden, betrachte ich als so schwach, dass ihnen gegenüber der Aether incompressibel ist. Die Dichtigkeit, welche der in dem Körper enthaltene Aether zur Zeit seines Gleichgewichts besass, wird also, sobald solche Oscillationen eintreten, ungeändert dieselbe bleiben. Ist demnach in irgend einem Körper die Dichtigkeit des Aethers zur Zeit seines Gleichgewichts durch irgend eine Function der Coordinaten $q = f(x, y, z)$ dargestellt, so wird sie während eines etwa nachfolgenden oscillatorischen Zustandes ausgedrückt bleiben durch dieselbe Formel $q = f(x, y, z)$.

Die genannten beiden Hypothesen führen nun (unter Anwendung des d'Alembert'schen Princips) für die oscillatorische Bewegung des in irgend einem Körper enthaltenen Aethers zu folgendem Resultat:

Bezeichnet man, was den Zustand der **Ruhe** *anbelangt, die Coordinaten irgend eines Aethertheilchens m mit x, y, z, ferner die Dichtigkeit des Aethers mit $q = f(x, y, z)$; und sind andererseits $x + u$, $y + v$, $z + w$ die Coordinaten von m für irgend einen Zeitaugenblick t der* **Bewegung**, *ferner mX, mY, mZ die in diesem Zeitaugenblicke auf m einwirkenden Kräfte; so gelten für u, v, w die Differentialgleichungen:*

$$(1^a)\qquad \begin{aligned} 0 &= \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z}, \\ m\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} &= mX + \frac{m}{q}\frac{\partial \lambda}{\partial x}, \\ m\frac{\partial^2 v}{\partial t^2} &= mY + \frac{m}{q}\frac{\partial \lambda}{\partial y}, \\ m\frac{\partial^2 w}{\partial t^2} &= mZ + \frac{m}{q}\frac{\partial \lambda}{\partial z}. \end{aligned}$$

Die in diesen Gleichungen neben u, v, w enthaltene vierte Unbekannte λ repräsentirt einen gewissen Theil des in dem Aethermedium vorhandenen Druckes, nämlich denjenigen Theil desselben, welcher entsteht aus der angenommenen Incompressibilität des Aethers.

Sind X^0, Y^0, Z^0, λ^0 die Werthe von X, Y, Z, λ für den Zustand der Ruhe, so wird zufolge der eben hingestellten Gleichungen:

$$0 = m X^0 + \frac{m}{q} \frac{\partial \lambda^0}{\partial x},$$
$$0 = m Y^0 + \frac{m}{q} \frac{\partial \lambda^0}{\partial y},$$
$$0 = m Z^0 + \frac{m}{q} \frac{\partial \lambda^0}{\partial z}.$$

Demgemäss können jene Gleichungen (1^a) für die Bewegung des Aethers auch so dargestellt werden:

$$(1^b) \qquad \begin{aligned} 0 &= \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z}, \\ m \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} &= m (X - X^0) + \frac{m}{q} \frac{\partial (\lambda - \lambda^0)}{\partial x}, \\ m \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} &= m (Y - Y^0) + \frac{m}{q} \frac{\partial (\lambda - \lambda^0)}{\partial y}, \\ m \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} &= m (Z - Z^0) + \frac{m}{q} \frac{\partial (\lambda - \lambda^0)}{\partial z}. \end{aligned}$$

Und in dieser Form sind sie für die Anwendung bequemer als in ihrer ursprünglichen Gestalt*).

§. 2.

Integration der Differentialgleichungen.

Die in den Gleichungen (1^b) enthaltenen Differenzen ($X - X^0$), ($Y - Y^0$), ($Z - Z^0$) besitzen sowohl bei den verschiedenen von Cauchy entwickelten Theorien als auch bei derjenigen, welche von meinem Vater aufgestellt wurde, die Werthe:

$$(2) \qquad \begin{aligned} (X - X^0) &= (h_{11} + h_1) \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + (h_{12} + h_2) \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + (h_{13} + h_3) \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} + \\ &\quad + 2 h_{12} \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} + 2 h_{13} \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial z} + \mathfrak{h}_1 u, \\ (Y - Y^0) &= (h_{21} + h_1) \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + (h_{22} + h_2) \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + (h_{23} + h_3) \frac{\partial^2 v}{\partial z^2} + \\ &\quad + 2 h_{23} \frac{\partial^2 w}{\partial y \partial z} + 2 h_{21} \frac{\partial^2 u}{\partial y \partial x} + \mathfrak{h}_2 v, \\ (Z - Z^0) &= (h_{31} + h_1) \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + (h_{32} + h_2) \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + (h_{33} + h_3) \frac{\partial^2 w}{\partial z^2} + \\ &\quad + 2 h_{31} \frac{\partial^2 u}{\partial z \partial x} + 2 h_{32} \frac{\partial^2 v}{\partial z \partial y} + \mathfrak{h}_3 w, \end{aligned}$$

*) Diese Hypothesen und Formeln sind von mir in Vorschlag gebracht in meiner Dissertation: „Explicare tentatur quomodo fiat, ut lucis planum polarisationis per vires electricas vel magneticas declinetur (Halis Saxonum 1858)"; in mehr

wo die h, $\mathfrak{h}$ Constante sind, nämlich die constanten Mittelwerthe gewisser dem betrachteten Krystall eigenthümlicher periodischer Functionen repräsentiren. Soweit sind jene Theorien in Uebereinstimmung. Divergenz zwischen ihnen tritt aber ein, sobald es sich um die Werthe jener Coefficienten h, $\mathfrak{h}$ oder um die unter denselben anzunehmenden Relationen handelt. Zunächst nun werde ich die aus meinen Prämissen erhaltenen Differentialgleichungen ($1^{a,b}$) unter Anwendung der Werthe (2) weiter behandeln und integriren, **ohne** über jene Coefficienten irgend welche Voraussetzungen zu machen; beschränken werde ich mich dabei allerdings auf den Fall, dass die zu untersuchende Aetherbewegung aus parallelen ebenen Wellen besteht.

Ersetzt man in den Gleichungen (1^b) die periodische Function $\frac{1}{q}$ durch ihren constanten Mittelwerth, er mag c heissen, und setzt man gleichzeitig

$$c(\lambda - \lambda^0) = \Lambda,$$

so werden jene Gleichungen mit Benutzung der Werthe (2) folgende Gestalt annehmen:

$$0 = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z},$$

$$(3)\quad \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = (h_{11} + h_1)\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + (h_{12} + h_2)\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + (h_{13} + h_3)\frac{\partial^2 u}{\partial z^2} + $$
$$+ 2h_{12}\frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} + 2h_{13}\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial z} + \mathfrak{h}_1 u + \frac{\partial \Lambda}{\partial x},$$

$$\frac{\partial^2 v}{\partial t^2} = \text{etc.}, \qquad \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = \text{etc.}$$

Es bestehe nun die zu untersuchende Aetherbewegung aus Wellen, welche parallel sind zu einer durch den Anfangspunkt des Coordinatensystems gelegten Ebene, deren Normale die Richtungscosinus α, β, γ besitzt. Die Excursionen u, v, w des am Orte x, y, z befindlichen Aethertheilchens werden alsdann ausser von der Zeit t nur noch von demjenigen Abstande r abhängen, den der Ort x, y, z von jener Ebene hat. Ebenso wird auch der am Orte x, y, z vorhandene Werth von Λ nur abhängig sein von t und r. Es ist aber:

$$(4)\qquad r = \alpha x + \beta y + \gamma z.$$

Demnach wird z. B.

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \alpha \frac{\partial u}{\partial r}, \quad \frac{\partial \Lambda}{\partial x} = \alpha \frac{\partial \Lambda}{\partial r}, \text{ u. s. w.}$$

Die Gleichungen (3) gehen daher über in:

ausführlicher Weise sind dieselben später von mir entwickelt worden in meiner Schrift: „Die magnetische Drehung der Polarisationsebene. Halle, 1863.“

$$0 = \alpha \frac{\partial u}{\partial r} + \beta \frac{\partial v}{\partial r} + \gamma \frac{\partial w}{\partial r},$$

(5)
$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} &= i_1 \frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + 2h_{12}\,\alpha\beta \frac{\partial^2 v}{\partial r^2} + 2h_{13}\,\alpha\gamma \frac{\partial^2 w}{\partial r^2} + \mathfrak{h}_1 u + \alpha \frac{\partial A}{\partial r},\\
\frac{\partial^2 v}{\partial t^2} &= i_2 \frac{\partial^2 v}{\partial r^2} + 2h_{23}\,\beta\gamma \frac{\partial^2 w}{\partial r^2} + 2h_{21}\,\beta\alpha \frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \mathfrak{h}_2 v + \beta \frac{\partial A}{\partial r},\\
\frac{\partial^2 w}{\partial t^2} &= i_3 \frac{\partial^2 w}{\partial r^2} + 2h_{31}\,\gamma\alpha \frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + 2h_{32}\,\gamma\beta \frac{\partial^2 v}{\partial r^2} + \mathfrak{h}_3 w + \gamma \frac{\partial A}{\partial r},
\end{aligned}$$

wo unter i_1, i_2, i_3 die Ausdrücke zu verstehen sind:

(6)
$$\begin{aligned}
i_1 &= (h_{11} + h_1)\,\alpha^2 + (h_{12} + h_2)\,\beta^2 + (h_{13} + h_3)\,\gamma^2,\\
i_2 &= (h_{21} + h_1)\,\alpha^2 + (h_{22} + h_2)\,\beta^2 + (h_{23} + h_3)\,\gamma^2,\\
i_3 &= (h_{31} + h_1)\,\alpha^2 + (h_{32} + h_2)\,\beta^2 + (h_{33} + h_3)\,\gamma^2.
\end{aligned}$$

Es sei τ die Schwingungsdauer der von uns betrachteten Bewegung, und zur Abkürzung werde die Bezeichnung eingeführt

(7) $$\cos\left(\frac{t}{\tau}2\pi\right) = \Phi(t),$$

so dass also

(8) $$\Phi''(t) = -\left(\frac{2\pi}{\tau}\right)^2 \Phi(t).$$

Um die Gleichungen (5) zu integriren, werde gesetzt:

(9)
$$\begin{aligned}
u &= A\,\Phi\left(t - \frac{r}{m}\right),\\
v &= B\,\Phi\left(t - \frac{r}{m}\right),\\
w &= C\,\Phi\left(t - \frac{r}{m}\right),\\
A &= \frac{D}{m}\,\Phi'\left(t - \frac{r}{m}\right),
\end{aligned}$$

wo A, B, C, D, m disponible Constanten sein sollen. Durch Substitution dieser Werthe in (5) ergiebt sich:

(10) $$0 = \frac{\alpha A + \beta B + \gamma C}{m}\,\Phi',$$

$$A\Phi'' = \frac{i_1 A + 2h_{12}\,\alpha\beta B + 2h_{13}\,\alpha\gamma C}{m^2}\,\Phi'' + \mathfrak{h}_1 A\,\Phi - \frac{\alpha D}{m^2}\,\Phi'',$$

etc. etc. etc.,

wo zur Abkürzung Φ, Φ', Φ''

für $$\Phi\left(t - \frac{r}{m}\right),\quad \Phi'\left(t - \frac{r}{m}\right),\quad \Phi''\left(t - \frac{r}{m}\right)$$

gesetzt sind, und wo also, nach (8), zwischen Φ und Φ'' die Relation stattfindet:

$$\dot{\Phi} = -\left(\frac{\tau}{2\pi}\right)^2 \Phi''.$$

Somit zeigt sich, dass die zweite der Gleichungen (10) in allen ihren Gliedern mit dem Factor Φ'' behaftet ist, während die erste derselben behaftet ist mit dem Factor Φ'. Unterdrückt man diese Factoren, so ergiebt sich:

$$(11) \qquad 0 = \alpha A + \beta B + \gamma C,$$

$$\left[1 + \mathfrak{h}_1 \left(\frac{\tau}{2\pi}\right)^2\right] A = \frac{i_1 A + 2h_{12}\,\alpha\beta B + 2h_{13}\,\alpha\gamma C}{m^2} - \frac{\alpha D}{m^2},$$

etc. etc. etc.

Zur weitern Abkürzung mögen nun die Bezeichnungen eingeführt werden:

$$(12) \qquad \begin{aligned} 1 + \mathfrak{h}_1\left(\frac{\tau}{2\pi}\right)^2 &= \mathfrak{i}_1, & i_1 + 2(h_{23} - h_{21} - h_{31})\,\alpha^2 &= j_1, \\ 1 + \mathfrak{h}_2\left(\frac{\tau}{2\pi}\right)^2 &= \mathfrak{i}_2, & i_2 + 2(h_{31} - h_{32} - h_{12})\,\beta^2 &= j_2, \\ 1 + \mathfrak{h}_3\left(\frac{\tau}{2\pi}\right)^2 &= \mathfrak{i}_3, & i_3 + 2(h_{12} - h_{13} - h_{23})\,\gamma^2 &= j_3, \end{aligned}$$

die ersteren mit Bezug auf augenblickliches, die letztern mit Rücksicht auf späteres Bedürfniss. Die Gleichungen (11) gehen dann über in:

$$(13) \qquad \begin{aligned} 0 &= \alpha A + \beta B + \gamma C, \\ 0 &= (i_1 - \mathfrak{i}_1 m^2) A + 2h_{12}\,\alpha\beta\, B + 2h_{13}\,\alpha\gamma\, C - \alpha D, \\ 0 &= 2h_{21}\,\beta\alpha\, A + (i_2 - \mathfrak{i}_2 m^2) B + 2h_{23}\,\beta\gamma\, C - \beta D, \\ 0 &= 2h_{31}\,\gamma\alpha\, A + 2h_{32}\,\gamma\beta\, B + (i_3 - \mathfrak{i}_3 m^2) C - \gamma D. \end{aligned}$$

Die für u, v, w, Δ angenommenen Ausdrücke (9) werden also die zu untersuchende Aetherbewegung repräsentiren, sobald die in jenen Ausdrücken enthaltenen Constanten A, B, C, D, m den Gleichungen (13) Genüge leisten. Aus diesen letztern aber ergiebt sich für m^2 die quadratische Gleichung

$$(14) \qquad 0 = \begin{vmatrix} \alpha & \beta & \gamma & 0 \\ (i_1 - \mathfrak{i}_1 m^2) & 2h_{12}\,\alpha\beta & 2h_{13}\,\alpha\gamma & \alpha \\ 2h_{21}\,\beta\alpha & (i_2 - \mathfrak{i}_2 m^2) & 2h_{23}\,\beta\gamma & \beta \\ 2h_{31}\,\gamma\alpha & 2h_{32}\,\gamma\beta & (i_3 - \mathfrak{i}_3 m^2) & \gamma \end{vmatrix}.$$

Sind m^2 und m'^2 die beiden Wurzeln dieser Gleichung, und sind ferner A, B, C, D und A', B', C', D' die bei Substitution jener Wurzeln aus den Gleichungen (13) sich ergebenden Werthe von A, B, C, D, so werden also in der gegebenen Richtung α, β, γ zwei Wellen sich fortpflanzen können, und zwar die eine mit der Geschwindigkeit m und der Vibrationsrichtung A, B, C, die andere hingegen mit der Geschwindigkeit m' und der Vibrationsrichtung A', B', C'.

Aus der ersten der Gleichungen (13) folgt, dass beide Vibrationsrichtungen genau parallel sind mit der Wellenebene. Multiplicirt man ferner die drei übrigen jener Gleichungen mit A', B', C' und addirt, so ergiebt sich (mit Rücksicht auf jene erste):

$$\begin{aligned}(\mathfrak{i}_1 AA' + \mathfrak{i}_2 BB' + \mathfrak{i}_3 CC')\, m^2 = i_1 AA' &+ i_2 BB' + i_3 CC' \\ &+ 2h_{23}\beta\gamma\,(BC' + B'C) \\ &+ 2h_{31}\gamma\alpha\,(CA' + C'A) \\ &+ 2h_{12}\alpha\beta\,(AB' + A'B).\end{aligned}$$

Eine analoge Gleichung muss gelten für die andere Wurzel m'^2; und zwar muss sich diese Gleichung aus der schon hingeschriebenen offenbar dadurch ableiten lassen, dass man m, A, B, C und m', A', B', C' mit einander vertauscht. Durch Subtraction dieser beiden Gleichungen wird man also erhalten:

$$(\mathfrak{i}_1 AA' + \mathfrak{i}_2 BB' + \mathfrak{i}_3 CC')\,(m^2 - m'^2) = 0,$$

d. i.

$$\mathfrak{i}_1 AA' + \mathfrak{i}_2 BB' + \mathfrak{i}_3 CC' = 0. \tag{15}$$

Die Vibrationsrichtungen A, B, C und A', B', C' werden daher genau aufeinander senkrecht sein, sobald die Grössen $\mathfrak{i}$ (12) den gemeinschaftlichen Werth 1 haben, d. i. sobald die in den Differentialgleichungen enthaltenen Coefficienten $\mathfrak{h}$ gleich Null sind. Also:

In einer gegebenen Richtung können sich immer nur zwei Wellenebenen fortpflanzen. In beiden sind die Vibrationsrichtungen genau transversal, d. i. genau parallel mit den Wellenebenen selber. Ausserdem werden diese Vibrationsrichtungen genau senkrecht auf einander sein, sobald die (von einer directen Einwirkung der ponderablen Molecüle herrührenden) Coefficienten $\mathfrak{h}$ gleich Null*) sind.

Die quadratische Gleichung (14) für die Fortpflanzungsgeschwindigkeit lässt sich übrigens in viel einfacherer Form darstellen. Zunächst mag bemerkt werden, dass die zweite der Gleichungen (13) sich so darstellen lässt:

$$D = \left(i_1 - \mathfrak{i}_1 m^2\right) \frac{A}{\alpha} + 2h_{12}\beta B + 2h_{13}\gamma C.$$

Addirt man zu dieser Gleichung die identische Gleichung:

$$0 = -2(h_{12} + h_{13})\,\alpha^2 \frac{A}{\alpha} + 2h_{12}\alpha A + 2h_{13}\alpha A,$$

und addirt man ferner hinzu die aus (13) entspringende Gleichung:

*) Sie werden übrigens auch dann auf einander senkrecht sein, wenn die $\mathfrak{h}$ nicht Null, sondern nur einander gleich sind.

$$0 = + 2 h_{23} \alpha^2 \frac{A}{\alpha} + 2 h_{23} \beta B + 2 h_{23} \gamma C,$$

so ergiebt sich:

$$D = \left[i_1 + 2 (h_{23} - h_{21} - h_{31}) \alpha^2 - \mathfrak{i}_1 m^2 \right] \cdot \frac{A}{\alpha}$$
$$+ 2 \left[h_{23} (\beta B + \gamma C) + h_{31} (\gamma C + \alpha A) + h_{12} (\alpha A + \beta B) \right],$$

oder wenn man den symmetrischen Ausdruck

$$D - 2 \left[h_{23} (\beta B + \gamma C) + h_{31} (\gamma C + \alpha A) + h_{12} (\alpha A + \beta B) \right] = S$$

setzt, und ausserdem Rücksicht nimmt auf die in (12) eingeführten Bezeichnungen:

$$S = \left(j_1 - \mathfrak{i}_1 m^2 \right) \frac{A}{\alpha}.$$

In genau derselben Weise, wie hier die zweite der Gleichungen (13) behandelt ist, lässt sich auch behandeln die dritte und die vierte dieser Gleichungen. Man gelangt so zu folgenden Formeln:

$$(16^a) \qquad \begin{aligned} A &= \frac{S\alpha}{j_1 - \mathfrak{i}_1 m^2}, \\ B &= \frac{S\beta}{j_2 - \mathfrak{i}_2 m^2}, \\ C &= \frac{S\gamma}{j_3 - \mathfrak{i}_3 m^2}. \end{aligned}$$

Fügt man hinzu die erste der Gleichungen (13):

$$(16^b) \qquad 0 = \alpha A + \beta B + \gamma C,$$

so folgt augenblicklich:

$$(16^c) \qquad 0 = \frac{\alpha^2}{j_1 - \mathfrak{i}_1 m^2} + \frac{\beta^2}{j_2 - \mathfrak{i}_2 m^2} + \frac{\gamma^2}{j_3 - \mathfrak{i}_3 m^2}.$$

Dies also ist die quadratische Gleichung, deren Wurzeln die beiden Werthe von m^2 sind. Sind jene beiden Werthe gefunden, so werden sich dann ferner aus (16^a) die zugehörigen Werthe der Verhältnisse $A : B : C$ in einfachster Weise ergeben.

Wir steigen nun hinab zu specielleren Untersuchungen, indem wir der Reihe nach folgende Voraussetzungen eintreten lassen, die später, theilweise wenigstens, ihre Rechtfertigung finden werden.

I. Voraussetzung. *Die ponderablen Molecüle haben auf die Bewegung des Aethers keine directe Einwirkung. Demgemäss sind die Coefficienten*

$$\mathfrak{h}_1 = \mathfrak{h}_2 = \mathfrak{h}_3 = 0,$$

und also nach (12):

$$\mathfrak{i}_1 = \mathfrak{i}_2 = \mathfrak{i}_3 = 1.$$

II. Voraussetzung. *Zwischen den Coefficienten h_{11}, h_{22}, h_{33}, h_{23}, h_{31}, h_{12}, finden die (schon von meinem Vater supponirten) Relationen statt:*

$$h_{22} + h_{33} = 6h_{23},$$
$$h_{33} + h_{11} = 6h_{31},$$
$$h_{11} + h_{22} = 6h_{12}.$$

Demgemäss kann gesetzt werden:

$$h_{23} = a, \qquad h_{11} = 3(b + c - a),$$
$$h_{31} = b, \qquad h_{22} = 3(c + a - b),$$
$$h_{12} = c, \qquad h_{33} = 3(a + b - c).$$

Zur Abkürzung mag dabei die Bezeichnung eingeführt werden:

$$(b + c)\,\alpha^2 + (c + a)\,\beta^2 + (a + b)\,\gamma^2 =$$
$$= (a + b + c) - (a\alpha^2 + b\beta^2 + c\gamma^2) = p.$$

III. Voraussetzung. *Die Coefficienten h_1, h_2, h_3, welche der bessern Symmetrie willen fortan bezeichnet werden mögen mit*

$$h_1 = \bar{a}, \qquad h_2 = \bar{b}, \qquad h_3 = \bar{c},$$

sind unter einander gleichwerthig. Diese III. *Voraussetzung, deren Berechtigung gewöhnlich durch Betrachtungen über den im Aethermedium vorhandenen Druck deducirt wird, erscheint sehr misslich, wie aus dem weiteren Verlauf meiner Untersuchung hervorgehen wird. Ich werde daher diese Voraussetzung erst ganz zuletzt eintreten lassen. Setzt man also*

$$h_1\alpha^2 + h_2\beta^2 + h_3\gamma^2 = \bar{a}\alpha^2 + \bar{b}\beta^2 + \bar{c}\gamma^2 = \bar{p},$$

so wird $\bar{p}$ vorläufig als variabel (nämlich als abhängig von den Richtungscosinus α, β, γ), und erst bei späterer Hinzuziehung der III. *Voraussetzung als constant (nämlich als gleichwerthig mit $\bar{a}$, $\bar{b}$, $\bar{c}$) anzusehen sein.*

Nach (6) und (12) ist

$$j_1 = (h_{11} + h_1)\,\alpha^2 + (h_{12} + h_2)\,\beta^2 + (h_{13} + h_3)\,\gamma^2 + 2\,(h_{23} - h_{21} - h_{31})\,\alpha^2.$$

also mit Benutzung der II. Voraussetzung und mit Benutzung der für h_1, h_2, h_3 eingeführten neuen Bezeichnungen:

$$j_1 = \bar{p} + 3\,(b + c - a)\,\alpha^2 + c\beta^2 + b\gamma^2 + 2\,(a - b - c)\,\alpha^2.$$

Hieraus folgt durch Hinzuaddiren der identischen Gleichung

$$0 = -a + a\alpha^2 + a\beta^2 + a\gamma^2$$

augenblicklich:

$$j_1 = \bar{p} - a + (b + c)\alpha^2 + (c + a)\,\beta^2 + (a + b)\,\gamma^2,$$

d. i. (vergl. die bei Gelegenheit der II. Voraussetzung eingeführte Bezeichnung):

$$
(17)\qquad \begin{aligned} j_1 &= p + \bar{p} - a. \\ j_2 &= p + \bar{p} - b, \\ j_3 &= p + \bar{p} - c. \end{aligned}
$$

Ebenso wird offenbar werden:

In Folge der I. und II. Voraussetzung gehen daher die Formeln ($16^{a,b,c}$) über in:

$$
(18^a)\qquad \begin{aligned} A &= \frac{S\alpha}{p+\bar{p}-a-m^2}, \\ B &= \frac{S\beta}{p+\bar{p}-b-m^2}, \\ C &= \frac{S\gamma}{p+\bar{p}-c-m^2}, \end{aligned}
$$

$$
(18^b)\qquad 0 = \alpha A + \beta B + \gamma C,
$$

$$
(18^c)\qquad 0 = \frac{\alpha^2}{p+\bar{p}-a-m^2} + \frac{\beta^2}{p+\bar{p}-b-m^2} + \frac{\gamma^2}{p+\bar{p}-c-m^2}.
$$

Diese Formeln mögen bezogen gedacht werden auf die **eine** der beiden Wellen, auf die Welle W mit der Fortpflanzungsgeschwindigkeit m. Analoge Formeln können dann hingeschrieben werden für die **andere** Welle W' mit der Fortpflanzungsgeschwindigkeit m'.

Die Gleichung (18^c) kann, wenn für den Augenblick

$$
(19)\qquad \begin{aligned} p + \bar{p} - mm &= M, \\ p + \bar{p} - m'm' &= M' \end{aligned}
$$

gesetzt wird, so dargestellt werden:

$$
0 = \frac{\alpha^2}{M-a} + \frac{\beta^2}{M-b} + \frac{\gamma^2}{M-c}
$$

d. i.

$$
\begin{aligned} 0 = M^2 - M\,[(b+c)\,\alpha^2 + (c+a)\,\beta^2 + (a+b)\,\gamma^2] &+ \\ + [bc\alpha^2 + ca\beta^2 + ab\gamma^2]&. \end{aligned}
$$

Hieraus folgt:

$$
(20)\qquad M + M' = (b+c)\,\alpha^2 + (c+a)\,\beta^2 + (a+b)\,\gamma^2,
$$

also zufolge der von uns eingeführten Bezeichnung (vergl. die II. Voraussetzung):

$$
(21)\qquad M + M' = p,
$$

oder, wenn man für M, M' deren eigentliche Bedeutungen (19) substituirt:

$$
(22)\qquad 2p + 2\bar{p} - mm - m'm' = p,
$$

d. i.

$$
(23)\qquad p + 2\bar{p} = mm + m'm'.
$$

Hieraus folgt (durch Subtraction von a, b, c):

$$(24)\qquad \begin{aligned} p + \bar{p} - a - mm &= m'm' - \bar{p} - a, \\ p + \bar{p} - b - mm &= m'm' - \bar{p} - b, \\ p + \bar{p} - c - mm &= m'm' - \bar{p} - c. \end{aligned}$$

Hierdurch aber gewinnen die Formeln ($18^{a, b, c}$) folgende Gestalt:

$$(25^a)\qquad \begin{aligned} A &= \frac{S\alpha}{m'm' - (p + a)}, \\ B &= \frac{S\beta}{m'm' - (p + b)}, \\ C &= \frac{S\gamma}{m'm' - (p + c)}, \end{aligned}$$

$$(25^b)\qquad 0 = \alpha A + \beta B + \gamma C,$$

$$(25^c)\qquad 0 = \frac{\alpha^2}{m'm' - (\bar{p} + a)} + \frac{\beta^2}{m'm' - (\bar{p} + b)} + \frac{\gamma^2}{m'm' - (\bar{p} + c)}.$$

Die Formeln (25^a) drücken A, B, C durch m' aus; d. h. sie drücken die Vibrationsrichtung der einen Welle W aus durch die Fortpflanzungsgeschwindigkeit der andern Welle W'. — Zu diesen Formeln mag noch hinzugefügt werden diejenige, welche aus (25^b) folgt, wenn man daselbst für α, β, γ die aus (25^a) entspringenden Werthe substituirt; sie lautet:

$$(25^d)\qquad m'm'\,(A^2 + B^2 + C^2) = (\bar{p} + a)\,A^2 + (\bar{p} + b)\,B^2 + (\bar{p} + c)\,C^2;$$

ihre linke Seite reducirt sich auf $m'm'$, sobald man unter A, B, C geradezu die Cosinus der Vibrationsrichtung versteht. Endlich mag noch hinzugefügt werden die Formel:

$$(25^e)\qquad 0 = AA' + BB' + CC',$$

welche sich auf Grund unserer I. Voraussetzung unmittelbar ergiebt aus früheren Betrachtungen (pag. 331).

Bis hierher haben wir nur von der I. und II. Voraussetzung Gebrauch gemacht. Ziehen wir nun endlich auch noch die III. Voraussetzung hinzu, so verwandelt sich die Grösse $\bar{p}$ in eine Constante, d. i. in eine dem betrachteten Krystall eigenthümliche Zahl. Die Formeln ($25^{a, b, c, d, e}$) enthalten alsdann im Ganzen nur noch drei dem Krystall zugehörige Constante, nämlich:

$$\bar{p} + a, \qquad \bar{p} + b, \qquad \bar{p} + c,$$

und repräsentiren, wie man leicht übersieht, die Fresnel'schen Gesetze mit voller Genauigkeit, nur mit dem einen Unterschiede, dass die Polarisationsebene (in Uebereinstimmung mit der Theorie meines Vaters) identisch ist mit der Vibrationsebene.

§. 3.

Bildung der Differential-Gleichungen.

Das Aethermedium, mit dem wir uns beschäftigen, mag vorläufig enthalten gedacht werden in einem völlig beliebigen Körper, und versetzt sein in irgend eine oscillatorische Bewegung. Wir betrachten neben einander zwei verschiedene Positionen des Mediums, einerseits die dem Gleichgewicht entsprechende Position Π^0, und andererseits diejenige Position Π, welche vorhanden ist in irgend einem Zeitaugenblick t jener oscillatorischen Bewegung. Besitzt eine von der räumlichen Anordnung des Mediums abhängende Grösse bei der erstern Position den Werth λ, so mag ihr Werth bei der letztern bezeichnet werden mit $\lambda + D\lambda$.

Während der Position Π^0 habe das Aethertheilchen m von einem andern Aethertheilchen m_1 und von irgend einem ponderablen Molecül $\mathfrak{m}$ die Entfernungen r und $\mathfrak{r}$. Die zwischen diesen Massen m, m_1 und $m, \mathfrak{m}$ vorhandenen Potentiale mögen bezeichnet werden

mit: und mit:

$$(1) \qquad m m_1 f(r^2) = m m_1 f, \qquad\qquad m \mathfrak{m} \mathfrak{f}(\mathfrak{r}^2) = m \mathfrak{m} \mathfrak{f}.$$

Versteht man also unter a, b, c und $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$, $\mathfrak{c}$ die relativen Coordinaten von m_1 und $\mathfrak{m}$ in Bezug auf m (eine Bezeichnung, der zufolge $a^2 + b^2 + c^2 = r^2$ und $\mathfrak{a}^2 + \mathfrak{b}^2 + \mathfrak{c}^2 = \mathfrak{r}^2$ ist), so werden $-mm_1 \frac{\partial f}{\partial a}$, $-mm_1 \frac{\partial f}{\partial b}$, $-mm_1 \frac{\partial f}{\partial c}$ die rechtwinkligen Componenten der von m auf m_1 ausgeübten Wirkung, und folglich $+mm_1 \frac{\partial f}{\partial a}$, $+mm_1 \frac{\partial f}{\partial b}$, $+mm_1 \frac{\partial f}{\partial c}$ die Componenten derjenigen Wirkung sein, welche umgekehrt m_1 ausübt auf m. Aehnliches gilt mit Bezug auf das Potential $m\mathfrak{m}\mathfrak{f}$. Setzt man also:

$$(2) \qquad \begin{aligned} mX^0 &= m S m_1 \frac{\partial f}{\partial a} + m S \mathfrak{m} \frac{\partial \mathfrak{f}}{\partial \mathfrak{a}}, \\ mY^0 &= m S m_1 \frac{\partial f}{\partial b} + m S \mathfrak{m} \frac{\partial \mathfrak{f}}{\partial \mathfrak{b}}, \\ mZ^0 &= m S m_1 \frac{\partial f}{\partial c} + m S \mathfrak{m} \frac{\partial \mathfrak{f}}{\partial \mathfrak{c}}, \end{aligned}$$

und versteht man dabei unter S eine über alle zur Umgebung von m gehörigen Massen m_1 und $\mathfrak{m}$ sich ausdehnende Summation, so werden mX^0, mY^0, mZ^0 die Componenten sämmtlicher Kräfte darstellen, welche auf m einwirken bei der Position Π^0, d. i. zur Zeit des Gleichgewichtes.

Für die bei der Position Π vorhandenen Componenten mX, mY, mZ gelten offenbar analoge Formeln, welche aus den schon hingestellten Formeln (2) einfach dadurch abgeleitet werden können, dass man die in jenen Formeln enthaltenen relativen Coordinaten a, b, c, $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$, $\mathfrak{c}$ übergehen lässt in

$$a + Da,\ b + Db,\ c + Dc,\ \mathfrak{a} + D\mathfrak{a},\ \mathfrak{b} + D\mathfrak{b},\ \mathfrak{c} + D\mathfrak{c}.$$

Somit wird z. B.

$$mX = m\,Sm_1\left(\frac{\partial f}{\partial a} + D\frac{\partial f}{\partial a}\right) + m\,S\mathfrak{m}\left(\frac{\partial \mathfrak{f}}{\partial \mathfrak{a}} + D\frac{\partial \mathfrak{f}}{\partial \mathfrak{a}}\right),$$

folglich:

$$m(X - X^0) = m\,Sm_1\,D\frac{\partial f}{\partial a} + m\,S\mathfrak{m}\;D\frac{\partial \mathfrak{f}}{\partial \mathfrak{a}},\ \text{und ebenso wird:}$$

$$(3)\quad m(Y - Y^0) = m\,Sm_1\,D\frac{\partial f}{\partial b} + m\,S\mathfrak{m}\;D\frac{\partial \mathfrak{f}}{\partial \mathfrak{b}},$$

$$m(Z - Z^0) = m\,Sm_1\,D\frac{\partial f}{\partial c} + m\,S\mathfrak{m}\;D\frac{\partial \mathfrak{f}}{\partial \mathfrak{c}}.$$

Nun ist, was die erste dieser Formeln anbelangt:

$$(4)\quad \begin{aligned} D\frac{\partial f}{\partial a} &= \frac{\partial^2 f}{\partial a^2}\,Da + \frac{\partial^2 f}{\partial a\,\partial b}\,Db + \frac{\partial^2 f}{\partial a\,\partial c}\,Dc, \\ D\frac{\partial \mathfrak{f}}{\partial \mathfrak{a}} &= \frac{\partial^2 \mathfrak{f}}{\partial \mathfrak{a}^2}\,D\mathfrak{a} + \frac{\partial^2 \mathfrak{f}}{\partial \mathfrak{a}\,\partial \mathfrak{b}}\,D\mathfrak{b} + \frac{\partial^2 \mathfrak{f}}{\partial \mathfrak{a}\,\partial \mathfrak{c}}\,D\mathfrak{c}. \end{aligned}$$

Da $f = f(r^2)$ als eine Function des **Quadrates** der Entfernung aufgefasst werden soll, so sind unter $f' = f'(r^2)$, $f'' = f''(r^2)$ die nach diesem **Quadrat** genommenen Ableitungen zu verstehen. Ebenso verhält es sich bei der Function $\mathfrak{f} = \mathfrak{f}(\mathfrak{r}^2)$. Somit ergiebt sich aus (4):

$$(5)\quad \begin{aligned} D\frac{\partial f}{\partial a} &= (2f' + 4aaf'')\,Da + 4abf''.\,Db + 4acf''.\,Dc, \\ D\frac{\partial \mathfrak{f}}{\partial \mathfrak{a}} &= (2\mathfrak{f}' + 4\mathfrak{a}\mathfrak{a}\mathfrak{f}'')\,D\mathfrak{a} + 4\mathfrak{a}\mathfrak{b}\mathfrak{f}''.\,D\mathfrak{b} + 4\mathfrak{a}\mathfrak{c}\mathfrak{f}''.\,D\mathfrak{c}. \end{aligned}$$

Bei Ausführung der Summationen S sind zu unterscheiden das **centrale** Theilchen m, und andererseits die **benachbarten** Aethertheilchen m_1. Es mögen

$$x,\ y,\ c,\ \text{und}$$

$$x + u(x, y, z)\ ,\ \ y + v(x, y, z)\ ,\ \ z + w(x, y, z)$$

die Coordinaten sein, welche das **centrale** Theilchen m bei den Positionen Π^0 und Π besitzt. Alsdann werden

$$x + a,\qquad y + b,\qquad z + c,\qquad \text{und}$$

$$x + a + u(x + a, y + b, z + c)\ ,\ y + b + v(x + a, y + b, z + c),\ \text{etc.}$$

diejenigen Coordinaten sein, welche das **Nachbar**-Theilchen m_1 bei der einen und bei der andern Position besitzt; und gleichzeitig werden alsdann

$$x + \mathfrak{a}\ ,\ y + \mathfrak{b}\ ,\ z + \mathfrak{c}\ ,\ \text{und}$$

$$x + \mathfrak{a}\ ,\ y + \mathfrak{b}\ ,\ z + \mathfrak{c}$$

die Coordinaten des ponderablen Molecüles $\mathfrak{m}$ für jene Positionen sein.

Denn wir nehmen an, dass die ponderablen Molecüle während der oscillatorischen Bewegung des Aethers keinerlei Verrückungen oder Bewegungen erleiden.

Die relativen Coordinaten von m_1 und $\mathfrak{m}$ in Bezug auf m, welche während der Position II^0 die Werthe hatten

$$\begin{cases} a, \\ b, \\ c, \end{cases} \qquad \text{und} \qquad \begin{cases} \mathfrak{a}, \\ \mathfrak{b}, \\ \mathfrak{c}, \end{cases}$$

nehmen daher bei der Position II die Werthe an:

$$\begin{cases} a + u(x+a, y+b, z+c) - u(x, y, z), \\ b + v(x+a, y+b, z+c) - v(x, y, z), \\ c + w(x+a, y+b, z+c) - w(x, y, z), \end{cases} \quad \text{und} \quad \begin{cases} \mathfrak{a} - u(x, y, z), \\ \mathfrak{b} - v(x, y, z), \\ \mathfrak{c} - w(x, y, z). \end{cases}$$

Bezeichnet man daher (in voller Uebereinstimmung mit der der Charakteristik D zuertheilten Bedeutung) diese letztern Werthe der relativen Coordinaten mit $a + Da$, $b + Db$, $c + Dc$ und $\mathfrak{a} + D\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b} + D\mathfrak{b}$, $\mathfrak{c} + D\mathfrak{c}$, so wird:

$$Da = u(x+a, y+b, z+c) - u(x, y, z), \quad D\mathfrak{a} = -u(x, y, z),$$
$$\text{etc.} \qquad \text{etc.} \qquad \text{etc.} \qquad\qquad \text{etc.} \qquad \text{etc.},$$

oder, wenn man nach dem Taylor'schen Satze entwickelt, und gleichzeitig u, v, w für $u(x, y, z)$, $v(x, y, z)$, $w(x, y, z)$ setzt:

$$Da = a\frac{\partial u}{\partial x} + b\frac{\partial u}{\partial y} + c\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{aa}{2}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \cdots, \quad D\mathfrak{a} = -u,$$
$$\text{etc.} \qquad \text{etc.} \qquad \text{etc.} \qquad\qquad \text{etc.} \qquad \text{etc.}$$

Führt man zur Abkürzung (mit Bezug auf eine beliebige Function ω) die Bezeichnung ein:

$$(6) \qquad \left\{ \begin{aligned} & a\frac{\partial \omega}{\partial x} + b\frac{\partial \omega}{\partial y} + c\frac{\partial \omega}{\partial z} + \frac{aa}{2}\frac{\partial^2 \omega}{\partial x^2} + \frac{bb}{2}\frac{\partial^2 \omega}{\partial y^2} + \frac{cc}{2}\frac{\partial^2 \omega}{\partial z^2} \\ & \qquad + bc\frac{\partial^2 \omega}{\partial y \partial z} + ca\frac{\partial^2 \omega}{\partial z \partial x} + ab\frac{\partial^2 \omega}{\partial x \partial y} \end{aligned} \right\} = \Sigma_p \,\overline{p}\, \overline{\omega},$$

wo alsdann unter $\overline{p}$ die neun Grössen:

$$a, b, c, \quad \frac{aa}{2}, \frac{bb}{2}, \frac{cc}{2}, \quad bc, ca, ab,$$

und unter $\overline{\omega}$ die zugehörigen Ableitungen von ω zu verstehen sind, so wird schliesslich:

$$(7) \qquad \begin{aligned} Da &= \Sigma_p \,\overline{p}\,\overline{u}, \qquad & D\mathfrak{a} &= -u, \\ Db &= \Sigma_p \,\overline{p}\,\overline{v}, \qquad & D\mathfrak{b} &= -v, \\ Dc &= \Sigma_p \,\overline{p}\,\overline{w}, \qquad & D\mathfrak{c} &= -w. \end{aligned}$$

Somit folgt aus (5):

$$(8) \qquad \begin{aligned} D\frac{\partial f}{\partial a} &= \Sigma_p \left\{ \overline{u}(2\overline{p}f' + 4aa\overline{p}f'') + \overline{v}(4ab\overline{p}f'') + \overline{w}(4ac\overline{p}f'') \right\}; \\ D\frac{\partial \mathfrak{f}}{\partial \mathfrak{a}} &= -u(2\mathfrak{f}' + 4\mathfrak{a}\mathfrak{a}\mathfrak{f}'') - v(4\mathfrak{a}\mathfrak{b}\mathfrak{f}'') - w(4\mathfrak{a}\mathfrak{c}\mathfrak{f}''). \end{aligned}$$

Summirt man diese Ausdrücke über alle zur Umgebung von m gehörigen Massen m_1 und $\mathfrak{m}$, und beachtet man, dass (während einer solchen Summation S) die dem centralen Theilchen m zugehörigen Grössen u, v, w, $\bar{u}, \bar{v}, \bar{w}$ beständig ein und dieselben bleiben, so folgt:

$$(9) \qquad S\, m_1\, D\, \frac{\partial f}{\partial a} =$$

$$= \Sigma_p \left\{ \bar{u}\, S\, m_1 (2\bar{p} f' + 4 a a \bar{p} f'') + \bar{v}\, S\, m_1 (4 a b \bar{p} f'') + \bar{w}\, S\, m_1 (4 a c \bar{p} f'') \right\},$$

$$S_1\, \mathfrak{m}\, D\, \frac{\partial \mathfrak{f}}{\partial \mathfrak{a}} =$$

$$= -\, u\, S\, \mathfrak{m}\, (2\, \mathfrak{f}' + 4\, \mathfrak{a}\mathfrak{a}\, \mathfrak{f}'') - v\, S\, \mathfrak{m}\, (4\, \mathfrak{a}\mathfrak{b}\, \mathfrak{f}'') - w\, S\, \mathfrak{m}\, (4\, \mathfrak{a}\mathfrak{c}\, \mathfrak{f}'').$$

Die Differentialgleichungen für eine oscillatorische Bewegung sind ihrer allgemeinen Form nach bereits früher (pag. 327) aufgestellt. Substituiren wir dort die für $m X - m X^0$, etc. die gefundenen Werthe (3), so gewinnen jene Gleichungen folgendes Aussehen:

$$(10) \qquad 0 = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z},$$

$$m \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = m\, S\, m_1\, D \frac{\partial f}{\partial a} + m\, S\, \mathfrak{m}\, D \frac{\partial \mathfrak{f}}{\partial \mathfrak{a}} + \frac{m}{q} \frac{\partial(\lambda - \lambda^0)}{\partial x},$$

$$\text{etc.} \qquad \text{etc.} \qquad \text{etc.}$$

also bei Substitution der Werthe (9):

$$(11) \qquad 0 = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z},$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \Sigma_p \left\{ \bar{u}\, S m_1 (2\bar{p} f' + 4 a a \bar{p} f'') + \bar{v}\, S m_1 (4 a b \bar{p} f'') + w\, S m_1 (4 a c \bar{p} f'') \right\}$$

$$- u\, S\, \mathfrak{m}\, (2\, \mathfrak{f}' + 4\, \mathfrak{a}\mathfrak{a}\, \mathfrak{f}'') - v\, S\, \mathfrak{m}\, (4\, \mathfrak{a}\mathfrak{b}\, \mathfrak{f}'') - w\, S\, \mathfrak{m}\, (4\, \mathfrak{a}\mathfrak{c}\, \mathfrak{f}'')$$

$$+ \frac{1}{q} \frac{\partial(\lambda - \lambda^0)}{\partial x},$$

$$\frac{\partial^2 v}{\partial t^2} = \text{etc.} \quad \text{etc.} \quad \text{etc.}$$

Führt man in diesen Gleichungen die Summationen Σ_p wirklich aus, indem man für $\bar{p}$, $\bar{u}$, $\bar{v}$, $\bar{w}$ der Reihe nach die ihnen zukommenden Werthe [vgl. (6), (7)] substituirt, so ergeben sich Formeln von folgender Gestalt:

$$(12) \qquad \begin{aligned} 0 &= \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z}, \\ \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} &= U + U' + \frac{1}{q} \frac{\partial(\lambda - \lambda^0)}{\partial x}, \\ \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} &= V + V' + \frac{1}{q} \frac{\partial(\lambda - \lambda^0)}{\partial y}, \\ \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} &= W + W' + \frac{1}{q} \frac{\partial(\lambda - \lambda^0)}{\partial z}, \end{aligned}$$

wo unter U, V, W diejenigen Glieder verstanden werden sollen, welche **nur gerade** Potenzen von $a, b, c, \mathfrak{a}, \mathfrak{b}, \mathfrak{c}$ enthalten, unter

U', V', W' hingegen die nach Absonderung dieser noch übrig bleibenden Glieder. Was die Glieder erster Art anbelangt, so ergiebt sich aus den Formeln (11) mit grosser Leichtigkeit z. B. für U folgender Werth:

$$(13)\qquad U = \left\{\begin{array}{l} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} S m_1 (a^2 f' + 2 a^4 f'') \;\; + \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} S m_1 (4 a^2 b^2 f'') \\ + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} S m_1 (b^2 f' + 2 a^2 b^2 f'') + \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial z} S m_1 (4 a^2 c^2 f'') \\ + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} S m_1 (c^2 f' + 2 a^2 c^2 f'') - u \, S \mathfrak{m} (2 \mathfrak{f}' + 4 \mathfrak{a}^2 \mathfrak{f}'') \end{array}\right\}.$$

Es mögen die Bezeichnungen eingeführt werden:

$$(14^a)\qquad \begin{aligned} m\, S\, m_1\, a^2 f' &= m\, H_1\,, \\ m\, S\, m_1\, b^2 f' &= m\, H_2\,, \\ m\, S\, m_1\, c^2 f' &= m\, H_3\,, \end{aligned}$$

$$(14^b)\qquad \begin{aligned} m\, S\, m_1\, 2\, a^4 f'' &= m\, H_{11}\,, & m\, S\, m_1\, 2\, b^2 c^2 f'' &= m\, H_{23}\,, \\ m\, S\, m_1\, 2\, b^4 f'' &= m\, H_{22}\,, & m\, S\, m_1\, 2\, c^2 a^2 f'' &= m\, H_{31}\,, \\ m\, S\, m_1\, 2\, c^4 f'' &= m\, H_{33}\,, & m\, S\, m_1\, 2\, a^2 b^2 f'' &= m\, H_{12}\,, \end{aligned}$$

$$(14^c)\qquad \begin{aligned} - m\, S\, \mathfrak{m}\, (2\, \mathfrak{f}' + 4\, \mathfrak{a}^2\, \mathfrak{f}'') &= m\, \mathfrak{H}_1\,, \\ - m\, S\, \mathfrak{m}\, (2\, \mathfrak{f}' + 4\, \mathfrak{b}^2\, \mathfrak{f}'') &= m\, \mathfrak{H}_2\,, \\ - m\, S\, \mathfrak{m}\, (2\, \mathfrak{f}' + 4\, \mathfrak{c}^2\, \mathfrak{f}'') &= m\, \mathfrak{H}_3\,. \end{aligned}$$

Schreiben wir mit Anwendung dieser Bezeichnungen den Werth von U (13) von Neuem hin, und fügen wir gleichzeitig die aus der Symmetrie leicht erkennbaren Werthe von V und W hinzu, so haben wir die Formeln:

$$(15)\qquad \begin{aligned} U &= (H_{11} + H_1) \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + (H_{12} + H_2) \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + (H_{13} + H_3) \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \\ &\qquad + 2\, H_{12} \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} + 2\, H_{13} \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial z} + \mathfrak{H}_1 u\,, \\ V &= (H_{21} + H_1) \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + (H_{22} + H_2) \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + (H_{23} + H_3) \frac{\partial^2 v}{\partial z^2} \\ &\qquad + 2\, H_{23} \frac{\partial^2 w}{\partial y \partial z} + 2\, H_{21} \frac{\partial^2 u}{\partial y \partial x} + \mathfrak{H}_2 v\,, \\ W &= (H_{31} + H_1) \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + (H_{32} + H_2) \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + (H_{33} + H_3) \frac{\partial^2 w}{\partial z^2} \\ &\qquad + 2\, H_{31} \frac{\partial^2 u}{\partial z \partial x} + 2\, H_{32} \frac{\partial^2 v}{\partial z \partial y} + \mathfrak{H}_3 w\,. \end{aligned}$$

Aehnliche Formeln werden aus den Gleichungen (11) deducirt werden können für die Werthe von U', V', W'. Während aber die in U, V, W enthaltenen Coefficienten H, $\mathfrak{H}$ durch Summen dargestellt sind, in welchen nur gerade Potenzen von a, b, c, $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$, $\mathfrak{c}$ vorkommen [vergl. ($14^{a, b, c}$)], werden die in U', V', W' enthaltenen Coefficienten — sie mögen H', $\mathfrak{H}'$ heissen — die Form besitzen:

$$(16)\quad \begin{aligned} m\,H' &= m\,S\,m_1\,a^\alpha\,b^\beta\,c^\gamma\,F(r^2)\,,\\ m\,\mathfrak{H}' &= m\,S\,\mathfrak{m}\,\mathfrak{a}^\alpha\,\mathfrak{b}^\beta\,\mathfrak{c}^\gamma\,\mathfrak{F}(\mathfrak{r}^2)\,, \end{aligned}$$

wo unter den drei Exponenten α, β, γ immer mindestens einer ungerade ist.

Sollen die Werthe der Coefficienten H, $\mathfrak{H}$, H', $\mathfrak{H}'$ wirklich berechnet werden, so wird zurückzugehen sein auf die Position Π^0. Denn die Grössen r, a, b, c, $\mathfrak{r}$, $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$, $\mathfrak{c}$, von denen die Werthe jener Coefficienten abhängen, beziehen sich auf diejenige relative Gruppirung, welche zwischen den Aethertheilchen, sowie zwischen diesen und den ponderablen Molecülen stattfindet zur Zeit des Gleichgewichts, d. i. zur Zeit der Position Π^0.

§. 4.

Die in den Differentialgleichungen enthaltenen Coefficienten H.

Fortan mag vorausgesetzt werden, dass der Körper, mit dem wir es zu thun haben, ein zweiundzweigliedriger Krystall ist, dessen Achsen parallel sind mit denen des Coordinatensystems.

Die Dichtigkeit q des in dem Krystall enthaltenen Aethers wird jedenfalls anzusehen sein als eine periodische Function der Coordinaten x, y, z; die drei Indices dieser Function (d. i. die drei Grössen, um deren Multipla man x, y, z anwachsen lassen kann, ohne dass der Werth von q dadurch eine Aenderung erleidet) mögen bezeichnet werden mit ε_1, ε_2, ε_3. Demgemäss wird der Krystall durch drei auf einander senkrechte Systeme von Parallelebenen in einzelne Parallelepipeda von den Dimensionen ε_1, ε_2, ε_3 zerlegbar sein, welche während der Ruhelage des Aethers unter einander congruent sind, so dass es z. B. nur einer parallelen Verschiebung eines solchen Parallelepipedums bedürfen würde, um dasselbe hinsichtlich seiner Aether- und ponderablen Massen mit irgend einem andern Parallelepipedum zur Deckung zu bringen. Auch wird, was ein solches Parallelepipedum für sich allein anbelangt, die darin vorhandene Massenvertheilung symmetrisch zu denken sein in Bezug auf die drei Halbirungsebenen, d. i. in Bezug auf drei durch den Mittelpunkt des Parallelepipedums parallel zu seinen Seitenflächen gelegte Ebenen.

Hieraus folgt, dass die im Vorhergehenden mit H, $\mathfrak{H}$, H', $\mathfrak{H}'$ bezeichneten Coefficienten (14, 16) ebenfalls periodische Functionen des Raumes sind, dass sie nämlich für homologe Punkte jener Parallelepipeda gleiche Werthe haben, und dass sie ferner auch innerhalb ein und desselben Parallelepipedums gleiche Werthe besitzen müssen in je acht zu den Halbirungsebenen symmetrisch gelegenen Punkten.

An Stelle der periodischen Functionen H, $\mathfrak{H}$, H', $\mathfrak{H}'$ wird es gestattet sein, ihre constanten Mittelwerthe h, $\mathfrak{h}$, h', $\mathfrak{h}'$ in unsere Differentialgleichungen zu substituiren, und um so mehr gestattet sein, je mächtiger die Incompressibilität des Aethers ist gegenüber den attractiven oder repulsiven Kräften der ponderablen Moleeüle.

Um jene Mittelwerthe zu finden, betrachten wir irgend eines der zuvor genannten Parallelepipeda, und construiren seine den Ebenen yz, zx, xy parallel laufenden Halbirungsebenen A, B, C. Sind m und $\overline{m}$ zwei Aethertheilchen innerhalb des Parallelepipedums und symmetrisch gelegen zur Ebene A, so werden die zur Umgebung von m gehörigen Aether- und ponderablen Massen m_1, $\mathfrak{m}$ eine Gruppe bilden, welche in Bezug auf die Ebene A das genaue Spiegelbild ist von derjenigen, die gebildet wird von den um $\overline{m}$ herumgelagerten Massen $\overline{m}_1$, $\overline{\mathfrak{m}}$. Bildet man daher die Summen

$$m\, H' = m\, S\, m_1\, a^\alpha\, b^\beta\, c^\gamma\, F(r^2)\,,$$
$$m\, \mathfrak{H}' = m\, S\, \mathfrak{m}\, \mathfrak{a}^\alpha\, \mathfrak{b}^\beta\, \mathfrak{c}^\gamma\, \mathfrak{F}(\mathfrak{r}^2)$$

einmal für m, das andere Mal für $\overline{m}$, so werden in beiden Fällen dieselben Werthe von r, b, c, $\mathfrak{r}$, $\mathfrak{b}$, $\mathfrak{c}$, aber entgegengesetzte Werthe von a, $\mathfrak{a}$ sich darbieten. Demgemäss werden, falls der Exponent α ungerade ist, die Werthe von H', $\mathfrak{H}'$ für m und $\overline{m}$ entgegengesetzt, die mit Bezug auf das Parallelepipedum gebildeten Mittelwerthe von H', $\mathfrak{H}'$ also Null sein. — In analoger Weise lässt sich mit Benutzung der Halbirungsebenen B, C nachweisen, dass die genannten Mittelwerthe auch dann Null sind, wenn einer der beiden andern Exponenten β, γ ungerade ist.

In denjenigen Summen aber, durch welche H', $\mathfrak{H}'$ definirt sind (16), besitzt unter den Exponenten α, β, γ immer wenigstens einer einen ungeraden Werth. Daraus folgt, dass sämmtliche Coefficienten H', $\mathfrak{H}'$ den Mittelwerth Null haben. Demnach wird allgemein:

$$h' = 0 \quad , \quad \mathfrak{h}' = 0\,. \tag{17}$$

Und es werden also in den Differentialgleichungen (12) die Glieder U', V', W' verschwinden, sobald man die periodischen Coefficienten in jenen Gleichungen ersetzt durch ihre constanten Mittelwerthe.

Wir gehen über zur Untersuchung der Coefficienten H (14[a,b]) und ihrer Mittelwerthe h, indem wir in voller Uebereinstimmung mit unserer Hypothese der Incompressibilität (pag. 323) annehmen, dass die Vertheilung des Aethers im Innern des Krystalles nur wenig verschieden ist von einer absolut gleichförmigen Vertheilung.

Es sei m irgend ein Aethertheilchen innerhalb unseres Krystalles, und O diejenige um m beschriebene kleine Kugel, welche alle auf m überhaupt noch einwirkenden Aethertheilchen beherbergt. Bei der Werthbestimmung der Coefficienten H, $\mathfrak{H}$, H', $\mathfrak{H}'$ kommt, wie schon bemerkt wurde (pag. 341), immer nur der Zustand des Gleichgewichts in Betracht; doch auch in diesem Zustande wird die Kugel O, weil sie einem Krystalle angehört, in ihrem Innern eine Anordnung darbieten, welche an verschiedenen Orten von verschiedener Dichtigtigkeit und in verschiedenen Richtungen von verschiedenem Intervall ist. Jedenfalls aber werden die innerhalb O befindlichen Aethertheilchen durch geeignete kleine Verschiebungen in Gedanken immer in eine Gruppirung versetzt werden können, bei der jene Unterschiede des Ortes und der Richtung völlig verschwinden; dieser absolut gleichförmige Zustand des Inhaltes von O mag dem wirklichen Zustande gegenüber kurzweg bezeichnet werden als der fingirte Zustand. Daneben werden drei Functionen $\xi(x, y, z)$, $\eta(x, y, z)$, $\zeta(x, y, z)$ denkbar sein, welche massgebend sind für jene kleinen Verschiebungen, deren es bedarf, um die in O enthaltenen Aethertheilchen aus dem erstern Zustande in den letztern zu versetzen, d. i. drei Functionen von solcher Beschaffenheit, dass ein bei der wirklichen Anordnung mit den Coordinaten x, y, z versehenes Aethertheilchen bei Eintritt jener fingirten Anordnung die Coordinaten $x + \xi(x, y, z)$, $y + \eta(x, y, z)$, $z + \zeta(x, y, z)$ erhält.

Sind also

$$x\,,\ y\,,\ z \qquad \text{und}$$
$$x + a\,,\quad y + b\,,\quad z + c$$

die Coordinaten des centralen Theilchens m und irgend eines andern innerhalb O befindlichen Theilchens m_1 zur Zeit des wirklichen Zustandes, so werden diese Coordinaten bei Eintritt des fingirten Zustandes übergehen in

$$x + \xi(x, y, z)\,,\quad y + \eta(x, y, z)\,,\quad z + \zeta(x, y, z)\,,$$

und in

$$x + a + \xi(x + a, y + b, z + c)\,, \quad \text{etc.} \quad \text{etc.} \quad \text{etc.}$$

Die relativen Coordinaten von m_1 in Bezug auf m, welche während des ersten Zustandes gleich

$$a\,,\ b\,,\ c$$

waren, werden also bei Eintritt des zweiten Zustandes die Werthe haben:

$$a + \xi(x + a, y + b, z + c) - \xi(x, y, z)\,, \quad \text{etc.} \quad \text{etc.} \quad \text{etc.}$$

Bezeichnet man diese letztern Werthe mit α, β, γ, so ergiebt sich, wenn man nach Potenzen von a, b, c entwickelt, in erster Annäherung:

$$
(18) \qquad
\begin{aligned}
\alpha &= a + \frac{\partial \xi}{\partial x} a + \frac{\partial \xi}{\partial y} b + \frac{\partial \xi}{\partial z} c , \\
\beta &= b + \frac{\partial \eta}{\partial x} a + \frac{\partial \eta}{\partial y} b + \frac{\partial \eta}{\partial z} c , \\
\gamma &= c + \frac{\partial \zeta}{\partial x} a + \frac{\partial \zeta}{\partial y} b + \frac{\partial \zeta}{\partial z} c ,
\end{aligned}
$$

wo ξ, η, ζ zur Abkürzung stehen für $\xi(x, y, z)$, $\eta(x, y, z)$, $\zeta(x, y, z)$, und wo also ξ, η, ζ, ebenso wie ihre Ableitungen $\frac{\partial \xi}{\partial x}$, $\frac{\partial \xi}{\partial y}$, etc. etc., Werthe besitzen, die unabhängig sind von a, b, c, folglich constant sind für sämmtliche mit m in Beziehung gebrachte Nachbartheilchen m_1. Führt man, was diese Constanten anbelangt, die Bezeichnungen ein:

$$
(19) \qquad
\begin{aligned}
&\frac{\partial \xi}{\partial x} = -\mu , \quad \frac{\partial \xi}{\partial y} = -\mu_1 , \quad \frac{\partial \xi}{\partial z} = -\mu_2 , \quad \nu_1 + \pi_2 = 2\mu' , \\
&\frac{\partial \eta}{\partial y} = -\nu , \quad \frac{\partial \eta}{\partial z} = -\nu_1 , \quad \frac{\partial \eta}{\partial x} = -\nu_2 , \quad \pi_1 + \mu_2 = 2\nu' , \\
&\frac{\partial \zeta}{\partial z} = -\pi , \quad \frac{\partial \zeta}{\partial x} = -\pi_1 , \quad \frac{\partial \zeta}{\partial y} = -\pi_2 , \quad \mu_1 + \nu_2 = 2\pi' ,
\end{aligned}
$$

so gehen die Relationen (18) über in:

$$
(20) \qquad
\begin{aligned}
\alpha &= (1-\mu)\, a - \mu_1 b - \mu_2 c , \\
\beta &= (1-\nu)\, b - \nu_1 c - \nu_2 a , \\
\gamma &= (1-\pi)\, c - \pi_1 a - \pi_2 b .
\end{aligned}
$$

Nach unserer Vorstellung unterscheidet sich der fingirte absolut gleichförmige Zustand des Inhaltes von O nur wenig von seinem wirklich vorhandenen Zustand. Demnach sind die neun Constanten μ, ν, π kleine Grössen, deren Quadrate und Producte (in erster Annäherung) vernachlässigt werden können. Nun folgt aus (20):

$$
\begin{aligned}
a &= \alpha + \mu a + \mu_1 b + \mu_2 c , \\
b &= \beta + \nu b + \nu_1 c + \nu_2 a , \\
c &= \gamma + \pi c + \pi_1 a + \pi_2 b ,
\end{aligned}
$$

also, wenn man diese Werthe von a, b, c in denjenigen Ausdruck substituirt, welcher in der ersten dieser Gleichungen auf der rechten Seite sich befindet:

$$
\begin{aligned}
a = \alpha &+ \mu(\alpha + \mu a + \mu_1 b + \mu_2 c) \\
&+ \mu_1(\beta + \nu b + \nu_1 c + \nu_2 a) \\
&+ \mu_2(\gamma + \pi c + \pi_1 a + \pi_2 b) ,
\end{aligned}
$$

also, wenn die Quadrate und Producte der μ, ν, π vernachlässigt werden:

$$
(21) \qquad
\begin{aligned}
a &= (1+\mu)\, \alpha + \mu_1 \beta + \mu_2 \gamma ; \quad \text{und ebenso wird:} \\
b &= (1+\nu)\, \beta + \nu_1 \gamma + \nu_2 \alpha , \\
c &= (1+\pi)\, \gamma + \pi_1 \alpha + \pi_2 \beta .
\end{aligned}
$$

Hieraus folgt weiter (wiederum mit Vernachlässigung der höheren Potenzen der μ, ν, π):

$$(22^a)\quad a^2 + b^2 + c^2 = (\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2) + 2(\mu\alpha^2 + \nu\beta^2 + \pi\gamma^2) + 2[(\nu_1 + \pi_2)\beta\gamma + (\pi_1 + \mu_2)\gamma\alpha + (\mu_1 + \nu_2)\alpha\beta],$$

also mit Rückblick auf (19):

$$(22^b)\quad r^2 = \varrho^2 + 2(\mu\alpha^2 + \nu\beta^2 + \pi\gamma^2 + 2\mu'\beta\gamma + 2\nu'\gamma\alpha + 2\pi'\alpha\beta),$$

wo r und ϱ den Abstand zwischen m und m_1 bezeichnen zur Zeit des wirklichen und zur Zeit des fingirten Zustandes. Zur Abkürzung mag die vorstehende Formel so geschrieben werden:

$$(22^c)\qquad r^2 = \varrho^2 + 2(\mu\alpha^2 + \nu\beta^2 + \pi\gamma^2 + \varepsilon),$$

wo alsdann ε nur ungerade Potenzen von α, β, γ enthält.

Ist $F(r^2)$ eine beliebige Function von r^2, so ergiebt sich aus (22^c), wiederum mit Vernachlässigung der zweiten Dimensionen von μ, ν, π, μ', ν', π':

$$(23^a)\qquad F(r^2) = F(\varrho^2) + 2(\mu\alpha^2 + \nu\beta^2 + \pi\gamma^2 + \varepsilon)F'(\varrho^2),$$

eine Formel, welche bei Einführung der Bezeichnungen:

$$(23^b)\qquad \begin{array}{ll} F(r^2) = F, & F(\varrho^2) = \Phi, \\ F'(r^2) = F', & F'(\varrho^2) = \Phi', \\ F''(r^2) = F'', & F''(\varrho^2) = \Phi'', \\ \cdots\cdots & \cdots\cdots \end{array}$$

die Gestalt annimmt:

$$(23^c)\qquad F = \Phi + 2(\mu\alpha^2 + \nu\beta^2 + \pi\gamma^2 + \varepsilon)\Phi'.$$

Es handelt sich um die Untersuchung der Coefficienten H (pag. 340), d. i. um die Untersuchung der Summen:

$$(24)\qquad \begin{aligned} m H_1 &= m\, S\, m_1\, a^2 f', \\ m H_{11} &= m\, S\, m_1\, 2\, a^4 f'', \\ m H_{23} &= m\, S\, m_1\, 2\, b^2 c^2 f'', \end{aligned}$$

wo f', f'' stehen für $f'(r^2)$, $f''(r^2)$. Für diese Functionen f', f'' ergeben sich aus ($23^{a,b,c}$) die Formeln:

$$(25)\qquad \begin{aligned} f' &= \varphi' + 2(\mu\alpha^2 + \nu\beta^2 + \pi\gamma^2 + \varepsilon)\varphi'', \\ f'' &= \varphi'' + 2(\mu\alpha^2 + \nu\beta^2 + \pi\gamma^2 + \varepsilon)\varphi''', \end{aligned}$$

wo die φ zu den f in analoger Beziehung stehen, wie in (23^b) die Φ zu den F.

Ferner ergeben sich für die in (24) vorhandenen Grössen a^2, a^4, b^2c^2 auf Grund von (21) folgende Ausdrücke:

$$(26)\qquad \begin{aligned} a^2 &= (1 + 2\mu)\alpha^2 + \varepsilon', \\ a^4 &= (1 + 4\mu)\alpha^4 + \varepsilon'', \\ b^2c^2 &= (1 + 2\nu + 2\pi)\beta^2\gamma^2 + \varepsilon''', \end{aligned}$$

wo ε', ε'', ε''' (ebenso wie das schon vorhin eingeführte ε) mit ungeraden Potenzen von α, β, γ behaftet, und (ebenfalls wie jenes ε) aus Gliedern zusammengesetzt sind, deren jedes eine der kleinen Grössen μ, ν, π, μ_1, ν_1, π_1, μ_2, ν_2, π_2, μ', ν', π' zum Factor hat. — Substituirt man die Werthe (25), (26) in (24), so ergiebt sich:

$$
\begin{aligned}
&m\,H_1 = m\,S\,m_1\,[(1+2\mu)\,\alpha^2\varphi' + 2\,(\mu\alpha^2+\nu\beta^2+\pi\gamma^2)\,\alpha^2\varphi''],\\
(27)\quad &m\,H_{11} = m\,S\,m_1\,2[(1+4\mu)\,\alpha^4\varphi'' + 2\,(\mu\alpha^2+\nu\beta^2+\pi\gamma^2)\,\alpha^4\varphi'''],\\
&m\,H_{23} = m\,S\,m_1\,2[(1+2\nu+2\pi)\,\beta^2\gamma^2\varphi'' +\\
&\qquad + 2\,(\mu\alpha^2+\nu\beta^2+\pi\gamma^2)\,\beta^2\gamma^2\varphi'''].
\end{aligned}
$$

Denn bei der hier auszuführenden (auf die fingirte, also auf eine absolut gleichförmige Vertheilung sich beziehenden) Summation S fallen die Grössen ε, ε', ε'', ε''', wo sie lineär vorkommen, deswegen fort, weil sie mit ungeraden Potenzen von α, β, γ behaftet sind; während sie andererseits, wo sie mit einander multiplicirt vorkommen, ebenfalls fortfallen, weil ein solches Product in Bezug auf die Grössen μ, ν, π, μ_1, etc. von der zweiten Dimension ist.

Wir führen nun, was die Umgebung von m während ihres fingirten Zustandes anbelangt, die Bezeichnungen ein:

$$
(28)\qquad
\begin{aligned}
S\,m_1\,\varrho^2\,\varphi' &= 3\,K,\\
S\,m_1\,\varrho^4\,\varphi'' &= \frac{3\,.\,5}{2}\,\varkappa,\\
S\,m_1\,\varrho^6\,\varphi''' &= \frac{3\,.\,5\,.\,7}{2\,.\,2}\,\varkappa'.
\end{aligned}
$$

Mit Rücksicht auf die absolute Gleichförmigkeit, welche während jenes fingirten Zustandes in der Umgebung von m herrscht, ergeben sich alsdann [wie später (pag. 356) erläutert werden soll] die Formeln:

$$
\begin{aligned}
&S\,m_1\,\alpha^2\,\varphi' = K,\\
(29)\;&S\,m_1\alpha^4\varphi'' = \frac{3}{2}\,\varkappa,\quad S\,m_1\,\alpha^2\beta^2\varphi'' = \frac{1}{2}\,\varkappa,\\
&S\,m_1\alpha^6\varphi''' = \frac{3\,.\,5}{4}\,\varkappa',\;\; S\,m_1\,\alpha^4\beta^2\varphi''' = \frac{3}{4}\,\varkappa',\;\; S\,m_1\,\alpha^2\beta^2\gamma^2\varphi''' = \frac{1}{4}\,\varkappa'.
\end{aligned}
$$

Und zwar repräsentirt die erste dieser Zeilen im Ganzen drei Formeln, die aus der wirklich aufgeführten durch Vertauschung von α mit β und γ entstehen. In ähnlicher Weise repräsentirt die zweite Zeile im Ganzen sechs, und die dritte zehn Formeln*). — Durch

---

*) Aus den Formeln (28) folgt, wie hier beiläufig bemerkt werden mag, dass $K + \varkappa = 0$ wird, sobald die Function φ der Bedingung entspricht:

$$\varrho^2\varphi' + \frac{2}{5}\,\varrho^4\varphi'' = 0,$$

d. i. der Bedingung:

$$(\alpha.)\qquad \varphi' + \frac{2}{5}\,\eta\,\varphi'' = 0,$$

wo zur Abkürzung $\varrho^2 = \eta$ gesetzt ist. — Ebenso ergiebt sich aus den Formeln (28) andererseits, dass $\varkappa + \varkappa' = 0$ wird, sobald φ der Bedingung entspricht:

$$(\beta.)\qquad \varphi'' + \frac{2}{7}\,\eta\,\varphi''' = 0.$$

Beachtet man nun, dass φ', φ'', φ''' die Ableitungen von φ nach ϱ^2, d. i. die Ableitungen von φ nach η sind, so zeigt sich augenblicklich, dass die Bedingung (β)

Anwendung von (29) gewinnen die für die Coefficienten H erhaltenen Werthe (27) folgende Gestalt:

$$\begin{aligned}
H_1 &= (1+2\mu)K + (3\mu+\nu+\pi)\varkappa, \\
H_{11} &= (3+12\mu)\varkappa + (15\mu+3\nu+3\pi)\varkappa', \\
H_{23} &= (1+2\nu+2\pi)\varkappa + (\mu+3\nu+3\pi)\varkappa',
\end{aligned}$$

oder (besser geschrieben) folgende:

$$\begin{aligned}
H_1 &= K + 2\mu(K+\varkappa) + \sigma\varkappa, \\
H_{11} &= 3\varkappa + 12\mu(\varkappa+\varkappa') + 3\sigma\varkappa', \\
H_{23} &= \varkappa + 2(\nu+\pi)(\varkappa+\varkappa') + \sigma\varkappa',
\end{aligned} \tag{30}$$

wo zur Abkürzung gesetzt ist:

$$\sigma = \mu + \nu + \pi. \tag{31}$$

Mit Rücksicht auf die in unseren Bezeichnungen beobachtete Symmetrie ergeben sich nun aus (30) unmittelbar folgende Formelsysteme:

$$\begin{aligned}
H_1 &= K + \varkappa\sigma + 2(K+\varkappa)\mu, \\
H_2 &= K + \varkappa\sigma + 2(K+\varkappa)\nu, \\
H_3 &= K + \varkappa\sigma + 2(K+\varkappa)\pi,
\end{aligned} \tag{32a}$$

$$\begin{aligned}
H_{11} &= 3\varkappa + 3\varkappa'\sigma + 12(\varkappa+\varkappa')\mu, \\
H_{22} &= 3\varkappa + 3\varkappa'\sigma + 12(\varkappa+\varkappa')\nu, \\
H_{33} &= 3\varkappa + 3\varkappa'\sigma + 12(\varkappa+\varkappa')\pi,
\end{aligned} \tag{32b}$$

$$\begin{aligned}
H_{23} &= \varkappa + \varkappa'\sigma + 2(\varkappa+\varkappa')(\nu+\pi), \\
H_{31} &= \varkappa + \varkappa'\sigma + 2(\varkappa+\varkappa')(\pi+\mu), \\
H_{12} &= \varkappa + \varkappa'\sigma + 2(\varkappa+\varkappa')(\mu+\nu).
\end{aligned} \tag{32c}$$

Aus diesen Formeln*) ergeben sich augenblicklich die überraschend einfachen Relationen:

---

eine unmittelbare Consequenz der Bedingung (α) ist, dass also beide Bedingungen gleichzeitig erfüllt sein würden, falls etwa φ den Werth haben sollte:

$$\varphi = C \cdot \eta^{-\frac{3}{2}} = C\varrho^{-3}, \tag{γ.}$$

wo C eine willkürliche Constante.

*) Wenden wir unsere Betrachtungen für einen Augenblick an auf den freien Aether, d. i. auf denjenigen Aether, welcher sich befindet innerhalb eines von ponderabler Materie leeren Raumes, und dessen Vertheilung also eine absolut gleichförmige ist. Bei Betrachtung eines solchen Aethermediums wird für die von uns herbeigezogene fingirte Anordnung am besten die wirkliche Anordnung selber zu wählen sein, weil sie den Anforderungen der absoluten Gleichförmigkeit völlig entspricht. Ist aber die fingirte Anordnung identisch mit der

$$
(33) \qquad \begin{aligned} H_{22} + H_{33} &= 6\, H_{23}\,, \\ H_{33} + H_{11} &= 6\, H_{31}\,, \\ H_{11} + H_{22} &= 6\, H_{12}\,. \end{aligned}
$$

Die hier berechneten Coefficienten H beziehen sich individuell auf das von uns betrachtete Aethertheilchen m; sie sind nämlich, zufolge ihrer ursprünglichen Definition (24), Summen, die sich ausdehnen über die Umgebung von m; sie sind daher abhängig von derjenigen Anordnung, welche der Aether zur Zeit seines Gleichgewichtes darbietet innerhalb jener Umgebung. Diese Abhängigkeit giebt sich leicht zu erkennen in den für diese Coefficienten gefundenen Formeln ($32^{a,\,b,\,c}$). Denn μ, ν, π, σ leiten sich ab aus denjenigen kleinen Verschiebungen, deren es bedarf, um die Umgebung von m aus ihrem wirklichen Zustande überzuführen in einen fingirten absolut gleichförmigen Zustand; und K, $\varkappa$, $\varkappa'$ sind bestimmt durch die Natur dieses letztern Zustandes, d. i. durch die bei demselben vorhandene Dichtigkeit. Bezeichnet man letztere mit ϑ, so sind K, $\varkappa$, $\varkappa'$ lediglich Functionen von ϑ.

Um auf die Bedeutung von μ, ν, π, σ, K, $\varkappa$, $\varkappa'$ näher einzugehen, denken wir uns innerhalb der Umgebung von m eine kleine, in sich geschlossene Fläche abgegrenzt, welche während des wirklichen und während des fingirten Zustandes von verschiedener Gestalt

---

wirklichen, so sind $\mu = \nu = \pi = \sigma = 0$. In diesem Falle verwandeln sich also die Formeln (32) in:

$$
(\alpha) \qquad \begin{aligned} H_1 &= H_2 = H_3 = K\,, \\ H_{11} &= H_{22} = H_{33} = 3\varkappa\,, \\ H_{23} &= H_{31} = H_{12} = \varkappa\,. \end{aligned}
$$

Offenbar sind nun die Coefficienten H des freien Aethers identisch mit ihren Mittelwerthen h; die Gleichungen (α) können also auch so geschrieben werden:

$$
(\beta) \qquad \begin{aligned} h_1 &= h_2 = h_3 = K\,, \\ h_{11} &= h_{22} = h_{33} = 3\varkappa\,, \\ h_{23} &= h_{31} = h_{12} = \varkappa\,. \end{aligned}
$$

Diese Werthe der h entsprechen der II. und III. Voraussetzung (pag. 333). Die I. Voraussetzung ist ebenfalls erfüllt, weil ponderable Materie gar nicht vorhanden ist. Bedient man sich nun der bei Gelegenheit jener Voraussetzungen eingeführten Bezeichnungen, so verwandeln sich die Formeln (β) in:

$$
(\gamma) \qquad \begin{aligned} \bar{a} &= \bar{b} = \bar{c} = \bar{p} = K\,, \\ a &= b = c = \varkappa\,. \end{aligned}
$$

Bildet man daher mit Bezug auf den freien Aether die Gleichung für die Fortpflanzungsgeschwindigkeit m (pag. 335), so ergiebt sich:

$$
(\delta) \qquad 0 = \frac{\alpha^2}{m^2 - (K + \varkappa)} + \frac{\beta^2}{m^2 - (K + \varkappa)} + \frac{\gamma^2}{m^2 - (K + \varkappa)}\,.
$$

d. i.

$$
(\varepsilon) \qquad m^2 = K + \varkappa
$$

sein wird, und welche im erstern Zustande mit S, im letztern mit Σ bezeichnet werden mag. Die innerhalb dieser Fläche enthaltene Aethermasse M ist ausdrückbar durch das über S ausgedehnte Integral:

$$M = \iiint q \, da \, db \, dc, \tag{34}$$

andererseits aber auch ausdrückbar durch das über Σ ausgedehnte Integral:

$$M = \iiint \vartheta \, d\alpha \, d\beta \, d\gamma, \tag{35}$$

vorausgesetzt, dass man unter q und ϑ die Dichtigkeiten des Aethers zur Zeit des wirklichen und zur Zeit des fingirten Zustandes versteht. Durch Transformation verwandelt sich das letztere Integral in

$$M = \iiint \vartheta \nabla \, da \, db \, dc, \tag{35a}$$

wo ∇ die Functionaldeterminante von α, β, γ nach a, b, c ist, und wo nunmehr die Integration nicht mehr über Σ, sondern [ebenso wie in (34)] über S ausgedehnt ist. Beachtet man, dass die Fläche S, Σ beliebig klein sein kann, so folgt aus (34) und (35a) augenblicklich:

$$q = \vartheta \nabla,$$

oder, wenn man den Werth der Determinante ∇ aus (20) berechnet, und die höheren Dimensionen von $\mu, \nu, \pi, \mu_1, \ldots\ldots$ wiederum vernachlässigt:

$$q = \vartheta(1 - \mu - \nu - \pi),$$

d. i. nach (31):

$$\begin{cases} q = \vartheta(1 - \sigma), \text{ oder:} \\ \vartheta = \dfrac{q}{1-\sigma} = q\,(1+\sigma). \end{cases} \tag{36}$$

Da σ (ebenso wie μ, ν, π) eine der Umgebung von m zugehörige Constante ist (vergl. pag. 344), und da ϑ die Dichtigkeit dieser Umgebung nach Eintritt des fingirten absolut gleichförmigen Zustandes repräsentirt, also ebenfalls constant ist, so folgt aus (36), dass auch q constant ist. Der in unseren Rechnungen eingehaltene niedrige Grad der Annäherung bringt also mit sich, dass die Dichtigkeit des Aethers während seines wirklichen Zustandes in der Umgebung von m (d. i. innerhalb der Wirkungssphäre von m) als constant betrachtet wird.

Aus den Formeln (22a, b) ergiebt sich, dass diejenigen Aethertheilchen, welche zur Zeit des wirklichen Zustandes auf einer um m beschriebenen Kugelfläche

$$a^2 + b^2 + c^2 = \text{Const.} \tag{37a}$$

liegen, nach Herbeiführung des fingirten Zustandes auf einer Ellipsoidfläche sich befinden werden, die dargestellt ist durch die Gleichung:

$$\begin{aligned} (1+2\mu)\,\alpha^2 + (1+2\nu)\,\beta^2 + (1+2\pi)\,\gamma^2 + \\ + 4\mu'\beta\gamma + 4\nu'\gamma\alpha + 4\pi'\alpha\beta = \text{Const.} \end{aligned} \tag{37b}$$

Daraus folgt, dass die Umgebung des Theilchens m aus ihrem wirklichen Zustande in jenen fingirten Zustand übergehen wird durch drei auf einander senkrechte Dilatationen (resp. Contractionen), die ihrer Grösse und Richtung nach charakterisirt sind durch die dieser Umgebung zugehörigen Constanten $\mu, \nu, \pi, \mu', \nu', \pi'$.

Was also die für die Coefficienten H gefundenen Werthe ($32^{a,b,c}$) anbelangt, so sind μ, ν, π, σ abhängig von denjenigen Dilatationen, deren es bedarf, um die Umgebung von m aus ihrem wirklichen Zustande überzuführen in jenen fingirten absolut gleichförmigen Zustand; während andererseits $K, \varkappa, \varkappa'$ Functionen derjenigen Dichtigkeit ϑ sind, welche nach Eintritt letzteren Zustandes stattfindet.

Der fingirte Zustand, in welchen die Umgebung von m versetzt werden sollte, ist bisher nicht vollständig bestimmt worden. Er sollte ein absolut gleichförmiger sein. Zu seiner vollständigen Bestimmung ist noch erforderlich die Angabe der Dichtigkeit, welche dieser absolut gleichförmige Zustand besitzen soll, d. i. die Angabe der Dichtigkeit ϑ. Offenbar darf sich diese Dichtigkeit nicht gar zu weit entfernen von derjenigen Dichtigkeit q, welche im wirklichen Zustande vorhanden ist; innerhalb des so bestimmten Spielraumes aber darf ϑ willkürlich gewählt werden. Vorzugsweise sind es zwei Methoden, welche in diesem Gebiete der Willkür als besonders zweckmässig hervortreten.

I. **Die Methode der normalen Dichtigkeit.** — Man nimmt für die Dichtigkeit ϑ des fingirten Zustandes, an welcher Stelle des Krystalls das betrachtete Aethertheilchen m sich auch befinden mag, immer ein und denselben Werth, einen gewissen Normalwerth, welcher etwa gleich ist dem Mittelwerthe der Aetherdichtigkeit q innerhalb des ganzen Krystalles. Alsdann werden $K, \varkappa, \varkappa'$ (als nur abhängig von ϑ) Constante sein, nämlich für alle Stellen des Krystalles ein und dieselben Werthe besitzen.

II. **Die Methode der localen Dichtigkeit.** Man nimmt an jeder Stelle des Krystalls für ϑ denjenigen Werth, welchen die Aetherdichtigkeit an dieser Stelle bereits besitzt während des wirklichen Zustandes, d. i. den an dieser Stelle vorhandenen Werth von q. Alsdann werden $K, \varkappa, \varkappa'$ von einer Stelle des Krystalls zur andern verschiedene Werthe besitzen, nämlich Functionen von q sein. Und gleichzeitig wird alsdann die Summe $\sigma = \mu + \nu + \pi$ Null werden, wie solches mit Rückblick auf (36) aus der Identificirung von ϑ und q unmittelbar folgt.

Die erste Methode erscheint weniger gut als die zweite. Denn unsere Rechnungen sind um so genauer, je weniger der wirkliche Zustand der Umgebung irgend eines Theilchens von dem fingirten Zustande derselben differirt; und diese Differenz ist offenbar bei der Methode der normalen Dichtigkeit grösser als bei der Methode der localen Dichtigkeit.

§. 5.

Die Mittelwerthe h der Coefficienten H.

Wir haben früher (pag. 332) drei Voraussetzungen eintreten lassen, deren Berechtigung jetzt näher untersucht werden soll.

Die I. Voraussetzung bestand darin, dass die directe Einwirkung der ponderabeln Molecüle auf die Aethertheilchen Null ist. Dass diese Voraussetzung unseren Grundvorstellungen durchaus entspricht, übersieht man sofort; denn jene Wirkung wird als Null zu betrachten sein, sobald die Excursionen u, v, w der einzelnen Aethertheilchen so klein gedacht werden, dass jene Kräfte im Gebiete einer solchen Excursion als constant angesehen werden können.

Die II. Voraussetzung drückte sich aus durch die Gleichungen:

$$(1)\qquad \begin{aligned} h_{22} + h_{33} &= 6h_{23}, \\ h_{33} + h_{11} &= 6h_{31}, \\ h_{11} + h_{22} &= 6h_{12}. \end{aligned}$$

Nun haben wir aber gefunden (pag. 348), dass zwischen den Coefficienten H an jeder beliebigen Stelle des Krystalles die Relationen obwalten:

$$(2)\qquad \begin{aligned} H_{22} + H_{33} &= 6H_{23}, \\ H_{33} + H_{11} &= 6H_{31}, \\ H_{11} + H_{22} &= 6H_{12}. \end{aligned}$$

Und hieraus ergeben sich jene die Mittelwerthe der H betreffende Gleichungen (1) als eine ebenso unmittelbare wie nothwendige Consequenz.

Es bleibt also nur noch übrig die III. Voraussetzung, welche sich ausdrückte durch die Gleichungen:

$$(3)\qquad h_1 = h_2 = h_3.$$

Nun haben wir gefunden (pag. 347):

$$(4)\qquad \begin{aligned} H_1 &= K + \varkappa\sigma + 2(K + \varkappa)\mu, \\ H_2 &= K + \varkappa\sigma + 2(K + \varkappa)\nu, \\ H_3 &= K + \varkappa\sigma + 2(K + \varkappa)\pi. \end{aligned}$$

Hieraus ergeben sich, wenn man die Methode der normalen Dichtigkeit (pag. 350) in Anwendung bringt, die Grössen K, $\varkappa$, $\varkappa'$ also als

Constante betrachtet, für die Mittelwerthe h_1, h_2, h_3 folgende Werthe:

$$
(5)\qquad
\begin{aligned}
h_1 &= K + \varkappa\bar{\sigma} + 2(K+\varkappa)\bar{\mu}\,,\\
h_2 &= K + \varkappa\bar{\sigma} + 2(K+\varkappa)\bar{\nu}\,,\\
h_3 &= K + \varkappa\bar{\sigma} + 2(K+\varkappa)\bar{\pi}\,,
\end{aligned}
$$

wo $\bar{\sigma}$, $\bar{\mu}$, $\bar{\nu}$, $\bar{\pi}$ die Mittelwerthe von σ, μ, ν, π vorstellen sollen. Jene III. Voraussetzung $h_1 = h_2 = h_3$ würde also verlangen, dass

$$
(6)\qquad \bar{\mu} = \bar{\nu} = \bar{\pi}
$$

ist. Alsdann aber würde, wie aus den für die H gefundenen Werthen (pag. 347) sofort erhellt, nicht nur $h_1 = h_2 = h_3$, sondern auch $h_{11} = h_{22} = h_{33}$ und $h_{23} = h_{31} = h_{12}$ werden. Soll also die III. Voraussetzung aufrecht erhalten werden, so wird die hier benutzte Methode der normalen Dichtigkeit anzusehen sein als ein zu grobes, den krystallinischen Charakter völlig auslöschendes Verfahren, folglich zu verwerfen sein.

Demgemäss gehen wir über zur Methode der localen Dichtigkeit. Vermittelst dieser ergiebt sich aus (4):

$$
(7)\qquad
\begin{aligned}
h_1 &= \bar{K} + \overline{\varkappa\sigma} + 2\,\overline{(K+\varkappa)\mu}\,,\\
h_2 &= \bar{K} + \overline{\varkappa\sigma} + 2\,\overline{(K+\varkappa)\nu}\,,\\
h_3 &= \bar{K} + \overline{\varkappa\sigma} + 2\,\overline{(K+\varkappa)\pi}\,,
\end{aligned}
$$

wo wiederum die Mittelwerthe durch horizontale Striche angedeutet sind, wo also z. B. $\overline{\varkappa\sigma}$ den Mittelwerth des Productes $\varkappa\sigma$, ebenso $\overline{(K+\varkappa)\mu}$ den Mittelwerth des Productes $(K+\varkappa)\mu$ vorstellt. Soll daher die III. Voraussetzung $h_1 = h_2 = h_3$ mit unseren Formeln in Einklang sein, so muss

$$
(8)\qquad \overline{(K+\varkappa)\mu} = \overline{(K+\varkappa)\nu} = \overline{(K+\varkappa)\pi}
$$

sein.

Allerdings scheint ein Widerspruch zwischen diesen Relationen (8) und unseren Grundvorstellungen **nicht** stattzufinden. Aber das ist nicht genug. Die hier entwickelte Theorie würde vielmehr erst dann eine völlig befriedigende sein, wenn sich nachweisen liesse, dass die Relationen (8), die Repräsentanten der III. Voraussetzung, eine unmittelbare Consequenz jener Grundvorstellungen sind. Ob ein solcher Nachweis möglich ist, darüber habe ich bis jetzt kein bestimmtes Urtheil. Jedenfalls ist es mir bisher, trotz mancher Bemühung, nicht gelungen, denselben zu führen. Und die mehrfach verbreitete Ansicht, dass ein solcher Nachweis sich führen liesse durch Betrachtung der im Innern des Aethers vorhandenen Druckkräfte, scheint mir einer strengen Kritik gegenüber nicht Stand halten zu können.

Die in (8) enthaltene Grösse $K + \varkappa$ ist, da wir die Methode der localen Dichtigkeit eingeschlagen haben, eine Function der localen Dichtigkeit q, nämlich angehörig einem fingirten Aethermedium, welches in absolut gleichförmiger Weise mit jener Dichtigkeit q im Raume vertheilt ist. Man könnte zur Erklärung der Relationen (8) die Conjectur machen, dass diese Function $K + \varkappa$ Null wäre für jeden beliebigen Werth von q. Eine solche Conjectur ist aber unstatthaft. Denn wäre $K + \varkappa$ für jedes q gleich Null, so würde die Function $\varkappa + \varkappa'$ ebenfalls für jedes q Null sein (wie solches im nächsten Paragraph dargelegt werden soll); und demgemäss würde alsdann (wie aus den Werthen der H (pag. 347) augenblicklich folgt) nicht nur $h_1 = h_2 = h_3$, sondern auch $h_{11} = h_{22} = h_{33}$ und $h_{23} = h_{31} = h_{12}$ werden.

Noch in anderer Art lässt sich nachweisen, dass die von q abhängende Function $K + \varkappa$ nicht für jedes q Null sein kann. Es ist nämlich unmöglich, dass sie verschwindet für diejenige Dichtigkeit q, welche im freien Aether vorhanden ist, weil sonst (vergl. die Note auf pag. 347) die Fortpflanzungsgeschwindigkeit des Lichtes im freien Aether den Werth Null erhalten würde.

§. 6.

Betrachtung eines absolut gleichförmig vertheilten Aethermediums.

Der Zweck dieses Paragraphen besteht lediglich darin, den nachträglichen Beweis zu liefern für einige früher gemachte Behauptungen.

In einem absolut gleichförmig vertheilten Aethermedium seien m und m_1 irgend zwei Theilchen mit der Entfernung ϱ und mit den relativen Coordinaten α, β, γ. Ferner sei Φ eine beliebige Function von ϱ^2, welche verschwindet, sobald ihr Argument ϱ^2 eine gewisse Grösse überschreitet.

Wir denken uns durch m eine gerade Linie gelegt, und zwar in solcher Richtung, dass ihre Richtungscosinus proportional sind mit drei gegebenen Constanten A, B, C. Auf diese Linie denken wir uns die Entfernung ϱ senkrecht projicirt. Für die so erhaltene Projection δ ergiebt sich dann die Formel:

$$(1) \qquad \delta = \frac{A\alpha + B\beta + C\gamma}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}.$$

Aus dieser folgt:

(2) $$(A^2 + B^2 + C^2)^n \delta^{2n} = (A\alpha + B\beta + C\gamma)^{2n},$$

wo n eine beliebig gewählte ganze Zahl sein mag. Aus (2) ergiebt sich durch Multiplication mit $m_1 \Phi$ und durch Summation über alle zur Umgebung von m gehörige Theilchen m_1:

(3) $$(A^2 + B^2 + C^2)^n Sm_1 \delta^{2n} \Phi = Sm_1 (A\alpha + B\beta + C\gamma)^{2n} \Phi.$$

Entwickelt man linker Hand die Potenz $(A^2 + B^2 + C^2)^n$, und ebenso rechter Hand den Ausdruck $(A\alpha + B\beta + C\gamma)^{2n}$ nach dem polynomischen Satz, und beachtet man dabei, dass auf der rechten Seite diejenigen Glieder verschwinden, welche mit ungeraden Potenzen von α, β, γ behaftet sind, so erhält man:

(4) $$\left(\Sigma \frac{\Pi n \cdot A^{2p} B^{2q} C^{2r}}{\Pi p \cdot \Pi q \cdot \Pi r}\right) \cdot Sm_1 \delta^{2n} \Phi = \Sigma\left(\frac{\Pi 2n \cdot A^{2p} B^{2q} C^{2r}}{\Pi 2p \cdot \Pi 2q \cdot \Pi 2r} \cdot Sm_1 \alpha^{2p} \beta^{2q} \gamma^{2r} \Phi\right),$$

wo $\Pi o = 1$ und $\Pi n = 1.2.3 \ldots n$ ist, und wo die Summation Σ ausgedehnt zu denken ist über alle diejenigen Systeme positiver ganzer Zahlen p, q, r, für welche

(5) $$p + q + r = n$$

ist. Da A, B, C beliebig gegebene, d. i. beliebig gewählte Constante sind, so müssen in der Formel (4) die links und rechts mit dem Product $A^{2p} B^{2q} C^{2r}$ behafteten Glieder einander gleich sein; somit folgt:

(6) $$\frac{\Pi n}{\Pi p \,.\, \Pi q \,.\, \Pi r} \; Sm_1 \delta^{2n} \Phi = \frac{\Pi 2n}{\Pi 2p \,.\, \Pi 2q \,.\, \Pi 2r} \; Sm_1 \alpha^{2p} \beta^{2q} \gamma^{2r} \Phi.$$

Noch mag bemerkt werden, dass zufolge der vorausgesetzten absoluten Gleichförmigkeit des Aethermediums die Gleichungen stattfinden werden:

(7) $$Sm_1 \delta^{2n} \Phi = Sm_1 \alpha^{2n} \Phi = Sm_1 \beta^{2n} \Phi = Sm_1 \gamma^{2n} \Phi.$$

Nun ist, um eine Betrachtung von anderer Seite her einzuschlagen:

(8) $$\varrho^2 = \alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2,$$
$$m_1 \varrho^{2n} \Phi = m_1 (\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2)^n \Phi,$$

mithin auch:

(9) $$S m_1 \varrho^{2n} \Phi = Sm_1 (\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2)^n \Phi,$$

oder, wenn nach dem polynomischen Satz entwickelt wird:

(10) $$S m_1 \varrho^{2n} \Phi = \Sigma \left(\frac{\Pi n}{\Pi p \,.\, \Pi q \,.\, \Pi r} \; Sm_1 \alpha^{2p} \beta^{2q} \gamma^{2r} \Phi\right),$$

wo die Summation Σ [ebenso wie in (4)] über alle diejenigen Systeme positiver ganzer Zahlen p, q, r ausgedehnt ist, welche der Bedingung (5) entsprechen. — Substituirt man in (10) für $S m_1 \alpha^{2p} \beta^{2q} \gamma^{2r} \Phi$ den durch (6) dargebotenen Werth, so ergiebt sich mit Rücksicht auf (7):

(11ᵃ) $$Sm_1 \varrho^{2n} \Phi = \left\{ \Sigma \left(\frac{\Pi^2 n}{\Pi^2 p \,.\, \Pi^2 q \,.\, \Pi^2 r} \; \frac{\Pi 2p \,.\, \Pi 2q \,.\, \Pi 2r}{\Pi 2n}\right)\right\} \cdot S m_1 \alpha^{2n} \Phi,$$

d. i.

(11[b]) $$Sm_1\,\varrho^{2n}\,\Phi = N.\,Sm_1\,\alpha^{2n}\,\Phi,$$

wo N die aus (11[a]) ersichtliche Bedeutung besitzt, mithin eine allein von n abhängende Zahl repräsentirt. — Um den Werth dieser Zahl N zu ermitteln, braucht man nur zu beachten, dass die hier angestellten Betrachtungen Schritt für Schritt auch dann gültig sein müssen, wenn man statt der Summationen über discrete Punkte Integrationen nimmt, die sich ausdehnen über eine um m beschriebene Kugel von beliebig gegebenem Radius. Der Einfachheit willen mag dieser Radius $= 1$, und die Function Φ ebenfalls $= 1$ gewählt werden. Setzt man also:

$$\begin{aligned}
\alpha &= \varrho\,\cos\,\vartheta &&= \varrho\mu,\\
\beta &= \varrho\,\sin\,\vartheta\,\cos\,\varphi &&= \varrho\sqrt{1-\mu^2}\,\cos\,\varphi,\\
\gamma &= \varrho\,\sin\,\vartheta\,\sin\,\varphi &&= \varrho\sqrt{1-\mu^2}\,\sin\,\varphi,
\end{aligned}$$

und nimmt man an Stelle von m_1 das Raumelement:

$$\varrho^2\,d\varrho\,d\mu\,d\varphi,$$

so wird man in ganz derselben Weise, wie man zur Formel (11[a, b]) gelangte, auch gelangen zu folgender Formel:

(12) $$\iiint \varrho^{2n}\varrho^2\,d\varrho\,d\mu\,d\varphi = N.\iiint (\varrho\mu)^{2n}\varrho^2\,d\varrho\,d\mu\,d\varphi,$$

wo die Zahl N identisch ist mit der in (11[a, b]) enthaltenen Zahl N, und wo die Integrationen nach ϱ, μ, φ die Grenzen besitzen:

$$\begin{aligned}
&\text{Grenzen für } \varrho: && 0\;\ldots\ldots\; 1,\\
&\text{Grenzen für } \mu: && -1\;\ldots\ldots\; +1,\\
&\text{Grenzen für } \varphi: && 0\;\ldots\ldots\; 2\pi.
\end{aligned}$$

Führt man zunächst die Integrationen nach ϱ und φ aus, so ergiebt sich:

$$\frac{2\pi}{2n+3}\int_{-1}^{+1} d\mu = \frac{2\pi\,.\,N}{2n+3}\int_{-1}^{+1}\mu^{2n}\,d\mu$$

d. i.

$$\frac{4\pi}{2n+3} = \frac{4\pi\,.\,N}{(2n+3)(2n+1)}.$$

Somit folgt:

(13) $$N = 2n+1.$$

Die Formel (11[a, b]) geht also über in:

(14) $$Sm_1\,\varrho^{2n}\,\Phi = (2n+1)\,Sm_1\,\alpha^{2n}\,\Phi.$$

Setzt man also zur augenblicklichen Abkürzung:

(15[a]) $$Sm_1\,\varrho^{2n}\,\Phi = \Gamma,$$

so folgt aus (14) und (7):

(15[b]) $$Sm_1\,\delta^{2n}\,\Phi = Sm_1\,\alpha^{2n}\,\Phi = Sm_1\,\beta^{2n}\,\Phi = Sm_1\,\gamma^{2n}\,\Phi = \frac{\Gamma}{2n+1}.$$

Sodann folgt weiter mit Rücksicht auf (6)

$$(15^c)\qquad Sm_1\alpha^{2p}\beta^{2q}\gamma^{2r}\,\Phi = \frac{\Pi n}{\Pi p.\,\Pi q.\,\Pi r}\;\frac{\Pi 2p.\,\Pi 2q.\,\Pi 2r}{\Pi 2n}\;\frac{\Gamma}{2n+1}.$$

Diese letztere Formel kann, weil nach (5) $p+q+r=n$, mithin

$$\frac{\Pi n}{\Pi p.\,\Pi q.\,\Pi r} = \frac{2^n\,\Pi n}{2^p\,\Pi p.\,2^q\,\Pi q.\,2^r\,\Pi r} = \frac{2.4..2n}{(2.4..2p)\,(2.4..2q)\,(2.4..2r)}$$

ist, auch so geschrieben werden:

$$(15^d)\qquad Sm_1\alpha^{2p}\beta^{2q}\gamma^{2r}\,\Phi = \frac{(1.3\ldots 2p-1)\,(1.3\ldots 2q-1)\,(1.3\ldots 2r-1)}{1.3\ldots 2n-1}\;\frac{\Gamma}{2n+1}.$$

Aus diesen Formeln $(15^{a,b,c,d})$ ergiebt sich aber unmittelbar die Richtigkeit der früher (pag. 346) in Bezug auf die Grössen K, $\varkappa$, $\varkappa'$ gemachten Behauptungen.

Wir denken uns, um zu einer ganz andern Betrachtung überzugehen, ein und dasselbe Aethermedium successive in zwei verschiedenen Zuständen. Bei beiden mag die Anordnung eine absolut gleichförmige sein; während aber bei der einen die Dichtigkeit $=\vartheta$ ist, mag sie bei der andern einen von ϑ unendlich wenig verschiedenen Werth besitzen, nämlich $=\vartheta + d\vartheta$ sein.

Mit Bezug auf die Anordnung (ϑ) mögen die Summen K, $\varkappa$, $\varkappa'$ (pag. 346) gebildet gedacht werden:

$$(16)\qquad \begin{aligned} &Sm_1\alpha^2\varphi' = K,\\ &Sm_1\alpha^4\varphi'' = \tfrac{3}{2}\,\varkappa,\quad Sm_1\alpha^2\beta^2\varphi'' = \tfrac{1}{2}\,\varkappa,\\ &Sm_1\alpha^6\varphi''' = \tfrac{15}{4}\,\varkappa',\quad Sm_1\alpha^4\beta^2\varphi''' = \tfrac{3}{4}\,\varkappa',\quad Sm_1\alpha^2\beta^2\gamma^2\varphi''' = \tfrac{1}{4}\,\varkappa'.\end{aligned}$$

Die analogen Summen mit Rücksicht auf die Anordnung ($\vartheta + d\vartheta$) mögen bezeichnet werden mit $K+dK$, $\varkappa + d\varkappa$, $\varkappa' + d\varkappa'$.

Denken wir uns für diese zweite Anordnung die Coefficienten H berechnet, so ergiebt sich aus der Definition dieser Coefficienten (pag. 340) augenblicklich:

$$(17)\qquad \begin{aligned} H_1 &= H_2 = H_3 = K + dK,\\ H_{11} &= H_{22} = H_{33} = 3(\varkappa + d\varkappa),\\ H_{23} &= H_{31} = H_{12} = \varkappa + d\varkappa.\end{aligned}$$

An Stelle der früheren Anordnungen (q) und (ϑ) werden nämlich hier in Betracht gezogen die Anordnungen ($\vartheta + d\vartheta$) und (ϑ). Substituirt man die Werthe (17) in die zwischen den H und K, $\varkappa$, $\varkappa'$ immer stattfindenden Relationen (pag. 347), so ergiebt sich, dass im vorliegenden Falle $\mu = \nu = \pi$, folglich $\mu = \nu = \pi = \frac{\sigma}{3}$ ist. Gleichzeitig verwandeln sich jene Relationen in

$$(18)\quad \begin{aligned} K + dK &= K + \varkappa\sigma + \tfrac{2}{3}(K+\varkappa)\sigma, \\ 3(\varkappa + d\varkappa) &= 3\varkappa + 3\varkappa'\sigma + 4(\varkappa + \varkappa')\sigma, \\ \varkappa + d\varkappa &= \varkappa + \varkappa'\sigma + \tfrac{4}{3}(\varkappa + \varkappa')\sigma. \end{aligned}$$

Die dritte dieser Formeln ist identisch mit der zweiten. Die beiden ersten aber lassen sich einfacher so schreiben:

$$(19)\quad \begin{aligned} dK &= \frac{2K + 5\varkappa}{3}\sigma, \\ d\varkappa &= \frac{4\varkappa + 7\varkappa'}{3}\sigma. \end{aligned}$$

Nun ist (vergl. pag. 349) im Allgemeinen $q = \vartheta\,(1 - \sigma)$, folglich im hier betrachteten Falle:

$$\vartheta + d\vartheta = \vartheta(1 - \sigma),$$

mithin

$$d\vartheta = -\,\vartheta\sigma,$$

d. i.

$$(20)\quad \sigma = -\frac{d\vartheta}{\vartheta}.$$

Aus (19) und (20) folgt sofort:

$$(21)\quad \begin{aligned} dK &= -\frac{2K + 5\varkappa}{3}\,\frac{d\vartheta}{\vartheta}, \\ d\varkappa &= -\frac{4\varkappa + 7\varkappa'}{3}\,\frac{d\vartheta}{\vartheta}, \end{aligned}$$

und hieraus durch Addition:

$$(22)\quad d(K + \varkappa) = -\frac{2(K + \varkappa) + 7(\varkappa + \varkappa')}{3}\,\frac{d\vartheta}{\vartheta}.$$

Aus dieser Formel aber folgt sofort, dass wenn $K + \varkappa$ für jeden Werth von ϑ Null ist, Gleiches auch von $\varkappa + \varkappa'$ gelten muss*).

Hiermit ist die Richtigkeit einer früher gemachten Behauptung (pag. 353) erwiesen.

§. 7.

Zusammenfassung des Resultates der Untersuchung.

Geht man von den zu Anfang dieses Aufsatzes (pag. 325) genannten Hypothesen aus, und nimmt man ausserdem an, dass die ponderablen Molecüle eines Körpers keine directe Einwirkung haben auf die Aethervibrationen in seinem Innern, so gelangt man für die Bewegung ebener Aetherwellen in einem zwei und zweigliedrigen Kry-

*) Mit dem hier erhaltenen Resultat steht völlig in Einklang eine früher gemachte Bemerkung (Note auf pag. 346), nämlich die Bemerkung, dass $K + \varkappa$ sowohl, als auch $\varkappa + \varkappa'$ für jeden Werth von ϑ verschwinden würden, sobald das Potential zweier Aethertheilchen auf einander umgekehrt proportional wäre mit der dritten Potenz ihrer Entfernung.

stall, ohne Zuziehung irgend einer weiteren Voraussetzung, zu folgenden Ergebnissen:

I. *Sind α, β, γ die Cosinus derjenigen Winkel, unter welchen die Normale der Welle gegen die Krystallachsen geneigt ist, so bestimmt sich die Fortpflanzungsgeschwindigkeit m der Welle durch die für m^2 quadratische Gleichung:*

$$0 = \frac{\alpha^2}{mm - (\overline{p} + a)} + \frac{\beta^2}{mm - (\overline{p} + b)} + \frac{\gamma^2}{mm - (\overline{p} + c)}$$

wo $\overline{p}$ die Bedeutung hat:

$$\overline{p} = \overline{a}\,\alpha^2 + \overline{b}\beta^2 + \overline{c}\,\gamma^2,$$

und wo a, b, c und $\overline{a}$, $\overline{b}$, $\overline{c}$ sechs dem Krystall eigenthümliche Constante sind. — Demgemäss existiren für jede gegebene Richtung α, β, γ nur zwei Wellen, deren Fortpflanzungsgeschwindigkeiten die beiden Wurzeln jener quadratischen Gleichung sind.

II. *Bezeichnet man die Fortpflanzungsgeschwindigkeiten der beiden Wellen mit m und m', ferner die Cosinus ihrer Vibrationsrichtungen mit A, B, C und A', B', C', so gelten die Formeln:*

$$A : B : C = \frac{\alpha}{m'm' - (\overline{p} + a)} : \frac{\beta}{m'm' - (\overline{p} + b)} : \frac{\gamma}{m'm' - (\overline{p} + c)},$$

$$A' : B' : C' = \frac{\alpha}{mm - (\overline{p} + a)} : \frac{\beta}{mm - (\overline{p} + b)} : \frac{\gamma}{mm - (\overline{p} + c)},$$

und ferner die Formeln:

$$0 = \alpha A + \beta B + \gamma C,$$
$$0 = \alpha A' + \beta B' + \gamma C',$$
$$0 = AA' + BB' + CC',$$

welche zeigen, dass die beiden Wellen genau transversal, und dass ihre Vibrationsrichtungen genau senkrecht auf einander sind.

Diese Resultate würden identisch sein mit den Fresnel'schen Gesetzen (die Vibrationsrichtung im Sinne meines Vaters genommen), sobald sich nachweisen liesse, dass die Constanten $\overline{a}$, $\overline{b}$, $\overline{c}$ einander gleich sind; denn alsdann würde der Ausdruck

$$\overline{p} = \overline{a}\,\alpha^2 + \overline{b}\,\beta^2 + \overline{c}\,\gamma^2$$

gleich sein dem gemeinschaftlichen Werthe jener drei Constanten, also ebenfalls eine Constante sein.

Dass aber die Constanten $\overline{a}$, $\overline{b}$, $\overline{c}$ einander gleich sind, scheint, wenn auch nicht im Widerspruch mit den genannten Hypothesen, so doch wenigstens keine nothwendige Consequenz derselben zu sein.

Es dürfte noch zu bemerken sein, dass die erhaltenen Resultate Aehnlichkeit besitzen mit den Resultaten einer Untersuchung von de Saint-Venant (C. R. LVII. pag. 387; Ber. d. Berliner Pysikal. Ges. XIX. pag. 145). September 1868.

Ueber biternäre Formen mit contragredienten Variabeln.

Von A. Clebsch und P. Gordan.

§. 1.

Charakter der Aufgabe. Symbolische Darstellungen.

Die Formen, von welchen hier die Rede sein soll, drücken, gleich Null gesetzt, eine in der Ebene stattfindende Beziehung zwischen den Coordinaten eines Punktes und einer Geraden aus. Solche Formen, wo sie in der Theorie der Curven secundär auftreten, führen den Namen von Zwischenformen oder Concom itanten. Aber ein genauerer Einblick in die Theorie der ternären algebraischen Formen lehrt, dass gewisse allgemeine Eigenschaften erst dann vollständig erkannt werden können, wenn man eine Form von der Gestalt einer Zwischenform zur Grundform wählt. Die gegenwärtige Untersuchung soll für das von solchen Formen entspringende Formensystem gewisse Gesichtspunkte allgemeiner Natur aufstellen, welche sodann auf Formen, deren Grad in beiden Arten von Variabeln der erste ist, angewendet und geometrisch gedeutet werden, was denn unter anderm auf die bekannten Eigenschaften collinearer ebener Systeme führt.

Bezeichnet man durch x_1, x_2, x_3 Punktcoordinaten, durch u_1, u_2, u_3 Liniencoordinaten, ferner durch $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ symbolische Coefficienten, welche den ersten, durch a_1, a_2, a_3 solche, welche den zweiten cogredient sind; setzen wir ferner, wie im Folgenden ähnlich immer geschehen soll:

$$u_\alpha = u_1\alpha_1 + u_2\alpha_2 + u_3\alpha_3$$
$$a_x = a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3,$$

so kann man die allgemeinste Grundform der angegebenen Art durch

$$f = a_x^m\, u_\alpha^n$$

darstellen; wobei also der Coefficient eines Products von u und x symbolisch durch das entsprechende Product der a und α ersetzt ist, multiplicirt mit einem Polynomialcoefficienten. Statt der symbolischen Coefficienten a wird es erlaubt sein, auch gelegentlich b, c u. s. w., statt der α auch β, γ u. s. w. zu benutzen.

Aus der Function f entsteht ein System algebraischer Formen, unter denen sich Invarianten, Covarianten, zugehörige Formen befinden, welche aber im Allgemeinen den Charakter von Zwischenformen besitzen. Auf dem Wege, welcher im 59ten Bd. des Crelleschen Journ., p. 1 folg. eingeschlagen ist, zeigt sich, dass alle Formen des Systems auf symbolische Producte von Determinanten und von linearen Ausdrücken zurückführbar sind. Die erstern müssen je drei Reihen cogredienter Grössen enthalten; also entweder Grössen u mit symbolischen Coefficienten $a, b, \ldots$, oder Grössen x mit symbolischen Coefficienten $\alpha, \beta, \ldots$. Die andern enthalten zwei Reihen von contragredienten Variabeln; also eine Reihe von $u, a, b, \ldots$ und eine Reihe von $x, \alpha, \beta, \ldots$. Die symbolischen Producte also, in welche jede dem Formenkreise von f angehörige Gestalt sich zerlegen lässt, haben in ihren Factoren folgende Typen, in welchen der Kürze wegen (a, b, c) für die Determinante $\Sigma \pm a_1 b_2 c_3$ gesetzt ist u. s. w.:

$$\text{I.}\quad \begin{array}{llll} 1)\ (a b u)\,, & 2)\ (a b c)\,, & 3)\ (\alpha\beta x)\,, & 4)\ (\alpha\beta\gamma) \\ 5)\ \ u_x\,, & 6)\ \ u_\alpha\,, & 7)\ \ a_x\,, & 8)\ \ a_\alpha\,. \end{array}$$

Unter diesen ist der 5te eine selbstständige Form, die bei contragredienten Variabeln auftretende evidente Zwischenform u_x. Die übrigen sind rein symbolische Factoren.

Eine in dem Formenkreise von f enthaltene Gestalt sei in den Coefficienten von f von der h^{ten} Ordnung, in den x vom μ^{ten} Grade, in den u von der ν^{ten} Classe. Die Summe $\mu + \nu$ von Grad und Classe soll als Rang bezeichnet werden.

§. 2.

Operationen zur Formenbildung. Gruppen des Formensystems.

Denken wir uns das ganze aus f entspringende Formensystem nach der Ordnung eingetheilt, so entsteht zunächst folgende Frage: Wie kann man die verschiedenen Formen $(h+1)^{\text{ter}}$ Ordnung aus den Formen h^{ter} Ordnung sich abgeleitet denken?

Um die Sache völlig zu fixiren, denken wir uns jede Form nicht nur in ihrem Ausdruck in Coefficienten und Variabeln gegeben, sondern auch unter ihren symbolischen Darstellungen, welche in mannigfachster Weise möglich sind, eine bestimmte festgehalten. Betrachten wir also zunächst eine Form $(h+1)^{\text{ter}}$ Ordnung als ein solches völlig gegebenes symbolisches Product von Determinanten und linearen Factoren. Unter den verschiedenen symbolischen Buchstabenpaaren greifen wir ein beliebiges, etwa a, α, heraus. Soweit die Buchstaben dieses Paares in unserer Form in den Typen u_α, a_x, a_α auftreten, lassen wir diese Factoren aus. Soweit sie in Verbindungen wie

(1) $$(abu)\,,\quad (abc)\,,\quad (\alpha\beta x)\,,\quad (\alpha\beta\gamma)$$

auftreten, setzen wir für sie die entsprechenden Ausdrücke

(2) $$b_x\,,\quad (ubc)\,,\quad u_\beta\,,\quad (x\beta\gamma).$$

Durch diese Operationen geht die Form $(h+1)^{\text{ter}}$ Ordnung in eine Form h^{ter} Ordnung über. Aus dieser Form h^{ter} Ordnung kann man umgekehrt die Form $(h+1)^{\text{ter}}$ Ordnung entstehen lassen, indem man in der erstern an Stelle der Factoren (2) wieder die Factoren (1) eintreten lässt, auf diese Weise die neuen symbolischen Buchstaben a, α einführt, und die Factoren u_α, a_x, a_α in entsprechenden Potenzen ergänzt.

Man bemerkt, dass sowohl die eine als die andere dieser Operationen, indem man andere Buchstabenpaare a, α ; b, β u. s. w. benutzt, auf die mannigfaltigste Weise ausgeführt werden kann. Aber das Wesentlichste ist, dass man erkennt, wie aus den Formen h^{ter} Ordnung, diese als gegeben betrachtet, alle Formen $(h+1)^{\text{ter}}$ Ordnung durch eine gewisse Anzahl symbolischer Operationen abgeleitet werden können. Diese Operationen sind folgende:

1) Es werden einige von den Factoren b_x, c_x u. s. w., welche in dem symbolischen Ausdruck der Form h^{ter} Ordnung vorkommen, in (abu), (acu) u. s. w. verwandelt, wo a, α Buchstaben sind, welche in dem gegebenen symbolischen Ausdrucke nicht vorkommen. Die Anzahl dieser Factoren sei m_1.

2) Es werden einige Factoren (ubc), (ude) u. s. w. in (abc), (ade) u. s. w. verwandelt. Die Anzahl dieser Factoren sei m_2,

3) Es werden einige Factoren u_β, u_γ ... in $(\alpha\beta x)$, $(\alpha\gamma x)$ u. s. w. verwandelt. Die Anzahl dieser Factoren sei m_3.

4) Es werden einige Factoren $(x\beta\gamma)$, $(x\delta\varepsilon)$ u. s. w. in $(\alpha\beta\gamma)$, $(\alpha\delta\varepsilon)$ ... verwandelt. Die Anzahl dieser Factoren sei m_4.

Wenn wir, von einer Form h^{ter} Ordnung ausgehend, die Zahlen m_1, m_2, m_3, m_4 auf eine bestimmte Weise gewählt haben, so ist es zwar noch möglich, auf sehr mannigfache Weise Formen $(h+1)^{\text{ter}}$ Ordnung abzuleiten, indem man die vier genannten Operationen auf andere und andere symbolische Factoren der Form h^{ter} Ordnung anwendet; aber die hinzuzufügenden Potenzen der symbolischen Factoren a_x, u_α, a_α sind soweit bestimmt, dass wenn man die Potenz von a_α annimmt $(= m_0)$, die übrigen völlig gegeben sind. In der That muss die Anzahl aller vorkommenden a gleich m, die aller α gleich n sein. Daher ist die hinzuzufügende Potenz von a_x die $(m - m_1 - m_2 - m_0)^{\text{te}}$, die hinzuzufügende Potenz von u_α die $(n - m_3 - m_4 - m_0)^{\text{te}}$.

Aber wegen der folgenden Betrachtungen ist es zweckmässig, die Anwendung dieser vier Operationen, und damit zugleich die Bedeutung der Zahlen m_1, m_2, m_3, m_4 passend zu erweitern. Die erste

Operation kann man so ausdrücken, dass in einigen Factoren $b_x, c_x, \ldots$ die x_i durch die Unterdeterminanten

$$u_2 \alpha_3 - u_3 \alpha_2 \,,\; u_3 \alpha_1 - u_1 \alpha_3 \,,\; u_1 \alpha_2 - u_2 \alpha_1$$

ersetzt werden. Aber diese Ersetzung kann ebenso gut bei einem der Factoren $(\beta\gamma x)$ stattfinden, wodurch derselbe in

$$u_\beta \alpha_\gamma - u_\gamma \alpha_\beta$$

übergeht. Auch dieses soll erlaubt sein, und wie oft es geschieht, soll in der Zahl m_1 mit einbegriffen werden.

Ebenso kann man die dritte Operation so ausdrücken, dass in einigen Factoren $u_\beta, u_\gamma, \ldots$ die u durch die Grössen

$$x_2 \alpha_3 - x_3 \alpha_2 \,,\; x_3 \alpha_1 - x_1 \alpha_3 \,,\; x_1 \alpha_2 - x_2 \alpha_1$$

ersetzt werden. Es soll nun erlaubt sein, dieses auch in den Factoren (bcu) vorzunehmen, wodurch ein solcher Factor in

$$b_x c_\alpha - c_x b_\alpha$$

übergeht; die Zahl m_3 soll zugleich die Anzahl dieser Veränderungen umfassen.

Es bedeutet also jetzt:

1) m_1: wie oft die x durch die Unterdeterminanten der u und α ersetzt sind;

2) m_2: wie oft die u durch α ersetzt sind;

3) m_3: wie oft die u durch die Unterdeterminanten der x und α ersetzt sind;

4) m_4: wie oft die x durch α ersetzt sind.

Nachdem wir so die aus einer Form k^{ter} Ordnung entspringenden Bildungen nach den Zahlen m_0, m_1, m_2, m_3, m_4 in gewisse Gruppen gebracht haben, soll für die Resultate der Anwendung der Operationen, von denen die Rede ist, eine gewisse Reihenfolge festgesetzt werden. Und zwar sollen die vermittelst derselben entstandenen Formen so geordnet werden, dass die Formen einer gewissen Ordnung zuerst nach ihrem Range geordnet werden; die Formen desselben Ranges dann nach der Höhe der ersten charakteristischen Zahl m_0, so dass die Formen mit grössern m_0 denjenigen vorangehen, welche ein kleineres m_0 haben; diese Formen wieder sollen geordnet werden nach der Grösse der zweiten charakteristischen Zahl (Gesammtzahl aller geänderten symbolischen Factoren)

$$M_1 = m_1 + m_2 + m_3 + m_4,$$

von dem kleinsten Werthe von M_1 beginnend; in gleicher Weise sollen die Formen mit gleichem M_1 weiter nach der Höhe der dritten charakteristischen Zahl

$$M_2 = m_2 + m_4$$

geordnet werden, welche zusammengenommen angiebt, wie oft die u

in a und die x in α verwandelt sind; die Formen mit gleichem M_2 nach der Höhe der vierten charakteristischen Zahl

$$M_3 = m_2$$

(Anzahl der Factoren, in welchen die u in α verwandelt sind), und die Formen mit gleichem M_3 nach der Höhe der fünften charakteristischen Zahl

$$M_4 = m_1,$$

welche die Anzahl der Factoren, in denen die x in Unterdeterminanten der u und der α verwandelt sind, anzeigt. Endlich sollen die Formen $(h+1)^{\text{ter}}$ Ordnung, welche alle diese Zahlen gemeinsam haben, nach den Functionen h^{ter} Ordnung geordnet werden, aus welchen sie entstanden sind. Diese selbst ordnen sich wieder nach denen der $(h-1)^{\text{ten}}$ u. s. w., so dass nur die Anordnung der Formen erster Ordnung gegeben sein muss.

Mit Hülfe dieser Festsetzungen kann man es unternehmen, eine Tafel aller zu f gehörigen algebraischen Formen in ihrer symbolischen Darstellung zu entwerfen und anzuordnen. Dabei wird zunächst an Stelle der gegebenen Function f, und zwar in der beistehenden Aufeinanderfolge die Formenreihe zu setzen sein (mit abnehmendem m_0):

$$\ldots, a_\alpha^3 a_x^{m-3} u_\alpha^{n-3}, a_\alpha^2 a_x^{m-2} u_\alpha^{n-2}, a_\alpha a_x^{m-1} u_\alpha^{n-1}, a_x^m u_\alpha^n.$$

Indem man von dieser Reihe ausgeht, der, wenn man will, die evidente Zwischenform u_x noch vorausgehen kann, und die oben festgesetzten Anordnungen festhält, gelangt man zu einer Anordnung aller Formen in eine völlig bestimmte Reihe von Gruppen. Man wendet auf jede Form h^{ter} Ordnung die Operationen so an, dass man auf Operationen mit kleinen M_1 solche mit grössern, unter diesen auf Operationen mit kleineren M_2 solche mit grösseren etc. folgen lässt, unter den erhaltenen Bildungen aber die mit niederem Range voranstellt. In jeder der erhaltenen Gruppen kommen nur noch solche Formen vor, für welche die 5 Zahlen m_i oder M_i übereinstimmen und welche aus derselben Form h^{ter} Ordnung entstanden sind. Aber freilich entsteht dabei jede höhere Form auf verschiedene Weise, da wir oben gesehen haben, dass man von einer Form $(h+1)^{\text{ter}}$ Ordnung auf mannigfache Weise zu Formen h^{ter} Ordnung zurückgehen könne. Jede höhere Form kommt also in mehreren dieser Gruppen vor; es kommen ausserdem Formen vor, welche nicht einfache symbolische Producte, sondern Summen von solchen sind, die dann zum Theil neu, zum Theil schon früher dagewesen sein können.

Da nun die Anordnung der Gruppen eine völlig bestimmte ist, so können wir die Festsetzung machen, dass jede Form nur in derjenigen Gruppe beibehalten werden soll, welche bei der angenommenen Anordnung der Gruppen zuerst vorkommt.

Es wird sich zeigen, dass dann auch die weitern Formen ausgelassen werden können, welche aus solchen auszulassenden Formen durch die angeführten Operationen hervorgehen. Aber ehe wir hierauf eingehen können, müssen andere Punkte der Betrachtung ihre Erledigung finden.

§. 3.

Zusammenhang der Formen einer Gruppe.

Die verschiedenen Formen einer Gruppe unterscheiden sich nur dadurch von einander, dass dieselben Operationen auf verschiedene symbolische Factoren der Ausgangsform h^{ter} Ordnung angewandt sind. Bezeichnen wir für den Augenblick in dieser Factoren der Form b_x und der Form $(\beta\gamma x)$ gleichmässig durch r_x, $r_x \ldots$, Factoren der Form u_β und der Form (bcx) gleichmässig durch u_ϱ, $u_{\varrho'}$ etc., so kann man der Form h^{ter} Ordnung die Gestalt geben

$$F = \Sigma\, r_x\, r'_x \ldots u_\varrho\, u_{\varrho'} \ldots P,$$

in welcher P das Product derjenigen symbolischen Factoren bezeichnet, welche weder die x noch die u enthalten, und wo die Summe Σ sich auf die verschiedenen symbolischen Producte bezieht, aus denen F zusammengesetzt sein kann. Verschiedene Formen derselben Gruppe entstehen dadurch, dass entweder die Operationen (1), (4) auf verschiedene der Factoren r_x, $r'_x \ldots$, oder dadurch, dass die Operationen (2), (3) auf verschiedene der Factoren u_ϱ, $u_{\varrho'}$ angewandt werden. Wie verschieden indess auch zwei so entstehende Formen $(h+1)^{\text{ter}}$ Ordnung sein mögen, so kann man doch immer eine Reihe von Formen derselben Gruppe zwischen ihnen so einschalten, dass je zwei benachbarte Formen der ganzen Reihe sich nur durch die Benutzung zweier Factoren unterscheiden, sei es zweier Factoren r_x, r'_x, oder zweier Factoren u_ϱ, $u_{\varrho'}$. Wenn wir also zeigen, dass die Differenz zweier solcher benachbarten Formen der Gruppe immer aus Formen sich zusammensetzen, die frühern Gruppen angehören, so folgt, dass **allgemein die Differenz zweier Formen derselben Gruppe durch Formen früherer Gruppen zusammensetzbar ist.**

Um diesen Satz für benachbarte Formen zu beweisen, ist es nur nöthig, ihn für solche Formen zu beweisen, welche sich durch Benutzung von r_x und r'_x unterscheiden, da dann für die aus verschiedener Benutzung von u_ϱ, $u_{\varrho'}$ entstandenen, wie man leicht sieht, dasselbe gelten muss; auch genügt es natürlich, in F ein Glied der Summe zu betrachten. Die bei der Benutzung von r_x, r'_x eintretende Verschiedenheit kann aber eine dreifache sein. Entweder bleibt einer der Factoren ungeändert, der andere wird durch die Operation (1) geändert; oder einer bleibt ungeändert, der andere wird durch die

Operation (4) geändert; oder endlich, einer wird durch die Operation (1), der andere durch die Operation (4) geändert. Bezeichnet man immer durch M denjenigen Theil des Resultats, welcher nicht aus den Factoren r_x, r'_x hervorgegangen ist, und also in beiden benachbarten Formen der nämliche ist, so sind die drei zu betrachtenden Differenzen folgende, welche mit Hülfe der bekannten Identität in die beistehenden Formen verwandelt werden:

$$M\left[r_x(r'ua) - r'_x(rua)\right] = M\left\{u_x(r'ra) - a_x(r'ru)\right\}$$

$$M(r_x r'_a - r'_x r_a) = M. \begin{vmatrix} r_1 & r_1' & x_2\alpha_3 - x_3\alpha_2 \\ r_2 & r_2' & x_3\alpha_1 - x_1\alpha_3 \\ r_3 & r_3' & x_1\alpha_2 - x_2\alpha_1 \end{vmatrix}$$

$$M\left[r_a(r'ua) - r'_a(rua)\right] = M\left\{u_a(r'ra) - a_a(r'ru)\right\}.$$

Es ist leicht zu zeigen, dass in der That alle Glieder rechts in frühern Gruppen vorkommen. In dem ersten Ausdrucke scheidet sich im ersten Gliede der Factor u_x aus; der Rest hat also niedern Rang und kommt also früher vor. Das zweite Glied entsteht aus einer Function h^{ter} Ordnung, welche sich nur dadurch von F unterscheidet, dass an Stelle der Factoren $r_x r'_x$ der Factor $(r'ru)$ gesetzt wird; und zwar entsteht es durch Operationen, welche übrigens die bei Entstehung der linken Seite auf F angewandten sind, nur dass einmal weniger x in Unterdeterminanten der u und a verwandelt sind. Daher ist M_1 um 1 kleiner als bei Aufstellung der Terme der linken Seite, und das fragliche Glied gehört also einer frühern Gruppe an.

Die rechte Seite der zweiten Gleichung entsteht aus derselben Function h^{ter} Ordnung, welche eben an Stelle von F trat, indem man übrigens dieselben Operationen ausführt, wie sie zur Bildung der linken Seite benutzt wurden, nur dass einmal statt dass die x sich in die α verwandeln, die u in die Unterdeterminanten der x und der α übergehen. Daher hat zwar M_1 denselben Werth wie bei den links angewandten Operationen; aber M_2 ist um 1 kleiner; die Form rechts gehört also einer frühern Gruppe an wie die Formen links.

Die rechte Seite der dritten Gleichung besteht aus 2 Theilen. Beide entstehen wieder aus derselben Function h^{ter} Ordnung, welche schon benutzt wurde. Aber bei dem ersten Theile werden, statt einmal die x in die α, einmal die x in Unterdeterminanten der u und a zu verwandeln, nur die u in a verwandelt; daher ist M_1 um 1 kleiner. Im zweiten hat man zwei Veränderungen weniger, also M_1 um 2 kleiner, und ausserdem tritt a_a vor, so dass m_0 um 1 grösser wird. Aus beiden Gründen gehört das Glied einer frühern Gruppe an.

Hierdurch ist in der That der zu beweisende Satz erwiesen.

§. 4.

Uebereinanderschiebungen.

Wenn man die Form F selbst wie eine Grundform betrachtet, und sie symbolisch durch

$$F = s_x^\mu \, u_\sigma^\nu \tag{1}$$

darstellt, so entsteht durch Anwendung der oben geschilderten Operationen ein Ausdruck, welcher ein gewisses Aggregat der Formen der entsprechenden Gruppe $(h+1)^{\text{ter}}$ Ordnung ist, und welcher die besondere Eigenschaft hat, dass seine Coefficienten sich aus denen von f und F direct zusammensetzen, linear für jede beider Arten von Coefficienten. Dieser Ausdruck, welcher die symbolische Form hat:

$$\begin{aligned} \Phi = {} & s_x^{\mu - m_1 - m_4} \cdot u_\sigma^{\nu - m_2 - m_3} \cdot a_u^{m_0} \\ & \cdot (s u a)^{m_1} \cdot s_\alpha^{m_4} \cdot (\sigma x \alpha)^{m_3} \cdot a_\sigma^{m_2} \cdot a_x^{m - m_0 - m_1 - m_2} \cdot u_\alpha^{n - m_0 - m_3 - m_4} \end{aligned} \tag{1ª}$$

kann in der That aus F dadurch abgeleitet werden, dass man F nach den x und den u wiederholt differenzirt, und die Differentialquotienten mit passenden Grössen multiplicirt und addirt, welche ausser den u und den x nur Coefficienten von f enthalten. Wir wollen diese Art, F zu behandeln, als Uebereinanderschiebung von F mit f*), und Φ als das Resultat der Uebereinanderschiebung bezeichnen. Man erkennt dann leicht, dass die Differenz des einer Gruppe entsprechenden Φ und einer Form der Gruppe durch Formen früherer Gruppen ausdrückbar ist. Dieser Satz ist eine directe Folge des im vorigen §. bewiesenen. Wenden wir nämlich die Differentialoperationen, von denen oben die Rede war, auf die andere Form von F an:

$$F = \Sigma r_x r'_x \ldots u_\varrho u_{\varrho'} \ldots . P, \tag{2}$$

so erhalten wir offenbar eine Summe von Gliedern, welche durch Vertauschung der $r, r' \ldots$ oder der $s, s' \ldots$ unter sich in einander übergehen, d. h. wir erhalten, bis auf einen allen gemeinschaftlichen Zahlenfactor, die Summe aller Formen der betreffenden Gruppe, diese so gezählt, als wären alle r und alle s von einander verschieden,

$$\Phi = k \Sigma \varphi, \tag{3}$$

wo unter φ die verschiedenen Formen der Gruppe verstanden sind, und k eine Zahl bedeutet. Nun entsteht aber die symbolische Form

*) Der Process des Uebereinanderschiebens ist hiernach nur eine Erweiterung des Processes, welchen Herr Aronhold als Bildung von Functionalinvarianten bezeichnet, wobei freilich hier immer eine der dabei benutzten Functionen als die ursprüngliche angenommen ist. Aber das letztere, welches nur wegen des Ganges der obigen Untersuchung geschieht, ist für den Begriff unwesentlich.

(1) aus (2), indem man alle r einander gleich setzt, alle s einander gleich setzt und das Summenzeichen auslässt. Hierdurch geht jedes φ in Φ über; ist also l die Anzahl der φ in dem oben festgestellten Sinne, so hat man auch

$$\Phi = kl\Phi \quad , \quad k = \frac{1}{l}$$

und die Gleichung (3) geht also über in

$$l\Phi = \Sigma\varphi.$$

Ist also φ_0 irgend eine der Formen φ, so ist auch

$$l(\Phi - \varphi_0) = \Sigma(\varphi - \varphi_0),$$

wo nun rechts das von φ_0 herrührende Glied identisch verschwindet. Aber nach dem vorigen §. sind die Differenzen $\varphi - \varphi_0$ durch Formen früherer Gruppen ausdrückbar, also auch $\Phi - \varphi_0$, was zu beweisen war.

Der hierdurch nachgewiesene Satz lässt sich noch anders aussprechen. Denn da die Differenz zwischen der Uebereinanderschiebung und einer Form der Gruppen sich durch Formen früherer Gruppen ausdrückt, so kann man jede Form ersetzen durch die entsprechende Uebereinanderschiebung, vermehrt um Glieder früherer Gruppen. Führt man bei diesen nun wieder dasselbe aus, und fährt so fort, so erhält man endlich den Satz:

Jede Form einer Gruppe ist gleich der entsprechenden Uebereinanderschiebung, vermehrt um Uebereinanderschiebungen, welchen frühere Gruppen entsprechen.

Man darf also jetzt die Gruppen ganz aufgeben, und erhält das vollständige System der zu f gehörigen Formen, wenn man in den früheren Entwicklungen statt jeder Gruppe die entsprechende Uebereinanderschiebung setzt.

Hieraus ergiebt sich nun sofort der am Ende von §. 2. angedeutete Satz. Denn wenn eine durch Uebereinanderschiebung entstandene Form F_h eine lineare Combination von früher auftretenden Formen F'_h derselben Art ist, so sind auch alle durch Uebereinanderschiebung mit f aus F_h abgeleitete Formen dieselben linearen Combinationen der aus den F'_h abgeleiteten, und können also ebenfalls ausgelassen werden. Und so sieht man also, dass bei der Bildung der Tafel der Uebereinanderschiebungen jede lineare Combination früherer Formen selbst nebst allen ihren abgeleiteten Formen ausgelassen werden kann.

Auch ein anderer Punkt, welcher früher zweifelhaft scheinen konnte, wird hiermit erledigt. Man durfte früher keineswegs solche Formen ohne Weiteres auslassen, welche, wie auch ihre symbolische Form beschaffen war, den wahren Werth 0 hatten. Aber nunmehr sieht man, dass diese Formen in der Tafel der Uebereinanderschiebungen nie etwas geben können, da die Uebereinanderschiebung von f mit einer identisch verschwindenden Function nothwendig selbst identisch verschwindet.

Aber zugleich sieht man, dass, wenn eine Uebereinanderschiebung nicht durch frühere linear ausdrückbar ist, auch keine der in der entsprechenden Gruppe enthaltenen Formen identisch verschwinden kann, da sie der Uebereinanderschiebung selbst, vermehrt um lineare Combinationen früherer, gleich ist.

Da zu jeder der frühern Gruppen nur eine Uebereinanderschiebung gehört, so bilden die Uebereinanderschiebungen ein völlig festgeordnetes System; und lässt man jede Form dabei aus, welche durch frühere linear ausdrückbar ist, so kommt auch jede Form nur einmal vor; wobei natürlich nicht ausgeschlossen ist, dass viele dieser Formen sich noch auf höhere als lineare Weise durch andere ausdrücken.

§. 5.

Volle Systeme h^{ter} Ordnung.

Unter einem vollen System von Formen h^{ter} Ordnung sei ein solches verstanden, durch welches alle Formen h^{ter} Ordnung in dem aus f entspringenden Formensystem sich linear ausdrücken lassen, wenn man noch Potenzen von u_x als ergänzende Factoren hinzufügt. Aus dieser Definition folgt von selbst, dass, wenn in der Tafel der Uebereinanderschiebungen ein volles System h^{ter} Ordnung gegeben ist, die Uebereinanderschiebungen aller Formen h^{ter} Ordnung mit f, also alle Formen $(h+1)^{\text{ter}}$ Ordnung sich ebenfalls durch die Uebereinanderschiebungen jenes vollen Systems multiplicirt mit Potenzen von u_x linear ausdrücken lassen. Um dieses einzusehen, braucht man nur zu beweisen, dass durch Uebereinanderschiebung von f mit $u_x^p . F$ Glieder entstehen, welche aus Potenzen von u_x und aus Uebereinanderschiebungen von F mit f zusammengesetzt sind. Aber der Ausdruck $u_x^p . F$ kommt als Entwicklungscoefficient von ε^p in dem Ausdrucke

$$(s_x + \varepsilon u_x)^{\mu+p} u_\sigma^r$$

vor. Setzt man daher in Φ (1^{a} §. 4) $\mu + p$, $s + \varepsilon u$ statt μ, s und nimmt den Coefficienten von ε^p, so erscheint in der That der neue Ausdruck als Aggregat von Termen, welche die nämliche Gestalt wie Φ haben, und mit Potenzen von u_x multiplicirt sind.

Die Uebereinanderschiebungen eines vollen Systems h^{ter} Ordnung geben also ein volles System $(h+1)^{\text{ter}}$ Ordnung. Dasselbe kann noch überflüssige Formen enthalten, d. h. solche, welche durch andere unter ihnen linear ausdrückbar sind; aber es können niemals Formen fehlen, welche zur Herstellung eines vollständigen Systems nothwendig wären.

Denken wir uns alle vollständigen Systeme zunächst durch die Bildung der Tafel der Uebereinanderschiebungen so gegeben, dass alle vollen Systeme aus Uebereinanderschiebungen bestehen. Der Charakter des vollen Systems wird nun offenbar keinesweges geändert, wenn man etwa eine Form des Systems mit einem numerischen Factor multiplicirt, und ausserdem lineare Combinationen früherer Uebereinanderschiebungen (von passender Ordnung, Grad und Classe) hinzufügt. Das vollständige System bleibt also z. B. ein solches, wenn man statt jeder Uebereinanderschiebung eine beliebige Form der entsprechenden Gruppe setzt, multiplicirt mit einer beliebigen numerischen Constante. Man wird sehen, von welcher Wichtigkeit dies für die Anwendungen ist.

Auf ein ganz beliebig gegebenes volles System der h^{ten} Ordnung kann man immer den Process der Uebereinanderschiebung anwenden, um ein volles System $(h+1)^{ter}$ Ordnung zu erhalten. Denn die das volle System h^{ter} Ordnung ersetzenden Uebereinanderschiebungen kann man durch die Formen des beliebigen vollen Systems h^{ter} Ordnung linear ausdrücken; also auch die Uebereinanderschiebungen jener, d. h. ein volles System $(h+1)^{ter}$ Ordnung, durch die Uebereinanderschiebungen dieser, was zu beweisen ist.

Indem man nun dieses mit dem Vorigen combinirt, kann man von einem beliebig gegebenen vollen System von Formen F_h h^{ter} Ordnung ausgehen. Wenn jede Form dieses vollen Systems in einer gewissen symbolischen Gestalt gegeben ist, so gehört sie auch in eine gewisse Gruppe, und die gegebenen Formen werden daher in einer ganz bestimmten Weise geordnet, welche der oben festgesetzten Ordnung der Gruppen entspricht. Man bildet nun die Gruppen, in welche die aus diesem vollen System abgeleiteten Formen zerfallen. Nimmt man aus jeder dieser Gruppen eine Form, und lässt alle diejenigen dabei aus, welche durch vorangegangene linear ausdrückbar sind, so bleiben jeder Form F_h eine gewisse Zahl dieser Formen $(h+1)^{ter}$ Ordnung *zugeordnet*, insofern sie bei dieser Bildungsweise gerade aus F_h hervorgegangen sind. Dabei sind also z. B. solche Formen auszulassen, welche zwar aus F entstehen können, aber welche bei Benutzung anderer Buchstabenpaare aus einer früheren Function, oder auch aus F_h selbst, aber mit Hülfe von Zahlen m, die frühern Gruppen zugehören, ableitbar sind.

Die zu den Formen des vollen Systems h^{ter} Ordnung zugehörigen Formen bilden also ein volles System $(h+1)^{ter}$ Ordnung. Und man kann also, indem man sich dieses Begriffs bedient, von den Formen 1^{ter} Ordnung ausgehend, ein System zugehöriger Formen 2^{ter} Ordnung entwickeln, zu diesen zugehörige Formen dritter Ordnung u. s. w. Man gelangt so zu der Bildung eines Formensystems, durch welches alle Formen sich linear ausdrücken lassen, welche sich in dem Formensysteme von f überhaupt finden, und welches noch willkürlich genug ist, um der Anwendung besonderer Kunstgriffe hinlänglichen Spielraum zu lassen.

§. 6.

Vollständige Formensysteme. Criterien derselben.

Das Ziel der vorliegenden Untersuchung ist nun die Untersuchung eines vollständigen Formensystems, d. h. eines solchen, durch welches alle aus f entspringenden Formen sich als ganze und rationale Functionen darstellen lassen. Es sollen jetzt als Vorbereitung zu der folgenden Anwendung die Criterien eines solchen Systems gegeben werden.

Zu einem vollständigen Systeme gehören immer u_x und die in §. 2 aufgeführten Formen erster Ordnung. Bezeichnen wir im Ganzen die Formen eines vollständigen Systems durch V, so enthält die im Vorigen entwickelte Tafel als Formen h^{ter} Ordnung lauter rationale Functionen der V. Aber auch die Formen $(h+1)^{\text{ter}}$ Ordnung sollen ganze Functionen der V werden. Die Formen erster Ordnung sind es wirklich; beweisen wir also, dass, die Formen h^{ter} Ordnung als ganze Functionen der V angenommen, die Formen $(h+1)^{\text{ter}}$ Ordnung bei der oben dargestellten Bildungsweise von selbst ganze Functionen der V werden, so ist damit dargethan, dass überhaupt alle aus f entspringenden Formen ganze Functionen der V sind, d. h. dass die V wirklich ein vollständiges Formensystem bilden.

Es ist also nichts weiter zu beweisen, als dass aus den V und aus Producten der V durch Uebereinanderschiebung oder Processe, welche derselben äquivalent sind (Bildung eines Gliedes der entsprechenden Gruppe), wieder ganze rationale Functionen der V entstehen.

Der erste Theil des zu führenden Nachweises besteht also darin, dass man aus den V selbst die Uebereinanderschiebungen oder deren Aequivalente bildet, und zeigt, dass sie wieder durch die V ausdrückbar seien. Dabei kann man, indem man den Beweis für irgend eine Form führt, immer voraussetzen, dass für alle frühere Formen der Beweis bereits geliefert sei. Der zweite Theil leistet dasselbe für Producte der V. Dieser zweite Theil kann durch folgende Betrachtungen vereinfacht werden, deren Nutzen freilich zum Theil erst durch die Anwendung völlig evident wird.

Ein Product von Functionen V sei $V \,.\, M$, wo M das Product der übrigen V ist, welche darin noch vorkommen. Indem wir nun mit diesem Product die verschiedenen Uebereinanderschiebungen vornehmen, können wir jede Uebereinanderschiebung durch eine Form der entsprechenden Gruppe ersetzen. Und zwar können wir diese Form so wählen, dass möglichst viel von den der Gruppe entsprechenden Operationen auf die symbolischen Factoren von V selbst angewandt werden. Kann man alle Operationen, welche der Gruppe entsprechen, auf V selbst anwenden, so zerfällt die zu bildende Form in ein Product von Formen V mit einer aus dem einen V selbst abgeleiteten Form. Ist also der erste Theil der Untersuchung bereits erledigt, so hat man bereits ein Aggregat von V vor sich, und man kann in dem hier zu behandelnden zweiten Theile solche Producte auslassen. Aber auch in vielen andern Fällen findet man, ohne selbst besondere Voraussetzungen über das Product M zu machen, dass das untersuchte Product nichts liefern kann. Es bleiben also nur gewisse Systeme der Zahlen $m_0, m_1 \ldots m_4$ oder $M_0, M_1 \ldots M_4$ übrig, deren Operationen bei Producten, welche ein bestimmtes V enthalten, zu berücksichtigen sind. Auf diese Weise gehören zu jedem N gewisse Systeme charakteristischer Zahlen.

Denken wir uns zu jeder Form V die Systeme charakteristischer Zahlen gebildet. Nur Producte solcher V sind dann in Betrachtung zu ziehen, welche gemeinsame Systeme charakteristischer Zahlen besitzen. Und auch bei diesen Producten sind alle solche auszuschliessen, bei welchen man die dem charakteristischen Zahlensysteme entsprechenden Operationen bereits auf ein Product aus einer geringern Anzahl ihrer Factoren anwenden kann.

Und somit ist denn der Gang der Untersuchung festgelegt. Man untersucht zuerst die Uebereinanderschiebungen der einzelnen V mit f, oder Glieder der entsprechenden Gruppen; bildet ferner die den einzelnen V entsprechenden Systeme charakteristischer Zahlen, sucht die Producte auf, deren Factoren gemeinsame charakteristische Zahlen besitzen, und indem man diese auf Producte von nicht zu viel Factoren beschränkt, hat man nachzuweisen, dass die aus diesen Producten entstehenden Bildungen als rationale Functionen der V darstellbar sind.

§. 7.

Betrachtung des Falles $m = 1$, $n = 1$. Vollständiges System für diesen Fall.

Wenden wir uns jetzt beispielsweise zur Betrachtung einer Form, welche für die u und für die x linear ist ($m = 1$, $n = 1$). Jhre symbolische Form ist

$$f = a_x u_a .$$

Die Formen erster Ordnung bestehen daher ausser f nur noch aus der Invariante a_α, und diese ist die einzige Form, für welche $m_0 = 1$ ist; bei allen übrigen Bildungen können wir $m_0 = 0$ annehmen.

Da in f nur eine symbolische Reihe a und nur eine symbolische Reihe α vorkommt, so können die Zahlen m_1, m_2, m_3, m_4 nur die Werthe 0 oder 1 haben. Aber m_1 und m_2 können nicht zugleich 1 sein, da sonst bei der anzuwendenden Operation die Reihe a zweimal eingeführt würde; ebenso können m_3 und m_4 nicht zugleich 1 sein. Sonach lassen m_1, m_2 im Ganzen 3 Combinationen, m_3, m_4 ebenfalls 3 zu, und die Anzahl von Combinationen aller m_i wäre 9. Aber von diesen fallen noch zwei aus; erstlich die Combination, wo alle m_i verschwinden, welche keine eigentliche Operation, sondern nur Multiplication mit f giebt, zweitens der Fall, wo m_1 und m_3 gleichzeitig 1, m_2 und m_4 also Null sind. Denken wir uns nämlich die durch diese Zahlen charakterisirte Operation auf eine Form h^{ter} Ordnung angewandt, welche die symbolischen Factoren $r_x \,.\, u_\varrho$ enthält, so dass diese in

$$(r u a)(\varrho x \alpha) = \begin{vmatrix} r_\varrho & r_x & r_\alpha \\ u_\varrho & u_x & u_\alpha \\ a_\varrho & a_x & a_\alpha \end{vmatrix}$$

übergeht. Wenn wir nun durch M das Product der übrigen symbolischen Factoren der Form bezeichnen, sodass $M \,.\, r_x \,.\, u_\varrho$ die gegebene Form war, so zerfällt die neugebildete Form in die 6 Theile

$$M \,.\, r_\varrho u_x a_\alpha - M \,.\, r_\varrho a_x u_\alpha + M \,.\, r_x u_\alpha a_\varrho + M \,.\, r_\alpha u_\varrho a_x$$
$$- M \,.\, u_x a_\varrho r_\alpha - M \,.\, a_\alpha r_x u_\varrho .$$

Der letzte Theil ist bis auf den Factor a_α die ursprüngliche Form selbst, der erste bis auf die Factoren $u_x \,.\, a_\alpha$ die der ursprünglichen, des niederern Ranges wegen noch vorangehende Form $M \,.\, r_\varrho$, beide h^{ter} Ordnung, also schon bekannt, der zweite Theil ist das Product der letztern Form mit f. Der dritte Theil entsteht aus $M \,.\, r_x u_\varrho$ durch Verwandlung von u in a, also durch eine Operation mit kleinerm M_1, welche daher früher vorzunehmen ist, als die hier behandelte. Ebenso verhält es sich mit dem vierten Theil, welcher aus $M \,.\, r_x u_\varrho$ durch Verwandlung von x in α entsteht. Der fünfte Theil endlich entsteht aus $M \,.\, r_x u_\varrho$ durch Verwandlung von x in α und u in ϱ, wobei zwar M_1 denselben, M_2 aber einen höhern Werth hat. Das einzige neue Glied also, welches die gegenwärtig betrachtete Operation, und zwar multiplicirt mit u_x, uns liefern würde, entsteht ohne diesen Factor durch die später ohnedies anzuwendende Operation, bei welcher u in a, x in α verwandelt wird. Man kann daher die erst betrachtete Operation ganz auslassen.

Hiernach erhält man für die anzuwendenden Operationen folgende Tafel, welche so angeordnet ist, dass die charakteristischen Zahlen M_i von jeder Operation zur andern gerade so wachsen, wie es die für die successive Anwendung der Operationen in §. 2. festgesetzte Regel verlangt:

	m_4	m_2	m_1	m_3	M_1	M_2	M_3	M_1	Es gehen über*)
1)	0	0	0	1	1	0	0	0	u in Unterdet. von x und α
2)	0	0	1	0	1	0	0	1	x in Unterdet. von u und a
3)	0	1	0	0	1	1	0	0	u in a
4)	1	0	0	0	1	1	1	0	x in α
5)	0	1	0	1	2	1	0	0	u in a, u in Unterdet. von x und α
6)	1	0	1	0	2	1	1	1	x in α, x in Unterdet. von u und a
7)	1	1	0	0	2	2	1	0	x in α, u in a.

Um nun das vollständige Formensystem zu erhalten, kann man von den Formen erster Ordnung ausgehen, diese Operationen anwenden, die Resultate möglichst reduciren, auf die übrig bleibenden die Operationen wieder anwenden u. s. w. Man findet dann, dass, abgesehen von der identischen Zwischenform u_x, das vollständige Formensystem aus 7 Formen besteht, welche, nach den oben gegebenen Regeln geordnet, diese sind:

$$\text{I.} \qquad i = a_x\ ,\ f = a_x u_\alpha\ ,\ i_1 = a_\beta b_\alpha\ ,\ f_1 = a_x u_\beta b_\alpha\ ,\ i_2 = a_\beta b_\gamma c_\alpha\ ,$$
$$\varphi = a_x c_x b_\alpha (\beta\gamma x)\ ,\ \psi = u_\beta u_\gamma b_\alpha (acu)\ .$$

Die Anordnung der ersten 5 Formen bestimmt sich durch Ordnung und Rang. Unter den letzten beiden Formen, welche gleiche Ordnung und Rang haben, ist die 6te voranzustellen, weil sie aus der 4ten durch die Operation 1) der Tafel entsteht, die 7te aber durch die Operation 2).

§. 8.

Nachweis, dass das System I. ein vollständiges ist.

Um nun die Formen I. als vollständiges Formensystem nachzuweisen, ist erstlich es nöthig, zu zeigen, dass die Anwendung der in der Tafel aufgeführten Operationen auf dieselben nichts neues giebt. Wir können dabei von den Invarianten abstrahiren, auf welche überhaupt die Operationen nicht anwendbar sind. Es bleibt also die Wirkung der Operationen auf 4 Formen zu untersuchen.

$$1.\quad f = a_x u_\alpha\,.$$

Die Anwendung der Operationen der Tafel giebt die Formen:

$$a_x b_x (x\alpha\beta)\quad ,\quad u_\alpha u_\beta (uab)\quad ,\quad a_x b_\alpha u_\beta\quad ,\quad a_\beta u_\alpha b_x\quad ,\quad a_\beta u_\alpha\,.$$

---

*) Bei den Anwendungen werden natürlich die in dieser Columne erwähnten a, α oft durch b, β, durch c, γ etc. je nach Bedarf zu ersetzen sein.

Die Operationen 5), 6) sind nicht anwendbar. Die ersten beiden der obigen Formeln verschwinden identisch, da sie durch die nichtsbedeutende Vertauschung von a, α mit b, β das Zeichen ändern. Die 3te und 4te Form fällt mit der 4ten der Tafel I., die letzte mit der 3ten von Tafel I. zusammen.

$$2. \quad f_1 = a_x u_\beta b_\alpha .$$

Die Operationen 5), 6) sind wieder nicht anwendbar. Die übrigen geben:

$a_x c_x b_\alpha (\beta x \gamma)$, $u_\beta u_\gamma b_\alpha (a u c)$, $a_x c_\beta b_\alpha u_\gamma$, $a_\gamma u_\beta b_\alpha c_x$, $a_\gamma c_\beta b_\alpha$,
Die erste, zweite und letzte dieser Formen sind die 6te, 7te und 5te der Tafel I. Die 4te Form geht in die 3te über, wenn man a, α in b, β; b, β in c, γ; c, γ in a, α verwandelt. Die 3te ist daher allein zu untersuchen.

Betrachten wir zu diesem Zwecke die identische Gleichung

$$0 = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & 0 \\ b_1 & b_2 & b_3 & 0 \\ c_1 & c_2 & c_3 & 0 \\ u_1 & u_2 & u_3 & 0 \end{vmatrix} . \begin{vmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 & 0 \\ \beta_1 & \beta_2 & \beta_3 & 0 \\ \gamma_1 & \gamma_2 & \gamma_3 & 0 \\ x_1 & x_2 & x_3 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_\alpha & b_\alpha & c_\alpha & u_\alpha \\ a_\beta & b_\beta & c_\beta & u_\beta \\ a_\gamma & b_\gamma & c_\gamma & u_\gamma \\ a_x & b_x & c_x & u_x \end{vmatrix} .$$

Ordnet man diese Gleichung nach der letzten Verticalreihe, so werden die u_α, u_β, u_γ enthaltenden Glieder einander gleich, weil sie durch Vertauschung der Buchstabenpaare in einander übergehen; man erhält also

$$0 = u_x \begin{vmatrix} a_\alpha & b_\alpha & c_\alpha \\ a_\beta & b_\beta & c_\beta \\ a_\gamma & b_\gamma & c_\gamma \end{vmatrix} - 3 u_\alpha \begin{vmatrix} a_\beta & b_\beta & c_\beta \\ a_\gamma & b_\gamma & c_\gamma \\ a_x & b_x & c_x \end{vmatrix}$$
$$= u_x (i^3 + 2 i_2 - 3 i i_1) - 3 \{2 u_\alpha a_\beta b_\gamma c_x + i^2 f - i_1 f - 2 i f_1\} ,$$

wodurch die gesuchte Form auf Formen der Tafel I. zurückgeführt ist.

$$3. \quad \varphi = a_x c_x b_\alpha (\beta \gamma x) .$$

Die Operationen 1), 3), 5), 7) sind nicht anwendbar; die übrigen geben, indem man die Operationen auf passend gewählte Factoren von φ anwendet:

2) $a_x c_x b_\alpha (u_\beta d_\gamma - u_\gamma d_\beta) u_\delta = f_1^2 - f . a_x b_\alpha d_\beta u_\delta$,
was auf die soeben reducirte Form führt.

4) $a_x c_x d_x b_\alpha (\beta \gamma \delta) = 0$, weil durch Vertauschung von d, δ mit c, γ sich nur das Zeichen ändert.

6) $a_x b_\alpha (c u d) (\beta \gamma \delta)$. Vertauscht man d, δ mit b, β und mit c, γ und addirt die Resultate, so hat man:

$$3\, a_x b_\alpha (c u d) (\beta \gamma \delta) = a_x (\beta \gamma \delta) \{b_\alpha (c u d) - c_\alpha (b u d) - d_\alpha (c u b)\}$$
$$= a_x u_\alpha . (\beta \gamma \delta)(c b d) = f . \begin{vmatrix} c_\beta & c_\gamma & c_\delta \\ b_\beta & b_\gamma & b_\delta \\ d_\beta & d_\gamma & d_\delta \end{vmatrix} = - f . (i^3 + 2 i_2 - 3 i i_1).$$

4. $\psi = u_\beta u_\gamma b_\alpha (acu)$.

Diese Form verhält sich genau wie φ, der sie dualistisch entgegengesetzt ist; man braucht sie also nicht zu untersuchen.

So sieht man also, dass die Operationen der Tafel, auf die Formen I. angewandt, nichts neues geben. Es bleibt nun übrig, die Wirkung der Operationen auf Producte der Formen zu betrachten. Zu diesem Zwecke suchen wir die zu den verschiedenen Formen I. gehörigen Systeme charakteristischer Zahlen, oder die ihnen entsprechenden Operationen auf.

Indem man aber die Producte $f . M$, $f_1 . M$, $\varphi . M$, $\psi . M$ bildet, sieht man, dass in den ersten beiden alle Operationen bis auf 5) und 6) in f und f_1 erschöpft werden können; dass hingegen für die letzten beiden nur die Operation 7) existirt, an welcher beide Factoren der Producte theilnehmen können. Den Functionen f, f_1 sind also die Operationen 5), 6), den Functionen φ, ψ ist die Operation 7) zugeordnet. Es können also nur neue Formen entstehen, indem man 5), 6) auf f^2, ff_1, f_1^2, und 7) auf $\varphi . \psi$ anwendet. Aber das letztere kann man übergehen. Denn es ist

$$(1) \qquad \varphi . \psi = a_x c_x b_\alpha . u_{\beta'} u_{\gamma'} b'_{\alpha'} . (\beta\gamma x)(a'c'u)$$

$$= a_x c_x b_\alpha . u_{\beta'} u_{\gamma'} b'_{\alpha'} \begin{vmatrix} a'_\beta & c'_\beta & u_\beta \\ a'_\gamma & c'_\gamma & u_\gamma \\ a'_x & c'_x & u_x \end{vmatrix},$$

ein Ausdruck, dessen Terme in solche Factoren zerfallen, dass sie sich aus f und f_1 durch die wiederholte Anwendung der Operationen 3), 4) erzeugen lassen, und also nach dem Vorigen immer wieder auf f und f_1 zurückführen. Da nun (7) auf Producte und Quadrate von f_1, f angewandt, nichts Neues giebt, so kann es auch auf $\varphi . \psi$ angewandt nichts Neues geben.

Uebergeht man auch noch die Untersuchung solcher Bildungen, welche nur andern zu untersuchenden dualistisch Entgegengesetztes liefern, so sieht man, dass nur übrig bleibt, die Wirkung der Operation 5) auf f^2, ff_1, f_1^2 zu untersuchen. Zu den 3 so entstehenden Formen können wir wählen:

aus f^2: $c_x a_\gamma b_x (x\alpha\beta)$, ist φ;

aus ff_1: $c_\delta d_x a_\gamma b_x (x\alpha\beta)$, aus dem Vorigen durch Operation 4. (ein x in δ verwandelt) ableitbar, also bei der Betrachtung von φ zurückgeführt;

aus f_1^2: $c_\delta d_x a_\gamma b_\varepsilon e_x (x\alpha\beta)$, aus dem letzten durch Verwandlung eines x in ε entstanden, also Resultat der Anwendung einer Operation auf bekannte einfache Formen.

Somit ist nachgewiesen, dass die Formen I. in der That ein vollständiges System bilden.

§. 9.

Formensystem der zusammengesetzten Function $F = \varkappa u_x + \lambda f + \mu g$.

Unter den Formen des Systems I. sind 3 Invarianten, zwei Zwischenformen ersten Grades und erster Classe, zu welchen noch die evidente Zwischenform u_x tritt, ferner eine Covariante dritten Grades, und eine zugehörige Form dritter Classe. An Stelle der Zwischenform f_1 und der Invarianten i_1, i_2 kann man auch Verbindungen einführen, welche passend gewählt sind; und zwar ist es für die weitere Behandlung des Formensystems zweckmässig, an Stelle dieser drei Formen folgende zu Grunde zu legen, welche weniger einfache symbolische Ausdrücke, aber wichtige Eigenschaften haben:

(1)
$$\begin{cases} i' = \frac{i^2 - i_1}{2} \quad , \quad i'' = \frac{i^3 - 3\,i\,i_1 + 2\,i_2}{6}\,, \\ g = f_1 - if + \frac{i^2 - i_1}{2}\,u_x\,. \end{cases}$$

Aus den Formen g, f, u_x kann man nun die Zwischenform

(2)
$$F = \varkappa u_x + \lambda f + \mu g$$

zusammensetzen und das Formensystem dieser zusammengesetzten Function studiren. Zunächst erhält man die Invariante i dieser Form, indem man für i die Definition

(3)
$$i = \sum \frac{\partial^2 f}{\partial x_i\,\partial u_i}$$

anwendet. Aus u_x entsteht durch Anwendung dieser Differentialoperation 3, aus f entsteht i; aus f_1 dagegen der Ausdruck:

$$\sum \frac{\partial^2 f_1}{\partial x_i\,\partial u_i} = b_\alpha \sum a_i \beta_i = b_\alpha a_\beta = i_1\,.$$

Daher wird

$$\sum \frac{\partial^2 g}{\partial x_i\,\partial u_i} = i_1 - i^2 + 3\,\frac{i^2 - i_1}{2} = i'.$$

Man hat also, wenn man die Formen der zusammengesetzten Function F immer durch die entsprechenden grossen Buchstaben bezeichnet, die Formel:

(4)
$$J = 3\,\varkappa + i\lambda + i'\mu\,.$$

Gehen wir nun zur Aufsuchung der Function G (g für die zusammengesetzte Function F) über. Man kann zu diesem Zwecke zunächst bemerken, dass f_1 durch die Gleichung

(5)
$$f_1 = \sum \frac{\partial f}{\partial u_i}\,\frac{\partial f}{\partial x_i}$$

definirt werden kann, sowie, was durch die symbolischen Ausdrücke augenblicklich klar wird, dass

(6) $$\sum \frac{\partial f_1}{\partial u_i}\frac{\partial f}{\partial x_i} = \sum \frac{\partial f_1}{\partial x_i}\frac{\partial f}{\partial u_i} = u_\alpha a_\beta b_\gamma c_x\,,$$

oder nach §. 8.

$$= i'' u_x - i' f + i f_1.$$

Hieraus folgt für g die Gleichung, welche eine der wichtigsten Eigenschaften dieser Function liefert:

(7) $$\sum \frac{\partial g}{\partial u_i}\frac{\partial f}{\partial x_i} = \sum \frac{\partial g}{\partial x_i}\frac{\partial f}{\partial u_i} = i'' u_x\,.$$

Um nun auch $\sum \frac{\partial g}{\partial u_i}\frac{\partial g}{\partial x_i}$ zu bestimmen, bemerken wir zunächst, dass aus der symbolischen Form sofort folgt:

$$\sum \frac{\partial f_1}{\partial u_i}\frac{\partial f_1}{\partial x_i} = \sum \frac{\partial f}{\partial u_i}\frac{\partial}{\partial x_i}\left(\sum \frac{\partial f}{\partial u_k}\frac{\partial f_1}{\partial x_k}\right).$$

Benutzt man also zur Bildung dieses Gliedes den oben gegebenen Werth des Ausdrucks (6), so hat man

(8) $$\sum \frac{\partial f_1}{\partial u_i}\frac{\partial f_1}{\partial x_i} = \sum \frac{\partial f}{\partial u_i}\frac{\partial}{\partial x_i}\,(i'' u_x - i' f + i f_1)$$
$$= i'' i\, u_x + (i'' - i i') f + (i^2 - i') f_1.$$

Nun geht aber, wenn man für f_1 überall $g + i f - i' u_x$ setzt, die linke Seite über in:

$$\sum \frac{\partial g}{\partial u_i}\frac{\partial g}{\partial x_i} + 2i \sum \frac{\partial g}{\partial u_i}\frac{\partial f}{\partial x_i} - 2 i' g + i^2 f_1 - 2 i i' f + i'^2 u_x\,,$$

und man erhält also, indem man dies der rechten Seite von (8) gleichsetzt und (7) benutzt:

(9) $$\sum \frac{\partial g}{\partial u_i}\frac{\partial g}{\partial x_i} = - i i'' u_x + i'' f + i' g\,.$$

Die Function G ist nothwendig von der Form

(10) $$G = K u_x + L f + M g\,,$$

da jede Form dieser Art sich aus u_x, f, f_1, also auch aus u_x, f, g zusammensetzen muss. Bildet man nun den Ausdruck $\sum \frac{\partial G}{\partial u_i}\frac{\partial F}{\partial x_i}$, so erhält man links nach (7) $J'' u_x$, und indem man nach rechts die Operation ausführt, findet man:

(11) $$J''.\, u_x = K(\varkappa u_x + \lambda f + \mu g) + L(\varkappa f + \lambda(g + i f - i' u_x) + \mu i'' u_x)$$
$$+ M(\varkappa g + \lambda i'' u_x + \mu(- i i'' u_x + i'' f + i' g))\,,$$

und indem man also auf beiden Seiten die Coefficienten von u_x, f, g vergleicht, erhält man die drei Gleichungen:

(12) $$\begin{cases} J'' = K\varkappa + L(\mu i'' - \lambda i') + M(\lambda - \mu i)\, i'' \\ 0 = K\lambda + L(\varkappa + \lambda i) + M\mu i'' \\ 0 = K\mu + L\lambda + M(\varkappa + \mu i')\,. \end{cases}$$

Die letzten Gleichungen geben die Verhältnisse von K, L, M; aber man sieht, dass K, L, M den Unterdeterminanten dieser Gleichungen selbst gleich werden, weil für $\varkappa = 0$, $\lambda = 0$, $\mu = 0$ G in g_x übergehen, also $M = 1$ werden muss. Es ist also:

$$(13)\qquad \begin{cases} K = (\varkappa + \lambda i)(\varkappa + \mu i') - \lambda \mu i'' \\ C = \mu^2 i'' - \lambda(\varkappa + \mu i') \\ M = \lambda^2 - \mu(\varkappa + \lambda i), \end{cases}$$

und daher

$$(14)\qquad G = \begin{vmatrix} \lambda & \varkappa + \lambda i & \mu i'' \\ \mu & \lambda & \varkappa + \mu i' \\ u_x & f & g \end{vmatrix}.$$

Bildet man nun ferner für die zusammengesetzte Function F den Ausdruck

$$\sum \frac{\partial^2 g}{\partial u_i \partial x_i} = \sum \frac{\partial^2 f_1}{\partial u_i \partial x_i} - i^2 + 3i' = i_1 - i^2 + 3i' = i',$$

so erhält man aus (14):

$$(15)\qquad J' = \begin{vmatrix} \lambda & \varkappa + \lambda i & \mu i'' \\ \mu & \lambda & \varkappa + \mu i' \\ 3 & i & i' \end{vmatrix},$$

und aus der ersten Gleichung (12) folgt:

$$(16)\qquad J'' = \begin{vmatrix} \lambda & \varkappa + \lambda i & \mu i'' \\ \mu & \lambda & \varkappa + \mu i' \\ \varkappa & \mu i'' - \lambda i' & i''(\lambda - \mu i) \end{vmatrix},$$

Diese Darstellungen vereinfachen sich noch, wenn man die quadratischen Formen in $\varkappa$, λ, μ einführt, deren Differentialquotienten die Coefficienten der Gleichungen (12) sind, nämlich:

$$(17)\qquad \begin{aligned} 2p &= 2\varkappa\lambda + \lambda^2 i + \mu^2 i'' \\ 2q &= 2\varkappa\mu + \lambda^2 + \mu^2 i' \\ 2r &= \varkappa^2 - \lambda^2 i' + 2\mu\lambda i'' - \mu^2 i i''. \end{aligned}$$

Mit Hülfe derselben werden die Gleichungen (14), (15), (16) folgende:

$$(18)\qquad \begin{aligned} G &= \sum \pm \frac{\partial p}{\partial \varkappa} \frac{\partial q}{\partial \lambda} \frac{\partial F}{\partial \mu} \\ J' &= \sum \pm \frac{\partial p}{\partial \varkappa} \frac{\partial q}{\partial \lambda} \frac{\partial J}{\partial \mu} \\ J'' &= \sum \pm \frac{\partial p}{\partial \varkappa} \frac{\partial q}{\partial \lambda} \frac{\partial r}{\partial \mu}. \end{aligned}$$

Die letzte Gleichung ist noch in mannichfacher Weise umgestaltbar, da zwischen den quadratischen Functionen p, q, r, J' und dem Quadrate der linearen Function J die Relation besteht:

$$(19)\qquad 6r + 2ip + 2i'q + 2J' - J^2 = 0.$$

Um die Formen φ und ψ für die zusammengesetzte Function F zu bilden, genügt es, dieselben in der Gestalt zu nehmen, welche aus der symbolischen Form sofort hervorgeht:

$$\begin{aligned}\varphi &= \sum \pm \frac{\partial f_1}{\partial u_1} \frac{\partial f}{\partial u_2} \frac{\partial u_x}{\partial u_3} \\ \psi &= \sum \pm \frac{\partial f_1}{\partial x_1} \frac{\partial f}{\partial x_2} \frac{\partial u_x}{\partial x_3}.\end{aligned} \tag{20}$$

In diesen Formeln kann man ohne Weiteres f_1 auch durch g ersetzen. Wenn man aber diese Formeln für F bildet, also an Stelle der Functionaldeterminanten von g, f, u_x diejenigen von G, F, u_x setzt, so zerfallen die neuen Formen Φ, Ψ sogleich in die Producte von φ, ψ mit der Functionaldeterminante von G, F, u_x gegen g, f, u_x, und es ist also

$$\begin{aligned}\Phi &= \varDelta \,.\, \varphi \\ \Psi &= \varDelta \,.\, \psi,\end{aligned} \tag{21}$$

wo $\varDelta$ jene Functionaldeterminante bedeutet:

$$\begin{aligned}\varDelta = \begin{vmatrix} M & L & K \\ \mu & \lambda & \varkappa \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} &= M\lambda - L\mu \\ &= \lambda^3 - i\lambda^2\mu + i'\lambda\mu^2 - i''\mu^3.\end{aligned} \tag{22}$$

Man sieht, dass der Werth von $\varkappa$ auf Φ, Ψ gar keinen Einfluss hat.

§. 10.

Die Formen φ, ψ.

Zwischen den 8 Grundformen i, i', i'', u_x, f, g, φ, ψ besteht eine einzige höhere Relation. Dieselbe entsteht, wie in §. 8. bereits angedeutet, durch Bildung des Products $\varphi \,.\, \psi$. Man kann die Formel (1) jenes §. durch geschickte Vertheilung der vor der Determinante stehenden Factoren in folgende Form bringen:

$$\varphi \,.\, \psi = \begin{vmatrix} a'_\beta b_\alpha a_x b'_{\alpha'} u_{\beta'} & c'_\beta b_\alpha a_x u_{\gamma'} & u_\beta b_\alpha a_x \\ a'_\gamma c_x b'_{\alpha'} u_{\beta'} & c'_\gamma c_x u_{\gamma'} & u_\gamma c_x \\ a'_x b'_{\alpha'} u_{\beta'} & c'_x u_{\gamma'} & u_x \end{vmatrix},$$

oder, wenn man durch f, f_1, f_2, f_3 die Formenreihe

$$\begin{aligned}
f &= a_x u_\alpha \\
f_1 &= a_x\, b_\alpha\, u_\beta = \sum \frac{\partial f}{\partial x_i} \frac{\partial f}{\partial u_i} \\
f_2 &= a_x\, b_\alpha\, c_\beta\, u_\gamma = \sum \frac{\partial f}{\partial x_i} \frac{\partial f_1}{\partial u_i} = \sum \frac{\partial f_1}{\partial x_i} \frac{\partial f}{\partial u_i} \\
f_3 &= a_x b_\alpha c_\beta d_\gamma u_\delta = \sum \frac{\partial f}{\partial x_i} \frac{\partial f_2}{\partial u_i} = \sum \frac{\partial f_2}{\partial x_i} \frac{\partial f}{\partial u_i}
\end{aligned}$$

bezeichnet, in die Gestalt:

$$\varphi \cdot \psi = \begin{vmatrix} f_3 & f_2 & f_1 \\ f_2 & f_1 & f \\ f_1 & f & u_x \end{vmatrix}.$$

Nun ist nach den Formeln (1), (2) des vorigen §. und durch Anwendung der die f_i definirenden Differentialoperation:

$$\begin{aligned} f_1 - if + i'u_x &= g \\ f_2 - if_1 + i'f &= i''u_x \\ f_3 - if_2 + i'f_1 &= i''f. \end{aligned}$$

Wenn man also in dem Ausdrucke von $\varphi \cdot \psi$ die zweite Reihe mit $-i$, die dritte mit i' multiplicirt zu der ersten addirt, so hat man:

$$\varphi \cdot \psi = \begin{vmatrix} i''f & i''u_x & g \\ f_2 & f_1 & f \\ f_1 & f & u_x \end{vmatrix},$$

und wenn man jetzt mit den Vertikalreihen verfährt, wie vorher mit den horizontalen:

$$\varphi \cdot \psi = \begin{vmatrix} i''f - ii''u_x + i'g & i''u_x & g \\ i''u_x & if - i'u_x + g & f \\ g & f & u_x \end{vmatrix}. \tag{23}$$

Die linke Seite dieser Gleichung ist nichts anderes, als die Determinante, in Bezug auf $\varkappa, \lambda, \mu$ gebildet, der quadratischen Form

$$F_1 = 2(pf + qg + ru_x) = \sum \frac{\partial F}{\partial u_i}\frac{\partial F}{\partial x_i}. \tag{24}$$

Aus dem Producte $\varphi \cdot \psi$ werden wir jetzt die folgenden drei für die Theorie der Formen φ, ψ wesentlichen Functionen entwickeln:

$$\begin{aligned} \Omega &= \sum \frac{\partial \varphi}{\partial x_h}\frac{\partial \psi}{\partial u_h} = \sum \frac{\partial^2 . \varphi . \psi}{\partial x_h \partial u_h} \\ \Omega' &= \sum\sum \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_h \partial x_{h'}}\frac{\partial^2 \psi}{\partial u_h \partial u_{h'}} = \sum \frac{\partial^2 \Omega}{\partial x_h \partial u_h} \\ \Omega'' &= \sum\sum\sum \frac{\partial^3 \varphi}{\partial x_h \partial x_{h'} \partial x_{h''}}\frac{\partial^3 \psi}{\partial u_h \partial u_{h'} \partial u_{h''}} = \sum \frac{\partial^2 \Omega'}{\partial x_h \partial u_h}. \end{aligned}$$

Die Bildung der Functionen Ω geschieht auf die jedesmal zuletzt angegebene Weise. Um den Process

$$\sum \frac{\partial^2}{\partial x_h \partial u_h}$$

auf das Product $\varphi \cdot \psi$ anzuwenden, nehmen wir letzteres in der oben zuerst angegebenen Form:

$$\varphi \cdot \psi = \begin{vmatrix} f_3 & f_2 & f_1 \\ f_2 & f_1 & f \\ f_1 & f & u_x \end{vmatrix}.$$

Indem wir auf diesen Ausdruck jenen Process anwenden, erhalten wir zwei Arten von Gliedern; die einen entstehen durch Anwendung des Processes auf ein einzelnes f_h; und wenn man dabei u_x als f_{-1} betrachtet, und zugleich

$$i_k = \sum_h \frac{\partial^2 f_k}{\partial x_h \partial u_h}$$

setzt, so wird das Aggregat dieser Theile:

$$\sum \frac{\partial : \varphi . \psi}{\partial f_h} i_h .$$

Die andern Glieder entstehen, indem man den Process auf Producte $f_i f_k$ so anwendet, dass man den Ausdruck

$$\sum_h \frac{\partial f_i}{\partial x_h} \frac{\partial f_k}{\partial u_h} = \sum_h \frac{\partial f_i}{\partial u_h} \frac{\partial f_k}{\partial x_h}$$

bildet, welcher nach der Entstehungsweise der f_i den Werth f_{i+k+1} hat. Aber jedem Product $f_i f_k$ in der Determinante $\varphi . \psi$ entspricht ein anderes Product, welches mit jenem in derselben Unterdeterminante vorkommt, aber mit entgegengesetzten Zeichen; bei einem solchen Gliede ist die Summe der Indices dieselbe wie bei $f_i f_k$, und das Resultat der Operation ist also das nämliche, nur mit entgegengesetzten Zeichen. Je zwei solcher Terme heben also einander auf, und es bleibt übrig

$$\Omega = \sum \frac{\partial . \varphi \psi}{\partial f_h} i_h . \tag{25}$$

Denkt man sich nun die f_h sämmtlich durch u_x, f, g ausgedrückt, so hat man etwa

$$f_h = \alpha_h u_x + \beta_h f + \gamma_h g ,$$

und also auch, durch Anwendung des Processes $\sum \frac{\partial^2}{\partial x_h \partial u_h}$:

$$i_h = 3 \alpha_h + i \beta_h + i' \gamma_h ,$$

also

$$\begin{aligned} \Omega &= \sum \frac{\partial . \varphi \psi}{\partial f_h} (3 \alpha_h + i \beta_h + i' \gamma_h) \\ &= 3 \frac{\partial . \varphi \psi}{\partial u_x} + i \frac{\partial . \varphi \psi}{\partial f} + i' \frac{\partial . \varphi \psi}{\partial g} . \end{aligned} \tag{26}$$

Um nun Ω' zu bilden, wendet man den Process auf (25) an. Die Coefficienten der i_h sind wieder Unterdeterminanten, welche nach dem oben Auseinandergesetzten nichts geben, als diejenigen Terme, welche durch Anwendung des Processes auf einzelne f_h entstehen. Mithin hat man

$$\Omega' = \sum \frac{\partial . \varphi \psi}{\partial f_h \partial f_{h'}} i_h i_{h'} \tag{27}$$

oder nach der Analogie von (26):

$$(28)\quad \Omega' = 9\frac{\partial^2 . \varphi\psi}{\partial u_x^2} + 6i\frac{\partial^2 . \varphi\psi}{\partial u_x \partial f} + 6i'\frac{\partial^2 . \varphi\psi}{\partial u_x \partial g} + i^2\frac{\partial^2 . \varphi\psi}{\partial f^2} + \cdots .$$

Endlich findet man aus dieser Formel sofort:

$$(29)\quad \Omega'' = 27\frac{\partial^3 . \varphi\psi}{\partial u_x^3} + 27i\frac{\partial^3 . \varphi\psi}{\partial u_x^2 \partial f} + 27g\frac{\partial^3 . \varphi\psi}{\partial u_x^2 \partial g} + \cdots + i'^3\frac{\partial^3 . \varphi\psi}{\partial g^3} .$$

Ist daher ε eine beliebige Grösse, und setzt man in dem Ausdrucke (23) von $\varphi . \psi$ für

$$u_x\ ,\ f\ ,\ g$$

die Ausdrücke

$$u_x + 3\varepsilon\quad ,\quad f + i\varepsilon\quad ,\quad g + i'\varepsilon ,$$

so erhält man durch Entwickelung nach Potenzen von ε einen Ausdruck, dessen Coefficienten die Functionen Ω sind:

$$\varphi . \psi + \frac{\varepsilon}{1}\,\Omega + \frac{\varepsilon^2}{1.2}\,\Omega' + \frac{\varepsilon^3}{1.2.3}\,\Omega'' .$$

Dieser ganze Ausdruck ist also die Hesse'sche Determinante, nach $\varkappa$, λ, μ genommen, der quadratischen Form

$$(30)\qquad 2\left\{p(f+i\varepsilon) + q(g+i'\varepsilon) + r(u_x+3\varepsilon)\right\} ,$$

und die Ω sind die Entwickelungscoefficienten der Determinante.

Da $\varphi . \psi$ die Eigenschaft hat, sich nur um Δ^2 zu ändern, wenn man an Stelle von f die zusammengesetzte Function $\varkappa u_x + \lambda f + \mu g$ zu Grunde legt, so kommt dieselbe auch denjenigen Formen zu, welche durch Anwendung der Operation $\sum \frac{\partial^2}{\partial x_h \partial u_h}$ aus derselben abgeleitet sind, also die Formen Ω, Ω', Ω''. Von diesen ist die erste für die u wie für die x vom 2^{ten}, die zweite vom 1^{ten}, die letzte vom 0^{ten} Grade. Die letzte entsteht bis auf den Factor 6, wenn man in (23) u_x, f, g durch 3, i, i' ersetzt, und hat also den Werth:

$$(31)\qquad \begin{aligned} \Omega'' &= 6\begin{vmatrix} i'^2-2ii'' & 3i'' & i' \\ 3i'' & i^2-2i' & i \\ i' & i & 3 \end{vmatrix} \\ &= -6\left\{27i''-i^2i'^2+4i^3i''+4i'^3-18ii'i''\right\} \\ &= -6R , \end{aligned}$$

wo R die Determinante der cubischen Gleichung $\Delta = 0$ ist. Dagegen erhält man $\frac{1}{2}\Omega'$, wenn man die Unterdeterminanten der rechts bei Ω'' stehenden Determinante mit den Elementen der Determinante $\varphi . \psi$ multiplicirt. Man findet dann, dass die Coefficienten von f und g verschwinden, und dass Ω' sich auf den Ausdruck reducirt:

$$(32)\qquad \Omega' = -2R . u_x .$$

Dagegen bleibt Ω eine selbständige Form.

§. 11.

Das Formensystem der cubischen Formen φ, ψ.

Untersuchen wir nun die Formensysteme, welche entstehen, indem man die cubischen Formen

$$\varphi = \varphi_x^3 = \varphi_x'^3 \dots \quad , \quad \psi = u_\psi^3 = u_{\psi'}^3 \dots$$

zu Grunde legt. Bemerken wir, dass eine dieser Formen in die andere übergeht, wenn man die x mit den u, und zugleich in den symbolischen Coefficienten von f, aus denen φ und ψ sich zusammensetzen, a mit α, b mit β etc. vertauscht. Hierdurch geht f in sich selbst über, und ebenso bleiben g, i, i', i'' völlig ungeändert. Die beiden in der Theorie von φ und ψ zuerst auftretenden Formen

$$\Theta_\varphi = \varphi_x \varphi'_x (\varphi \varphi' u)^2$$
$$\Theta_\psi = u_\psi u_{\psi'} (\psi \psi' x)^2$$

stehen daher auch in der Beziehung zu einander, dass durch Vertauschung von u mit x, a mit α etc. eine Form in die andere übergeht. Aber zugleich sind beide Zwischenformen von f, und da sie nur vom zweiten Grade in den u und den x sind, so müssen sie als ganze Functionen von u_x, f, g, i, i', i'' darstellbar sein. Da indess letztere Grössen sich durch die angegebene Vertauschung nicht ändern, so folgt:

(33) $$\Theta_\varphi = \Theta_\psi .$$

Die cubischen Formen, welche durch die Hesse'sche Determinante von φ und ψ gegeben sind, können sich, da f keine andern cubischen Formen als φ und ψ zulässt, von diesen selbst nur durch constante Factoren unterscheiden, welche also durch i, i', i'' darstellbar sind, mithin durch die Vertauschung nicht geändert werden. Diese Factoren sind also einander gleich, und wenn man durch m ihren gemeinsamen Werth bezeichnet, hat man

(34) $$\Delta_\varphi = m \,.\, \varphi \quad , \quad \Delta_\psi = m \,.\, \psi .$$

In gleicher Weise hat man für die ersten cubischen Zwischenformen

(35) $$S_\varphi = m' \,.\, \psi \quad , \quad S_\psi = m' \,.\, \varphi .$$

Aus den Gleichungen (34), (35) folgt, dass $\varphi = 0$ ein System von drei Geraden, also ein Dreieck darstellt, und dass $\psi = 0$ das Product der Gleichungen der Dreiecksecken ist.

Wendet man den Process Δ auf beide Seiten der Gleichung (34) nochmals an, so erhält man $m^4 \varphi$ und $m^4 \psi$. Aber nach der Theorie der cubischen Formen setzt sich die Determinante von Δ_φ aus Δ_φ und und φ, sowie aus den Invarianten S'_φ, T'_φ zusammen. Im vorliegenden Falle verschwindet die Discriminante von φ, und es giebt also eine Grösse m'' so, dass

$$S'_\varphi = S'_\psi = m''^2$$
$$T'_\varphi = T'_\psi = m''^3.$$

Die Determinante von Δ_φ reducirt sich daher bis auf einen numerischen Factor auf $m''^4 . \varphi$, und die Vergleichung mit dem Vorigen lehrt also, dass m'' von m nur um einen numerischen Factor verschieden ist. Die erste Invariante von φ und ψ ist also, bis auf einen numerischen Factor, das Quadrat, die zweite ebenso der Cubus der Invariantencombination m.

Aber ebenso folgt aus der Theorie der cubischen Formen, dass, wenn man den Process S zweimal hinter einander anwendet, eine Combination der zugehörigen Formen S und T, multiplicirt mit Potenzen von S' und T', auftritt. Die zugehörige Form T ist nun bis auf einen numerischen Factor nur um m von S verschieden, daher geht das Resultat hier bis auf einen solchen Factor in $m^4 . \varphi$ über. Aber die Gleichungen (35) geben

$$S_{S_\varphi} = m'^3 . S_\psi = m'^4 . \varphi .$$

Daher ist auch m' von m nur um einen numerischen Factor verschieden.

Die Invariantencombination m ist, abgesehen von einem numerischen Factor, leicht zu finden. Aus (35) folgt

$$\sum \frac{\partial^3 S_\varphi}{\partial u_h \partial u_{h'} \partial u_{h''}} \cdot \frac{\partial^3 \varphi}{\partial x_h \partial x_{h'} \partial x_{h''}} = m' \sum \frac{\partial^3 \psi}{\partial u_h \partial u_{h'} \partial u_{h''}} \cdot \frac{\partial^3 \varphi}{\partial x_h \partial x_{h'} \partial x_{h''}}$$
$$= m' \Omega'' .$$

Aber links steht ein Ausdruck, welcher bis auf einen numerischen Factor gleich S', also gleich m^2 ist. Mithin unterscheidet sich m nur um einen numerischen Factor von Ω'' oder von der Discriminante R der cubischen Gleichung. Und es gehen also bis auf numerische Factoren die Formen

Δ_φ	über in $R\varphi$	Δ_ψ	in $R\psi$
S_φ	„ „ $R\psi$	S_ψ	„ $R\varphi$
T_φ	„ „ $R^2\psi$	T_ψ	„ $R^2\varphi$
S'_φ	„ „ R^2	S'_ψ	„ R^2
T'_φ	„ „ R^3	T'_ψ	„ R^3.

Was endlich $\Theta_\varphi = \Theta_\psi$ betrifft, so unterscheidet sich die Form $H_\varphi = H_\psi$ von demselben nur durch den Factor m, und es genügt also, diese Form zu bilden. Nun aber weiss man aus der Theorie der cubischen Formen, dass der Ausdruck

$$\sum \frac{\partial^2 . \varphi S_\varphi}{\partial x_i \partial u_i}$$

sich aus H_φ und aus einem Gliede mit $u_x . S'_\varphi$ zusammensetzt. Daher besteht umgekehrt H aus jenem Gliede, oder aus $m . \Omega$ und aus einem Gliede $m^2 u_x$. Dividirt man also durch m, so findet man

$$\Theta_\varphi = \Theta_\psi = \alpha \Omega + \beta R u_x,$$

wo α und β numerische Coefficienten sind. Da

$$\sum \frac{\partial^2 \Theta}{\partial u_i \partial x_i} = 0,$$

so folgt nach (32)

$$3\beta = 2\alpha.$$

§. 12.

Canonische Form im allgemeinen Falle ($m = 1$, $n = 1$). Collineare Systeme.

Die Gleichung $f = 0$ stellt, wenn man die u darin als Variable ansieht, einen Punkt y dar, dessen Coordinaten mit denen eines Punktes x durch die Gleichungen verbunden sind:

(1) $$\varrho y_1 = \frac{\partial f}{\partial u_1}, \quad \varrho y_2 = \frac{\partial f}{\partial u_2}, \quad \varrho y_3 = \frac{\partial f}{\partial u_3}.$$

Wenn also, wie wir annehmen wollen, die Determinante von f nicht verschwindet, so entspricht jedem x ein y und umgekehrt, und da die Gleichungen (1) linear sind, so hat man zwei in einander liegende collineare Systeme vor sich.

Die Determinante von f ist in symbolischer Form:

$$\begin{vmatrix} a_1\alpha_1 & a_1\alpha_2 & a_1\alpha_3 \\ b_2\beta_1 & b_2\beta_2 & b_2\beta_3 \\ c_3\gamma_1 & c_3\gamma_2 & c_3\gamma_3 \end{vmatrix} = a_1 b_2 c_3 (\alpha\beta\gamma),$$

oder, wenn man die Paare $a\alpha$, $b\beta$, $c\gamma$ in jeder Weise permutirt und den 6^{ten} Theil der Summe aller Permutationen nimmt:

$$\tfrac{1}{6}(abc)(\alpha\beta\gamma) = \tfrac{1}{6}\begin{vmatrix} a_\alpha & a_\beta & a_\gamma \\ b_\alpha & b_\beta & b_\gamma \\ c_\alpha & c_\beta & c_\gamma \end{vmatrix} = \frac{i^3 + 2i_{,} - 3ii_{,}}{6} = i''.$$

Nehmen wir also an, dass i'' nicht verschwinde. Man kann dann im Allgemeinen die Function f durch lineare Transformation in die Form bringen:

(2) $$f = l_1 X_1 U_1 + l_2 X_2 U_2 + l_3 X_3 U_3,$$

während u_x in U_X übergeht.

In der That, geht man von dieser Bildung aus, und bezeichnet durch ε die Determinante der Transformation

$$\sum \pm \frac{\partial X_1}{\partial x_1}\frac{\partial X_2}{\partial x_2}\frac{\partial X_3}{\partial x_3} = \sum \pm \frac{\partial u_1}{\partial U_1}\frac{\partial u_2}{\partial U_2}\frac{\partial u_3}{\partial U_3}$$
$$= \frac{1}{\sum \pm \frac{\partial x_1}{\partial X_1}\frac{\partial x_2}{\partial X_2}\frac{\partial x_3}{\partial X_3}} = \frac{1}{\sum \pm \frac{\partial U_1}{\partial u_1}\frac{\partial U_2}{\partial u_2}\frac{\partial U_3}{\partial u_3}},$$

durch Δ die Determinante

$$\varDelta = \begin{vmatrix} l_1^2 & l_1 & 1 \\ l_2^2 & l_2 & 1 \\ l_3^2 & l_3 & 1 \end{vmatrix},$$

so hat man für die Grundformen die Ausdrücke

$$(3) \qquad \left\{ \begin{aligned} i &= l_1 + l_2 + l_3 \\ f_1 &= l_1^2 X_1 U_1 + l_2^2 X_2 U_2 + l_3^2 X_3 U_3 \\ i_1 &= l_1^2 + l_2^2 + l_3^2 \\ i_2 &= l_1^3 + l_2^3 + l_3^3 \\ \varphi &= \varepsilon \varDelta \,.\, X_1 X_2 X_3 \\ \psi &= \frac{\varDelta}{\varepsilon} U_1 U_2 U_3 \,. \end{aligned} \right.$$

Daher werden ferner die in §. 9. eingeführten Formen:

$$(4) \qquad \left\{ \begin{aligned} i' &= l_1 l_2 + l_2 l_3 + l_3 l_1 \\ i'' &= l_1 l_2 l_3 \\ g &= l_2 l_3 U_1 X_1 + l_3 l_1 U_2 X_2 + l_1 l_2 U_3 X_3 \,. \end{aligned} \right.$$

Es sind also l_1, l_2, l_3 die Wurzeln der Gleichung

$$(5) \qquad \varDelta(l) = 0;$$

und sind dieselben, wie wir zunächst annehmen wollen, sämmtlich verschieden, so findet man die Producte $U_i X_i$ ausgedrückt durch die Wurzeln l_i und durch u_x, f, g, indem man die Gleichungen

$$(6) \qquad \begin{aligned} u_x &= U_1 X_1 + U_2 X_2 + U_3 X_3 \\ f &= l_1 U_1 X_1 + l_2 U_2 X_2 + l_3 U_3 X_3 \\ g &= l_2 l_3 U_1 X_1 + l_3 l_1 U_2 X_2 + l_1 l_2 U_3 X_3 \end{aligned}$$

auflöst:

$$(7) \qquad \begin{aligned} \varDelta U_1 X_1 &= (l_3 - l_2) \{u_x l_1 (l_3 + l_2) - f l_1 - g\} \\ \varDelta U_2 X_2 &= (l_1 - l_3) \{u_x l_2 (l_1 + l_3) - f l_2 - g\} \\ \varDelta U_3 X_3 &= (l_2 - l_1) \{u_x l_3 (l_2 + l_3) - f l_1 - g\} \end{aligned}$$

oder auch:

$$(8) \qquad U_h X_h = \frac{u_x l_h (i - l_h) - f l_h - g}{\left(\frac{\partial \varDelta}{\partial l}\right)_h}\,.$$

Diese Gleichungen bestimmen die Substitutionscoefficienten, soweit das überhaupt hier möglich oder nöthig ist; soweit nämlich, dass nur noch alle Coefficienten desselben X_h mit einem beliebigen gemeinsamen Factor behaftet werden können, welcher dann bei den Coefficienten der entsprechenden U_h reciprok auftritt.

Die Gleichung $\varphi = 0$ stellt das Product der Seiten des neuen Fundamentaldreiecks, die Gleichung $\psi = 0$ das Product seiner Ecken dar. In diesem neuen Dreieck verwandelt sich, indem man die neue Form von F zu Grunde legt, die Gleichung (1) in

(9) $$\varrho Y_1 = l_1 X_1\ ,\ \varrho Y_2 = l_2 X_2\ ,\ \varrho Y_3 = l_3 X_3.$$

Die Ecken des Fundamentaldreiecks entsprechen sich selbst. Die Gleichung (9) erhält man auch direct, indem solche lineare Verbindundungen X der x, resp. Y_x der y gesucht werden, für welche die Gleichungen (1) in die Form

(9a) $$\varrho Y = l X$$

übergehen. Ist dann

$$X = \alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \alpha_3 x_3$$

und

$$f = \Sigma a_{ik}\, x_i\, u_k,$$

so hat man identisch aus (1)

$$l\, \Sigma \alpha_k x_k = \Sigma a_{ik} x_i \alpha_k\,,$$

also

$$\begin{aligned} l\alpha_1 &= a_{11}\alpha_1 + a_{12}\alpha_2 + a_{13}\alpha_3 \\ l\alpha_2 &= a_{21}\alpha_1 + a_{22}\alpha_2 + a_{23}\alpha_3 \\ l\alpha_3 &= a_{31}\alpha_1 + a_{32}\alpha_2 + a_{33}\alpha_3; \end{aligned}$$

daher

$$\begin{vmatrix} a_{11} - l & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} - l & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} - l \end{vmatrix} = 0 = \Delta(l).$$

Und die Gleichung (9a) ergiebt also die verschiedenen Gleichungen (9), so lange alle Wurzeln von $\Delta(l) = 0$ verschieden sind.

Die zusammengesetzte Function

$$F = \varkappa u_x + \lambda f + \mu g$$

wird hier:

(10) $$F = (\varkappa + \lambda l_1 + \mu l_2 l_3)\, U_1 X_1 + (\varkappa + \lambda l_2 + \mu l_3 l_1)\, U_2 X_2 + \\ + (\varkappa + \lambda l_3 + \mu l_1 l_2)\, U_3 X_3.$$

In dieser Gleichung kann man durch passende Bestimmung von $\varkappa$, λ, μ den Coefficienten jedes beliebige Werthsystem m_1, m_2, m_3 geben, so dass

(11) $$\begin{aligned} m_1 &= \varkappa + \lambda l_1 + \mu l_2 l_3 \\ m_2 &= \varkappa + \lambda l_2 + \mu l_3 l_1 \\ m_3 &= \varkappa + \lambda l_3 + \mu l_1 l_2; \end{aligned}$$

oder, was dasselbe ist, man kann es so einrichten, dass einem beliebigen Punkte X ein beliebig zugeordneter Y entspricht, indem

(12) $$\begin{aligned} \varrho Y_1 &= (\varkappa + \lambda l_1 + \mu l_2 l_3) X_1 \\ \varrho Y_2 &= (\varkappa + \lambda l_2 + \mu l_3 l_1) X_2 \\ \varrho Y_3 &= (\varkappa + \lambda l_3 + \mu l_1 l_2) X_3 \end{aligned}$$

oder

(13) $$m_1 : m_2 : m_3 = \frac{Y_1}{X_1} : \frac{Y_2}{X_2} : \frac{Y_3}{X_3}$$

gesetzt wird.

Die Gleichung $F=0$ stellt also die Gesammtheit aller collinearen Systeme mit gemeinsamem Fundamentaldreieck dar. Dass aus denselben, wenn man F statt f zu Grunde legt, keine neuen Systeme entspringen, entspricht dem oben gegebenen Satze, dass die bilinearen Zwischenformen von F wieder aus u_x, f, g sich zusammensetzen.

§. 13.

Eine gewisse Reihe collinearer Systeme und ihre Eigenschaften. Punktreihen, welche aus ihnen entspringen, und Invariantenrelationen, welche besondere Eigenschaften der Punktreihen angeben.

Unter den so gebildeten collinearen Systemen giebt es eine Reihe, welche zu der Form f in besonderer Beziehung stehen. Mittelst der Gleichung $f=0$ erhält man aus x den entsprechenden Punkt y; sieht man diesen wieder als Punkt des ersten Systems an, so entspricht ihm ein Punkt z des zweiten; betrachtet man z als Punkt des ersten Systems, so findet man einen entsprechenden Punkt t im zweiten u. s. w. Die Gleichungen dieser Punkte erhält man, wenn man jeden aus dem Vorhergehenden entstehen lässt, wie y aus x, d. h., in dem neuen Coordinatensystem, indem man die Coordinaten des vorhergehenden Punktes beziehungsweise mit l_1, l_2, l_3 multiplicirt. Die Coordinaten werden also in dem System des Fundamentaldreiecks:

$$\begin{array}{ccccc}
\underbrace{\quad x \quad} & \underbrace{\quad y \quad} & \underbrace{\quad z \quad} & \underbrace{\quad t \quad} & \\
X_1 & l_1 X_1 & l_1^2 X_1 & l_1^3 X_1 & \dots \\
X_2 & l_2 X_2 & l_2^2 X_2 & l_2^3 X_2 & \dots \\
X_3 & l_3 X_3 & l_3^2 X_3 & l_3^3 X_3 & \dots,
\end{array}$$

oder die Gleichungen dieser Punkte sind:

$$\begin{array}{ll}
x) & u_x = 0 \\
y) & f \;\, = 0 \\
z) & f_1 = 0 \\
t) & f_2 = 0 \\
 & \dots\dots\dots;
\end{array}$$

denn es ist

$$f_{i+1} = \Sigma_h \frac{\partial f_i}{\partial X_h} \frac{\partial f}{\partial U_h} = \Sigma_h \, l_h^i \, U_h X_h .$$

Man kann diese Punktreihe auch rückwärts fortsetzen, indem man zunächst denjenigen Punkt aufsucht, welcher, als Punkt des ersten Systems betrachtet, im zweiten Systeme x liefert. Die Gleichung dieses Punkts ist

$$0 = \Sigma \frac{U_h X_h}{l_h} = \frac{g}{i},$$

und indem man diese Reihe fortsetzt, erhält man Punkte, deren Gleichungen durch $g_1 = 0$, $g_2 = 0$ u. s. w. bezeichnet werden mögen. Indem wir den Punkt x selbst durch die Zahl 0 bezeichnen, können wir die Punkte der ersten Reihe durch $1, 2, \ldots$, die der zweiten durch $-1, -2, \ldots$ bezeichnen; es entsprechen dann den Punkten die folgenden darunter stehenden Gleichungen:

$$(14) \qquad \begin{array}{ccccccc} \ldots & (-2) & (-1) & 0 & 1 & 2 & \ldots \\ \ldots & g_1=0 & g=0 & u_x=0 & f=0 & f_1=0 & \ldots; \end{array}$$

so dass der Punkt k die Gleichung hat:

$$(15) \qquad 0 = \Sigma_h \; l_h^k \, U_h X_h \,.$$

Jede solche Gleichung aber ist zugleich die Gleichung eines collinearen Systems, welches unmittelbar von dem Punkte 0 auf den Punkt k führt. So entspricht also der Punktreihe (14) die Reihe (15) von collinearen Systemen.

Die Punkte der Reihe liegen auf einer transcendenten Curve, welche man aus den Gleichungen

$$\begin{aligned} \varrho Y_1 &= l_1^k X_1 \\ \varrho Y_2 &= l_2^k X_2 \\ \varrho Y_3 &= l_3^k X_3 \end{aligned}$$

durch Elimination von ϱ und k erhält:

$$\log \frac{Y_1}{X_1} \log \frac{l_2}{l_3} + \log \frac{Y_2}{X_2} \log \frac{l_3}{l_1} + \log \frac{Y_3}{X_3} \log \frac{l_1}{l_2} = 0,$$

und welche in unendlich vielen Fällen in eine algebraische übergeht; so oft nämlich die Grössen $\log \frac{l_i}{l_k}$ sich wie positive oder negative ganze Zahlen verhalten.

Aber man kann sich die Frage stellen, **unter welchen Umständen gewisse Punkte der Reihe auf einer algebraischen Curve gegebenen Charakters liegen?**

Nehmen wir an, der h^{te}, k^{te}, m^{te} u. s. w. Punkt der Reihe sollen auf einer Curve n^{ter} Ordnung liegen, und zwar seien soviel Punkte der Reihe gegeben, dass eine Curve n^{ter} Ordnung durch einen Punkt weniger gerade bestimmt ist, dass also zwischen den Coordinaten der Punkte eine einzige Bedingung besteht. Diese Bedingung kann man bekanntlich so schreiben, dass ihre linke Seite als Aggregat von Producten aus dreireihigen Determinanten erscheint, in deren jeder Reihe die Coordinaten eines der gegebenen Punkte auftreten. Jede solche Determinante hat also die Form

$$X_1 \, X_2 \, X_3 \begin{vmatrix} l_1^h & l_1^k & l_1^m \\ l_2^h & l_2^k & l_2^m \\ l_3^h & l_3^k & l_3^m \end{vmatrix}$$

und die gesuchte Gleichung ist ein Aggregat von Producten solcher Ausdrücke. Die ganze Gleichung aber können wir durch Potenzen der X dividiren, und brauchen also nur von den Determinanten zu sprechen. Indessen ist, wenn $h < k$ und auch $h < m$, immer

$$\begin{vmatrix} l_1^h & l_1^k & l_1^m \\ l_2^h & l_2^k & l_2^m \\ l_3^h & l_3^k & l_3^m \end{vmatrix} = l_1^h\ l_2^h\ l_3^h \begin{vmatrix} 1 & l_1^{k-h} & l_2^{k-h} \\ 1 & l_2^{k-h} & l_2^{k-h} \\ 1 & l_3^{k-h} & l_3^{k-h} \end{vmatrix}.$$

Der erste Factor ist $(i'')^h$. Man sieht also, dass die linke Seite der gesuchten Gleichung sich aus Potenzen von i'' und aus Determinanten der Form

$$\begin{vmatrix} 1 & l_1^k & l_1^m \\ 1 & l_2^k & l_2^m \\ 1 & l_3^k & l_3^m \end{vmatrix}$$

zusammensetzt. Diese letztern sind nun zu bilden, oder vielmehr, da jede dieser Determinanten durch

$$\begin{vmatrix} 1 & l_1 & l_1^2 \\ 1 & l_2 & l_2^2 \\ 1 & l_3 & l_3^2 \end{vmatrix}$$

theilbar ist, und man also durch letztere die ganze gesuchte Gleichung so oft dividiren kann, als Determinantenfactoren in jedem Gliede vorhanden sind, hat man nur die Ausdrücke

$$A_{km} = \frac{\begin{vmatrix} 1 & l_1^k & l_1^m \\ 1 & l_2^k & l_2^m \\ 1 & l_3^k & l_3^m \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & l_1 & l_1^2 \\ 1 & l_2 & l_2^2 \\ 1 & l_3 & l_3^2 \end{vmatrix}}$$

zu bilden. Man findet aber A_{km} als Coefficient von $\frac{1}{x^k} \cdot \frac{1}{y^m}$ in der nach absteigenden Potenzen von x und y auszuführenden Entwickelung des Quotienten

$$F(x, y) = \frac{\begin{vmatrix} 1 & \frac{1}{x-l_1} & \frac{1}{y-l_1} \\ 1 & \frac{1}{x-l_2} & \frac{1}{y-l_2} \\ 1 & \frac{1}{x-l_3} & \frac{1}{y-l_3} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & l_1 & l_1^2 \\ 1 & l_2 & l_2^2 \\ 1 & l_3 & l_3^2 \end{vmatrix}} = \Sigma\Sigma \frac{A_{km}}{x^{k+1}\, y^{m+1}}.$$

Der Zähler dieses Quotienten wird gleich

$$= \frac{1}{\varDelta(x)\,\varDelta(y)} \cdot \begin{vmatrix} xy - l_1(x+y) + l_1^2 & y - l_1 & x - l_1 \\ xy - l_2(x+y) + l_2^2 & y - l_2 & x - l_2 \\ xy - l_3(x+y) + l_3^2 & y - l_3 & x - l_3 \end{vmatrix}$$

$$= \frac{1}{\varDelta(x)\,\varDelta(y)} \cdot \begin{vmatrix} 1 & l_1 & l_1^2 \\ 1 & l_2 & l_2^2 \\ 1 & l_3 & l_3^2 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} xy & -(x+y) & 1 \\ y & -1 & 0 \\ x & -1 & 0 \end{vmatrix}$$

$$= \frac{x-y}{\varDelta(x)\,\varDelta(y)} \cdot \begin{vmatrix} 1 & l_1 & l_1^2 \\ 1 & l_2 & l_2^2 \\ 1 & l_3 & l_3^2 \end{vmatrix},$$

und man findet also die A als Coefficienten des Ausdrucks:

(16) $$F(x, y) = \Sigma\Sigma \frac{A_{km}}{x^{k+1}\,y^{m+1}} = \frac{x-y}{\varDelta(x)\,\varDelta(y)}.$$

Setzt man also:

$$\frac{1}{\varDelta(x)} = \frac{B_0}{x^3} + \frac{B_1}{x^4} + \frac{B_2}{x^5} \cdots \qquad (B_0 = 1)$$

$$\frac{1}{\varDelta(y)} = \frac{B_0}{y^3} + \frac{B_1}{y^4} + \frac{B_2}{y^5} \cdots,$$

so ist

$$F(x, y) = (x-y)\,\Sigma\Sigma \frac{B_h\,B_k}{x^{h+3}\,y^{k+3}} = \Sigma\Sigma B_h B_k \left(\frac{1}{x^{h+2}\,y^{k+3}} - \frac{1}{x^{h+3}\,y^{k+2}}\right)$$

oder wenn man im ersten Theile der Doppelsumme $h-1$ und $k-2$, im zweiten $h-2$ und $k-1$ statt h und k setzt:

$$F(x, y) = \Sigma\Sigma \frac{B_{h-1}\,B_{k-2} - B_{k-1}\,B_{h-2}}{x^{h+1}\,y^{k+1}},$$

also

(17) $$A_{hk} = B_{h-1}\,B_{k-2} - B_{k-1}\,B_{h-2}.$$

Die B endlich bestimmen sich aus den Gleichungen:

$$\begin{aligned} &B_0 = 1 \\ &B_1 - i\,B_0 = 0 \\ &B_2 - i\,B_1 + i'\,B_0 = 0 \\ &B_3 - i\,B_2 + i'\,B_1 - i''\,B_0 = 0 \\ &B_4 - i\,B_3 + i'\,B_2 - i''\,B_1 = 0 \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \end{aligned}$$

Wir können diese Gleichungen in die eine zusammenfassen:

$$B_k - i\,B_{k-1} + i'\,B_{k-2} - i''\,B_{k-3} = 0,$$

wenn wir nur, wie dies auch in (17) geschehen muss, alle B mit negativem Index auslassen. Es folgt aber daraus:

$$\begin{aligned} &B_{h-1}\,\{B_{k-2} - i\,B_{k-3} + i'\,B_{k-4} - i''\,B_{k-5}\} \\ -\,&B_{h-2}\,\{B_{k-1} - i\,B_{k-2} + i'\,B_{k-3} - i''\,B_{k-4}\} = 0, \end{aligned}$$

oder, nach (47):

$$A_{h,k} - i\,A_{h,k-1} + i'\,A_{h,k-2} - i''\,A_{h,k-3} = 0.$$

Nehmen wir noch hinzu, dass

$$A_{k,h} = -A_{h,k},$$

so können wir aus dieser Recursionsformel die A leicht berechnen; und zwar erhält man:

$$\begin{array}{lll} A_{12} = 1 & & \\ A_{13} = i & A_{23} = i' & \\ A_{14} = i^2 - i' & A_{24} = i\,i' - i'' & A_{34} = i'^2 - i\,i'' \\ \ldots & \ldots & \ldots \end{array}$$

Indem man auf die hier angegebene Weise verfährt, erhält man immer als Bedingung dafür, dass gewisse Punkte der Reihe auf einer gewissen algebraischen Curve liegen, eine gewisse Invariantenbeziehung, und damit also zugleich solche Invariantenrelationen geometrisch interpretirt, indem dieselben aussagen, dass die collinearen Systeme auf Punktreihen führen, bei welchen gewisse Punkte auf einer algebraischen Curve gegebener Art sich befinden.

Aber wenn der h^{te}, k^{te}, m^{te} ... Punkt auf einer solchen Curve liegen, wobei der 0^{te} Punkt x als Ausgangspunkt betrachtet ist, so braucht man nur den $\pm\, r^{\text{ten}}$ Punkt zum Ausgange zu nehmen, um zu sehen, dass dann auch der

$$(h \pm r)^{\text{te}},\ (k \pm r)^{\text{te}},\ (m \pm r)^{\text{te}} \text{ u. s. w.}$$

Punkt auf einer Curve derselben Art liegen. Man kann daher immer einen Punkt der zu betrachtenden Punktgruppe beliebig wählen, also statt eines Punktes derselben den 0^{ten} Punkt nehmen.

Der 0^{te} Punkt kann mit dem ersten und zweiten nie auf einer Geraden liegen, ohne dass überhaupt alle Punkte der Reihe in diese Gerade fallen. Der 0^{te}, i^{te} und k^{te} Punkt aber liegen auf einer Geraden, wenn

$$0 = \begin{vmatrix} 1 & l_1^{\,i} & l_1^{\,k} \\ 1 & l_2^{\,i} & l_2^{\,k} \\ 1 & l_3^{\,i} & l_3^{\,k} \end{vmatrix},$$

oder wenn

$$A_{ik} = 0.$$

Man erhält also als Bedingung, dass drei Punkte der Reihe in einer Geraden liegen, die Invariantenrelationen:

$$\begin{array}{lll} \text{bei } 0,\,1,\,3 & : & i = 0 \\ \text{bei } 0,\,1,\,4 & : & i^2 - i' = 0 \\ \text{bei } 0,\,2,\,3 & : & i' = 0 \\ \text{bei } 0,\,2,\,4 & : & i\,i' - i'' = 0 \\ \text{bei } 0,\,3,\,4 & : & i'^2 - i\,i'' = 0 \text{ u. s. w.} \end{array}$$

Die Bedingung, dass die Punkte 0, 1, 2, 3, 4, 5 auf einem Kegelschnitte liegen, ist durch die Gleichung:

$$\begin{vmatrix} 1 & l_1 & l_1^2 \\ 1 & l_2 & l_2^2 \\ 1 & l_3 & l_3^2 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 1 & l_1^3 & l_1^4 \\ 1 & l_2^3 & l_2^4 \\ 1 & l_3^3 & l_3^4 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} l_1^5 & l_1 & l_1^3 \\ l_2^5 & l_2 & l_2^3 \\ l_3^5 & l_3 & l_3^3 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} l_1^5 & l_1^2 & l_1^4 \\ l_2^5 & l_2^2 & l_2^4 \\ l_3^5 & l_3^2 & l_3^4 \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} l_1^5 & l_1 & l_1^2 \\ l_2^5 & l_2 & l_2^2 \\ l_3^5 & l_3 & l_3^2 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} l_1^5 & l_1^3 & l_1^4 \\ l_2^5 & l_2^3 & l_2^4 \\ l_3^5 & l_3^3 & l_3^4 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 1 & l_1 & l_1^3 \\ 1 & l_2 & l_2^3 \\ 1 & l_3 & l_3^3 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 1 & l_1^2 & l_1^4 \\ 1 & l_2^2 & l_2^4 \\ 1 & l_3^2 & l_3^4 \end{vmatrix}$$

ausgedrückt. Nach der Definition der A verwandelt sich dies, indem man noch durch i''^3 dividirt, in:

$$A_{34} A_{21} A_{23} = i'' A_{14} A_{12} A_{13} A_{24}.$$

Der Factor A_{24}, der sich hier absondert, ist leicht erklärlich. Denn $A_{24} = 0$ bedeutet, dass 0, 2, 4, also auch 1, 3, 5 auf einer Geraden liegen, wobei denn allerdings alle 6 Punkte sich auf einem, freilich uneigentlichen, Kegelschnitte befinden. Die eigentliche Bedingung aber ergiebt der andere Factor:

$$A_{34} A_{23} = i'' A_{14} A_{12} A_{13},$$

oder

$$i'^3 - i^3 i'' = 0$$

u. s. w.

§. 14.

Curven, auf welche die Invariantenrelationen des vorigen §. führen.

Die Gleichungen, welche so zunächst als Invariantenrelationen auftreten, und welche also gewisse besondere Ausgangssysteme $f = 0$ charakterisiren, kann man in Gleichungen von Curvensystemen verwandeln, welche von dem Ausgangssysteme unabhängig werden, und nur noch von dem Fundamentaldreiecke selbst abhängig sind. Man kann nämlich fragen, welcher Punkt y einem beliebig gewählten Punkte x entsprechen müsse, damit die so bestimmte Collineation $f = 0$ auf Punktreihen von einer jener Eigenschaften führe. Es folgt aus dem Früheren, dass man, um diese Frage zu beantworten, nur in den gegebenen Relationen an Stelle von

$$l_1\ ,\ l_2\ ,\ l_3$$

die Grössen

$$\frac{Y_1}{X_1}\ ,\ \frac{Y_2}{X_2}\ ,\ \frac{Y_3}{X_3}$$

zu setzen hat. Hierdurch verwandelt sich der Ausdruck

$$\Delta(l) = l - l_1 \cdot l - l_2 \cdot l - l_3$$

in

$$\frac{1}{X_1 X_2 X_3} \cdot (X_1 l - Y_1)\ (X_2 l - Y_2)\ (X_3 l - Y_3)\,.$$

Dies aber ist der Quotient der Werthe, welche die Covariante φ annimmt, wenn man sie einmal für die Variabeln X_i, das andere Mal für die Variabeln $l X_i - Y_i$ bildet, oder wenn man jedes Mal die ursprünglichen Coordinaten einführt:

$$\frac{\varphi(l x_1 - y_1\,,\ l x_2 - y_2\,,\ l x_3 - y_3)}{\varphi(x_1\,,\ x_2\,,\ x_3)}\,.$$

Bezeichnen wir den Zähler, nach Potenzen von l geordnet, durch

$$l^3 \varphi - 3 l^2 \varphi_1 + 3 l \varphi_2 - \varphi_3\,,$$

so ist $\varphi_3 = 0$ die Gleichung des Fundamentaldreiecks, $\varphi_2 = 0$ die erste, $\varphi_1 = 0$ die zweite Polare desselben in Bezug auf den Punkt x. Da nun $\Delta(l)$ hiernach in

$$l^3 - \frac{3\varphi_1}{\varphi} l^2 + \frac{3\varphi_2}{\varphi} l - \frac{\varphi_3}{\varphi}$$

übergeht, so erhält man die Gleichungen der gesuchten Curven, indem man

$$i\quad,\quad i'\quad,\quad i''$$

durch

$$\frac{3\varphi_1}{\varphi}\ ,\ \frac{3\varphi_2}{\varphi}\ ,\ \frac{\varphi_3}{\varphi}$$

ersetzt, oder, wenn man mit der passenden Potenz von φ multiplicirt, durch

$$3\varphi_1\quad,\quad 3\varphi_2\quad,\quad \varphi_3\,,$$

dann aber die verschiedenen Terme mit solchen Potenzen von φ multiplicirt, dass das Resultat für die vier φ_i homogen wird.

Die Curve $\varphi_3 = 0$ (das Fundamentaldreieck) hat drei Doppelpunkte, die Ecken des Dreiecks. Der Kegelschnitt $\varphi_2 = 0$, die Polare von x, geht also durch die Ecken dieses Dreiecks hindurch. Um die Tangente der Polare in einem dieser Punkte zu finden, kann man die Polare von x in Bezug auf das Seitenpaar suchen, welches sich in der betrachteten Ecke schneidet, und man sieht also, dass die Tangente des Kegelschnitts $\varphi_2 = 0$ zu jenen beiden Seiten und zu der Verbindungslinie von x mit der Ecke harmonisch liegt. Der Kegelschnitt $\varphi_2 = 0$ ist hierdurch geometrisch mehr als vollständig bestimmt; ja indem man die Seiten des Dreiecks und die Tangenten des Kegelschnitts in den Ecken als Seiten eines Pascalschen Sechsecks betrachtet, sieht man, dass die drei Seiten des Dreiecks (p, p', p'') von den in seinen Ecken (β, β', β'') berührenden drei Tangenten (t, t', t'') entsprechend in drei Punkten (α, α', α'') geschnitten werden, welche auf einer Geraden liegen, der Pascalschen Linie des Sechsecks. Von dem Punkte α gehen die Strahlen t, p aus, deren ersterer in β berührt, und deren zweiter durch die Linie βx in einem Punkte geschnitten wird, welcher zu α, β', β'' harmonisch ist. Daher ist βx die Polare von α in Bezug auf den Kegelschnitt $\varphi_2 = 0$, ebenso $\beta' x$ die von α', $\beta'' x$ die von α''; endlich also ist x der Pol der Pascalschen Linie, und diese also fällt mit der Geraden $\varphi_1 = 0$ zusammen.

Mit Hülfe dieser Betrachtungen lassen sich nun die Curven deuten, welche aus den obigen Invariantenbeziehungen entstehen. Der Punkt x sei beliebig gegeben; die folgenden Gleichungen sagen aus, auf welchen Curven y liegen muss, damit die aus y und x abgeleitete Punktreihe eine der bezeichneten Eigenschaften hat:

1) Die Punkte 0, 1, 3 auf einer Geraden: $\varphi_1 = 0$
2) Die Punkte 0, 1, 4 auf einer Geraden: $3\varphi_1^2 - \varphi\varphi_2 = 0$
3) Die Punkte 0, 2, 3 auf einer Geraden: $\varphi_2 = 0$
4) Die Punkte 0, 2, 4 auf einer Geraden: $9\varphi_1\varphi_2 - \varphi\varphi_3 = 0$
5) Die Punkte 0, 3, 4 auf einer Geraden: $3\varphi_2^2 - \varphi_1\varphi_3 = 0$
6) Die Punkte 0,1,3,4,5 auf einem Kegelschnitt: $\varphi_2^3\varphi - \varphi_1^3\varphi_3 = 0$.

Ueber die geometrischen Eigenschaften dieser Curven lässt sich Folgendes bemerken:

ad 1. Die Curve ist die Pascalsche Linie selbst.

ad 2. Ein Kegelschnitt, welcher in den Schnittpunkten des Kegelschnitts $\varphi_2 = 0$ mit der Pascalschen Linie erstere berührt. Diese Punkte (γ, γ') sind die Berührungspunkte der von x an den Kegelschnitt $\varphi_2 = 0$ gezogenen Tangenten.

ad 3. Der Kegelschnitt, welcher die Polare von x in Bezug auf das Fundamentaldreieck ist.

ad 4. Eine Curve dritter Ordnung, welche durch die drei Schnittpunkte der Pascalschen Linie mit den Seiten des Fundamentaldreiecks geht, und in den Ecken desselben von dem Kegelschnitte $\varphi_2 = 0$ berührt wird.

ad 5. Eine Curve vierter Ordnung, welche in den Ecken des Fundamentaldreiecks Doppelpunkte hat, und in den Punkten γ, γ' die Pascalsche Linie berührt.

ad 6. Eine Curve sechster Ordnung, welche die Punkte γ, γ' zu dreifachen Punkten hat, und die Ecken des Fundamentaldreiecks zu zu Doppelpunkten, so aber, dass die Seiten desselben zugleich die Tangenten der Doppelpunkte sind; welche endlich durch den Punkt x selbst hindurchgeht.

Es genügt, die Classe von geometrischen Betrachtungen angedeutet zu haben, welche hier auftritt; es ist leicht, dieselbe beliebig weit fortzusetzen.

§. 15.

Besondere Fälle der Collineation.

Ebenso genügt es, die Ausnahmsfälle anzudeuten, welche dadurch eintreten, dass von den Wurzeln der cubischen Gleichung zwei oder drei einander gleich werden.

I. Ist $l_3 = l_2$, so muss man die kanonische Form (2) durch die folgende ersetzen:

(1) $$f = l_1 X_1 U_1 + l_2 (X_2 U_2 + X_3 U_3) + \alpha X_2 U_3,$$

wo α eine beliebige, aber von Null verschiedene Grösse ist.

Um die Zulässigkeit dieser kanonischen Form einzusehen, bemerke man, dass jetzt nur zwei lineare Combinationen X_i, resp. Y_i so gefunden werden können, dass aus (1) §. 12. die Form

$$\varrho Y_i = l_i X_i$$

hervorgeht. Setzen wir also

(2) $$\begin{aligned} \varrho Y_1 &= l_1 X_1 \\ \varrho Y_2 &= l_2 X_2, \end{aligned}$$

so muss die dritte Gleichung die Form haben

(3) $$\varrho Y_3 = \beta X_1 + \alpha X_2 + \gamma X_3.$$

Bildet man nun die cubische Gleichung wie in §. 12, so erhält man

$$0 = \begin{vmatrix} l_1 - l & 0 & 0 \\ 0 & l_2 - l & 0 \\ \alpha & \beta & \gamma - l \end{vmatrix},$$

also, damit l_2 Doppelwurzel sei, $\gamma = l_2$. Setzt man nun noch

$$Y_3 + \frac{\beta}{l_1 - l_2} Y_1 \text{ für } Y_3, \quad X_3 + \frac{\beta}{l_1 - l_2} X_1 \text{ für } X_3,$$

so zerstört man in der Gleichung (3) das Glied mit X_1, und die Gleichungen (3) gehen über in

$$\begin{aligned} \varrho Y_1 &= l_1 X_1 \\ \varrho Y_2 &= l_2 X_2 \\ \varrho Y_3 &= \alpha X_2 + l_2 X_3, \end{aligned}$$

was mit der Annahme der kanonischen Form (1) identisch ist.

Man erhält mit Zugrundelegung derselben die Bildungen [vergl. §. 12. (3)]:

$$\begin{aligned}
& i = l_1 + 2 l_2 \qquad i_1 = l_1^2 + 2 l_2^2 \qquad i_2 = l_1^3 + 2 l_2^3 \\
& i' = l_2^2 + 2 l_1 l_2 \qquad i'' = l_1 l_2^2 \\
& f_1 = l_1^2 X_1 U_1 + l_2^2 (X_2 U_2 + X_3 U_3) + 2 l_2 \alpha X_2 U_3 \\
& f_2 = l_1^3 X_1 U_1 + l_2^3 (X_2 U_2 + X_3 U_3) + 3 l_2^2 \alpha X_2 U_3 \\
& \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\
& g = l_2^2 X_1 U_1 + l_1 l_2 (X_2 U_2 + X_3 U_3) - \alpha l_1 X_2 U_3 \\
& \varphi = - \varepsilon \alpha (l_1 - l_2)^2 X_1 X_2^2 \qquad \psi = \frac{\alpha}{\varepsilon} (l_1 - l_2)^2 U_1 U_3^2.
\end{aligned}$$

Zwei Seiten der frühern Fundamentaldreiecke fallen zusammen ($X_2 = 0$), doch so, dass ihr Schnittpunkt bestimmt bleibt ($U_1 = 0$). Der hier betrachtete Fall umfasst alle collinearen Systeme dieser Art, welche dieses uneigentliche Fundamentaldreieck gemein haben. Die Formeln für die Collineation:

$$\begin{aligned} \varrho Y_1 &= l_1 X_1 \\ \varrho Y_2 &= l_2 X_2 \\ \varrho Y_3 &= l_2 X_3 + \alpha X_2 \end{aligned}$$

lehren, dass wieder alles vollständig bestimmt ist, wenn einem beliebig gegebenen Punkte X ein Punkt Y zugeordnet ist, da die Verhältnisse der l_1, l_2, α dann aus den obigen Gleichungen bestimmt sind.

Die Coordinaten des h^{ten} Punktes der zu einem beliebigen Punkte X gehörigen Reihe sind:

$$\begin{aligned} \varrho Y_1 &= l_1^h X_1 \\ \varrho Y_2 &= l_2^h X_2 \\ \varrho Y_3 &= l_2^h X_3 + h\alpha l_2^{h-1} X_2. \end{aligned} \tag{4}$$

Damit gewisse Punkte dieser Reihe bestimmte Lagen haben, müssen Relationen bestehen, welche nur die Invarianten, also nur l_1, l_2, nicht aber α enthalten. So werden denn die aus derselben abgeleiteten Curven nur $\frac{Y_1}{X_1}, \frac{Y_2}{X_2}$ enthalten. Alle oben aufgestellte Curven gehen also in Systeme von Geraden über, welche durch den Schnittpunkt der doppelt zu rechnenden Seite des Fundamentaldreiecks ($X_2 = 0$) mit der einfachen ($X_1 = 0$), oder durch die Ecke $U_3 = 0$ hindurchgehen. In der That nämlich wird die aus den Coordinaten dreier Punkte der Reihe gebildete Determinante hier

$$\begin{vmatrix} l_1^h X_1 & l_2^h X_2 & l_2^h X_3 + h\alpha l_2^{h-1} X_2 \\ l_1^k X_1 & l_2^k X_2 & l_2^k X_3 + k\alpha l_2^{k-1} X_2 \\ l_1^m X_1 & l_2^m X_2 & l_2^m X_3 + m\alpha l_2^{m-1} X_2 \end{vmatrix} = X_1 X_2^2 \cdot \alpha \begin{vmatrix} l_1^h & l_2^h & h l_2^{h-1} \\ l_1^k & l_2^k & k l_2^{k-1} \\ l_1^m & l_2^m & m l_2^{m-1} \end{vmatrix}.$$

Man sieht, dass α hier nur als Factor erscheint, und also aus den in Rede stehenden Gleichungen ganz herausgeht. Uebrigens entsteht die übrigbleibende Determinante aus der entsprechenden in §. 13, indem man l_3 in $l_2 + \omega$ übergehen, und ω gegen Null convergiren lässt. Daher kann man sofort die früher gegebenen Formeln benutzen, und nur $l_3 = l_2$ setzen. Hiermit ist das oben Behauptete nicht nur erwiesen, sondern man findet auch leicht die Systeme von Geraden, welche in diesem Falle an Stelle der oben aufgestellten Curven treten.

II. In dem Falle, wo ausserdem $\alpha = 0$ wird, verschwinden φ und ψ; die Gleichungen (2) geben

$$Y_1 X_2 - Y_2 X_1 = 0. \tag{5}$$

Dieser Fall umfasst alle einem gegebenen perspectivischen Systeme.

Die Bedingungen, welche man Punkten der Reihen auferlegen kann, sind von selbst erfüllt, da alle Punkte der Reihe auf demselben Projectionsstrahl (5) liegen.

III. Wenn alle drei Wurzeln der cubischen Gleichung einander gleich werden, so kann man die kanonische Form anwenden:

$$f = l(X_1U_1 + X_2U_2 + X_3U_3) + \alpha X_1U_2 + \beta X_2U_3.$$

Es ist darin l der gemeinschaftliche Werth der drei Wurzeln; α und β sollen zunächst als von Null verschieden vorausgesetzt werden. Auf die vorliegende kanonische Form wird man folgendermassen geführt. Unter den linearen Verbindungen der Gleichungen §. 12 (1) giebt es nur eine, welche die Form

$$\varrho Y_1 = lX_1 \tag{6}$$

hat. Die andern zwischen den Y und X stattfindenden Gleichungen müssen die Form haben:

$$\begin{aligned} \varrho Y_2 &= aX_1 + (b+l)X_2 + cX_3 \\ \varrho Y_3 &= \alpha X_1 + \beta X_2 + (\gamma + l)X_3. \end{aligned} \tag{7}$$

Aber die cubische Gleichung, welche hiernach den Ausdruck

$$\varDelta(z) = 0 = \begin{vmatrix} l-z & 0 & 0 \\ a & l+b-z & c \\ \alpha & \beta & l+\gamma-z \end{vmatrix}$$

hat, muss die Wurzel l dreimal enthalten. Daher muss man haben

$$b + \gamma = 0 \quad , \quad b\gamma - c\beta = 0. \tag{8}$$

Man erfüllt diese Gleichungen identisch, indem man

$$c = \mu^2 \ , \ \beta = - \nu^2 \quad , \quad b = \mu\nu \ , \ \gamma = -\mu\nu$$

setzt. Die Gleichungen (7) verwandeln sich dadurch in

$$\begin{aligned} \varrho Y_2 &= aX_1 + lX_2 + \mu(\nu X_2 + \mu X_3) \\ \varrho Y_3 &= \alpha X_1 + lX_3 - \nu(\nu X_2 + \mu X_3). \end{aligned}$$

Es folgt aber daraus die Verbindung

$$\varrho(\nu Y_2 + \mu Y_3) = (a\nu + \alpha\mu)X_1 + l(\nu X_2 + \mu X_3).$$

Setzt man also jetzt wieder Y_2 für $\nu Y_2 + \mu Y_3$, und X_2 für $\nu X_2 + \mu X_3$, so erhält man eine Gleichung der Form

$$\varrho Y_2 = aX_1 + lX_2, \tag{9}$$

welche aus den Gleichungen (7) immer abgeleitet werden kann. Man darf daher annehmen, dass eine der Gleichungen (7) die Form (8) bereits habe, d. h. $b = 0$, $c = 0$. Die Gleichungen (8) geben dann $\gamma = 0$, während β beliebig bleibt. Die dritte Gleichung (7) wird also

$$\varrho Y_3 = \alpha X_1 + \beta X_2 + lX_3. \tag{10}$$

Verändert man nun noch Y_3 und X_3, indem man statt derselben

$Y_3 - \frac{\alpha}{a} Y_2$ und $X_3 - \frac{\alpha}{a} X_2$ setzt, so fällt im (10) noch das Glied mit X_1 fort, und es bleibt

(11) $$\varrho Y_3 = \beta X_2 + l X_3.$$

Multiplicirt man nun (6), (9), (11) mit U_1, U_2, U_3 und addirt, so ergiebt sich die Gleichung der Collineation:

$$f = l(U_1X_1 + U_2X_2 + U_3X_3) + \alpha X_1U_2 + \beta X_2U_3,$$

welche sich von der oben angenommenen Form nur dadurch unterscheidet, dass α statt a geschrieben ist.

Legen wir jetzt die Form

$$f = l(U_1X_1 + U_2X_2 + U_3X_3) + \alpha X_1U_2 + \beta X_2U_3$$

zu Grunde, so finden wir:

$$i = 3l \quad , \quad i_1 = 3l^2 \quad , \quad i_2 = 3l^3 \quad , \quad i' = 3l^2 \quad , \quad i'' = l^3$$

$$f_1 = l^2(U_1X_1 + U_2X_2 + U_3X_3) + 2\alpha l X_1U_2 + 2\beta l X_2U_3 + \alpha\beta X_1U_3$$

$$f_2 = l^3(U_1X_1 + U_2X_2 + U_3X_3) + 3\alpha l^2 X_1U_2 + 3\beta l^2 X_2U_3 + 3\alpha\beta l X_1U_3$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$f_h = l^{h+1}(U_1X_1 + U_2X_2 + U_3X_3) + (h+1)\alpha l^h X_1U_2 + \\ + (h+1)\beta l^h X_2U_3 + \frac{h \cdot h+1}{2} \alpha\beta l^{h-1} X_1U_3$$

$$g = l^2(U_1X_1 + U_2X_2 + U_3X_3) - \alpha l X_1U_2 - \beta l X_2U_3 + \alpha\beta X_1U_3$$

$$\varphi = -\varepsilon\alpha^2\beta X_1^3 \quad , \quad \psi = \frac{\alpha\beta^2}{\varepsilon} U_3^3.$$

Dieser Fall umfasst alle diejenigen collinearen Systeme, bei welchen sich die Ecken des frühern Fundamentaldreiecks in einen Punkt ($U_3 = 0$), die Seiten in eine Gerade ($X_1 = 0$) vereinigt haben. Auch hier wird durch die Gleichungen

(12) $$\begin{aligned} \varrho Y_1 &= l X_1 \\ \varrho Y_2 &= \alpha X_1 + l X_2 \\ \varrho Y_3 &= \beta X_2 + l X_3 \end{aligned}$$

alles bestimmt, sobald zu einem willkürlichen Punkte X ein bestimmter Y zugeordnet wird, indem die Verhältnisse der Grössen α, β, l dadurch gegebene Werthe annehmen.

Die Punkte der Reihe

$$\begin{aligned} \varrho Y_1 &= l^h X_1 \\ \varrho Y_2 &= l^h X_2 + h\alpha l^{h-1} X_1 \\ \varrho Y_3 &= l^h X_3 + h\beta l^{h-1} X_2 + \frac{h \cdot h-1}{2} \alpha\beta l^{h-2} X_1 \end{aligned}$$

können hier, indem man durch l^{h-2} überall dividirt, einfacher durch die Gleichungen

(13) $$\begin{cases} \varrho Y_1 = l^2 X_1 \\ \varrho Y_2 = l^2 X_2 + h\alpha l X_1 \\ \varrho Y_3 = l^2 X_3 + h\beta l X_2 + \frac{h \cdot h-1}{2} \alpha\beta X_1 \end{cases}$$

dargestellt werden. Diese Punkte liegen daher hier nicht mehr auf einer transcendenten Curve, sondern auf einem Kegelschnitt, dessen Gleichung man erhält, indem man ϱ und h aus den obigen Gleichungen eliminirt. Indessen genügt es hier zu bemerken, dass die Gleichungen

$$\varrho Y_i = \alpha_i + 2h\beta_i + h^2\gamma_i$$

immer einen Kegelschnitt darstellen, dessen Gleichung in Liniencoordinaten ist:

$$(\alpha_1 u_1 + \alpha_2 u_2 + \alpha_3 u_3)(\gamma_1 u_1 + \gamma_2 u_2 + \gamma_3 u_3) - (\beta_1 u_1 + \beta_2 u_2 + \beta_3 u_2)^2 = 0.$$

Es sind daher α, γ Punkte des Kegelschnitts, β der Schnittpunkt der in α, γ an den Kegelschnitt zu ziehenden Tangenten. Wenden wir dies auf die Gleichungen (13) an, so sehen wir, dass an Stelle des Punktes α der Punkt X, an Stelle von γ der Punkt $U_3 = 0$ tritt, während β die Form $pU_2 + qU_3 = 0$ hat, also ein Punkt von $X_1 = 0$ ist. Der betrachtete Kegelschnitt geht also durch X_1 und berührt in dem Punkte $U_3 = 0$, in welchem sich die Ecken des Fundamentaldreiecks vereinigt haben, die Gerade $X_1 = 0$, welche die Vereinigung seiner Seiten ist. Der Kegelschnitt zerfällt niemals, ausser wenn $X_1 = 0$ ist, da die Determinante $(\Sigma \pm \alpha_1 \beta_2 \gamma_3)^2$ des Kegelschnitts sich auf X_1^3 reducirt.

IV. Man kann noch den Fall betrachten, wo eine der Constanten α, β verschwindet. Es ist gleichgültig, welche man verschwinden lässt. Sei $\beta = 0$; die Gleichungen (12) gehen dann über in

$$\begin{aligned} \varrho Y_1 &= lX_1 \\ \varrho Y_2 &= lX_2 + \alpha X_1 \\ \varrho Y_3 &= lX_3. \end{aligned}$$

Es folgt $Y_1 X_3 - Y_3 X_1 = 0$; man hat also perspectivische Systeme, deren Centrum der Punkt $X_1 = 0$, $X_3 = 0$ ist. Verschwindet endlich sowohl α als β, so hat man identische Systeme, deren entsprechende Punkte immer zusammenfallen.

Giessen, den 3ten September 1868.

Note bezüglich der Zahl der Moduln einer Classe von algebraischen Gleichungen.

Von A. Brill in Giessen.

Riemann knüpft seine Betrachtungen über algebraische Functionen an eine Gleichung n^{ten} Grades in s, deren Coefficienten ganze Functionen m^{ten} Grades von z sind und bezeichnet dieselbe mit:

$$F\left(\overset{n}{s}, \overset{m}{z}\right) = 0.$$

Der von ihm aufgestellte Begriff der durch rationale Substitutionen (eindeutige Transformationen) in einander transformirbaren Gleichungen zwischen s und z führt ihn zur Aufstellung von solchen einer gegebenen „Classe" angehörigen Gleichungen, für welche die Grade m und n den niedrigsten Werth haben, ohne dass die wesentlichen, d. h. die bei einer eindeutigen Transformation ungeändert bleibenden und im Allgemeinen von einander unabhängigen Constanten in ein gegenseitiges Abhängigkeitsverhältniss treten. Die Classe sei durch die Zahl p charakterisirt; versteht man noch unter r die Anzahl der Fälle, wo die ersten Differentialquotienten der Function F nach s und z zugleich mit F selbst verschwinden, während $\frac{ds}{dz}$ zwei verschiedene endliche Werthe annimmt, so haben die besagten Gleichungen niedrigsten Grades die Form*):

$$(1)\quad p > 2 \begin{cases} p = 2\mu - 3 \qquad F\left(\overset{\mu}{s}, \overset{\mu}{z}\right) = 0 \qquad r = (\mu - 2)^2 \\ p = 2\mu - 2 \qquad F\left(\overset{\mu}{s}, \overset{\mu}{z}\right) = 0 \qquad r = (\mu - 1)(\mu - 3), \end{cases}$$

wo r von den Coefficienten der Potenzen von s und z in den ganzen Functionen F als lineare homogene Functionen der übrigen so bestimmt werden müssen, dass $\frac{dF}{ds}$ und $\frac{dF}{dz}$ für r der Gleichung $F = 0$

*) Riemann, Journal Crelle-Borchard Bd. 54, §. 13.

genügende Werthepaare gleichzeitig verschwinden. Transformirt man die Gleichungen (1) mittelst der Substitutionen:

$$s = \frac{y_1}{y_3}\,; \qquad z = \frac{y_2}{y_3}$$

in eine in den Variablen $y_1\, y_2\, y_3$ homogene Form:

$$F\,(y_1\,, y_2\,, y_3) = 0,$$

so kann jede der so entstehenden Gleichungen als die einer Curve aufgefasst werden, in welcher jenen r Werthepaaren s, z Doppelpunkte entsprechen, und welche im Allgemeinen noch eine höhere Singularität in den den Werthen $z = \infty$ und $s = \infty$ entsprechenden Punkten besitzt. Und zwar repräsentiren jene Gleichungen niedrigsten Grades für $p > 2$ Curven $2\mu^{\text{ter}}$ Ordnung mit 2μfachen und r Doppelpunkten. Fasst man jede der obigen Gleichungen (1) niedrigsten Grades, die man in gewisser Beziehung als Normalformen der Riemann'schen Gleichungen für ein gegebenes p ansehen kann, in der oben ausgeführten Weise als die einer Curve auf, so kommt derselben nicht auch die Eigenschaft zu, Curve niedrigster Ordnung für das gegebene p zu sein, denn statt auf den Grad in s und z kommt es hierbei auf die Gesammtdimension an.

In dem Werke über Abel'sche Functionen von Clebsch und Gordan wird nun andererseits eine Methode angegeben, vermittelst deren sich eine gegebene Curve n^{ter} Ordnung mit Doppel- und Rückkehrpunkten in eine Normalcurve von möglichst niedriger Ordnung überführen lässt. Diese Ordnung ist $p + 1$.

Lässt sich nun die Transformation jener Normalcurve auf die Riemann'sche Normalform und umgekehrt ausführen, so muss die Anzahl der in beiden Normalformen enthaltenen, durch eindeutige Transformation nicht zerstörbaren Constanten übereinstimmen. Riemann*) stellt nun für die in seiner Normalform enthaltenen wesentlichen Constanten mit Hülfe analytischer Untersuchungen die Zahl $3p - 3$ auf. Herr Cayley**) gelangt zu der Zahl $4p - 6$ für jene Normalcurve $p + 1^{\text{ter}}$ Ordnung aus Betrachtungen geometrischer Natur.

Ich werde nun im Nachfolgenden auf dem Wege der Rechnung an einem möglichst zutreffend gewählten Beispiel ($p = 4$, in welchem Falle $4p - 6 = 10$; $3p - 3 = 9$, $r = 0$ ist) zunächst zeigen, dass die Anzahl der durch eindeutige Transformation nicht zerstörbaren Constanten in der obigen Normalcurve $p + 1^{\text{ter}}$ Ordnung nicht verschieden sein kann von der in der von

*) Ibid. §. 12.

**) Verhandlungen der Mathematical-Society, Oct. 16., 1863.

Riemann aufgestellten Gleichung (1), indem ich einfach die Transformation der Normalcurve für den genannten Fall (von der fünften Ordnung mit 2 Doppelpunkten) in jene Form wirklich ausführe. Alsdann werde ich eine Reihenfolge von Transformationen angeben, mittelst deren für das eben genannte Beispiel aus der Riemann'schen Normalform eine Form mit nur $3p-3=9$ Constanten hergestellt werden kann.

An anderer Stelle*) habe ich gezeigt, dass ein μfacher Punkt in dem Punkte $y_1=0$; $y_3=0$ der transformirten Curve

$$F\,(y_1, y_2, y_3)=0$$

dadurch entsteht, dass man in:

$$\varrho y_i = \Phi_i\,(x_1\,, x_2\,, x_3)\,,\ \text{wo } i=1,2,3,$$

den Ausdrücken Φ_1 und Φ_3 einen gemeinsamen Factor giebt, der für μ Punkte der Curve $f(x_1\, x_2\, x_3)=0$ verschwindet. Damit auch noch in $y_2=0$; $y_3=0$ ein μfacher Punkt erscheine, so möge das Gleiche für Φ_2 und Φ_3 stattfinden; die Transformationsformeln auf die Riemann'sche Form haben alsdann die Gestalt:

$$\begin{aligned}\varrho\, y_1 &= \psi\cdot\chi'\\ \varrho\, y_2 &= \psi'\cdot\chi\\ \varrho\, y_3 &= \chi\cdot\chi',\end{aligned}$$

wo die ψ und χ Functionen der x von gleicher Dimension sind.

Bei der Transformation von Curven mit niedrigem p ineinander, um welche es sich in unserem Beispiele handelt, wird man vielfach auf Substitutionsformeln geführt, aus welchen sich ohne Hülfe der gegebenen Gleichung $f(x)=0$ die Werthe der x rational durch die y ausdrücken lassen. Eine solche direct umkehrbare Transformation bietet den Vortheil, ohne schwierige Elimination die Gleichung der transformirten Curve sowie den auszuscheidenden Factor, welcher bei dieser Transformation immer auftritt**), sofort und übersichtlich zu ergeben. So z. B. berechnet man aus:

$$(2)\qquad \begin{aligned}\varrho y_1 &= x_2 x_3\\ \varrho y_2 &= x_3 x_1\\ \varrho y_3 &= x_1 x_2\end{aligned}$$

die umgekehrten Transformationsformeln:

$$(2^a)\qquad \begin{aligned}\sigma x_1 &= y_2 y_2\\ \sigma x_2 &= y_3 y_1\\ \sigma x_3 &= y_1 y_2\,.\end{aligned}$$

*) Habilitationsschrift, 1867.

**) In den unten gegebenen Beispielen steht, wie man sehen wird, das p dieses Factors zu dem der transformirten Curve (also des anderen, irreductibeln Factors) in keiner Beziehung.

Der geometrische Sinn dieser Transformation ist von Hrn. Cremona in einer Abhandlung „*Sulle trasformazioni geometriche delle figure piane*“ (*Acad. Bologna 1864*) bereits näher erörtert worden.

Die allgemeine Gleichung der Normalcurve für $p=4$ (von der fünften Ordnung mit 2 Doppelpunkten) lässt sich durch lineare Transformation immer auf eine solche Form bringen, dass die letztgenannten in die beiden Eckpunkte $x_1=0$; $x_3=0$ und $x_2=0$; $x_3=0$ des Coordinatendreiecks zu liegen kommen. Die Gleichung der Curve hat alsdann die Form:

$$f=x_1^3\cdot f_2(x_2,x_3)+x_2^3\cdot f_2''(x_1,x_3)+x_1x_2x_3\cdot f_1'''(x_2x_3,x_3x_1,x_1x_2) \\ +x_3^3\cdot f_2(x_1,x_2,x_3)=0,$$

wo die unteren Indices der f die Dimension in den eingeklammerten Variabeln angeben. Transformirt man $f=0$ mittelst der Substitutionsformeln (2, 2ª), so kommt:

$$y_2^2y_1^2\cdot F=y_2^2y_1^2[y_2y_3^3\cdot f_2'(y_3,y_2)+y_1y_3^3\cdot f_2''(y_3,y_1) \\ +y_1y_2y_3^3\cdot f_1'''(y_1,y_2,y_3)+y_1y_2\cdot f_2(y_2y_3,y_3y_1,y_1y_2)]=0.$$

Seien die Coefficienten in $f^{(i)}$: $a^{(i)}$, $b^{(i)}$, $c^{(i)}$, ... und löst man auf, so kommt, nach Weglassung des Factors $y_2^2y_1^2$ (vergl. S. 403, Note):

$$F=y_2y_3^3(a'y_2^2+b'y_2y_3+c'y_3^2)+y_1y_3^3(a''y_1^2+b''y_1y_3+c''y_3^2) \\ +y_1y_2y_3^3(a'''y_1+b'''y_2+c'''y_3) \\ +y_1y_2(ay_2^2y_3^2+by_3^2y_1^2+cy_1^2y_2^2+dy_1^2y_2y_3+ey_1y_2^2y_3+fy_1y_2y_3^2)=0.$$

Man sieht, dass die Glieder alle verschieden sind, 15 an der Zahl. An der Riemann'schen Form (1), einer Curve sechster Ordnung mit einem dreifachen Punkte je in $y_1=0$; $y_3=0$ und $y_2=0$; $y_3=0$, fehlt nur noch der Term y_3^6. Um auch diesen ganz allgemein zu erhalten, setze man noch;

$$y_1=s+\alpha;\quad y_2=z;\quad y_3=1.$$

Wir haben also successive drei Transformationen angewandt, deren Umkehrbarkeit keinem Zweifel unterliegen kann.

Wir schreiben die hierdurch sich ergebende Gleichung in der Form:

$$s^3\cdot\varphi_3+3s^2\cdot\varphi_2+3s\cdot\varphi_1+\varphi_0=0,$$

wo

$$\varphi_i=a_{i3}\cdot z^3+3a_{i2}z^2+3a_{i1}z+a_{i0}\ ;\ i=1,\ 2,\ 3.$$

Die Zahl der Coefficienten a_{ik} beträgt 16.

Mittelst der Transformationsformeln:

$$s=\frac{\alpha\sigma+\beta}{\gamma\sigma+\delta};\qquad z=\frac{\alpha'\zeta+\beta'}{\gamma'\zeta+\delta'}$$

kann man nun, wie eine oberflächliche Abzählung lehrt, die Riemann'sche Form auf eine solche mit nur 9 Coefficienten transformiren.

Um aber einen genaueren Einblick in diese neue Transformation zu ermöglichen, wollen wir dieselbe nun gleichfalls in mehrere andere zergliedern.

Wir setzen zunächst:

$$s = \frac{\alpha t + \beta}{t + 1}$$

und bestimmen die Grössen α und β derart, dass in der transformirten Gleichung:

$$t^3 \cdot \psi_3 + 3t^2 \cdot \psi_2 + 3t \cdot \psi_1 + \psi_0 = 0$$

der Coefficient von $3t^2$ ein vollständiger Kubus wird. Derselbe hat die Form:

$$\begin{aligned}\psi_2 &= \beta(\alpha^2\varphi_3 + 2\alpha\varphi_2 + \varphi_1) + \alpha^2\varphi_2 + 2\alpha\varphi_1 + \varphi_0\\ &= z^3(\Psi_3 + \beta\Phi_3) + 3z^2(\Psi_2 + \beta\Phi_2) + 3z(\Psi_1 + \beta\Phi_1) + \Psi_0 + \beta\Phi_0,\end{aligned}$$

wo

$$\Phi_i = \alpha^2 \cdot a_{3i} + 2\alpha \cdot a_{2i} + a_{1i}\,;\; \Psi_i = \alpha^2 \cdot a_{2i} + 2\alpha \cdot a_{1i} + a_{0i}$$

gesetzt ist. Sollen also in ψ_2 die Quotienten der Coefficienten je zweier aufeinander folgenden Potenzen von z einander gleich sein, so hat man zwei Gleichungen zur Berechnung von β und α, nämlich:

$$\frac{\beta\Phi_0 + \Psi_0}{\beta\Phi_1 + \Psi_1} = \frac{\beta\Phi_1 + \Psi_1}{\beta\Phi_2 + \Psi_2} = \frac{\beta\Phi_2 + \Psi_2}{\beta\Phi_3 + \Psi_3}.$$

Eliminirt man aus denselben β, so kommt für α folgende Gleichung 12ten Grades, welche diese Grösse als Function der a_{ik} definirt:

$$0 = \begin{vmatrix} \Phi_0\Phi_2 - \Phi_1^2 & \Phi_0\Psi_2 + \Psi_0\Phi_2 - 2\Phi_1\Psi_1 & \Psi_0\Psi_2 - \Psi_1^2 \\ \Phi_1\Phi_3 - \Phi_2^2 & \Phi_1\Psi_3 + \Psi_1\Phi_3 - 2\Phi_2\Psi_2 & \Psi_1\Psi_3 - \Psi_2^2 \\ \Phi_2\Phi_1 - \Phi_0\Phi_3 & \Phi_2\Psi_1 + \Psi_2\Phi_1 - \Phi_3\Psi_0 - \Psi_3\Phi_0 & \Psi_2\Psi_1 - \Psi_0\Psi_3 \end{vmatrix}.$$

Diese Gleichung ist die einzige höhere Gleichung, deren Auflösung bei der auszuführenden Reduction der Constantenzahl nothwendig ist. Denkt man sich für α eine Wurzel derselben in die Φ und Ψ eingesetzt, so ergiebt sich β aus einer Gleichung 2ten Grades. Man kann somit durch diese Transformation der gegebenen Gleichung die folgende Gestalt geben:

$$t^3 \cdot \psi_3 + 3t^2 \cdot k(z + \delta)^3 + 3t \cdot \psi_1 + \psi_0 = 0,$$

die Grössen ψ sind von derselben Form wie früher die φ.

Setzt man weiter:

$$z = \frac{z' + a}{z' + b},$$

wo a und b irgend zwei Wurzeln der Ausdrücke ψ sind (gleichgültig ob sie demselben oder verschiedenen ψ angehören), so werden hierdurch zwei Coefficienten in der transformirten Gleichung zum Verschwinden gebracht. Drei weitere lassen sich dadurch $= 1$ machen, dass man in den schliesslichen Substitutionsformeln:

$$t = m \cdot \sigma \text{ und } z' = n . \zeta$$

die Constanten m und n passend bestimmt und endlich die ganze Gleichung durch eine passende Constante dividirt. Die so entstehende Gleichung in σ und ζ erfüllt die verlangte Bedingung, nur $3p - 3 = 9$ Coefficienten zu besitzen.

Giessen, Januar 1869.

Zur Geometrie auf den Flächen zweiter Ordnung.

Von H. Müller in Freiburg i. Br.

§. 1.

Betrachtungen über die Raumcurve dritter Ordnung.*)

1) Die Frage nach den gemeinsamen Punkten zweier Raumcurven dritter Ordnung, welche auf einem Hyperboloid liegen und die Strahlen der nämlichen Regelschaar des Hyperboloids zu Sekanten haben (siehe §. 3.), vereinfacht sich, sobald einer der gemeinschaftlichen Punkte bekannt ist.

Sind aber drei derselben gegeben, so wird die Construction des vierten linear.

Dieser Fall hat dadurch besonderes Interesse, dass er zur Auffindung des achten Punktes, in welchem sich alle durch 7 Punkte gehende Flächen zweiter Ordnung schneiden, benutzt werden kann, und soll im Folgenden besonders betrachtet werden.

Satz: Wenn zwei Raumcurven R, R' dritter Ordnung 3 Punkte p_1, p_2, p_3 und eine Regelschaar G gemein haben (d. h., wenn alle Strahlen von G auch Sekanten von R und R' sind), so haben sie noch einen vierten Punkt gemeinsam.

Von p_1 aus werden die Curven R und R' durch zwei Kegel zweiter Ordnung K, K' projicirt. Dieselben haben die Strahlen $\overline{p_1 p_2}$ $\overline{p_1 p_3}$ und den Strahl A der Regelschaar G, welcher durch p_1 geht, gemeinsam und müssen sich deshalb noch in einer vierten, durch p_1 gehenden Geraden B treffen. Dieselbe enthält nun entweder einen gemeinschaftlichen Punkt p_4 der beiden Raumcurven oder zwei getrennte Punkte r und s derselben. Von diesen beiden Fällen erweist sich aber der zweite als unmöglich, weil B eine Erzeugende der Regelschaar G sein müsste (B enthielte 3 Punkte p_1 r s von G) und durch einen Punkt p_1 nicht zwei Erzeugende A und B der gleichen Regelschaar gehen können.

---

*) Ueber Raumcurven dritter Ordnung in synthetischer Betrachtung siehe z. B. Die Geometrie der Lage. Vorträge von Dr. Theodor Reye. Hannover 1868.

Die beiden Raumcurven haben also einen vierten gemeinschaftlichen Punkt p_4.

Zur Construction von p_4 dient die folgende Betrachtung:

Man lege durch einen Strahl A von G eine Ebene a. Dieselbe enthält noch zwei nicht in A gelegene Punkte r und r' von R und R'. $r_1 r_2$ ist ein Leitstrahl der Regelschaar G. Die beiden Ebenen $\overline{p_1 p_2 r}$ und $\overline{p_1 p_2 r'}$ sollen b und b' genannt werden. Dreht sich nun a um A, so beschreibt rr' eine Regelschaar G' und die Ebenen b und b' beschreiben zwei Ebenenbüschel, welche mit dem von a erzeugten Büschel projectivisch sind nach dem bekannten Satze, dass die Punkte einer Raumcurve dritter Ordnung aus zwei ihrer Sekanten durch projectivische Ebenenbüschel projicirt werden. Die Gerade rr' und die beiden Ebenen b und b' erzeugen also bei der Bewegung drei unter sich projectivische Gebilde.

Die beiden von b und b' beschriebenen projectivischen Ebenenbüschel haben aber die Ebene $\overline{p_1 p_2 p_3}$ und deshalb noch eine andere β entsprechend gemeinsam. Die Ebene β wird nun von dem ihr entsprechenden Strahle der Regelschaar G' in dem gesuchten Punkte p_4 geschnitten.

2) Die beiden Sätze:

Zwei Raumcurven R und R' dritter Ordnung, welche einen Punkt p_1 und eine Regelschaar G gemein haben, schneiden sich in einem oder in drei weiteren Punkten; und:

Zwei Raumcurven R und R', welche eine Regelschaar G und zwei Punkte p_1 und p_2 gemeinsam haben, schneiden sich in keinem oder in zwei weiteren Punkten;

werden gerade so bewiesen. Die Kegel K und K' haben in diesen Fällen bezüglich einen (die durch p_1 gehende Erzeugende A von G) oder zwei ($p_1 p_2$ und A) gemeinsame Strahlen. Die übrigen Schnittlinien derselben enthalten gemeinsame Punkte von R und R'.

3) Zwei Raumcurven R_1 und R_2, welche 4 Punkte $p_1\, p_2\, p_3\, p_4$ und eine Sekante A gemeinsam haben, fallen zusammen oder sie haben eine Regelschaar G gemeinsam.

Man projicire R und R' aus p_1 durch die Kegel K und K' zweiter Ordnung. K und K' haben die drei Strahlen $\overline{p_1 p_2}$, $\overline{p_1 p_3}$, $\overline{p_1 p_4}$ gemeinsam und schneiden sich demnach noch in einem vierten Strahle B. Der Strahl B ist eine gemeinsame Sekante von R_1 und R_2 und enthält ausser p_1 entweder einen gemeinsamen Punkt p_5 von R_1 und R_2 oder zwei getrennte Punkte r und s dieser Curven. Im ersten Falle haben R und R' 5 Punkte und eine Sekante gemeinsam und fallen daher zusammen*). Im zweiten aber haben sie diejenige Regel-

*) Siehe z. B.: Reye, Vorlesungen II, pag. 81.

schaar gemeinsam, welche durch die Strahlen A und B und die Punkte p_1, p_2, p_3 bestimmt ist.

4) Bekannter Weise schneiden sich zwei Flächen zweiter Ordnung, welche eine Gerade gemeinsam haben, in einer Raumcurve dritter Ordnung, von welcher diese Gerade Sekante ist.*)

Umgekehrt haben zwei Flächen zweiter Ordnung, welche sich in einer Raumcurve dritter Ordnung schneiden, noch eine Gerade gemeinsam, welche eine Sekante dieser Raumcurve ist.**)

Die Construction dieser Geraden, welche zugleich den Beweis des zweiten Satzes enthält, soll wegen ihrer Verwendung im Folgenden hier erörtert werden:

G und G' seien die beiden Regelschaaren der Flächen F und F'', welche aus Sekanten von R bestehen. Durch die Punkte p und r von R sollen bezüglich die Strahlen $\pi\pi'$ und $\varrho\varrho'$ von G und G' gehen. Man lege nun durch einen weitern Punkt s von R die Linien σ und σ', welche bezüglich π, ϱ und π', ϱ' schneiden. Durch einen andern Punkt t von R erhält man ebenso die Geraden τ und τ'. Die Ebenen $(\sigma\tau)$ und $(\sigma'\tau')$ schneiden sich in dem gesuchten gemeinschaftlichen Strahle von F und F'', welcher zugleich Sekante von R ist. Der Beweis für die Construction und die letzte Behauptung liegt darin, dass σ, τ und σ', τ' zwei Paare entsprechender Strahlen in den collinearen Bündeln sind, durch welche R aus s und t projicirt wird. $\overline{\sigma\tau}$ und $\overline{\sigma'\tau'}$ sind entsprechende Ebenen dieser Bündel und schneiden sich in einer Sekante von R. Dieselbe ist sowohl der Regelschaar G angehörig, welche durch die den beiden collinearen Bündeln angehörigen projectivischen Ebenenbüschel mit den Achsen σ und τ erzeugt wird, als auch der andern G', welche auf dieselbe Weise aus den Ebenenbüscheln σ' und τ' entsteht.

5) Unter Voraussetzung des Satzes:

„Alle Flächen zweiter Ordnung, welche 7 Punkte $p_1\, p_2 \ldots p_7$ gemein haben, schneiden sich noch in einem achten Punkte p_8"

soll dieser achte Punkt construirt werden.

Man denke sich die Regelschaar G construirt, welche die Geraden $\overline{p_1 p_2}$, $\overline{p_6 p_7}$ und die Punkte p_3, p_4, p_5 enthält, sowie die andere H, welche durch die Geraden $\overline{p_1 p_2}$, $\overline{p_4 p_5}$ und die Punkte p_3, p_6, p_7 bestimmt ist. Diese beiden Regelschaaren schneiden sich in einer Raumcurve R dritter Ordnung, welche $\overline{p_1 p_2}$ zur Sekante hat (siehe §. 1. Nr. 4.) und durch die Punkte $p_3\, p_4\, p_5\, p_6\, p_7$ geht, welche Elemente die Curve auch vollständig bestimmen.

Construirt man nun noch eine dritte Regelschaar J, welche die

*) Reye, Vorlesungen II, pag. 74.

**) Reye, Vorlesungen II, pag. 82.

Strahlen $\overline{p_3 p_4}$, $\overline{p_6 p_7}$ enthält und durch die Punkte p_1, p_2, p_5 geht, so schneiden sich H und J in einer Raumcurve R' dritter Ordnung, welche $\overline{p_6 p_7}$ als Sekante hat und durch die Punkte $p_1\, p_2\, p_3\, p_4\, p_5$ geht. Die Curven R und R' haben die Regelschaar H gemein und ausserdem noch die 3 Punkte p_3, p_4, p_5. Sie haben also noch einen weitern Punkt gemein, welcher offenbar der gesuchte achte gemeinschaftliche Punkt p_8 der Regelschaaren G, H, J ist und nach §. 1, 1 construirt werden kann.

6) Wenn eine Raumcurve R dritter Ordnung 7 Punkte einer geradlinigen Fläche F zweiter Ordnung enthält, so ist sie ganz auf dieser Fläche gelegen.*)

Um diesen Satz zu beweisen, betrachten wir zunächst die Gesammtheit der Flächen F, welche durch 7 beliebige Punkte $p_1\, p_2 \ldots p_7$ gehen.

Fügen wir noch die Bedingung hinzu, dass F eine durch p_7 gehende Gerade A enthalten müsse, so gelangen wir durch Bewegung von A um p_7 zu allen geradlinigen Flächen zweiter Ordnung, welche die 7 Punkte enthalten.

Denkt man sich F gefunden, so muss diejenige Regelschaar dieser Fläche, zu welcher A gehört, aus Sekanten der beiden Raumcurven $R_1\, R_2$ dritter Ordnung bestehen, welche durch A als Sekante und bezüglich durch $p_1\, p_2 \ldots p_5$ oder $p_2\, p_3 \ldots p_6$ bestimmt sind. (Vergleiche unten §. 2, 3.). Mehrere Flächen, welche den angegebenen Bedingungen genügen, sind also nur dann möglich, wenn R_1 und R_2 zusammenfallen, das heisst, wenn A die durch p_7 gehende Sekante derjenigen Raumcurve dritter Ordnung ist, welche durch die 6 Punkte $p_1\, p_2 \ldots p_6$ geht und durch dieselben bestimmt ist. Daher der Satz:

Durch 7 Punkte und eine durch einen dieser Punkte gezogene Gerade ist eine einzige Fläche zweiter Ordnung bestimmt, wenn nicht diese Gerade die durch diesen Punkt gehende Sekante der Raumcurve dritter Ordnung ist, welche durch die übrigen 6 Punkte bestimmt wird.

Liegen die 7 Punkte auf einer Raumcurve R dritter Ordnung, so gehen durch einen dieser Punkte unendlich viele Sekanten von R, die einen Kegel bilden, also:

Durch 7 auf einer Raumcurve dritter Ordnung gelegene Punkte und eine durch einen dieser Punkte gehende Gerade ist eine einzige geradlinige Fläche zweiter Ordnung bestimmt, wenn nicht jene Gerade eine Seite des Kegels ist, durch welchen R aus dem fraglichen Punkte projicirt wird.

---

*) Chasles, Comptes rendus etc. 1857, pag. 192. Nr. 15. Ohne Beweis.

Lässt man nun unter der letztern Annahme A sich um p_7 drehen, so erhält man natürlich alle durch $p_1 p_2 \ldots p_7$ gehende Flächen F. Ist 1) A keine Sekante von R, so kann man die (einzige) Fläche F, welche durch $p_1 p_2 \ldots p_7$ und A geht, wie folgt finden. R wird aus p_7 und p_6 z. B. durch collineare Strahlenbündel S, S' projicirt. Dem Strahl A in S entspricht ein Strahl A' in S'. Die Geraden A und A' sind nun die Axen zweier projectivischen Ebenenbüschel, welche eine Regelschaar erzeugen, welche aus Sekanten von R besteht und die eine Regelschaar der gesuchten Fläche F bildet.

Ist 2) A Sekante von R, so gehen durch $p_1 \ldots p_6$ und A unendlich viele Flächen F, die alle nach §. 1, 4, pag. 409 diejenige ihrer beiden Regelschaaren, von welcher A ein Strahl ist, mit R gemein haben. Damit ist der Satz 6) bewiesen und zugleich der folgende:

Eine Raumcurve dritter Ordnung hat mit einer geradlinigen Fläche zweiter Ordnung höchstens sechs Punkte gemein, wenn sie nicht in dieselbe hinein fällt.*)

7) Zwei Raumcurven dritter Ordnung R_1 und R_2, welche 5 Punkte gemein haben und nicht zusammenfallen, liegen auf einer Fläche zweiter Ordnung.**)

r und s seien zwei weitere Punkte von R_1. Durch dieselben gehen zwei Sekanten ϱ und σ von R_2. Dieselben bestimmen eine Regelschaar G_2, welche aus Sekanten von R_2 besteht. R_1 hat mit G_2 7 Punkte gemein und ist daher ganz auf G_2 gelegen. Jeder Strahl von G_2 hat aber nur einen einzigen Punkt mit R_1 gemein. Auf gleiche Weise erhält man eine Regelschaar G, welche aus Sekanten von R_1 besteht und deren Strahlen je einen Punkt von R_2 enthalten. Die Regelschaaren G_1 und G_2 müssen aber der nämlichen geradlinigen Fläche zweiter Ordnung angehören, weil sonst G_1 und G_2 einen Strahl gemein hätten, welcher sowohl von R_1 als auch von R_2 Sekante wäre, was nur dadurch möglich ist, dass R_1 und R_2 zusammenfallen.

8) p sei ein Punkt einer Raumcurve R dritter Ordnung $\varkappa$, ein Strahl des Kegels K, durch welchen R aus p projicirt wird und y ein durch p gehender, nicht in K gelegener Strahl. Durch jede Gerade y kann man bekanntlich nur eine Regelschaar legen, welche R enthält. Durch p geht dann ein Leitstrahl $\varkappa$ jener Regelschaar, welcher Sekante von R ist.

Durch jede Gerade $\varkappa$ dagegen kann man unendlich viele Regelschaaren legen, welche die Curve R enthalten, und in jeder solchen geht durch p ein Leitstrahl y, welcher nur den Punkt p von R enthält. Zu jeder Linie y gehört auf diese Weise eine Linie $\varkappa$, aber zu

*) Chasles, Comptes rendus. 1857. pag. 192, Nr. 15. Ohne Beweis.

**) Ebenda pag. 194, Nr. 30.

jeder Linie $\varkappa$ unendlich viele y, die, wie jetzt gezeigt werden soll, in einer Ebene liegen. p' sei ein zweiter Punkt von R und $\varkappa'$ ein Strahl des zu p' gehörigen Kegels H'. Durch H und H' geht eine einzige Regelschaar, welche aus Sekanten von R besteht, und man erhält alle solche durch K gehende Regelschaaren, wenn man $\varkappa'$ den Kegel K' beschreiben lässt. y' sei jeweils der durch p' gehende Leitstrahl der durch $x x'$ bestimmten Regelschaar. Dieser Strahl y' muss fortwährend $\varkappa$ schneiden und beschreibt die Ebene $(p'\varkappa)$. Der durch p gehende Leitstrahl y der Regelschaar $(x x')$ muss nun auch eine Ebene beschreiben, denn man weiss, dass y und y_1 entsprechende Strahlen der beiden collinearen Strahlenbündel mit den Mittelpunkten p und p' sind, welche R erzeugen.

Die Ebene $p'\varkappa$ enthält den Strahl $p'p$ und den andern $p'p''$, welcher nach dem zweiten auf R gelegenen Punkte p'' von x geht. Die von y beschriebene Ebene muss daher diejenigen Strahlen enthalten, welche in dem Strahlenbündel p jenen entsprechen, das heisst die Tangente an R in p und den Strahl $\varkappa$. Daher kann man den folgenden Satz aussprechen:

Legt man durch die Tangente in p an die Curve R eine Ebene, so schneidet dieselbe den Kegel K, in welchem R aus p projicirt wird, noch in einem zweiten Strahle $\varkappa$. Ein Strahl y des Strahlenbüschels, welches in dieser Ebene liegt und p zum Mittelpunkte hat, bestimmt eine Regelschaar, welche durch R geht und $\varkappa$ zum Leitstrahl hat. Beschreibt y den Strahlbüschel, so bewegen sich die Leitstrahlen der Regelschaar in den andern Punkten p' von R auf den Kegeln K' und die Strahlen derselben sind dadurch projectivisch auf die Strahlen y bezogen.

Fällt y mit der Tangente oder $\varkappa$ zusammen, so erhält man die 2. Kegel, durch welche R aus p und p'' projicirt wird.

Man erhält aus dem Vorhergehenden den allerdings an sich schon evidenten Satz:

Legt man geradlinige Flächen zweiter Ordnung durch eine Raumcurve dritter Ordnung, so enthalten die Tangentenebenen derselben in Punkten der Curve feste Linien, die Tangenten der Curve.

Speciell:

Legt man durch fünf Punkte und eine Gerade alle möglichen geradlinigen Flächen zweiter Ordnung, so haben dieselben zugleich zwei feste Tangentenebenen in denjenigen Punkten, in welchen die durch jene 6 Elemente bestimmte Raumcurve dritter Ordnung die Gerade schneidet.

Diese Tangentenebenen gehen nämlich durch die Gerade selbst und bezüglich durch die Tangenten der Raumcurve in jenen Schnittpunkten.

§. 2.

Axen von Ebenenbüscheln, in denen Ebenen, welche durch feste Punkte gehen, gegebene Doppelschnittverhältnisse haben.

1) R und R' seien zwei Raumcurven dritter Ordnung, welche 4 Punkte $p_1\, p_2\, p_3\, p_4$ und eine Gerade A als Sekante gemein haben.

Die beiden Curven haben dann eine ganze Regelschaar gemeinsam (§. 1, 3) und bestimmen also einen Strahlencomplex zweiter Ordnung*) von dem, wie sehr leicht zu sehen ist, $p_1\, p_2\, p_3\, p_4$ Hauptpunkte sind. Dieser Strahlencomplex ist aber durch die 4 Punkte und den einen Ordnungsstrahl A bestimmt, und es müssen deshalb alle durch $p_1\, p_2\, p_3\, p_4$ und A gelegten Raumcurven dritter Ordnung Ordnungscurven des Complexes sein. Der Ordnungskegel des Complexes in einem beliebigen Punkte p ist derjenige, durch welchen die Punkte der durch $p\, p_1\, p_2\, p_3\, p_4$ und A bestimmten Raumcurve dritter Ordnung aus p projicirt werden.

Der Strahlencomplex ist also der Ort aller Sekanten von denjenigen Raumcurven dritter Ordnung, welche durch $p_1\, p_2\, p_3\, p_4$ und A gelegt werden können.

Durch 4 Punkte $p_1\, p_2\, p_3\, p_4$ und zwei Gerade A und B als Sekanten kann nur dann eine Raumcurve dritter Ordnung gelegt werden, wenn jede der Geraden dem durch die andere Gerade als Ordnungsstrahl und die vier Punkte als Hauptpunkte bestimmten Complexe angehört.

Dann sind aber auch unendlich viele solche Curven durch die 6 Elemente bestimmt; legt man nämlich eine Raumcurve dritter Ordnung durch $p_1\, p_2\, p_3\, p_4$ A und einen Punkt p von B, so ist B von selbst Sekante der Curve. Je zwei dieser Curven haben eine Regelschaar gemein, welche durch $p_1\, p_2\, p_3\, p_4$ geht und A und B zu Erzeugenden hat.

Der Strahlencomplex kann also auch als Ort der Strahlen aller Regelschaaren betrachtet werden, welche durch $p_1\, p_2\, p_3\, p_4$ gehen und die Gerade A unter ihren Strahlen enthalten, und man kann auch sagen, durch $p_1\, p_2\, p_3\, p_4$ A und B können dann Raumcurven dritter Ordnung gelegt werden, wenn diese Elemente auf einer Regelschaar liegen**).

Da nun je zwei Strahlen A, B des Complexes mit $p_1\, p_2\, p_3\, p_4$ in unendlich vielen Raumcurven dritter Ordnung (oder in einem Hyper-

*) Ueber diese Strahlencomplexe siehe Reye Vorträge II. pag. 117. Die darauf bezüglichen Ausdrücke im Folgenden sind hier wie dort im gleichen Sinne zu verstehen.

**) Cremona, Crelle, Bd. 60.

boloide) liegen und deshalb $p_1 p_2 p_3 p_4$ aus A und B durch projectivische Ebenenbüschel projicirt werden, so gilt der Satz:

Alle Linien A, welche so gelegen sind, dass die Ebenen (Ap_1) (Ap_2) (Ap_3) (Ap_4) ein gegebenes Doppelverhältniss haben, bilden einen Strahlencomplex zweiter Ordnung, von welchem $p_1 p_2 p_3 p_4$ Hauptpunkte sind.

2) Wenn fünf Punkte $p_1 p_2 \dots p_5$ gegeben sind, so kann man nach dem Orte der Geraden A fragen, welche so liegen, dass das Büschel $A\,(p_1 p_2 \dots p_5)$ der fünf durch jene Punkte und A gelegten Ebenen einem gegebenen Wurfe, zum Beispiel dem der fünf Punkte $\pi_1\pi_2\pi_3\pi_4\pi_5$ einer Geraden projectivisch ist*).

Es ist zunächst leicht zu sehen, dass durch einen Punkt P des Raumes nur eine einzige Gerade A gehen kann. Zieht man nämlich noch die Linien $\overline{Pp_1}$, $\overline{Pp_2}$, .., $\overline{Pp_5}$ und schneidet alle 6 Gerade durch eine Ebene E in den Punkten $\varkappa$, $\varkappa_1 \dots \varkappa_5$, so muss auch der Wurf $\varkappa\,(\varkappa_1 \dots \varkappa_5)$ dem gegebenen Wurfe projectivisch sein. Der Punkt $\varkappa$ wird nun nach bekannter Weise eindeutig als vierter Schnittpunkt zweier Kegelschnitte construirt, und damit ist auch die durch p gehende Gerade A bestimmt. Man sieht nun leicht, dass alle Sekanten der durch $p_1 \dots p_5$ und A bestimmten Raumcurve dritter Ordnung dieselbe Eigenschaft haben. Diese Strahlen sind aber auch die einzigen, weil je durch einen beliebigen, nicht in der Curve gelegenen Punkt P nur ein Strahl A gelegt werden kann und derselbe daher mit der durch P gehenden Sekante der Curve zusammenfallen muss.

3) Es seien 6 Punkte $p_1 p_2 \dots p_6$ gegeben. Man soll eine Gerade A finden, so dass der Wurf $A\,(p_1\, p_2 \dots p_6)$ einem gegebenen Wurfe, z. B. dem der 6 Punkte $\pi_1\ \pi_2 \dots \pi_6$ einer Punktreihe projectivisch sei. Man construire nach 2) die Raumcurve dritter Ordnung R, deren Sekanten A der Bedingung

$$A\,(p_1\, p_2\, p_3\, p_4\, p_5) \text{ projectivisch } \pi_1\ \pi_2\ \pi_3\ \pi_4\ \pi_5$$

genügen, und die andere Raumcurve R', deren Sekanten A' der Bedingung

$$A'\,(p_2\, p_3\, p_4\, p_5\, p_6) \text{ projectivisch } \pi_2\ \pi_3\ \pi_4\ \pi_5\ \pi_6$$

genügen.

R und R' haben eine Regelschaar gemein, denn sie haben die 4 Punkte $p_2\, p_3\, p_4\, p_5$ gemein und noch z. B. die durch p_1 gehende Sekante von R', weil dieselbe nach 1) mit allen durch p_1 gehenden Sekanten von R dem Kegel der durch p_1 gehenden Strahlen B angehört, für welche

$$B\,(p_2\, p_3\, p_4\, p_5) \text{ projectivisch } \pi_2\ \pi_3\ \pi_4\ \pi_5.$$

*) Den Ausdruck Wurf braucht Staudt für eine endliche Anzahl von Elementen einer Punktreihe, eines Strahlbüschels u. s. w.

Die Strahlen A dieser Regelschaar sind nun die gesuchten, denn sie haben offenbar die Eigenschaft

$$A\,(p_1\,p_2\,p_3\,p_4\,p_5\,p_6) \text{ projectivisch } \pi_1\,\pi_2\,\pi_3\,\pi_4\,\pi_5\,\pi_6.$$

Nur wenn der sechste Punkt auf der Raumcurve R gelegen ist, genügen alle Sekanten derselben der Bedingung.

4) Es seien 7 Punkte gegeben. Man soll Linien A von solcher Lage suchen, dass der Wurf $A\,(p_1\,p_2\ldots p_6\,p_7)$ projectivisch ist dem Wurfe $\pi_1\,\pi_2\ldots\pi_6\,\pi_7$ von sieben Elementen eines Elementargebildes.

Man denke sich zuerst die Regelschaar G construirt, welche alle Geraden A enthält, die der Bedingung

$$A\,(p_1\,p_2\ldots p_6) \text{ projectivisch } (\pi_1\,\pi_2\ldots\pi_6)$$

und die Regelschaar G', deren Strahlen A' die Eigenschaften haben dass:

$$A'\,(p_2\,p_3\ldots p_7) \text{ projectivisch } (\pi_2\,\pi_3\ldots\pi_7),$$

sowie auch die Raumcurve R dritter Ordnung, für deren Sekanten B:

$$B\,(p_2\,p_3\,p_4\,p_5\,p_6) \text{ projectivisch } (\pi_2\,\pi_3\,\pi_4\,\pi_5\,\pi_6).$$

Es ist nun aus dem Frühern klar, dass die Strahlen der beiden Regelschaaren zugleich Sekanten von R sind. Sie schneiden sich also in dieser Raumcurve und haben noch einen Strahl A gemein, welcher nach §. 1, 5) construirt wird.

Diese einzige Gerade hat nun die Eigenschaft, dass:

$$A\,(p_1\,p_2\ldots p_7) \text{ projectivisch } \pi_1\,\pi_2\ldots\pi_7.$$

5) Um sogleich eine Anwendung von diesem letzten Satze zu machen, so soll eine Fläche dritter Ordnung durch die Durchschnittscurve R zweier Flächen zweiter Ordnung und sieben weitere Punkte $p_1\,p_2\ldots p_7$ gelegt werden.

Man lege durch R und die sieben Punkte sieben Flächen $F_1 F_2 \ldots F_7$ zweiter Ordnung und bestimme die Gerade A, so dass:

$$A\,(p_1\,p_2\ldots p_7) \text{ projectivisch } F_1\,F_2\ldots F_7.$$

Die beiden projectivischen Büschel, das Flächenbüschel zweiter Ordnung und das Ebenenbüschel mit der Achse A, erzeugen die gesuchte Fläche.

§. 3.

Auf einem Hyperboloide sind zwei Raumcurven dritter Ordnung gegeben, welche die Strahlen der nämlichen Regelschaar zu Sekanten haben. Man soll die vier Durchschnittspunkte derselben suchen *).

Diese Aufgabe ist als gelöst zu betrachten, wenn sie auf die an-

*) Aufgabe, gestellt von Chasles comptes rendus 1857, pag. 194. No. 32.

dere: „Die Durchschnittspunkte zweier Kegelschnitte zu finden“ zurückgeführt ist.

Die eine Raumcurve R wird aus einem ihrer Punkte p durch einen Kegel zweiter Ordnung projicirt, welcher von einer beliebigen Ebene A in einem Kegelschnitte K geschnitten wird. Die andere Raumcurve R' wird aus p durch eine Kegelfläche dritter Ordnung projicirt, welche in dem durch p gehenden Strahle der aus Sekanten von R und R' bestehenden Regelschaar sich selbst schneidet. Die Ebene A schneidet diese Kegelfläche in einer Curve L dritter Ordnung mit einem Doppelpunkte, durch welchen auch der Kegelschnitt K geht.

Die Durchschnittspunkte von L und K, welche nicht in den Doppelpunkt von L fallen, sind nun die Projectionen der gesuchten Durchschnittspunkte von R und R' aus p auf die Ebene A.

Zur Aufsuchung dieser Punkte dienen die folgenden Erinnerungen und Betrachtungen.

Man nennt bekanntlich eine Punktreihe P mit einer Involution J projectivisch, wenn P projectivisch ist zu der Punktreihe der vierten harmonischen Punkte, welche durch einen festen Punkt auf dem Träger der Involution J und die Punktgruppen von J selbst bestimmt ist.

Man nennt ebenso zwei Involutionen J und J' projectivisch, wenn die auf obige Weise für die beiden Involutionen hergestellten Reihen von harmonischen Punkten unter sich projectivisch sind.

Ist a ein Punkt ausserhalb eines Kegelschnitts K und b ein Punkt desselben, so bilden die Geraden bp und bq, welche nach den Durchschnittspunkten p und q eines durch a gehenden Strahles α gezogen sind, eine mit dem von α beschriebenen Strahlbüschel projectivische Involution. Der vierte harmonische Strahl β zu ba, bp und bq trifft nämlich den Strahl α auf der Polare von a und die von α und β beschriebenen Strahlbüschel sind deshalb projectivisch.

Der Strahlbüschel der Strahlen α und die damit projectivische Involution der Strahlenpaare bp, bq haben aber die besondere Lage, dass der Strahl ba ein Strahl des Strahlenpaares in der Involution ist, welches dem Strahle ab des Büschels entspricht.

Umgekehrt: Haben zwei projectivische Büschel, ein einfaches und ein involutorisches, die obige Lage, so schneiden sich die entsprechenden Strahlen auf einem Kegelschnitte, welcher durch den Mittelpunkt des involutorischen Strahlbüschels geht.

Zwei projectivische Strahlbüschel, ein einfaches und ein involutorisches, sind auf einander bezogen, wenn den fünf Strahlen a (α_1, α_2, α_3, α_4, α_5) des ersten fünf Strahlen b (β_1, β_2, β_3, β_4, β_5) entsprechen sollen (eigentlich fünf Strahlenpaare, zu denen die fünf Strahlen $b\beta_1$ $b\beta_2$ . . $b\beta_5$ gehören).

Dreht man nämlich die beiden Gebilde um ihre Mittelpunkte a

und b, bis die Strahlen $a\alpha_1$ und $b\beta_1$ in die Gerade ab fallen, so schneiden sich die übrigen entsprechenden Strahlen in 4 Punkten, welche mit b auf einem Kegelschnitte liegen, welcher unmittelbar zur Construction der entsprechenden Elemente beider Gebilde führt.

Eine Curve dritter Ordnung mit einem festen Doppelpunkte b ist bekanntlich durch 6 weitere Punkte $a\ p_1\ p_2 \ldots p_5$ bestimmt*).

Man kann dieselbe construiren, indem man a und b bezüglich zu Mittelpunkten eines einfachen und eines involutorischen Strahlbüschels macht, in denen sich die Strahlen $ap_1\ bp_1$, $ap_2\ bp_2$, ..., $ap_5\ bp_5$ entsprechen.

Umgekehrt: Hat man eine Curve dritter Ordnung mit einem Doppelpunkte b, und zieht man durch einen andern Punkt a der Curve Strahlen α, welche dieselbe noch in den Punkten $p\ q$ schneiden, so bilden die Strahlen bp, bq ein Strahlenpaar einer mit dem durch die Bewegung von α um a entstehenden Strahlbüschel projectivischen Involution.

Kehren wir nun zu unserer Aufgabe zurück, die übrigen Durchschnittspunkte der Curve dritter Ordnung L mit dem Doppelpunkte b und des durch b gehenden Kegelschnittes K zu finden.

Sei a ein weiterer Punkt der Curve L. Eine durch a gehende Gerade α schneide die Curve dritter Ordnung in den Punkten p und q, und den Kegelschnitt K in den Punkten r und s. Die Strahlenpaare $bp\ bq$ und $br\ bs$ gehören nun zu zwei involutorischen Strahlbüscheln mit dem Mittelpunkte b, welche projectivisch auf einander bezogen sind, weil sie beide projectivisch sind zu dem Büschel der Strahlen α. Die vier durch b gehenden Geraden, in welchen entsprechende Geraden der beiden Involutionen zusammenfallen, sind offenbar nach den vier gesuchten Durchschnittspunkten von K und L gerichtet.

Die Aufgabe, diese vier Strahlen, oder was das Gleiche ist, die vier Punkte zu finden, in welchen entsprechende Punkte zweier auf derselben Geraden G befindlicher projectivischer Involutionen J und J' zusammenfallen, hat Chasles in den Comptes rendus (1855, pag. 677) behandelt. Sie ist auch leicht in folgender Weise auszuführen.

Man nehme in einer durch G gehenden Ebene 3 feste Punkte $a\ b\ c$ und bestimme den vierten Grundpunkt d des Kegelschnittbüschels (a, b, c, d) und den vierten Grundpunkt d' des andern Büschels (a, b, c, d'), welche bezüglich auf der Geraden G die beiden Involutionen J und J' erzeugen. Die beiden durch die entsprechenden Gruppen der Involutionen J und J' projectivisch auf einander

*) Siehe z. B. Cremona, Ebene Curven pag. 46.

bezogenen Kegelschnittbüschel erzeugen eine Curve M vierter Ordnung mit den Doppelpunkten $a\ b\ c$, deren Durchschnittspunkte mit G die gesuchten Punkte sind.

Setzt man nun zwischen zwei ebenen Systemen Σ und Σ_1 eine geometrische Verwandtschaft zweiten Grades*) fest, so dass $a\,b\,c$ die Hauptpunkte im System Σ sind, so entspricht der Curve M in Σ ein Kegelschnitt in Σ_1 und der Geraden G in Σ auch ein Kegelschnitt in Σ_1 (welcher durch die drei Hauptpunkte dieses Systems geht). Den vier Durchschnittspunkten der beiden Kegelschnitte entsprechen in Σ die gesuchten Durchschnittspunkte von M und G.

Hiermit ist die ursprünglich gestellte Aufgabe gelöst und auch die folgenden, welche auf dieselbe zurückgeführt werden können.

1) Die vier Punkte zu finden, in welchen entsprechende Punkte zweier collinearer räumlicher Systeme zusammenfallen.

Die beiden Systeme bestimmen nämlich einen Strahlencomplex. Je zwei Ordnungscurven (Raumcurven dritter Ordnung) des Complexes haben eine Regelschaar gemein und schneiden sich in den vier gesuchten Punkten.

2) Es ist ein Flächenbüschel zweiter Ordnung gegeben. Man soll die Mittelpunkte der vier in diesem Büschel enthaltenen Kegel finden**).

3) Es seien vier projectivische Ebenenbüschel mit den Achsen $A_1\ A_2\ A_3\ A_4$ gegeben. Man soll diejenigen Punkte finden, in welchen entsprechende Ebenen der vier Büschel sich schneiden***).

Die Büschel $A_1\,A_2\,A_3$ einerseits und $A_1\,A_2\,A_4$ andererseits erzeugen zwei Raumcurven dritter Ordnung, welche die von den Büscheln $A_1\ A_2$ erzeugte Regelschaar gemein haben. Die Durchschnittspunkte der beiden Raumcurven sind die gesuchten.

§. 4.

Anwendungen der Constructionen in §. 2.

1) Es seien in einer Ebene E die Punkte a, b, c, q_1, q_2, ..., q_5 gegeben. Man soll ein Kegelschnittbüschel construiren, zu dessen festen Punkten $a\,b\,c$ gehören, während die fünf Kegelschnitte desselben, welche durch $q_1\ q_2\,..\,q_5$ gehen, einen Wurf bilden, welcher dem gegebenen Wurfe von 5 Elementen $\pi_1\ \pi_2\ ..\ \pi_5$ eines Elementargebildes projectivisch ist†).

*) Siehe z. B. Reye in Schlömilch's Zeitschrift f. Math. u. Phys. XI. p. 280.

**) Ueber die Zurückführung dieser Aufgabe siehe Reye, Vorträge etc. 16. Vortrag.

***) Siehe Cremona, Crelle Journal. Bd. 58. und Steiner, Systematische Entwickelung der Abhängigkeit etc. p. 298.

†) Auf diese Aufgabe führt die Construction der durch 9 Punkte bestimmten Curve dritter Ordnung. Siehe Haertenberger, Crelle's Journal. Bd. 58.

Auflösung. Man verbinde die acht Punkte mit einem ausserhalb E befindlichen Punkte m durch gerade Linien und construire ein Hyperboloid H, welches die Geraden ma mb enthält. Die Geraden mc mq_1 ... mq_5 mögen dasselbe in den Punkten $\varkappa$, p_1, p_2, .. p_5 treffen.

Man construire ferner die durch $\varkappa$ gehende Gerade A, welche so gelegen ist, dass der Wurf der 5 durch A und bezüglich die Punkte p_1 p_2 .. p_5 gehenden Ebenen dem gegebenen projectivisch ist.

Projicirt man nun die Kegelschnitte, in welchen H von den Ebenen des Büschels A geschnitten wird, aus m auf die Ebene E, so erhält man das verlangte Kegelschnittbüschel. Der vierte feste Punkt desselben ist die Projection des Punktes d, in welchem die Gerade A das Hyperboloid zum zweiten Male trifft.

Diese Construction wird nur dann unmöglich, wenn der Wurf π_1 π_2 .. π_5 durch ein Strahlbüschel von 5 Geraden gegeben ist, welche durch die 5 Punkte q_1 q_2 q_3 q_4 q_5 und einen der drei Punkte a, b, c gehen. Ist zum Beispiel c der Mittelpunkt dieses Strahlbüschels, so sieht man, dass in unserer Construction d mit m zusammenfallen muss, und somit durch Projection von m aus kein Kegelschnittbüschel, sondern wiederum das Strahlbüschel cq_1 cq_2 .. cq_5 erhalten wird.

2) Die Gesammtheit aller Raumcurven dritter Ordnung, welche auf einem Hyperboloid H gelegen sind, durch vier feste Punkte a, b, c, d auf demselben gehen und die Strahlen der einen Regelschaar G von H zu Sekanten haben, soll ein Büschel von Raumcurven dritter Ordnung genannt werden. Durch einen weitern, auf H angenommenen Punkt geht nur eine einzige Curve des Büschels. Projicirt man die Curven aus einem der festen Punkte, z. B. aus d auf eine Ebene E, so erhält man ein Kegelschnittbüschel. Die festen Grundpunkte desselben sind die Projectionen von a, b, c auf E und der Schnitt δ der durch d gehenden Erzeugenden von G mit derselben Ebene.

Man sieht hieraus, dass man das Büschel von Raumcurven dritter Ordnung auf irgend ein Elementargebilde projectivisch beziehen kann.

Projicirt man aus d auch die beiden Regelschaaren G und G' auf die Ebene E, so entstehen zwei Strahlbüschel. Das der Regelschaar G entsprechende Strahlbüschel hat seinen Mittelpunkt in dem Durchnitt δ' von E und dem Strahl der Regelschaar G', welcher durch d geht. Das andere Strahlbüschel dagegen hat seinen Mittelpunkt in δ, dem vierten Grundpunkte des Kegelschnittbüschels.

Daraus ergiebt sich mit Beachtung des Vorigen:

a) Wenn a, b, c gegeben sind, kann man den vierten Grundpunkt d des Büschels von Curven dritter Ordnung auf eine einzige Art so bestimmen, dass 5 durch 5 gegebene Punkte $p_1 p_2 \ldots p_5$ des Hyperboloids H gehende Curven des Büschels einen Wurf bilden, welcher projectivisch ist mit dem Wurfe der 5 durch $p_1 p_2 \ldots p_5$ gehenden Strahlen von G.

b) Wenn man aber die Strahlen von G' projectivisch auf die Curven des Büschels beziehen will, so ist die analoge Construction nicht möglich.

Bezieht man die Curven des Büschels projectivisch auf die Strahlen derjenigen Regelschaar G von H, welche nur Sekanten der Raumcurven enthält, so ist der geometrische Ort des Durchschnitts entsprechender Elemente eine Raumcurve S vierter Ordnung von der ersten Species, wie nun gezeigt werden soll.

σ sei ein Strahl der Regelschaar G. Durch diesen Strahl, die vier Punkte a, b, c, d und einen weitern, ausserhalb des Hyperboloids H angenommenen Punkt m ist ein Büschel von Hyperboloiden J bestimmt. Die Flächen desselben schneiden sich mit H in den verschiedenen Curven des Büschels $(a\,b\,c\,d)$. σ' sei sodann ein beliebiger Strahl der zweiten Regelschaar G' von H. Die Strahlen von G werden aus σ' durch die Ebenen E eines Ebenenbüschels projicirt. Das Büschel von Hyperboloiden J und das Büschel von Ebenen E sind nun projectivisch auf einander bezogen, wenn man zwei Elemente derselben entsprechend setzt, welche entsprechende Elemente des Curvenbüschels und der Regelschaar G in sich enthalten. Die entsprechenden Flächen beider Büschel schneiden sich auf einer Fläche dritter Ordnung F, welche mit H die sich schneidenden Geraden σ und σ' und die Raumcurve S gemein hat.

Durch besondere Wahl von m, σ und σ' kann man auch bewirken, dass die Fläche F in eine Ebene und eine Fläche zweiter Ordnung zerfällt, so dass S als Durchschnitt zweier Flächen zweiter Ordnung erscheint.

Zu diesem Zwecke nehme man zunächst m in der Ebene dreier Grundpunkte des Büschels, zum Beispiel in der Ebene abc an. Der Schnitt dieser Ebene mit H zusammen mit dem durch d gehenden Strahl δ' der Regelschaar G' repräsentirt auch eine dem Büschel angehörige Raumcurve dritter Ordnung. Demselben mag in der Regelschaar G der Strahl δ entsprechen. Lässt man nun an die Stelle von σ und σ' δ und δ' treten, so sieht man leicht, dass der Ebene $\delta\delta'$ des Ebenenbüschels eine Fläche J entspricht, welche in dieselbe Ebene und die Ebene abc zerfällt, womit sich die obige Behauptung erweist.

Die Curve S ist durch 8 auf H gegebene Punkte bestimmt. Soll dieselbe in diesem Falle durch ein Büschel von Raumcurven, welche die Strahlen von G zu Sekanten haben und die projectivisch darauf bezogene Regelschaar G erzeugt werden, so darf man drei von den gegebenen Punkten zu festen Grundpunkten des Büschels nehmen. Der vierte Grundpunkt ist dann eindeutig bestimmt, wie aus dem Frühern erhellt.

Bezieht man das Büschel von Raumcurven dritter Ordnung projectivisch auf die Strahlen der Regelschaar G', so erhält man als geometrischen Ort des Durchschnitts entsprechender Gebilde die Raumcurve S' vierter Ordnung und zweiter Species*).

Um dies zu zeigen, denke man sich das Büschel der Hyperboloide J, welche durch einen Strahl σ von G, die vier Grundpunkte a, b, c, d des Büschels von Raumcurven dritter Ordnung und einen weitern, nicht auf H liegenden Punkt gehen. Jede Curve des Büschels ist dann in einer Fläche des Flächenbüschels gelegen. Aus einem andern Strahle τ der Regelschaar G projiciren sich die Strahlen von G' in einem Ebenenbüschel. Dieses Ebenenbüschel ist nun auf jenes Flächenbüschel zweiter Ordnung projectivisch bezogen, wenn man zwei Elemente derselben entsprechend setzt, welche entsprechende Elemente des Curvenbüschels und der Regelschaar G' enthalten.

Die entsprechenden Flächen beider Büschel schneiden sich nun auf einer Fläche dritter Ordnung, welche mit H zwei sich nicht schneidende Gerade σ und τ und die fragliche Curve S' gemein hat.

Eine solche Curve ist durch 7 Punkte auf dem Hyperboloid bestimmt und wird dadurch construirt, dass man 4 derselben a, b, c, d zu Grundpunkten eines Büschels von Curven dritter Ordnung macht, und die Curven dieses Büschels, welche durch die drei übrigen Punkte gehen, denjenigen Strahlen von G' entsprechend setzt, welche dieselben Punkte enthalten.

3) In einer Ebene E seien neun Punkte $a\,b\,q_1\,q_2 \ldots q_7$ gegeben. Man verbinde a und b mit einem beliebigen, nicht in E gelegenen Punkte m und denke sich ein Hyperboloid H construirt, welchem die Geraden ma und mb angehören. Dasselbe werde von den Geraden $mp_1, mp_2, \ldots, mp_7$ in den 7 Punkten $p_1, p_2, \ldots, p_7$ geschnitten.

Es giebt nun nach §. 2, 3) nur eine einzige Gerade A, welche so gelegen ist, dass die Ebenen $Aq_1, Aq_2, \ldots, Aq_7$ einen Wurf mit einander bilden, welcher einem gegebenen Wurfe, z. B. von 7 gegebenen Punkten $\pi_1\,\pi_2 \ldots \pi_7$ einer Geraden, projectivisch ist.

Die Durchschnitte von H und den Ebenen des Büschels A liefern, wenn sie von m aus projicirt werden, einen Büschel von Kegeln zweiter Ordnung. Die vier gemeinsamen Seiten der Kegel dieses Büschels sind

*) Zuerst von Salmon behandelt. Siehe Salmon, Analytische Geometrie des Raumes, deutsch von W. Fiedler. II. pag. 108.

ma, *mb* und die nach den Schnittpunkten k und l von A und H gerichteten Geraden mk und ml.

Man sieht leicht, dass hiermit folgende Aufgabe gelöst ist.

Man soll ein Kegelschnittbüschel construiren, in welchem die durch 7 Punkte $p_1\, p_2 \ldots p_7$ gehenden Kegelschnitte einen mit dem Wurfe $\pi_1\, \pi_2 \ldots \pi_7$ projectivischen Wurf bilden, wenn zugleich zwei gegebene Punkte a und b Grundpunkte dieses Büschels sein sollen. Hierbei ist aber zu bemerken, dass, so oft der Wurf $\pi_1\, \pi_2 \ldots \pi_7$ durch die 7 Geraden $np_1\; np_2 \ldots np_7$, welche einen Punkt n der Ebene E mit $p_1 \ldots p_7$ verbinden, gegeben ist, man statt des gesuchten Kegelschnittbüschels wieder das Strahlbüschel $n\,(p_1\, p_2 \ldots p_7)$ erhält.

4) Man habe ein Hyperboloid H, dessen beide Regelschaaren mit G und G' bezeichnet werden mögen und auf diesem Hyperboloid ein Büschel von Raumcurven dritter Ordnung.

Die Regelschaar G soll diejenige sein, welche aus Sekanten der Curven besteht. Auf das Curvenbüschel beziehe man ein Ebenenbüschel, dessen Achse A dem Hyperboloid nicht angehört, projectivisch. Die einzelnen Ebenen des Büschels A schneiden H in Kegelschnitten, welche alle durch zwei feste Punkte, die Schnittpunkte von A und H gehen. Das so entstandene Kegelschnittbüschel auf H ist nun projectivisch auf den Büschel von Curven dritter Ordnung bezogen und die entsprechenden Curven der Büschel schneiden sich in Punkten einer auf H gelegenen Raumcurve fünfter Ordnung, welche folgende Eigenschaften hat:

Die Curve fünfter Ordnung schneidet die Strahlen von G in drei Punkten.

Auf jedem solchen Strahle erzeugen nämlich die Curvenbüschel zwei projectivische Punktreihen, eine einfache und eine involutorische. Die drei Punkte, in denen entsprechende Punkte der beiden Reihen auf einander fallen, sind die Schnittpunkte des Strahles mit der Curve fünfter Ordnung.

Die Curve fünfter Ordnung schneidet die Strahlen von G' in zwei Punkten, in welchen nämlich entsprechende Punkte der beiden durch die Curvenbüschel auf diesem Strahle erzeugten einfachen Punktreihen zusammenfallen.

Die Curve ist durch 11 ihrer Punkte $a\, b\, c\, d\, p_1\, p_2 \ldots p_7$ auf dem Hyperboloide bestimmt.

Um sie zu construiren, mache man $a\, b\, c\, d$ zu Grundpunkten eines Büschels von Curven dritter Ordnung. Die 7 durch $p_1\, p_2 \ldots p_7$ gehenden Curven desselben sollen $R_1\, R_2 \ldots R_7$ heissen. Ferner construire man nach §. 2, 3) eine Gerade A, welche die Eigenschaft hat, dass die Ebenen $Ap_1\; Ap_2 \ldots Ap_7$ einen Wurf bilden, welcher mit dem

Wurfe $R_1\ R_2 \ldots R_7$ projectivisch ist. Durch das Curvenbüschel und das projectivisch darauf bezogene Ebenenbüschel mit der Achse A wird die Curve erzeugt.

Von irgend einem ihrer Punkte p aus wird die Curve durch eine Kegelfläche vierter Ordnung mit einem Doppelstrahle projicirt (der Doppelstrahl ist der durch p gehende Strahl von G) und diese Kegelfläche wird von einer Ebene in einer Curve vierter Ordnung mit einem Doppelpunkte geschnitten. Die Construction dieser Curve ist also hiermit zugleich gegeben, dieselbe kann aber auch direct nach §. 4, 3) vorgenommen werden, wie folgt: $a\ b\ c\ d\ e\ p_1\ p_2 \ldots p_7$ seien 12 gegebene Punkte, durch welche die Curve gehen soll und zwar soll a ein Doppelpunkt derselben werden. Die Punkte $a\ b\ c\ d$ mache man zu Grundpunkten eines Kegelschnittbüschels. $K_1\ K_2 \ldots K_7$ seien die Kegelschnitte desselben, welche durch $p_1\ p_2 \ldots p_7$ gehen.

Construirt man nun ein zweites Kegelschnittbüschel, zu dessen Grundpunkten $a\,e$ gehören, so, dass die durch $p_1\ p_2 \ldots p_7$ gehenden Kegelschnitte desselben einen Wurf bilden, welcher mit dem Wurfe $K_1\ K_2 \ldots K_7$ projectivisch ist, so werden diese hierdurch projectivisch auf einander bezogenen Kegelschnittbüschel die Curve erzeugen.

Die Raumcurve selbst kann auf unendlich viel Weisen als partieller Schnitt des Hyperboloids H mit einer Fläche dritter Ordnung dargestellt werden, welche letztere mit dem Hyperboloid einen Strahl der Regelschaar G gemein hat.

Durch einen Strahl σ der Regelschaar G, die vier Grundpunkte a, b, c, d des Büschels von Raumcurven dritter Ordnung mit einem willkürlich angenommenen Punkte m ist ein Büschel von Hyperboloiden J bestimmt. Die einzelnen Flächen dieses Büschels schneiden das Hyperboloid H in den Raumcurven des Büschels (a, b, c, d). Jeder Raumcurve entspricht aber eine Ebene des Ebenenbüschels A. Dadurch sind die beiden Flächenbüschel projectivisch auf einander bezogen und erzeugen eine Fläche dritter Ordnung, welche H in der Raumcurve fünfter Ordnung schneidet.

Sur les réseaux de courbes et de surfaces algébriques,

par

E. de Jonquières, à Paris.

I. Steiner, dans son premier mémoire „sur la dépendance mutuelle de courbes algébriques“*), a consacré quelques alinéas à l'étude des propriétés du réseau spécial formé par les courbes polaires premières de tous les points d'un plan relativement à une courbe fixe tracée dans ce plan, et il a fait connaître notamment le nombre des courbes de ce réseau dont chacune est douée d'un point de rebroussement ou possède deux points doubles**).

L'illustre Géomètre obtenait ces résultats, en s'appuyant sur quelques propriétés des courbes polaires, concurremment avec les relations connues sous le nom de formules de Plücker***).

Plus récemment (22. février 1864), M. Cayley, abordant directement les deux questions que je viens d'énoncer, a démontré que, dans un réseau général d'ordre quelconque n, le nombre des courbes dont chacune possède un point de rebroussement est $12\,(n-1)\,(n-2)$, et énoncé que celles qui possèdent deux points doubles sont au nombre de

$$\tfrac{3}{2}\,(n-1)\,(n-2)\,(3n^2-3n-11).$$

*) Voir le Journal de Crelle, t. XLVII, p. 4.

**) Steiner a énoncé ces deux résultats sans démonstration. M. Clebsch a démontré le premier, dans un mémoire inséré au journal de M. Borchardt, en 1861, sous le titre Ueber Curven vierter Ordnung. L'année suivante, ils ont été démontrés géométriquement tous les deux, par M. Cremona dans son Introduzione ad una teoria delle curve piane, et par moi dans un mémoire inédit qui a concouru avec quelque succès pour le prix de mathématiques de l'Institut de France.

***) Puisque le nom de M. Plücker se présente sous ma plume, je ne veux pas laisser échapper l'occasion qui m'est offerte de payer un tribut de respect et de reconnaissance à la mémoire de ce profond géomètre, enlevé trop tôt à la science et à ses amis, au nombre desquels il voulait bien me compter.

L'illustre géomètre reconnait toutefois, en ce qui concerne le dernier résultat, qu'il n'a pas réussi à l'obtenir directement, mais seulement par voie d'induction*). J'ai donc pensé qu'il pourrait y avoir quelque intérêt à faire connaître comment je suis parvenu, de mon côté, à ce théorême.

La méthode dont j'ai fait usage a dejà été employée par moi dans quelques autres circonstances, notamment pour faire une investigation directe du nombre des plans tangents triples que possède en général une surface algébrique**). Elle est susceptible de recevoir encore d'autres applications analogues. Mais, avant d'entrer en matière, j'ai besoin de rappeler ou d'établir quelques-uns des principes fondamentaux de la théorie des réseaux.

II. Steiner a appelé réseau (et les géomètres ont adopté généralement cette heureuse expression) une famille de courbes planes ou de surfaces algébriques du même degré n, assujéties à passer par autant de points communs, moins deux, qu'il en faut pour déterminer une courbe ou une surface de ce degré, ou, ce qui revient au même, une famille de courbes ou de surfaces telles, qu'il n'en passe qu'une seule par deux points pris à volonté.

Trois courbes ou surfaces du réseau, choisies arbitrairement, mais n'ayant pas les mêmes points d'intersection, suffisent pour déterminer le réseau, dont l'équation générale, contenant deux paramètres variables λ, μ, peut s'écrire sous la forme

$$c + \lambda \cdot c' + \mu \cdot c'' = 0,$$

$c = 0$, $c' = 0$ et $c'' = 0$, étant les équations individuelles des trois courbes ou surfaces dont il s'agit.

Cette équation montre immédiatement qu'une courbe quelconque du réseau passe par les points d'intersection de la courbe $c'' = 0$ avec l'une des courbes du faisceau $c + \lambda \cdot c' = 0$ que les deux autres déterminent, puisque cette équation peut s'écrire ainsi:

$$(c + \lambda \cdot c') + \mu \cdot c'' = 0,$$

ce qui traduit algébriquement la proposition énoncée.

---

*) Memoir on the theory of involution, inséré dans les Transactions of the Cambridge philosophical society, t. XI, 1[er] partie, p. 32 et 37. Voir aussi Lessons introductory to the modern Higher algebra de M. G. Salmon, page 153.

Le présent article était déja sous presse, quand j'ai été informé que M. Cremona a démontré ces deux propositions, par une méthode qui lui est propre, dans les annales de Tortolini, t. VI, page 161. Je suis heureux de pouvoir réparer à temps mon oubli involontaire.

**) Nouvelles annales de mathématiques, t. III, 2[e] série, page 1.

On conclut de là, que tout réseau de surfaces algébriques, quand on le coupe par un plan arbitraire, donne lieu, sur ce plan, à un réseau de courbes du même degré, et que, réciproquement, tout réseau de courbes sur un plan peut être regardé comme provenant de l'intersection d'un réseau de surfaces du même dégré par ce plan.

La première de ces deux propositions est évidente; car deux points pris arbitrairement dans le plan suffisent pour compléter la détermination de l'une des courbes l'intersection, puisqu'ils complètent aussi la détermination de la surface du réseau d'où provient cette courbe individuelle.

Pour démontrer la proposition réciproque, choisissons arbitrairement les trois courbes c, c', c'', pour déterminer le réseau et, par chacune d'elles, faisons passer à volonté une surface du degré n; ce qui est possible, puisque le nombre des points qui déterminent la courbe est toujours moindre que celui des points qui déterminent la surface. Soient $s = 0$, $s' = 0$, $s'' = 0$, ces trois surfaces. Je dis que le réseau $s + \lambda . s' + \mu . s'' = 0$, coupé par le plan commun des courbes c, c', c'', donne lieu, sur ce plan, à un réseau qui n'est autre que celui dont ces trois courbes font partie.

En effet, les surfaces s et s' étant conduites, respectivement, par les courbes c et c', leur courbe d'intersection rencontre le plan aux mêmes points où ces deux courbes se rencontrent elles-mêmes. Donc toutes les courbes du faisceau $c + \lambda \cdot c' = 0$ peuvent être regardées comme résultant de l'intersection du plan par le faisceau de surfaces $s + \lambda \cdot s' = 0$, λ recevant simultanément les mêmes valeurs dans l'un et dans l'autre cas.

Les deux courbes $c + \lambda \cdot c' = 0$ et $c'' = 0$, auront donc, pour toute valeur donnée à λ, leurs points d'intersection situés sur la courbe commune aux deux surfaces $s + \lambda \cdot s' = 0$ et $s'' = 0$, et, par suite, le faisceau

$$(c + \lambda \cdot c') + \mu \cdot c'' = 0$$

résulte aussi de l'intersection du plan par le faisceau

$$(s + \lambda \cdot s') + \mu \cdot s'' = 0,$$

les indéterminées λ et μ recevant simultanément les mêmes valeurs dans les deux cas.

III. Cela posé, quand une courbe du réseau plan a un point de rebroussement, la surface correspondante touche le plan en ce point par un contact stationnaire, et, pareillement, si une courbe du réseau a deux points doubles, la surface d'où elle dérive touche le plan, par un contact ordinaire, en chacun de ces deux points, c'est-à-dire qu'elle a un double contact avec le plan.

On voit ainsi que le problème de déterminer le nombre des courbes d'un réseau plan, dont chacune possède deux points doubles, est le même que celui de déterminer le nombre des surfaces d'un réseau du même ordre, dont chacune a un double contact avec un plan donné. C'est sous cette dernière forme que je vais en aborder la solution.

IV. On sait que le nombre des surfaces d'un faisceau du degré n qui touchent, par un seul contact ordinaire, un plan donné, est égal à $3\,\overline{(n-1)}^2$.

Les surfaces du degré n, qui passent par autant de points moins deux, qu'il en faut pour déterminer l'une d'elles et qui, en outre, touchent un plan, forment par conséquent ce que j'ai appelé (en 1861) une série d'ordre n et d'indice N; N étant ici égal à $3\,\overline{(n-1)}^2$.

Donc, en vertu de cette loi, très-simple et générale, que j'ai fait connaître dans mes Recherches sur les séries de courbes et de surfaces algébriques*), il y a, dans la série dont il s'agit, $3\,\overline{(n-1)}^2 \cdot N$, c'est-à-dire $9\,\overline{(n-1)}^4$ surfaces particulières, dont chacune touche à la fois deux plans distincts; en d'autres termes, dans un réseau de surfaces d'ordre n, il y en a $9\,\overline{(n-1)}^4$ qui touchent ces deux plans fixes. J'ai d'ailleurs prouvé, dans le mémoire précité, que ces $9\,\overline{(n-1)}^4$ surfaces sont toutes des surfaces proprement dites du degré n, et qu'il ne peut y être compris, dans le cas présent, aucune surface singulière ou décomposée**).

Soit L la droite suivant laquelle se coupent les deux plans donnés. On peut faire tourner l'un des plans autour de L, jusqu'à ce que l'angle des deux plans devienne aussi petit qu'on voudra, et, dans chaque position respective de ces plans, le nombre total des surfaces du réseau qui les touchent l'un et l'autre, ne cesse pas d'être exprimé par la formule $9\,\overline{(n-1)}^4$, tant que les deux plans sont distincts.

A la limite, c'est-à-dire quand les deux plans arrivent à coïncider en un seul que j'appelerai M, ce nombre est encore le même théoriquement, et il est alors relatif aux surfaces dont chacune a un double contact avec ce plan unique. Mais il devient nécessaire, par une interprétation correcte de ce cas extrême, de faire subir au nombre $9\,\overline{(n-1)}^4$ certaines réductions que je vais indiquer.

V. Parmi les surfaces du réseau, il y en a une infinité qui possèdent chacune un point double, et l'on sait***) que tous ces points

*) Publié chez Gauthier-Villars — Paris — 1866.

**) On peut consulter aussi, sur ce point, le beau mémoire que M. Cayley vient de publier dans les transactions of the Cambridge philosophical society, pour 1868, sous le titre: On the curves which satisfy given conditions; page 113.

***) Voyez, per exemple, un article sur les singularités des surfaces al-doubles forment, par leur succession, une courbe à double courbure dont l'ordre est $6\,(\overline{n-1})^2$. Cette courbe a $6\,(\overline{n-1})^2$ points communs avec le plan M. En chacun de ces points, il y a une surface du réseau (celle à laquelle le point double appartient) qui est tangente, analytiquement parlant, au plan M, donc qui touche, au même titre, les deux plans primitifs, actuellement confondus en un seul. Mais, comme les seules surfaces dont on demande le nombre, sont celles qui ont, avec le plan M, des contacts proprement dits et non des contacts singuliers, il faut d'abord retrancher ce nombre $6\,(\overline{n-1})^2$ du nombre total $9\,(\overline{n-1})^4$ trouvé plus haut.

En outre, on sait*) que le lieu des points de contact simple des surfaces d'un réseau avec un plan est une courbe du degré $3\,(n-1)$. Il y a donc, dans le réseau que l'on considère, $3\,(n-1)$ surfaces, dont chacune touche le plan M sur la droite L. Or, comme les deux plans primitifs ont été amenés à coïncider, par la rotation de l'un d'eux autour de cette droite, chacune de ces $3\,(n-1)$ surfaces tangentes touche en réalité les deux plans ou, en d'autres termes, doit être comptée analytiquement comme touchant deux fois le plan M. Mais comme elle n'a néanmoins qu'un contact simple avec ce plan, elle ne saurait être comptée parmi les surfaces proprement bi-tangentes dont on cherche le nombre. Il faut donc encore retrancher $3\,(n-1)$ du nombre ci-dessus.

Effectuant ces deux réductions, il vient, en appelant X le nombre résultant,

$$(a) \qquad \begin{aligned} X &= 9\,(\overline{n-1})^4 - 6\,(\overline{n-1})^2 - 3(n-1) = \\ &= 3\,(n-1)\,[3\,(\overline{n-1})^3 - 2\,(n-1) - 1]. \end{aligned}$$

Actuellement, ce nombre X exprime celui des doubles contacts des surfaces du réseau avec le plan M, mais non pas le nombre même de ces surfaces. Car il est clair, si l'on appelle x le nombre des surfaces qui ont, avec le plan M, un double contact ordinaire, et y celui des surfaces qui touchent ce même plan par un contact stationnaire, que le nombre ci-dessus comprend deux fois le nombre x. Quant au nombre y, il n'est pas possible de reconnaître *a priori* le degré de multiplicité avec lequel il entre dans la formule (a). Appelons provisoirement α ce degré de multiplicité, qui nous est inconnu; nous aurons

$$X = 2x + \alpha \cdot y = 3\,(n-1)\,[3\,(\overline{n-1})^3 - 2\,(n-1) - 1].$$

---

gébriques, que j'ai inséré en 1862 dans le Journal de Liouville. Voyez aussi l'Introduzione ad una teoria geometrica delle superficie de M. Cremona. Bologna, 1866.

*) Ibidem.

VI. On sait, par le mémoire de M. Cayley: On the theory of involution, que la valeur du nombre y est $12(n-1)(n-2)$. Il ne reste donc, pour arriver à connaître le nombre x, qu'à chercher la valeur du coëfficient α.

Pour cela, appliquons la formule (a) au cas particulier du réseau polaire traité par Steiner. On sait, par lui, qu'on a, dans ce cas,

$x' = \frac{3}{2}(n-2)\,[3\,\overline{(n-2)}^3 - 14(n-2) + 11]$, et $y' = 12(n-2)(n-3)$.

Substituant ces valeurs dans l'expression de X, il vient

$$3(n-2)\,[3\,\overline{(n-2)}^3 - 14(n-2) + 11] + \alpha\cdot 12(n-2)(n-3) =$$
$$= 3(n-2)\,[3\,\overline{(n-2)}^3 - 2(n-2) - 1],$$

d'où l'on tire immédiatement $\alpha = 3$; ce qui est aussi la valeur de ce coëfficient dans le cas analogue de la théorie des courbes planes.

Portant cette valeur de α et celle de y dans l'équation générale (a), on trouve enfin, pour la valeur cherchée de x,

$$x = \tfrac{3}{2}(n-1)\,[3\,\overline{(n-1)}^3 - 14(n-1) + 11] =$$
$$= \tfrac{3}{2}(n-1)(n-2)(3n^2 - 3n - 11).$$

Tel est donc, à la fois, le nombre des surfaces d'un réseau d'ordre n, qui ont un double contact ordinaire avec un plan fixe et celui des courbes planes d'un réseau du même ordre, dont chacune possède deux points doubles; ce qu'il s'agissait de trouver.

VII. Ce résultat sétend, immédiatement et sans nouvelle démonstration, à des familles de courbes ou de surfaces de l'ordre n, du même degré d'indétermination que les réseaux, mais moins simples, qu'on pourrait appeler des réseaux complexes. Je veux parler des familles de courbes ou de surfaces assujéties, non plus exclusivement à passer par autant de points communs, mais plus généralement à autant de conditions communes quelconques, moins deux, qu'il en faut pour déterminer chacune d'elles. Dans ce cas, si l'on désigne par N le nombre déterminé des courbes ou des surfaces de ce réseau qui passent par deux points quelconques donnés, on peut dire, par analogie, que le réseau complexe est d'indice N (tandis qu'un réseau simple est d'indice 1), comme je l'ai déjà fait dans un mémoire sur les contacts multiples des courbes algébriques, inséré en 1866 dans le Journal de M. Borchardt. Le nombre x devient, pour un tel réseau,

$$x' = Nx = \tfrac{3}{2}N(n-1)\,[3\,\overline{(n-1)}^3 - 14(n-1) + 11];$$

c'est-à-dire que, dans un réseau complexe d'ordre n et d'indice N, il y a, en général, x' courbes (ou surfaces) dont chacun jouit de la propriété énoncée.

Toutefois, pour que ces surfaces soient toutes des courbes ou des surfaces du degré n, proprement dites, c'est-à-dire non décomposées en courbes (ou surfaces) possédant des branches (ou des nappes) multiples de degrés inférieurs, il faut que, parmi les conditions communes du réseau, se trouve celle de passer par quelques points fixes, et que le nombre de ces points fixes soit supérieur à certaines limites précises que j'ai fait connaître dans le mémoire précité (Journal de Borchardt) *).

En dehors de ces limites, se rencontrent les difficultés propres à chaque question particulière, qui dépendent des conditions du réseau. La nature de ces difficultés est bien nettement mise en évidence par M. Cayley dans l'important mémoire que j'ai déja cité plus haut: On the curves which satisfy etc. Je ne puis qu'y renvoyer le lecteur curieux d'aprofondir cette intéressante et vaste théorie.

VIII. En terminant, il ne me semble pas hors de propos de faire remarquer de nouveau le parti qu'on peut tirer, dans l'étude des familles de courbes générales, de la notion de cet indice qui, conjointement avec le degré des courbes, suffit à tenir lieu de toutes les conditions auxquelles chacune de ces familles est assujétie, en tant du moins qu'il s'agit de la recherche des propriétés que Poncelet et Steiner, après lui, ont appelées projectives.

Quelques personnes, il est vrai, semblent croire que cette faculté, aussi importante que singulière, appartient seulement à la méthode dite des caractéristiques, dans laquelle ce même indice a d'ailleurs été conservé, sous un autre nom, tandis que le degré des courbes y a été remplacé par un deuxième indice, corrélatif du premier.

Mais cette opinion parait inexacte. En effet, la méthode dont il s'agit a essentiellement besoin qu'on lui fournisse, pour chaque degré des courbes considerées, les valeurs numériques des caractéristiques élémentaires; elle est impuissante à faire connaître ces valeurs par ses seules ressources. Cette nécessité d'invoquer un secours étranger fait que cette méthode, dès qu'on s'élève au dessus du second degré, même pour les questions les plus simples, est réduite à donner des formules, qui contiennent des quantités toujours inconnues, et qui sont, par cela même, à peu près sans utilité.

S'il en est autrement, à l'égard des coniques et des surfaces du second ordre, c'est que la théorie de ces courbes et de ces surfaces permet, par ailleurs**), de déterminer les valeurs des caractéristi-

*) Voyez aussi, sur ce point, le mémoire déja cité de M. Cayley: On the curves which satisfy given conditions, page 113.

**) Comme l'a fait, par exemple, M. Zeuthen dans de remarquables mémoires, l'un sur la détermination des caractéristiques des coniques (Copenhague 1865) et l'autre, plus récent, sur la détermination des caracteristiques dont il s'agit. Mais, dès qu'on passe seulement au troisième degré, ces ressources tirées du dehors font défaut, et il faut bien alors en revenir à la notion de l'indice, conjointement avec le degré des courbes, et à cette loi de multiplication par l'indice, dont je viens de présenter un nouvel exemple (VII)*). Car, seule jusqu'ici, cette dernière méthode permet d'aborder et de résoudre avec précision une foule de questions concernant les familles de courbes d'ordre quelconque.

Paris, 22 Janvier 1869.

ques des surfaces du second ordre (nouvelles annales des mathématiques, t. VII, 2e série. 1868).

*) Au surplus, il n'y a là rien qui doive étonner; car ce n'est pas seulement dans la théorie des séries ou systèmes de courbes, et de surfaces, que se manifeste ce caractère en quelque sorte exceptionnel des courbes et des surfaces du second degré. On sait qu'il se rencontre pareillement à l'égard des propriétés individuelles de ces courbes et de ces surfaces, et que les méthodes les plus fécondes en ce qui les concerne, n'ont plus eu le même succès, à beaucoup près, quand on a eu à s'occuper de l'étude des courbes et des surfaces d'un degré supérieur au second

Notes sur un système de coordonnées linéaires dans l'espace.

Par H. G. Zeuthen (de Copenhague).

Mr. Plücker, dans son célèbre memoire sur „une nouvelle géométrie d'espace"*), détermine les droites en prenant pour point de départ les constantes qui entrent dans les équations qui les représentent dans un système de coordonnées ponctuelles ou planaires. Mais dans un appendice**) il ajoute quelques remarques sur la marche à suivre pour déterminer une droite indépendemment de sa représentation dans ces deux autres espèces de systèmes de coordonnées. Mr. Plücker présume que la tâche ayant pour objet de réaliser cette idée serait féconde, mais en même temps très-laborieuse.

En suivant la voie que je vais indiquer ici, il me semble qu'on gagne les mémes avantages, en même temps qu'on évite les difficultés au moyen d'une représentation mécanique qui permet d'emprunter à la statique des propositions généralement connues de cette science. Le système lui-même de coordonnées linéaires que j'exposerai n'est pas différent de celui que Mr. Cayley a indiqué déjà en 1860***) et dont il vient de faire usage dans son mémoire „On the six coordinates of a line"†); mais aussi ce savant prend pour point de départ la représentation d'une droite au moyen de coordonnées ponctuelles.

I. Détermination d'une droite au moyen de ses moments par rapport aux arêtes d'un tétraèdre.

Pour les applications que nous en aurons à faire je rappellerai que le moment d'une force par rapport à un axe fixe est le

*) Philosophical Transactions 1865 page 725, Journal de Liouville 2me série tome 11. Ce mémoire est suivi de l'oeuvre posthume du même sujet: Neue Geometrie des Raumes, Leipzig, 1868.

**) Partie III, Liouville page 402.

***) Quart. Math. Journ. t. III, 1860. p. 226.

†) Transaction of the Cambridge Philosophical Society Vol. XI. Part. II; je n'avais connaissance ni de ce mémoire, ni de la note de 1860, en exposant en

produit de la projection de la force sur un plan perpendiculaire à l'axe, par sa plus courte distance de l'axe. On donne à ce moment un certain signe suivant que la force tend à faire tourner dans un sens ou dans l'autre, un corps auquel elle serait appliquée, et qui ne pourrait que tourner autour de l'axe. La valeur numérique et le signe du moment resteront les mêmes, si, sans changer la valeur numérique et le signe de la force, nous changeons les deux droites, celle qui indiquait la position de la force contre celle qui servait d'axe, en regardant toujours comme positifs les mêmes sens de ces deux droites. Si la force devient égale à l'unité, le moment ne dependra que des positions et des sens des deux droites, et sera égal au produit de leur plus courte distance par le sinus de l'angle que forment leurs sens positifs. Nous appellerons cette quantité purement géométrique le moment de l'une des deux droites par rapport à l'autre, ou seulement le moment des deux droites. Alors, on trouve le moment d'une force quelconque par rapport à un axe en multipliant la valeur de la force par le moment des deux droites qui représentent la force et l'axe.

Les objets fixes par rapport auxquels nous pensons déterminer une droite quelconque K sont les arêtes d'un tétraèdre dont nous désignerons les sommets par a, b, c, d. A cet effet, nous ferons agir suivant K, dans un de ses deux sens, une force égale à l'unité, que nous décomposerons, ce qui est toujours possible*), suivant les six arêtes du tétraèdre. Désignons les composantes suivant

$$da\ ,\ db\ ,\ dc\ ,\ bc\ ,\ ca\ ,\ ab \quad \text{respectivement par}$$
$$X\ ,\ Y\ ,\ Z\ ,\ L\ ,\ M\ ,\ N,$$

qui peuvent être des quantités positives ou négatives, si nous établissons que da etc. n'indiquent pas seulement les positions des composantes, mais qu'elles marquent aussi, au moyen de l'ordre des d et a etc., dans quel sens ces composantes doivent agir pour être positives. Or comme le moment d'une force par rapport à un axe est égal à celui de ses composantes, nous pouvons trouver le moment de l'unité

Juillet 1868 dans la réunion des naturalistes Scandinaves à Christiania les principes fondamentaux de ce système de coordonnées.

*) En effet, si l'on désigne par p le point où K rencontre le plan abc on peut commencer par décomposer la force suivant la droite pd et une droite située dans le plan abc. La première de ces deux composantes peut se décomposer suivant da, db et dc; si la seconde rencontre ab au point q, on peut la décomposer suivant qc et ab, et la composante suivant qc se peut décomposer suivant ca et cb. Si le plan abc est parallèle à K ou la droite ab à la composante de K dans le plan abc, on peut remplacer ce plan ou cette droite par une autre face ou arête du tétraèdre.

de force agissant suivant K, par rapport à un axe quelconque, ou, selon notre définition, le moment de la droite K par rapport à une autre droite, en prenant la somme algébrique des moments des composantes X, Y ... par rapport au même axe. Commençons par chercher le moment de la droite K par rapport à da. Alors les moments des forces, X, Y, Z, M, N, qui agissent suivant cette droite ou la rencontrent, seront égaux à zéro, et le moment cherché sera par conséquent égal à celui de la force L ou au produit de la force L par le moment des droites da et bc.

On peut déterminer de la même manière le moment de la droite K par rapport aux autres arêtes du tétraèdre; on trouve alors, en désignant les moments des droites

$$\begin{array}{ccccccc} da \text{ et } bc & , & db \text{ et } ca & , & dc \text{ et } ab & \text{respectivement par} \\ i, & & j, & & k & \end{array}$$

et les moments de la droite K par rapport aux arêtes

$$\begin{array}{cccccccccccc} da & , & db & , & dc & , & bc & , & ca & , & ab & \text{respectivement par} \\ x & , & y & , & z & , & l & , & m & , & n, & \end{array}$$

les équations suivantes:

$$(1) \qquad \left\{ \begin{array}{lll} x = Li \;, & y = Mj \;, & z = Nk, \\ l = Xi \;, & m = Yj \;, & n = Zk. \end{array} \right.$$

Le moment de la droite K par rapport à une autre droite quelconque K', dont nous désignerons les moments par rapport aux arêtes du tétraèdre par x', y', z', l', m', n', ou le moment des droites K et K', sera égal à

$$Xx' + Yy' + Zz' + Ll' + Mm' + Nn'.$$

En désignant ce moment par $[K, K']$, et en remplaçant dans son expression X, Y, ... par les valeurs que donnent les équations (1) on trouve

$$(2) \qquad [K, K'] = \frac{lx' + xl'}{i} + \frac{ym' + my'}{j} + \frac{zn' + nz'}{k}.$$

Le moment d'une droite par rapport à elle même étant toujours égal à zéro, la substitution de $x' = x$, $y' = y$ etc. dans l'équation (2) doit donner $[K, K'] = 0$. Par conséquent, les six moments d'une droite quelconque par rapport aux arêtes du tétraèdre fixe doivent toujours satisfaire à l'équation suivante

$$(3)^{*)} \qquad \frac{xl}{i} + \frac{ym}{j} + \frac{zn}{k} = 0.$$

---

*) L'équation (3) étant homogène ne sera pas changée, si x, y .. sont les moments d'une force quelconque au lieu de ceux de l'unité de force. Elle exprime donc que x, y ... sont les moments d'une seule force par rapport aux arêtes d'un tétraèdre. On en déduit au moyen des équations (1) la

En général, deux droites dont le moment est égal à zéro se rencontreront (ou seront parallèles); par conséquent, l'équation $[K\,,\,K'] = 0$ ou

$$(4) \qquad \frac{x'l + l'x}{i} + \frac{m'y + y'm}{j} + \frac{n'z + z'n}{k} = 0$$

exprime que les deux droites K et K' sont dans un même plan.

Dans cette dernière équation (4) nous pouvons attribuer à $x', y' \ldots$ des valeurs constantes soumises seulement à la condition de satisfaire à l'équation (3). i, j et k étant aussi des constantes, les six moments de la droite K par rapport aux arêtes du tétraèdre seront alors les seules quantités variables de l'équation (4). Étant homogène par rapport à ces six moments elle peut être réduite à ne contenir que les cinq rapports des cinq moments au sixième, et comme les moments doivent toujours satisfaire à l'équation aussi homogène (3), on peut éliminer un des rapports, de façon que l'équation (4) soit remplacée par une nouvelle, où **quatre** des rapports des moments de la droite K par rapport aux arêtes du tétraèdre sont les seules variables. Ces quatre rapports seront parfaitement déterminés, si la position de la droite K est donnée, et réciproquement ces quatre rapports étant donnés, détermineront parfaitement la position*) de la droite K; car les quatre rapports donnés détermineront au moyen de l'équation (3) tous les rapports des moments, puis au moyen des équations (1) les rapports des composantes X, Y etc., et ces derniers rapports déterminent parfaitement la position de la seule résultante [dont l'existence est assurée par l'équation (3)]. Les quatre rapports peuvent donc être regardés comme des coordonnées de la droite K. En en faisant cet usage nous ne les introduisons pas pourtant explicitement, ce qui pourrait se faire par la transformation indiquée pour le cas particulier de l'équation (4), mais nous gardons, à cause de la forme plus symmétrique, des équations homogènes contenant tous les six moments [comme (4)] en nous rappelant toujours que ces six moments doivent satisfaire à l'équation (3).

Des transformations de coordonnées se font au moyen de l'équation (2), qui peut servir à exprimer le moment d'une droite quelconque par rapport à une arête de l'ancien tétraèdre de référence au moyen de ses six moments par rapport au nouveau tétraèdre de référence. L'expression (2) de $[K, K']$ étant homogène et du premier

condition que les forces X, Y etc. agissant suivant les arêtes d'un tétraèdre auront une seule résultante. L'équation qui exprime cette condition sera

$$i\,.\,X\,L + j\,.\,Y\,M + k\,.\,Z\,N = 0.$$

*) Mais non pas le sens.

degré, on voit que des équations homogènes seront remplacées, après cette transformation, par d'autres équations homogènes, des équations algébriques par des équations algébriques du même degré.

II. Modification des coordonnées.

Les formules (2) — (4), ainsi que celles que nous aurons encore à déduire, prendront des formes plus simples au moyen d'une modification du système de coordonnées. Nous introduisons au lieu des six moments de la droite K, par rapport aux arêtes du tétraèdre de référence $a\,b\,c\,d$, les six tétraèdres ayant pour arêtes opposées un segment, égal à l'unité, de la droite K et une arête du tétraèdre $a\,b\,c\,d$, divisé par ce tétraèdre. Pour les signes de ces tétraèdre nous prendrons ceux des moments des arêtes opposées qui les déterminent, et ils ne seront donc déterminés que lorsqu'on a choisi le sens positif de K. Ces six quantités que nous venons de définir, quoique quatre de leurs rapports suffisent pour déterminer la position de K, nous les appellerons — avec Mr. Cayley — les six coordonnées de la droite K.

Pour remplacer, dans les formules déjà trouvées, les moments par ces nouvelles coordonnées nous ferons usage du fait que le volume d'un tétraèdre est égal au produit de deux arêtes opposées multiplié par leur moment et divisé par six, ce qu'on voit en partageant le tétraèdre au moyen d'un plan passant par l'une des deux arêtes et par sa plus courte distance de l'autre. On aura donc, en désignant les nouvelles coordonnées de la droite K par $x_1, y_1, z_1, l_1, m_1, n_1$, les moments de la même droite par $x, y \ldots$ et le volume du tétraèdre de référence par T, les équations suivantes:

$$x_1 = \frac{da\,.\,x}{6\,T},\ y_1 = \frac{db\,.\,y}{6\,T},\ z_1 = \frac{dc\,.\,z}{6\,T},\ l_1 = \frac{bc\,.\,l}{6\,T},\ m_1 = \frac{ca\,.\,m}{6\,T},\ n_1 = \frac{ab\,.\,n}{6\,T}$$

et

$$6\,T = da\,.\,bc\,.\,i = db\,.\,ca\,.\,j = dc\,.\,ab\,.\,k.$$

En substituant les valeurs des moments $x, y \ldots$ que donnent les premières de ces équations et en réduisant au moyen des dernières, on trouve les formules qui doivent remplacer les équations (2) — (4). Nous supprimerons dans les équations qu'on trouve alors les indices des lettres et désignerons, par conséquent les nouvelles coordonnées, comme dans ce qui précède les moments, par x, y, z, l, m, n. On parvient donc aux résultats suivants:

1°. Le moment de deux droites K et K' a l'expression

$$(5)\qquad [K\,,\,K'] = 6\,T\,(xl' + lx' + ym' + my' + zn' + nz')$$

2°. Les six coordonnées d'une droite satisfont toujours à la relation identique

(6) $$xl + ym + zn = 0,$$

et six quantités qui satisfont à cette équation sont toujours proportionelles aux coordonnées d'une droite qu'elles déterminent parfaitement:

3°. Si les coordonnées d'une droite K satisfont à l'équation suivante

(7) $$l'x + x'l + m'y + y'm + n'z + z'n = 0,$$

où les coëfficients $x', y' \ldots$ satisfont à la condition (6), la droite K rencontre la droite fixe dont les coordonnées sont proportionnelles à ces coëfficients.

Des transformations de coordonnées se font maintenant au moyen de l'équation (5). Elles ne troublent l'homogénéité ni ne changent le degré des équations.

III. Relation identique et non-homogéne entre les six coordonnées.

On peut parfois avoir besoin de connaitre non-seulement les rapports des six coordonnées d'une droite, mais aussi leurs valeurs ellesmêmes. Comme ces valeurs dépendent seulement de la position de la droite, qui est parfaitement déterminée par leurs rapports, elles doivent satisfaire, outre à l'équation homogène (6), à une autre équation identique, mais qui n'est pas homogène. C'est celle que nous proposons de trouver ici.

Nous commencerons par le cas particulier où la droite K passe par le sommet d du tétraèdre de référence; alors $x = y = z = 0$ et nous n'aurons qu'à chercher une relation entre l, m, et n. Dans ce cas on peut prendre le point d pour l'origine du segment, égal à l'unité, de la droite K. En désignant son autre bout par g ($dg = 1$), les angles que K fait avec les plans

bcd , cda , adb

par ξ , η , ζ

et ceux que da , db , dc font avec les mêmes plans,

par α , β , γ,

on a*)

$$l = \frac{gbcd}{abcd} = \frac{\sin\xi}{da.\sin\alpha}, \quad m = \frac{agcd}{abcd} = \frac{\sin\eta}{db.\sin\beta}, \quad n = \frac{abgd}{abcd} = \frac{\sin\zeta}{dc.\sin\gamma}.$$

*) La première des équations prouvées montre que l'angle ξ reste constant en même temps que la coordonnée l, par conséquent aussien même temps que le moment de K et bc; on en peut tirer le théorème suivant: le lieu des droites passant par un point fixe et ayant un moment constant par rapport à une droite fixe, est un cône de révolution.

Or on sait que*)

$$\left(\frac{\sin\xi}{\sin\alpha}\right)^2 + \left(\frac{\sin\eta}{\sin\beta}\right)^2 + \left(\frac{\sin\zeta}{\sin\gamma}\right)^2 + 2\,\frac{\sin\eta}{\sin\beta}\cdot\frac{\sin\zeta}{\sin\gamma}\cos(bdc)$$
$$+ 2\,\frac{\sin\zeta}{\sin\gamma}\cdot\frac{\sin\xi}{\sin\alpha}\cos(cda) + 2\,\frac{\sin\xi}{\sin\alpha}\cdot\frac{\sin\eta}{\sin\beta}\cos(adb) = 1\,.$$

Par conséquent on trouve que les coordonnées l, m, n d'une droite K passant par d doivent satisfaire à l'équation suivante:

(8) $$da^2.l^2 + db^2.m^2 + dc^2.n^2 + 2db.dc.\cos(bdc).mn$$
$$+ 2\,dc.da.\cos(cda).nl + 2da.db.\cos(adb).lm = 1.$$

Dans le cas particulier où $(bdc) = (cda) = (adb) = \frac{\pi}{2}$ nous aurons

(8^b) $$da^2.l^2 + db^2.m^2 + dc^2.n^2 = 1\,,$$

et $da.l$, $db.m$ et $dc.n$ seront les cosinus des angles que fait K avec les arêtes da, db et dc.

Regardons maintenant une droite quelconque K. Soit f le point où elle rencontre la face dab. Alors on voit sans difficulté (en prenant le point f pour origine du segment, égal à l'unité, de la droite K qui est arête de tous les tétraèdres, numérateurs des coordonnées) que

$$\frac{x}{\varDelta\,dfa} = \frac{-y}{\varDelta\,bfd} = \frac{n}{\varDelta\,afb} = \frac{x-y+n}{\varDelta\,adb}\,,$$

où les triangles sont positifs ou négatifs suivant que leurs aires sont à droite ou à gauche du sens du périmètre indiqué par leurs notations. La dernière de ces équations montre que la coordonnée „n“ d'une droite passant par d et parallèle à K est égale à $x-y+n$. On trouve d'une manière analogue les autres coordonnées de la même parallèle. Cette droite a donc les coordonnées

$$x'=0,\ y'=0,\ z'=0\ ,\ l'=y-z+l\ ,\ m'=z-x+m\ ,\ n'=x-y+n.$$

Or l', m', n' doivent satisfaire à l'équation (8); en y substituant les valeurs de l', m' et n' et en exprimant $\cos(bdc)$, $\cos(cda)$, $\cos(adb)$ au moyen des arêtes du tétraèdre on trouve l'équation suivante

(9) $$da^2\,.\,D\,.\,A + db^2\,.\,D\,.\,B + dc^2\,.\,D\,.\,C + bc^2\,.\,B\,.\,C$$
$$+ ca^2\,.\,C\,.\,A + ab^2\,.\,A\,.\,B = -1$$

où

---

*) On prouve cette relation en construisant un parallèlipipède dont les trois arêtes sont dans les droites da, db et dc, et dont la diagonale est dans la droite K. Si l'on désigne les longueurs des trois arêtes par x, y et z et celle de la diagonale par r, on a la relation suivante

$$x^2 + y^2 + z^2 + 2\,yz\,.\cos(bdc) + 2\,zx\,.\cos(cda) + 2\,xy\,.\cos(adb) = r^2.$$

ce q'on voit en projetant toutes ces droites sur trois axes orthogonales. Or

$$x\sin\alpha = r\sin\xi,\ y\sin\beta = r\sin\eta,\ z\sin\gamma = r\sin\zeta,$$

et la substitution des valeurs de x, y et z déterminées par ces équations donne la relation dont il s'agit.

(10) $A = y - z + l,\ B = z - x + m,\ C = x - y + n,\ D = -l - m - n,$

et dans le cas particulier où $(bdc) = (cda) = (adb) = \frac{\pi}{2}$:

(9^b) $$da^2 \cdot A^2 + db^2 \cdot B^2 + dc^2 \cdot C^2 = 1.$$

L'équation (9), à côte de l'équation (6), servira à déterminer les six coordonnées d'une droite lorsqu'on connait quatre de leurs rapports. On peut aussi en faire usage pour faire une équation qui contient les coordonnées d'une droite K, homogène par rapport à ces coordonnées. Le complexe des droites K qui ont un moment constant λ par rapport à une droite fixe K' sera, par exemple, répresenté par l'équation suivante

(11) $$[K, K']^2 =$$
$$= -\lambda^2 (da^2.D.A + db^2.D.B + dc^2.D.C + bc^2.B.C + ca^2.C.A + ab^2.A.B),$$

où $[K, K']$ s'exprime au moyen de l'équation (5), A, B, C, D au moyen des équations (10).

Les considérations qui nous ont conduit à l'équation (9) nous donnent encore le moyen de déterminer les angles et les distances de droites dont on connait les coordonnées. Nous nous bornerons à cet égard au cas d'un tétraèdre de référence où $(bdc) = (cda) = (adb) = \frac{\pi}{2}$, qui est toujours préférable lorsqu' il s'agit de ces quantités. Alors $da \cdot A$, $db \cdot B$ et $dc \cdot C$ seront les cosinus des angles que la droite K fait avec les arêtes da, db et dc. On voit donc que l'angle v, formé par les deux droites K et K', sera détérminé par la formule

(12) $$\cos v = da^2 \cdot A \cdot A' + db^2 \cdot B \cdot B' + dc^2 \cdot C \cdot C',$$

où A', B' et C' désignent les valeurs de A, B et C qui correspondent à la droite K'. Puis la plus courte distance des deux droites sera déterminée au moyen de l'expression $\frac{[K, K']}{\sin v}$.

VI. Droites qui passent par un point ou qui sont situées dans un plan.

Une droite K qui rencontre deux droites fixes qui se rencontrent elles-mêmes doit ou passer par leur point de rencontre ou être située dans leur plan. Soient par exemple les deux droites fixes les arêtes da et db du tétraèdre de référence. Alors $x = 0$ et $y = 0$, ce qui amène suivant (6) ou que $z = 0$ ou que $n = 0$. Dans le premier cas, K rencontre aussi dc et passera par conséquent par d, dans l'autre elle rencontre aussi ab et sera par conséquent renformée dans le plan dab.

Nous savons donc exprimer distinctement par les trois équations $x = y = z = 0$ ou $x = y = n = 0$ que la droite K passe par le point

d, ou qu'elle est renfermée dans le plan dab. La même chôse est possible pour un point ou un plan quelconque. Soient, en effet, x', y' ... et x'', y'' ... les coordonnées de deux droites qui passent par le point ou qui sont renfermées dans le plan. Alors selon (7) on doit avoir, dans tous les deux cas,

$$(13)\qquad \begin{cases} l'x + x'l + m'y + y'm + n'z + z'n = 0, \\ l''x + x''l + m''y + y''m + n''z + z''n = 0, \end{cases}$$

où les coëfficients satisfont, suivant (6), aux équations

$$(14)\qquad \begin{cases} x'l' + y'm' + z'n' = 0, \\ x''l'' + y''m'' + z''n'' = 0, \end{cases}$$

et, comme les deux droites se rencontrent, suivant (7), à l'équation

$$(15)\qquad x'l'' + l'x'' + y'm'' + m'y'' + z'n'' + n'z'' = 0.$$

Pour distinguer la condition de passer par le point de rencontre des droites (13), nous commençons par chercher les moments d'une certaine droite rencontrant les deux droites, mais dont on sait expressément qu'elle passe par leur point de rencontre. Nous pourrons faire usage de celle qui passe par le point d. En en désignant les coordonnées par x_1, y_1 ... on a $x_1 = y_1 = z_1 = 0$, qui avec les équations (13) donnent*)

$$\frac{l_1}{y'z'' - z'y''} = \frac{m_1}{z'x'' - x'z''} = \frac{n_1}{x'y'' - y'x''}.$$

Toute droite K qui passe par le point donnée doit aussi rencontrer cette troisième droite, ce qui s'exprime par l'équation:

$$(16)\qquad (y'z'' - z'y'')x + (z'x'' - x'z'')y + (x'y'' - y'x'')z = 0.$$

On exprime donc qu'une droite passe par un point donné au moyen des deux équations (13) et de l'équation (16), les coëfficients satisfaisant aux trois équations (14) et (15).

De même, une droite située dans le plan des deux droites (13) doit rencontrer chaque droite de ce plan, par exemple sa droite d'intersection avec le plan dab**), ce qui s'exprime par l'équation

$$(17)\qquad (y'n'' - n'y'')x + (n'x'' - x'n'')y + (x'y'' - y'x'')n = 0.$$

On exprime donc qu'une droite se trouve dans un plan donné

---

*) Une droite passant par le point d et rencontrant les droites (13) sera indéterminée lorsque d est dans le plan de ces droites. Alors $\frac{x'}{x''} = \frac{y'}{y''} = \frac{z'}{z''}$. Dans ce cas on doit remplacer d par un autre des sommets du tétraèdre.

**) Une droite située dans le plan dab et rencontrant les droites (13) sera indéterminée lorsque dab passe par le point de rencontre de ces droites. Alors $\frac{x'}{x''} = \frac{y'}{y''} = \frac{n'}{n''}$. Dans ce cas on doit remplacer dab par une autre des faces du tétraèdre.

au moyen des deux équations (13) et de l'équation (17), les coëfficients satisfaisant aux trois équations (14) et (15).

Nous avons donc exprimé au moyen de trois équations, dont aucune n'est une conséquence algébrique des deux autres, les conditions qu'une droite doit passer par un point ou se trouver dans un plan. Néanmoins, selon nos considérations géométriques, toute droite qui satisfait aux équations (13) [(14) et (15) ayant lieu entre les coëfficients de ces équations] doit aussi satisfaire ou à l'équation (16) ou à l'équation (17). Pour s'expliquer ce fait, on n'a besoin que de se rappeller que les coordonnées d'une droite satisfont toujours à l'équation (6). C'est cette équation que les équations (16) et (17) remplacent, ce qu'on prouve directement en éliminant l et m des équations (13) et (6): car le premier membre de l'équation résultant de cette élimination peut, au moyen des équations (14) et (15) se décomposer en deux facteurs qui sont les premiers membres des équations (16) et (17). Par conséquent, les trois équations aux moyens desquelles nous avons exprimé les conditions de passer par un point ou de se trouver dans un plan, rendent superflue l'équation (3). Ces conditions ne seront donc que doubles.

On peut simplifier les équations qui expriment la condition de passer par un point, choisissant pour les droites représentées par les équations (13) celles qui joignent le point aux deux sommets du tétraèdre a et b, ce qui amène $x' = m' = n' = 0$ et $l'' = y'' = n'' = 0$ et qui rend les équations (14) superflues. De même, on peut simplifier les équations qui expriment que la droite K se trouve dans un plan donné en choisissant pour les droites (13) les droites d'intersection du plan avec deux faces du tétraèdre de référence.

V. Applications.

Au lieu de reproduire, au moyen des coordonnées que nous venons d'exposer, la théorie des collections de droites désignées par Mr. Plücker sous les noms de „complexes“ et de „congruences“, et celle des surfaces réglées, nous n'en donnerons que peu d'applications. J'espère pourtant que ces exemples suffiront à montrer l'usage de ces coordonnées.

1°. Complexes de droites. En général, une équation homogène

$$F(x, y, z, l, m, n) = 0$$

sera satisfaite par les coordonnées d'une infinité de droite, parmi lesquelles il y aura même un nombre infini qui passent par un point quelconque ou qui se trouvent dans un plan quelconque; car, comme nous avons vu, chacune de ces conditions n'est que double et ne fait avec l'équation donnée que trois conditions des quatre qui sont nécessaires à déterminer une droite (mais bien quatre des cinq équations nécessaires à déterminer les rapports des six coordonnées). Aux complexes appartiennent les collections des tangentes d'une surface et des droites qui rencontrent une courbe fixe.

Le degré de l'équation d'un complexe qui ne change pas, comme nous l'avons vu, par une transformation des coordonnées, s'appelle le degré du complexe.

Le lieu des droites d'un complexe qui passent par un point est un cône dont l'ordre est égal au degré du complexe (Plücker).

En effet, prenons le point pour le sommet d du tétraèdre de référence. Alors $x = y = z = 0$, et les trois coordonnées l, m, n seront dans un système triangulaire les coordonnées du point où la droite K rencontre le plan abc. Le lieu de ce point de rencontre sera donc une courbe dont l'ordre est égal au degré du complexe. Donc etc.

De même, les droites d'un complexe qui se trouvent dans un plan enveloppent une courbe dont la classe est égale au degré du complexe (Plücker).

En effet, posons dans le plan la face abc du tétraèdre de référence. Alors $l = m = n = 0$, et x, y et z seront dans un système triangulaire les coordonnées de la droite K.

2°. Une propriété des complexes linéaires. Une complexe du premier degré s'appelle aussi un complexe linéaire. Selon la propriété générale des complexes que nous venons de prouver, les droites d'un complexe linéaire qui passent par un point se trouvent aussi dans un même plan, et réciproquement. L'équation (7) étant du premier degré, les droites qui rencontrent une droite fixe forment un complexe linéaire; mais comme les coefficients x', y' ... de cette équation sont assujetties à la condition (6), nous n'y aurons qu'un cas particulier de complexes linéaires.

Pour prouver la propriété des complexes linéaires dont nous pensons nous occuper ici, nous donnerons à leur équation générale

$$\alpha . x + \beta . l + \gamma . y + \delta . m + \varepsilon . z + \zeta . n = 0 \tag{18}$$

la forme suivante

$$\begin{aligned}(l' + \lambda . l'')x + (x' + \lambda . x'')l + (m' + \lambda . m'')y + \\ + (y' + \lambda . y'')m + (n' + \lambda . n'')z + (z' + \lambda . z'')n = 0\end{aligned} \tag{19}$$

où les quantités x', y' ... ainsi que les quantités x'', y'' ... satisfont aux équations (6) et (9). Ce-ci est possible d'une infinité de manières; car nous n'avons à la détermination des 13 quantités $x', y' \ldots, x'', y'' \ldots, \lambda$ que les quatre équations des formes (6) et (9) et les 5 équations suivantes:

$$\frac{l' + \lambda . l''}{\alpha} = \frac{x' + \lambda . x''}{\beta} = \frac{m' + \lambda . m''}{\gamma} = \frac{y' + \lambda . y''}{\delta} = \frac{n' + \lambda . n''}{\varepsilon} = \frac{z' + \lambda . z''}{\zeta}. \tag{19}$$

Alors x', y' ... et x'', y'' ... seront les coordonnées de deux droites K' et K'', et l'équation (19), suivant (5), pourra s'écrire

$$(21) \qquad [K, K'] + \lambda . [K, K''] = 0 \quad \text{ou} \quad \frac{[K, K']}{[K, K'']} = -\lambda ,$$

ce qui donne la définition géométrique suivante d'un complexe linéaire, que c'est la collection de droites dont les moments par rapport à deux droites fixes sont dans un rapport constant. Nous voyons encore que, pour un complexe donné, cette propriété a lieu par rapport à une infinité de couples des droites. Comme la différence des nombres des quantités à déterminer et des équations est égal à quatre, la position de l'une des deux droites peut être prise arbitrairement; puis celle de l'autre sera parfaitement déterminée ainsi que la valeur constante du rapport des moments.*)

On voit que les droites du complexe qui rencontrent l'une des deux droites fixes, en rencontrent aussi l'autre. Ces droites sont donc les mêmes que celles auxquelles Mr. Plücker a donné le nom de polaires conjuguées par rapport au complexe. En prenant deux polaires conjuguées pour arêtes opposées du tétraèdre de référence, on réduira l'équation du complexe à la forme suivante

$$(22) \qquad x + \lambda . l = 0 .$$

On pourrait aussi faire usage d'un théorème connu de la statique pour prouver la propriété des complexes linéaires que nous venons d'établir.**) L'équation (18) d'un complexe linéaire gardera sa forme, si l'on remplace les six coordonnées d'une droite par les six moments dont nous avons fait usage au commencement. Seulement les valeurs des coefficients seront alterées par cette transformation, mais nous leur donnerons les mêmes notations. Alors l'équation du complexe exprime que la somme des moments d'un système de forces α, β, γ, δ, ε, ζ agissant suivant les arêtes du tétraèdre de référence, par rapport à la droite K, est égale à zéro. Ce système de forces, qui — comme nous l'avons vu — peut remplacer un système quelconque de forces, peut être remplacé lui-même par deux forces, agissant suivant deux droites dont il est permis de prendre l'une arbitrairement. En désignant les deux droites par K et K' et le rapport des deux forces par λ, on trouve de nouveau l'équation (21).***)

*) Les équations donnent à toutes les coordonnées de la droite cherchée ainsi qu'au rapport λ un signe double, correspondant aux deux sens de cette droite.

**) Réciproquement, cette propriété, prouvée comme nous venons de le faire, peut servir à prouver le théorème de statique dont il s'agit.

***) Il ne sera pas difficile maintenant de prouver, au moyen des coordonnées actuelles, le théorème de Chasles sur le volume du tétraèdre déterminé par les deux forces résultantes — ce que fait aussi Mr. Cayley — ainsi que l'extension de ce théorème due à Möbius.

Cette dernière preuve nous montre encore, que les couples de droites, polaires conjuguées par rapport à un complexe linéaire, sont les mêmes que celles suivant lesquelles agissent deux forces qui remplacent un même système de forces. Or on sait que ces mêmes couples de droites jouent aussi un rôle dans la cinématique: ils sont les couples d'axes des rotations infiniment petites auxquelles il est possible de réduire un même mouvement infiniment petit d'un corps solide. Comme les droites du complexe rencontrent toutes les deux droites de chacun de ces couples, lorsqu' elles en rencontrent une, elles seront, comme l'a prouvé Mr. Chasles au tome LII*) des Comptes Rendus de l'Ac. des Sciences, les droites qui dans ce mouvement infiniment petit sont normales aux trajectoires de tous leurs points. On peut donc, dans l'endroit cité et déjà dans le tome XVI des Comptes Rendus,**) où Mr. Chasles traite des mêmes droites, puiser une discussion des complexes linéaires qui est antérieure à celle de Mr. Plücker.***)

3°. L'équation du complexe des droites tangentes à une sphère. Nous nous bornerons au cas d'un tétraèdre de référence où $(bdc) = (cda) = (adb) = \frac{\pi}{2}$ et dont le sommet d est placé au centre de la sphère. Pour résoudre la question, nous ferons usage du fait que le moment $[K, K']$ de la droite K tangente à la sphère, par rapport à une droite K' passant par d et perpendiculaire au plan (d, K), doit être égal au rayon r de la sphère. Soient l'', m'', n'' les coordonnées d'une droite mobile K'' passant par d et rencontrant K, ce qu'on exprime, selon (7), par l'équation suivante

$$xl'' + ym'' + zn'' = 0\,.$$

Alors, selon l'équation (12), il faut que les coordonnées l', m', n' de la droite K', qui est perpendiculaire à toutes les positions de la droite K'', satisfassent toujours à l'équation

$$da^2 \,.\, l' \,.\, l'' + db^2 \,.\, m' \,.\, m'' + dc^2 \,.\, n' \,.\, n'' = 0\,.$$

Ces deux équations, où les rapports $l'' : m'' : n''$ peuvent prendre une infinité de valeurs, doivent être identiques par rapport à ces coordonnées. Il faut donc que

*) pag. 1094.

**) pag. 1420—1432.

***) A l'endroit cité du tome LII des Comptes Rendus Mr. Chasles prouve que six droites d'un même complexe linéaire (défini par lui de la manière indiquée) peuvent être les directions de six forces en équilibre. On peut donc, comme l'a fait Mr. Cayley, employer les six coordonnées d'une droite à déduire les propriétés de ces droites ou de „six droites en involution“, dont la question est premièrement introduite dans la science par Mr. Sylvester (Comptes Rendus LII, p. 74).

$$\frac{da^2 \cdot l'}{x} = \frac{db^2 \cdot m'}{y} = \frac{dc^2 \cdot n'}{z}$$

ou, selon la relation identique (8^b), que

$$\frac{da \cdot l'}{\frac{x}{da}} = \frac{db \cdot m'}{\frac{y}{db}} = \frac{dc \cdot n'}{\frac{z}{dc}} = \frac{1}{\sqrt{\left(\frac{x}{da}\right)^2 + \left(\frac{y}{db}\right)^2 + \left(\frac{z}{dc}\right)^2}} \cdot$$

En substituant les valeurs de l', m', n' que donnent ces équations (et $x' = y' = z' = 0$) dans la formule (5), on trouve

$$[K, K'] = \sqrt{\left(\frac{x}{da}\right)^2 + \left(\frac{y}{db}\right)^2 + \left(\frac{z}{dc}\right)^2} = r.$$

En faisant cette équation rationnelle et, au moyen de la relation identique (9^b), homogène, on trouve

$$(23) \qquad \left(\frac{x}{da}\right)^2 + \left(\frac{y}{db}\right)^2 + \left(\frac{z}{dc}\right)^2 =$$
$$= r^2 \left[da^2 (y-z+l)^2 + db^2 (z-x+m)^2 + dc^2 (x-y+n)^2\right],$$

qui sera l'équation cherchée.

Les mêmes procédés, ou bien une transformation des coordonnées, pourront nous donner l'équation déterminant le même complexe par rapport à un tétraèdre de référence dans une position quelconque, mais où toujours $(bdc) = (cda) = (adb) = \frac{\pi}{2}\cdot$ Alors le centre de la sphère pourrait être déterminé au moyen des équations (13) et (16). — L'équation du complexe serait très compliquée, si l'on prenait un tétraèdre de référence d'une figure parfaitement arbitraire.

4°. **L'équation du complexe des tangentes d'un hyperboloide à une nappe.** Nous regarderons aussi dans cette question le cas où la surface est dans une position particulière par rapport au tétraèdre de référence, en supposant que les arêtes db et ca soient deux génératrices de l'une des générations, da et bc deux génératrices de l'autre. Alors, si nous désignons les coordonnées d'une génératrice de la première génération par x', y' ..., celles d'une génératrice de l'autre génération par x'', y'' ..., on doit avoir

$$(24) \qquad \begin{cases} x' = 0 \quad , \quad l' = 0, \\ y'' = 0 \quad , \quad m'' = 0, \end{cases}$$

et, selon (6),

$$(25) \qquad \begin{cases} y' m' + z' n' = 0, \\ x'' l'' + z'' n'' = 0, \end{cases}$$

et comme les deux génératrices doivent se rencontrer, selon (7),

$$(26) \qquad n' z'' + z' n'' = 0.$$

Pour déterminer l'hyperboloide on a besoin de connaître encore une seule génératrice de l'une des deux générations. Prenons dans la première génération celle dont les coordonnées y' et m' sont égales. Selon les équations (24), (25) et (26), les coordonnées de celle-ci prendront les formes suivantes

$$\frac{x'}{0} = \frac{l'}{0} = \frac{y'}{\sqrt{\lambda}} = \frac{m'}{\sqrt{\lambda}} = \frac{z'}{-\lambda} = \frac{n'}{1},$$

et il y aura en même temps dans l'autre génération une génératrice déterminée par les coordonnées

$$\frac{x''}{-\sqrt{\lambda}} = \frac{l''}{\sqrt{\lambda}} = \frac{y''}{0} = \frac{m''}{0} = \frac{z''}{\lambda} = \frac{n''}{1},$$

λ étant un paramètre dont la variation donnera tous les hyperboloides dans la position indiquée par rapport au tétraèdre de référence.*)

En prenant ces deux droites, à côté des arêtes db et ca, da et bc, pour directrices respectivement pour la seconde et la première génération, on doit, pour déterminer des génératrices quelconques, ajouter aux équations (24) et (25) les suivantes

$$\sqrt{\lambda}\,(x'-l') + z' + \lambda n' = 0,$$
$$\sqrt{\lambda}\,(y''+m'') + z'' - \lambda n'' = 0,$$

ou, selon les équations (24),

$$(27)\qquad \begin{cases} z' + \lambda n' = 0, \\ z'' - \lambda n'' = 0. \end{cases}$$

Alors l'équation (26) ne sera qu'une conséquence des autres.

Les tangentes de l'hyperboloide sont les droites qui à la fois passent par le point de rencontre et se trouvent dans le plan, de deux génératrices quelconques appartenant aux deux générations. En désignant les coordonnés d'une tangente par $x, y \ldots$ on a, selon les équations (13), (16) et (17) de la troisième partie (où seulement $x' = l' = y'' = m'' = 0$)

$$(28)\qquad \begin{cases} m'y + y'm + n'z + z'n = 0, \\ l''x + x''l + n''z + z''n = 0, \end{cases}$$

$$(29)\qquad \begin{cases} y'z''x + z'x''y - y'x''z = 0, \\ y'n''x + n'x''y - y'x''n = 0. \end{cases}$$

En éliminant de ces quatre équations et des quatre équations (25) et (27) les rapports de $y' : m' : z' : n'$ et de $x'' : l'' : z'' : n''$, on trouve deux équations, qui peuvent être réduites à l'équation identique (6) et à

*) Les deux génératrices seront imaginaires, si λ devient négatif. Dans ce cas on pourrait les remplacer par les génératrices déterminées de la manière suivante:

$$\frac{x'}{0} = \frac{l'}{0} = \frac{y'}{-\sqrt{-\lambda}} = \frac{m'}{\sqrt{-\lambda}} = \frac{z'}{-\lambda} = \frac{n'}{1},$$

$$\text{et}\quad \frac{x''}{\sqrt{-\lambda}} = \frac{l''}{\sqrt{-\lambda}} = \frac{y''}{0} = \frac{m''}{0} = \frac{z''}{\lambda} = \frac{n''}{1},$$

ce qui n'altère ni l'équation (27), ni les résultats ultérieurs.

une autre équation. Celle-là est introduite par les équations (29),*) et celle-ci sera l'équation cherchée. Elle sera

$$(z+\lambda n)^2 + 4\lambda xl = 0, \tag{30}$$

ou bien

$$(z-\lambda n)^2 - 4\lambda ym = 0.$$

Les mêmes procédés peuvent être employés dans le cas où l'hyperboloide est placé d'une manière quelconque par rapport au tétraèdre de référence. On parviendra au même résultat en appliquant une transformation des coordonnées au résultat déjà trouvé.

VI. Surfaces-complexes.

Nous finirons cet article par la recherche des équations qui, dans le système de coordonnées dont nous faisons usage ici, déterminent les surfaces auxquelles Mr. Plücker a donné le nom de surfaces-complexes (Complexflächen). Comme nous ne faisons ici usage, ni de coordonnées ponctuelles ni de coordonnées planaires, nous ne chercherons, ni les équations auxquelles les points de ces surfaces, ni celles auxquelles leurs plans doivent satisfaire, mais, comme dans les exemples précédents, celles qui ont lieu entre les six coordonnés de leurs tangentes.

Une surface-complexe d'une droite fixe K', par rapport à un complexe de droites, a deux définitions dont l'identité est évidente:

1°. Elle est le lieu des courbes planes, enveloppes des droites du complexe qui se trouvent dans un même plan passant par la droite fixe K'.

2°. Elle est l'enveloppe des cônes, lieux des droites du complexe qui passent par un même point de la droite fixe K'.

Toutes les surfaces-complexes par rapport au complexe des tangentes d'une surface ou par rapport à celui des droites qui rencontrent une courbe, se réduiront à la surface ou à la courbe elles-mêmes.

De la double définition d'une surface-complexe, on tire les propriétés suivantes de ses points et de ses plans tangents:

*) Comparer la partie IV de cet article où nous avons indiqué que chacune des équations (16) et (17) remplace la relation identique (6). On n'obtiendra que cette seule équation, si l'on ne fait pas usage de toutes les deux équations (29); mais il sera bien permis, pour obtenir l'équation cherchée, d'omettre, par exemple, une des deux équations (28).

Un point de la surface-complexe est un point de rencontre de deux droites consécutives du complexe qui sont dans un même plan passant par la droite fixe K'.

Un plan tangent de la surface-complexe est un plan passant par deux droites consécutives du complexe qui rencontrent la droite fixe au même point.

Il s'ensuit qu'une tangente de la surface-complexe rencontre

1°. une droite K du complexe rencontrant la droite fixe K',

2°. la droite consécutive à K qui se trouve dans le plan déterminé par K et K',

3°. la droite consécutive à K qui passe par le point de rencontre de K et K'.

Les tangentes de la surface-complexe ne seront pas pourtant les seules droites qui rencontrent trois droites déterminées de la manière indiquée. Puisque les deux dernières de celles-ci rencontrent la première, une droite qui satisfait aux trois conditions passe ou par le point de rencontre de K avec la première des droites consécutives ou par son point de rencontre avec la seconde. Dans le premier cas, elle est une tangente de la surface-complexe, dans l'autre elle n'est qu'une droite du complexe des droites qui rencontrent K'. En ne séparant pas ces deux espèces de droites, nous ne ferons donc qu'introduire dans l'équation résultante un facteur étranger qu'on peut éloigner ensuite.*)

Soient $x', y', \ldots$ les coordonnées de la droite fixe K', $x, y, \ldots$ celles d'une droite K faisant partie du complexe, que nous supposons donné au moyen de l'équation homogène

$$F(x, l, y, m, z, n) = 0, \tag{31}$$

et rencontrant K', ce qui s'exprime au moyen de l'équation

$$l'x + x'l + m'y + y'm + z'n + n'z = 0. \tag{32}$$

Les coordonnées $x, y, \ldots$ satisfont enfin à l'équation identique et homogène

$$xl + ym + zn = 0, \tag{33}$$

et à l'équation identique et non homogène du second degré (9) que nous écrirons

$$S = 1. \tag{34}$$

Si nous désignons les coordonnées d'une tangente quelconque de la

*) La circonstance que K' sera une droite multiple de la surface-complexe ne fait pas que toutes les droites qui rencontrent K' en soient des tangentes.

surface-complexe cherchée par $X, Y, \ldots$, la première des trois conditions auxquelles ces tangentes sont assujéties donne

$$Lx + Xl + My + Ym + Nz + Zn = 0. \tag{35}$$

Soient ensuite $x + \delta x$, $l + \delta l$, $y + \delta y$, $m + \delta m$, $z + \delta z$, $n + \delta n$ les coordonnées de la droite du complexe consécutive à K qui se trouve dans le plan déterminé par K et K'. Alors les équations (13) et (17) (réduites au moyen des équations (32) et (33)) donnent

$$\begin{aligned}
l \,.\, \delta x + x \,.\, \delta l + m \,.\, \delta y + y \,.\, \delta m + n \,.\, \delta z + z \,.\, \delta n &= 0, \\
l' \,.\, \delta x + x' \,.\, \delta l + m' \,.\, \delta y + y' \,.\, \delta m + n' \,.\, \delta z + z' \,.\, \delta n &= 0, \\
(yn' - ny') \,.\, \delta x + (nx' - xn') \,.\, \delta y + (xy' - yx') \,.\, \delta n &= 0,
\end{aligned}$$

et les équations (31) et (34) donnent

$$\begin{aligned}
\frac{\partial F}{\partial x} \cdot \delta x + \frac{\partial F}{\partial l} \cdot \delta l + \frac{\partial F}{\partial y} \cdot \delta y + \frac{\partial F}{\partial m} \cdot \delta m + \frac{\partial F}{\partial z} \cdot \delta z + \frac{\partial F}{\partial n} \cdot \delta n &= 0, \\
\frac{\partial S}{\partial x} \cdot \delta x + \frac{\partial S}{\partial l} \cdot \delta l + \frac{\partial S}{\partial y} \cdot \delta y + \frac{\partial S}{\partial m} \cdot \delta m + \frac{\partial S}{\partial z} \cdot \delta z + \frac{\partial S}{\partial n} \cdot \delta n &= 0.
\end{aligned}$$

On exprime enfin que la tangente de la surface-complexe rencontre cette droite, au moyen de l'équation

$$L \,.\, \delta x + X \,.\, \delta l + M \,.\, \delta y + Y \,.\, \delta m + N \,.\, \delta z + Z \,.\, \delta n = 0.$$

En éliminant $\delta x, \delta y, \ldots$ de ces six équations, on trouve que la deuxième des trois conditions s'exprime au moyen de l'équation suivante

$$\begin{vmatrix}
l, & x, & m, & y, & n, & z \\
l', & x', & m', & y', & n', & z' \\
yn' - ny', & 0, & nx' - xn', & 0, & 0, & xy' - yx' \\
\frac{\partial F}{\partial x}, & \frac{\partial F}{\partial l}, & \frac{\partial F}{\partial y}, & \frac{\partial F}{\partial m}, & \frac{\partial F}{\partial z}, & \frac{\partial F}{\partial n} \\
\frac{\partial S}{\partial x}, & \frac{\partial S}{\partial l}, & \frac{\partial S}{\partial y}, & \frac{\partial S}{\partial m}, & \frac{\partial S}{\partial z}, & \frac{\partial S}{\partial n} \\
L, & X, & M, & Y, & N, & Z
\end{vmatrix} = 0.$$

Cette équation peut être réduite au moyen des équations (31) — (35). En effet, multiplions tous les termes des colonnes verticales respectivement par

$$x, \; l, \; y, \; m, \; z, \; n,$$

et prenons les sommes des termes des séries horizontales, multiplions ensuite les mêmes termes (du déterminant originaire) par

$$x', \; l', \; y', \; m', \; z', \; n',$$

et faisons les mêmes additions; alors, en posant

$$x' \cdot \frac{\partial F}{\partial x} + l' \cdot \frac{\partial F}{\partial l} + y' \cdot \frac{\partial F}{\partial y} + m' \cdot \frac{\partial F}{\partial m} + z' \cdot \frac{\partial F}{\partial z} + n' \cdot \frac{\partial F}{\partial n} = \Sigma\left(x' \cdot \frac{\partial F}{\partial x}\right),$$

et en employant les notations analogues pour les sommes analogues, on trouve les deux colonnes suivantes:

$$\begin{array}{ccc} 0 & , & 0 \\ 0 & , & 0 \\ 0 & , & 0 \\ 0 & , & \Sigma\left(x'\dfrac{\partial F}{\partial x}\right) \\ 2 & , & \Sigma\left(x'\dfrac{\partial S}{\partial x}\right) \\ 0 & , & \Sigma(x'L), \end{array}$$

qui peuvent remplacer la première et la troisième colonne de l'équation trouvée. Alors celle-ci se réduira à l'équation suivante:

$$\begin{vmatrix} x & , & y & , & n & , & 0 \\ x' & , & y' & , & n' & , & 0 \\ \dfrac{\partial F}{\partial l} & , & \dfrac{\partial F}{\partial m} & , & \dfrac{\partial F}{\partial z} & , & \Sigma\left(x'\dfrac{\partial F}{\partial x}\right) \\ X & , & Y & , & N & , & \Sigma(x'L) \end{vmatrix} = 0 .$$

La déduction de l'équation qui exprime la troisième condition (qu'une tangente rencontre la droite consécutive à K qui passe par le point de rencontre de K et K'), est parfaitement analogue à celle que nous venons d'employer pour la deuxième condition. On doit seulement faire usage de l'équation (16) au lieu de l'équation (17), de façon qu'on ait partout à changer les coordonnées n contre les coordonnées z, et réciproquement. Les deux dernières conditions s'expriment donc à la fois par les deux équations suivantes:

$$(36)\qquad \left\|\begin{matrix} x & , & y & , & n & , & z & , & 0 \\ x' & , & y' & , & n' & , & z' & , & 0 \\ \dfrac{\partial F}{\partial l} & , & \dfrac{\partial F}{\partial m} & , & \dfrac{\partial F}{\partial z} & , & \dfrac{\partial F}{\partial n} & , & \Sigma\left(x'\dfrac{\partial F}{\partial x}\right) \\ X & , & Y & , & N & , & Z & , & \Sigma(x'L) \end{matrix}\right\| = 0 .$$

On obtiendra donc l'équation de la surface-complexe cherchée en éliminant les rapports de $x:l:y:m:z:n$ des six équations (31), (32), (33), (35) et (36). Pour effectuer cette élimination, il faut qu'on connaisse la forme particulière de la fonction F; mais, aussi en général, on peut donner aux équations nécessaires pour l'élimination des formes plus commodes ou, au moins plus symmétriques. En effet, le tétraèdre de référence n'ayant aucune position particulière par rapport au complexe donné (31), x, y et n ne sont que trois coordonnées d'une droite par rapport à trois arêtes qui se trouvent dans une même face, et x, y, z en sont trois qui sont rapportées à trois arêtes qui concourent à un même sommet. Par conséquent, il y aura plusieurs équations analogues aux équations (36), qui pourront remplacer le même nombre d'équations déjà trouvées. Les équations (36) et les équations analogues seront toutes comprises dans les suivantes

$$\begin{vmatrix} l, & x, & m, & y, & n, & z, & 0 \\ l', & x', & m', & y', & n', & z', & 0 \\ \frac{\partial F}{\partial x}, & \frac{\partial F}{\partial l}, & \frac{\partial F}{\partial y}, & \frac{\partial F}{\partial m}, & \frac{\partial F}{\partial z}, & \frac{\partial F}{\partial n}, & \Sigma\left(x'\frac{\partial F}{\partial x}\right) \\ L, & X, & M, & Y, & N, & Z, & \Sigma(x'L) \end{vmatrix} = 0.$$

Les équations (31) et (35) et la relation identique

$$XL + YM + ZN = 0$$

permettent d'y ajouter encore les deux colonnes que nous écrirons ici à côté des autres:

$$(37)\quad \begin{vmatrix} l, & x, & m, & y, & n, & z, & 0, & 0, & 0 \\ l', & x', & m', & y', & n', & z', & 0, & \Sigma\left(x'\frac{\partial F}{\partial x}\right), & \Sigma(x'L) \\ \frac{\partial F}{\partial x}, & \frac{\partial F}{\partial l}, & \frac{\partial F}{\partial y}, & \frac{\partial F}{\partial m}, & \frac{\partial F}{\partial z}, & \frac{\partial F}{\partial n}, & \Sigma\left(x'\frac{\partial F}{\partial x}\right), & \Sigma\left(\frac{\partial F}{\partial x}\cdot\frac{\partial F}{\partial l}\right), & \Sigma\left(X\frac{\partial F}{\partial x}\right) \\ L, & X, & M, & Y, & N, & Z, & \Sigma(x'L), & \Sigma\left(X\frac{\partial F}{\partial x}\right), & 0 \end{vmatrix} = 0,$$

où les notations abréviatives Σ sont déjà expliquées.*)

Voici donc six autres équations qui donnent aussi, après l'élimination des rapports de $x:l\ldots$, l'équation de la surface-complexe.

Entre ces équations se trouve la suivante

$$\begin{vmatrix} 0, & \Sigma\left(x'\frac{\partial F}{\partial x}\right), & \Sigma(x'L) \\ \Sigma\left(x'\frac{\partial F}{\partial x}\right), & \Sigma\left(\frac{\partial F}{\partial x}\cdot\frac{\partial F}{\partial l}\right), & \Sigma\left(X\frac{\partial F}{\partial x}\right) \\ \Sigma(x'L), & \Sigma\left(X\frac{\partial F}{\partial x}\right), & 0 \end{vmatrix} =$$

$$= \Sigma(x'L)\left[\Sigma\left(x'\frac{\partial F}{\partial x}\right)\cdot\Sigma\left(X\frac{\partial F}{\partial x}\right) - \Sigma\left(\frac{\partial F}{\partial x}\cdot\frac{\partial F}{\partial l}\right)\cdot\Sigma(x'L)\right] = 0$$

ou après l'éloignement du facteur étranger $\Sigma(x'L)$, qui, égalé à zéro ne donnerait que le complexe de droites rencontrant la droite fixe K', et dont nous avons déjà parlé,

$$(38)\qquad 2\,\Sigma\left(x'\frac{\partial F}{\partial x}\right)\cdot\Sigma\left(X\frac{\partial F}{\partial x}\right) - \Sigma\left(\frac{\partial F}{\partial x}\cdot\frac{\partial F}{\partial l}\right)\cdot\Sigma(x'L) = 0.$$

---

*) Il faut remarquer que

$$\Sigma\left(\frac{\partial F}{\partial x}\cdot\frac{\partial F}{\partial l}\right) = 2\left(\frac{\partial F}{\partial x}\cdot\frac{\partial F}{\partial l} + \frac{\partial F}{\partial y}\cdot\frac{\partial F}{\partial m} + \frac{\partial F}{\partial z}\cdot\frac{\partial F}{\partial n}\right).$$

Dans le cas particulier, ou

$$(39)\qquad \Sigma\left(\frac{\partial F}{\partial x}\cdot\frac{\partial F}{\partial l}\right) = 0,$$

ce qui a lieu pour le complexe des tangentes d'une surface ou des droites rencontrant une courbe — comme l'a prouvé Mr. Cayley*) — l'équation (38) se réduit à l'une ou l'autre des deux suivantes:

$$(40)\qquad \Sigma\left(X\frac{\partial F}{\partial x}\right) = 0 \quad , \quad \Sigma\left(x'\frac{\partial F}{\partial x}\right) = 0 .$$

Exemples. 1°. Dans le cas d'un complexe linéaire

$$\alpha . x + \beta . l + \gamma . y + \delta . m + \varepsilon . z + \zeta . n = 0,$$

on a

$$\frac{\partial F}{\partial x} = \alpha\ ,\ \frac{\partial F}{\partial l} = \beta\ ,\ \frac{\partial F}{\partial y} = \gamma\ ,\ \frac{\partial F}{\partial m} = \delta\ ,\ \frac{\partial F}{\partial z} = \varepsilon\ ,\ \frac{\partial F}{\partial n} = \zeta\ ,$$

de façon que l'équation (38) se réduit à la suivante

$$(41)\qquad 2\,\Sigma(x'\alpha)\,.\,\Sigma(X\alpha) - \Sigma(\alpha\beta)\,.\,\Sigma(x'L) = 0\,,$$

qui ne contient pas les coordonnées x, y, ..., et qui sera par conséquent l'équation de la surface-complexe cherchée. Etant du premier degré, et représentant le complexe de droites tangentes à une surface ou rencontrant une ligne droite ou courbe, elle ne peut que représenter le complexe de droites rencontrant une certaine droite fixe. Posons, pour trouver les propriétés de celle-ci,

$$(42)\qquad \frac{\alpha}{l'+\lambda l''} = \frac{\beta}{x'+\lambda x''} = \frac{\gamma}{m'+\lambda m''} = \frac{\delta}{y'+\lambda y''} = \frac{\varepsilon}{n'+\lambda n''} = \frac{\zeta}{z'+\lambda z''},$$

où aussi x'', y'', ... satisfont aux conditions auxquelles les coordonnées d'une droite sont assujéties; alors l'équation (41) se réduira à la suivante

$$\Sigma(x'l'')\,.\,\Sigma(Xl'') = 0,$$

ou si la quantité constante $\Sigma(x'l'')$ n'est pas zéro à

$$(43)\qquad \Sigma(Xl'') = l''X + x''L + m''Y + y''M + n''Z + z''N = 0,$$

qui exprime que la droite $(X, Y, \ldots)$ rencontre une droite fixe $(x'', y'', \ldots)$. Or, les équations (42) étant les mêmes que les équations (19), la droite $(x'', y'', \ldots)$ sera la polaire conjuguée à la droite fixe K' par rapport au complexe. Ainsi, la surface-complexe de K' par rapport au complexe linéaire se rédnit à cette polaire conjuguée.

Dans le cas où $\Sigma(x'l'') = 0$, c'est à dire dans le cas où la droite K' rencontre sa polaire conjuguée, l'équation (41) devient identique,

*) Quart. Math. Journ. t. III, p. 227.

et l'on voit aussi sans difficulté, que toute droite satisfait alors à nos trois conditions.*)

2°. Le complexe de tangentes d'un hyperboloide qui a les arêtes *db*, *ca*, *da* et *bc* du tétraèdre de référence pour génératrices des deux générations, se détermine par l'équation (30)

$$(z+\lambda n)^2 + 4\lambda x l = 0.$$

On en tire

$$\frac{\partial F}{\partial x} = 4\lambda . l, \quad \frac{\partial F}{\partial l} = 4\lambda . x, \quad \frac{\partial F}{\partial y} = \frac{\partial F}{\partial m} = 0, \quad \frac{\partial F}{\partial z} = 2(z+\lambda n),$$
$$\frac{\partial F}{\partial n} = 2\lambda(z+\lambda n),$$

qui donnent

$$\Sigma\left(\frac{\partial F}{\partial x} \cdot \frac{\partial F}{\partial l}\right) = 8\left[4\lambda x l + (z+\lambda n)^2\right] = 0.$$

L'équation (38) se réduit conséquemment à l'une ou l'autre des deux équations (40). Commençons par supposer que ce soit la première qui ait lieu. Celle-ci s'écrira

$$2\lambda(lX+xL) + (z+\lambda n)(Z+\lambda N) = 0$$

ou, à cause de l'équation donnée,

$$\lambda(lX+xL)^2 + xl(Z+\lambda N)^2 = 0.$$

$\Sigma\left(X\frac{\partial F}{\partial x}\right)$ étant égal à zéro, une autre des équations (37) formée des trois premières colonnes et de la dernière se reduira à

$$\begin{vmatrix} l, & x, & m \\ 4\lambda l, & 4\lambda x, & 0 \\ L, & X, & M \end{vmatrix} = 0,$$

d'où l'on tire sans difficulté l'équation $\left(\text{à cause de } \frac{l}{4\lambda l} = \frac{x}{4\lambda x}\right)$

$$lX - xL = 0,$$

au moyen de laquelle l'équation déjà trouvée se réduit à

$$4\lambda X L + (Z+\lambda N)^2 = 0$$

ou à l'équation du complexe donné.

*) Dans ce cas, les équations (42) nous montrent que

$$\alpha\beta + \gamma\delta + \varepsilon\zeta = 0,$$

de façon que toutes les droites du complexe rencontrent une droite fixe. Celle-ci est rencontrée par la droite K', et toutes les droites qui se trouvent dans le plan et passent par le point de rencontre de ces deux droites fixes, sont polaires conjuguées à K'. — Ce cas particulier excepté, on peut déterminer au moyen de l'équation (41) la polaire conjuguée à une droite donnée, sans avoir recours, comme auparavant, à la relation identique (9).

De même la dernière des équations (40) conduirait à l'équation

$$4\lambda x' l' + (z' + \lambda n')^2 = 0,$$

qui ne contient aucune quantité variable. Par conséquent, si les quantités données ne satisfont pas à cette dernière équation, c'est-à-dire si la droite donnée K' n'est pas tangente à l'hyperboloide, celui-ci sera lui-même la surface-complexe. Dans le cas où K' est tangente à l'hyperboloide toute droite satisfait aux trois conditions; mais aussi alors on doit considérer l'hyperboloide comme la surface-complexe.

Projectivische Erzeugung der allgemeinen Flächen dritter, vierter und beliebiger Ordnung durch Flächenbündel niederer Ordnung.

Von Th. Reye in Zürich.

Wie die analytische Geometrie meistens von den Gleichungen der Curven und Flächen ausgeht, so bildet in der synthetischen Geometrie die Erzeugungsart einer Curve, Fläche oder eines Strahlengebildes gewöhnlich den Ausgangspunkt für die Untersuchung derselben. Man lässt ein Gebilde aus anderen einfacheren entstehen oder durch sie beschreiben, und gewinnt dadurch nicht nur eine Anschauung von demselben, sondern zugleich kräftige Hülfsmittel zur Erforschung seiner Eigenschaften. Deshalb kann das Auffinden neuer Erzeugungsarten räumlicher Gestalten von grosser Wichtigkeit werden, und führt, wie noch in jüngster Zeit die Theorie der Raumcurven und Flächen dritter Ordnung gezeigt hat, häufig auf kürzestem Wege zu den Haupteigenschaften jener Gebilde.

Nun ist merkwürdig, dass wohl von den algebraischen ebenen Curven, nicht aber von den algebraischen Flächen und Raumcurven eine einfache, für die synthetische Geometrie brauchbare Erzeugungsart bekannt ist. Eine ebene Curve $p+q^{\text{ter}}$ Ordnung kann allemal durch zwei projectivische Curvenbüschel von den Ordnungen p und q erzeugt werden; eine Fläche von der Ordnung $p+q$ dagegen lässt sich nur dann als Erzeugniss von zwei projectivischen Flächenbüscheln p^{ter} und q^{ter} Ordnung darstellen, wenn sie unendlich viele Schnittcurven von Flächen p^{ter} und q^{ter} Ordnung enthält. Dieses findet bei den Flächen vierter und höherer Ordnung nur in besonderen Fällen statt; und da andere, synthetisch anwendbare Erzeugungsarten fehlten, so waren bisher diese Flächen und ihre Schnittcurven für die synthetische Geometrie nur auf Umwegen zugänglich. Diesem Mangel kann abgeholfen werden, indem man als erzeugende Gebilde nicht allein Flächenbüschel, sondern auch Flächenbündel (Flächennetze) benutzt.

Die vorliegende Arbeit enthält allgemeine Erzeugungsarten der Flächen dritter und vierter Ordnung durch projectivische Flächenbündel niederer Ordnung. Durch ihre Entwickelungen zeichnet sie zugleich einen Weg vor, auf welchem man zu analogen Erzeugungsarten einer Fläche n^{ter} Ordnung gelangt. Wir werden ausgehen von einer Anzahl, wie ich glaube, neuer Sätze über die Schnittpunkte von drei und die Durchdringungscurven von zwei algebraischen Flächen, und bezeichnen im Folgenden der Kürze wegen:

mit F^n, F_1^n, F_2^n beliebige Flächen, mit K^n, K_1^n Kegelflächen n^{ter} Ordn.;
mit $C^{l.n}, C_1^{l.n}$ Schnittlinien von zwei Flächen F^l und F^n;
mit (l, m, n) die $l.m.n$ Schnittpunkte von drei Flächen F^l, F^m, F^n, welche nicht alle drei durch eine und dieselbe Curve gehen.

Unter den Curven, welche als der vollständige Schnitt von zwei Flächen betrachtet werden können, giebt es z. B. drei Curven zwölfter Ordnung $C^{1.12}$, $C^{2.6}$ und $C^{3.4}$. Dieselben unterscheiden sich durch unsere Bezeichnung deutlich von einander; die erste ist eine ebene Curve, die zweite der Schnitt einer F^2 mit einer F^6, und die dritte der Schnitt einer F^3 mit einer F^4.

§. 1.

Die 16 Schnittpunkte (2, 2, 4) von zwei Flächen F^2 mit einer F^4.

1. Eine F^4 ist bekanntlich durch 34 beliebig gewählte Punkte bestimmt. Wenn 25 derselben auf einer F^2 angenommen werden, so zerfällt F^4 in F^2 und eine F_1^2, welche die übrigen neun Punkte verbindet. Beliebige 33 Punkte bestimmen eine $C^{4.4}$, welche mit jedem Punkte des Raumes durch eine F^4 verbunden werden kann, durch welche also ein Büschel von F^4 hindurchgeht. Wenn 24 dieser 33 Punkte auf einer F^2 angenommen werden, so zerfällt $C^{4.4}$ in zwei $C^{2.4}$, von denen die eine $(C^{2.4})$ auf F^2, die andere $(C_1^{2.4})$ auf einer durch die übrigen neun Punkte gehenden F_1^2 liegt. Denn zu dem Flächenbüschel $C^{4.4}$ gehört in diesem Falle auch diejenige F^4, welche aus F^2 und F_1^2 besteht, und diese wird von jeder anderen F^4 des Büschels in $C^{2.4}$ und $C_1^{2.4}$ geschnitten. Also: Durch 24 beliebige Punkte einer F^2 ist eine auf F^2 liegende $C^{2.4}$ bestimmt; in derselben wird F^2 von jeder durch die 24 Punkte gehenden F^4 geschnitten.

2. Von F_1^2 wird F^2 in einer $C^{2.2}$, und $C^{2.4}$ in 16 Punkten geschnitten; und diese 16 Punkte (2, 2, 4) liegen auch auf $C_1^{2.4}$. Wenn $C^{2.4}$ und F_1^2 gegeben sind, so können wir zur Bestimmung von $C_1^{2.4}$ noch neun Punkte derselben willkürlich auf F_1^2 annehmen (1.); woraus folgt, dass jede auf F_1^2 construirte $C_1^{2.4}$, welche durch 15 von den 16 Punkten (2, 2, 4) hindurchgeht, auch den 16^{ten} enthalten muss. Daraus aber ergiebt sich sofort: Alle Flächen vierter Ordnung, welche durch 15 gegebene Punkte einer $C^{2.2}$ hindurchgehen,

schneiden diese Raumcurve vierter Ordnung noch in einem ganz bestimmten 16^{ten} Punkte. Bei der Bestimmung einer F^4 durch 34 Punkte zählen also 16 Punkte (2, 2, 4) nur für 15 unabhängige Punkte, und wir können ausser ihnen noch 19 andere Punkte von F^4 willkürlich annehmen. Wird eine F^4 durch 16 beliebig angenommene Punkte einer $C^{2.2}$ gelegt, so muss sie mehr als 16 und folglich alle Punkte von $C^{2.2}$ enthalten.

3. Wir können von (2.) eine interessante Anwendung auf die $C^{2.2}$ machen. Schneiden wir eine $C^{2.2}$ durch drei Ebenen ε_1, ε_2. ε_3 in den Punktenquadrupeln A_1, B_1, C_1, D_1; A_2, B_2, C_2, D_2 und A_3, B_3, C_3, D_3, und suchen wir sodann die vierten Schnittpunkte A_4, B_4, C_4, D_4 von $C^{2.2}$ mit den Ebenen $A_1 A_2 A_3$, $B_1 B_2 B_3$, $\overline{C_1 C_2 C_3}$ und $D_1 D_2 D_3$, so liegen auch diese in einer Ebene. Denn die vier Ebenen der A, B, C und D bilden zusammen eine F^4, und jede andere F^4, welche durch 15 von ihren 16 Schnittpunkten mit $C^{2.2}$ geht, muss folglich auch den 16^{ten} enthalten. Offenbar aber bilden die vier Ebenen ε_1, ε_2, ε_3 und $\overline{A_4 B_4 C_4}$ eine solche F^4, und D_1 liegt folglich in $A_4 B_4 C_4$. — Lassen wir ε_1, ε_2 und ε_3 zusammenfallen, so erhalten wir den bemerkenswerthen Satz:

4. Die Schmiegungsebenen von vier in einer Ebene ε_1 liegenden Punkten einer $C^{2.2}$ schneiden diese Raumcurve in vier neuen Punkten, welche gleichfalls in einer Ebene liegen. Diese Eigenschaft der $C^{2.2}$ ist einer bekannten Eigenschaft der $C^{1.3}$ analog. Schon an einem anderen Orte habe ich daraus geschlossen: „dass die 16 Berührungspunkte der stationären Schmiegungsebenen einer $C^{2.2}$ zu vieren in 140 Ebenen liegen, von denen „durch jeden der 16 Punkte 35 hindurchgehen.“ Von diesen 16 Berührungspunkten und stationären Ebenen sind übrigens höchstens acht reell, so dass es unter jenen 140 Ebenen höchstens 14 giebt, welche je vier reelle Berührungspunkte verbinden. — Eine Umkehrung des obigen Satzes lautet: Wenn aus jedem der vier Schnittpunkte einer $C^{2.2}$ mit einer Ebene drei Schmiegungsebenen an $C^{2.2}$ gelegt werden, so liegen die 12 Berührungspunkte zu vieren in 27 Ebenen.

5. Wir wollen fortan die acht Schnittpunkte (2, 2, 2) von irgend drei F^2 eine Gruppe associirter Punkte nennen. Zu sieben Punkten kann der achte associirte linear construirt werden auf Grund des Hesse'schen Satzes: „Verbindet man von acht associirten Punkten irgend sechs durch eine Raumcurve dritter Ordnung, so ist die „Verbindungslinie der letzten beiden Punkte eine Secante dieser Curve.“ Ich behaupte nun: Wenn von 16 Punkten (2, 2, 4) irgend acht (P) eine Gruppe associirter Punkte bilden, so bilden auch

die übrigen acht (Q) eine solche Gruppe. Wir können nämlich (2.) die 16 Punkte mit 19 beliebigen Punkten S durch eine F^4 verbinden; und wählen wir 17 von den 19 S auf einer durch die 8 P gehenden F^2, so zerfällt F^4 in F^2 und eine F_1^2 (nach 1.). Diese F_1^2 geht durch die 8 Q und die letzten beiden, ganz beliebigen Punkte S, und meine Behauptung ist somit bewiesen, dass nämlich durch die 8 Q ein Bündel von F^2 gelegt werden kann.

6. Der soeben bewiesene Satz ist von gleicher Wichtigkeit für die Raumcurven $C^{2.2}$ wie für die Flächen F^4. Wir werden ihn meistens in folgender Fassung anwenden: Wenn eine $C^{2.2}$ und eine F^4 sich in acht associirten Punkten schneiden, so haben sie noch andere acht associirte Punkte mit einander gemein. Von acht associirten Punkten ist bekannt, dass wenn vier derselben in einer Ebene liegen, auch die übrigen vier in einer und derselben Ebene enthalten sind. Da nun eine F^3 und eine Ebene zusammen eine F^4 ausmachen, so ergiebt sich aus obigem Satze noch: Wenn eine $C^{2.2}$ und eine F^3 sich in acht associirten Punkten schneiden, so haben sie noch vier in einer Ebene liegende Punkte mit einander gemein; und umgekehrt.

§. 2.

Die Schnittcurven $C^{2.4}$ und $C^{2.3}$ einer F^2 mit einer F^4 oder F^3, und ihre Erzeugung durch projectivische Curvenbüschel.

7. Die Schnittcurve $C^{2.4}$ einer F^2 und einer F^4 hat 12 scheinbare Doppelpunkte; d. h. aus einem beliebigen Punkte P des Raumes können im Allgemeinen und höchstens 12 Secanten an $C^{2.4}$ gezogen werden. Wird nämlich P als Centrum und seine Polarebene π in Bezug auf F^2 als Involutionsebene eines involutorischen Systemes angenommen, so entspricht in demselben F^2 sich selbst und die F^4 einer F_1^4, also auch $C^{2.4}$ einer auf F^2 liegenden $C_1^{2.4}$. Die Curven $C^{2.4}$ und $C_1^{2.4}$ werden aus P durch eine und dieselbe Kegelfläche K^8 projicirt und schneiden sich in 32 Punkten (2, 4, 4), von welchen acht auf π und die übrigen 24 auf 12 durch P gehenden Secanten der $C^{2.4}$ liegen. — Ebenso ergiebt sich: Eine $C^{2.3}$ hat sechs scheinbare Doppelpunkte. Je vier durch einen beliebigen Punkt P gehende Secanten einer $C^{2.3}$ oder $C^{2.4}$ schneiden offenbar die F^2 und folglich auch die $C^{2.3}$ oder $C^{2.4}$ in acht associirten Punkten. Die Aufgabe: Auf einer $C^{2.3}$ oder $C^{2.4}$ eine Gruppe associirter Punkte zu construiren, ist hiernach leicht zu lösen.

8. „Zwei auf einer F^2 liegende $C^{2.4}$ schneiden sich in 32 Punk-„ten (2, 4, 4), welche mit jedem anderen Punkte S von F^2 durch „eine einzige $C^{2.4}$ verbunden werden können; und durch 23 dieser 32

„Punkte sind (nach 1.) im Allgemeinen die übrigen neun bestimmt.“ Wenden wir diesen allgemeinen Satz an auf die soeben betrachteten 32 Punkte, von denen acht in der Ebene π liegen, so können wir dieselben, indem wir den willkürlichen Punkt S ebenfalls in π annehmen, durch eine $C^{2.4}$ verbinden, welche in eine $C^{1.2}$ und eine $C^{2.3}$ zerfällt. Also die 24 Schnittpunkte der 12 Secanten, welche aus einem beliebigen Punkte P an eine $C^{2.4}$ gezogen werden können, liegen auf einer $C^{2.3}$. Und die zwölf Secanten selbst liegen auf einer Kegelfläche dritter Ordnung; denn da eine $C^{2.3}$ nur sechs scheinbare Doppelpunkte besitzt (7), an die vorliegende $C^{2.3}$ aber 12 Secanten aus P gezogen werden können, so wird diese $C^{2.3}$ aus P durch eine K^3 projicirt. — Man erkennt leicht, dass die 24 Schnittpunkte der 12 Secanten mit je drei anderen Punkten der $C^{2.4}$ durch unendlich viele $C^{2.4}$ verbunden werden können, und dass je zwei solche $C^{2.4}$ sich ausser in den 24 Punkten noch in acht Punkten einer $C^{1.2}$ schneiden.

9. Die sechs Secanten, welche aus einem beliebigen Punkte P an eine $C^{2.3}$ gezogen werden können, liegen auf einer K^2. Ihre 12 Schnittpunkte liegen auf einer $C^{2.2}$ und können mit je drei anderen Punkten der $C^{2.3}$ durch einen Büschel von $C^{2.3}$ verbunden werden. Je zwei durch die 12 Punkte gehende $C^{2.3}$ schneiden sich noch in sechs Punkten eines Kegelschnittes. Der Beweis dieser Sätze ist derselbe wie in (8.). — Zu bemerken ist noch, dass jede Gerade der F^2, auf welcher die $C^{2.3}$ oder $C^{2.4}$ liegt, als eine Doppelsecante von $C^{2.3}$ und als eine mehrfache Secante von $C^{2.4}$ zu betrachten ist; denn sie hat mit $C^{2.3}$ drei und mit $C^{2.4}$ vier Schnittpunkte gemein, nämlich dieselben, wie mit F^3 und F^4.

10. Zwei Flächenbüschel zweiter Ordnung sind bekanntlich projectivisch, wenn die Polarebenen eines beliebigen Punktes in Bezug auf ihre Flächen zwei projectivische Ebenenbüschel bilden; sie erzeugen alsdann eine F^4. Mittelst eines solchen Büschels von Polarebenen kann man jeden Flächenbüschel $C^{2.2}$ zweiter Ordnung leicht auf andere Gebilde projectivisch beziehen. Von einer beliebigen F^2 werden zwei projectivische Flächenbüschel zweiter Ordnung in zwei projectivischen Curvenbüscheln vierter Ordnung, und die von jenen erzeugte F^4 in einer $C^{2.4}$ geschnitten; die Polaren eines Punktes in Bezug auf die Curven $C^{2.2}$ der beiden Curvenbüschel bilden zwei gewöhnliche, projectivische Strahlenbüschel. Also: Zwei projectivische Curvenbüschel vierter Ordnung, die auf derselben F^2 liegen, erzeugen eine $C^{2.4}$, welche durch die zweimal acht Knotenpunkte der Büschel hindurchgeht. Ist die so erzeugte $C^{2.4}$ die allgemeine Durchdringungscurve einer F^2 mit einer F^4?

11. Diese Frage muss bejaht werden; denn wir können beweisen,

dass jede beliebig gegebene $C^{2.4}$ als Erzeugniss solcher Curvenbüschel sich darstellen lässt. Bei diesem Beweise wird sich der wichtige Satz (5.) auf's Neue ergeben. Wir nehmen auf $C^{2.4}$ irgend acht associirte Punkte P an (7.) und legen durch dieselben zwei beliebige $C^{2.2}$, welche auf der durch $C^{2.4}$ gehenden F^2 enthalten sind. Von diesen beiden $C^{2.2}$ wird $C^{2.4}$ noch in je acht neuen Punkten geschnitten, die wir mit $8\,Q$ und $8\,Q_1$ bezeichnen wollen. Wir betrachten nun irgend sieben von den Punkten Q und sieben Q_1 als Knotenpunkte von zwei auf F^2 liegenden Curvenbüscheln vierter Ordnung, und beziehen dieselben projectivisch so auf einander, dass in den $8\,P$ und in zwei willkürlich gewählten Punkten S von $C^{2.4}$ je zwei homologe Curven der Büschel sich schneiden. Die Büschel erzeugen dann eine $C^{2.4}$ (10.), welche mit der gegebenen identisch ist; denn beide haben die 24 Punkte $8\,P+7\,Q+7\,Q_1+2\,S$ gemein, von denen $1\,Q$, $1\,Q_1$, die $2\,S$ und mehrere P als ganz beliebige Punkte der gegebenen $C^{2.4}$ betrachtet werden können, und durch 24 beliebige Punkte einer F^2 ist nur eine $C^{2.4}$ möglich. Die achten Knotenpunkte der Büschel liegen folglich auch auf $C^{2.4}$, d. h. die Punkte $8\,Q$ und ebenso $8\,Q_1$ bilden eine Gruppe associirter Punkte, wie schon in (5.) auf andere Art bewiesen wurde.

12. Wenn auf einer $C^{2.4}$ acht associirte Punkte P bekannt sind, so schneidet also jede durch die $8\,P$ gelegte F^2 die $C^{2.4}$ in einer neuen Gruppe associirter Punkte $8\,Q$; und da wir einen dieser $8\,Q$ willkürlich wählen können, so erhalten wir eine Reihe solcher Gruppen. Legen wir durch die $8\,Q$ beliebige F^2, so bestimmen diese auf $C^{2.4}$ eine neue Reihe von Gruppen associirter Punkte, zu welcher auch die Gruppe $8\,P$ gehört. Aus dem Beweise in (11.) folgt dann der Satz: Die beiden Reihen von Gruppen associirter Punkte, welche sich auf einer $C^{2.4}$ ergeben, sobald eine solche Gruppe bekannt ist, hängen so von einander ab, dass jede Gruppe $8\,Q$ der einen Reihe mit jeder Gruppe $8\,P$ der anderen durch eine $C^{2.2}$ verbunden werden kann. Verbindet man auf diese Weise die Gruppen der einen Reihe mit zwei bestimmten Gruppen der anderen, so erhält man zwei projectivische Curvenbüschel vierter Ordnung, als deren Erzeugniss die $C^{2.4}$ betrachtet werden kann.

13. Wenn $C^{2.4}$ aus einer $C^{1.2}$ und einer $C^{2.3}$ besteht, so ergiebt sich für $C^{2.3}$ aus dem eben Bewiesenen die folgende Erzeugungsart. Legt man durch acht associirte Punkte Q einer $C^{2.3}$ einen Büschel von Raumcurven $C^{2.2}$, die alle mit $C^{2.3}$ auf einer F^2 liegen, so schneidet jede dieser $C^{2.2}$ die $C^{2.3}$ noch in vier, in einer Ebene liegenden Punkten P; und die Ebenen dieser $4\,P$ gehen alle durch eine Secante von $C^{2.3}$ und bilden einen zum Curvenbüschel $(8\,Q)$ projectivischen Ebenenbüschel,

welcher mit (8 Q) die $C^{2.3}$ erzeugt. Dieser Satz lässt sich auch direct beweisen, wenn man davon ausgeht, dass durch 15 beliebige Punkte einer F^2 eine auf F^2 liegende $C^{2.3}$ bestimmt ist, und dass alle Flächen F^3 dritter Ordnung, welche durch eilf gegebene Punkte einer $C^{2.2}$ hindurchgehen, diese Raumcurve vierter Ordnung noch in einem ganz bestimmten zwölften Punkte schneiden müssen.

§. 3.

Erzeugung einer F^3 oder F^4 durch reciproke Flächenbündel.

14. Drei Flächen F^2, F_1^2, F_2^2 zweiter Ordnung, welche nicht demselben Flächenbüschel angehören, bestimmen bekanntlich einen Flächenbündel zweiter Ordnung. Zu demselben rechnen wir den Flächenbüschel $F^2F_1^2$ und jeden anderen, welchen irgend eine Fläche dieses Büschels mit F_2^2 bestimmt, ausserdem aber alle Schnittcurven $C^{2.2}$ von je zwei Flächen dieser sämmtlichen Büschel. Der Flächenbündel besitzt im Allgemeinen acht Knotenpunkte P, durch welche alle seine F^2 und $C^{2.2}$ hindurchgehen. Durch jeden anderen Punkt des Raumes geht eine $C^{2.2}$ des Bündels; und zwei Punkte können durch unendlich viele oder durch eine einzige Fläche des Bündels verbunden werden, je nachdem sie auf einer $C^{2.2}$ desselben liegen oder nicht. Die Polarebenen und Polarstrahlen von je zwei beliebigen Punkten in Bezug auf alle F^2 und $C^{2.2}$ des Bündels bilden zwei collineare Strahlenbündel, deren Mittelpunkte jenen beiden Punkten in Bezug auf den Flächenbündel, d. h. auf alle seine F^2 und $C^{2.2}$, conjugirt sind. Wird ein solcher Strahlenbündel auf irgend ein anderes Gebilde, z. B. auf eine Ebene, collinear oder reciprok bezogen, so ist dadurch auch der Flächenbündel zweiter Ordnung auf dieses Gebilde collinear oder reciprok bezogen.

15. Zwei Flächenbündel 8 P und 8 P_1 zweiter Ordnung sind hiernach reciprok, wenn die polaren Strahlenbündel, welche wir für irgend einen Punkt in Bezug auf die Flächenbündel erhalten, reciprok sind. Jeder F^2 des einen Bündels entspricht eine $C^{2.2}$ des anderen; dem Flächenbüschel $C^{2.2}$ des letzteren entspricht ein zu ihm projectivischer, auf F^2 liegender Curvenbüschel des ersteren Bündels. Um die Bündel 8 P und 8 P_1 reciprok auf einander zu beziehen, können wir vier beliebigen F^2 von 8 P irgend vier $C^{2.2}$ von 8 P_1 willkürlich zuweisen; oder auch wir können zwei Flächenbüschel von 8 P auf irgend zwei Curvenbüschel von 8 P_1 projectivisch beziehen, so dass der gemeinschaftlichen F^2 der ersteren jedesmal die gemeinschaftliche $C^{2.2}$ der letzteren entspricht. Die reciproke Verwandtschaft der Bündel ist alsdann völlig festgestellt; denn Analoges gilt für die reciproke Verwandtschaft von zwei Strahlenbündeln.

16. **Zwei reciproke Flächenbündel zweiter Ordnung** $8\,P$ **und** $8\,P_1$ **erzeugen eine** F^4**, welche durch die zweimal acht Knotenpunkte der Bündel hindurchgeht.** Zu dieser F^4 rechnen wir jeden Punkt, welchen irgend eine F^2 des einen Bündels mit der entsprechenden $C^{2.2}$ des anderen gemein hat. — Bezeichnen wir nämlich die erzeugte Fläche vorläufig mit Φ, so leuchtet zunächst ein, dass Φ mit jeder F^2 der beiden Bündel eine $C^{2.4}$ gemein hat. Denn jede F^2 des Bündels $8\,P$ können wir uns durch eine $C^{2.2}$ desselben beschrieben denken; der so gewonnene Curvenbüschel von $8\,P$ erzeugt aber (nach 10.) mit dem ihm entsprechenden Flächenbüschel von $8\,P_1$ eine $C^{2.4}$, welche der vollständige Schnitt von F^2 mit Φ ist und durch die acht Knotenpunkte P hindurchgeht. Zwei solche durch die $8\,P$ gehende Schnittcurven $C^{2.4}$ haben offenbar noch andere acht associirte Punkte mit einander gemein, in welchen eine durch die $8\,P$ gehende $C^{2.2}$ von der entsprechenden F^2 des Bündels $8\,P_1$ geschnitten wird. Wir können deshalb die beiden $C^{2.4}$ als eine einzige $C^{4.4}$ auffassen (vgl. 1. und 2.) und mit einem beliebigen Punkte des Raumes, insbesondere auch mit einem der $8\,P_1$ durch eine F^4 verbinden. Diese F^4 ist aber identisch mit Φ; denn die beiden Flächen werden von jeder durch die $8\,P_1$ gelegten F^2 in zwei $C^{2.4}$ geschnitten, welche einen Punkt P_1 und 32 Punkte von $C^{4.4}$ gemein haben und folglich zusammenfallen. Die erzeugte Fläche Φ ist also wirklich eine F^4.

17. **Jede gegebene** F^4 **kann als Erzeugniss von zwei reciproken Flächenbündeln zweiter Ordnung dargestellt werden.** Um dieses zu beweisen, construiren wir (7.) auf F^4 irgend acht associirte Punkte P, und legen durch dieselben zwei Flächen F^2 und F_1^2, welche die F^4 in zwei Curven $C^{2.4}$ und $C_1^{2.4}$ schneiden. Letztere haben ausser den $8\,P$ noch acht associirte Punkte Q gemein (6.). Durch die $8\,Q$ legen wir eine F_2^2, welche die F^4 in einer $C_2^{2.4}$ und die Curven $C^{2.4}$ und $C_1^{2.4}$ noch in je acht associirten Punkten R und R_1 schneidet. Endlich wollen wir noch auf $C_2^{2.4}$ eine Gruppe associirter Punkte P_1 so annehmen, dass dieselbe mit den $8\,R$ durch eine $C^{2.2}$ und folglich (12.) auch mit den $8\,R_1$ durch eine $C_1^{2.2}$ verbunden werden kann. — Wir beziehen nun die Flächenbündel zweiter Ordnung $8\,P$ und $8\,P_1$ reciprok auf einander, sodass den Flächen F^2 und F_1^2 von $8\,P$ die Curven $C^{2.2}$ und $C_1^{2.2}$ von $8\,P_1$ entsprechen, und dass die auf F^2 und F_1^2 liegenden Curvenbüschel von $8\,P$ mit den entsprechenden Flächenbüscheln $C^{2.2}$ und $C_1^{2.2}$ von $8\,P_1$ die Curven $C^{2.4}$ und $C_1^{2.4}$ erzeugen (vgl. 11. und 12.). Diese reciproke Beziehung ist ausführbar, weil dadurch der Schnittcurve von F^2 und F_1^2, welche die $8\,Q$ mit den $8\,P$ verbindet, die durch die $8\,Q$ gehende gemeinschaftliche F_2^2 der Büschel $C^{2.2}$ und $C_1^{2.2}$ zugewiesen wird. Die beiden reciproken Bündel aber erzeugen eine F^4, welche mit der gege-

benen identisch ist; denn sie hat mit dieser die $8P_1$ sowie $C^{2.4}$ und $C_1^{2.4}$ gemein, also auch (wie in 16.) jede $C^{2.4}$, in welcher F^4 von einer durch die $8P_1$ gehenden F^2 geschnitten wird.

18. Die Punkte $8P$, $8Q$, $8R$ und $8P_1$ der vorigen Nummer können als vier beliebige Gruppen associirter Punkte der F^4 betrachtet werden, welche nur der einen Bedingung genügen müssen, dass jede derselben mit der folgenden auf einer $C^{2.2}$ liege. Die in (17.) ausgeführte Construction aber lehrt uns: Je acht Punkte von F^4, die mit den $8P$ (oder $8P_1$) auf einer $C^{2.2}$ liegen, können mit den $8P_1$ (resp. $8P$) durch eine F^2 verbunden werden; und man gewinnt auf diese Weise zwei reciproke Flächenbündel zweiter Ordnung $8P$ und $8P_1$, als deren Erzeugniss die F^4 betrachtet werden kann. Sind die acht Punkte P und ein Punkt P_1 gegeben, so können die übrigen sieben Punkte P_1 noch unendlich viele verschiedene Lagen auf F^4 haben. Wir können irgend $8Q$ construiren, indem wir eine durch die $8P$ gehende $C^{2.2}$ mit F^4 nochmals zum Durchschnitt bringen, und mit diesen $8Q$ sollen die gesuchten $8P_1$ auf einer F^2 liegen. Verbinden wir nun die $8Q$ mit dem gegebenen Punkte P_1 durch eine $C^{2.2}$, so schneidet diese die F^4 in acht neuen Punkten R, von denen einer mit P_1 zusammenfällt; und diese $8R$ liegen mit den gesuchten $7P_1$ auf einer $C^{2.2}$, welche die F^4 in dem gegebenen Punkte P_1 berühren muss. Daraus folgt: Wenn auf F^4 die acht associirten Punkte P und ein Punkt P_1 (oder auch R) gegeben sind, so liegen die übrigen sieben Punkte P_1 (resp. R) auf einer $C^{2.4}$, welche in dem gegebenen Punkte P_1 (oder R) einen Doppelpunkt besitzt.

19. Von der allgemeinen Fläche vierter Ordnung sind bisher, abgesehen von den Sätzen, die aus der Lehre von den Polarflächen sich ergeben, fast gar keine eigenthümlichen Eigenschaften entdeckt werden. Wenn ich mich nicht täusche, wird bei der Theorie derselben einst die Frage eine Rolle spielen, wann diese F^4 Schaaren von $C^{2.2}$ enthält und wie viele solche Schaaren. Sobald die F^4 irgend eine $C^{2.2}$ enthält, liegen auf ihr zwei Schaaren von $C^{2.2}$, und jede $C^{2.2}$ der einen Schaar kann mit jeder $C^{2.2}$ der anderen Schaar durch eine F^2 verbunden werden; und verbindet man so irgend zwei Raumcurven $C^{2.2}$ der einen Schaar mit jeder $C^{2.2}$ der anderen Schaar, so erhält man zwei projectivische Flächenbüschel zweiter Ordnung, als deren Erzeugniss die F^4 zu betrachten ist. Ich habe nun im zweiten Theile meiner Geometrie der Lage pag. 253 und 254 bewiesen, dass jede F^4, welche eine $C^{2.2}$ enthält, durch zwei Flächenbündel zweiter Ordnung erzeugt werden kann, deren zweimal acht Knotenpunkte auf einer $C^{2.2}$ liegen. Sollte es umgekehrt gelingen, die allgemeine F^4 als Erzeugniss von

zwei solchen Bündeln zweiter Ordnung darzustellen, durch deren 16 Knotenpunkte eine $C^{2.2}$ gelegt werden kann, so wäre damit zugleich auf F^4 das Vorhandensein von zwei Schaaren von $C^{2.2}$ nachgewiesen; freilich könnten diese $C^{2.2}$ auch imaginär sein. Mir selbst ist dieser Nachweis bis jetzt nicht gelungen.

20. Zwei Punkte heissen conjugirt in Bezug auf eine Gruppe associirter Punkte Q, wenn sie in Bezug auf drei und folglich (14.) alle durch die $8Q$ gelegten F^2 einander conjugirt sind. Sind nun auf einer F^4 irgend acht associirte Punkte P gegeben, so schneidet jede durch dieselben gelegte $C^{2.2}$ die F^4 in einer neuen Gruppe associirter Punkte Q, und die $8Q$ führen ebenso zu unendlich vielen anderen solchen Gruppen R auf F^4. Ich behaupte nun: Wenn in Bezug auf alle Gruppen associirter Punkte, welche auf F^4 in dieser Weise aus einer einzigen $8P$ sich ergeben, zu einem beliebigen Punkte A des Raumes die conjugirten gesucht werden, so erhält man als Ort derselben eine F^2. Betrachten wir nämlich die F^4 als Erzeugniss von zwei reciproken Flächenbündeln $8P$ und $8P_1$, so ist jede Gruppe $8Q$ der Schnitt einer $C^{2.2}$ von $8P$ mit der entsprechenden F^2 von $8P_1$. Die Polaren des Punktes A in Bezug auf die F^2 und $C^{2.2}$ der beiden Flächenbündel bilden aber zwei reciproke Strahlenbündel, welche eine F^2 erzeugen; und diese F^2 enthält die Punkte, welche zu A conjugirt sind in Bezug auf die Gruppen $8Q$, $8P$, $8P_1$ und in Bezug auf jede Gruppe associirter Punkte R von F^4, die mit den $8P_1$ in einer $C^{2.2}$ liegen. Berücksichtigt man noch, welche Freiheit man hat, um zu den $8P$ die $8P_1$ zu construiren (18.), so springt die Richtigkeit meiner Behauptung in die Augen.

21. Der in (16.) und (17.) eingeschlagene Weg führt mit Leichtigkeit zu folgenden Sätzen über die Flächen dritter Ordnung. Ein Flächenbündel zweiter Ordnung erzeugt mit einem zu ihm reciproken Strahlenbündel eine F^3; zu derselben rechnen wir jeden Punkt, in welchem eine F^2 oder $C^{2.2}$ des Flächenbündels von der entsprechenden Geraden oder Ebene des Strahlenbündels geschnitten wird. Durch acht associirte Punkte P einer F^3 ist ein neunter Punkt P_1 (der Gegenpunkt der $8P$) auf F^3 bestimmt; derselbe liegt in einer Ebene mit je vier Punkten Q, in welchen F^3 von einer durch die $8P$ gehenden $C^{2.2}$ noch geschnitten wird. Wenn mittelst der $4Q$ jeder $C^{2.2}$ von $8P$ eine Ebene des Gegenpunktes P_1 zugewiesen wird, so sind der Flächenbündel $8P$ und der Strahlenbündel P_1 reciprok auf einander bezogen, und F^3 kann als ihr Erzeugniss betrachtet werden. Jeder Strahl von P_1 wird alsdann von der entsprechenden F^2 des Bündels $8P$ in zwei Punkten der F^3 geschnitten.

§. 4.

Projectivische Erzeugung der allgemeinen Fläche $n+1^{ter}$ Ordnung.

22. Jede F^4 kann auch durch einen Flächenbündel dritter Ordnung und einen zu ihm reciproken Strahlenbündel erzeugt werden. Statt dieser Erzeugungsart will ich jedoch gleich eine analoge von beliebigen algebraischen Flächen angeben. Sei also gegeben eine ganz beliebige F^{n+1}, sei $C^{1.(n+1)}$ eine ebene Schnitteurve dieser Fläche und P irgend ein Punkt dieser Curve. Von einer durch P gehenden Ebene wird $C^{1.(n+1)}$ in P und ausserdem in n Punkten Q geschnitten; eine durch die nQ gelegte F^n aber schneidet die $C^{1.(n+1)}$ noch in n^2 anderen Punkten R, welche als Knotenpunkte eines Büschels von $C^{1.n}$ betrachtet werden können. Wir können demnach durch diese n^2 Punkte R auf unendlich viele Arten eine $C^{n.n}$ legen; dieselbe schneidet aber die F^{n+1} noch in n^3 neuen Punkten P_1, welche die Knotenpunkte eines Flächenbündels n^{ter} Ordnung sein werden. Durch die n^3 Punkte P_1 gehen also unendlich viele $C^{n.n}$; jede derselben schneidet aber die F^{n+1} noch in n^2 Punkten R_1, welche mit dem zuerst angenommenen Punkte P in einer Ebene liegen. Und wenn jeder $C^{n.n}$ des Flächenbündels n^3 P_1 auf diese Art eine Ebene des Strahlenbündels P zugewiesen wird, so sind die beiden Bündel reciprok auf einander bezogen und erzeugen die F^{n+1}. Auf F^{n+1} liegen auch die n Punkte Q_1, welche irgend eine F^n von n^3 P_1 mit dem entsprechenden Strahle von P gemein hat.

23. Für den Beweis dieser Sätze (22.), welche auch die vorhin angegebene Erzeugungsart (21.) der F^3 in sich schliessen, sind oben Anhaltspunkte genug gegeben, und ich übergehe ihn deshalb. In (22.) ist meine frühere Construction der F^4 (16.) nicht enthalten; die Verallgemeinerung der letzteren führt vielmehr zu folgendem Satze: Zwei reciproke Flächenbündel von den Ordnungen p und q erzeugen eine F^{p+q}; dieselbe geht durch die p^3+q^3 Knotenpunkte der beiden Bündel und enthält jeden Punkt, welchen eine Fläche des einen Bündels mit der entsprechenden Curve des anderen gemein hat. Man erkennt nämlich leicht, dass jede Fläche F^p resp. F^q der beiden Bündel von der erzeugten Fläche in einer $C^{p.(p+q)}$ resp. $C^{q.(p+q)}$ geschnitten wird, woraus der Satz folgt (vgl. 16.). Was ich hier unter reciproken Flächenbündeln verstehe, ist wohl aus dem Zusammenhange deutlich genug zu erkennen.

24. Wir können auch durch collineare Flächenbündel Flächen höherer Ordnung erzeugen; nämlich: Drei collineare Flächen-

bündel von den Ordnungen p, q und r erzeugen eine F^{p+q+r}; dieselbe geht durch die $p^3+q^3+r^3$ Knotenpunkte der drei Bündel und enthält jeden Punkt, welchen drei homologe Flächen der Bündel mit einander gemein haben. Der Beweis ist am leichtesten analytisch zu führen. Ist nämlich allgemein $F^m=0$ die Gleichung einer Fläche n^{ter} Ordnung, und bezeichnen λ, λ_1, λ_2 willkürliche Constante, so stellt die Gleichung:

$$\lambda F^p + \lambda_1 F_1^p + \lambda_2 F_2^p = 0 \tag{1}$$

die sämmtlichen Flächen eines Bündels p^{ter} Ordnung dar, wenn man den drei Constanten λ nach und nach alle positiven und negativen Zahlwerthe beilegt. Ebenso stellen die Gleichungen:

$$\lambda F^q + \lambda_1 F_1^q + \lambda_2 F_2^q = 0 \text{ und } \lambda F^r + \lambda_1 F_1^r + \lambda_2 F_2^r = 0 \tag{2}$$

zwei Flächenbündel q^{ter} und r^{ter} Ordnung dar; und diese drei Bündel sind collinear auf einander bezogen, wenn je drei Flächen derselben einander zugewiesen werden, in deren Gleichungen die Constanten λ, λ_1, λ_2 dieselben Zahlwerthe haben. Durch Elimination der drei Constanten aus (1) und (2) erhält man aber die Gleichung der von den collinearen Bündeln erzeugten Fläche, und man sieht, dass diese Gleichung vom $p+q+r^{\text{ten}}$ Grade ist.

25. Die Grassmann'sche Erzeugungsart der Fläche dritter Ordnung mittelst drei collinearer Strahlen- (oder Ebenen-) Bündel ist ein besonderer Fall von (24.). Abgesehen von diesem einen Fall $p=q=r=1$ darf übrigens die durch collineare Flächenbündel erzeugte F^{p+q+r} nicht als die allgemeine Fläche $(p+q+r)^{\text{ter}}$ Ordnung betrachtet werden. Denn schon die Fläche vierter Ordnung, welche (für $p=q=1$ und $r=2$) durch zwei collineare Ebenenbündel und einen zu denselben collinearen Flächenbündel zweiter Ordnung erzeugt wird, ist nur ein besonderer Fall der F^4, weil sie durch diejenige Raumcurve dritter Ordnung hindurchgeht, in deren Punkten je zwei homologe Strahlen der collinearen Ebenenbündel sich schneiden.

Zürich, den 3. Februar 1869.

Die Cylinderfunctionen erster und zweiter Art.

Von Hermann Hankel in Erlangen.

Die bekannte Differentialgleichung

$$\frac{\partial^2 R}{\partial x^2} + \frac{1}{x}\frac{\partial R}{\partial x} + \left(1 - \frac{n^2}{x^2}\right) R = 0,$$

welche in fast allen mathematisch-physikalischen Untersuchungen auftritt, die sich auf einen gegen eine Axe symmetrischen Zustand beziehen, wird im Allgemeinen, für ein beliebiges complexes x und n, durch zwei Functionen

$$J^n(x) \text{ und } J^{-n}(x)$$

integrirt, wenn diese Cylinderfunctionen*) erster Art durch

$$J^n(x) = \left(\frac{x}{2}\right)^n \sum_{p=0}^{\infty} \frac{(-1)^p}{\Gamma(n+p+1)\,\Gamma(p+1)} \left(\frac{x}{2}\right)^{2p}$$

definirt werden. Nur in dem Falle, dass n eine positive ganze Zahl ist, fallen diese beiden sonst verschiedenen Lösungen zusammen und es entsteht somit die Aufgabe, neben $J^n(x)$ noch eine andere particuläre Lösung der Differentialgleichung aufzusuchen, die ich in Uebereinstimmung mit Hrn. C. Neumann**), der kürzlich diese Cylinderfunctionen zweiter Art einer ausführlichen Betrachtung unterzogen hat, mit $Y^n(x)$ bezeichne. Letzterer hat $Y^n(x)$ in zwei Theile zerlegt: $Y^n(x) = L^n(x) + E^n(x)$, wo:

$$L^n(x) = J^n(x)\cdot \log x - \frac{\Gamma(n+1)}{2} \sum_{p=0}^{n-1} \frac{2^{n-p}}{n-p} \frac{1}{\Gamma(p+1)} \frac{J^p(x)}{x^{n-p}}$$

gesetzt wird und

$$E^n(x) = -\left(1 + \tfrac{1}{2} + \ldots + \tfrac{1}{n}\right) J^n(x) - 4 \sum_{p=1}^{\infty} (-1)^p \frac{n+2p}{2n+2p} \frac{J^{n+2p}(x)}{2^{2p}}.$$

Diesen letzten Theil hat Hr. Lommel***) in die Form:

*) Ich schliesse mich hier in der Bezeichnung dem passenden Vorschlage Hrn. Heine's an (Crelle Journ. t. 96. p. 128).

**) Theorie der Bessel'schen Functionen. 1867. p. 52.

***) Studien über die Bessel'schen Functionen. 1868. p. 86 seq.

$$E^n(x) = \frac{1}{\Gamma(\frac{1}{2})\,\Gamma(n+\frac{1}{2})}\left(\frac{x}{2}\right)^n \int_0^{\pi} \cos(x\cos\varphi)\cdot\sin^{2n}\varphi\,\log\sin^2\varphi\,d\varphi$$

oder:

$$E^n(x) = 2\,\{\psi(2n+1) - \psi(n+1) - \log 2\}\;J^n(x)$$
$$+\;\Sigma\,\frac{(-1)^p}{\Gamma(n+p+2)\,\Gamma(p+2)}\left(\frac{x}{2}\right)^{n+2p+2}\{\psi(n+p+2)-\psi(n+1)\},$$

gebracht, wo

$$\psi(x) = \frac{\partial\log\Gamma(x)}{\partial x}$$

und somit $\psi(1)$ der negativen Constanten des Integrallogarithmus $\psi(1) = -0{,}5772\ldots$ gleich gesetzt wird*).

Dass die grosse Weitläufigkeit und geringe Durchsichtigkeit dieser Ausdrücke eine eingehende Untersuchung derselben verhindert, liegt auf der Hand. Durch grössere Einfachheit empfehlen sich die Integralformen und es hat Hr. Heine**) eine zweite particuläre Lösung durch das Integral

$$x^n \int_0^{\infty} e^{xi\cos\varphi i}\,\sin^{2n}\varphi i\,d\varphi$$

dargestellt, analog der älteren Formel:

$$J^n(x) = \frac{1}{\Gamma(\frac{1}{2})\,\Gamma(n+\frac{1}{2})}\left(\frac{x}{2}\right)^n \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{xi\cos\varphi}\,\sin^{2n}\varphi\,d\varphi.$$

Diese Form erscheint bei Hrn. Heine aus der Theorie der Kugelfunctionen abgeleitet, indem die Cylinderfunctionen als Grenzfälle von Kugelfunctionen angesehen werden können. Allgemeiner gesprochen, kann man $J^n(x)$ als Grenzfall einer hypergeometrischen Reihe ansehen, und zwar, wie Hr. Hansen***) bemerkt hat:

$$J^n(x) = \left(\frac{x}{2}\right)^n \frac{1}{\Gamma(n+1)}\,F\left(\omega,\omega',(n+1),-\frac{x^2}{4\omega\omega'}\right)$$

wo ω, ω' zwei positive unendlich wachsende Grössen bedeuten und F die hypergeometrische Reihe:

---

*) Gauss hat bekanntlich $\frac{\partial\log\Pi(x)}{\partial x} = \Psi(x)$ gesetzt, wo $\Pi(x) = \Gamma(x+1)$. Um nun diese Function Ψ mit der Γ-Function in bequeme Verbindung zu bringen, habe ich obige Form angesetzt, so dass das Gauss'sche $\Psi(x)$ mein $\psi(x+1)$ ist.

**) Crelle, Journ. t. 69. p. 140.

***) Abhandlung d. Sächsischen Ges. d. Wissensch. Mathem.-phys. Classe t. II. 1855. p. 252.

$$F(\alpha, \beta, \gamma, x) = \frac{\Gamma(\gamma)}{\Gamma(\alpha)\,\Gamma(\beta)} \sum_{p=0}^{\infty} \frac{\Gamma(\alpha+p)\,\Gamma(\beta+p)}{\Gamma(\gamma+p)\,\Gamma(p+1)}\, x^p$$

darstellt. Es hat die Reihe für $J^n(x)$ ein Element, $(n+1)$, welches in dem berührten Falle eine positive ganze Zahl ist, und eine eingehende Untersuchung zeigt, dass in diesem Falle die Differentialgleichung jener Reihe als zweite particuläre Lösung nicht eine zweite hypergeometrische Reihe F hat, sondern dass diese anderen Lösungen aus gewissen abgebrochenen hypergeometrischen Reihen $G(\alpha, \beta, \gamma, x)$ (ganzen Functionen von x) und neuen Reihen von dem Typus:

$$H(\alpha, \beta, \gamma, x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)\,\Gamma(\beta)\,\Gamma(\gamma-1)} \sum_{p=0}^{\infty} \frac{\Gamma(\alpha+p)\,\Gamma(\beta+p)}{\Gamma(\gamma+p)\,\Gamma(p+1)}\, x^p \times$$
$$\{\psi(\gamma+p) + \psi(p+1) - \psi(\alpha+p) - \psi(\beta+p) - \log x\}$$

zusammengesetzt sind.

Es ist nicht meine Absicht, hier in eine allgemeine Theorie dieser anomalen, bisher nur sporadisch bemerkten Fälle einzugehen, was ich einer folgenden Abhandlung vorbehalte. Ich begnüge mich hier, die particuläre Lösung Y in der neuen Form $H(\alpha, \beta, \gamma, x)$ von Reihen zu entwickeln und die, wie ich meine, natürlichste Ableitung derselben zu geben, die ihr Wesen vollständig aufzuklären geeignet ist.

In einigen weiteren Paragraphen habe ich dann die J und Y als **Integrale** dargestellt und die Werthe sämmtlicher Integrale (auf reellen und complexen Wegen), die als Lösungen der Differentialgleichung angesehen werden können, vollständig untersucht, indem ich hier, wie in der ganzen Abhandlung sogleich die allgemeine Voraussetzung eines **complexen Index** n und einer complexen Variabelen x mache.

Am Schlusse habe ich die bisher nur theilweise bekannten **semiconvergenten** Entwickelungen der Cylinderfunctionen erster und zweiter Art aufgestellt, und ihnen eine eingehendere Discussion für complexe Werthe des Argumentes gegeben, die zu eigenthümlichen Resultaten geführt hat und vielleicht als erster Baustein zu einer allgemeinen Theorie der semiconvergenten Reihen für unbeschränkte Variabilität des Argumentes dienen kann; denn die eigentliche Natur dieser merkwürdigen Entwicklungen ist noch fast ganz unerkannt; und es dürfte erst die complexe Functionentheorie ihr **Wesen** zur Erkenntniss bringen, ebenso als auch sie erst die wahre Natur der convergenten Potenzreihen aufgedeckt hat.

§. 1.

Entwickelung von Y in eine Reihe.

Wenn n eine positive ganze Zahl ist, so reducirt sich $J^{-n}(x)$ auf

$J^{+n}(x)$; denn lässt man unter jener Voraussetzung eines ganzen positiven n in:

$$J^{-(n-\varepsilon)}(x) = \left(\frac{x}{2}\right)^{-(n-\varepsilon)} \sum_{p=0}^{\infty} \frac{(-1)^p}{\Gamma(-n+\varepsilon+p+1)\,\Gamma(p+1)} \left(\frac{x}{2}\right)^{2p}$$

die Grösse ε zu Null abnehmen, so verschwinden alle Glieder der Reihe bis zu $p=n$, da $\Gamma(-n+p+1)$ so lange unendlich gross wird, als das Argument eine negative ganze Zahl oder Null ist. Setzt man in der zweiten Summe von $p=n$ an $p-n$ einem neuen Summationsbuchstaben p gleich, so hat man:

$$J^{-(n-\varepsilon)}(x) = \left(\frac{x}{2}\right)^{-(n-\varepsilon)} \sum_{p=0}^{n-1} \frac{(-1)^p}{\Gamma(-n+\varepsilon+p+1)\,\Gamma(p+1)} \left(\frac{x}{2}\right)^{2p}$$
$$+ (-1)^n \left(\frac{x}{2}\right)^{n+\varepsilon} \sum_{p=0}^{\infty} \frac{(-1)^p}{\Gamma(\varepsilon+p+1)\,\Gamma(n+p+1)} \left(\frac{x}{2}\right)^{2p},$$

und, wenn $\varepsilon=0$, fällt die erste Reihe ganz weg, die zweite verwandelt sich in $J^{+n}(x)$, so dass:

$$J^{-n}(x) = (-1)^n J^{+n}(x).$$

Um aber auch in diesem Falle eine zweite particuläre Lösung zu erhalten, bemerken wir, dass, weil $(-1)^n J^{-(n-\varepsilon)}(x) - J^{n-\varepsilon}(x)$ mit abnehmendem ε verschwindet, der Quotient

$$\frac{(-1)^n J^{-(n-\varepsilon)}(x) - J^{n-\varepsilon}(x)}{\varepsilon}$$

sich einer Grenze nähern wird, und da er im Allgemeinen, was auch n und ε seien, eine particuläre Lösung darstellt, auch im Falle eines ganzen n und abnehmenden ε eine solche liefern wird. Es ist leicht, den Grenzwerth jenes Quotienten darzustellen; denn setzt man vorstehende Reihen ein, so wird er:

$$= \left(\frac{x}{2}\right)^{-(n-\varepsilon)} \sum_{p=0}^{n-1} \frac{(-1)^{p+n}}{\Gamma(p+1)} \frac{1}{\varepsilon\,\Gamma(-n+\varepsilon+p+1)} \left(\frac{x}{2}\right)^{2p} + \left(\frac{x}{2}\right)^{n} \sum_{p=0}^{\infty} (-1)^p \frac{f(\varepsilon)}{\varepsilon} \left(\frac{x}{2}\right)^{2p},$$

wo $f(\varepsilon)$ den von ε, p, x abhängenden Ausdruck repräsentirt:

$$f(\varepsilon) = \frac{1}{\Gamma(n+p+1)\,\Gamma(p+\varepsilon+1)} \left(\frac{x}{2}\right)^{\varepsilon} - \frac{1}{\Gamma(n+p-\varepsilon+1)\,\Gamma(p+1)} \left(\frac{x}{2}\right)^{-\varepsilon}.$$

Den Grenzwerth, dem sich das hier eingeführte $f(\varepsilon)$, dividirt durch ε, nähert, findet man leicht durch Differentiation des Zählers und Nenners nach ε und nachherige Substitution $\varepsilon=0$ zu:

$$\frac{1}{\Gamma(n+p+1)\,\Gamma(p+1)}\, 2\log\frac{x}{2} - \frac{1}{\Gamma(n+p+1)} \frac{\Gamma'(p+1)}{[\Gamma(p+1)]^2} - \frac{1}{\Gamma(p+1)} \frac{\Gamma'(n+p+1)}{[\Gamma(n+p+1)]^2}$$
$$= \frac{1}{\Gamma(n+p+1)\,\Gamma(p+1)} \left\{ \log\left(\frac{x}{2}\right)^2 - \psi(p+1) - \psi(n+p+1) \right\}.$$

Die einfache Transformation von

$$\frac{1}{\Gamma(-n+\varepsilon+p+1)} = \frac{1}{\pi}\,\Gamma(n-\varepsilon-p)\sin(-n+\varepsilon+p+1)\,\pi$$

mittelst der Formel: $\Gamma(x)\,\Gamma(1-x)\sin x\pi = \pi$ liefert ferner den Grenzwerth von:

$$\frac{1}{\varepsilon\,\Gamma(-n+\varepsilon+p+1)} = (-1)^{n+p+1}\,\Gamma(n-p);$$

und somit schliesslich als zweite particuläre Lösung:

$$Y^n(x) = -\left(\frac{x}{2}\right)^{-n}\sum_{p=0}^{n-1}\frac{\Gamma(n-p)}{\Gamma(p+1)}\left(\frac{x}{2}\right)^{2p}$$

$$+\left(\frac{x}{2}\right)^{n}\sum_{p=0}^{\infty}\frac{(-1)^p}{\Gamma(n+p+1)\,\Gamma(p+1)}\left(\frac{x}{2}\right)^{2p}\left\{\log\left(\frac{x}{2}\right)^2-\psi(n+p+1)-\psi(p+1)\right\},$$

welche sich von dem oben mit Y bezeichneten Ausdruck nur durch den Factor 2 und ein Vielfaches von $J^n(x)$ unterscheidet.

So hat man z. B. für $n=0$:

$$Y(x) = 2\sum_{p=0}^{\infty}\frac{(-1)^p}{[\Gamma(p+1)]^2}\left(\frac{x}{2}\right)^{2p}\left\{\log\frac{x}{2}-\psi(p+1)\right\},$$

in welcher Form schon früher Riemann*), jedoch ohne alle Ableitung, die Lösung in diesem speciellen Falle gegeben hat. Für $n=1$ findet man:

$$Y^1(x)+\frac{2}{x} =$$

$$=\frac{x}{2}\sum_{p=0}^{\infty}\frac{(-1)^p}{\Gamma(p+2)\,\Gamma(p+1)}\left(\frac{x}{2}\right)^{2p}\left\{\log\left(\frac{x}{2}\right)^2-\psi(p+2)-\psi(p+1)\right\}$$

u. s. w. Wir haben somit diese zweite Lösung entwickelt in der denkbareinfachsten Reihenform, die sich der der Jfunction soweit, als nach der Natur der Sache möglich, anschliesst; während die oben citirten Formen der Hrn. Neumann und Lommel, Y selbst nur entwickelt nach Jfunctionen aufzeigen.

Was übrigens die Convergenz dieser Reihen Y betrifft, so ist der Quotient zweier aufeinander folgender Glieder:

$$-\frac{1}{(n+p+1)(p+1)}\,\frac{x}{2}\,\frac{\log\left(\frac{x}{2}\right)^2-\psi(n+p+2)-\psi(p+2)}{\log\left(\frac{x}{2}\right)^2-\psi(n+p+1)-\psi(p+1)}.$$

*) Poggendorff's Annalen. t. 95. p. 135.

Da nun der asymptotische Werth von $\Gamma(q)$ mit unendlich wachsendem positivem q bekanntlich

$$e^{(q-\frac{1}{2})\log q - q}$$

der von $\psi(q)$ also: $\log q$ ist, so wird sich jener Quotient mit wachsendem p der Grenze:

$$-\frac{1}{(n+p+1)(p+1)} \frac{x}{2} \frac{\log(n+p+2)(p+2)}{\log(n+p+1)(p+1)}$$

nähern, also unendlich abnehmen; und die Reihe Y convergirt daher, wie die Reihe J, für jedes endliche complexe x.

Die Lösungen $Y^n(x)$ für ein ganzes positives n haben übrigens einen wesentlich anderen Charakter als die Cylinderfunctionen erster Art, die $J^n(x)$; denn während $x^{-n} J^{+n}(x)$ in der ganzen Ebene der complexen x eine eindeutige Function der Variabelen x ist und $J^n(x)$ bei einem Umlaufe um $x=0$ den Factor $e^{2n\pi i}$ annimmt, der im Falle eines positiven ganzen n sich auf 1 reducirt, hat $Y^n(x)$ in $x=0$ einen solchen Verzweigungspunkt, dass bei seinem Umkreisen $Y^n(x)$ um $4\pi i\, J^n(x)$ additiv zunimmt. Im Allgemeinen wird übrigens $Y^n(x)$ für $x=0$ unendlich, wie x^{-n}; für $n=0$ aber wird $Y(x)$ in $x=0$ logarithmisch unendlich werden.

Da die beiden Lösungen $J^{+n}(x)$ und $J^{-n}(x)$ für ganze n zusammenfallen, wir aber in $Y^n(x)$ eine lineare Function beider gefunden haben, welche immer von ihnen verschieden bleibt, so kann es zweckmässig erscheinen, neben $J^n(x)$ noch für ein allgemeines n als andere particuläre Lösung:

$$(1) \qquad Y^n(x) = 2\pi\, e^{n\pi i} \frac{J^n(x).\cos n\pi - J^{-n}(x)}{\sin 2n\pi}$$

einzuführen, die dann für den speciellen Fall eines ganzen n in die obige Lösung übergeht. Auch werden unten die Summen:

$$(2) \qquad \frac{J^n(x) - e^{n\pi i} J^{-n}(x)}{\sin 2n\pi} = \frac{1}{2\pi} Y^n(x) - \frac{i}{2} \frac{e^{n\pi i}}{\cos n\pi} J^n(x)$$

$$(3) \qquad e^{n\pi i} \frac{e^{n\pi i} J^n(x) - J^{-n}(x)}{\sin 2n\pi} = \frac{1}{2\pi} Y^n(x) + \frac{i}{2} \frac{e^{n\pi i}}{\cos n\pi} J^n(x)$$

als particuläre Lösungen auftreten.

§. 2.

Uebersicht der Integralformen für die Cylinderfunctionen.

Um die Differentialgleichung, die wir der Bequemlichkeit wegen:

$$\frac{\partial\, x^{2n+1} \frac{\partial\, x^{-n} R}{\partial x}}{\partial x} = -x^{n+1} R$$

schreiben, durch Integrale aufzulösen, setzen wir, entsprechend dem bekannten Integrale:

$$R = x^n \int_{-1}^{+1} e^{xti} (t^2 - 1)^{n-\frac{1}{2}} dt$$

allgemein:

$$R = x^n \int_a^b e^{xti} (t^2 - 1)^{n-\frac{1}{2}} dt$$

und erhalten so auf bekannte Weise als Bedingung für die Grenzen:

$$\Big/_a^b\, e^{xti} (t^2 - 1)^{n+\frac{1}{2}} = 0\,.$$

I. Unter der Voraussetzung eines complexen n und x mit positiven reellen Theilen wird $e^{xti} (t^2 - 1)^{n+\frac{1}{2}}$ für $t = +1$, -1 und für ein t mit unendlich grossem imaginären Theile, $t = \infty i$, verschwinden. Da aber das $\int e^{xti} (t^2 - 1)^{n-\frac{1}{2}} dt$ unter diesen Voraussetzungen des Werthes von x, über einen Theil des oberhalb der reellen Axe gezogenen unendlichen Kreises genommen, verschwindet, so können wir statt $t = \infty i$ auch $t = k + \infty i$ setzen. Wir erhalten in diesem Sinne als particuläre Integrale:

$$x^n \int_{-1}^{+1} e^{xti} (t^2 - 1)^{n-\frac{1}{2}} dt, \tag{1}$$

$$x^n \int_{+1}^{+\infty i} e^{xti} (t^2 - 1)^{n-\frac{1}{2}} dt, \tag{2}$$

$$x^n \int_{-1}^{+\infty i} e^{xti} (t^2 - 1)^{n-\frac{1}{2}} dt, \tag{3}$$

zwischen denen die lineare Relation:

$$\int_{-1}^{+1} + \int_{+1}^{+\infty i} + \int_{+\infty i}^{+1} = 0$$

besteht, wenn die Potenzen in entsprechender Weise bestimmt werden. In allen diesen Integralen hat man von einer der Grenzen auf einer einfachen Linie, die keinen Verzweigungspunkt $t = \pm 1$ umkreist, zu der anderen Grenze, und zwar am einfachsten geradlinig zu gehen. Eine andere Classe von Integralen entsteht, wenn man von einem der Grenzpunkte aus zu ihm zurückkehrt, nachdem man unterdessen einen der Verzweigungspunkte umkreist hat. So hat man als particuläres Integral

$$x^n \int_{+1}^{+1} e^{xti} (t^2 - 1)^{n-\frac{1}{2}} dt, \tag{4}$$

wenn man dabei von $+1$ ausgehend, den Punkt $t = -1$ umkreist und so wieder zu $t = +1$ zurückkehrt. Ebenso ist:

$$(5)\qquad x^n \int_{-1}^{-1} e^{xti}\,(t^2-1)^{n-\frac{1}{2}}\,dt\,,$$

wenn man auf dem Wege den Punkt $t = +1$ umkreist, ein particuläres Integral. Das

$$(6)\qquad x^n \int_{+\infty i}^{+\infty i} e^{xti}\,(t^2-1)^{n-\frac{1}{2}}\,dt$$

kann auf drei verschiedene Weisen genommen werden, entweder, indem man von $+\infty i$ ausgehend, den Punkt $t = +1$ allein, oder $t = -1$ allein, oder beide gleichzeitig umkreist.

Es leuchtet ein, dass alle diese Integrale lineare Functionen zweier particulärer Integrale, z. B. $J^{+n}(x)$ und $J^{-n}(x)$ oder $J^n(x)$ und $Y^n(x)$ sein müssen, und wir werden in §. 3 und 4 diese Reduction thatsächlich ausführen. Zuvor aber mag dieses System von Integralen noch weiter vervollständigt werden.

Bei der Symmetrie der ursprünglichen Differentialgleichung nach $+n$ und $-n$, hat man auch

$$x^{-n} \int_a^b e^{xti}\,(t^2-1)^{-n-\frac{1}{2}}\,dt$$

als particuläre Integrale anzusehen, wo

$$\int_a^b e^{xti}\,(t^2-1)^{-n+\frac{1}{2}} = 0.$$

Wenn nun die bisherigen Annahmen festgehalten werden, wonach x und n positive reelle Theile haben, so sind von diesen Integralen nur die drei in:

$$(7)\qquad x^{-n} \int_{+\infty i}^{+\infty i} e^{xti}\,(t^2-1)^{-n-\frac{1}{2}}\,dt$$

enthaltenen zu gebrauchen: wenn man entweder um jeden der Verzweigungspunkte $t = \pm 1$ einzeln oder um beide zusammen integrirt. In den anderen wird dagegen die Function unter dem Integralzeichen an den Grenzen im Allgemeinen so unendlich, dass die Integrale ihre Bedeutung verlieren. Wir haben somit in diesem Falle 11 brauchbare particuläre Integrale.

Wenn dagegen n einen negativen reellen Theil hat, so sind letztere Integrale die, welche man benutzen wird; oder einfacher: Es treten dann 11 Integrale auf, welche man aus den aufgestellten (1) bis (7) durch Vertauschung von $+n$ mit $-n$ erhält.

Zwischen diesen beiden Fällen findet indess ein Uebergang statt; denn wenn der reelle Theil von n zwischen $\pm \frac{1}{2}$ liegt, so verschwindet $(t^2-1)^{\pm n+\frac{1}{2}}$ in den Punkten $t = \pm 1$ immer, und es sind dann (1) bis (6) und die aus ihnen durch Vertauschung von $+n$ mit $-n$

erhaltenen, also im Ganzen 16, sämmtlich brauchbare particuläre Integrale.

II. Bisher ist x mit positivem reellen Theile vorausgesetzt worden. Nehmen wir, indem wir zunächst die Voraussetzung eines n mit positivem reellen Theile beibehalten, jetzt x mit negativem reellen Theile an, so behalten die Integrale (1), (4), (5) ihre Bedeutung bei. Da aber e^{xti} jetzt nicht für $t = +\infty i$, sondern für $t = -\infty i$ verschwindet, so hat man die übrigen Integrale (2), (3), (6), (7) durch entsprechende Integrale nach $t = -\infty i$ zu ersetzen, d. h. in das unendlich negative Imaginäre hinaus zu integriren, wobei es gleichgültig ist, in welcher Weise man den reellen Theil des t bestimmt.

Wie man zu verfahren hat, wenn unter derselben Voraussetzung für x, n einen negativen oder einen zwischen $\pm \frac{1}{2}$ liegenden reellen Theil hat, bedarf jetzt weiter keiner Auseinandersetzung.

III. Ist endlich x rein positiv imaginär (sein reeller Theil Null), so hat man an (1), (4), (5) nichts zu ändern; die Integrale (2), (3), (6), (7) müssen aber jetzt nach $t = +\infty$ erstreckt werden, weil e^{xti} dort verschwindet; und zwar gelten diese unter der Voraussetzung eines positiven reellen Theiles von n. Doch mag noch bemerkt werden, dass in diesem Falle die drei in (7) enthaltenen Integrale mit den dortigen Grenzen $t = \infty i$ beibehalten werden können, unter der Bedingung jedoch, dass $t = k + \infty i$ gesetzt, der reelle Theil k nicht unendlich in das Negative wächst. Denn unter dieser Bedingung bleibt e^{xti} an der oberen Grenze endlich und $(1 - t^2)^{-n-\frac{1}{2}}$ wird die ausreichende unendliche Decrescenz der Function an der oberen Grenze des Integrales herstellen. Ebenso würde man in diesem Falle $t = k - \infty i$ als die obere Grenze ansehen können.

Wie man im Falle eines n, das einen negativen oder zwischen $\pm \frac{1}{2}$ gelegenen reellen Theil besitzt, die Integrale auszuwählen hat, und dass man, wenn

IV, x eine rein negativ imaginäre Grösse ist, $t = -\infty$ im Allgemeinen als obere Grenze anzusehen hat, leuchtet nach Vorstehendem genügend ein. —

Wir haben so das vollständige System der Integrale betrachtet, welche als particuläre Lösungen unserer Differentialgleichung angesehen werden können: Je nach der Beschaffenheit des x und n sind bald diese, bald jene Formen zu gebrauchen: Mit x ändert sich die Art und Weise, wie man in diesen Integralen die Variabeln in's Unendliche wachsen lassen muss. Es kann dies in der Form zusammengefasst werden, dass t so wachsen soll, dass $xti = -\infty$ ist, also $t = \frac{1}{x} \infty i$. Dies führt darauf, $xti = -u$ als neue Veränderliche einzuführen, und so die particulären Integrale in der Form:

$$x^{-n}\int e^{-u}\,(u^2+x^2)^{n-\frac{1}{2}}\,du$$

anzunehmen. An Stelle der Grenzen $t=\pm 1$ treten jetzt $u=\pm x\,i$ auf, und man hat für den unendlichen Werth der Integrationsvariabelen jetzt in jedem Falle $u=+\infty$ zu setzen (oder allgemeiner $u=\infty+k\,i$, wo k eine ganz beliebige, endliche oder unendlich wachsende reelle Grösse ist). Die drei Integrale:

$$x^{-n}\int_{\infty}^{\infty} e^{-u}\,(u^2+x^2)^{+n-\frac{1}{2}}\,du,$$

wo man um $u=+xi$ allein, oder um $u=-xi$ allein, oder um diese beiden Verzweigungspunkte gleichzeitig zu integriren hat; wie die weiteren drei in:

$$x^{n}\int_{\infty}^{\infty} e^{-u}\,(u^2+x^2)^{-n-\frac{1}{2}}\,du$$

enthaltenen Integrale gelten jetzt unverändert für jedes n und x.

Die Integrale:

$$\int_{-xi}^{+xi},\quad \int_{+xi}^{\infty},\quad \int_{-xi}^{\infty},\quad \int_{+xi}^{+xi},\quad \int_{-xi}^{-xi}$$

der Function

$$x^{-n}\;e^{-u}\,(u^2+x^2)^{n-\frac{1}{2}}$$

gelten jetzt, wenn n einen positiven reellen Theil hat, unbedingt für jedes x. Wenn aber n einen negativen rellen Theil hat, so treten an ihre Stelle dieselben Integrale der anderen Function:

$$x^{n}\;e^{-u}\,(u^2+x^2)^{-n-\frac{1}{2}},$$

und wenn der reelle Theil von n zwischen $\pm\frac{1}{2}$ liegt, so kann man sämmtliche Integrale benutzen.

Trotz der etwas allgemeineren Gültigkeit, welche den Integralen der letzteren Form zukommt, habe ich es doch vorgezogen, die folgenden Entwickelungen an die frühere und ältere Form anzuschliessen.

§. 3.

Die Integrale für die Cylinderfunctionen erster Art.

Um nun die vorstehenden Integrale zu entwickeln und sie so auf $J^n(x)$, $J^{-n}(x)$, $Y^n(x)$ reduciren zu können, hat man zunächst festzusetzen, wie man die vieldeutige Potenz $(t^2-1)^{n-\frac{1}{2}}$ oder überhaupt $(t^2-1)^q$ in der Ebene der complexen t bestimmen solle. Da

$$(t^2-1)^q = (t-1)^q\;(t+1)^q,$$

so sieht man, dass diese Function die drei Verzweigungspunkte -1, $+1$, ∞ hat. Läuft man um $t = +1$ oder $t = -1$ herum, und kehrt wieder zum Ausgangspunkte zurück, so hat die Potenz den Factor $e^{2q\pi i}$ angenommen, und wenn man den Punkt $t = \infty$ umkreist, den Factor $e^{4q\pi i}$; wenn in beiden Fällen in der positiven Richtung (d. h. bei gewöhnlicher Lage der reellen und imaginären Axe gegen einander, umgekehrt wie der Zeiger der Uhr) die etwa kreisförmige Curve durchlaufen wird. Die Potenz wird demnach eindeutig sein, so lange man nicht einen dieser Punkte umkreist, also innerhalb der Ebene, wenn man sie sich in einer alle drei Verzweigungspunkte verbindenden, einfachen, keinen Knoten bildenden Linie zerschnitten denkt.

Nur in dem Falle, dass $2q$ [$= 2n - 1$] eine ganze Zahl ist, wird die Zerschneidung eine andere. Ist $2q$ eine gerade [also $(n - \frac{1}{2})$ eine ganze] Zahl, so wird die Potenz überhaupt nicht vieldeutig. Ist aber $2q$ eine ungerade [n eine ganze] Zahl, so ist $t = \infty$ kein Verzweigungspunkt mehr und die Ebene ist nur zwischen -1 und $+1$ zerschnitten zu denken. Doch bedürfen diese speciellen Fälle im Folgenden keiner speciellen Behandlung, insofern sie von selbst in den allgemeinen Fall eingeschlossen sind.

Um nun im Allgemeinen $(t^2 - 1)^q$ zu bestimmen, betrachten wir seine Factoren. Soll der erste derselben $(t - 1)^q$ eindeutig sein, so denken wir uns die Ebene von $t = 1$ in einer in das Unendliche laufenden Linie zerschnitten*), und setzen dann:

$$t - 1 = re^{\varphi i}\ ,\ (t - 1)^q = r^q\, e^{\varphi q i}\,,$$

φ zwischen 0 und 2π liegen soll, und

$$r^q = e^{q \log r}$$

wo $\log r$ der reelle Logarithmus dieser positiven Grösse, also r^q für ein reelles q der positive reelle Werth dieser Potenz ist. Dann ist für Werthe von t in der reellen Axe zwischen -1 und $+1$:

$$t - 1 = re^{\pi i}\ ,\ (t - 1)^q = r^q\, e^{q\pi i}$$

*) In Betreff der Bedeutung einer solchen Zerschneidung mag folgendes bemerkt werden: Geschieht die Zerschneidung in der reellen Axe von 1 bis ∞, so bedeutet dies nichts anderes als: Es soll in $t - 1 = re^{\varphi i}$, worin φ bekanntlich um ganze Vielfache von $2\pi i$ unbestimmt ist, die Variabilität von φ zwischen den Grenzen 0 und 2π eingeschlossen sein. Wird in der Linie von $t = 1$ bis $t = 1 + \infty i$ zerschnitten, so wird φ zwischen den Grenzen $+\frac{\pi}{2}$ und $5\frac{\pi}{2}$ anzunehmen sein, oder etwa auch zwischen $-3\frac{\pi}{2}$ und $+\frac{\pi}{2}$ und man wird diese beiden Annahmen dadurch unterscheiden können, dass man sagt, es solle die Potenz genommen werden, welche für $t = 2$ entweder $= 1$ ist, wo dann $t - 1 = e^{0i}$, $(t - 1)^q = 1^q = 1$ zu setzen wäre, oder im anderen Falle, wo $t - 1 = e^{2\pi i}$ gesetzt ist, die Potenz, welche sich für $t = 2$ auf $e^{2q\pi i}$ reducirt.

Ferner nehmen wir, um die Potenzen von $(t+1)$ eindeutig zu machen, die Ebene von -1 bis $+1$ in der reellen Axe und von 1 bis in's Unendliche in der schon vorhin festgesetzten Linie zerschnitten an, und setzen, indem wir $2\pi > \varphi' > 0$ annehmen:

$$t+1 = r' e^{\varphi' i}\ ,\ (t+1)^q = r'^q e^{q(\varphi' - 2\pi)i}$$

so dass oberhalb der reellen Axe zwischen $t = -1$ und $+1$

$$t+1 = r' \qquad (t+1)^q = r'^q e^{-2q\pi i}$$

und unterhalb

$$t+1 = r' e^{2\pi i} \qquad (t+1)^q = r'^q$$

zu nehmen ist.

Durch Superposition finden wir dann in demselben Intervalle, oberhalb der reellen Axe

(I) $\quad (t+1)^q\,(t-1)^q = (rr')^q e^{-q\pi i}\ ,\ (t^2-1)^q = (1-t^2)^q e^{-q\pi i}$

und unterhalb

(II) $\quad (t+1)^q\,(t-1)^q = (rr')^q e^{+q\pi i}\ ,\ (t^2-1)^q = (1-t^2)^q e^{+q\pi i}$,

wenn wir mit

$$(rr')^q = (1-t^2)^q$$

diejenige Potenz von $(1-t^2)$ bezeichnen, welche sich aus

$$(1-t^2)^q = e^{q \log (1-t^2)}$$

für den reellen Logarithmus dieser positiven Grösse $(1-t^2)$ ergiebt, d. h. diejenige, welche die Entwickelung nach dem binomischen Lehrsatze:

$$(1-t^2)^q = \Gamma(q+1) \sum_{p=0}^{\infty} \frac{(-1)^p}{\Gamma(q-p+1)\,\Gamma(p+1)}\, t^{2p}$$

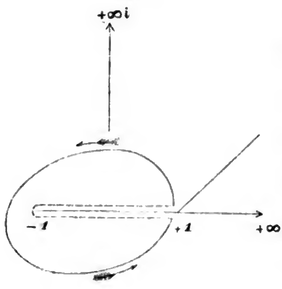
liefert, die sich für $t = 0$ auf $+1$ reducirt. —

Wir betrachten nun das Integral

$$\int_{+1}^{+1} e^{xti}\,(t^2-1)^{n-\frac{1}{2}}\,dt$$

von $+1$ oberhalb der Zerschneidung und um -1 herum nach $+1$ unterhalb der Zerschneidung geführt, auf einer Curve, wie sie etwa in Fig. 1. ausgezogen ist. Dann kann man unter der nothwendigen Voraussetzung eines n mit positivem reellen Theile das Integral auf eine Curve zusammenziehen, wie sie in Fig. 1. punktirt gezogen ist; und zerfällt man das Integral in eines $\int_{+1}^{-1}$ oberhalb des Schnittes und eines $\int_{-1}^{+1}$ un-

Fig. 1.



terhalb desselben, beachtet ferner die in (I), (II) angegebenen Zeichen der Potenzen in diesen, so findet man obiges Integral

$$= e^{-\pi(n-\frac{1}{2})i}\int_{+1}^{-1} e^{xti}(1-t^2)^{n-\frac{1}{2}}\,dt + e^{+\pi(n-\frac{1}{2})i}\int_{-1}^{+1} e^{xti}(1-t^2)^{n-\frac{1}{2}}\,dt$$

$$= -2i\cos n\pi\int_{-1}^{+1} e^{xti}(1-t^2)^{n-\frac{1}{2}}\,dt.$$

Reducirt man nun letzteres $\int\limits_{-1}^{+1}$ auf $\int\limits_{0}^{1}$, entwickelt den so entstehenden $\cos xt$ nach Potenzen von xt, integrirt mittels der bekannten Formel für die Euler'schen Integrale erster Art und wendet die auch im Folgenden häufig benutzten Formeln:

$$\frac{\Gamma(2p+1)}{\Gamma(p+\frac{1}{2})} = 2^{2p}\,\frac{\Gamma(p+1)}{\Gamma(\frac{1}{2})}\,,\quad \Gamma(\tfrac{1}{2}+n)\,\Gamma(\tfrac{1}{2}-n) = \frac{\pi}{\cos n\pi}$$

an, so findet man

$$\int_{+1}^{+1} e^{xti}\,(t^2-1)^{n-\frac{1}{2}}\,dt = -2\pi i\,\frac{\Gamma(\frac{1}{2})}{\Gamma(\frac{1}{2}-n)}\sum_{p=0}^{\infty}\frac{(-1)^p}{\Gamma(n+p+1)\,\Gamma(p+1)}\left(\frac{x}{2}\right)^{2p};$$

also nach dem Werthe letzterer Reihe:

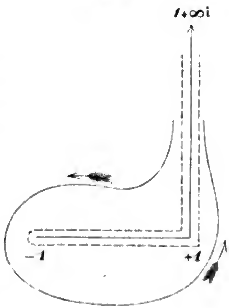
$$(4)\qquad J^n(x) = \frac{i}{2\pi}\,\frac{\Gamma(\frac{1}{2}-n)}{\Gamma(\frac{1}{2})}\left(\frac{x}{2}\right)^n\int_{+1}^{+1} e^{xti}\,(t^2-1)^{n-\frac{1}{2}}\,dt$$

oder auch

$$(1)\qquad J^n(x) = \frac{1}{\Gamma(\frac{1}{2}+n)\,\Gamma(\frac{1}{2})}\left(\frac{x}{2}\right)^n\int_{-1}^{+1} e^{xti}\,(1-t^2)^{n-\frac{1}{2}}\,dt\,,$$

womit die Werthe der Integrale (1) und (4) des §. 2. gefunden sind. Auch (5) desselben §. liesse sich so ohne Schwierigkeiten finden, wenn man eine andere Zerschneidung einführte. —

Fig. 2.



Um weiter das Integral

$$\int_{+xi}^{+\infty i} e^{xti}\,(t^2-1)^{n-\frac{1}{2}}\,dt\,,$$

unter der Voraussetzung eines complexen x mit positivem reellen Theile zu behandeln, denken wir uns den von $+1$ in's Unendliche gehenden Schnitt, dessen specielle Lage bisher willkürlich gelassen war, von $+1$ nach $+\infty i$, oder etwa geradlinig und der imaginären Axe parallel nach $1+\infty i$ ausgeführt und bestimmen die Potenzen beiderseits nach obigen Regeln (I), (II), indem wir in $t-1 = re^{\varphi i}$ die Variabilität von φ zwischen den Grenzen $+\frac{\pi}{2}$ und $5\frac{\pi}{2}$

nehmen. Wir wollen dann das Integral von der linken Seite dieses Schnittes um -1 und $+1$ herum, ohne an den Schnitt zu treffen, auf der anderen, rechten Seite des Schnittes wieder hinaus nach $1+\infty i$, in einer Curve erstrecken, wie sie etwa in Fig. 2. dargestellt ist.

Um dann dies Integral nach aufsteigenden Potenzen von x zu entwickeln, müssen wir zuvor

$$(t^2-1)^{n-\frac{1}{2}} = 1^{n-\frac{1}{2}}\, t^{2n-1}\left(1-\frac{1}{t^2}\right)^{n-\frac{1}{2}}$$

setzen und

$$\left(1-\frac{1}{t^2}\right)^{n-\frac{1}{2}} = \Gamma(n+\tfrac{1}{2}) \sum_{p=0}^{\infty} \frac{(-1)^p}{\Gamma(n-p+\frac{1}{2})\,\Gamma(p+1)}\,\frac{1}{t^{2p}}$$

nach dem binomischen Lehrsatze entwickeln. Dies setzt aber voraus, dass wir mit unserer Integrationscurve immer ausserhalb des mit dem Radius 1 um $t=0$ beschriebenen Kreises bleiben, an welchem die Convergenz dieser Reihe aufhört. Um aber ausserhalb dieses Convergenzkreises die Gleichung:

$$(t^2-1)^{n-\frac{1}{2}} = 1^{n-\frac{1}{2}}\, t^{2n-1}\left\{1-(n-\tfrac{1}{2})\,\frac{1}{t^2}+\cdots\right\}$$

behaupten zu können, müssen wir auch t^{2n-1} in der von 0 über 1 nach $1+\infty i$ zerschnittenen Ebene zu

$$t = r''\, e^{\varphi'' i} \quad , \quad t^{2n-1} = r''^{2n-1}\, e^{(2n-1)\varphi'' i}$$

bestimmt denken; dann ist in der so zerschnittenen Ebene weder die linke, noch die rechte Seite vieldeutig und es werden beide in allen Punkten übereinstimmen, wenn $1^{n-\frac{1}{2}}$ passend, d. h. so bestimmt ist, dass beide Seiten für Einen Punkt übereinstimmen. Wählen wir dazu einen Punkt auf der negativen reellen Axe links von -1, so ist in diesem nach Obigem:

$$(t-1)^{n-\frac{1}{2}} = r^{n-\frac{1}{2}}\, e^{+\pi(n-\frac{1}{2})i} \;,\; (t+1)^{n-\frac{1}{2}} = r'^{n-\frac{1}{2}}\, e^{-\pi(n-\frac{1}{2})i}$$

also:

$$(t^2-1)^{n-\frac{1}{2}} = (rr')^{n-\frac{1}{2}}$$

und wird, wenn sich t nach $-\infty$ entfernt, und n eine positive reelle Zahl ist, in das positiv Unendliche wachsen. Gleichzeitig wird

$$t^{2n-1} = r''^{2n-1}\, e^{(2n-1)\pi i},$$

und soll die rechte Seite ebenfalls in's positiv Unendliche wachsen, so muss

$$1^{n-\frac{1}{2}} = e^{-(2n-1)\pi i}$$

gesetzt werden; so dass man:

$$(t^2-1)^{n-\frac{1}{2}} = e^{-(2n-1)\pi i}\,\Gamma(n+\tfrac{1}{2}) \sum_{p=0}^{\infty} \frac{(-1)^p}{\Gamma(n-p+\frac{1}{2})\,\Gamma(p+1)}\, t^{2n-2p-1}$$

zu setzen hat. Nach diesen Vorbereitungen hat man dann:

$$\int_{\infty i}^{\infty i} e^{xti}(t^2-1)^{n-\frac{1}{2}}\,dt = e^{-(2n-1)\pi i}\,\Gamma(n+\tfrac{1}{2}) \sum_{p=0}^{\infty} \frac{(-1)^p}{\Gamma(n-p+\frac{1}{2})\,\Gamma(p+1)} \int_{\infty i}^{\infty i} e^{xti}\, t^{2n-2p-1}\,dt.$$

Es handelt sich nun um die Ermittelung dieser Integrale:

$$\int_{\infty i}^{\infty i} e^{x\,i}\; t^q\,dt,$$

in denen t^q die einzige vieldeutige Grösse ist, so dass man die Zerschneidung sich jetzt nur von 0 nach ∞i und zwar, der Einfachheit wegen, auch direct in der imaginären positiven Axe vorgenommen denken kann. Es ist dann in

$$t = r''\, e^{\varphi'' i} \quad , \quad t^q = r''^q\; e^{q\,\varphi'' i}$$

die Variabilität des φ'' auf die Werthe von $+\frac{\pi}{2}$ bis $5\,\frac{\pi}{2}$ beschränkt.

Führen wir jetzt die neue Variabele u durch $t = ui$ ein, so ist die neue uEbene jetzt von 0 bis $+\infty$ auf der positiven reellen Axe zu zerschneiden, und bestimmen wir dem entsprechend

$$u = r\, e^{\varphi i} \quad , \quad u^q = r^q\, e^{q\varphi i},$$

so ist

$$t^q = i^q\; u^q$$

eine bestimmte Gleichung, wenn i^q entsprechend bestimmt wird. Nun ist für $t = -1$, $t^q = e^{q\pi i}$, und $u = +i = e^{\frac{\pi}{2}i}$ also $u^q = e^{q\frac{\pi}{2}i}$ und somit, wenn die Gleichheit beider Seiten hergestellt werden soll, $i^q = e^{q\frac{\pi}{2}i}$, also hat man:

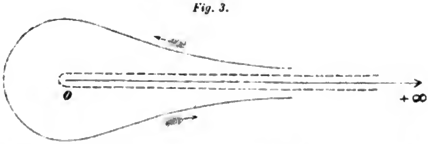
$$\int_{\infty i}^{\infty i} e^{xti}\, t^q\,dt = i\, e^{q\frac{\pi}{2}i} \int_{\infty}^{\infty} e^{-ux}\, u^q\,du.$$

Letztere Integrale aber lassen sich durch die Γfunction ausdrücken, was auch q sei; und zwar folgendermassen:

Das Integral

$$\int_{\infty}^{\infty} e^{-ux}\, u^q\,du$$

Fig. 3.



über den in Fig. 3. ausgezogenen Weg ausgedehnt, lässt sich, wenn q eine complexe Zahl mit positivem reellen Theile ist, auf eine den Schnitt von 0 bis ∞ unmittelbar umschliessende Linie (s. Fig. 3.) zu-

zusammenziehen, und beachtet man die Vorzeichen, welche t^q ober- und unterhalb des Schnittes annimmt, so findet man durch Zerlegung des $\int\limits_{\infty}^{\infty}$ in $\int\limits_{\infty}^{0}$ oberhalb und $\int\limits_{0}^{\infty}$ unterhalb:

$$\int\limits_{\infty}^{\infty} e^{-ux}\, u^q\, du = \int\limits_{\infty}^{0} e^{-xr}\, r^q\, dr + e^{2q\pi i}\int\limits_{0}^{\infty} e^{-xr}\, r^q\, dr = 2ie^{q\pi i}\sin q\pi \int\limits_{0}^{\infty} e^{-xr} r^q\, dr,$$

wo r^q die Potenz ist, welche in der bekannten Definitionsgleichung von $\Gamma(q)$ für complexe q mit einem reellen Theile, der grösser als -1 ist, nämlich in:

$$\int\limits_{0}^{\infty} e^{-xr} r^q\, dr = \frac{\Gamma(q+1)}{x^{q+1}}$$

erscheint. In dieser Gleichung ist diejenige Potenz von x^{q+1} zu nehmen, welche sich für $x=1$ auf $+1$ reducirt und man hat danach endlich:

$$\int\limits_{\infty}^{\infty} e^{-ux}\, u^q\, du = -\frac{2\pi i}{\Gamma(-q)}\,\frac{e^{q\pi i}}{x^{q+1}}\,.$$

Da nun beide Seiten dieser Gleichung, auch wenn q in seinem reellen Theile unter -1 abnimmt, stetig bleiben, wenn nur die Integrationscurve den kritischen Punkt $t=0$ in endlicher Entfernung umläuft, so gilt sie auch für solche q und ist unter der Voraussetzung eines positiven reellen Theiles von x für alle complexen q gültig*).

Wird alles dies zusammengenommen, so findet man unser obiges Integral:

$$\int\limits_{\infty i}^{\infty i} e^{xti}(t^2-1)^{n-\frac{1}{2}}\, dt = -2\pi i e^{n\pi i}\Gamma(n+\tfrac{1}{2})\,\Sigma\,\frac{x^{2p-2n}}{\Gamma(n-p+\frac{1}{2})\,\Gamma(2p-2n+1)\,\Gamma(p+1)},$$

und nach einfachen Transformationen erhält man rechts die Reihe für $J^{-n}(x)$, so dass:

$$(6^a)\qquad J^{-n}(x) = \frac{i}{2\pi}\, e^{-n\pi i}\,\frac{\Gamma(\frac{1}{2}-n)}{\Gamma(\frac{1}{2})}\left(\frac{x}{2}\right)^n \int\limits_{\infty i}^{\infty i} e^{xti}\,(t^2-1)^{n-\frac{1}{2}}\, dt.$$

Diese Gleichung gilt für jedes n, da das Integral rechter Hand für alle n seine Bedeutung beibehält; sie kann also auch zur Ermittelung des Integrales in Anspruch genommen werden, das aus diesem durch Vertauschung von n mit $(-n)$ entsteht:

$$(7^a)\qquad J^{+n}(x) = \frac{i}{2\pi}\, e^{+n\pi i}\,\frac{\Gamma(\frac{1}{2}+n)}{\Gamma(\frac{1}{2})}\left(\frac{x}{2}\right)^{-n} \int\limits_{\infty i}^{\infty i} e^{xti}\,\frac{dt}{(t^2-1)^{n+\frac{1}{2}}}\,.$$

---

*) Diese Formel und die daraus abzuleitenden Integrale für $\Gamma(q)$ habe ich bereits in der Dissertation: „Die Euler'schen Integrale bei unbeschränkter Variabilität des Argumentes" (Leipzig 1863) und im Auszuge in Schlömilchs Journal t. IX. p. 8 gegeben.

§. 4.

Die übrigen Integrale der Differentialgleichung.

Wenn in dem Integral (6^a) des vorigen §. n einen positiven reellen Theil hat, so ist man berechtigt, den Integrationsweg unendlich dicht an den Schnitt zusammenzuziehen, wie dies in Fig. 2. durch die punctirte Linie angedeutet ist. In dem speciellen Falle, dass n eine positive ganze Zahl ist, wird die Potenz $(t^2-1)^{n-\frac{1}{2}}$ zu beiden Seiten der Linie von 1 bis $1+\infty i$ denselben Werth annehmen und sich daher $\int_{\infty i}^{\infty i}$ auf $\int_{+1}^{+1}$ reduciren, so dass man aus (4) und (6^a)

$$J^{-n}(x) = e^{-n\pi i} J^n(x)$$

erhält, eine schon früher bemerkte Relation. Man kann jedoch aus (6^a) leicht ein Integral ableiten, welches immer von $J^n(x)$ verschieden bleibt:

Man hat nämlich, wenn n einen positiven reellen Theil besitzt:

$$\int_{\infty i}^{\infty i} = \int_{\infty i}^{+1} + \int_{+1}^{+1} + \int_{+1}^{\infty i},$$

und da $\int_{+1}^{\infty i}$ rechter Seits an dem Schnitte entlang zu nehmen ist, wo $(t^2-1)^{n-\frac{1}{2}}$ den Factor $e^{4(n-\frac{1}{2})\pi i}$ gegen seinen Werth in $\int_{\infty i}^{+1}$ angenommen hat, so hat man:

$$\int_{\infty i}^{+1} + \int_{+1}^{\infty i} = \left(e^{4(n-\frac{1}{2})\pi i} - 1\right) \int_{1}^{\infty i} = 2i\, e^{2n\pi i} \sin 2n\pi \int_{1}^{\infty i},$$

wo letzteres Integral auf der linken Seite des Schnittes zu nehmen ist. Für ein ganzes n verschwindet in:

$$\int_{\infty i}^{\infty i} = \int_{+1}^{+1} + 2i\, e^{2n\pi i} \sin 2n\pi \int_{1}^{\infty i}$$

des Factors $\sin 2n\pi$ wegen, das letzte Integral; dagegen bleibt in jedem Falle:

$$2i\, e^{2n\pi i} \int_{1}^{\infty i} = \frac{\int_{\infty i}^{\infty i} - \int_{+1}^{+1}}{\sin 2n\pi}$$

von Null verschieden und giebt eine Lösung unserer Differentialgleichung, wenn sie mit x^n multiplicirt wird, und zwar findet man vermittels der Formeln (4) und (6^a) des vorigen §. für $J^n(x)$ und $J^{-n}(x)$ die Gleichung:

$$(2) \quad \frac{e^{2n\pi i}}{\pi} \frac{\Gamma(\frac{1}{2}-n)}{\Gamma(\frac{1}{2})} \left(\frac{x}{2}\right)^n \int_{1}^{\infty i} e^{xti} (t^2-1)^{n-\frac{1}{2}}\, dt = \frac{J^n(x) - e^{n\pi i} J^{-n}(x)}{\sin 2n\pi},$$

wo die rechte Seite nach (2) in §. 1.

$$= \frac{1}{2\pi} \; Y^n(x) - \frac{i}{2} \; \frac{e^{n\pi i}}{\cos n\pi} \; J^n(x)$$

ist, und bleibt, wenn n auch im Speciellen eine ganze Zahl ist*).

Man bemerkt, dass

$$\int_{-1}^{\infty i} = \int_{-1}^{+1} + \int_{+1}^{+\infty i},$$

wenn man linker Hand von dem Schnitte integrirt, gesetzt werden kann, weil zwischen den Wegen dieser Integrale die Function überall stetig und endlich bleibt, und es ist hieraus leicht die Gleichung:

$$(3) \quad \frac{e^{2n\pi i}}{\pi} \; \frac{\Gamma(\frac{1}{2}-n)}{\Gamma(\frac{1}{2})} \left(\frac{x}{2}\right)^n \int_{-1}^{\infty i} e^{xti} (t^2-1)^{n-\frac{1}{2}} dt = e^{n\pi i} \; \frac{e^{n\pi i} J^n(x) - J^{-n}(x)}{\sin 2n\pi}$$

abzuleiten, wo die rechte Seite nach (3) in §. 1.

$$= \frac{1}{2\pi} \; Y^n(x) + \frac{i}{2} \; \frac{e^{n\pi i}}{\cos n\pi} \; J^n(x)$$

für jedes n gesetzt werden kann.

Es sind nun in den Formeln (1) des vorigen §. und (2), (3) dieses §. unter der Voraussetzung eines n mit positivem reellen Theile die Integrale von einem Verzweigungspunkte zum andern, durch die J und Y dargestellt. Auch sind bereits in (4) und (6^a) des vorigen §. Integrale behandelt worden, welche von einem Verzweigungspunkte ausgehend, wieder zu ihm zurückkehren. Solcher Integrale aber haben wir noch zwei zu entwickeln:

Die bisher immer angewandte Zerschneidung von -1 bis $+1$ und dann parallel der positiven imaginären Axe hinaus in's Unendliche, ist, wie schon früher bemerkt, nur eine arbiträre, da es sich im Wesentlichen bei der Zerschneidung darum handelt, ein Umlaufen eines Verzweigungspunktes -1, $+1$, ∞ unmöglich zu machen. Wir können daher auch die in Fig. 4. gewählte Zerschneidung von $+1$ nach $1+\infty i$, und von -1 in's Unendliche in ganz beliebiger Richtung zu Grunde legen. Bestimmen wir dann den Werth der Potenz linkerseits der Linien von 1 bis $1+\infty i$ ganz wie früher, so behält das auf der linken Seite gewonnene Integral:

$$\int_1^{\infty i} e^{xti} (t^2-1)^{n-\frac{1}{2}} dt$$

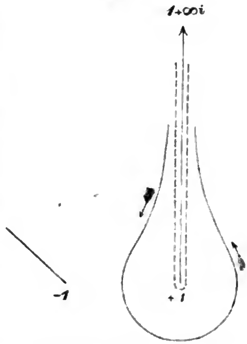
---

*) Setzt man in (2), $t = \cos(\varphi i)$, so entspricht dem $t=1$ die untere Grenze $\varphi = 0$; für $\varphi = \infty + \frac{\pi}{2} i$ aber wird $\cos \varphi i = \infty i$ und es verwandelt sich daher jenes Integral in das von Hrn. Heine a. a. O. angegebene Integral:

$$\int_0^{\infty + \frac{\pi}{2} i} e^{xi\cos(\varphi i)} \sin^{2n}(\varphi i)\, d\varphi.$$

seinen in (2) gefundenen Werth. Betrachten wir nun $\int_{\infty i}^{\infty i}$ derselben Function von ∞i links von dem Schnitte um $t = +1$ herum und auf der rechten Seite des Schnittes wieder in das unendlich Imaginäre hinaus, wie es etwa in Fig. 4. gezeichnet ist, so stellt dies eine nach n immer stetige Function dar, deren Werth wir ermitteln können für ein n mit positivem reellem Theile; denn in diesem Falle lässt sich das Integral dicht an den Schnitt zusammenziehen und man findet, da $(t^2-1)^{n-\frac{1}{2}}$ rechts von dem Schnitte den Factor $e^{2(n-\frac{1}{2})\pi i}$ gegen seinen Werth auf der linken Seite angenommen hat:

Fig. 4.



$$\int_{\infty i}^{\infty i} = -2 \cos n\pi \; e^{n\pi i} \int_{1}^{\infty i},$$

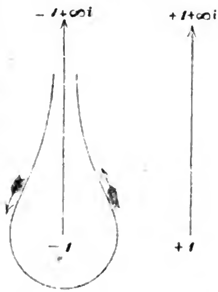
wo das letzte Integral links vom Schnitte zu nehmen ist, so dass man nach (2) die Gleichung:

$$(6^b) \quad -\frac{1}{2\pi}\frac{e^{n\pi i}}{\cos n\pi}\frac{\Gamma(\frac{1}{2}-n)}{\Gamma(\frac{1}{2})}\left(\frac{x}{2}\right)^n \int_{\infty i}^{\infty i} e^{xti}(t^2-1)^{n-\frac{1}{2}}\,dt = \frac{J^n(x) - e^{n\pi i} J^{-n}(x)}{\sin 2n\pi}$$

erhält, die nun für jedes n, auch für solche mit negativem reellen Theile gilt.

Wenn wir die Zerschneidung von -1 in's Unendliche in einer Linie von -1 parallel der positiven imaginären Axe vornehmen, wie in Fig. 5., und bestimmen $(t^2-1)^{n-\frac{1}{2}}$ rechterseits dieses Schnittes so, wie vorhin, so reducirt sich das $\int_{\infty i}^{\infty i}$ in positiver Richtung um $t = -1$ herumgenommen, für ein n mit positivem reellen Theile auf:

Fig. 5.



$$\int_{\infty i}^{\infty i} = +2 \cos n\pi \; e^{-n\pi i} \int_{-1}^{\infty i},$$

wo letzteres Integral in demselben Sinne, als in (3) zu nehmen ist, so dass man jetzt die wiederum für alle n gültige Formel:

$$(6^c) \quad +\frac{1}{2\pi}\frac{e^{n\pi i}}{\cos n\pi}\frac{\Gamma(\frac{1}{2}-n)}{\Gamma(\frac{1}{2})}\left(\frac{x}{2}\right)^n \int_{\infty i}^{\infty i} e^{xti}(t^2-1)^{n-\frac{1}{2}}\,dt = e^{n\pi i}\frac{e^{n\pi i} J^n(x) - J^{-n}(x)}{\sin 2n\pi},$$

erhalten wird. —

Es sind somit schliesslich alle in §. 2. aufgestellten Integrale der Differentialgleichung in §§. 3. und 4. (wo sie gleichbeziffert erscheinen) durch die J und Y dargestellt, und das ganze System der möglichen Integrale erschöpft.

§. 5.

Die Cylinderfunctionen zweiter Art.

Für den Fall eines **positiven ganzen** n, dem wir diesen Paragraphen widmen, haben wir in den Formeln (2), (3) des vorigen Paragraphen

$$(2)\quad \frac{(-1)^n}{\Gamma(n+\frac{1}{2})\,\Gamma(\frac{1}{2})}\left(\frac{x}{2}\right)^n \int_1^{\infty i} e^{xti}\,(t^2-1)^{n-\frac{1}{2}}\,dt = \frac{1}{2\pi}\,Y^n(x) - \frac{i}{2}\,J^n(x)$$

$$(3)\quad \frac{(-1)^n}{\Gamma(n+\frac{1}{2})\,\Gamma(\frac{1}{2})}\left(\frac{x}{2}\right)^n \int_{-1}^{\infty i} e^{xti}\,(t^2-1)^{n-\frac{1}{2}}\,dt = \frac{1}{2\pi}\,Y^n(x) + \frac{i}{2}\,J^n(x)$$

zwei Formeln gewonnen, durch deren Addition man Y allein darstellen kann.

Doch können diese Formeln noch in eigenthümlicher Weise transformirt werden: In den vorliegenden Integralen sind nur $t=\pm 1$ die Verzweigungspunkte der Function unter dem Integralzeichen und der Schnitt von 1 bis ∞i ist überflüssig; führen wir aber gleichzeitig $\log(-t)$ ein, so stellt sich wieder ein von $t=0$ ins Unendliche laufender Schnitt als nothwendig dar, um $\log(-t)$ in der Ebene eindeutig bestimmen zu können. Demnach behalten wir den Schnitt von -1 über $+1$ nach $1+\infty i$ bei, bestimmen $(t^2-1)^{n-\frac{1}{2}}$ zu beiden Seiten des Schnittes von -1 bis $+1$ nach den Formeln (I), (II) des §. 3. und setzen

$$t = re^{\varphi i} \quad , \quad \log(-t) = \log r + (\varphi-\pi)i\,,$$

so dass also $\log(-t)$ für ein negatives reelles t reell ist ($\log r$ immer reell genommen).

Wir bilden nun unter der Voraussetzung eines ganzen n das

$$\int_{\infty i}^{\infty i} e^{xti}\,(t^2-1)^{n-\frac{1}{2}}\log(-t)\,dt\,,$$

von der linken Seite des Schnittes um ± 1 herum nach der rechten Seite desselben (Fig. 2.); ziehen die Integrationscurve dicht an den Schnitt zusammen, und zerlegen das Integral:

$$\int_{\infty i}^{\infty i} = \int_{\infty i}^{1} + \int_{+1}^{+1} + \int_{1}^{\infty i}$$

Es wird nun die Potenz in $\int\limits_{\infty i}^{1}$ linkerseits am Schnitte dieselben Werthe haben, als in $\int\limits_{1}^{\infty i}$ rechterseits; dagegen hat $\log(-t)$, weil unterdessen der Punkt $t = 0$ umkreist ist, in letzterem $\int\limits_{1}^{\infty i}$ um $2\pi i$ zugenommen, und man hat somit:

$$\int\limits_{\infty i}^{1} + \int\limits_{1}^{\infty i} = 2\pi i \int\limits_{1}^{\infty i} e^{xti}\,(t^2-1)^{n-\frac{1}{2}}\,dt,$$

also:

$$2\pi i \int\limits_{1}^{\infty i} e^{xti}\,(t^2-1)^{n-\frac{1}{2}}\,dt = \left(\int\limits_{\infty i}^{\infty i} - \int\limits_{1}^{1}\right) e^{xti}\,(t^2-1)^{n-\frac{1}{2}} \log(-t)\,dt;$$

so dass man aus (2), wenn man den Werth von $J^{-n}(x) = (-1)^n J^n(x)$ aus (6'') in §. 3 substituirt:

$$Y^n(x) = L^n(x) + E^n(x)$$

erhält, wo:

$$L^n(x) = -\,i\,\frac{(-1)^n}{\Gamma(n+\frac{1}{2})\,\Gamma(\frac{1}{2})}\left(\frac{x}{2}\right)^n \int\limits_{\infty i}^{\infty i} e^{xti}\,(t^2-1)^{n-\frac{1}{2}}\left[\log(-t) - \frac{\pi}{2}i\right] dt$$

$$E^n(x) = +\,i\,\frac{(-1)^n}{\Gamma(n+\frac{1}{2})\,\Gamma(\frac{1}{2})}\left(\frac{x}{2}\right)^n \int\limits_{1}^{1} e^{xti}\,(t^2-1)^{n-\frac{1}{2}} \log(-t)\,dt.$$

Letzteres Integral kann noch einer weiteren Reduction unterzogen werden. Bemerkt man nämlich, dass $(t^2-1)^{n-\frac{1}{2}}$ zu beiden Seiten der Strecke von 0 bis $+1$ entgegengesetzte Werthe hat, $\log(-t)$ aber unterhalb derselben um $2\pi i$ grösser ist, als oberhalb, so findet man die beiden Theile von $\int\limits_{+1}^{+1}$:

$$\int\limits_{+1}^{0} + \int\limits_{0}^{+1} = -2\int\limits_{0}^{1} e^{xti}\,(t^2-1)^{n-\frac{1}{2}} \log t\,dt,$$

wo dies letzte Integral oberhalb des Schnittes genommen werden muss und $\log(-t) + \pi i = \log t$ gesetzt, also $\log t$ innerhalb des Integrationsintervalles reell ist.

Was ferner die anderen Theile des Integrales $\int\limits_{0}^{-1}$, $\int\limits_{-1}^{0}$ betrifft, so hat die Potenz in dem zweiten Integrale ebenfalls das entgegengesetzte Zeichen, $\log(-t)$ aber denselben Werth und es ist:

$$\int\limits_{0}^{-1} + \int\limits_{-1}^{0} = 2\int\limits_{0}^{-1} e^{xti}\,(t^2-1)^{n-\frac{1}{2}} \log(-t)\,dt,$$

oder nach Vertauschung von t mit $-t$:

$$= -2\int\limits_{0}^{1} e^{-xti}\,(t^2-1)^{n-\frac{1}{2}} \log t\,dt,$$

wo dies Integral ebenfalls oberhalb des Schnittes zu nehmen ist. Somit hat man, wenn man noch $(t^2-1)^{n-\frac{1}{2}} = (-1)^n\, i\,(1-t^2)^{n-\frac{1}{2}}$ nach (I) in §. 3. setzt:*)

$$E^n(x) = \frac{4}{\Gamma(n+\frac{1}{2})\,\Gamma(\frac{1}{2})} \left(\frac{x}{2}\right)^n \int\limits_0^1 \cos xt \cdot (1-t^2)^{n-\frac{1}{2}} \log t \; dt \,.$$

Von Herrn Neumann ist ein zu dieser Art gehöriges Integral für $Y^0(x)$ gegeben worden, welches, wie mir scheint, eben nur für $n=0$ in dieser Weise existirt. Ich erhalte dasselbe einfach als Grenzfall, indem ich neben (1) in §. 3. noch das andere Integral:

$$J^{-n}(x) = \frac{1}{\Gamma(\frac{1}{2}-n)\,\Gamma(\frac{1}{2})} \left(\frac{x}{2}\right)^{-n} \int\limits_{-1}^{+1} e^{xti}\,(1-t^2)^{-n-\frac{1}{2}}\, dt$$

setze, welches unter der Voraussetzung eines der Null nahen reellen Theiles von n gleichzeitig mit jenem $J^n(x)$ besteht. Bildet man dann:

$$Y^n(x) = 2\pi\, e^{n\pi i}\, \frac{J^n(x)\cos n\pi - J^{-n}(x)}{\sin 2n\pi}$$

$$= \frac{2\sqrt{\pi}\; e^{n\pi i}}{\sin 2n\pi} \int\limits_{-1}^{+1} e^{xti} \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}} \left\{ \frac{\left(\frac{x}{2}\right)^n (1-t^2)^n}{\Gamma(\frac{1}{2}+n)} \cos n\pi - \frac{\left(\frac{x}{2}\right)^{-n} (1-t^2)^{-n}}{\Gamma(\frac{1}{2}-n)} \right\},$$

und lässt n zur Grenze Null übergehen, so findet man durch Differentiation der letzten Klammergrösse und des verschwindenden Nenners $\sin 2n\pi$:

$$Y(x) = \frac{2}{\pi} \int\limits_{-1}^{+1} e^{xti} \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}} \left\{ \log\,(1-t^2) - \psi(\tfrac{1}{2}) \right\},$$

welches mit

$$J(x) = \frac{1}{\pi} \int\limits_{-1}^{+1} e^{xti} \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}}$$

zusammen, für $t = \cos\varphi$ in die erwähnte Formel**) übergeht. —

Die obigen Integrale L und E gestatten eine directe Entwickelung in die Reihe, welche in §. 1. für die Yfunction gegeben ist. Was zunächst E betrifft, so entwickele man $\cos xt$ in eine Reihe und bediene sich dann zur Integration der aus:

$$\int\limits_0^1 t^{2p}\,(1-t^2)^{n-\frac{1}{2}}\, dt = \frac{1}{2}\, \frac{\Gamma(p+\frac{1}{2})\,\Gamma(n+\frac{1}{2})}{\Gamma(p+n+1)}$$

*) Wenn man hierin $t = \cos\varphi$ setzt, so erhält man ein Integral, welches dem von Herrn Lommel (s. p. 468) gegebenen ähnlich, aber nicht gleich ist.

**) Theorie d. Bess. Funct. p. 46 Formel (27) und (28). Man beachte übrigens, dass schon oben p. 472 auf den Unterschied meiner und der Neumann'schen Bezeichnung aufmerksam gemacht wurde.

durch Differentiation nach p folgenden Formel:*)

$$\int_0^1 t^{2p}(1-t^2)^{n-\frac{1}{2}}\log t\, dt = \frac{1}{4}\,\frac{\Gamma(p+\frac{1}{2})\,\Gamma(n+\frac{1}{2})}{\Gamma(p+n+1)}\left\{\psi(p+\tfrac{1}{2})-\psi(p+n+1)\right\}.$$

Dann findet man:

$$E^n(x) = \left(\frac{x}{2}\right)^n \sum_{p=0}^{\infty} \frac{(-1)^p}{\Gamma(p+1)\,\Gamma(p+n+1)}\left(\frac{x}{2}\right)^{2p}\left\{\psi(p+\tfrac{1}{2})-\psi(p+n+1)\right\}.$$

Was nun die Entwickelung von $L^n(x)$ betrifft, so geschieht sie ähnlich, wie die des verwandten Integrales p. 480 — 482. Man findet zunächst:

$$L^n(x) = (-1)^n\frac{i}{\sqrt{\pi}}\left(\frac{x}{2}\right)^n \sum_{p=0}^{\infty}\frac{(-1)^p}{\Gamma(n-p+\frac{1}{2})\,\Gamma(p+1)}\int_{\infty i}^{\infty i} e^{xti}\,t^{2n-2p-1}\left[\log(-t)-\frac{\pi}{2}i\right]dt.$$

Um den Werth der Integrale, oder allgemeiner:

$$\int_{\infty i}^{\infty i} e^{xti}\,(-t)^q\left[\log(-t)-\frac{\pi}{2}i\right]dt$$

für jedes reelle zu q ermitteln, setzen wir, wie p. 481, $t = ui$. Wenn nun hier $(-t)^q$ so bestimmt wird, dass es für reelle negative t reell wird, und $(-u)^q$ in derselben Weise, so ist $u = re^{\varphi i}$, $(-u)^q = r^q e^{q(\varphi-\pi)i}$ und daher für $u = i = e^{\frac{\pi}{2}i}$, $(-u)^q = e^{-q\frac{\pi}{2}i}$. Um nun in $(-t)^q = (-u)^q i^q$ die Potenz von i^q zu bestimmen, setzen wir $t = -1$, $u = i$ und finden so:

$$(-t)^q = e^{q\frac{\pi}{2}i}(-u)^q.$$

Wird nun $\log(-t)$ ebenfalls für negative reelle t reell bestimmt und $\log(-u)$ auch so, so ist $u = i$ gesetzt $\log(-u) = -\frac{\pi}{2}i$ und daher:

$$\log(-t) = \log(-u) + \frac{\pi}{2}i.$$

---

*) Ich wähle hier zur Entwickelung die Form von $E^n(x)$ durch $\int_0^1$, anstatt der obigen durch $\int_1^1$, um alle Weitläufigkeiten zu vermeiden, welche durch die Verallgemeinerung des Euler'schen Integrales erster Gattung entspringen würden. Ich habe übrigens bereits a. a. O. in Schlömilch's Journ. t. IX. p. 13 diese allgemeinste Formel in der Gestalt:

$$\int_b^b (t-a)^p\,(t-b)^q\,(t-c)^{-p-q-2}\,dt$$

$$= 2\pi i\,(b-c)^{-p-1}(c-a)^{-q-1}(a-b)^{p+q+1}\,\frac{\Gamma(q+1)}{\Gamma(-p)\,\Gamma(p+q+2)}$$

gegeben, wo von b um den Verzweigungspunkt a herum nach b zurück zu integriren ist; a, b, c, q beliebige complexe Grössen sind und nur q der Bedingung unterliegt, dass sein reeller Theil grösser als — 1 ist.

Man erhält so unter denselben Voraussetzungen in Bezug auf die Zerschneidung in der u Ebene als p. 481:

$$\int_{\infty i}^{\infty i} e^{xti} (-t)^q \left[\log(-t) - \frac{\pi}{2} i\right] dt = i e^{q\frac{\pi}{2}i} \int_{\infty}^{\infty} e^{-xu} (-u)^q \log(-u)\, du.$$

Letztere Integrale können nun aber aus der dort p. 482 ebenfalls erwiesenen Gleichung:

$$\int_{\infty}^{\infty} e^{-ux} (-u)^q\, du = -\frac{2\pi i}{x^{q+1}} \frac{1}{\Gamma(-q)}$$

leicht durch Differentiation nach q abgeleitet werden, die

$$\int_{\infty}^{\infty} e^{-ux} (-u)^q \log(-u)\, du = \frac{2\pi i}{x^{q+1}\,\Gamma(-q)} \{\log x - \psi(-q)\}$$

ergiebt, und zwar unbedingt für jedes q. Indessen bemerke man, dass, wenn q eine positive ganze Zahl ist, $\Gamma(-q)$ und $\psi(-q)$ gleichzeitig unendlich werden, und zwar, wie man bei Anwendung der Formel $\Gamma(-q)\,\Gamma(1+q) \sin q\pi = -\pi$ leicht findet, so, dass

$$\frac{\psi(-q)}{\Gamma(-q)} = (-1)^{q+1}\,\Gamma(q+1).$$

Damit geht vorstehende Formel für ein solches q über in die andere:

$$\int_{\infty}^{\infty} e^{-ux} (-u)^q \log(-u)\, du = (-1)^q \frac{2\pi i}{x^{q+1}} \Gamma(q+1),$$

die man auch leicht direct findet, wenn man beachtet, dass für ein ganzes positives q, $(-u)^q$ keinen Verzweigungspunkt in $u = 0$ hat, der Integrationsweg also auf die reelle Abscissenaxe zusammengezogen werden kann.

Wendet man nun diese Formel auf obige Summe von $p = 0$ bis $p = n - 1$ an; die erste aber von $p = n$ an und führt in der letzten Summe einen neuen Summationsbuchstaben p für $p - n$ ein, so dass die Summe wieder bei $p = 0$ beginnt, so findet man:

$$L^n(x) = -\left(\frac{x}{2}\right)^{-n} \sum_{p=0}^{n-1} \frac{\Gamma(n-p)}{\Gamma(p+1)} \left(\frac{x}{2}\right)^{2p}$$
$$+ \sum_{p=0}^{\infty} \frac{(-1)^p}{\Gamma(p+1)\,\Gamma(p+n+1)} \left(\frac{x}{2}\right)^{2p} \{\log x^2 - 2\psi(2p+1)\}.$$

Benutzt man dann die aus:

$$\Gamma(\tfrac{1}{2})\,\Gamma(2p+1) = 2^{2p}\,\Gamma(p+1)\,\Gamma(p+\tfrac{1}{2})$$

hervorgehende Relation:

$$2\psi(2p+1) = 2\log 2 + \psi(p+1) + \psi(p+\tfrac{1}{2})$$

so erhält man durch Addition

$$Y^n(x) = L^n(x) + E^n(x)$$

vollkommen in Uebereinstimmung mit der §. 1. entwickelten Reihe.

§. 6.

Die semiconvergenten Entwickelungen der Cylinderfunctionen.

Um semiconvergente Reihen für die Cylinderfunctionen, zunächst unter der Voraussetzung, dass x und n reelle positive Theile haben, zu entwickeln, gehen wir aus von dem

$$\int_1^{\infty i} e^{xti}\,(t^2-1)^{n-\frac{1}{2}}\,dt,$$

welches im Sinne von (2) des §. 4. auf der linken Seite des Schnittes von 1 bis $1+\infty i$, geradlinig zu erstrecken ist.

Wir transformiren dies Integral, indem wir $t = 1 + ri$ setzen und hier r im Reellen von 0 bis ∞ wachsen lassen. Dann ist $t-1 = re^{\frac{\pi}{2}i}$ und nach den Festsetzungen in §. 3.

$$(t-1)^{n-\frac{1}{2}} = r^{n-\frac{1}{2}}\,e^{(n-\frac{1}{2})\frac{\pi}{2}i}.$$

Ferner ist $t + 1 = 2\left(1+\frac{ri}{2}\right)$ also:

$$(t+1)^{n-\frac{1}{2}} = 2^{n-\frac{1}{2}}\,e^{-2(n-\frac{1}{2})\pi i}\left(1+\frac{ri}{2}\right)^{n-\frac{1}{2}}.$$

wo $\left(1+\frac{ri}{2}\right)^{n-\frac{1}{2}}$ so zu nehmen ist, dass es für $r = 0$ sich auf $+1$ reducirt. Denn dann wird eben für $r=0$, $(t+1)^{n-\frac{1}{2}} = 2^{n-\frac{1}{2}}\,e^{-2(n-\frac{1}{2})\pi i}$, welches ebenfalls mit den Festsetzungen in §. 3. über die Zerschneidung in Bezug auf $(t+1)^q$ übereinstimmt. Somit gibt diese Substitution in (2) des §. 4.:

$$\frac{{}^{n}(x) - e^{n\pi i}J^{-n}(x)}{\sin 2n\pi} = \frac{-i}{\pi\sqrt{2}}\,\frac{\Gamma(\frac{1}{2}-n)}{\Gamma(\frac{1}{2})}\,x^n\,e^{xi+\frac{1}{2}(n-\frac{1}{2})\pi i}\int_0^{\infty} e^{-xr}\,r^{n-\frac{1}{2}}\left(1+\frac{ri}{2}\right)^{n-\frac{1}{2}}dr.$$

Ebenso gibt die Substitution von $t = -1 + ri$ in (3) des §. 4. nach Bestimmung der richtigen Zeichen:

$${}^{\pi i}\,\frac{e^{n\pi i}J^n(x) - J^{-n}(x)}{\sin 2n\pi} = \frac{+i}{\pi\sqrt{2}}\,\frac{\Gamma(\frac{1}{2}-n)}{\Gamma(\frac{1}{2})}\,x^n e^{-xi+\frac{1}{2}(3n+\frac{1}{2})\pi i}\int_0^{\infty} e^{-xr}r^{n-\frac{1}{2}}\left(1-\frac{ri}{2}\right)^{n-\frac{1}{2}}dr.$$

Um nun diese Integrale nach absteigenden Potenzen von x zu entwickeln, müssen

$$\left(1 \pm \frac{ri}{2}\right)^{n-\frac{1}{2}}$$

nach aufsteigenden Potenzen von r entwickelt werden; in convergenter

Weise ist dies nur für den Theil des Integrationsintervalles möglich, in dem $r < 2$ ist; in dem Intervall von $r = 2$ bis $r = \infty$ aber wird die Reihe eine semiconvergente werden.

Erinnern wir uns der Lagrange'schen Form des Restes in der Taylor'schen Entwickelung, wonach, wenn $f(r)$ eine **reelle** Function von r bedeutet:

$$f(r) = f(0) + \frac{r}{1} f'(0) + \ldots + \frac{r^{m-1}}{\Gamma(m)} f^{m-1}(0) + \frac{r^m}{\Gamma(m+1)} f^m(h)$$

und h eine gewisse reelle Grösse in dem Intervalle zwischen 0 und r darstellt, so haben wir, wenn wir den Satz auf die reelle Grösse

$$f(r,n) = \left(1 + \frac{ri}{2}\right)^{n-\frac{1}{2}} + \left(1 - \frac{ri}{2}\right)^{n-\frac{1}{2}}$$

anwenden und einstweilen

$$n_p = \frac{\Gamma(n+\frac{1}{2})}{\Gamma(n-p+\frac{1}{2})\,\Gamma(p+1)}$$

setzen, die Entwickelung:

$$f(r,n) = 2 \sum_{p=0}^{m-1} n_{2p} \left(\frac{ri}{2}\right)^{2p} + n_{2m} \left(\frac{ri}{2}\right)^{2m} \left\{ \left(1 + \frac{hi}{2}\right)^{n-\frac{1}{2}-2m} + \left(1 - \frac{hi}{2}\right)^{n-\frac{1}{2}-2m} \right\}.$$

Nimmt man nun $2m > n - \frac{1}{2}$ an, so ist der Modul

$$\operatorname{mod} \left(1 \pm \frac{hi}{2}\right)^{n-\frac{1}{2}-2m} = \left(1 + \frac{h^2}{4}\right)^{\frac{1}{2}(n-\frac{1}{2}-2m)} < 1$$

und daher der Modul der Summe dieser Binome kleiner als 2; so dass der hinzugefügte Rest jedenfalls numerisch kleiner ist, als das an seine Stelle tretende Glied der regulär fortgesetzten binomischen Reihe.

Die Gültigkeit dieser Schlüsse beruht auf der stillschweigend gemachten Voraussetzung eines reellen n; ist aber n complex, und bezeichnet man mit n' die conjugirte imaginäre Grösse, so entwickele man die jedenfalls reelle Grösse

$$f(r,n) + f(r,n')$$

in derselben Weise und erhält so:

$$\begin{aligned} f(r,n) + f(r,n') &= 2 \sum_{p=0}^{m-1} (n_{2p} + n'_{2p}) \left(\frac{ri}{2}\right)^{2p} \\ &+ n_{2m} \left(\frac{ri}{2}\right)^{2m} \left\{ \left(1 + \frac{hi}{2}\right)^{n-\frac{1}{2}-2m} + \left(1 - \frac{hi}{2}\right)^{n-\frac{1}{2}-2m} \right\} \\ &+ n'_{2m} \left(\frac{ri}{2}\right)^{2m} \left\{ \left(1 + \frac{hi}{2}\right)^{n'-\frac{1}{2}-2m} + \left(1 - \frac{hi}{2}\right)^{n'-\frac{1}{2}-2m} \right\}. \end{aligned}$$

Das entsprechende Glied der binomischen Reihe, wenn sie regulär fortgesetzt wird, ist:

$$2\, n_{2m} \left(\frac{ri}{2}\right)^{2m} + 2\, n'_{2m} \left(\frac{ri}{2}\right)^{2m}$$

und jener Rest geht aus diesem hervor, wenn die zwei Glieder mit complexen Grössen multiplicirt werden, deren Modulus kleiner als 1 ist, sobald $2m$ den reellen Theil von $(n - \frac{1}{2})$ übersteigt; der Rest ist also kleiner als dies Glied.

Ganz ebensolche Betrachtungen würde man über die Reihe für die reelle Grösse

$$\frac{1}{i}\,[f(r,n) - f(r,n')]$$

anstellen können, und sieht nun, dass, wenn man letztere mit i multiplicirt und zur ersteren addirt, eine Reihe:

$$f(r,n) = \left(1 + \frac{ri}{2}\right)^{n-\frac{1}{2}} + \left(1 - \frac{ri}{2}\right)^{n-\frac{1}{2}} = 2\,\Sigma\, n_{2p} \left(\frac{ri}{2}\right)^{2p}$$

entsteht, welche die Eigenschaft hat, dass der Rest, den man rechter Hand hinzufügen müsste, wenn man die Reihe an irgend einer Stelle abbricht, sowohl in seinem reellen als imaginären Theile kleiner ist, als das regulär folgende Glied. Jedoch gilt diese Eigenschaft, welche man als Semiconvergenz bezeichnet, erwiesener Massen erst von dem Gliede an, wo $2p$ grösser als der reelle Theil von $(n - \frac{1}{2})$ ist.

Es ist nun einleuchtend, dass man diese Betrachtung ohne Weiteres auf die Entwickelung des reellen Ausdruckes:

$$\frac{1}{i}\left\{\left(1 + \frac{ri}{2}\right)^{n-\frac{1}{2}} - \left(1 - \frac{ri}{2}\right)^{n-\frac{1}{2}}\right\} = \frac{2}{i}\,\Sigma\, n_{2p+1} \left(\frac{ri}{2}\right)^{2p+1}$$

übertragen kann und man erhält so, wenn man diese Reihe mit i multiplicirt und zur vorigen addirt oder subtrahirt:

$$\left(1 \pm \frac{ri}{2}\right)^{n-\frac{1}{2}} = \Sigma\, n'_{2p} \left(\frac{ri}{2}\right)^{2p} \pm \Sigma\, n_{2p+1} \left(\frac{ri}{2}\right)^{2p+1}$$

wo beide Reihen von der Art sind, dass, wenn man bei einem Gliede derselben die numerische Berechnung abbricht, die so erhaltene complexe Grösse von dem Werthe, welchen die Reihe streng darstellen soll, um eine Grösse differirt, welche in ihrem reellen, sowie ihrem imaginären Theile numerisch unter den entsprechenden Theilen des in der Reihe nächstfolgenden Gliedes liegt.

Will man der Einfachheit wegen beide Reihen in die eine:

$$\left(1 \pm \frac{ri}{2}\right)^{n-\frac{1}{2}} = \Sigma\, n_p \left(\pm \frac{ri}{2}\right)^p$$

vereinigen, so darf man doch nie vergessen, dass die Glieder gerader Ordnung ebenso wie die ungerader eigentlich eine Reihe für sich bilden.

Wenn man vorstehende Reihe mit einer complexen Grösse multiplicirt, so wird man nicht in allen Fällen behaupten können, dass der Rest in seinen beiden Theilen jederzeit unter den entsprechenden Theilen des nächsten Gliedes liegen müsse. Die Eigenthümlichkeit unserer semiconvergenten binomischen Reihe kann aber auch so ausgesprochen werden, dass der Modul (der absolute Betrag, wie ihn Herr Weierstrass treffend nennt) des Restes unter dem des nächsten Gliedes liegen müsse; und diese Eigenschaft wird bei jeder Multiplication mit einer complexen Grösse erhalten. Ebenso wenig wird dieselbe durch eine Integration der Reihe aufgehoben.

Substituiren wir nun diese Reihen in obigen Integralen, so findet man ohne Schwierigkeit:

$$(1)\quad \frac{J^n(x) - e^{n\pi i} J^{-n}(x)}{\sin 2n\pi} = -\frac{i}{\sqrt{2\pi x}} \frac{e^{n\pi i}}{\cos n\pi} \Sigma \frac{(n,p)}{(2x)^p} e^{[x - \frac{1}{2}\pi(n+\frac{1}{2}-p)]i}$$

$$(2)\quad e^{n\pi i} \frac{e^{n\pi i} J^n(x) - J^{-n}(x)}{\sin 2n\pi} = +\frac{i}{\sqrt{2\pi x}} \frac{e^{n\pi i}}{\cos n\pi} \Sigma \frac{(n,p)}{(2x)^p} e^{-[x - \frac{1}{2}\pi(n+\frac{1}{2}-p)]i}$$

wo zur Abkürzung

$$(n,p) = \frac{\Gamma(n+p+\frac{1}{2})}{\Gamma(n-p+\frac{1}{2})} \frac{1}{\Gamma(p+1)} = \frac{n^2 - \left(\frac{1}{2}\right)^2}{1} \cdot \frac{n^2 - \left(\frac{3}{2}\right)^2}{2} \cdots \frac{n^2 - \left(\frac{2p-1}{2}\right)^2}{p}$$

gesetzt ist.

Beachtet man, dass nach (2) und (3) in §. 1. die linken Seiten von (1), (2) respective

$$\frac{1}{2\pi} Y^n(x) \mp \frac{i}{2} \frac{e^{n\pi i}}{\cos n\pi} J^n(x)$$

sind, so erhält man durch Subtraction und Addition:

$$(3)\qquad J^n(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \Sigma \frac{(n,p)}{(2x)^p} \cos [x - \tfrac{1}{2}\pi(n + \tfrac{1}{2} - p)].$$

$$(4)\quad e^{-n\pi i} \cos n\pi \frac{1}{\pi} Y^n(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \Sigma \frac{(n,p)}{(2x)^p} \sin [x - \tfrac{1}{2}\pi(n + \tfrac{1}{2} - p)].$$

Ferner leitet man aus (1), (2) leicht:

$$(5)\qquad J^{-n}(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \Sigma \frac{(n,p)}{(2x)^p} \cos [x - \tfrac{1}{2}\pi(-n + \tfrac{1}{2} - p)]$$

ab. Wenn man nun beachtet, dass nach bekannten Reductionsformeln für ein ganzes p:

$$\frac{\Gamma(-n+p+\frac{1}{2})}{\Gamma(-n-p+\frac{1}{2})} = \frac{\Gamma(n+p+\frac{1}{2})}{\Gamma(n-p+\frac{1}{2})}$$

also

$$(+n,p) = (-n,p),$$

so sieht man, dass die Formel für $J^{-n}(x)$ aus der von $J^{+n}(x)$ einfach durch Vertauschung von n mit $-n$ gewonnen wird, und somit Gleichung (3), welche, wie alle übrigen Reihen dieses Paragraphen, zunächst unter der Voraussetzung eines positiven reellen Theiles von n gewonnen ist, in dem Falle eines negativen reellen Theiles von n ebenfalls ihre Geltung behält. Da nun (1), (2), (4) lineare Functionen der beiden $J^{+n}(x)$ und $J^{-n}(x)$ sind, so gelten sie auch sämmtlich allgemein für alle complexen Werthe von n. Dagegen bleibt die andere Voraussetzung, dass x einen positiven reellen Theil habe, noch bestehen; und es ist $\sqrt{x}$ so zu bestimmen, dass sein Werth positiv wird für ein reelles positives x.

Um den Charakter obiger Reihen vollständig zu übersehen, so bemerke man, dass sich $J^n(x)$ in die beiden Reihen zerlegen lässt:

$$(6)\qquad J^n(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi x}}\cos\left[x - \tfrac{1}{2}\pi(n+\tfrac{1}{2})\right]\,\Sigma\,(-1)^p\,\frac{(n,2p)}{(2x)^{2p}}$$
$$-\sqrt{\frac{2}{\pi x}}\sin\left[x - \tfrac{1}{2}\pi(n+\tfrac{1}{2})\right]\,\Sigma\,(-1)^p\,\frac{(n,2p+1)}{(2x)^{2p+1}},$$

und jede von diesen hat den Charakter, dass, wenn man die Reihe an irgend einer Stelle abbricht, ihr Werth von dem complexen Werthe, den sie darstellen soll, nur um eine Grösse abweicht, deren Modul kleiner ist, als das nächtsfolgende Glied. Jedoch kann diese Eigenschaft nur von dem Gliede an behauptet werden, von dem an $2p$ oder $2p+1$ grösser ist, als der reelle Theil von $(n-\frac{1}{2})$.

Wenn n und x reelle positive Grössen sind, so haben in jeder Reihe die Glieder von $p \geq n$ an alternirende Zeichen; denn es wechselt von $p > n$ an das Zeichen in der Reihe der Coefficienten (n,p) regelmässig ab, und es haben daher alle $(n,2p)$ dasselbe Vorzeichen; ebenso sind alle $(2p+1)$ desselben Zeichens. Die Reihen sind demnach in diesem Falle semiconvergente Reihen von dem gewöhnlichen Charakter *).

*) Von den Resultaten dieses Paragraphen ist nur Reihe (3) für ganze n und reelle positive x von Jacobi (Schumacher astr. Nachr. 28. p. 94) und Lipschitz (Crelle Journ. t. 56. p. 194) auf ähnliche Weise, als oben, und eine Reihe für $Y^0(x)$ und $Y^1(x)$ von Lommel (Studien üb. d. Bess. F. p. 93) entwickelt worden. Was die Ableitung der semiconvergenten Reihe für $J^n(x)$ betrifft, die Letzterer gegeben hat, so entspricht sie nicht den Anforderungen, welche die neuere Analyse an eine solche stellt: Nachdem Herr Lommel die endliche Reihe nach absteigenden Potenzen für ein $n = m + \frac{1}{2}$ entwickelt hat, wo m eine ganze Zahl ist, und gezeigt, dass diese Reihe „vermöge ihrer Form allein schon" den Grundeigenschaften der Bessel'schen Functionen genügt, „hält er sich (p. 57) für berechtigt, die Gleichung auch dann noch als Ausdruck der Bessel'schen Functionen anzusehen, wenn m gebrochen ist, mit dem Vorbehalte freilich, dass die fragliche unendliche Reihe überhaupt zulässig sei." Die Bedeutung dieses Vorbehaltes, über den nichts weiter bemerkt wird, kann wohl keine andere sein, als die der Semiconvergenz der Reihe. Wie soll dies aber erwiesen werden, ohne den Rest zu entwickeln? da es auf keine Weise möglich ist, einer Reihe an und für sich anzusehen, ob sie semiconvergent ist, oder nicht; und eine solche Reihe ohne Kenntniss oder wenigstens vorherige Abschätzung des Restes überhaupt keine Bedeutung hat. Eine semiconvergente Potenzreihe ist nicht, wie eine convergente, ihrer Form nach characteristisch für die entwickelte Function: sie ist nichts weiter, als eine Reihe von Einschliessungen innerhalb endlich von einander entfernter Grenzen, die man nicht ohne Weiteres für andere Werthe der Veränderlichen in Anspruch nehmen kann, als wofür sie bewiesen ist.

§. 7.

Discussion der semiconvergenten Reihen bei Variabilität des x.

Die Reihen des vorigen §. sind zunächst unter der Voraussetzung eines x mit positivem reellen Theile abgeleitet worden, und es entsteht die Frage, ob und inwiefern diese Voraussetzung eine zufällige ist.

Zu diesem Zwecke denken wir uns in der Reihe aus (1) des vorigen §.

$$(1) \qquad \frac{J^n(x) - e^{n\pi i} J^{-n}(x)}{\sin 2n\pi} = -\frac{i}{\sqrt{2\pi x}} \frac{i}{\cos n\pi} \Sigma \frac{(n,p)}{(2x)^p} e^{[x - \frac{1}{2}\pi(n+\frac{1}{2}-p)]i}$$

x mit $-x$ vertauscht, wodurch sie in:

$$+\frac{i}{\sqrt{-2\pi x}} \frac{e^{\frac{1}{2}\pi i}}{\cos n\pi} \Sigma \frac{(n,p)}{(2x)^p} e^{-[x-\frac{1}{2}\pi(n+\frac{1}{2}-p)]i}$$

übergeht, welche Reihe nach (2) des §. 6. den Werth:

$$(\mathrm{I}) \qquad i\sqrt{\frac{x}{-x}} \frac{e^{n\pi i} J^n(x) - J^{-n}(x)}{\sin 2n\pi}$$

besitzt. Durch Vertauschung von x mit $-x$ würde aber die linke Seite der Gleichung (1) in

$$\frac{J^n(-x) - e^{n\pi i} J^{-n}(x)}{\sin 2n\pi}$$

übergegangen sein, und es fragt sich, ob dies mit (I) überstimmt oder nicht. Man bemerkt nun, dass, wenn die Variabele sich in positiver Richtung (d. h. oberhalb um $x=0$ herum) von $+x$ bis zu $-x$ bewegt, $J^n(x)$ dadurch den Factor $e^{n\pi i}$, $J^{-n}(x)$ den Factor $e^{-n\pi i}$ erlangt; wie man aus den Reihenentwicklungen in §. 1. leicht findet. Dann würde also vorstehender Ausdruck

$$= \frac{e^{n\pi i} J^n(x) - J^{-n}(x)}{\sin 2n\pi}$$

sein, und da bei derselben Variabilität des x, $\sqrt{-x} = \sqrt{x}\, e^{\frac{1}{2}\pi i}$, so stimmt dieser Werth mit (I) überein, d. h. die Gleichung (1) besteht auch noch für ein x mit negativem reellen Theile, wenn man sich x aus dem ursprünglichen Gebiet der Gültigkeit (dem 4. und 1. Quadranten) auf positivem Wege in den 2. oder 3. Quadranten übergehend denkt.

Die Gleichung (1) besteht jedoch nicht mehr, wenn x nach einem vollen Umlaufe um $x = 0$ in das ursprüngliche Intervall der Gültigkeit zu seinem anfänglichen Werthe zurückkehrt, da unterdessen die Functionen $J^n(x)$ und $J^{-n}(x)$ respective die Factoren $e^{2n\pi i}$, $e^{-2n\pi i}$ angenommen haben, die Reihe in (1) aber nur den Factor -1. Nur in dem Falle, dass $n = m + \frac{1}{2}$ und m eine ganze Zahl ist, bleiben beide Seiten auch dann noch einander gleich; dann aber ist, wie ersichtlich, die Reihe (1) keine semiconvergente Entwickelung, sondern eine endliche Reihe. Wir dürfen von diesem Falle daher hier und im Folgenden ganz absehen.

Die Anwendbarkeit der Formel (1) hört hiernach auf, sobald x aus dem 3. Quadranten in den 4. tritt; und man kann, wie mir scheint, dieses merkwürdige Verhalten am besten so ausdrücken:

Man zerschneide die Ebene von 0 bis $-\infty i$ in der negativ-imaginären Axe, bestimme die vieldeutigen Potenzen $x^{\pm n}$ in $J^{\pm n}(x)$ und $\sqrt{x}$ so, dass sie sich für $x = +1$ auf $+1$ reduciren, so gilt die Gleichung (1) in der ganzen Ebene, so weit sie nicht zerschnitten ist.

Aehnlich, jedoch anders verhält es sich mit der Gleichung:

$$(2)\quad e^{n\pi i}\,\frac{e^{n\pi i}J^n(x) - J^{-n}(x)}{\sin 2n\pi} = \frac{i}{\sqrt{2\pi x}}\,\frac{e^{n\pi i}}{\cos n\pi}\,\Sigma\,\frac{(n,p)}{(2x)^p}\,e^{-\left[x - \frac{1}{2}\pi(n+\frac{1}{2}-p)\right]i}.$$

Vertauscht man in der Reihe x mit $-x$, so geht sie über in:

$$\frac{i}{\sqrt{-2\pi x}}\,\frac{e^{(2n+\frac{1}{2})\pi i}}{\cos n\pi}\,\Sigma\,\frac{(n,p)}{(2x)^p}\,e^{\left[x - \frac{1}{2}\pi(n+\frac{1}{2}-p)\right]i},$$

welche nach (1) summirt werden kann und:

$$(\mathrm{II})\qquad = -\,i\sqrt{\frac{x}{-x}}\cdot e^{n\pi i}\,\frac{J^n(x) - e^{n\pi i}J^{-n}(x)}{\sin 2n\pi}$$

ergiebt. Die linke Seite von (2) geht durch diese Vertauschung in:

$$e^{n\pi i}\,\frac{e^{n\pi i}J^n(-x) - J^{-n}(x)}{\sin 2n\pi}$$

über, und soll dies mit dem Werthe (II) übereinstimmen, so muss

$$J^n(-x) = e^{-n\pi i}J^n(+x),\quad J^{-n}(-x) = e^{+n\pi i}J^{-n}(+x)\ \text{und}$$

$\sqrt{-x} = -\,i\sqrt{x}$ gesetzt werden, d. h. man muss voraussetzen, dass jetzt x sich in negativem Sinne (unterhalb $x = 0$) von $+x$ zu $-x$ bewegt hat.

Man erhält daher das Intervall, in dem Gleichung (2) gilt, wenn man sich die Ebene in der positiven imaginären Axe von 0 bis $+\infty i$ zerschnitten denkt. Die Bestimmung der vieldeutigen Potenzen erfolgt hierbei so, wie vorhin, dass sie für $x = +1$ der reellen positiven Einheit gleich sind.

Diese Eigenthümlichkeit der semiconvergenten Reihen hängt mit dem Umstande zusammen, dass sie für die Linien, in welchen wir die Ebenen zerschnitten, weil in ihnen resp. die Gleichungen (1), (2) zu bestehen aufhören, selbst alle Bedeutung verlieren.

Was zuerst (1) anbelangt, so geht diese Reihe für $x = -yi$ in:

$$\frac{i}{\sqrt{2\pi y}}\,\frac{e^{\frac{1}{2}n\pi i}}{\cos n\pi}\,e^y\,\Sigma\,(-1)^p\,\frac{(n,p)}{(2y)^p}$$

über. Wenn nun y positiv reell, so ist diese Reihe nicht mehr semiconvergent, wie man für ein reelles n leicht erkennt; denn für ein solches werden die in der Reihe (n, p) alternirenden Zeichen durch $(-1)^p$ aufgehoben und die Reihe enthält von $2p > n$ an lauter Glieder einerlei Zeichens. Eine Reihe mit lauter positiven Gliedern aber kann die Eigenschaft nicht mehr besitzen, dass sie, an einer beliebigen Stelle abgebrochen, sich von einem gewissen Werthe immer weniger unterschiede, als das nächstfolgende Glied angiebt*).

Was die Reihe (1) für $x = +yi$ betrifft, so geht sie für diesen Werth in

$$-\frac{1}{\sqrt{2\pi y}} \frac{e^{\frac{1}{2}n\pi i}}{\cos n\pi} e^{-y} \Sigma \frac{(n, p)}{(2y)^p}$$

über, also, wenn n reell, in eine Reihe mit abwechselnden Zeichen,

---

*) Denn angenommen, die aus lauter positiven abnehmenden Gliedern bestehende Reihe

$$R = u_0 + u_1 + u_2 + \ldots, \quad \text{wo } u_0 > u_1 > u_2 > \ldots$$

sei semiconvergent, so sei 1) $u_0 > R$. Dann ist $u_0 + u_1$ jedenfalls $> R$ um eine Grösse, welche $> u_1$ ist. Nun soll aber bei einer semiconvergenten Reihe, wenn sie abgebrochen wird, $u_0 + u_1$ sich von R um weniger, als das nächste Glied u_2 unterscheiden. Dies widerspricht aber vorigem, wonach der Unterschied $> u_1$ also um so mehr $> u_2$ ist. Wenn 2) $u_0 < R$ ist, so wäre es doch von R um weniger als u_1 verschieden und daher $u_0 + u_1 > R$; dann aber können analoge Betrachtungen, als im ersten Falle angestellt werden.

Eine Reihe mit lauter positiven Gliedern kann daher, wenigstens an solchen Stellen, wo ihre Glieder abnehmen, nicht semiconvergent sein. Nun kann man aber in der im Text betrachteten Reihe jedenfalls y so gross annehmen, dass bis zu einem beliebigen p die Glieder sämmtlich abnehmen; die Reihe könnte demnach bis zu diesem hin nicht als semiconvergent betrachtet werden; und doch würde man gerade die Reihe bis zu dem kleinsten Gliede fortsetzen, um den möglichst hohen Grad von Genauigkeit zu erhalten. Somit kann eine solche Reihe mit lauter positiven Gliedern nur in gewissem Sinne noch als semiconvergent angesehen werden, der mir indess von vorstehender Reihe, die Riemann (Poggendorffs Annal. t. 95. p. 135) als solche in Anspruch nimmt, nicht verständlich ist.

Bei dieser Gelegenheit erlaube ich mir eine höchst einfache, aber, wie mir scheint, noch nicht ausgesprochene Bemerkung zu machen, welche für semiconvergente Reihen mit abwechselnden Vorzeichen — dem am häufigsten vorkommenden Falle — die oft complicirte Abschätzung der Grösse des Restes ganz erspart. Wenn man nämlich nachweisen kann, dass der Rest immer von entgegengesetztem Zeichen, als das letzte Glied, also:

$$R = u_0 - u_1 + u_2 - \ldots + (-1)^n u_n + (-1)^{n+1} r_{n+1},$$

so ist

$$(-1)^{n+1} r_{n+1} = (-1)^{n+1} u_{n+1} + (-1)^{n+2} r_{n+2} \text{ oder } r_{n+1} = u_{n+1} - r_{n+2},$$

und somit, wenn die r alle positive Grössen sind, $r_{n+1} > u_{n+1}$. Eine solche Reihe ist also immer semiconvergent.

Wenn die Zeichen nicht rein alternirend sind, wird eine Abschätzung der Grösse des Restes und der Nachweis, dass er kleiner, als das folgende Glied ist, allerdings nöthig sein.

welche allerdings semiconvergent sein wird. Erinnert man sich jedoch, dass diese Reihe eigentlich als aus der der Glieder von gerader und der von ungerader Ordnung zusammengesetzt zu betrachten ist, deren jede, für sich genommen, jetzt auch wieder nur Glieder einerlei Zeichens enthält, so scheint jetzt auch vorstehende Reihe unbrauchbar. Indessen lässt sich zeigen, dass man in dem Falle $x = + yi$ die Reihe als Eine zu betrachten hat. Denn in dem Falle, dass $x = yi$ ist, kann an Stelle des Integrales, welches im vorigen §. zur Entwicklung der semiconvergenten Reihe führte, das andere Integral

$$\int_1^{\infty} e^{-yt} \, (t^2 - 1)^{n-\frac{1}{2}} \, dt$$

genommen werden, welches durch die Substitution $t = 1 + r$ in:

$$e^{-2(n-\frac{1}{2})\pi i} \, 2^{n-\frac{1}{2}} \, e^{-y} \int_0^{\infty} e^{-yr} \, r^{n-\frac{1}{2}} \left(1 + \frac{r}{2}\right)^{n-\frac{1}{2}} dr$$

übergeht. Jetzt aber kann $\left(1 + \frac{r}{2}\right)^{n-\frac{1}{2}}$ in eine theils convergente, theils semiconvergente Reihe entwickelt werden, welche nicht in zwei zu zerfällen ist; und man erhält so obige Reihe in dem angegebenen Sinne.

In ganz derselben Weise lässt sich denn auch zeigen, dass die Reihe (2) für $x = + yi$, in der Schnittlinie, welche die Gültigkeit der Gleichung (2) begrenzt, aufhört, eine Bedeutung zu haben; während sie für $x = - yi$ als Eine Reihe zu fassen, und nicht in zwei zu zerfällen ist.

Nachdem wir so die Gültigkeitsintervalle der Gleichungen (1), (2) kennen gelernt haben, so ist es leicht, zu sehen, dass die aus (1), (2) durch lineare Verbindung entstandenen Formeln (3), (4), (5) des §. 6. nur innerhalb des Intervalles bestehen bleiben können, in dem jene beiden Gleichungen (1), (2) gelten, d. h. also: Es gelten die semiconvergenten Reihen (3), (4) nur für solche x, die einen positiven reellen Theil haben, und es ist diese Beschränkung somit nicht eine zufällige, sondern eine wesentliche.

In der That: Vertauscht man in der Reihe:

$$(3) \qquad \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \quad \Sigma \, \frac{(n, p)}{(2x)^p} \cos\left[x - \tfrac{1}{2}\pi\left(n + \tfrac{1}{2} - p\right)\right],$$

welche für x mit positivem reellen Theile $= J^n(x)$ ist, x mit $-x$, so dass sie in:

$$\sqrt{-\frac{2}{\pi x}} \quad \Sigma \, \frac{(n, p)}{(2x)^p} \, (-1)^p \cos\left[x + \tfrac{1}{2}\pi\left(n + \tfrac{1}{2} - p\right)\right]$$

übergeht, so kann sie nach (4) summirt werden, und es hat die Reihe (3) für x mit negativem reellen Theile den Werth:

$$i \cos n\pi \, e^{n\pi i} \, \frac{1}{\pi} \, Y^{-n}(-x).$$

Ebenso findet man, dass die Reihe (4)

(4) $$\sqrt{\frac{2}{\pi x}} \, \Sigma \, \frac{(n,p)}{(2x)^p} \sin\left[x - \tfrac{1}{2}\pi\left(n + \tfrac{1}{2} - p\right)\right],$$

die für x mit positivem reellen Theile den Werth:

$$\cos n\pi \, e^{-n\pi i} \, \frac{1}{\pi} \, Y^n(x),$$

hat, für solche mit negativem reellen Theile den Werth:

$$i \, J^{-n}(-x)$$

annimmt.

Um demnach auch für solche x, welche einen negativen reellen Theil haben, eine semiconvergente Entwickelung zu erhalten, hat man $J^n(x)$ erst auf $J^n(-x)$, in dem also die Variabele $(-x)$ einen positiven reellen Theil hat, mittels der Gleichung:

$$J^n(x) = e^{n\pi i} \, J^n(-x)$$

zu reduciren. Für rein imaginäre y aber ist eine Entwickelung dieser Art nicht statthaft.

Während also:

$$\sqrt{\frac{2}{\pi x}} \cos\left[x - \tfrac{1}{2}\pi\left(n + \tfrac{1}{2}\right)\right]$$

der asymptotische Werth von $J^n(x)$ für x mit reellem positiven Theile ist, wo $\sqrt{x}$ mit reellem positiven Theile zu nehmen ist, so nähert sich $J^n(x)$ für solche x, die einen negativen reellen Theil haben, dem Ausdruck:

$$e^{n\pi i} \sqrt{\frac{2}{-\pi x}} \cos\left[x + \tfrac{1}{2}\pi\left(n + \tfrac{1}{2}\right)\right],$$

wenn der Modul unendlich wächst; und es ist $\sqrt{-x}$ für reelle negative x positiv zu nehmen.

Wenn $x = \varepsilon + yi$ gesetzt wird, wo ε eine unendlich abnehmende, y eine unendlich zunehmende reelle positive Grösse bezeichnet, so ist nach der ersten Formel der asymptotische Werth von $J^n(\varepsilon + yi)$

$$\sqrt{\frac{1}{2\pi(\varepsilon + yi)}} \; e^{\frac{1}{2}\left(n+\frac{1}{2}\right)\pi i} \quad e^{y},$$

wo

$$\sqrt{\varepsilon + yi} \;=\; \sqrt{\sqrt{\varepsilon^2 + y^2}} \; e^{\frac{1}{2} i \operatorname{arc} \tan \frac{y}{\varepsilon}},$$

und in $\frac{1}{2} \operatorname{arc} \tan \frac{y}{\varepsilon}$ der Bogen im 1. Quadranten zu nehmen ist, damit der reelle Theil von $\sqrt{\varepsilon + yi}$ positiv sei. Nimmt nun ε unendlich ab, so wird $\operatorname{arc} \tan \frac{y}{\varepsilon} = \frac{\pi}{2}$ und $\sqrt{\sqrt{\varepsilon^2 + y^2}} = \sqrt{y}$, so dass:

$$\sqrt{\frac{1}{2\pi y}}\, e^{\frac{1}{2}n\pi i}\, e^{y}$$

der asymptotische Werth von $J^n(\varepsilon + yi)$ ist.

Um den von $J^n(-\varepsilon + yi)$ zu bestimmen, nehmen wir

$$J^n(-\varepsilon + yi) = e^{n\pi i}\, J^n(\varepsilon - yi)$$

und finden so:

$$e^{n\pi i} \sqrt{\frac{1}{2\pi(\varepsilon - yi)}}\, e^{-\frac{1}{2}(n+\frac{1}{2})\pi i}\, e^{y}$$

als asymptotischen Werth; jetzt ist:

$$\sqrt{\varepsilon - yi} = \sqrt{\sqrt{\varepsilon^2 + y^2}}\, e^{-\frac{1}{2} i \operatorname{arc\,tan} \frac{y}{\varepsilon}}$$

und bei unendlich abnehmenden ε, arc tan $\frac{y}{\varepsilon} = \frac{\pi}{2}$ zu setzen, so dass man

$$\sqrt{\frac{1}{2\pi y}}\, e^{\frac{1}{2}n\pi i}\, e^{y}$$

als asymptotischen Werth von $J^{+n}(-\varepsilon + yi)$ findet. Da dieser mit dem von $J^n(\varepsilon + yi)$ übereinstimmt, so können wir ihn sofort für den asymptotischen Werth von $J^n(yi)$ mit unendlich wachsendem y überhaupt annehmen.

Bei richtiger Bestimmung der Zeichen ist dann:

$$\sqrt{\frac{1}{2\pi y}}\, e^{-\frac{1}{2}n\pi i}\, e^{y}$$

der asymptotische Werth von $J^n(-yi)$.

Erlangen, 15. December 1868.

Neuer Beweis des Vorhandenseins complexer Wurzeln in einer algebraischen Gleichung.

Von Hermann Kinkelin in Basel.

Seit Gauss seinen ersten Beweis von der Auflösbarkeit einer algebraischen Gleichung durch einen complexen Werth der Unbekannten veröffentlicht hat (1799, Werke Bd. III. pag. 1.), sind mehrere Beweise von verschiedenen Verfassern erschienen, welche theils auf einer analytischen Grundlage, wie derjenige von Cauchy (1821, Cours d'analyse, pag. 331), der zweite und dritte von Gauss (1815 und 1816, Werke Bd. III, pag. 31 und 57), der von Serret (Cours d'algèbre supérieure (1866, Band I, pag. 97), theils unter Beiziehung räumlicher Anschauungen aufgestellt wurden, wie namentlich die beiden von Ullherr (Crelle's Journal Bd. 31, pag. 231) und der letzte von Gauss (1849, Werke Bd. III, pag. 70), der von dem ersten sich nur in der Form unterscheidet. Man wird nun wohl an den Beweis irgend einer Wahrheit die Forderung stellen dürfen, dass die zu Grunde gelegten Principien die vollständige Wahrheit enthalten und geeignet seien, sie zu enthüllen. Ausser dem ersten und letzten Beweise von Gauss ist aber keiner, der die Existenz aller Wurzeln einer Gleichung unmittelbar zeigt und damit der ausgesprochenen Forderung Genüge leistet. Es scheint demnach gerechtfertigt, einen neuen Beweis dieses Fundamentalsatzes der Lehre von den algebraischen Gleichungen mitzutheilen, der nicht an dieser Unvollständigkeit leidet und ausserdem den Vorzug hat, sich auf den allerelementarsten Grundlagen aufzubauen und mit den nöthigen Modificationen auch auf transcendente Gleichungen anwenden zu lassen.

Es sei $x = p + qi$ eine complexe Zahl, in der p und q reelle Grössen bedeuten und $i = \sqrt{-1}$ ist. Nimmt man auf einer Ebene ein festes Axensystem XOY an und trägt p als Abscisse, q als Ordinate auf, so ist der so bestimmte Punkt m in der Ebene der Repräsentant von x. Die Gerade, welche diesen Punkt mit dem Nullpunkte O der Coordinaten verbindet, habe die Länge r und bilde mit der Axe OX den in der positiven Drehungsrichtung gemessenen Winkel α; dann kann man auch setzen:

$$x = r\,(\cos\alpha + i\sin\alpha),$$

wobei r und α die Polarcoordinaten von m sind und zwar r der Radius, α das Argument.

Lässt man p und q alle möglichen Werthe von $-\infty$ bis $+\infty$ annehmen, so durchläuft x das ganze Gebiet der complexen Zahlen und die repräsentirenden Punkte m füllen die ganze Ebene (Zahlenebene) aus. Das Nämliche wird dadurch erreicht, dass man dem Radius r alle Werthe von 0 bis $+\infty$ und dem Argument α diejenigen von 0 bis 2π giebt.

Es bezeichne $F(x)$ eine algebraische ganze rationale Function der complexen Veränderlichen x, so kann man sie ebensowohl als Function der beiden unabhängigen Veränderlichen p und q, wie als solche von r und α auffassen. Sie lässt sich in die Form

$$P + Qi = R(\cos A + i \sin A)$$

bringen, wobei P, Q, R und A stetige reelle Functionen von r und α sind. Der Punkt M sei Repräsentant der Function für denjenigen Werth von x, dessen Repräsentant der Punkt m ist. Er hat die rechtwinkligen Coordinaten P und Q und die Polarcoordinaten R und A. Giebt man dem Radius r einen bestimmten Werth und variirt α stetig von 0 bis 2π, so wird sich sowohl R als A stetig ändern und zwar so, dass beide für $\alpha = 2\pi$ die nämlichen Werthe annehmen, wie für $\alpha = 0$. Das heisst: Wenn man den Punkt m eine Kreisperipherie vom Radius r durchlaufen lässt, so wird der Punkt M ebenfalls eine geschlossene krumme Linie (von einem oder mehreren Umgängen) beschreiben, welche wir eine repräsentirende Linie nennen wollen. Da ferner die Function $F(x)$ auch stetig bezüglich des Radius r ist, so wird die stetige Variation desselben von 0 bis $+\infty$ eine Folge von repräsentirenden Linien erzeugen, von denen sich jede an die vorhergehende, ohne Zwischenräume zu lassen, anschliesst. Ueberdies ist zu bemerken, dass keine der repräsentirenden Linien für einen endlichen Werth von r einen unendlich entfernten Punkt enthält, noch für einen unendlichen Werth von r einen Punkt in endlicher Entfernung von O.

Es soll nun zunächst gezeigt werden, dass die Function $F(x)$ aller möglichen complexen Werthe fähig ist oder, was dasselbe ist, dass die repräsentirenden Linien die ganze Zahlenebene bedecken. Um die Darstellung zu vereinfachen, wollen wir eine Function, deren repräsentirende Linien (von $\alpha = 0$ bis 2π) in der positiven Drehungsrichtung laufende, geschlossene, nicht ins Unendliche gehende Linien sind und die ganze Zahlenebene stetig bedecken, in der Weise, dass die einem unendlich grossen r entsprechenden ganz im Unendlichen liegen, eine unbegrenzte Function nennen. Die Unveränderliche x ist eine solche ihrer selbst.

Satz I. Die Summe aus einer unbegrenzten Function und einer constanten Zahl ist selbst eine unbegrenzte Function.

Beweis. Es sei $f(x) = P + Qi$ eine unbegrenzte Function und werde durch den Punkt M repräsentirt. Addirt man zu ihr die constante Zahl $a + bi$, so wird die Summe gleich

$$f_1(x) = (P + a) + (Q + b)i.$$

Die Coordinaten jedes die Function $f_1(x)$ repräsentirenden Punktes M_1 sind bezüglich um a und b grösser, als die des entsprechenden Punktes M. Sämmtliche Punkte M sind demnach in gleicher Richtung und um einen gleichen Betrag verschoben worden, so dass sich in ihrer gegenseitigen Anordnung nichts geändert hat und die repräsentirenden Linien in unveränderter Gestalt, wenn auch in anderer Lage, die Zahlenebene bedecken, w. z. z. w.

Satz. II. Das Product aus einer unbegrenzten Function und ihrer Veränderlichen ist selbst eine unbegrenzte Function.

Beweis. Es sei wieder $x = r(\cos\alpha + i\sin\alpha)$ die Veränderliche und $f(x) = R(\cos A + i\sin A)$ eine unbegrenzte Function derselben, so ist ihr Product

$$x.f(x) = rR\,[\cos(A + \alpha) + i\sin(A + \alpha)].$$

Lässt man in dem letzten Ausdruck zunächst den Radius r constant und variirt dann α stetig von 0 bis 2π, so wird nach der Voraussetzung das Argument A für $\alpha = 0$ und $\alpha = 2\pi$ den nämlichen Werth A_0 oder allgemeiner $A_0 + 2g\pi$ haben, unter g eine ganze positive Zahl verstanden. Wie daher auch im Uebrigen der Gang des Argumentes A beschaffen sein mag, so wird die Summe $A + \alpha$ für $\alpha = 0$ von dem Anfangswerthe A_0 ausgehen und in stetigem Verlaufe, entweder beständig zunehmend oder stellenweise abnehmend, mit dem Endwerthe $A_0 + 2\pi$ oder allgemeiner $A_0 + 2g\pi + 2\pi$ für $\alpha = 2\pi$ schliessen, also jedenfalls einen vollen Umlauf machen. Da nun auch der Radius rR eine stetige Function von α ist, so folgt hieraus, dass die Linie, welche der die Function $x.f(x)$ für den angenommenen Werth von r repräsentirende Punkt beschreibt, um den Nullpunkt O des Axensystems herumgeht und in sich selbst zurückkehrt. Ferner sind beide, sowohl der Radius rR als das Argument $A + \alpha$ nach der Voraussetzung stetige Functionen von r, und der erstere nimmt bei stetigem Variiren von r vom Anfangswerthe 0 bis zum Endwerth ∞ ebenfalls stetig alle Werthe von 0 bis ∞ an, was auch sonst sein Verlauf sein mag, da R für keinen unendlichen Werth von r Null ist. Die repräsentirenden Linien schliessen sich demnach um den Anfangspunkt herum continuirlich an einander an und bedecken die ganze Zahlenebene, w. z. z. w.

Es ist nicht überflüssig zu bemerken, dass der Radius R, wenn auch nicht für unendliche grosse, so doch für endliche Werthe von r ein- oder mehrmals verschwinden kann, wenn nämlich eine oder mehrere der die Function $f(x)$ repräsentirenden Linien durch den Nullpunkt O gehen. Ein solcher Durchgang komme überhaupt k mal vor, sei es dadurch, dass k verschiedene Linien oder dass einzelne von ihnen mehrmals diese Eigenschaft haben. Alsdann wird der Radius R für k Werthpaare von r und α gleich Null, welche gleich oder ungleich sein können (im ersten Fall weisen die repräsentirenden Linien in O einen Rückkehrpunkt auf). Der Radius rR der Function $x.f(x)$ wird dann ein Mal mehr verschwinden, nämlich ausser für jene noch für $r = 0$. Wenn daher die Gleichung $f(x)$ k complexe Wurzeln hat, so hat die Gleichung $x.f(x) = 0$ $k + 1$ solche. Geometrisch wird dies dadurch dargestellt, dass die repräsentirenden Linien von $x . f(x)$ $k + 1$ mal durch den Nullpunkt O gehen, wenn diejenigen von $f(x)$ k mal denselben passiren.

Satz III. Eine algebraische ganze rationale Function einer complexen Veränderlichen ist jedes complexen Werthes fähig.

Beweis. Die Grössen $a_1, a_2, \ldots a_{n-1}, a_n$ mögen beliebige complexe Constante bedeuten, x eine complexe Veränderliche, so sind folgende Functionen unbegrenzt in dem angenommenen Sinne, und zwar abwechselnd zufolge Satz I. und II.:

$$\begin{array}{ll} x, & x + a\,, \\ x(x + a_1) = x^2 + a_1 x\,, & x^2 + a_1 x + a_2\,, \\ x(x^2 + a_1 x + a_2) = x^3 + a_1 x^2 + a_2 x\,, & x^3 + a_1 x^2 + a_2 x + a_3\,, \end{array}$$

u. s. w. bis

$$x^n + a_1 x^{n-1} + a_2 x^{n-2} + \ldots + a_{n-1} x + a_n\,,$$

und können daher jeden gegebenen complexen Werth annehmen, w. z. z. w.

Aus dem letzten Satz folgt unmittelbar, dass eine algebraische ganze rationale Function für wenigstens einen complexen Werth der Veränderlichen Null wird, oder dass eine algebraische Gleichung mindestens eine complexe Wurzel hat.

Man ist nun leicht im Stande nachzuweisen, dass eine algebraische Gleichung des n^{ten} Grades n complexe Wurzeln haben muss; wie folgt:

Satz IV. Wenn eine algebraische ganze rationale Function des n^{ten} Grades ohne constantes Glied für n Werthe der complexen Veränderlichen Null wird, so gilt dies auch für eine solche Function mit constantem Glied.

Beweis. Es wird behauptet: wenn eine ganze rationale Function einer complexen Grösse, in welcher kein constantes Glied vorkommt, für n Werthe der Veränderlichen verschwindet, so gibt es ebenfalls n Werthe von x, welche die Function

$$F(x) = x^n + a_1 x^{n-1} + a_2 x^{n-2} + \dots + a_{n-1} x + a_n ,$$

die das constante Glied a_n enthält, gleich Null machen. In der That, es ist im vorigen Satz gezeigt worden, dass sich immer ein solcher Werth ω von x finden lässt, dass

$$\text{(W)} \qquad \omega^n + a_1 \omega^{n-1} + a_2 \omega^{n-2} + \dots + a_{n-1} \omega = - a_n$$

wird. Setzt man daher in $F(x)$

$$x = y + \omega ,$$

so dass ω der Bedingung (W) genügt, so werden x und y eine gleiche Anzahl von Werthen haben und es wird

$$F(x) = y^n + b_1 y^{n-1} + b_2 y^{n-2} + \dots + b_{n-1} y$$
$$+ (\omega^n + a_1 \omega^{n-1} + \dots + a_{n-1} \omega + a_n)$$

oder, da nach der Annahme die Klammer gleich Null ist,

$$F(x) = y^n + b_1 y^{n-1} + b_2 y^{n-2} + \dots + b_{n-1} y ,$$

wo das constante Glied fehlt und die Coefficienten $b_1, b_2, \dots b_{n-1}$ Functionen von ω und den Coefficienten $a_1, a_2, \dots a_{n-1}$ sind. Der Voraussetzung zufolge gibt es aber n Werthe von y, welche den letzten Ausdruck von $F(x)$ gleich Null machen und daher ebensoviele von x, w. z. z. w.

Satz V. Eine algebraische Gleichung des n^{ten} Grades hat n complexe Wurzeln.

Beweis. Die Grösse $x^2 + a_1 x = x(x + a_1)$ wird Null für die beiden Werthe $x = 0$ und $x = - a_1$, folglich wird $x^2 + a_1 x + a_2$ nach dem vorigen Satz ebenfalls für zwei Werthe von x Null.

Daraus folgt nach der Bemerkung zu Satz II. weiter, dass $x(x^2 + a_1 x + a_2) = x^3 + a_1 x^2 + a_2 x$ für drei Werthe von x verschwindet, was nun auch für die Function $x^3 + a_1 x^2 + a_2 x + a_3$ gilt.

Auf gleiche Weise schliesst man, dass der Ausdruck $x(x^3 + a_1 x^2 + a_2 x + a_3) = x^4 + a_1 x^3 + a_2 x^2 + a_3 x$ und mit ihm auch $x^4 + a_1 x^3 + a_2 x^2 + a_3 x + a_4$ für vier Werthe von x verschwindet.

Wird in dieser Art weiter geschlossen, so ergibt sich allgemein, dass die Function

$$x^n + a_1 x^{n-1} + a_2 x^{n-2} + \dots + a_{n-1} x + a_n$$

für n Werthe von x Null werden muss, w. z. z. w.

Basel, den 16. Januar 1869.

Notiz über das cykloidische Pendel.

Von Carl Neumann in Leipzig.

Auf einem gegebenen Cykloiden-Bogen, dessen Ebene vertikal und dessen Symmetrieachse ebenfalls vertikal steht, mag irgend ein Mobil sich befinden, welches getrieben durch die Schwerkraft hin und her geht längs des gegebenen Bogens. Der unterste Punkt des Bogens sei β, ferner seien α und γ diejenigen beiden Punkte des Bogens, zwischen denen das Mobil oscillirt; so dass also etwa α den willkürlich gewählten Ausgangspunkt des Mobils vorstellt, während γ den mit α gleich hohen Punkt auf der andern Seite des Bogens repräsentirt. Man denke sich ferner in der Ebene des Bogens eine Kreislinie construirt, welche den Bogen berührt im Punkte β, und gleichzeitig auch in Berührung ist mit der horizontalen geraden Linie $\alpha\gamma$. Endlich denke man sich ein in der horizontalen Richtung $\alpha\gamma$ ankommendes System paralleler Lichtstrahlen, und das Mobil als einen kleinen undurchsichtigen Körper, welcher in jedem Augenblicke seinen Schatten auf die Kreislinie wirft. Alsdann gilt folgender Satz:

Während das Mobil, getrieben von der Schwerkraft, hinabgleitet von α nach β, wird gleichzeitig der genannte Schattenpunkt die eine Hälfte der Kreislinie mit constanter Geschwindigkeit durchlaufen.

Man kann diesen Satz in sehr elementarer Art beweisen. Ist nämlich v die Geschwindigkeit des Mobils in einem Augenblicke, wo sein Abstand von der Linie $\alpha\gamma$ gleich z ist, so wird bekanntlich

$$v = \sqrt{2gz}$$

sein, (g die Intensität der Schwerkraft). Hieraus ergiebt sich leicht die gleichzeitige Geschwindigkeit v_1 des Schattenpunktes. Offenbar ist nämlich:

$$v_1 \cos\varphi_1 = v \cos\varphi,$$

wo φ und φ_1 die Winkel bezeichnen, unter welchen die Geschwindigkeiten v und v_1 gegen die Verticale geneigt sind. Und hieraus findet man, und zwar durch elementare, rein geometrische Betrachtungen:

$$v_1 = \frac{c}{2}\sqrt{\frac{g}{r}},$$

wo c und r Constante sind; c repräsentirt den Abstand des Punktes β von der Linie $\alpha\gamma$, und r den Radius desjenigen Kreises, durch dessen Fortrollen der gegebene Cykloiden-Bogen erzeugt werden kann. Demnach hat also v_1 einen constanten Werth. W. z. b. w.

Bezeichnet mithin T die Zeit, welche der Schattenpunkt braucht, um die Hälfte seiner Kreislinie zu durchlaufen, so wird, weil $c\pi$ die ganze Länge dieser Kreislinie ist:

$$T : 1 = \frac{c\pi}{2} : v_1,$$

d. i.

$$T : 1 = \frac{c\pi}{2} : \frac{c}{2}\sqrt{\frac{g}{r}},$$

mithin:

$$T = \pi\sqrt{\frac{r}{g}}.$$

Diese Zeit T ist offenbar zugleich auch diejenige, welche das von der Schwerkraft getriebene Mobil braucht, um von α nach β zu gelangen. Somit ergiebt sich die Schwingungsdauer des Mobils durch Verdoppelung des für T gefundenen Werthes.

Leipzig, im März 1869.

INHALT.

Verantwortliche Redaction: **A. Clebsch** und **C. Neumann.**

MATHEMATISCHE ANNALEN

HERAUSGEGEBEN

VON

A. CLEBSCH UND C. NEUMANN,
PROFESSOR IN GÖTTINGEN. PROFESSOR IN LEIPZIG.

I. Band. 4. Heft.

LEIPZIG,
DRUCK UND VERLAG VON B. G. TEUBNER.
1869.

Ueber fortgesetztes Tangentenziehen an Curven dritter Ordnung mit einem Doppel- oder Rückkehrpunkte.

Von H. Durège in Prag.

Legt man an eine Curve dritter Ordnung eine Tangente, so hat diese bekanntlich ausser dem Berührungspunkte noch einen Punkt mit der Curve gemein, welcher der dem Berührungspunkte zugehörige Tangentialpunkt genannt wird*). Man kann nun in dem Tangentialpunkte auf's Neue eine Tangente an die Curve legen und den zugehörigen Tangentialpunkt aufsuchen, sodann in diesem wieder eine Tangente ziehen, u. s. f. Bei einem solchen fortgesetzten Tangentenziehen liegt es nahe, sich die Frage zu stellen, was schliesslich mit dem Tangentialpunkte geschieht, ob derselbe in's Unbestimmte verläuft oder sich einer bestimmten Grenzlage nähert, oder ob er in gewissen Fällen wieder mit dem ersten Berührungspunkte zusammenfallen kann. Dieselben Fragen bieten sich dar, wenn man umgekehrt verfährt, wenn man nämlich aus einem Punkte der Curve eine Tangente an dieselbe legt, aus dem Berührungspunkte wiederum, und auf diese Weise ebenfalls fortgesetzt Tangenten zieht.

In Beziehung auf diese Fragen finden nun bei denjenigen Curven dritter Ordnung, welche einen Doppel- oder einen Rückkehrpunkt besitzen, eigenthümliche Sätze statt, die im Folgenden erörtert werden sollen.

1.

Ich beginne mit den Curven dritter Ordnung mit einem Rückkehrpunkte, weil hier die Verhältnisse am einfachsten sind; solche Curven haben bekanntlich nur einen Wendepunkt, der auch immer reell ist, und aus einem Punkte der Curve lässt sich nur eine Tangente an die Curve legen. Das Folgende stützt sich nun auf eine von

*) Cremona. Introduzione ad una teoria geometrica delle curve piane (39. b).

Salmon angegebene Methode*), daher wird es zweckmässig sein, dieselbe hier in der Kürze mitzutheilen.

Bezeichnen $A=0$, $B=0$, $C=0$ die Gleichungen von drei Geraden, indem A, B, C lineare Functionen homogener Punktcoordinaten bedeuten, so kann die Gleichung einer Curve dritter Ordnung mit einem Rückkehrpunkte stets in der Form

$$B^2C = A^3$$

dargestellt werden. Die Geraden A, B, C haben dann folgende Beziehungen zu der Curve: C ist die Wendetangente, B die Rückkehrtangente, und A die Verbindungslinie des Rückkehrpunktes mit dem Wendepunkte. Die Durchschnitte der Geraden BC, CA, AB mögen resp. mit a, b, c bezeichnet werden; dann ist also c der Rückkehrpunkt, und b der Wendepunkt. Zieht man nun durch den ersteren eine beliebige Gerade, so kann deren Gleichung in der Form

$$A = \mu B$$

dargestellt werden, wo μ einen von der Lage der Geraden abhängigen Coefficienten bedeutet. Diese Gerade schneidet die Curve in einem Punkte $\varkappa$, und zwar nur in diesem, da sie in c schon zwei Punkte mit der Curve gemein hat, und es können dann auch die Geraden $a\varkappa$ und $b\varkappa$ durch die Zahl μ ausgedrückt werden. Verbindet man nämlich die Gleichungen $A=\mu B$ und $B^2C=A^3$, so erhält man, indem man A eliminirt, $C=\mu^3 B$, also die Gleichung der Geraden $a\varkappa$, und dann, indem man A für μB setzt, $C=\mu^2 A$ als Gleichung der Geraden $b\varkappa$. Demnach wird durch die eine Zahl μ ein bestimmter Punkt $\varkappa$ der Curve fixirt, indem der gemeinschaftliche Durchschnitt der drei Geraden

$$\begin{aligned} c\varkappa \;\ldots\; A &= \mu B \\ b\varkappa \;\ldots\; C &= \mu^2 A \\ a\varkappa \;\ldots\; C &= \mu^3 B \end{aligned}$$

stets auf der Curve liegt. Daraus ergeben sich die Coordinaten des Punktes $\varkappa$ in Beziehung auf ABC als Fundamentaldreieck, nämlich es ist

$$A : B : C = \mu : 1 : \mu^3.$$

Man sieht leicht, dass jeder Zahl μ ein bestimmter Punkt der Curve, und umgekehrt jedem Punkte der Curve eine bestimmte Zahl μ entspricht. Lässt man den Punkt $\varkappa$ die Curve in der Weise durchlaufen, dass man die Gerade $c\varkappa$ stets in demselben Sinne um c herumdreht, so durchläuft μ alle reellen Zahlenwerthe entweder stets zunehmend oder stets abnehmend durch $\pm\infty$ hindurch; für $\mu=0$ fällt die Gerade $c\varkappa$ mit A, und für $\mu=\infty$ mit B zusammen, daher entspricht dem Wendepunkte b der Werth $\mu=0$, und dem Rückkehrpunkte der

*) Salmon. A treatise on the higher plane curves. pag. 165.

Werth $\mu = \infty$. Die Werthe, welche μ in den unendlich fernen Punkten der Curve annimmt, hängen von einer näheren Bestimmung der Art homogener Coordinaten, die zur Anwendung kommen, ab. In jedem Falle aber erleidet die Aenderung der Zahl μ in den unendlich fernen Punkten der Curve keine Unterbrechung der Stetigkeit, da die Drehung der Geraden $c\varkappa$ sich continuirlich fortsetzt. Daher kann man immer je zwei ins Unendliche sich erstreckende Aeste der Curve als im Unendlichen zusammenhängend betrachten. In diesem Sinne kann man sagen, dass die Punkte b und c die Curve in zwei Theile zerlegen, in der Art, dass μ auf dem einen Theile alle positiven Werthe von 0 bis ∞, und auf dem andern alle negativen Werthe von $-\infty$ bis 0 durchläuft.

Schneidet man die Curve mit einer beliebigen Geraden, deren Gleichung die folgende sei:

$$\alpha A + \beta B + \gamma C = 0,$$

und bezeichnet man mit $\varkappa$ einen der Durchschnittspunkte, so findet man den diesem Punkte entsprechenden Werth von μ, wenn man die Bedingung aufstellt, dass die Gerade durch den Durchschnitt der Geraden $c\varkappa$ und $b\varkappa$ hindurchgeht, indem man also A, B, C aus den drei Gleichungen

$$\begin{aligned} A - \mu B \qquad &= 0 \\ \mu^2 A \qquad - C &= 0 \\ \alpha A + \beta B + \gamma C &= 0 \end{aligned}$$

eliminirt. Dadurch erhält man

$$\begin{vmatrix} 1, & -\mu, & 0 \\ \mu^2, & 0, & -1 \\ \alpha, & \beta, & \gamma \end{vmatrix} = \beta + \alpha\mu + \gamma\mu^3 = 0.$$

Die Wurzeln μ_1, μ_2, μ_3 dieser cubischen Gleichung geben die den drei Durchschnitten jener Geraden mit der Curve zugehörigen Zahlen an. In dieser Gleichung fehlt aber das mit μ^2 behaftete Glied, daher ist

$$\mu_1 + \mu_2 + \mu_3 = 0.$$

Man kann auf dieselbe Art auch das Umgekehrte beweisen, nämlich dass drei Punkte der Curve stets in gerader Linie liegen, wenn die Summe der ihnen zugehörigen Zahlen gleich Null ist.

Nimmt man nun an, es sei jene Gerade eine Tangente, und bezeichnet mit ν die dem Berührungspunkte und mit ν_1 die dem Tangentialpunkte zugehörige Zahl, so hat man, da im Berührungspunkte zwei Punkte der Curve zusammenfallen,

$$2\nu + \nu_1 = 0 \qquad \text{oder} \qquad \nu_1 = -2\nu.$$

Giebt man aber dem Tangentialpunkte die Zahl ν, und dem Berührungspunkte die Zahl ν', so ist

$$\nu + 2\nu' = 0 \qquad \text{oder} \qquad \nu' = -\tfrac{1}{2}\nu.$$

Hieraus folgt, wenn man die beiden Theile ins Auge fasst, in welche die Curve durch die Punkte b und c getheilt wird, dass der Tangential- und der Berührungspunkt stets auf verschiedenen Theilen der Curve liegen. Setzt man sodann die Tangentenlegung fort, indem man zuerst jeden neuen Tangentialpunkt als Berührungspunkt annimmt und den zugehörigen Tangentialpunkt aufsucht, so erhält man, wenn ν die Zahl des ersten Berührungspunktes ist, für die Tangentialpunkte nach und nach die Zahlen

$$-2\cdot\nu\,,\ (-2)^2\nu\,,\ (-2)^3\nu,\ \ldots.\ (-2)^n\nu,\ \ldots;$$

diese wechseln fortwährend das Vorzeichen, und ihre numerischen Werthe wachsen unaufhörlich und bis ins Unendliche; daher geht der Tangentialpunkt fortwährend von dem einen Theile der Curve auf den andern hinüber und nähert sich ohne Aufhören dem Rückkehrpunkte. Bezeichnet man umgekehrt die dem ersten Tangentialpunkte zugehörige Zahl mit ν und legt aus jedem Berührungspunkte aufs Neue die Tangente an die Curve, so erhält man für die Berührungspunkte nach und nach die Zahlen

$$-\tfrac{1}{2}\nu\,,\ (-\tfrac{1}{2})^2\nu\,,\ (-\tfrac{1}{2})^3\nu\,,\ \ldots.,\ (-\tfrac{1}{2})^n\nu,\ \ldots,$$

welche sich ohne Aufhören der Null nähern. Daher nähert sich der Berührungspunkt, indem er fortwährend von dem einen Theile der Curve auf den andern hinübergeht, ohne Aufhören dem Wendepunkte. Es leuchtet von selbst ein, dass sowohl im Wendepunkte als auch im Rückkehrpunkte der Berührungs- und der Tangentialpunkt zusammenfallen, so dass jene Punkte wirklich Grenzlagen für die Letzteren bilden.

Zieht man durch den Wendepunkt b eine beliebige Gerade, so sind die den beiden anderen Durchschnitten x' und x'' mit der Curve zugehörigen Zahlen μ einander gleich und entgegengesetzt, weil dem Wendepunkte die Zahl $\mu = 0$ zugehört; daher liegen x' und x'' stets auf verschiedenen Theilen der Curve. Da ferner die Gerade cx die Gleichung $A = \mu B$ hat, so folgt, dass die Strahlen cx' und cx'' einander in Bezug auf die Geraden A und B harmonisch zugeordnet sind. Die Gerade B theilt demnach jede durch b gehende Sehne harmonisch und ist daher die harmonische Polare*) des Wendepunktes.

2.

Bei Curven dritter Ordnung mit einem Doppelpunkte kann man nach Salmons Vorgange**) ebenfalls jeden Punkt der Curve

*) Nach der Benennung Salmons (Higher plane curves. pag. 140).

**) A. a. O. pag. 170.

durch eine gewisse Zahl bestimmen, indem man von einer andern Gleichungsform ausgeht. Bezeichnet man nämlich wieder mit

$$A = 0\ , B = 0\ , C = 0$$

die Gleichungen dreier Geraden, so kann jede Curve dritter Ordnung mit einem Doppelpunkte durch die Gleichung

$$(A^2 \mp B^2)\ C = A^3$$

dargestellt werden, und zwar gilt das obere oder untere Vorzeichen, je nachdem der Doppelpunkt ein eigentlicher Doppelpunkt oder ein conjugirter Punkt ist. Hier gehen von einem Punkte der Curve zwei (reelle oder imaginäre) Tangenten an die Curve, und diese hat drei Wendepunkte, von denen im Falle eines eigentlichen Doppelpunkts einer, und im Falle eines conjugirten Punktes alle drei reell sind. Was die Beziehung der Geraden A, B, C zu der Curve anbelangt, so ist zuerst C eine Wendetangente, und der Punkt AC oder b ein Wendepunkt, also derjenige, der in allen Fällen reell vorhanden ist. Zerlegt man ferner im Falle des oberen Zeichens $A^2 - B^2$ in die beiden Factoren $A + B$ und $A - B$, so schneiden die Geraden $A + B = 0$ und $A - B = 0$ die Curve in drei zusammenfallenden Punkten, und zwar beide da, wo die Curve auch von der Geraden A getroffen wird, also im Punkte AB oder c. Daher ist c der Doppelpunkt, und $A + B = 0$ und $A - B = 0$ die Tangenten in diesem. Die Gerade A ist demnach die Verbindungslinie bc des Wendepunkts b und des Doppelpunkts c. Die Gerade B endlich geht ebenfalls durch den Doppelpunkt und ist der Geraden A in Beziehung auf die beiden Tangenten im Doppelpunkte harmonisch zugeordnet.

Im Falle des unteren Vorzeichens zerfällt $A^2 + B^2$ in die beiden imaginären Factoren $A + iB$ und $A - iB$. Daher sind dann die Tangenten im Doppelpunkte imaginär, und der letztere ein conjugirter Punkt.

Wir wollen das doppelte Vorzeichen mit dem Buchstaben ε bezeichnen und daher die Gleichung der Curve schreiben

$$(A^2 - \varepsilon B^2)\ C = A^3.$$

Zieht man nun wieder durch den Doppelpunkt c eine beliebige Gerade $c\varkappa$ mit der Gleichung $A = \mu B$, so erhält man durch Verbindung dieser Gleichung mit der Gleichung der Curve für die Geraden $a\varkappa$ und $b\varkappa$ die Gleichungen

$$a\varkappa \ \ldots . \ (\mu^2 - \varepsilon)\ C = \mu^3 B$$
$$b\varkappa \ \ldots . \ (\mu^2 - \varepsilon)\ C = \mu^2 A.$$

Es greifen hier die früher gemachten Bemerkungen Platz. Eine bestimmte Zahl μ und ein bestimmter Punkt der Curve entsprechen einander gegenseitig, und zwar sind hier die Coordinaten eines solchen

$$A : B : C = \mu\ (\mu^2 - \varepsilon)\ :\ (\mu^2 - \varepsilon) : \mu^3.$$

Für $\mu = 0$ erhält man den Wendepunkt b; setzt man aber $\mu = \infty$, so erhält man den Durchschnitt der Geraden $B = 0$ und $A = C$. In der That genügen diese Werthe der Gleichung der Curve; demnach entspricht der Werth $\mu = \infty$ dem Durchschnitte der Geraden B mit der Curve (es giebt nur einen solchen, da B ausserdem durch den Doppelpunkt geht), welcher Punkt in der Folge mit d bezeichnet werden soll. $A = C$ ist dann die Gleichung der Geraden bd. Da hier dasselbe gilt, was oben über den Zusammenhang zweier Curvenäste im Unendlichen gesagt ist, so wird hier die Curve durch die Punkte b und d in zwei solche Theile zerlegt, dass die Zahl μ auf dem einen Theile die positiven Werthe von 0 bis ∞ und auf dem anderen die negativen Werthe von $-\infty$ bis 0 durchläuft.

Schneidet man die Curve durch eine beliebige Gerade, deren Gleichung

$$\alpha A + \beta B + \gamma C = 0$$

sei, so findet man wie oben die den Durchschnitten zugehörigen Zahlen, wenn man A, B, C aus den drei Gleichungen

$$\begin{array}{llll} A - \mu B & & = 0 \\ \mu^2 A & - (\mu^2 - \varepsilon)\, C & = 0 \\ \alpha A + \beta B & + \gamma C & = 0 \end{array}$$

eliminirt. Diese Zahlen sind also die Wurzeln μ_1, μ_2, μ_3 der cubischen Gleichung

$$\begin{vmatrix} 1, & -\mu, & 0 \\ \mu^2, & 0, & -(\mu^2 - \varepsilon) \\ \alpha, & \beta, & \gamma \end{vmatrix} = (\alpha + \gamma)\,\mu^3 + \beta\mu^2 - \varepsilon\alpha\mu - \varepsilon\beta = 0\,.$$

Da hierin die Coefficienten von μ^2 und μ^0 resp. β und $-\varepsilon\beta$ sind, so besteht zwischen den Zahlen μ_1, μ_2, μ_3 die Beziehung

$$(1) \qquad \mu_1 + \mu_2 + \mu_3 + \varepsilon\mu_1\,\mu_2\,\mu_3 = 0\,,$$

und es folgt ebenso leicht umgekehrt, dass, wenn drei Zahlen dieser Gleichung genügen, die zugehörigen Curvenpunkte in gerader Linie liegen.

Nimmt man an, dass die obige Gerade eine Wendetangente sei, so müssen die drei Werthe μ_1, μ_2, μ_3 einander gleich sein; die letzte Gleichung geht dann über in

$$3\mu + \varepsilon\mu^3 = 0$$

und liefert für die Wendepunkte die Zahlen $\mu = 0$ und $\mu = \pm\sqrt{-3\varepsilon}$. Hierdurch bestätigt sich das oben über die Wendepunkte Gesagte. Ist nämlich der Doppelpunkt ein eigentlicher ($\varepsilon = +1$), so ist nur der dem Werthe $\mu = 0$ zugehörige Wendepunkt b reell; ist aber der Doppelpunkt ein conjugirter Punkt ($\varepsilon = -1$), so sind alle drei Wendepunkte reell, und die ihnen zugehörigen Werthe von μ sind:

$$\mu = 0 \quad , \quad \mu = +\sqrt{3} \quad , \quad \mu = -\sqrt{3} \; .$$

Lässt man die obige Gerade durch den Wendepunkt b ($\mu = 0$) hindurchgehen, so zeigt die Gleichung (1), dass die den beiden anderen Durchschnitten der Geraden mit der Curve zugehörigen Zahlen gleich und entgegengesetzt sind. Daher ist auch hier die Gerade B die harmonische Polare des Wendepunkts B, und man kann den früher mit d bezeichneten Punkt ($\mu = \infty$) nun als den Durchschnitt der harmonischen Polare des Wendepunkts b mit der Curve bezeichnen. Dann folgt zugleich, dass die Gerade bd, deren Gleichung $A = C$ war, die Curve im Punkte d berührt.

3.

Wir müssen nun die beiden in Rede stehenden Arten von Curven abgesondert behandeln und betrachten zuerst die Curven dritter Ordnung mit einem eigentlichen Doppelpunkt. Hier ist $\varepsilon = +1$ zu setzen. Die Gleichung der Curve heisst dann

$$(A^2 - B^2)\; C = A^3;$$

die Coordinaten eines Punkts, welchem die Zahl μ zugehört, sind

$$A : B : C = \mu\,(\mu^2 - 1) : (\mu^2 - 1) : \mu^3,$$

und die Werthe μ_1, μ_2, μ_3, welche dreien in gerader Linie liegenden Curvenpunkten zugehören, erfüllen die Gleichung

(2) $$\mu_1 + \mu_2 + \mu_3 + \mu_1\,\mu_2\,\mu_3 = 0.$$

Wenn die Curve eine Schleife bildet, so liegt offenbar der Durchschnitt d der harmonischen Polare des (reellen) Wendepunkts auf der Schleife. Die Curve kann nun allerdings auch andere Formen haben, namentlich kann die Schleife sich in abgesonderte, ins Unendliche verlaufende Theile spalten; allein beachtet man den durch die continuirliche Aenderung der Zahl μ vermittelten Zusammenhang im Unendlichen, so kann man stets einen Theil der Curve angeben, welcher der Schleife analog ist. Der Doppelpunkt c theilt nämlich die Curve in der Art in zwei Theile, dass man von c aus auf jedem derselben wieder nach c zurückgelangen kann. Derjenige dieser beiden Theile, auf welchem sich der Punkt d befindet, soll dann die Schleife oder der Theil S genannt werden, der andere Theil dagegen, welcher den Punkt d nicht enthält, möge der offene Theil oder der Theil U heissen.

Die beiden Tangenten in dem Doppelpunkte haben, wie wir oben sahen, die Gleichungen

$$A = B \qquad \text{und} \qquad A = -B,$$

daher gehören dem Doppelpunkte zwei Zahlen an, nämlich $\mu = +1$ und $\mu = -1$. In der That, lässt man einen beweglichen Punkt die Schleife (den Theil S) durchlaufen und wieder nach c zurückgelangen, so wird der Punkt d überschritten; daher durchläuft μ, wenn man es etwa mit dem Werthe $+1$ ausgehen lässt, zwischen c und d die positiven Werthe von $+1$ bis ∞, und dann zwischen d und c die negativen Werthe von $-\infty$ bis -1. Durchläuft man dagegen den Theil U, so geht μ von $+1$ durch 0 hindurch nach -1. Hieraus folgt: der (reelle) Wendepunkt liegt stets auf dem Theile U, und dieser Theil enthält diejenigen Punkte, deren zugehörige Zahlen numerisch kleiner als 1 sind, während den Punkten des Theiles S (der Schleife) diejenigen Zahlen angehören, die numerisch grösser als 1 sind.

Denken wir uns nun an einem beliebigen Punkte der Curve eine Tangente gezogen. Sei ν die dem Berührungspunkte, ν_1 die dem Tangentialpunkte zugehörige Zahl, so folgt aus (2), indem man

$$\mu_1 = \mu_2 = \nu \ , \ \mu_3 = \nu_1$$

setzt,

$$2\nu + \nu_1 + \nu^2\nu_1 = 0 \qquad \text{oder} \qquad \nu_1 = -\frac{2\nu}{1+\nu^2} .$$

Zieht man dagegen aus einem Punkte mit der Zahl ν eine Tangente an die Curve und nennt ν' die dem Berührungspunkte zugehörige Zahl, so ist für $\mu_1 = \nu \ , \ \mu_2 = \mu_3 = \nu'$

$$\nu + 2\nu' + \nu\nu'^2 = 0 \qquad \text{oder} \qquad \nu' = \frac{-1 \pm \sqrt{1-\nu^2}}{\nu} .$$

Hierdurch bestätigt sich zunächst, dass aus einem Punkte der Curve im Allgemeinen zwei Tangenten an die Curve gezogen werden können. Ist aber ν numerisch grösser als 1, so wird ν' imaginär, also: Bei einer Curve dritter Ordnung mit einem eigentlichen Doppelpunkte ist es nicht möglich, aus einem Punkte der Schleife (des Theiles S) eine reelle Tangente an die Curve zu legen, und für alle an die Curve gelegten Tangenten liegen die Tangentialpunkte auf dem Theile U der Curve. In der That ist auch der Werth von $\nu_1 = -\frac{2\nu}{1+\nu^2}$ für jeden Werth von ν numerisch kleiner als 1. Geht man nun aber von einem Punkte des Theiles U aus, so kann man, da dann $\nu < 1$ ist, $\nu = \sin\Theta$ setzen, bezeichnet man ferner die beiden entsprechenden Werthe von ν' mit ν_1' und ν_2', so ergiebt sich

$$\nu_1' = -\operatorname{tg}\tfrac{1}{2}\Theta \qquad\qquad \nu_2' = -\operatorname{cotg}\tfrac{1}{2}\Theta,$$

daher ist stets der eine numerisch kleiner, der andere numerisch grösser als 1. Also: Aus jedem Punkte des Theiles U gehen zwei reelle Tangenten an die Curve, und zwar immer die eine an die Schleife (den Theil S) die andere an den Theil U.

Aus diesen Sätzen folgt, dass man beim fortgesetzten Tangentenziehen die Schleife ganz unberücksichtigt lassen kann. Denn einmal liegen Tangentialpunkte nur auf dem Theile U; sucht man aber successive die Berührungspunkte auf, so kann die Tangentenziehung von dem auf der Schleife liegenden Berührungspunkte nicht fortgesetzt werden, und es kommt daher jedesmal nur der auf dem Theile U liegende Berührungspunkt in Betracht. Hieraus lässt sich abnehmen, dass bei alleiniger Berücksichtigung des Theiles U hier dieselben Sätze gelten, wie bei den Curven mit einem Rückkehrpunkte. In der That, setzt man wie oben bei einem auf dem Theile U liegenden Punkte die zugehörige Zahl $\nu = \sin\Theta$ (wobei man Θ am einfachsten zwischen -90^0 und $+90^0$ liegend annehmen kann), so ist für den auf demselben Theile U liegenden Berührungspunkt, abgesehen vom Vorzeichen, $\nu' = \operatorname{tg} \frac{1}{2}\Theta$. Setzt man daher nun nach und nach

$$\operatorname{tg} \tfrac{1}{2}\Theta = \sin\Theta' \;,\; \operatorname{tg} \tfrac{1}{2}\Theta' = \sin\Theta'', \text{ etc.},$$

so nehmen die Winkel Θ unaufhörlich ab, und folglich nähert sich der Berührungspunkt ohne Aufhören dem Wendepunkt, indem er stets von der einen Seite desselben auf die andere hinübergeht.

Für den zu einem Berührungspunkte (ν) gehörigen Tangentialpunkt (ν_1) fanden wir oben die Formel

$$\nu_1 = -\frac{2\nu}{1+\nu^2}.$$

Man kann nun immer annehmen, dass ν positiv und kleiner als 1 sei; denn ist etwa ν numerisch grösser als 1, liegt also der Ausgangspunkt auf der Schleife, so wird schon für den nächsten Tangentialpunkt ν numerisch kleiner als 1, fällt es dann aber etwa negativ aus, so wird es für den folgenden Tangentialpunkt positiv und bleibt zugleich kleiner als 1. Indem man den so bestimmten Tangentialpunkt als Ausgangspunkt nimmt, kann man das erste ν als positiv und kleiner als 1 voraussetzen. Dann ergiebt sich:

$$1+\nu_1 = \frac{(1-\nu)^2}{1+\nu^2} \quad,\quad 1-\nu_1 = \frac{(1+\nu)^2}{1+\nu^2}$$

also

$$\frac{1+\nu_1}{1-\nu_1} = \left(\frac{1-\nu}{1+\nu}\right)^2.$$

Bezeichnet man nun die den folgenden Tangentialpunkten zugehörigen Zahlen mit ν_2, ν_3, etc., so hat man

$$\frac{1+\nu_2}{1-\nu_2} = \left(\frac{1-\nu_1}{1+\nu_1}\right)^2 = \left(\frac{1+\nu}{1-\nu}\right)^4 \quad,\quad \left(\frac{1+\nu_3}{1-\nu_3}\right) = \left(\frac{1-\nu}{1+\nu}\right)^8, \text{ u. s. w.}$$

Beachtet man aber, dass, weil ν positiv war, auch ν_{2n} positiv, ν_{2n+1} dagegen negativ ist, so kann man schreiben

$$\frac{1-\nu_{2n}}{1+\nu_{2n}} = \left(\frac{1-\nu}{1+\nu}\right)^{2^{2n}} \quad,\quad \frac{1-(-\nu_{2n+1})}{1+(-\nu_{2n+1})} = \left(\frac{1-\nu}{1+\nu}\right)^{2^{2n+1}}.$$

Nun ist $\frac{1-\nu}{1+\nu}$ ein echter Bruch, also nähern sich diese Werthe mit wachsendem n der Null, und daher convergirt ν_{2n} gegen $+1$, und ν_{2n+1} gegen -1. Demnach nähert sich der Tangentialpunkt ohne Aufhören dem Doppelpunkte, die Tangente aber einer der beiden im Doppelpunkte stattfindenden Tangenten, oder, wenn man will, beiden zu gleicher Zeit, indem diese in der Grenze unaufhörlich mit einander abwechseln.

4.

Gehen wir nun zu den Curven dritter Ordnung **mit einem conjugirten Punkte** über. Wir haben hier in den Formeln des §. 2 $\varepsilon = -1$ zu setzen, daher ist die Gleichung der Curve

$$(A^2 + B^2)\ C = A^3;$$

der durch die Zahl μ bestimmte Curvenpunkt ist der Durchschnitt der drei Geraden

$$A = \mu B\ ,\ (\mu^2+1)\ C = \mu^2 A\ ,\ (\mu^2+1)\ C = \mu^3 B$$

und hat die Coordinaten

$$A : B : C = \mu\,(\mu^2+1) : (\mu^2+1) : \mu^3.$$

Die Zahlen, welche den drei Durchschnitten der Geraden

$$\alpha A + \beta B + \gamma C = 0$$

mit der Curve zugehören, sind die Wurzeln der Gleichung

$$(3) \qquad (\alpha+\gamma)\,\mu^3 + \beta\mu^2 + \alpha\mu + \beta = 0,$$

und daher sind drei in gerader Linie liegende Curvenpunkte dadurch charakterisirt, dass die ihnen zugehörigen Zahlen μ_1, μ_2, μ_3 der Gleichung

$$(4) \qquad \mu_1 + \mu_2 + \mu_3 - \mu_1\mu_2\mu_3 = 0$$

genügen. Es existiren jetzt drei reelle Wendepunkte, welchen die Zahlen

$$\mu = 0\ ,\ \mu = +\sqrt{3}\ ,\ \mu = -\sqrt{3}$$

angehören, und die wir der Reihe nach mit b, b', b'' bezeichnen wollen. Jeder Wendepunkt hat eine harmonische Polare. Diese gehen alle durch den conjugirten Punkt, und ihre Durchschnitte mit der Curve mögen mit d, d', d'' bezeichnet werden.

Die Wendepunkte liegen, da die Zahlen $+\sqrt{3}$ und $-\sqrt{3}$ gleich und entgegengesetzt sind, wie bekannt, in gerader Linie, und es ergiebt sich hieraus ferner, was auch schon aus dem Begriffe der harmonischen Polare eines Wendepunkts folgt, dass die drei von dem conjugirten Punkte c nach den Wendepunkten gehenden Strahlen mit jeder der drei harmonischen Polaren ein harmonisches Büschel bilden, und zwar so, dass jedesmal der nach einem Wendepunkte gehende Strahl der harmonischen Polare dieses Wendepunkts zugeordnet ist. Bezeichnet man die nach den Wendepunkten b, b', b'' gehenden Strahlen mit A, A', A'', und die harmonischen Polaren von b, b', b'' mit B, B', B'', so ist also B mit A, B' mit A' und B'' mit A'' zugeordnet, und hieraus folgt nach einem bekannten Satze*), dass auch B, B', B'' mit jedem der drei Strahlen A, A', A'' ein harmonisches Büschel bilden, und dass AB, $A'B'$, $A''B''$ conjugirte Strahlenpaare einer Involution sind.

Die Wendetangente in b ($\mu = 0$) war $C = 0$; um die Gleichungen der beiden anderen Wendetangenten zu erhalten, braucht man nur zu beachten, dass eine Wendetangente die Curve in 3 zusammenfallenden Punkten schneidet. Wenn daher die Gerade

$$\alpha A + \beta B + \gamma C = 0$$

eine der beiden gesuchten Wendetangenten sein soll, so muss die Gleichung (3) sich auf $(\mu \mp \sqrt{3})^3 = 0$ reduciren, wo das obere Zeichen sich auf b', das untere auf b'' bezieht. Die Vergleichung der Coefficienten liefert dann die Werthe $\alpha = 9$, $\beta = \mp 3\sqrt{3}$, $\gamma = -8$. Bezeichnet man also die Wendetangenten von b' und b'' resp. mit C' und C'', so sind die Gleichungen derselben

$$C' = 9A - 3\sqrt{3}\,B - 8\,C = 0$$
$$C'' = 9A + 3\sqrt{3}\,B - 8\,C = 0.$$

Daraus folgt:

$$C'' - C' = 6\sqrt{3}\,B,$$

und wir erhalten den Satz, der auch aus dem Begriffe der harmonischen Polare eines Wendepunkts folgt: Zwei Wendetangenten schneiden sich auf der harmonischen Polare des dritten Wendepunkts. Dieser Satz liefert in Verbindung mit dem vorhergehenden ein einfaches Mittel, den dritten Wendepunkt und dessen Tangente zu construiren, wenn ausser dem conjugirten Punkte die beiden anderen Wendepunkte und deren Tangenten gegeben sind.

Zieht man aus einem beliebigen Punkte (ν) der Curve eine Tangente an dieselbe, so erhält man aus (4) für den Berührungspunkt (ν')

$$\nu + 2\nu' - \nu\nu'^2 = 0 \qquad \text{oder} \qquad \nu' = \frac{1 \pm \sqrt{1 + \nu^2}}{\nu}.$$

Hieraus folgt, dass aus jedem Punkte, mit Ausnahme des conjugirten Punktes, zwei reelle Tangenten an die Curve möglich sind, wenn man bei den Wendepunkten die Wendetangenten mit hinzurechnet. Be-

*) v. Staudt. Geometrie der Lage. pag. 121. oder Cremona. Curve piane (26).

zeichnet man ferner die den beiden Berührungspunkten zugehörigen Zahlen mit ν_1' und ν_2', so ist

$$\nu_2' = -\frac{1}{\nu_1'}.$$

Wir benutzen dies, um die Gleichungen der harmonischen Polaren von b' und b'' zu finden. Zieht man nämlich aus einem Wendepunkte die beiden Tangenten an die Curve, so ist der eine Berührungspunkt der Wendepunkt selbst, der andere aber der Durchschnitt d der harmonischen Polare mit der Curve. Nun waren die Zahlen der Wendepunkte b, b', b'' resp. 0, $+\sqrt{3}$, $-\sqrt{3}$; also sind die den Punkten d, d', d'' zugehörigen Zahlen resp.

$$\infty, -\frac{1}{\sqrt{3}}, +\frac{1}{\sqrt{3}},$$

und die Gleichungen der harmonischen Polaren

$$B = 0 \quad , \quad B' = A + \frac{1}{\sqrt{3}} B = 0 \quad , \quad B'' = A - \frac{1}{\sqrt{3}} B = 0.$$

Da die Zahlen $+\frac{1}{\sqrt{3}}$ und $-\frac{1}{\sqrt{3}}$ wieder gleich und entgegengesetzt sind, so bestätigt sich zunächst, dass auch die drei harmonischen Polaren B, B', B'' mit jeder der drei Geraden A, A', A'' ein harmonisches Büschel bilden. Ausserdem aber ergiebt sich der Satz: **Die Durchschnitte der Curve mit den harmonischen Polaren zweier Wendepunkte liegen mit dem dritten Wendepunkte in gerader Linie**, nämlich $bd'd''$, $b'd''d$, $b''dd'$.

5.

Man kann die Untersuchung der successiven Tangential- und Berührungspunkte hier vereinfachen, wenn man statt der Zahlen μ, welche die Curvenpunkte bestimmen, Winkel einführt, deren Tangenten den Zahlen μ gleich sind. Da die letzteren alsdann ungeändert bleiben, wenn die Winkel um Vielfache von π vermehrt oder vermindert werden, so sollen zwei solche Winkel, deren Unterschied ein Vielfaches von π beträgt, einander aequivalent genannt werden. Schreibt man nämlich die Gleichung (4) in der Form

$$\mu_3 = -\frac{\mu_1 + \mu_2}{1 - \mu_1\mu_2}$$

und setzt nun

$$\mu_1 = \operatorname{tg} \Theta_1 \quad , \quad \mu_2 = \operatorname{tg} \Theta_2 \quad , \quad \mu_3 = \operatorname{tg} \Theta_3,$$

so folgt

$$\operatorname{tg} \Theta_3 = -\operatorname{tg} (\Theta_1 + \Theta_2)$$

oder

$$\Theta_1 + \Theta_2 + \Theta_3 = 0.$$

Demnach liegen drei Curvenpunkte jedesmal in gerader Linie, wenn die Summe der ihnen zugehörigen Winkel gleich Null oder gleich einem Vielfachen von π ist.

Zieht man nun an einem beliebigen Punkte (Θ) der Curve eine Tangente und bezeichnet den dem Tangentialpunkte zugehörigen Winkel mit Θ_1, so ist

$$\Theta_1 = -2\,\Theta;$$

setzt man dann die Bildung der Tangentialpunkte fort, indem man die diesen zugehörigen Winkel mit Θ_2, Θ_3, etc. bezeichnet, so erhält man

$$\Theta_1 = -2\Theta\ ,\ \Theta_2 = (-2)^2\Theta\ ,\ \Theta_3 = (-2)^3\,\Theta, \ldots\ldots \Theta_n = (-2)^n\Theta.$$

Hieraus folgt, dass die successiven Tangentialpunkte sich **nicht** einer bestimmten Grenzlage nähern, da die Tangente eines unendlich grossen Winkels jeden Werth haben hann. Aber es kann hier der Fall eintreten, dass ein späterer Tangentialpunkt mit dem ersten Berührungspunkte zusammenfällt. Dies tritt nämlich jedesmal und nur dann ein, wenn $\Theta_n = \Theta + \varkappa\pi$ ist, wo $\varkappa$ eine ganze Zahl bedeutet. Man erhält also

$$(5) \qquad (-2)^n\Theta = \Theta + \varkappa\pi \text{ und daraus } \Theta = \frac{\varkappa\pi}{(-2)^n - 1}\,.$$

Man braucht hierin der ganzen Zahl $\varkappa$ nur alle Werthe von Null an zu geben, welche kleiner sind, als der numerische Werth des Nenners, weil man für alle anderen Werthe von $\varkappa$ den früheren aequivalente Winkel erhält. Dann liefert dieser Ausdruck diejenigen Punkte, von welchen aus die n^{te} Tangente durch den Ausgangspunkt hindurchgeht. Es ist also bei diesen Curven möglich, Vielecke zu construiren, welche der Curve zugleich ein- und umgeschrieben sind, indem ihre Ecken auf der Curve liegen, während ihre Seiten zugleich die Curve berühren*). Wir müssen diese Vielecke etwas näher betrachten. Setzt man $n = 1$, so erhält man die Winkel $0, -\frac{\pi}{3}, -\frac{2\pi}{3}$ oder die ihnen aequivalenten $0, \frac{2\pi}{3}, \frac{\pi}{3}$, welche den Wendepunkten angehören, da $\operatorname{tg}\left(-\frac{\pi}{3}\right) = \operatorname{tg}\frac{2\pi}{3} = -\sqrt{3}$, $\operatorname{tg}\left(-\frac{2\pi}{3}\right) = \operatorname{tg}\frac{\pi}{3} = +\sqrt{3}$

*) Ich habe nachträglich gesehen, dass solche Vielecke schon von Herrn Clebsch bei den Curven dritter Classe und vierter Ordnung aufgefunden worden sind (in der Note zu der Abhandlung des Herrn Cremona. „Sur l'hypocycloide à trois rebroussements.“ Crelle's Journ. Bd. 64), wobei sich ein Ausdruck ergeben hat, der von dem oben unter (5) gefundenen nur durch einen Factor 2 unterschieden ist. Bezieht man die hier zu Grunde gelegte Gleichung der Curve auf Linien- anstatt auf Punktcoordinaten, so übertragen sich die vorliegenden Betrachtungen auf die Curven dritter Classe und vierter Ordnung, welche Herr Cremona in der genannten Abhandlung untersucht hat.

ist; in der That sind die Wendepunkte diejenigen Punkte, bei welchen schon der erste Tangentialpunkt mit dem ersten Berührungspunkte zusammenfällt. Dieselben Punkte erhält man auch für $n = 2$, da sich wiederum die Winkel 0, $\frac{\pi}{3}$, $\frac{2\pi}{3}$ ergeben. Dies ist auch an sich klar, denn Zweiecke kann es nicht geben, sondern wenn die zweite Tangente durch den ersten Berührungspunkt hindurchgehen soll, so muss sie mit der ersten zusammenfallen. Nun sind aber die Wendepunkte auch für jeden Werth von $n > 2$ mit unter den durch die Formel (5) bestimmten Punkten enthalten; denn bezeichnet man den numerischen Werth von $(-2)^n - 1$ mit N, sodass $N = 2^n - 1$, oder $= 2^n + 1$, jenachdem n gerade oder ungerade ist, so ist N stets durch 3 theilbar, weil $(-2)^n - 1$ durch $(-2) - 1$ theilbar ist. Die Wendepunkte treten daher jedesmal auf, sobald $\varkappa$ die Werthe 0, $\frac{N}{3}$, $\frac{2N}{3}$ annimmt. Man bemerkt sogleich, dass zwei verschiedene Zahlen $\varkappa$ dem Winkel

$$\Theta = \frac{\varkappa\pi}{(-2)^n - 1} = \pm \frac{\varkappa\pi}{N}$$

immer und nur dann äquivalente Werthe zuertheilen, wenn sie nach dem Modul N congruent sind. Daher hat man im Allgemeinen für $\varkappa$ ein vollständiges System incongruenter Zahlen einzusetzen, und daraus folgt, dass man auch in dem Falle eines ungeraden n, wo Θ eigentlich $= -\frac{\varkappa\pi}{N}$ ist, dafür $+\frac{\varkappa\pi}{N}$ schreiben kann; denn offenbar ist $-\frac{\varkappa\pi}{N}$ äquivalent mit $\frac{(N-\varkappa)\pi}{N}$; durchläuft aber $\varkappa$ ein vollständiges Restsystem nach dem Modul N, so thut dies auch $N - \varkappa$.

Bildet man nun von irgend einer Zahl $\varkappa$ ausgehend die den n successiven Tangentialpunkten angehörigen Winkel.

$$(6) \qquad \frac{\varkappa\pi}{N}, \frac{(-2)\varkappa\pi}{N}, \frac{(-2)^2\varkappa\pi}{N}, \ldots\ldots \frac{(-2)^{n-1}\varkappa\pi}{N},$$

so erhält man, wenn die Multiplication mit -2 fortgesetzt wird, immer wieder Winkel, welche diesen der Reihe nach äquivalent sind. Aber von den Coefficienten $(-2)\varkappa$, $(-2)^2\varkappa$, ... $(-2)^{n-1}\varkappa$ ist jeder einer Zahl aus dem Systeme der nach dem Modul N incongruenten Zahlen congruent. Ist nun etwa $(-2)^r\varkappa \equiv \varkappa'$ (mod. N), wobei $r < n$, so ist der durch den Winkel $\frac{\varkappa'\pi}{N}$ bestimmte Punkt einer der n Tangentialpunkte der vorigen Reihe, und daher liefern die den Winkeln $\frac{\varkappa\pi}{N}$ und $\frac{\varkappa'\pi}{N}$ zugehörigen Ausgangspunkte nicht zwei verschiedene n-Ecke, sondern ein- und dasselbe. Man sieht ferner leicht Folgendes ein: wenn man neben der Reihe (6) eine zweite, von der Zahl h ausgehende bildet:

$$\frac{h\varkappa}{N}, \frac{(-2)h\varkappa}{N}, \frac{(-2)^2 h\varkappa}{N}, \ldots \frac{(-2)^{n-1}h\varkappa}{N},$$

und es ist irgend ein Winkel derselben einem Winkel der vorigen Reihe äquivalent, also etwa $(-2)^r\varkappa \equiv (-2)^s h$ und $s < r$, so folgt hieraus, da $(-2)^s$ und N relative Primzahlen sind, $(-2)^{r-s}\varkappa \equiv h$, also tritt dann der vorige Fall ein, und sämmtliche Winkel der zweiten Reihe sind denen der ersteren äquivalent.

Um nun die Anzahl der wirklich existirenden n-Ecke zu bestimmen, nehmen wir zuerst an, dass n eine Primzahl sei, und zwar eine ungerade, da der Fall $n=2$ nicht in Betracht kommt. Setzt man für $\varkappa$ die Reihe der Zahlen $0, 1, 2, \ldots N-1$, so liefern die darunter vorkommenden Werthe $\varkappa = 0, = \frac{N}{3}, = \frac{2N}{3}$, wie wir gesehen haben, stets die Wendepunkte, und für diese drei Werthe von $\varkappa$ besteht die Reihe (6) aus lauter einander äquivalenten Winkeln. Diese Fälle ausgenommen aber, kann es nicht vorkommen, dass für irgend einen Werth von $\varkappa$ irgend zwei Winkel der Reihe (6) einander äquivalent sind. Denn wäre dies der Fall, wäre also etwa $(-2)^r\varkappa \equiv (-2)^s\varkappa$ (mod. N) und $s < r$, so wäre auch $(-2)^{r-s}\varkappa \equiv \varkappa$, also ein gewisser Winkel der Reihe (6) dem ersten äquivalent. Es kann geschehen, dass $r-s$ nicht der kleinste Exponent ist, für den dies eintritt; wäre aber p der kleinste Exponent, so würden nur die Zahlen

$$(-2)^p\varkappa,\ (-2)^{2p}\varkappa,\ (-2)^{3p}\varkappa,\ \ldots\ldots$$

mit $\varkappa$ congruent sein, und da jedenfalls $(-2)^n\varkappa \equiv \varkappa$ ist, so müsste n ein Vielfaches von p und könnte nicht eine Primzahl sein, weil der Fall $p=1$ den Wendepunkten angehört und ausgeschlossen worden ist. Hieraus und aus dem oben bewiesenen Satze, dass zwei verschiedene Reihen nicht zwei äquivalente Winkel enthalten können, wenn sie nicht vollständig einander äquivalent sind, folgt nun, dass die sämmtlichen Zahlen $\varkappa$, nämlich $0, 1, 2, \ldots N-1$ mit Ausnahme der drei, welche die Wendepunkte geben, sich in eine Anzahl Gruppen von je n Gliedern theilen, so dass jede Gruppe ein n-Eck liefert. Bezeichnet also $\mathfrak{A}_n$ die Anzahl der Gruppen und daher auch die Anzahl der möglichen n-Ecke, so hat man

$$\mathfrak{A}_n = \frac{N-3}{n} = \frac{2^n-2}{n}.$$

Dass dies in der That eine ganze Zahl ist, folgt unmittelbar aus dem Fermat'schen Satze.

Etwas complicirter wird die Sache, wenn n eine zusammengesetzte Zahl ist. Wir sahen oben, dass alsdann der Fall eintreten kann, dass die Reihe (6) der Winkel, welche den Eckpunkten eines n-Ecks angehören, in mehrere Theile von gleicher Anzahl von Gliedern zerfällt, in der Art, dass die Glieder eines Theiles sich in den anderen Theilen periodisch wiederholen. Dieser Fall muss aber auch jedesmal eintreten, sobald n eine zusammengesetzte Zahl ist. Denn bezeichnet man mit a einen Divisor von n und setzt $n = a\alpha$, so ist $(-2)^n - 1$ durch $(-2)^a - 1$ theilbar, und daher, wenn N_n und N_a die numerischen Werthe dieser Zahlen bedeuten, $\frac{N_n}{N_a}$ eine ganze Zahl. Sobald nun $\varkappa = \frac{hN_n}{N_a}$ ist, hat man

$$\frac{\varkappa\pi}{N_n} = \frac{hN_n}{N_a} \cdot \frac{\pi}{N_n} = \frac{h\pi}{N_a};$$

daher gehört der diesem Winkel entsprechende Punkt nicht eigentlich einem n-Ecke, sondern schon einem a-Ecke an, und das n-Eck kommt nur dadurch zu Stande, dass das a-Eck α Mal hintereinander durchlaufen wird. Der Zahl h kommen offenbar die Werthe

$$0,\ 1,\ 2\ \ldots\ldots\ N_a - 1$$

zu. Unter den dadurch bestimmten Punkten sind aber im Allgemeinen nicht allein die drei Wendepunkte enthalten, sondern wenn a selbst wieder eine zusammengesetzte Zahl ist, und a' irgend einen Divisor derselben bedeutet, auch die Eckpunkte der sämmtlichen a'-Ecke. Die Bestimmung der Anzahl der vorhandenen eigentlichen n-Ecke wird nun besonders dadurch complicirt, dass ein und dieselbe Zahl a' ein gemeinschaftlicher Theiler von zwei Divisoren a und b von n sein kann. Ist z. B. $n = 30$, so hat diese Zahl die Divisoren 15, 10, 6, 5, 3, 2; giebt man also der Zahl $\varkappa$ die Werthe

$$0,\ 1,\ 2,\ \ldots\ldots\ N_{30} - 1,$$

so erhält man nicht blos die 30-Ecke, sondern auch die 15-Ecke, die 10-Ecke, etc. schliesslich die Wendepunkte (die Zweiecke fallen fort, da es solche nicht giebt). Bestimmt man nun die 15-Ecke, indem man in der Formel $\frac{h\pi}{N_{15}}$ der Zahl h die Werthe 0, 1, 2, ... $N_{15} - 1$ giebt, so erhält man auch die 5-Ecke und die 3-Ecke mit, aber die ersteren sind auch in den 10-Ecken $\left(\frac{h\pi}{N_{10}}\right)$ und die letzteren in den 6-Ecken $\left(\frac{h\pi}{N_6}\right)$ enthalten; die Wendepunkte kommen sogar bei jedem Divisor vor. Man kann indessen diese Schwierigkeit dadurch umgehen, dass man eine Recursionsformel zur successiven Berechnung der Anzahl der eigentlichen n-Ecke aufstellt.

Man bezeichne mit $a, b, c, \ldots . l$ die sämmtlichen unter sich und von 1 und n verschiedenen Divisoren von n, jedoch mit Ausschluss der Zahl 2, da es keine Zweiecke giebt, und setze

$$n = a\alpha = b\beta = c\gamma = \ldots\ldots = l\lambda$$

(unter den Zahlen α, β, γ, ... λ kann die 2 aber wohl vorkommen); ferner seien $\mathfrak{A}_n$, $\mathfrak{A}_a$, $\mathfrak{A}_b$, ... $\mathfrak{A}_l$ die Anzahlen der eigentlichen n-Ecke, a-Ecke, b-Ecke, ... l-Ecke. Giebt man nun der Zahl $\varkappa$ die Werthe $0, 1, 2, \ldots N_n - 1$ und nimmt jeden als Ausgang für eine der Reihe (6) analog zu bildende Reihe, deren Glieder die aufeinander folgenden Eckpunkte liefern, natürlich mit Ausschluss derjenigen, welche äquivalente Reihen geben, welche also, wenn man alle Coefficienten gleich auf ihre kleinsten positiven Reste nach dem Modul N_n reducirt hat, in den früheren Reihen schon vorgekommen sind, so erhält man zuerst die eigentlichen n-Ecke, nämlich Reihen von n Gliedern, welche alle von einander verschieden sind. Die Anzahl dieser Reihen ist $\mathfrak{A}_n$; von den N_n Zahlen $\varkappa$ werden dadurch $n\mathfrak{A}_n$ absorbirt. Man erhält ferner die a-Ecke, deren Anzahl $\mathfrak{A}_a$ ist, aber hier theilt sich, wie wir oben sahen, jede Reihe in α Gruppen, und jede Gruppe enthält nur a Glieder, die sich periodisch wiederholen. Daher kommen hier nur $a\mathfrak{A}_a$ Zahlen $\varkappa$ zur Verwendung, offenbar aber sind diese sämmtlich von den früheren $n\mathfrak{A}_n$ Zahlen verschieden. Ebenso erhält man die b-Ecke, indem bei diesen jede Reihe aus β Gruppen, jede von b Gliedern, besteht. Diese absorbiren daher aufs Neue $b\mathfrak{A}_b$ sämmtlich von den früheren verschiedene Zahlen. Fährt man so fort, indem man auch die c-Ecke, ... l-Ecke aufsucht, so werden nach und nach die Zahlen $\varkappa$ verwendet, und es bleiben schliesslich nur die den drei Wendepunkten angehörigen übrig. Bei einem solchen aber besteht die Reihe nur aus einer einzigen, sich fortwährend wiederholenden Zahl, daher ist die Anzahl der für die Wendepunkte übrig bleibenden Zahlen gleich 3. Da nun diese und die den verschiedenen Vielecken angehörigen Zahlen alle von einander verschieden sind, so ist die Gesammtanzahl gleich N_n, und man erhält die Gleichung

$$N_n = n\mathfrak{A}_n + a\mathfrak{A}_a + b\mathfrak{A}_b + \cdots + l\mathfrak{A}_l + 3,$$

aus welcher nun für jedes n das $\mathfrak{A}_n$ successiv berechnet werden kann. Es würde nicht wohl ausführbar sein, ein Beispiel aufzustellen, welches geeignet wäre, alle bemerkenswerthen Fälle zu erläutern; denn bei der kleinsten Zahl, welche (bei Ausschluss der 2) zwei verschiedene Divisoren hat, nämlich $n = 12$, müsste man schon 352 Reihen aufschreiben, und die kleinste Zahl n, bei welcher es vorkommt, dass ein Divisor gleichzeitig zwei andere Divisoren theilt, nämlich $n = 18$, würde nicht weniger als 14602 Reihen erfordern. Ich will mich daher damit begnügen für das Beispiel $n = 6$, $N_6 = 63$, die Reihen der Coefficienten von $\frac{\pi}{63}$, und zwar gleich auf ihre kleinsten positiven Reste (nach dem Modul 63) reducirt, vollständig aufzustellen:

b ...	0	0	0	0	0	0
	1	61	4	55	16	31
	2	59	8	47	32	62
	3	57	12	39	48	30
	5	53	20	23	17	29
	6	51	24	15	33	60
D ...	7	49	28	7	49	28
	9	45	36	54	18	27
	10	43	40	46	34	58
	11	41	44	38	50	26
	13	37	52	22	19	25
D' ...	14	35	56	14	35	56
b' ...	21	21	21	21	21	21
b'' ...	42	42	42	42	42	42.

Darin gehören die mit b, b', b'' bezeichneten Reihen den Wendepunkten, die mit D, D' bezeichneten den Dreiecken und die übrigen den Sechsecken an.

Man sieht leicht, dass der Fall, wenn n eine Primzahl ist, sich dem vorigen unterordnet, und man findet auf diese Weise, dass es z. B. 2 Dreiecke, 3 Vierecke, 6 Fünfecke, 9 Sechsecke, 99 Zehnecke, 2182 Fünfzehnecke, 35790267 Dreissigecke u. s. w. giebt, welche der Curve gleichzeitig ein- und umgeschrieben sind.

6.

Wir wenden uns nun zur Betrachtung derjenigen fortgesetzten Tangentenziehung, die entsteht, wenn man aus dem Berührungspunkte einer Tangente aufs Neue Tangenten an die Curve legt. Hierbei sind vor Allem die Wendepunkte b, b', b'' und die Durchschnitte ihrer harmonischen Polaren mit der Curve, d, d', d'' ins Auge zu fassen. Jene haben (§. 4.) die Zahlen 0, $+\sqrt{3}$, $-\sqrt{3}$, diese

$$\infty, \; -\frac{1}{\sqrt{3}}, \; +\frac{1}{\sqrt{3}}.$$

Die entsprechenden Winkel Θ sind demnach

für b ...	0	für d	$\frac{\pi}{2}$
für b' ...	$\frac{\pi}{3}$	für d'	$-\frac{\pi}{6}$
für b'' ...	$-\frac{\pi}{3}$	für d''	$\frac{\pi}{6}$.

Drückt man dieselben als Vielfache von $\frac{\pi}{6}$ aus, so zeigt sich, dass sie folgende Reihenfolge bilden:

$$(7)\qquad \begin{array}{ccccccc} d & b'' & d' & b & d'' & b' & d \\ -3 & -2 & -1 & 0 & 1 & 2 & 3. \end{array}$$

Daher theilen die drei Punkte d, d', d'' die Curve so in drei Abschnitte, dass in jedem nur ein Wendepunkt enthalten ist, und zwar derjenige, welcher mit den beiden den Abschnitt begrenzenden Punkten d in gerader Linie liegt (§. 4.). Zieht man aus einem Punkte (Θ) der Curve die Tangenten an die Letztere, und bezeichnet die den beiden Berührungspunkten angehörigen Winkel mit Θ_1' und Θ_2', so ergiebt sich aus den früheren Formeln (§. 5.)

$$\Theta_1' = -\tfrac{1}{2}\Theta \quad , \quad \Theta_2' = \frac{\pi}{2} - \tfrac{1}{2}\Theta\,;$$

zweien Berührungspunkten, die dem nämlichen Tangentialpunkte angehören, entspricht daher stets ein Winkelunterschied gleich $\frac{\pi}{2}$. Betrachtet man aber die sechs in dem Schema (7) aufgestellten Intervalle der Curve, welche durch die Punkte b und d gebildet werden, so liegt der eine Berührungspunkt stets um drei Intervalle weiter rechts oder links als der andere. Daraus folgt, dass der eine Berührungspunkt immer in dem nämlichen durch die Punkte d gebildeten Abschnitte liegt, wie der Tangentialpunkt, der andere aber in einem der beiden anstossenden Abschnitte. Man übersieht dies am einfachsten bei dem Abschnitte $d'\,d''$, welcher den Wendepunkt b $(\Theta = 0)$ enthält. Zu dem Ende setze man

$$\Theta = 2\alpha\,\frac{\pi}{12}$$

und schreibe die Zahlen in dem Schema (7) als Coefficienten von $\frac{\pi}{12}$, also folgendermassen:

$$\begin{array}{ccccccc} d & b'' & d' & b & d'' & b' & d \\ -6 & -4 & -2 & 0 & 2 & 4 & 6. \end{array}$$

Dann liegt der Punkt (Θ) zwischen d' und d'', wenn α eine zwischen -1 und $+1$ liegende Zahl ist, und zwar zwischen d' und b, oder zwischen b und d'', jenachdem α negativ oder positiv ist. Die dem Berührungspunkten angehörigen Coefficienten von $\frac{\pi}{12}$ sind nun

$$-\alpha \qquad \text{und} \qquad 6-\alpha,$$

der erstere liegt demnach ebenfalls zwischen d' und d'', und zwar auf der anderen Seite des Wendepunkts, der zweite aber liegt für ein positives α zwischen 5 und 6, also in dem Abschnitte $d''d$, für ein negatives α dagegen zwischen 6 und 7, oder was dasselbe ist, zwischen -6 und -5, d. h. in dem Abschnitte dd'. Der zweite Berührungspunkt liegt also jedesmal in dem an denjenigen Punkt d anstossenden Abschnitte, welchem der Ausgangspunkt am nächsten liegt. Ausserdem zeigt sich, dass der mit dem Tangentialpunkte in dem nämlichen Abschnitte befindliche Berührungspunkt dem Wendepunkte näher liegt, als der Tangentialpunkt. Setzt man daher das Tangentenziehen in der Weise fort, dass man jedesmal nur den in dem Abschnitte $d'\,d''$ liegenden Berührungspunkt berücksichtigt, so werden die Zahlencoefficienten der Berührungspunkte nach und nach

$$-\alpha,\ +\frac{\alpha}{2},\ -\frac{\alpha}{2^2},\ +\frac{\alpha}{2^3},\ \ldots\ldots,$$

und daher nähert sich der Berührungspunkt ohne Aufhören dem Wendepunkte. Da sich dies nun in den anderen Abschnitten ebenso verhält, so hat man zusammenfassend folgenden Satz:

Eine Curve dritter Ordnung mit einem conjugirten Punkte wird durch ihre Durchschnitte mit den harmonischen Polaren der Wendepunkte in drei Abschnitte getheilt, so dass in jedem Abschnitte ein Wendepunkt liegt. Zieht man aus einem Punkte der Curve die beiden Tangenten an dieselbe, so liegt stets nur der eine Berührungspunkt in demselben Abschnitte, wie der Ausgangspunkt; zieht man dann aus diesem Berührungspunkte wieder diejenige Tangente, deren Berührungspunkt in dem nämlichen Abschnitte liegt, und setzt dies fort, so nähert sich der Berührungspunkt dem in diesem Abschnitte liegenden Wendepunkte, indem er abwechselnd von der einen Seite des Letzteren auf die andere hinübergeht.

Ausserdem bemerke man Folgendes: Sind s und t die Berührungspunkte der beiden aus einem beliebigen Punkte (Θ) der Curve an diese gelegten Tangenten, und (s) und (t) die ihnen zugehörigen Winkel, so ist

$$(s) = -\frac{\Theta}{2}, \qquad (t) = \frac{\pi}{2} - \frac{\Theta}{2}.$$

Zieht man aus diesen wieder die Tangenten und nennt s_1', s_2' und t_1', t_2' die neuen Berührungspunkte, so hat man

$$(s_1') = +\frac{\Theta}{4},\ (s_2') = \frac{\pi}{2} + \frac{\Theta}{4},\ (t_1') = -\frac{\pi}{4} + \frac{\Theta}{4},\ (t_2') = \frac{\pi}{4} + \frac{\Theta}{4}.$$

Nun ist aber

$$(t) + (s_1') + (s_2') = \frac{\pi}{2} - \frac{\Theta}{2} + \frac{\Theta}{4} + \frac{\pi}{2} + \frac{\Theta}{4} = \pi$$

$$(s) + (t_1') + (t_2') = \quad -\frac{\Theta}{2} - \frac{\pi}{4} + \frac{\Theta}{4} + \frac{\pi}{4} + \frac{\Theta}{4} = 0,$$

daher liegen sowohl t, s_1', s_2' als auch s, t_1', t_2' in gerader Linie. Dasselbe gilt auch, wenn der Doppelpunkt ein eigentlicher ist. Denn bezeichnet man in diesem Falle die den Punkten zugehörigen Zahlen ebenso wie oben die Winkel und giebt dem Ausgangspunkte die Zahl ν, so hat man (§. 3.)

$$(s) = \frac{-1+\sqrt{1-\nu^2}}{\nu} \qquad (t) = \frac{-1-\sqrt{1-\nu^2}}{\nu}$$

$$(s_1') = \frac{-1+\sqrt{1-(s)^2}}{(s)} \qquad (s_2') = \frac{-1-\sqrt{1-(s)^2}}{(s)}.$$

Da aber hieraus

$$(s)(t) = (s_1')\ (s_2') = 1$$

$$(s_1') + (s_2') = -\frac{2}{(s)} = -2(t)$$

folgt, so ergiebt sich

$$(s_1') + (s_2') + (t) + (s_1')\,(s_2')\,(t) = 0.$$

Man hat daher folgenden Satz: Zieht man aus einem Punkte einer Curve dritter Ordnung mit einem (eigentlichen oder conjugirten) Doppelpunkte die beiden Tangenten an die Curve und wiederholt dies mit einem der beiden Berührungspunkte, so liegt der andere mit den neuen Berührungspunkten allemal in gerader Linie.

Eine besondere Beachtung verdient nun noch der specielle Fall, wenn die Tangentenziehung in den drei Wendepunkten beginnt und aus sämmtlichen auftretenden Berührungspunkten fortgesetzt wird. Man erhält dann, da aus jedem Wendepunkte nur eine Tangente möglich ist, successive

$$3\,,\ 3.2\,,\ 3.2^2\,,\ 3.2^3\,,\ \ldots\ldots\ 3.2^n$$

Punkte. Die ersten Berührungspunkte sind die Punkte d; drückt man die ihnen und den Wendepunkten b angehörigen Winkel durch die kleinsten positiven Vielfache von $\frac{\pi}{6}$ aus, so erhält man statt des Schemas (7) das folgende:

$$\begin{array}{cccccc} b & d'' & b' & d & b'' & d' \\ 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5. \end{array}$$

Bei der nächsten Tangentenziehung aus den neuen Berührungspunkten d treten nun Vielfache von $\frac{\pi}{12}$ auf, als solche verwandeln sich die vorigen Zahlen in die doppelten, also in die geraden Zahlen

$$\begin{array}{cccccc} b & d'' & b' & d & b'' & d' \\ 0 & 2 & 4 & 6 & 8 & 10. \end{array}$$

Für die neuen Berührungspunkte aber erhält man

$$\begin{array}{lll} \text{aus } d'' \ldots -1 \text{ oder } 11, & \text{aus } d \ldots -3 \text{ oder } 9, & \text{aus } d' \ldots -5 \text{ oder } 7 \\ \quad 6-1 \text{ oder } \ 5, & \quad 6-3 \text{ oder } 3, & \quad 6-5 \text{ oder } 1, \end{array}$$

also alle ungeraden Zahlen zwischen 0 und 12. Werden nun aus diesen Punkten aufs Neue Tangenten gezogen, so treten Vielfache von $\frac{\pi}{24}$ auf. Die gefundenen Zahlen werden dann die geraden Zahlen

b		d''		b'		d		b''		d'	
0	2	4	6	8	10	12	14	16	18	20	22

und für die neuen Berührungspunkte erhält man wieder die ungeraden Zahlen. Fährt man so fort, so sieht man, dass die den sämmtlichen Punkten angehörigen Winkel die sämmtlichen Vielfachen von $\frac{\pi}{3.2^n}$ werden, indem die Coefficienten die natürlichen Zahlen von 0 bis $3.2^n - 1$ sind, und von diesen gehören die ungeraden Zahlen den sämmtlichen zuletzt auftretenden Berührungspunkten an.

Wir wollen die Zahl 3.2^n mit $2p$ bezeichnen. Nun liegen drei Punkte jedesmal in gerader Linie, wenn die Summe der zugehörigen Winkel gleich einem Vielfachen von π ist. Da die Winkel alle als Vielfache von $\frac{\pi}{2p}$ dargestellt sind, so tritt dies jedesmal und nur dann ein, wenn die Summe der drei entsprechenden Coefficienten ein Vielfaches von $2p$ ist, und da alle diese Zahlen auf ihre kleinsten positiven Werthe reducirt sind, so treten als Vielfache von $2p$ nur entweder $2p$ selbst oder $4p$ auf.

Um nun die Anzahl der Geraden zu finden, welche durch einen bestimmten der $2p$ Punkte und zugleich durch zwei der übrigen hindurchgehen, mögen α, β, γ irgend drei auf diese Art zusammengehörige Punkte und zugleich die ihnen entsprechenden Zahlencoefficienten bedeuten. Hält man α fest, so kann man β nach und nach abnehmend alle ganzzahligen Werthe von $2p-1$ bis 0 geben. Dann beginnt γ mit dem Werthe $4p-\alpha-(2p-1) = 2p-\alpha+1$ und nimmt zu bis $2p-1$, worauf man für $2p$ Null zu schreiben hat, und die Werthe $1, 2, \ldots 2p-\alpha$ folgen. Man hat also folgendes Schema zusammengehöriger Werthe

α	β	γ
α	$2p-1$	$2p-\alpha+1$
α	$2p-2$	$2p-\alpha+2$
.	.	.
.	.	.
.	.	.
α	$2p-\alpha+1$	$2p-1$
α	$2p-\alpha$	0
α	$2p-\alpha-1$	1
.	.	.
.	.	.
.	.	.
.	.	.
α	0	$2p-\alpha$

Demnach kommen sowohl in der Reihe der β, als auch in der Reihe der γ alle Zahlen von 0 bis $2p-1$ vor. Nun gehören aber zu den zu betrachtenden Geraden diejenigen Gruppen nicht, in welchen zwei der Zahlen α, β, γ einander gleich sind, denn diese liefern Tangenten. In dieser Beziehung ist zu unterscheiden, ob α gerade oder ungerade ist. Ist α gerade, so kommt es zwei Mal vor, dass $\beta = \gamma$ ist, einmal in der Reihe γ zwischen $2p - \alpha + 1$ und $2p - 1$, nämlich für $\beta = \gamma = 2p - \frac{\alpha}{2}$, das andere Mal zwischen 0 und $2p - \alpha$, nämlich für $\beta = \gamma = p - \frac{\alpha}{2}$. Dies liefert offenbar die beiden aus α an die Curve gehenden Tangenten. Ausserdem wird sowohl β, als auch γ einmal gleich α, und diese beiden Gruppen geben die Tangente in α selbst. Rechnet man diese 4 Gruppen von den vorhandenen $2p$ ab, so kommt in den übrigbleibenden $2p - 4$ jedes Paar $\beta\gamma$ einmal in dieser und einmal in der umgekehrten Ordnung vor, daher geben je zwei Gruppen die nämliche Gerade, und die Anzahl der durch α gehenden Geraden ist $p - 2$. Eine Ausnahme machen hier die Wendepunkte, für welche $\alpha = 0, = \frac{2p}{3}, = \frac{4p}{3}$ ist; dann ist nämlich die in α stattfindende Tangente die Wendetangente, so dass alle drei Zahlen α, β, γ einander gleich werden. Statt der vorhin abzurechnenden vier Gruppen hat man jetzt nur zwei abzurechnen, indem die beiden letzten unter den früher erwähnten mit einer der beiden ersten zusammenfallen. Es bleiben hier also $2p - 2$ Gruppen übrig, von denen je zwei dieselbe Gerade liefern, und durch jeden Wendepunkt gehen daher $p - 1$ Gerade. Rechnet man aber der Gleichförmigkeit wegen diejenige Gerade, welche die drei Wendepunkte selbst verbindet, nicht mit, so hat man auch für jeden Wendepunkt $p - 2$ Gerade, und man kann dann sagen, durch jeden einer geraden Zahl α entsprechenden Punkt gehen $p - 2$ Gerade hindurch.

Ist α eine ungerade Zahl, so kann es nicht vorkommen, dass β, γ einander gleich werden, weil von diesen Zahlen nothwendig die eine gerade, die andere ungerade sein muss. Den ungeraden Zahlen α gehören ja auch, wie wir gesehen haben, die zuletzt auftretenden Berührungspunkte an, und von diesen sind keine Tangenten mehr an die Curve gezogen. Daher kommen hier von sämmtlichen $2p$ Gruppen nur die beiden in Abzug, in welchen entweder β oder γ gleich α ist; also bleiben hier $2p - 2$ Doppelgruppen übrig, und die Anzahl der existirenden Geraden ist $p - 1$. Diese Geraden kommen nun alle mehrfach vor, jedoch ist die Anzahl der von einander verschiedenen leicht zu bestimmen. Denn da die Anzahl der Punkte sowohl mit geradem als auch mit ungeradem Coefficienten gleich p ist, so hat man im Ganzen $p(p-2) + p(p-1) = p(2p-3)$ Gerade, von denen jede durch drei Punkte hindurchgeht, also drei Mal gezählt ist. Daher ist die Anzahl der von einander verschiedenen Geraden gleich

$$p\left(\frac{2p}{3} - 1\right) = 3.2^{n-1}\left(2^n - 1\right)$$

oder wenn man nun die die Wendepunkte verbindende Gerade wieder hinzurechnet, gleich $3.2^{n-1}\ (2^n - 1) + 1$. Alles zusammenfassend kann man demnach folgenden Satz aussprechen: Zieht man aus den drei Wendepunkten einer Curve dritter Ordnung mit einem conjugirten Punkte Tangenten an die Curve und dann fortgesetzt aus jedem Berührungspunkte wieder, so erhält man nach der n^{ten} Tangentenziehung im Ganzen 3.2^n Curvenpunkte. Diese liegen zu je dreien in

$$3.2^{n-1}\,(2^n - 1) + 1$$

Geraden, von denen durch jeden der zuletzt aufgetretenen Berührungspunkte und durch jeden Wendepunkt $3.2^{n-1} - 1$, durch jeden der übrigen Punkte aber $3.2^{n-1} - 2$ hindurchgehen.

Prag, den 18. Januar 1869.

Das Problem der Projectivität und seine Anwendung auf die Flächen zweiten Grades.

Von Rud. Sturm zu Bromberg.

Unter dem Problem der Projectivität oder der Homographie versteht man das Problem, zu zwei Gruppen von einer gleichen Anzahl Punkte einer Ebene zwei zu einander gehörige („correspondirende") Punkte zu finden, welche resp. mit den Punkten der einen und der andern Gruppe verbunden entsprechende Strahlen von zwei projectivischen Strahlbüscheln liefern. Die Punkte der beiden Gruppen, nach denen entsprechende Strahlen laufen sollen, wollen wir homologe Punkte nennen und mit demselben Index bezeichnen. Dass die Anzahl der Punkte in jeder Gruppe mindestens vier sein muss, leuchtet ein, weil sonst von einem anharmonischen Verhältniss und von Projectivität gar nicht die Rede sein könnte; als die höchste Zahl von Punkten einer Gruppe wird sich in der Untersuchung sieben ergeben.

I.

1. Es seien zwei Gruppen G^4 und Γ^4 gegeben von je 4 Punkten: $b_1\, b_2\, b_3\, b_4$; $\beta_1\, \beta_2\, \beta_3\, \beta_4$. Ein beliebiger Punkt p_x in der Ebene der beiden Gruppen erzeugt mit den Punkten von G^4 einen Kegelschnitt S_x. Der Kegelschnitt Σ_x, dessen Punkte π_x mit $\beta_1\, \beta_2\, \beta_3\, \beta_4$ dasselbe anharmonische Verhältniss umfassen wie die Punkte von S_x, unter ihnen p_x, mit $b_1\, b_2\, b_3\, b_4$, ist leicht punktweise zu construiren. Da nämlich S_x durch 5 Punkte gegeben ist, so lässt sich linear in jedem derselben, z. B. in b_1 die Tangente $b_1 t$ construiren; dann sucht man in dem Büschel um β_1 den Strahl $\beta_1 \tau$ auf, so beschaffen, dass

$$\beta_1\, (\tau\, \beta_2\, \beta_3\, \beta_4) = b_1\, (t\, b_2\, b_3\, b_4),$$

so ist Σ_x derjenige Kegelschnitt durch $\beta_1\, \beta_2\, \beta_3\, \beta_4$, welcher $\beta_1 \tau$ in β_1 berührt, denn es ist, wenn π_x ein Punkt auf Σ_x ist,

$$\pi_x\, (\beta_1\, \beta_2\, \beta_3\, \beta_4) = \beta_1\, (\tau\, \beta_2\, \beta_3\, \beta_4) = b_1\, (t\, b_2\, b_3\, b_4) = p_x\, (b_1\, b_2\, b_3\, b_4).$$

Nennen wir die beiden Kegelschnitte S_x und Σ_x, deren Punkte p_x und π_x resp. mit G^4 und Γ^4 gleiches anharmonisches Verhältniss umfassen, analoge Kegelschnitte, so können wir also den Satz aufstellen:

Jeder Punkt eines Kegelschnitts durch die vier Punkte der einen Gruppe correspondirt allen Punkten des analogen Kegelschnitts durch die vier Punkte der andern Gruppe.

Den acht Punkten der beiden Gruppen correspondiren offenbar alle Punkte der Ebene, wenn man jeden seiner Gruppe zuordnet.

2. Die beiden Kegelschnittbüschel durch G^4 und Γ^4 sind ersichtlich projectivisch, da je einem Kegelschnitt des einen einer und nur einer des andern entspricht, analog ist.

Analoge Kegelschnitte schneiden sich in Punkten, die sich selber correspondiren. Also ist der Ort sich selbst correspondirender Punkte eine Curve vierter Ordnung, welche durch die Punkte beider Gruppen geht.

3. Analoge Kegelschnitte sind auch die homologen Geradenpaare der beiden Büschel, z. B. $(b_1\, b_2, b_3\, b_4)$ und $(\beta_1\, \beta_2, \beta_3\, \beta_4)$. Denn wenn p_x ein Punkt auf $b_1\, b_2$, π_x einer auf $\beta_1\, \beta_2$ ist, so ist ersichtlich:

$$p_x\,(b_1\, b_2\, b_3\, b_4) = \pi_x\,(\beta_1\, \beta_2\, \beta_3\, \beta_4),$$

denn die Projectivität ist hergestellt durch das Entsprechen von

$$p_x\,(b_1\, b_3\, b_4) \text{ und } \pi_x\,(\beta_1\, \beta_3\, \beta_4).$$

Da nun $p_x\, b_2$ mit $p_x\, b_1$ und $\pi_x\, \beta_2$ mit $\pi_x\, \beta_1$ zusammenfällt, so entsprechen sie sich auch.

Liegt aber p_x noch auf $b_1\, b_2$, π_x jedoch auf $\beta_3\, \beta_4$, so ist jederzeit

$$\pi_x\,(\beta_1\, \beta_2\, \beta_3\, \beta_4) = \pi_x\,(\beta_3\, \beta_4\, \beta_1\, \beta_2),$$

ferner:

$$p_x\,(b_1\, b_2\, b_3\, b_4) = \pi_x\,(\beta_3\, \beta_4\, \beta_1\, \beta_2),$$

weil gleichzeitig $p_x\, b_2$ mit $p_x\, b_1$ und $\pi_x\, \beta_4$ mit $\pi_x\, b_3$ zusammenfällt, also:

$$p_x\,(b_1\, b_2\, b_3\, b_4) = \pi_x\,(\beta_1\, \beta_2\, \beta_3\, \beta_4).$$

Die beiden übrigen Fälle sind den behandelten ähnlich.

II.

4. Jede Gruppe werde um einen Punkt b_5 resp. β_5 vermehrt, so dass sich die Gruppen G^5 und Γ^5 ergeben. Es sei wieder p_x ein Punkt in der Ebene beider Gruppen. Er erzeugt mit den beiden Gruppen $(b_1\, b_2\, b_3\, b_4)$ und $(b_1\, b_2\, b_3\, b_5)$ zwei Kegelschnitte S_x' und S_x'', deren analoge durch $\beta_1\, \beta_2\, \beta_3\, \beta_4$ und $\beta_1\, \beta_2\, \beta_3\, \beta_5$

die Kegelschnitte Σ'_x und Σ''_x seien; deren vierter Schnittpunkt neben $\beta_1\,\beta_2\,\beta_3$ ist der einzige correspondirende Punkt π_x von p_x in Bezug auf die beiden Gruppen G^5 und Γ^5.

Also wenn 2 Gruppen von je 5 Punkten gegeben sind, deren Punkte einander als homologe zugeordnet sind, so giebt es im Allgemeinen für jeden Punkt ihrer Ebene, wenn man ihn mit der einen Gruppe zusammenstellt, nur einen correspondirenden.

Der Punkt π_x ist als vierter Schnittpunkt von zwei Kegelschnitten, die durch eine hinreichende Anzahl von Punkten gegeben sind, zu construiren, da die drei anderen Schnittpunkte bekannt sind.

Statt mit den beiden oben gewählten Gruppen von 4 Punkten aus G^5 hätten wir offenbar p_x mit je zwei anderen solchen Gruppen zusammenstellen können.

5. Es sei S_0 der Kegelschnitt durch die fünf Punkte der Gruppe G^5. Suchen wir seine analogen Kegelschnitte Σ_1, Σ_2, Σ_3, Σ_4, Σ_5 durch $\beta_2\,\beta_3\,\beta_4\,\beta_5$; $\beta_1\,\beta_3\,\beta_4\,\beta_5$; $\beta_1\,\beta_2\,\beta_4\,\beta_5$; $\beta_1\,\beta_2\,\beta_3\,\beta_5$; $\beta_1\,\beta_2\,\beta_3\,\beta_4$ (d.h. indem wir S_0 als Kegelschnitt durch $b_2\,b_3\,b_4\,b_5$; $b_1\,b_3\,b_4\,b_5$; $b_1\,b_2\,b_4\,b_5$; $b_1\,b_2\,b_3\,b_5$; $b_1\,b_2\,b_3\,b_4$ auffassen), so ist ersichtlich, dass z. B. dem Punkte b_1 — der Strahl $b_1\,b_1$ wird unbestimmt und kann beliebig, also der projectivischen Beziehung entsprechend gewählt werden — alle Punkte von Σ_1 correspondiren und auch allen Punkten π_x von Σ_1 nur der Punkt b_1 correspondirt, denn der analoge Kegelschnitt S_0 des Kegelschnitts $\Sigma_1 = (\beta_2\,\beta_3\,\beta_4\,\beta_5\,\pi_x)$ wird von dem analogen Kegelschnitte zu $(\beta_1\,\beta_3\,\beta_4\,\beta_5\,\pi_x)$, der durch $b_1\,b_3\,b_4\,b_5$ geht, eben ausser in $b_3\,b_4\,b_5$ nur noch in b_1 getroffen.

Aehnlich ist es mit b_2 und Σ_2, b_3 und Σ_3, b_4 und Σ_4, b_5 und Σ_5.

6. Die beiden Kegelschnitte Σ_1 und Σ_2 haben ausser $\beta_3\,\beta_4\,\beta_5$ noch einen Punkt β_0 gemein, der als Punkt von Σ_1, dem analogen Kegelschnitte zu S_0 durch $\beta_2\,\beta_3\,\beta_4\,\beta_5$, die Eigenschaft hat, dass

$$\beta_0\ (\beta_2\,\beta_3\,\beta_4\,\beta_5) = p_x\ (b_2\,b_3\,b_4\,b_5),$$

wenn p_x ein beliebiger Punkt auf S_0 ist, und als Punkt von Σ_2 derartig ist, dass

$$\beta_0\,(\beta_1\,\beta_3\,\beta_4\,\beta_5) = p_x\ (b_1\,b_3\,b_4\,b_5).$$

Folglich ist:

$$\beta_0\,(\beta_1\,\beta_2\,\beta_3\,\beta_4\,\beta_5) = p_x\ (b_1\,b_2\,b_3\,b_4\,b_5).$$

Demnach correspondirt dieser Punkt β_0 allen Punkten von S_0 und durch ihn gehen auch die übrigen drei Kegelschnitte Σ_3, Σ_4, Σ_5.

Wenn in entsprechender Weise die Kegelschnitte S_1, S_2, S_3, S_4, S_5 den Punkten β_1, β_2, β_3, β_4, β_5 correspondiren, so correspondirt der Punkt b_0, der ihnen allen gemeinsam ist, allen Punkten des Kegelschnitts $\Sigma_0 = (\beta_1\,\beta_2\,\beta_3\,\beta_4\,\beta_5)$.

Also jedem Punkte einer der beiden Gruppen correspondiren, wenn er derselben zugeordnet wird, unendlich viele Punkte, die auf einem Kegelschnitte liegen, dessen Punkte mit den vier Punkten der andern Gruppe, die jenem nicht homolog sind, dasselbe anharmonische Verhältniss umfassen, wie der Punkt mit den vier übrigen Punkten seiner Gruppe.

Ausserdem giebt es für jede Gruppe noch einen Punkt, der allen Punkten des Kegelschnitts correspondirt, den die fünf Punkte der andern Gruppe erzeugen, und der auf den correspondirenden Kegelschnitten dieser fünf Punkte liegt.

Jeder dieser beiden Punkte b_0 und β_0 ist als vierter Schnittpunkt zweier durch Punkte hinreichend bestimmten Kegelschnitte neben drei bekannten Schnittpunkten zu construiren.

Wir wollen b_0 resp. β_0 den verbundenen Punkt der Gruppe G^5 resp. Γ^5 in Bezug auf G^5 und Γ^5 nennen.

7. Ordnen wir eine beliebige Gerade L der Gruppe G^5 zu, so lässt sich leicht von vorn herein erkennen, dass der Ort der Correspondenten ihrer Punkte, die correspondirende Curve von L, 5. Ordnung mit 6 Doppelpunkten $\beta_0\,\beta_1\,\beta_2\,\beta_3\,\beta_4\,\beta_5$ sei. Dass diese Punkte Doppelpunkte auf der gesuchten Curve sind, erhellt daraus, dass L jeden der 6 Kegelschnitte S_0, S_1, S_2, S_3, S_4, S_5, denen diese Punkte correspondiren, doppelt trifft. Da die Curve auf die Gerade L punktweise bezogen ist *(punteggiata projettivamente)*, so wird sie mit ihr im Geschlecht übereinstimmen*), also vom Geschlechte 0 sein, d. h. die bei ihrer Ordnung grösstmögliche Anzahl von Doppelpunkten besitzen; folglich ist die Ordnung diejenige positive Zahl, die der Gleichung

$$\frac{(n-1)(n-2)}{1.2} = 6$$

genügt, mithin 5. Oder auch die zweien verschiedenen Geraden correspondirenden Curven können ausser den 6 gemeinschaftlichen Doppelpunkten nur noch den Correspondenten des Schnittpunktes der beiden Geraden gemein, also im Ganzen $4 \cdot 6 + 1 = 25$ Schnittpunkte haben, folglich sind sie 5. Ordnung.

8. Doch lässt sich dies Resultat auch auf anderem Wege erreichen, wenn wir vorerst die correspondirende Curve einer Geraden aufgesucht haben, welche durch einen Punkt der Gruppe geht, der sie zugeordnet ist, z. B. einer Geraden L_1, die durch den Punkt b_1

---

*) Clebsch, über die Singularitäten algebraischer Curven, Journal von Crelle-Borchardt Bd. 64 Seite 98. Cremona, Preliminari di una teoria geometrica delle superficie. Nr. 55.

geht. Wir sehen von dem Kegelschnitte Σ_1 ab, der dem Punkte b_1 selbst entspricht. Der correspondirende Punkt π_x jedes Punktes p_x auf L_1 werde stets hier als der vierte Schnittpunkt der beiden Kegelschnitte Σ'_x und Σ''_x durch $\beta_1\ \beta_2\ \beta_3\ \beta_4$ und $\beta_1\ \beta_2\ \beta_3\ \beta_5$ betrachtet, welche den Kegelschnitten $S'_x = (p_x\ b_1\ b_2\ b_3\ b_4)$ und $S''_x = (p_x\ b_1\ b_2\ b_3\ b_5)$ analog sind. Die Kegelschnittbüschel S'_x und S''_x sind perspectivisch, indem die entsprechenden Kegelschnitte die Gerade L_1 in demselben Punkte p_x treffen; mithin sind die Büschel der analogen Kegelschnitte Σ'_x und Σ''_x projectivisch, folglich durchläuft der Schnittpunkt π_x entsprechender Kegelschnitte — der einzige, welcher variabel ist — eine Curve vierter Ordnung. Dieselbe hat die drei Punkte $\beta_1 \beta_2 \beta_3$, welche Grundpunkte von beiden Büscheln sind, zu Doppelpunkten, die Punkte $\beta_4\ \beta_5$ zu einfachen Punkten. Jedoch wenn p_x in die Lage $(L_1,\ b_2\ b_3)$ kommt, so löst sich S'_x in $(b_2\ b_3,\ b_1\ b_4)$, S''_x in $(b_2\ b_3,\ b_1\ b_5)$ auf. Die analogen Kegelschnitte sind (No. 3.) die Geradenpaare $(\beta_2\ \beta_3,\ \beta_1\ \beta_4)$ und $(\beta_2\ \beta_3,\ \beta_1\ \beta_5)$, welche die ganze Gerade $\beta_2\ \beta_3$ gemein haben, so dass sich der eigentliche gesuchte Ort auf eine Curve dritter Ordnung $\Lambda_1{}^3$ reducirt, welche blos β_1 zum Doppelpunkte hat, da β_2, β_3 auch auf dem zweiten Bestandtheile liegen.

Der Punkt β_0 liegt auch auf $\Lambda_1{}^3$; er correspondirt dem zweiten Schnittpunkte von L_1 mit S_0.

Die correspondirende Curve einer Geraden, die durch einen der Punkte der Gruppe geht, welcher sie zugeordnet ist, ist eine Curve dritter Ordnung, welche durch die 5 Punkte der andern Gruppe und den derselben verbundenen Punkt geht und zwar den homologen Punkt jenes Punktes zum Doppelpunkte hat. Sie ist — was zu erwarten war — wegen dieses Doppelpunktes vom Geschlechte 0 und wird durch den Kegelschnitt Σ_1, der dem Punkte b_1 correspondirt, zur Curve fünfter Ordnung vervollständigt, die, da Σ_1 durch $\beta_2\ \beta_3\ \beta_4\ \beta_5\ \beta_0$ geht, und dort $\Lambda_1{}^3$ trifft, auch diese Punkte zu Doppelpunkten hat.

9. Viermal zerfällt, wenn L_1 sich um b_1 dreht, $\Lambda_1{}^3$ in eine Gerade und einen Kegelschnitt (bekommt noch einen zweiten Doppelpunkt), wenn nämlich L_1 in die Lage $b_1\ b_2$, $b_1\ b_3$, $b_1\ b_4$, $b_1\ b_5$ kommt. Z. B. der Geraden $b_1\ b_2$ correspondirt die Gerade $\beta_1\ \beta_2$ und der Kegelschnitt Σ_2, welcher letztere dem Punkte b_2 allein correspondirt. Für jeden Punkt p_x auf $b_1\ b_2$ zerfallen S'_x und S''_x in $(b_1\ b_2,\ b_3\ b_4)$ und $(b_1 b_2, b_3\ b_5)$, deren analoge Kegelschnitte $(\beta_1\ \beta_2,\ \beta_3\ \beta_4)$ und $(\beta_1\ \beta_2,\ \beta_3\ \beta_5)$ sind, welche ausser β_3 (auf Σ_2) die ganze Gerade $\beta_1\ \beta_2$ gemein haben, so dass diese bei allen Punkten p_x von $b_1\ b_2$ als Erzeugniss auftritt, der Kegelschnitt Σ_2 nur bei b_2. Aber jedem Punkte p_x auf $b_1\ b_2$ — abgesehen von b_1 und b_2 — correspondirt nur ein Punkt π_x auf $\beta_1\ \beta_2$, nämlich der zweite Punkt, in dem $\beta_1\ \beta_2$ ausser in β_2 dem Kegel-

schnitte durch $\beta_1\ \beta_3\ \beta_4\ \beta_5$ begegnet, welcher dem Kegelschnitte $(p_x\ b_1\ b_3\ b_4\ b_5)$ analog ist. — Den Geraden $b_1\ b_3$, $b_1\ b_4$, $b_1\ b_5$ correspondiren die Curven $(\beta_1\ \beta_3,\ \Sigma_3)$, $(\beta_1\ \beta_4,\ \Sigma_4)$, $(\beta_1\ \beta_5,\ \Sigma_5)$.

Die sämmtlichen Curven $\Lambda_1{}^3$, die den durch b_1 gehenden Geraden L_1 correspondiren, haben den Doppelpunkt β_1, also damit 4 Punkte und die fünf Punkte $\beta_2\ \beta_3\ \beta_4\ \beta_5\ \beta_0$ gemein, folglich bilden sie ein Büschel, das ersichtlich dem Büschel L_1 projectivisch ist.

Die volle correspondirende Curve einer solchen Curve $\Lambda_1{}^3$ ist übrigens $3\cdot 5 = 15$. Ordnung und besteht aus der Geraden L_1 und den sechs Kegelschnitten $S_1\ S_2\ S_3\ S_4\ S_5\ S_0$, von denen S_1 doppelt zu rechnen ist.

10. Sei nun L eine beliebige Gerade, die durch keinen der Punkte der Gruppe G^5 geht, der wir sie wieder zuordnen, und p_x ein beweglicher Punkt auf ihr. Die beiden Strahlbüschel $L_1 = b_1\ p_x$ und $L_2 = b_2\ p_x$ sind perspectivisch, folglich die beiden Büschel der ihnen correspondirenden Curven $\Lambda_1{}^3$ und $\Lambda_2{}^3$ projectivisch. Die Curven $\Lambda_1{}^3$ haben den Punkt β_1 zum Doppelpunkt, $\beta_2\ \beta_3\ \beta_4\ \beta_5\ \beta_0$ zu einfachen, die Curven $\Lambda_2{}^3$ gehen durch β_2 zweimal, durch $\beta_1\ \beta_3\ \beta_4\ \beta_5\ \beta_0$ einmal. Je zwei entsprechende, die den Geraden $L_1 = b_1\ p_x$ und $L_2 = b_2\ p_x$ correspondiren, haben ausser $\beta_1\,\beta_2$, die doppelt rechnen, und $\beta_3\,\beta_4\,\beta_5\,\beta_0$ noch den correspondirenden Punkt π_x zu p_x gemein. Dieser durchläuft also eine Curve sechster Ordnung, welche $\beta_1\ \beta_2$ zu dreifachen, $\beta_3\ \beta_4\ \beta_5\ \beta_0$ zu Doppelpunkten hat. Jedoch die identischen Geraden $b_1\ b_2$ und $b_2\ b_1$ entsprechen sich, folglich auch ihre correspondirenden Curven $(\beta_1\ \beta_2,\ \Sigma_2)$ und $(\beta_2\ \beta_1,\ \Sigma_1)$, welche die ganze Gerade $\beta_1\ \beta_2$ gemein haben. Diese Gerade reducirt die Ordnung der gesuchten Curve auf 5 und auch die Triplicität von β_1 und β_2 in eine Duplicität.

Also hat eine beliebige Gerade, welche einer der beiden Gruppen zugeordnet wird, zur correspondirenden Curve eine Curve fünfter Ordnung (vom Geschlechte 0), welche durch die Punkte der andern Gruppe und den derselben verbundenen Punkt doppelt geht.

Der correspondirende Punkt zu dem Punkte, in dem die Gerade von der Verbindungslinie zweier Punkte der ersten Gruppe getroffen wird, ist der dritte Schnittpunkt der Verbindungslinie der homologen Punkte mit der Curve fünfter Ordnung. Die volle correspondirende Curve zu Λ^5 besteht aus den 6 doppelten Kegelschnitten $S_1 S_2 S_3 S_4 S_5 S_0$ und der Geraden L, ist also von der Ordnung $25 = 5\cdot 5$.

Fünf Punkte einer Geraden L haben ihre correspondirenden auf L in den Schnittpunkten von L und Λ^5. Die ersteren sind dann die Schnittpunkte der Geraden L mit ihrer correspondirenden Curve L^5, wenn man L als Gerade Λ der Gruppe Γ^5 zuordnet.

11. Die correspondirenden Curven aller Geraden L eines Strahlbüschels bilden ein Curvenbüschel, denn sie haben die sechs Doppelpunkte, also 24 Punkte, und den correspondirenden Punkt des Grundpunkts des Strahlbüschels gemein.

Jede solche Curve ist durch die sechs Doppelpunkte und zwei Punkte — die correspondirenden derer, durch die man sich die Gerade L bestimmt denkt — determinirt. Jeder Doppelpunkt hat ja auch für die Bestimmung einer Curve die Bedeutung von drei Punkten und 20 Punkte bestimmen eine Curve fünfter Ordnung.

III.

12. Jede der beiden Gruppen G^5 und Γ^5 werde durch Hinzufügung eines Punktes b_6 resp. β_6 in eine Gruppe G^6 resp. Γ^6 verwandelt. Es seien $G_1{}^5$ und $\Gamma_1{}^5$ zwei andere homologe Gruppen in G^6 und Γ^6, z. B. $b_1\, b_2\, b_3\, b_4\, b_6$ und $\beta_1\, \beta_2\, \beta_3\, \beta_4\, \beta_6$. Die correspondirende Curve zu einer Geraden L in Bezug auf G^5 und Γ^5 war eine Curve fünfter Ordnung Λ^5, welche $\beta_1\, \beta_2\, \beta_3\, \beta_4\, \beta_5\, \beta_0$ zu Doppelpunkten hat, die in Bezug auf $G_1{}^5$ und $\Gamma_1{}^5$ ist ebenfalls eine Curve fünfter Ordnung $\Lambda_1{}^5$, welche durch $\beta_1\, \beta_2\, \beta_3\, \beta_4\, \beta_6\, \beta_{0,1}$ doppelt geht, wobei $\beta_{0,1}$ der der Gruppe $\Gamma_1{}^5$ in Bezug auf die beiden Gruppen $G_1{}^5$ und $\Gamma_1{}^5$ verbundene Punkt ist. Diese beiden Curven haben die vier Doppelpunkte $\beta_1\, \beta_2\, \beta_3\, \beta_4$ gemein, welche für 16 Schnittpunkte rechnen; ausserdem haben sie noch neun Punkte π gemein. Jedem dieser Punkte π entspricht also auf L ein Punkt p', derartig, dass

$$p'\,(b_1\, b_2\, b_3\, b_4\, b_5) = \pi\,(\beta_1\, \beta_2\, \beta_3\, \beta_4\, \beta_5),$$

und ein Punkt p'' derartig, dass

$$p''\,(b_1\, b_2\, b_3\, b_4\, b_6) = \pi\,(\beta_1\, \beta_2\, \beta_3\, \beta_4\, \beta_6).$$

Diese beiden Punkte p' und p'' liegen auf dem Kegelschnitte durch $b_1\, b_2\, b_3\, b_4$, der zu $(\pi\, \beta_1\, \beta_2\, \beta_3\, \beta_4)$ analog ist, und da derselbe zwei Schnittpunkte mit L hat, so können die beiden Punkte p' und p'' verschieden sein. Also nicht alle neun Punkte π haben correspondirende Punkte p auf L derartig, dass

$$p\,(b_1\, b_2\, b_3\, b_4\, b_5\, b_6) = \pi\,(\beta_1\, \beta_2\, \beta_3\, \beta_4\, \beta_5\, \beta_6);$$

denn das findet eben nur statt, wenn p' und p'' identisch sind. Wir müssen also, um zu entscheiden, wie viele von den neun Punkten die genannte Eigenschaft haben, einen andern Weg einschlagen.

13. Wir legen L wieder durch einen der Punkte der Gruppe, welcher wir diese Gerade zuordnen, z. B. durch b_1. Die correspondirende Curve von $L = L_1$ in Bezug auf die Gruppen G^5 und Γ^5 ist eine Curve dritter Ordnung $\Lambda_1{}^3$, abgesehen von Σ_1, welche dem Punkte b_1 allein correspondirt. In Bezug auf die beiden Gruppen $G_1{}^5$ und

Γ_1^5 correspondire der Geraden eine Curve $\Lambda_{1,1}^3$, abgesehen von $\Sigma_{1,1}$, welcher dem Punkte b_1 in Bezug auf diese beiden Gruppen correspondirt.

Die beiden Curven Λ_1^3 und $\Lambda_{1,1}^3$ haben den Doppelpunkt β_1 und die drei einfachen Punkte $\beta_2\,\beta_3\,\beta_4$ gemein, also ausserdem noch zwei Punkte $\pi'\pi''$. Jedem dieser beiden Punkte π' und π'', z. B. π' entspricht auf L ein Punkt p' derartig, dass $p'(b_1 b_2 b_3 b_4 b_5) = \pi'(\beta_1\beta_2\beta_3\beta_4\beta_5)$, und ein Punkt p_1' derartig, dass $p_1'(b_1 b_2 b_3 b_4 b_6) = \pi'(\beta_1\beta_2\beta_3\beta_4\beta_6)$ ist. Da nun aber alle Punkte, welche mit $b_1\,b_2\,b_3\,b_4$ das anharmonische Verhältniss $\pi'(\beta_1\,\beta_2\,\beta_3\,\beta_4)$ umfassen, unter ihnen p' und p_1', auf einem Kegelschnitte durch $b_1\,b_2\,b_3\,b_4$ liegen, der der Geraden L_1 ausser in b_1 nur noch einmal begegnet, so müssen die beiden Punkte p' und p_1' identisch sein: p', also ist

$$p'\ (b_1\,b_2\,b_3\,b_4\,b_5\,b_6) = \pi'\ (\beta_1\,\beta_2\,\beta_3\,\beta_4\,\beta_5\,\beta_6).$$

Ebenso

$$p''\ (b_1\,b_2\,b_3\,b_4\,b_5\,b_6) = \pi''\ (\beta_1\,\beta_2\,\beta_3\,\beta_4\,\beta_5\,\beta_6).$$

Dem Punkte b_1 correspondirt auf Λ_1^3 ausser $\beta_2\,\beta_3\,\beta_4\,\beta_5\,\beta_6$ noch ein Punkt in Bezug auf G^5 und Γ^5, nämlich der sechste Schnittpunkt von Σ_1 mit Λ_1^3 neben den genannten Punkten, und mit diesen ist π' oder π'' im Allgemeinen nicht identisch, ebenso wenig wie mit den sechs Punkten auf $\Lambda_{1,1}^3$, welchen b_1 in Bezug auf G_1^5 und Γ_1^5 correspondirt. Der vierte Schnittpunkt β_1' von Σ_1 und $\Sigma_{1,1}$ ausser $\beta_2\,\beta_3\,\beta_4$ ist derjenige Punkt, welcher dem Punkte b_1 in Bezug auf G^6 und Γ^6 correspondirt oder auch in Bezug auf die beiden Gruppen $b_2 b_3 b_4 b_5 b_6$ und $\beta_2\beta_3\beta_4\beta_5\beta_6$. In der That, weil er auf Σ_1 liegt, so ist

$$b_1\,(b_2\,b_3\,b_4\,b_5) = \beta_1'\,(\beta_2\,\beta_3\,\beta_4\,\beta_5),$$

und weil er auf $\Sigma_{1,1}$ liegt,

$$b_1\ (b_2\,b_3\,b_4\,b_6) = \beta_1'\ (\beta_2\,\beta_3\,\beta_4\,\beta_6),$$

also ist:

$$b_1\ (b_2\,b_3\,b_4\,b_5\,b_6) = \beta_1'\ (\beta_2\,\beta_3\,\beta_4\,\beta_5\,\beta_6),$$

mithin auch, da $b_1 b_1$ beliebig ist, also passend gewählt werden kann,

$$b_1\ (b_1\,b_2\,b_3\,b_4\,b_5\,b_6) = \beta_1'\ (\beta_1\,\beta_2\,\beta_3\,\beta_4\,\beta_5\,\beta_6).$$

Weil aber b_1 zu den beiden Gruppen $b_2\,b_3\,b_4\,b_5\,b_6$ und $\beta_2\,\beta_3\,\beta_4\,\beta_5\,\beta_6$ beliebige Lage hat, so giebt es nur einen correspondirenden in Bezug auf dieselben und demnach auch in Bezug auf G^6 und Γ^6.

Es könnten nun noch die Schnittpunkte von Σ_1 und $\Lambda_{1,1}^3$ und von $\Sigma_{1,1}$ und Λ_1^3 in Betracht kommen. Aber wenn z. B. μ ein Schnittpunkt von Σ_1 und $\Lambda_{1,1}^3$ ist, so ist sein correspondirender in Bezug auf G^5 und Γ^5, weil μ auf Σ_1 liegt, der Punkt b_1, der aber in Bezug auf G_1^5 und Γ_1^5 kann nun nicht auch b_1 sein, weil sich sonst ergäbe, dass μ und b_1 correspondirend seien in Bezug auf G^6 und Γ^6, während es doch nur b_1 und β_1' sind.

Also giebt es auf der Geraden L_1 (durch b_1) nur drei Punkte: b_1, p', p'', welche correspondirende Punkte in Bezug auf G^6 und Γ^6 besitzen: β_1', π', π''.

Wir vermuthen daraus schon, dass der Ort der der Gruppe G^6 zugehörigen Punkte, welche in Bezug auf die beiden Gruppen G^6 und Γ^6 correspondirende Punkte haben, eine Curve dritter Ordnung und natürlich der Ort dieser correspondirenden Punkte eine eben solche Curve ist.

14. Um dies genauer einzusehen, drehen wir, damit alle Punkte der Ebene erschöpft werden, die Gerade L_1 um den Punkt b_1. Die Curven Λ_1^3 beschreiben ein Büschel, dessen Grundpunkte der vierfache Punkt β_1 und die Punkte $\beta_2\,\beta_3\,\beta_4\,\beta_5\,\beta_0$ sind; ebenso die Curven $\Lambda_{1,1}^3$ ein Büschel mit den Grundpunkten $4\,\beta_1\,\beta_2\,\beta_3\,\beta_4\,\beta_6\,\beta_{0,1}$. Die beiden Büschel sind projectivisch, indem sich die derselben Geraden L_1 correspondirenden Curven entsprechen.

Die Punkte $\pi'\,\pi''$ — die einzigen variablen Schnittpunkte entsprechender Curven — beschreiben also eine Curve sechster Ordnung, welche viermal durch β_1 geht, zweimal durch $\beta_2\,\beta_3\,\beta_4$ und einmal durch $\beta_5\,\beta_6\,\beta_0\,\beta_{0.1}$. Aber sobald die Gerade L_1 in eine der Lagen $b_1\,b_2$, $b_1\,b_3$, $b_1\,b_4$, z. B. in die erste kommt, zerfällt Λ_1^3 in $\beta_1\,\beta_2$, Σ_2 und $\Lambda_{1.1}^3$ in $\beta_1\,\beta_2$, $\Sigma_{2.1}$, wobei $\Sigma_{2.1}$ der dem Punkte b_2 in Bezug auf die Gruppen G_1^5 und Γ_1^5 correspondirende Kegelschnitt ist. Diese beiden Curven haben die ganze Gerade $\beta_1\,\beta_2$ gemein. Also nimmt das System der drei Linien $\beta_1\,(\beta_2,\beta_3,\beta_4)$, für welches β_1 dreifacher Punkt ist und $\beta_2\,\beta_3\,\beta_4$ einfache Punkte, an der Curve sechster Ordnung theil, und der eigentliche Ort der Punkte $\pi'\,\pi''$ reducirt sich auf eine cubische Curve P^3, auf der $\beta_1\,\beta_2\,\beta_3\,\beta_4\,\beta_5\,\beta_6\,\beta_0\,\beta_{0,1}$ einfache Punkte sind.

Wie durch β_0 und $\beta_{0.1}$, so geht diese Curve nothwendig auch durch die vier Punkte, welche den vier übrigen Gruppen von 5 Punkten in Γ^6 in Bezug auf sie und die homologen Gruppen in G^6 verbunden sind, so dass von der Curve P^3 ausser den Punkten der Gruppe Γ^6 noch 6 Punkte construirt werden können, also diese Curve hinlänglich durch Punkte bestimmt ist.

Dass die Punkte $p'\,p''$, denen die Punkte $\pi'\,\pi''$ in Bezug auf G^6 und Γ^6 correspondiren, ebenfalls eine Curve dritter Ordnung R^3 bilden, die durch die 6 Punkte von G^6 und die verbundenen Punkte der 6 Gruppen von je fünf Punkten in G^6 geht, leuchtet ohne Weitere ein. Die beiden Punkte $p'\,p''$ und der Punkt b_1 (No. 13) sind die Schnittpunkte der Geraden L_1 durch b_1 mit dieser Curve.

Also: Wenn zwei Gruppen von je sechs Punkten $G^6 = (b_1\,b_2\,b_3\,b_4\,b_5\,b_6)$ und $\Gamma^6 = (\beta_1\,\beta_2\,\beta_3\,\beta_4\,\beta_5\,\beta_6)$ gegeben sind, so befinden sich alle Punkte p, für die es correspondirende π von der Art giebt, dass

$$p\,(b_1\, b_2\, b_3\, b_4\, b_5\, b_6) = \pi\,(\beta_1\, \beta_2\, \beta_3\, \beta_4\, \beta_5\, \beta_6)$$

ist, auf einer Curve dritter Ordnung R^3 und die Punkte π ebenfalls auf einer Curve dritter Ordnung P^3. R^3 geht durch die sechs Punkte von G^6, P^3 durch die von Γ^6, jene auch durch die sechs Punkte, die den sechs Gruppen von je fünf Punkten in G^6 in Bezug auf dieselben und ihre homologen in Γ^6 verbunden sind, P^3 durch die 6 Punkte, die diesen 6 homologen Gruppen verbunden sind.

Mithin auch, um die in No. 12. unerledigt gebliebene Frage zu beantworten: Auf jeder beliebigen Geraden L, welche einer der beiden Gruppen G^6 und Γ^6 zugeordnet wird, giebt es drei Punkte, welche correspondirende Punkte in Bezug auf diese beiden Gruppen besitzen.

15. Die Punkte, welche den 12 verbundenen Punkten auf der andern Curve correspondiren, sind leicht anzugeben. Der verbundene Punkt von $G^5 = (b_1\, b_2\, b_3\, b_4\, b_5)$ ist β_0; ihm correspondirt in Bezug auf diese Gruppe und ihre homologe der Kegelschnitt $\Sigma_0 = (\beta_1\, \beta_2\, \beta_3\, \beta_4\, \beta_5)$. Dessen sechster Schnittpunkt mit P^3 ist der correspondirende zu β_0 in Bezug auf G^6 und Γ^6.

Der correspondirende Punkt zu einem Punkte einer der beiden Gruppen, wenn dieser seiner Gruppe zugeordnet wird, hat sich schon ergeben als der correspondirende Punkt des Gruppenpunktes in Bezug auf die Gruppe der fünf übrigen Punkte und ihre homologe; z. B. der correspondirende β_1' von b_1 in Bezug auf G^6 und Γ^6 ist der von b_1 in Bezug auf die beiden Gruppen $(b_2\, b_3\, b_4\, b_5\, b_6)$ und $(\beta_2\, \beta_3\, \beta_4\, \beta_5\, \beta_6)$.

Wir können auch diesen Punkt leicht als sechsten Schnittpunkt eines Kegelschnitts mit P^3 nachweisen. Nehmen wir aus G^6 irgend eine Gruppe von fünf Punkten heraus, zu der b_1 gehört, z. B. $G^5 = (b_1\, b_2\, b_3\, b_4\, b_5)$, so muss unser Punkt auch auf dem Kegelschnitte Σ_1 liegen, der dem Punkte b_1 in Bezug auf G^5 und die homologe Γ^5 correspondirt, und (da dieser Kegelschnitt durch $\beta_2\, \beta_3\, \beta_4\, \beta_5\, \beta_0$ geht, wo β_0 der verbundene Punkt der Gruppe Γ^5 in Bezug auf G^5 und Γ^5 ist) der sechste Schnittpunkt dieses Kegelschnitts Σ_1 mit P^3 sein. Der sechste Schnittpunkt aber einer Curve dritter Ordnung und eines Kegelschnitts, die beide hinreichend durch Punkte bestimmt sind, ist bekanntlich zu construiren, wenn die fünf anderen gegeben sind. Also lassen sich auf jeder der beiden Curven R^3 und P^3 eine grosse Anzahl von Punkten zu den gegebenen durch Construction hinzufügen.

Ueberhaupt ist für einen beliebigen Punkt, von dem man weiss, dass er einen correspondirenden in Bezug auf G^6 und Γ^6 besitzt, also dass er auf R^3 oder P^3 liegt, dieser correspondirende zu construiren, denn er ist ja der correspondirende in Bezug auf zwei in G^6 und Γ^6 enthaltene homologe Gruppen von je 5 Punkten (No. 4).

IV.

16. Wir fügen nun schliesslich zu jeder der beiden Gruppen G^6 und Γ^6 noch einen siebenten Punkt b_7 und β_7 hinzu, so dass sich die Gruppen G^7 und Γ^7 ergeben; seien G_1^6 und Γ_1^6 irgend 2 andere homologe Gruppen von je 6 Punkten in G^7 und Γ^7, z. B. $b_1\, b_2\, b_3\, b_4\, b_5\, b_7$ und $\beta_1\, \beta_2\, \beta_3\, \beta_4\, \beta_5\, \beta_7$, denen also die bisher mit G^5 und Γ^5 bezeichneten Gruppen von fünf Punkten gemeinsam sind.

Die correspondirenden Punkte in Bezug auf G^6 und Γ^6 sind (Abschnitt III.) auf zwei cubischen Curven R^3 und P^3 enthalten, und die correspondirenden Punkte in Bezug auf G_1^6 und Γ_1^6 auf zwei Curven R_1^3 und P_1^3. Die beiden Curven R^3 und R_1^3 haben die fünf Punkte der Gruppe G^5 und den verbundenen Punkt b_0 dieser Gruppe, die beiden Curven P^3 und P_1^3 die fünf Punkte der Gruppe Γ^5 und ihren verbundenen Punkt β_0 gemein; jene also noch drei Punkte p_0', p_0'', p_0''', diese ebenfalls drei Punkte π_0', π_0'', π_0'''.

Jeder der drei Punkte p_0 hat nur einen correspondirenden Punkt in Bezug auf G^5 und Γ^5, da er eben verschieden ist von den sechs Punkten $b_1\, b_2\, b_3\, b_4\, b_5\, b_0$, denen unendlich viele (je auf einem Kegelschnitte liegende) correspondirende Punkte in Bezug auf diese beiden Gruppen zukommen; folglich muss der correspondirende Punkt des Punktes p_0' in Bezug auf G^6 und Γ^6, den wir auf P^3 suchen müssen, weil p_0' auf R^3 liegt, identisch sein mit dem in Bezug auf G_1^6 und Γ_1^6, der sich, weil p_0' auch auf R_1^3 liegt, auf P_1^3 befinden muss, also ersichtlich in einen der drei Punkte π_0 — wir nehmen an, in π_0' — fallen, nicht etwa in einen der Punkte $\beta_1\, \beta_2\, \beta_3\, \beta_4\, \beta_5\, \beta_0$, denn diese haben, weil b_7 und β_7 ganz beliebig zu G^6 und Γ^6 zugefügt sind, sicher andere correspondirende Punkte in Bezug auf G^6 und Γ^6, als in Bezug auf G_1^6 und Γ_1^6. Demnach ist:

$$p_0'\ (b_1\, b_2\, b_3\, b_4\, b_5\, b_6) = \pi_0'\ (\beta_1\, \beta_2\, \beta_3\, \beta_4\, \beta_5\, \beta_6)$$

und

$$p_0'\ (b_1\, b_2\, b_3\, b_4\, b_5\, b_7) = \pi_0'\ (\beta_1\, \beta_2\, \beta_3\, \beta_4\, \beta_5\, \beta_7),$$

mithin

$$p_0'\ (b_1\, b_2\, b_3\, b_4\, b_5\, b_6\, b_7) = \pi_0'\ (\beta_1\, \beta_2\, \beta_3\, \beta_4\, \beta_5\, \beta_6\, \beta_7).$$

Da ebenso die Punkte π_0 je nur einen correspondirenden Punkt in Bezug auf G^5 und Γ^5, also auch in Bezug auf G^6 und Γ^6 und auf G_1^6 und Γ_1^6 und in Folge dessen in Bezug auf G^7 und Γ^7 haben, so gilt für p_0'' und π_0'' und für p_0''' und π_0''' dasselbe, wie für p_0' und π_0'.

Sind also zwei Gruppen von je 7 Punkten gegeben, die einander als homologe zugeordnet sind, so giebt es drei Paare correspondirender Punkte, die mit den beiden Gruppen verbunden projectivische Strahlbüschel liefern.

In der Aufsuchung dieser drei Punktenpaare besteht das Problem der Homographie oder Projectivität im engern Sinne*).

Es sind jedoch im Allgemeinen diese drei Punktenpaare nicht zu construiren; denn die einen, wie die anderen 3 Punkte sind eben die drei noch übrigen Schnittpunkte zweier freilich hinreichend durch Punkte bestimmten Curven dritter Ordnung neben sechs bekannten Schnittpunkten [die Punkte b_0 und β_0 lassen sich auffinden (No. 6.)].

Aber in dem besondern Falle, für den das Problem der Homographie sehr wichtig ist, ist einer der drei Punkte bekannt; dann sind die beiden anderen zu finden. Es ist dieser Fall die Construction einer Fläche zweiten Grades durch zwei projectivische Ebenenbüschel, wenn neun Punkte gegeben sind.

V.

17. Es seien also neun Punkte beliebig im Raume gegeben: $P \Pi\, \mathfrak{B}_1\, \mathfrak{B}_2\, \mathfrak{B}_3\, \mathfrak{B}_4\, \mathfrak{B}_5\, \mathfrak{B}_6\, \mathfrak{B}_7$. Wir projiciren aus zweien von ihnen, P und Π, die 7 übrigen auf eine beliebige Ebene $\mathfrak{E}$. Die Projectionen aus P seien $b_1 b_2 b_3 b_4 b_5 b_6 b_7$, die aus Π: $\beta_1 \beta_2 \beta_3 \beta_4 \beta_5 \beta_6 \beta_7$. Der Punkt $\mathfrak{P}$, in dem die Gerade $P\Pi$ die Ebene $\mathfrak{E}$ trifft, liegt mit je zwei homologen Punkten aus den beiden Gruppen G^7 und Γ^7 der Punkte b und β in gerader Linie; es ist also

$$\mathfrak{P}\,(b_1\, b_2\, b_3\, b_4\, b_5\, b_6\, b_7) = \mathfrak{P}\,(\beta_1\, \beta_2\, \beta_3\, \beta_4\, \beta_5\, \beta_6\, \beta_7).$$

$\mathfrak{P}$ repräsentirt demnach zwei zusammengefallene correspondirende Punkte in Bezug auf die beiden Gruppen. Wir haben es folglich nur mit den beiden anderen Paaren $p_0'\, \pi_0'$, $p_0''\, \pi_0''$ zu thun. Nehmen wir die beiden Geraden $g_0' = Pp_0'$ und $\gamma_0' = \Pi \pi_0'$ zu Axen von Ebenenbüscheln, so sind diese derartig projectivisch, dass sich in ihnen die Ebenen $g_0'\,(\mathfrak{B}_1\, \mathfrak{B}_2\, \mathfrak{B}_3\, \mathfrak{B}_4\, \mathfrak{B}_5\, \mathfrak{B}_6\, \mathfrak{B}_7)$ und $\gamma_0'\,(\mathfrak{B}_1\, \mathfrak{B}_2\, \mathfrak{B}_3\, \mathfrak{B}_4\, \mathfrak{B}_5\, \mathfrak{B}_6\, \mathfrak{B}_7)$ entsprechen,

*) Man sehe die Abhandlung des Herrn Hesse im Journal von Crelle-Borchardt Bd. 62. Seite 188.

denn diese Ebenen schneiden $\mathfrak{G}$ in den Strahlen p_0' $(b_1\, b_2\, b_3\, b_4\, b_5\, b_6\, b_7)$ und π_0' $(\beta_1\, \beta_2\, \beta_3\, \beta_4\, \beta_5\, \beta_6\, \beta_7)$, welche sich ja in den projectivischen Strahlbüscheln entsprechen. Folglich liegen die neun Punkte auf der durch die beiden Büschel erzeugten Fläche zweiten Grades F_0^2 und zwar die sieben Punkte $\mathfrak{B}$, weil sie auf den Durchschnittslinien entsprechender Ebenen, P und Π, weil sie auf den Axen der Ebenenbüschel liegen.

18. Die Punkte p_0' p_0'' lassen sich, wie gesagt, construiren. Sie sind neben 7 bekannten Schnittpunkten $b_1\, b_2\, b_3\, b_4\, b_5\, b_0$ $\mathfrak{P}$ zweier Curven dritter Ordnung R^3 und R_1^3 die beiden übrigen. Von jeder dieser beiden Curven lässt sich eine hinreichende Anzahl Punkte auffinden; es genügen für jede ausser den 7 gemeinsamen noch zwei. Nun kann man in jeder durch 9 Punkte 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 gegebenen Curve dritter Ordnung stets zu je vieren derselben, z. B. zu 1, 2, 3, 4 den sogenannten Gegenpunkt construiren*). Wenn man in 1 die Tangenten an die fünf Kegelschnitte des Büschels (1, 2, 3, 4), die durch 5, 6, 7, 8, 9 gehen, construirt, was in Folge des Pascalschen Satzes möglich ist, und nun nach Abschnitt II. den Punkt o aufsucht, dessen Verbindungsgeraden mit 5, 6, 7, 8, 9 ein Büschel bilden, das dem der fünf Tangenten projectivisch ist, so ist o der Gegenpunkt. (Nebenbei: Sind 1, 2, 3, 4, 5 fünf Schnittpunkte eines Kegelschnitts mit der Curve dritter Ordnung, so ist der sechste Schnittpunkt beider Curven der zweite Schnittpunkt des Kegelschnitts mit der Geraden $o5$, der gefunden werden kann.)

Nun liegt bekanntlich der Gegenpunkt zu 4 von den 9 Schnittpunkten zweier Curven dritter Ordnung mit den 5 übrigen stets auf einem Kegelschnitte. Seien also o und o_1 die Gegenpunkte zu $b_1\, b_2 b_3 b_4$ auf den beiden Curven R^3 und R_1^3, von deren 9 Schnittpunkten 7: $b_1\, b_2\, b_3\, b_4\, b_5\, b_0$ $\mathfrak{P}$ uns bekannt sind, die beiden übrigen p_0' p_0'' aber gesucht, o' und o_1' aber die Gegenpunkte zu $b_1\, b_2\, b_3\, b_5$; so liegen einmal die Punkte $\beta_5 \beta_0$ $\mathfrak{P}$ $o\, o_1$ $p_0' p_0''$, das andere Mal $\beta_4 \beta_0$ $\mathfrak{P}$ $o' o_1' p_0' p_0''$ auf einem Kegelschnitt; jeder ist vollständig durch die jedesmaligen fünf ersten dieser Punkte gegeben. Die Punkte p_0' p_0'' sind die beiden ferneren Schnittpunkte dieser beiden Kegelschnitte neben $\mathfrak{P}$ und b_0, also zu construiren.

Die correspondirenden Punkte π_0' π_0'' findet man nun bequemer als correspondirende Punkte von $p_0' p_0''$ in Bezug auf zwei homologe Gruppen von fünf Punkten in G^7 und Γ^7.

19. Zu der obigen Construction der Fläche zweiten Grades durch die neun Punkte wurde nur das eine Paar correspondirender Punkte

---

*) Cremona's Introduzione ad una teoria geometrica delle curve piane No. 65.

$p_0'\ \pi_0'$ verwandt. Es lässt sich leicht erkennen, dass die beiden anderen Punkte $p_0''\ \pi_0''$ dieselbe Fläche erzeugen. Auf F_0^2 geht ausser g_0' und γ_0' durch P und Π noch je eine andere Gerade, g_0'' und γ_0'', aus der Schaar der erzeugenden Durchschnittsgeraden entsprechender Ebenen der Büschel um g_0' und γ_0', und nothwendig ist, da die Fläche F_0^2 auch durch die Büschel um g_0'' und γ_0'' erzeugt werden kann,

$$g_0''\,(\mathfrak{B}_1\,\mathfrak{B}_2\,\mathfrak{B}_3\,\mathfrak{B}_4\,\mathfrak{B}_5\,\mathfrak{B}_6\,\mathfrak{B}_7) = \gamma_0''\,(\mathfrak{B}_1\,\mathfrak{B}_2\,\mathfrak{B}_3\,\mathfrak{B}_4\,\mathfrak{B}_5\,\mathfrak{B}_6\,\mathfrak{B}_7);$$

beide Ebenenbüschel schneiden die Ebene $\mathfrak{E}$ in zwei projectivischen Büscheln um die Schnittpunkte von g_0'' und γ_0'' mit $\mathfrak{E}$, deren entsprechende Strahlen durch die homologen b und β gehen. Folglich müssen die genannten Schnittpunkte mit den beiden Punkten $p_0''\ \pi_0''$ identisch, mithin $Pp_0'' = g_0''$, $\Pi\pi_0'' = \gamma_0''$ sein. Also ergeben die beiden Punktenpaare $p_0'\pi_0'$ und $p_0''\pi_0''$ dieselbe Fläche zweiten Grades und der Unterschied besteht darin, dass bei dem einen Paare die durch P und Π gehenden Geraden aus der einen Schaar auf der Fläche zweiten Grades zu Axen der erzeugenden Ebenenbüschel, bei dem andern Paare die aus der andern Schaar genommen werden.

20. Die beiden Punkte $p_0'\ p_0''$ (und gleichzeitig ebenso $\pi_0'\ \pi_0''$) sind zugleich reell oder imaginär. In ersterem Falle geht durch die neun Punkte eine Fläche zweiten Grades mit reellen Geraden, also im Allgemeinen ein einflächiges Hyperboloid, das sich demnach durch projectivische Ebenenbüschel construiren lässt. Sind aber die beiden Punkte $p_0'\ p_0''$ und mit ihnen die Punkte $\pi_0'\ \pi_0''$ imaginär, so erhalten wir eine Fläche zweiten Grades ohne reelle Geraden, also ein Ellipsoid oder zweiflächiges Hyperboloid, auf dem mithin durch P und durch Π — sowie demnach durch jeden Punkt — zwei imaginäre Geraden (punktirte Geraden mit gemeinsamem reellen Punkte) gehen. Da nun aber die Axen imaginär sind, so kann die Fläche durch projectivische Ebenenbüschel nicht erzeugt werden. Die Geraden $p_0'\ p_0''$ und $\pi_0'\ \pi_0''$ sind jedoch auch in diesem Falle reell und lassen sich mit Hülfe der Involution construiren. Die Ebene $P\,p_0'\ p_0''$ ist die Berührungsebene im Punkte P an F_0^2, ebenso $\Pi\,\pi_0'\ \pi_0''$ die im Punkte Π. Also: Wenn eine Fläche zweiten Grades durch neun Punkte gegeben ist, so lässt sich in jedem derselben die Berührungsebene construiren, und es können, falls sie ein einflächiges Hyperboloid ist, auch die durch zwei der Punkte gehenden Geraden aus jeder der beiden Schaaren gefunden werden, deren Ebenenbüschel in projectivischer Beziehung die Fläche erzeugen. —

Die beiden projectivischen Strahlenbüschel um p_0' und π_0' erzeugen denselben Kegelschnitt $\mathfrak{K}_0^2$ — den Schnitt von F_0^2 durch die

Ebene $\mathfrak{E}$ —, wie die beiden projectivischen um p_0'' und π_0'' (während im allgemeinen Falle bei drei Paaren correspondirender Punkte in Bezug auf zwei Gruppen von je sieben Punkten es drei solche Kegelschnitte giebt, deren zwei also hier zusammengefallen sind, der dritte aber wegen der Identität der beiden Strahlbüschel, die ihn erzeugen würden, illusorisch geworden ist). Auf $\mathfrak{K}_0{}^2$ liegen ausser den vier Punkten p_0, π_0 auch die 14 Schnittpunkte $(p_0{}^i\, b_\lambda, \pi_0{}^i\, \beta_\lambda)$; es sind diese 18 Punkte die Spuren der 18 durch die neun Punkte gehenden Geraden der Fläche $F_0{}^2$ auf $\mathfrak{E}$.

VI.

21. Es seien nun blos acht Punkte gegeben:

$$P \Pi\ \mathfrak{B}_1\ \mathfrak{B}_2\ \mathfrak{B}_3\ \mathfrak{B}_4\ \mathfrak{B}_5\ \mathfrak{B}_6.$$

Die einfach unendlich vielen Flächen zweiten Grades durch diese Punkte bilden ein Büschel zweiter Ordnung $B(F_x^2)$. Die Projectionen der Punkte $\mathfrak{B}$ aus P und Π seien wieder:

$$b_1\ b_2\ b_3\ b_4\ b_5\ b_6\ ;\ \beta_1\ \beta_2\ \beta_3\ \beta_4\ \beta_5\ \beta_6.$$

Da giebt es (nach Abschnitt III.) zwei Curven R^3 und P^3, jene durch die 6 Punkte b, diese durch die 6 Punkte β gehend, derartig, dass jeder Punkt p_x auf R^3 seinen correspondirenden π_x auf P^3 hat, so dass

$$p_x\,(b_1\, b_2\, b_3\, b_4\, b_5\, b_6) = \pi_x\,(\beta_1\, \beta_2\, \beta_3\, \beta_4\, \beta_5\, \beta_6),$$

also, wenn $Pp_x = g_x$, $\Pi\pi_x = \gamma_x$, auch das Ebenenbüschel

$$g_x\,(b_1\, b_2\, b_3\, b_4\, b_5\, b_6) = \gamma_x\,(\beta_1\, \beta_2\, \beta_3\, \beta_4\, \beta_5\, \beta_6),$$

oder, was dasselbe ist,

$$g_x\,(\mathfrak{B}_1\, \mathfrak{B}_2\, \mathfrak{B}_3\, \mathfrak{B}_4\, \mathfrak{B}_5\, \mathfrak{B}_6) = \gamma_x\,(\mathfrak{B}_1\, \mathfrak{B}_2\, \mathfrak{B}_3\, \mathfrak{B}_4\, \mathfrak{B}_5\, \mathfrak{B}_6),$$

folglich durch dieselben eine Fläche zweiten Grades erzeugt wird, welche durch die sechs Punkte $\mathfrak{B}$ und durch die beiden Geraden g_x und γ_x, mithin durch P und Π geht und demgemäss zu dem Büschel $B(F_x^2)$ gehört. Bewegt sich p_x auf R^3 und damit π_x auf P^3, so erhält man das ganze Flächenbüschel $B(F_x^2)$; aus dem vorigen Abschnitt wissen wir aber, dass jede Fläche F_x^2 bei zwei Punkten p_x' und p_x'' auf R^3 und ihren correspondirenden π_x' und π_x'' auf P^3 sich ergiebt; jenes sind die Schnittpunkte der beiden Geraden auf F_x^2 durch P, diese derer durch Π mit $\mathfrak{E}$.

Der Punkt $\mathfrak{P}$ liegt als sich selbst correspondirender Punkt auf beiden Curven R^3 und P^3.

22. Es seien $F_{x_1}^2$ und $F_{x_2}^2$ zwei Flächen des Büschels $B(F_x^2)$, p_x' p_{x_1}'' die beiden Punkte auf R^3, welche $F_{x_1}^2$ veranlassen, p_{x_2}' und p_{x_2}'' die beiden, aus denen $F_{x_2}^2$ hervorgeht; endlich sei $\mathfrak{R}_{x_1x_2}^4$ die Durchschnittscurve der beiden Flächen, welche nothwendig durch die acht Punkte

— die Grundpunkte des Büschels — geht. Sie wird von den vier Geraden $g'_{x_1} = Pp'_{x_1}$, $g''_{x_1} = Pp''_{x_1}$, $g'_{x_2} = Pp'_{x_2}$, $g''_{x_2} = Pp''_{x_2}$ ausser in P je noch einmal getroffen, von den beiden ersten in den zweiten Punkten, in denen sie $F^2_{x_2}$ treffen, von den beiden letzten in ihren zweiten Schnittpunkten mit $F^2_{x_1}$. Folglich geht die Projection der Curve $\mathfrak{R}^4_{x_1x_2}$ auf $\mathfrak{E}$ aus P, einem ihrer Punkte, welche dritter Ordnung ist, durch $p'_{x_1}, p''_{x_1}, p'_{x_2}, p''_{x_2}$, ferner durch $b_1\, b_2\, b_3\, b_4\, b_5\, b_6$ und durch $\mathfrak{P}$, die Projectionen der 6 Punkte $\mathfrak{B}$ und die des Punktes Π, hat demnach mit R^3 11 Punkte gemein und ist folglich mit ihr identisch.

Ebenso wird die Durchschnittscurve irgend einer dritten Fläche des Büschels mit $F^2_{x_1}$ aus P in die Curve R^3 projicirt, und da jeder Projectionsstrahl diese letztere Fläche im Allgemeinen nur noch in einem Punkte ausser in P trifft, so schneiden alle übrigen Flächen des Büschels in eine desselben die nämliche Curve ein, d. h. alle gehen durch dieselbe Raumcurve vierter Ordnung $\mathfrak{R}^4$.

Also alle Flächen zweiten Grades, die durch acht beliebige Punkte gehen, haben eine ganze Raumcurve vierter Ordnung $\mathfrak{R}^4$ gemein.

Da durch acht Punkte nur einfach unendlich viele Flächen zweiten Grades gelegt werden können, so erhellt, dass an die Stelle der gegebenen acht Punkte jede beliebige acht andern Punkte dieser Raumcurve $\mathfrak{R}^4$ zur Constitution des Büschels $B\,(F^2_x)$ gewählt werden können. Also eine Raumcurve vierter Ordnung, in der sich unendlich viele Flächen zweiten Grades begegnen, die Grundcurve des Büschels dieser Flächen, die bekanntlich mit der Bezeichnung **„erster Species“** belegt worden ist, ist durch acht beliebige Punkte eindeutig bestimmt, und jede Fläche zweiten Grades, die durch acht Punkte einer solchen Raumcurve gelegt ist, enthält sie ganz.

23. P^3 ist in gleicher Weise die Projection von $\mathfrak{R}^4$ aus Π. Die beiden Curven R^3 und P^3 sind also in zweifacher Weise Punkt für Punkt auf einander bezogen: Erstens entspricht je einem Punkte b_y von R^3 der homologe β_y auf P^3, der mit b_y und $\mathfrak{P}$ in gerader Linie liegt und aus Π die Projection des Punktes $\mathfrak{B}_y$ auf $\mathfrak{R}^4$ ist, dessen Projection aus P der Punkt b_y ist. Sechs Paare solcher homologen Punkte können an die Stelle der beiden Gruppen G^6 und Γ^6 treten, sowie ja die sechs Punkte $\mathfrak{B}$ durch sechs andere auf $\mathfrak{R}^4$ ersetzt werden können.

Ferner entspricht jedem Punkte p_x auf R^3 ein correspondirender Punkt π_x auf P^3, so dass die Geraden $g_x = Pp_x$ und $\gamma_x = \Pi\pi_x$ zu derselben Schaar einer Fläche F^2_x unseres Büschels (mit den 8 Grundpunkten $P, \Pi, \mathfrak{B}_1 \ldots \mathfrak{B}_6$ oder mit der Grundcurve $\mathfrak{R}^4$) gehören. Die beiden Strahlbüschel um p_x und π_x sind so bezogen, dass entsprechende Strahlen nach den homologen Punkten in G^6 und Γ^6 gehen, und wenn man immer weitere entsprechende Strahlen in ihnen sucht, so werden diese stets nach 2 Paar homologen Punkten auf $\mathfrak{R}^3$ und P^3 gehen, d. h. solchen, welche Projectionen derselben zwei Punkte auf $\mathfrak{R}^4$ sind (diese befinden sich auf der Durchschnittslinie der beiden Ebenen durch g_x und γ_x, die jene entsprechenden Strahlen in $\mathfrak{E}$ einschneiden) und je mit $\mathfrak{P}$ in gerader Linie liegen. Oder: Wenn p_x und π_x ein Paar correspondirender Punkte auf R^3 und P^3 sind und p_{x_1} und π_{x_1} ein zweites Paar und ein Strahl in p_x die Curve R^3 in den Punkten b_y und $b_{y'}$ trifft, so trifft sein entsprechender in π_x die Curve P^3 in den homologen Punkten β_y und $\beta_{y'}$, ferner der Strahl $p_{x_1} b_y$ hat zum entsprechenden in π_{x_1} den Strahl $\pi_{x_1} \beta_y$ und der Strahl $p_{x_1} b_{y'}$ den Strahl $\pi_{x_1} \beta_{y'}$.

24. Die beiden Büschel p_x und π_x erzeugen den Kegelschnitt $\mathfrak{K}_x^2$, in dem F_x^2 durch die Ebene $\mathfrak{E}$ geschnitten wird; er geht durch 4 feste Punkte, nämlich die Schnittpunkte $\mathfrak{r}_1\, \mathfrak{r}_2\, \mathfrak{r}_3\, \mathfrak{r}_4$ der Curve $\mathfrak{R}^4$ mit der Ebene $\mathfrak{E}$, zugleich vier von den 9 Schnittpunkten der beiden Curven R^3 und P^3, Punkte, in denen sich zwei homologe vereinigt haben, also natürlich zwei entsprechende Strahlen aus p_x und π_x einander treffen. $\mathfrak{K}_x^2$ schneidet ausserdem R^3 und P^3 in den beiden Paaren correspondirender Punkte p_x', π_x' ($= p_x$, π_x) und p_x'', π_x'', welche beide die Fläche F_x^2 liefern. Die Geraden $p_x'\, p_x''$ und $\pi_x'\, \pi_x''$ laufen in Folge dessen durch die Gegenpunkte r und ϱ zu den vier Punkten $\mathfrak{r}$ auf R^3 und P^3. Da die Ebenen $P p_x'\, p_x''$ und $\Pi \pi_x'\, \pi_x''$ Berührungsebenen von F_x^2 in P und Π sind, so ergeben sich Pr und $\Pi\varrho$ als die Tangenten an $\mathfrak{R}^4$ in P und Π. Also lassen sich die Tangenten einer Raumcurve vierter Ordnung und erster Species, die durch acht Punkte gegeben ist, in jedem derselben construiren.

Die beiden Gegenpunkte r und ϱ liegen mit den fünf übrigen Schnittpunkten der beiden Curven R^3 und P^3 auf einem Kegelschnitt. Einer von diesen fünf Punkten ist $\mathfrak{P}$, die vier übrigen sind im Allgemeinen weder homologe, noch correspondirende Punkte; sie sind in der Ebene $\mathfrak{E}$ liegende Berührungspunkte von Tangentenebenen, welche von der Geraden $P\Pi$ an Flächen des Büschels $B(F_x^2)$ gelegt sind.

25. Die Strahlen um r und die um ϱ sind projectivisch auf die Kegelschnitte $\mathfrak{K}_x^2$ bezogen. Die entsprechenden Strahlen und Kegelschnitte begegnen sich in zwei Punkten auf R^3 resp. P^3. Die Berührungspunkte $P'\, P''\, P'''\, P''''$ der von r an R^3 gelegten Tangenten und die $\Pi'\, \Pi''\, \Pi'''\, \Pi''''$ der von ϱ an P^3 gelegten Tangenten correspondiren einander und jedes Paar, z. B. $P'\,\Pi'$ vereinigt in sich zwei Paare solcher correspondirender Punkte, die stets dieselbe Fläche erzeugen, so dass diese Fläche von den Ebenen PrP' und $\Pi\varrho\Pi'$ in zwei zusammengefallenen Geraden durchschnitten, also längs der Geraden PP' und

$\Pi\Pi'$ berührt wird. Folglich ist diese Fläche ein Kegel, und es ergeben sich so die vier Kegel des Büschels.

Die Geraden PP' und $\Pi\Pi'$ müssen sich in der Spitze des Kegels begegnen, folglich auch P' und Π' mit $\mathfrak{P}$ in gerader Linie liegen. Homolog sind sie aber nicht, weil sich die beiden Projectionsstrahlen PP' und $\Pi\Pi'$ in der Spitze des Kegels schneiden, also nicht auf der Curve $\mathfrak{R}^4$.

Wenn die Strahlen $r p'_x p''_x$ und $\varrho\, \pi'_x \pi''_x$ in dem einen Winkel, z. B. $r(P', P'')$ resp. $\varrho(\Pi', \Pi'')$ mit ihren entsprechenden Kegelschnitten $\mathfrak{K}^2_x$ in reellen, auf R^3 resp. P^3 liegenden Punkten $p'_x p''_x$ resp. $\pi'_x \pi''$ sich begegnen und aus diesen beiden Paaren correspondirender Punkte ein Hyperboloid mit einem Fache hervorgeht, das durch die Ebenenbüschel um Pp'_x und $\Pi\pi'_x$ oder um Pp''_x und $\Pi\pi''_x$ in der That hergestellt werden kann, so begegnen die Strahlen in den Nachbarwinkeln $r(P'', P''')$ und $\varrho(\Pi'', \Pi''')$ ihren entsprechenden Kegelschnitten $\mathfrak{K}^2_x$, welche, sobald die vier Punkte $\mathfrak{r}$ imaginär sind, auch imaginär (imaginär-reell) sein können, in imaginären Punkten $p'_x\, p''_x$ und $\pi'_x\, \pi''_x$, welche auf Ellipsoide oder Hyperboloide mit zwei Fächern hinweisen, bei denen freilich die Erzeugung durch Ebenenbüschel ihre reelle Bedeutung verloren hat und also nicht zur Construction verwandt werden kann.

VII.

26. Es werde wiederum die Anzahl der Punkte um einen vermindert:

$$P\Pi\, \mathfrak{B}_1\, \mathfrak{B}_2\, \mathfrak{B}_3\, \mathfrak{B}_4\, \mathfrak{B}_5.$$

Durch sie gehen doppelt unendlich viele Flächen zweiten Grades, ein sogenanntes Flächennetz oder Flächenbündel zweiter Ordnung $N(F^2_x)$. Die Projectionen der fünf Punkte $\mathfrak{B}$ aus P und Π bilden wieder die Gruppen $G^5 = (b_1\, b_2\, b_3\, b_4\, b_5)$ und $\Gamma^5 = (\beta_1\, \beta_2\, \beta_3\, \beta_4\, \beta_5)$. Es correspondirt (Abschnitt II.) jedem Punkte p_x in der Ebene $\mathfrak{E}$ ein Punkt π_x, derartig, dass

$$p_x\,(b_1\, b_2\, b_3\, b_4\, b_5) = \pi_x\,(\beta_1\, \beta_2\, \beta_3\, \beta_4\, \beta_5);$$

folglich correspondirt jeder durch P gehenden Geraden g_x im Allgemeinen eine durch Π gehende Gerade γ_x, deren Ebenenbüschel so auf das jener bezogen werden kann, dass

$$g_x\,(\mathfrak{B}_1\, \mathfrak{B}_2\, \mathfrak{B}_3\, \mathfrak{B}_4\, \mathfrak{B}_5) = \gamma_x\,(\mathfrak{B}_1\, \mathfrak{B}_2\, \mathfrak{B}_3\, \mathfrak{B}_4\, \mathfrak{B}_5),$$

also durch die Büschel eine Fläche des Netzes $N(F^2_x)$ erzeugt wird, welche die Geraden g_x und γ_x — correspondirende Axen durch P und Π in Bezug auf das Netz durch die 7 Grundpunkte — enthält.

27. Der Punkt b_1 in der Ebene $\mathfrak{E}$ hat unendlich viele correspondirende Punkte in Bezug auf G^5 und Γ^5, die einen gewissen Kegel-

schnitt Σ_1 durch $\beta_2\,\beta_3\,\beta_4\,\beta_5$ bilden, den analogen Kegelschnitt zu $\Sigma_0 = (b_2\,b_3\,b_4\,b_5\,b_1)$. Folglich hat die Axe $P b_1 = P\mathfrak{B}_1$ unendlich viele correspondirende Axen durch Π, welche den Kegel $\Pi\Sigma_1$, d. i. einen Kegel erfüllen, dessen Kanten mit den vier Geraden $\Pi(\beta_2\,\beta_3\,\beta_4\,\beta_5)$ oder $\Pi(\mathfrak{B}_2\,\mathfrak{B}_3\,\mathfrak{B}_4\,\mathfrak{B}_5)$ dasselbe anharmonische Verhältniss haben, wie die Kante $P\mathfrak{B}_1 b_1$ mit $P(\mathfrak{B}_2 b_2, \mathfrak{B}_3 b_3, \mathfrak{B}_4 b_4, \mathfrak{B}_5 b_5)$. Jene correspondirenden Axen bilden mithin einen Kegel, welcher durch $\Pi(\mathfrak{B}_2\,\mathfrak{B}_3\,\mathfrak{B}_4\,\mathfrak{B}_5)$ geht und analog ist zum Kegel $P(\mathfrak{B}_1\,\mathfrak{B}_2\,\mathfrak{B}_3\,\mathfrak{B}_4\,\mathfrak{B}_5)$. Also jedenfalls gehen durch $P\mathfrak{B}_1$ unendlich viele Flächen des Netzes N, und da $P\mathfrak{B}_1$ den eben genannten analogen Kegel zweimal trifft, so begegnet sie zweimal einer ihrer correspondirenden Axen, so dass sich unter diesen unendlich vielen Flächen durch $P\mathfrak{B}_1$ zwei Kegel befinden.

Der Gruppe G^5 ist in Bezug auf sie und Γ^5 der Punkt b_0 verbunden, dem alle Punkte des Kegelschnitts $\Sigma_0 = (\beta_1\,\beta_2\,\beta_3\,\beta_4\,\beta_5)$ correspondiren, so dass die Axe $P b_0$ ebenfalls unendlich viele correspondirende Axen durch Π hat, welche den Kegel $\Pi(\mathfrak{B}_1\,\mathfrak{B}_2\,\mathfrak{B}_3\,\mathfrak{B}_4\,\mathfrak{B}_5)$ erzeugen, und durch $P b_0$ unendlich viele Flächen des Netzes gehen, unter ihnen wiederum zwei Kegel.

Was nun die Gerade $P\Pi$ anlangt, welche $\mathfrak{G}$ in $\mathfrak{P}$ trifft, so ist ihre correspondirende Axe durch Π sie selbst, da $\mathfrak{P}$ sich selbst in Bezug auf G^5 und Γ^5 correspondirt; die beiden erzeugenden Ebenenbüschel werden also identisch, und die Erzeugung mit Hülfe von zwei Axen durch P und Π lässt uns hier im Stiche. Dass aber dennoch durch $P\Pi$ unendlich viele Flächen des Netzes gehen, leuchtet durch eine blosse Vertauschung von Π oder P mit einem der Punkte $\mathfrak{B}$ ein.

Also durch jeden der sieben Grundpunkte gehen sieben Gerade, welche auf unendlich vielen Flächen des Netzes sich befinden, unter denen zwei Kegel vorkommen; sechs von diesen Geraden gehen nach den sechs übrigen Grundpunkten.

28. Alle Flächen des Netzes, die durch eine solche Gerade gehen, haben noch eine cubische Raumcurve gemein. Beweisen wir dies für die Gerade $P\mathfrak{B}_1 b_1$ und für die Gerade $P b_0$. Es seien $F^2_{x'}$ und $F^2_{x''}$ zwei Flächen des Netzes, welche durch $P\mathfrak{B}_1$ gehen; jene sei erzeugt durch die Büschel um $P\mathfrak{B}_1 b_1$ und um $\Pi\pi_{x'}$, diese durch diejenigen um $P\mathfrak{B}_1 b_1$ und um $\Pi\pi_{x''}$, wo also $\pi_{x'}$ und $\pi_{x''}$ zwei Punkte auf Σ_1 und demnach $\Pi\pi_{x'}$ und $\Pi\pi_{x''}$ zwei Kanten des Kegels $\Pi\Sigma_1$ sind. Die beiden Flächen $F^2_{x'}$ und $F^2_{x''}$ haben ausser $P\mathfrak{B}_1$ noch eine cubische Raumcurve $\mathfrak{R}^3_{x'x''}$ gemein, welche der Geraden $P\mathfrak{B}_1$ zweimal begegnet, ersichtlich durch $\Pi\,\mathfrak{B}_2\,\mathfrak{B}_3\,\mathfrak{B}_4\,\mathfrak{B}_5$ geht und jede der beiden Geraden $\Pi\pi_{x'}$ und $\Pi\pi_{x''}$, die auf ihren betreffenden Flächen zu derselben Schaar wie $P\mathfrak{B}_1$ gehören, noch einmal ausser in Π trifft. Ihre Projection aus Π ist ein Kegelschnitt, der durch $\beta_2\,\beta_3\,\beta_4\,\beta_5$ und

durch $\pi_{x'}$ und $\pi_{x''}$ geht, also nothwendig mit Σ_1 identisch ist. In ähnlicher Weise wie in No. 22 ergiebt sich hieraus, dass eine von den Flächen durch $P\mathfrak{B}_1$ von den übrigen stets in derselben cubischen Raumcurve $\mathfrak{R}_1^3$ durchschnitten wird, also alle dieselbe gemein haben und folglich ein Büschel mit der Grundcurve $(P\mathfrak{B}_1, \mathfrak{R}_1^3)$ bilden. $\mathfrak{R}_1^3$ liegt ersichtlich auf dem Kegel $\Pi\Sigma_1$ und trifft also $P\mathfrak{B}_1$ in den Spitzen der beiden Kegel, die unter den Flächen des Büschels sich befinden.

Ebenso wird die cubische Raumcurve, in der sich zwei Flächen des Netzes durch Pb_0 noch durchschneiden, aus Π in einen Kegelschnitt projicirt, der mit $\Sigma_0 = (\beta_1\,\beta_2\,\beta_3\,\beta_4\,\beta_5)$ diese fünf Punkte und noch die beiden ähnlichen Punkte $\pi_{x'}$ und $\pi_{x''}$ gemein hat; so dass sie also allen Flächen durch Pb_0 gemein ist u. s. f.

29. Es sei $F_{x_1}^2$ irgend eine Fläche des Netzes; sie gehört zu einfach unendlich vielen Büscheln B_y des Netzes (welche wir erhalten, indem wir sie mit sämmtlichen Flächen eines Büschels des Netzes, in dem sie sich nicht befindet, zusammenstellen). Die Grundcurven $\mathfrak{R}_y^4$ dieser Büschel werden aus P und Π in je zwei Curven R_y^3 und P_y^3 projicirt. Sind $p'_{x_1}\ \pi'_{x_1}$ und $p''_{x_1}\ \pi''_{x_1}$ die beiden Paare correspondirender Punkte, welche die Fläche $F_{x_1}^2$ hervorrufen, so liegen die fünf Punkte $b_1\,b_2\,b_3\,b_4\,b_5$, ihr verbundener Punkt b_0, der Punkt $\mathfrak{P}$ und die beiden Punkte $p'_{x_1}\ p''_{x_1}$ auf allen Curven R_y^3, so dass diese ein Büschel bilden, ebenso $\beta_1\,\beta_2\,\beta_3\,\beta_4\,\beta_5\,\beta_0\ \mathfrak{P}\ \pi'_{x_1}, \pi''_{x_1}$ auf allen P_y^3. Es muss nun der entsprechende Strahl zu $p'_{x_1}\ b_0$ (oder zu $p'_{x_1}\ b_0$) in dem Büschel um π'_{x_1} (oder um π''_{x_1}) stets durch den homologen Punkt von b_0 auf allen P_y^3 gehen. Die Projectivität der Büschel um p'_{x_1} und π'_{x_1} (oder um p''_{x_1} und π''_{x_1}) ist nun eine feste, von der Veränderung der Curven R_y^3 und P_y^3 ganz unabhängige, also bleibt der genannte entsprechende Strahl fest, und da der homologe Punkt von b_0 nothwendig auf $\mathfrak{P}\ b_0$ liegen muss, so ist er ein gleichfalls unveränderlicher Punkt, also einer von den neun gemeinsamen Punkten der Curven P_y^3, mithin da die Punkte $\beta_1\,\beta_2\,\beta_3\,\beta_4\,\beta_5$ schon als homologe den Punkten $b_1\,b_2\,b_3\,b_4\,b_5$ zugehören, die Punkte π'_{x_1} und π''_{x_1} mit der Fläche $F_{x_1}^2$ sich ändern, während doch b_0 intact bleibt, so kann nur β_0 der homologe Punkt zu b_0 sein und beide liegen also mit $\mathfrak{P}$ in gerader Linie. Sie sind demnach stets die Projectionen desselben festen Punktes $\mathfrak{B}_0 = (Pb_0, \Pi\beta_0)$ auf allen $\mathfrak{R}_y^4$, durch den also auch die Fläche $F_{x_1}^2$ geht, auf der sich ja alle $\mathfrak{R}_y^4$ befinden. Folglich ergiebt sich uns der wichtige Satz:

Alle Flächen zweiten Grades, die durch sieben Punkte gehen, gehen auch noch durch einen achten, den wir den den sieben Punkten verbundenen oder associirten Punkt nennen wollen. Er ist also der achte Grundpunkt des Netzes der Flächen zweiten Grades.

Alle Raumcurven vierter Ordnung und erster Species, die durch sieben Punkte gehen, gehen auch durch deren verbundenen Punkt.

Je zwei correspondirende Punkte p_x und π_x in der Ebene $\mathfrak{E}$ erzeugen folglich nicht nur mit den Punkten der Gruppen G^5 und Γ^5 projectivische Strahlbüschel, sondern auch durch b_0 und β_0 gehen stets entsprechende Strahlen, so dass also auch zwei Gruppen wie z. B. $b_1\, b_2\, b_3\, b_4\, b_0$ und $\beta_1\, \beta_2\, \beta_3\, \beta_4\, \beta_0$ ganz dieselben Paare correspondirender Punkte haben wie G^5 und Γ^5 und für jene sind dann b_5 und β_5 die verbundenen Punkte.

Mithin können b_0 und β_0 stets mit zwei homologen Punkten aus G^5 und Γ^5, folglich $\mathfrak{P}_0$ stets mit einem der Punkte $\mathfrak{P}_1\, \mathfrak{P}_2\, \mathfrak{P}_3\, \mathfrak{P}_4\, \mathfrak{P}_5$ und, wie diese, auch mit P und Π vertauscht werden. Wir können also die acht Punkte, da von ihnen jeder der verbundene oder associirte achte sein kann, kurz acht verbundene oder associirte Punkte nennen.

Es leuchtet nun ein, dass wenn acht Punkte zur Bestimmung eines Flächenbüschels zweiter Ordnung oder einer Raumcurve vierter Ordnung und erster Species gegeben werden, dieselben nicht verbundene (associirte) Punkte sein dürfen.

Und: Legt man eine Fläche zweiten Grades durch acht Punkte einer Raumcurve von vierter Ordnung und erster Species, so enthält sie dieselbe ganz, wenn die acht Punkte nicht associirte Punkte sind.

Eine Fläche zweiten Grades und eine Raumcurve vierter Ordnung und erster Species, welche sieben Punkte gemein haben, durchschneiden sich noch in dem associirten achten Punkte*).

Der achte Punkt $\mathfrak{P}_0$ ist zu construiren, da dies mit den Punkten b_0 und β_0 der Fall ist.

30. Es ist in No. 10. erkannt worden, dass auf jeder Geraden in $\mathfrak{E}$ fünf Paare correspondirender Punkte in Bezug auf G^5 und Γ^5 liegen. Geht die Gerade durch den Punkt $\mathfrak{P}$, in dem sich zwei correspondirende Punkte vereinigt haben, so liegen ausserdem nur noch 4 Paare auf ihr; in jeder Ebene also durch $P\Pi\mathfrak{P}$ befinden sich 4 Paare correspondirender Axen, also vier Kegelspitzen des Netzes, ausser den

*) Reye: Sopra le curve gobbe di quart' ordine e prima specie e i loro punti d'intersezione con superficie di secondo grado. Annali di Matematica. Ser. II. t. II. pag. 129. 222.

beiden, welche auf $P\Pi$ selbst liegen und deren Kegel (No. 27.) nicht aus correspondirenden Axen durch P und Π entstehen können. Es ergiebt sich daraus, dass die Kegelspitzen des Netzes eine Curve sechster Ordnung $\mathfrak{S}^6$ bilden. Durch jeden der Punkte $P\Pi\,\mathfrak{P}_1\,\mathfrak{P}_2\,\mathfrak{P}_3\,\mathfrak{P}_4\,\mathfrak{P}_5$ (und auch durch $\mathfrak{P}_0$) gehen 7 Gerade, welche $\mathfrak{S}^6$ doppelt treffen, durch P z. B. die Geraden $P(\Pi\,\mathfrak{P}_1\,\mathfrak{P}_2\,\mathfrak{P}_3\,\mathfrak{P}_4\,\mathfrak{P}_5\,\mathfrak{P}_6\,\mathfrak{P}_0)$. Jede andere Gerade durch P hat nur eine correspondirende Axe durch Π, kann also höchstens von dieser getroffen werden, also die Curve $\mathfrak{S}^6$ höchstens einmal treffen. Keiner der acht Grundpunkte liegt im Allgemeinen auf $\mathfrak{S}^6$, da sechs Gerade, wie $P(\Pi\,\mathfrak{P}_1\mathfrak{P}_2\mathfrak{P}_3\mathfrak{P}_4\mathfrak{P}_5)$, bei der Beliebigkeit der Punkte keinen Kegel erzeugen. Folglich hat $\mathfrak{S}^6$ sieben scheinbare Doppelpunkte. Sie ist demnach vom Range $6.5 - 2.7 = 16$*).

Der über dieser Curve stehende Kegel sechster Ordnung mit der Spitze P (oder Π) trifft die Projection R^3 (oder P^3) der Grundcurve $\mathfrak{R}^4$ eines Büschels des Netzes aus P (oder Π) ausser in den sieben Punkten b (oder β), die doppelt zählen, weil sie auf den Doppelkanten des Kegels liegen, noch in den vier Punkten $P'\,P''\,P'''\,P''''$ (oder $\Pi'\,\Pi''\,\Pi'''\,\Pi''''$), welche die vier Kegel des Büschels bewirken (No. 25.).

VIII.

31. Es seien endlich blos sechs Punkte $P\Pi\,\mathfrak{P}_1\mathfrak{P}_2\mathfrak{P}_3\mathfrak{P}_4$ gegeben. Das dreifach unendliche System der durch sie gelegten Flächen zweiten Grades ist ein besonderer Fall des Flächengebüsches zweiter Ordnung (Linearsystems); das allgemeine Flächengebüsche**) entsteht durch alle die Flächen, welche sich in den Büscheln befinden, die durch Zusammenstellung einer Fläche 2. Grades mit sämmtlichen Flächen eines Flächennetzes zweiter Ordnung oder durch Zusammenstellung sämmtlicher Flächen eines Büschels zweiter Ordnung mit denen eines andern veranlasst werden. Unser specieller Fall tritt ein, wenn die constituirende Fläche durch sechs der Grundpunkte des constituirenden Netzes geht, oder wenn die Grundcurven der beiden constituirenden Büschel sechs Punkte gemein haben. Die Projectionen der vier Punkte $\mathfrak{P}$ aus P und Π geben wie-

*) Man sehe über diese Curve und ihre Singularitäten des Verf. Buch über die Flächen dritter Ordnung No. 16, 64 und 70.

**) Dasselbe wurde von mir in meinem Buche über die Flächen dritter Ordnung Flächennetz genannt. Ich habe aber um der Uebereinstimmung willen diese Bezeichnungsweise verlassen und verstehe unter Flächennetz dasselbe, wie unter Flächenbündel, für das dreifach unendliche System habe ich die Benennung des Herrn Reye adoptirt.

der die beiden Gruppen $G^4 = (b_1\, b_2\, b_3\, b_4)$ und $\Gamma^4 = (\beta_1\, \beta_2\, \beta_3\, \beta_4)$. Jede Gerade g_x durch P hat unendlich viele correspondirende Axen γ_x durch Π, die einen Kegel zweiten Grades bilden, der über dem Kegelschnitte Σ_x durch $\beta_1\, \beta_2\, \beta_3\, \beta_4$ steht, welcher dem Kegelschnitt $S_x = (b_1\, b_2\, b_3\, b_4\, p_x)$ analog ist [wobei $p_x = (\mathfrak{E}, g_x)$]. Es ist also der analoge Kegel durch $\Pi\, (\mathfrak{B}_1\beta_1, \mathfrak{B}_2\beta_2, \mathfrak{B}_3\beta_3, \mathfrak{B}_4\beta_4)$ zu dem Kegel durch $P\, (\mathfrak{B}_1 b_1, \mathfrak{B}_2 b_2, \mathfrak{B}_3 b_3, \mathfrak{B}_4 b_4)$ und g_x; wir können ihn auch den correspondirenden Kegel Δ_x der Geraden g_x nennen; da er dieselbe zweimal trifft, so liegen auf g_x und so auf jeder durch einen Grundpunkt gehenden Geraden zwei Kegelspitzen des Gebüsches, abgesehen davon, dass in diesen Punkt selbst eine solche Kegelspitze fällt, wie ja bekannt ist. Eine Gerade, die zwei Grundpunkte verbindet, wie $P\mathfrak{B}_1 b_1$, sondert aus dem Büschel $(b_1\, b_2\, b_3\, b_4)$ keinen besonderen Kegelschnitt, ihr correspondiren alle Geraden durch Π, also wird sie auch vollständig von Kegelspitzen erfüllt, wie ebenfalls bekannt ist.

32. Aber dem Kegel $\Delta_x = (\Pi, \Sigma_x)$, d. h. allen seinen Kanten γ_x, correspondirt nicht blos die eine Gerade g_x, von der wir oben sprachen, sondern alle Geraden des Kegels $D_x = (P, S_x)$, da ja in Bezug auf G^4 und Γ^4 sämmtliche Punkte von S_x und sämmtliche Punkte von Σ_x correspondiren. In der Schnittcurve s_x^4 von D_x und Δ_x treffen sich also correspondirende Axen, sie enthält folglich lauter Kegelspitzen des Netzes. Da die analogen Kegelschnitte durch $(b_1\, b_2\, b_3\, b_4)$ und $(\beta_1\, \beta_2\, \beta_3\, \beta_4)$ zwei projectivische Büschel bilden, so gilt dies auch für die über ihnen stehenden analogen Kegel D_x und Δ_x. Diese beiden projectivischen Kegelbüschel erzeugen nun durch die Durchschnittscurven s_x^4 den Ort sämmtlicher Kegelspitzen des Gebüsches, eine Fläche vierter Ordnung $\mathfrak{A}^4$, die Kegelspitzen- oder Kernfläche des Gebüsches. Die vier Grundstrahlen des einen wie des andern Büschels, also die acht Geraden, welche P und Π mit den vier anderen Grundpunkten verbinden, liegen auf $\mathfrak{A}^4$; die vier Punkte $\mathfrak{B}$, beiden Grundcurven gemeinsam und deshalb auf allen Curven s_x^4 liegend, sind Knotenpunkte der Fläche, ebenso die beiden anderen Grundpunkte P und Π, da sie Knotenpunkte der beiden Grundcurven sind; trifft ja auch jede durch einen der sechs Grundpunkte gelegte Gerade die Kernfläche ausser in jenem nur noch zweimal (No. 31).

In den beiden Kegelschnittbüscheln durch G^4 und Γ^4 sind die Kegelschnitte analog, welche durch $\mathfrak{P}$ gehen, da ja $\mathfrak{P}\, (b_1\, b_2\, b_3\, b_4) = \mathfrak{P}\, (\beta_1\, \beta_2\, \beta_3\, \beta_4)$. Also entsprechen die über ihnen stehenden Kegel mit den Spitzen P und Π, welche übrigens zu den Kegeln des Gebüsches und zwar zu den sechs ausgezeichneten, die ihre Spitzen in den Grundpunkten selber haben, gehören, in den Kegelbüscheln einander. Ihre

Durchschnittscurve s_x^4 zerspaltet sich in die Gerade $P\Pi$, die ja durch $\mathfrak{P}$ geht, (also die neunte Verbindungsgerade von zwei Grundpunkten), und die Raumcurve dritter Ordnung $\mathfrak{R}^3$, welche durch die sechs Grundpunkte geht und durch sie bestimmt ist.

Ferner sind in $\mathfrak{E}$ je zwei homologe Geradenpaare analog, z. B. $(b_1 b_2, b_3 b_4)$ und $(\beta_1\beta_2, \beta_3\beta_4)$, also entsprechen einander in den Kegelbüscheln die Ebenenpaare $(P\mathfrak{B}_1\mathfrak{B}_2, P\mathfrak{B}_3\mathfrak{B}_4)$ und $(\Pi\mathfrak{B}_1\mathfrak{B}_2, \Pi\mathfrak{B}_3\mathfrak{B}_4)$. Ihre Durchschnittscurve zerfällt in die beiden Geraden $\mathfrak{B}_1\mathfrak{B}_2$, $\mathfrak{B}_3\mathfrak{B}_4$ und die Geraden $(P\mathfrak{B}_1\mathfrak{B}_2, \Pi\mathfrak{B}_3\mathfrak{B}_4)$ und $(P\mathfrak{B}_3\mathfrak{B}_4, \Pi\mathfrak{B}_1\mathfrak{B}_2)$.

Wir erhalten so noch die sechs übrigen Verbindungsgeraden von je zwei Grundpunkten und die Durchschnittsgeraden von sechs Ebenenpaaren, die zum Gebüsche gehören; welche Geraden wir als zu Geraden erweiterte Spitzen von degenerirten Kegeln des Gebüsches auf der Kernfläche erwarten mussten. Die vier übrigen derartigen Schnittgeraden wird eine andere Gruppirung der Grundpunkte auch als Geraden der Fläche $\mathfrak{A}^4$ erkennen lassen.

Keine zwei der 10 Durchschnittsgeraden treffen einander, weil sie stets sich als Gegenseiten eines windschiefen Vierseits ergeben, wie wir dies bei den beiden obigen gesehen haben.

Durch je vier der Knotenpunkte von $\mathfrak{A}^4$ gehen also auf dieser Fläche einfach unendlich viele Raumcurven vierter Ordnung und erster Species, die aus den beiden übrigen Knotenpunkten durch Kegel zweiten Grades projicirt werden. Einmal zerfällt diese Raumcurve in die Verbindungsgerade der beiden übrigen Grundpunkte und die durch alle sechs Grundpunkte gelegte cubische Raumcurve $\mathfrak{R}^3$ (die demnach allen 15 derartigen Systemen gemeinsam ist); die Projectionskegel aus P und Π gehören dann zu dem Gebüsche und zwar zu den sechs ausgezeichneten Kegeln. Dreimal endlich löst sich die Raumcurve vierter Ordnung in ein windschiefes Vierseit auf, dessen ein Paar Gegenseiten aus zwei Verbindungsgeraden von Grundpunkten, das andere aus Durchschnittsgeraden von Ebenenpaaren des Gebüsches besteht.

33. Ferner liegen auf $\mathfrak{A}^4$ noch dreifach unendlich viele Raumcurven sechster Ordnung (16. Ranges) $\mathfrak{S}^6$, die Kegelspitzen- oder Kerncurven aller im Gebüsche enthaltenen Netze. Durch je drei Punkte auf $\mathfrak{A}^4$ geht eine solche Curve; sind aber die 3 Punkte Spitzen von Kegeln desselben Büschels, so liegen sie auf unendlich vielen Curven $\mathfrak{S}^6$, die alle noch durch die Spitze des vierten Kegels des Büschels gehen; oder: durch zwei beliebige Punkte auf $\mathfrak{A}^4$ geht ein Büschel von unendlich vielen Curven $\mathfrak{S}^6$, welche sich noch in zwei festen Punkten treffen, den beiden anderen Kegelspitzen des Büschels, dem jene beiden Punkte als Kegelspitzen

zugehören. Zehnmal löst sich in einem solchen Büschel, wenn nämlich in das Netz, dem die Curve zugehört, eins der zehn Ebenenpaare eintritt, die Curve in dessen Durchschnittsgerade und eine ihr zweimal begegnende Curve fünfter Ordnung $\mathfrak{S}^5$ auf, welche vier scheinbare Doppelpunkte hat (da von den sieben Geraden, die von einem der Grundpunkte des Netzes nach den sieben übrigen gehen, drei die genannte Durchschnittsgerade treffen), also zwölften Ranges ist*). — Durch jeden Punkt gehen doppelt unendlich viele Curven $\mathfrak{S}^6$, von denen sich natürlich unendlich viele in der beschriebenen Art, 45 aber sich, wenn nämlich das Netz zwei Ebenenpaare aufnimmt, in die beiden Durchschnittsgeraden (die gegen einander windschief sind) und eine (jeder von ihnen zweimal begegnende) Raumcurve vierter Ordnung $\mathfrak{S}^4$ auflösen; da die beiden Durchschnittsgeraden zusammen fünf Verbindungsgeraden der Grundpunkte des Netzes, die von einem Grundpunkte ausgehen und von denen eine beide trifft, begegnen, so hat die Raumcurve vierter Ordnung zwei scheinbare Doppelpunkte, ist also achten Ranges und erster Species*). Die Curve $\mathfrak{S}^6$ endlich, welche einem der 120 Netze des Gebüsches zugehört, in denen sich je drei Ebenenpaare befinden, zerfällt in deren drei (gegen einander windschiefe) Durchschnittsgeraden und eine jeder der drei Geraden zweimal begegnende Raumcurve dritter Ordnung $\mathfrak{S}^3$, an welche von jedem der Grundpunkte nur eine Secante geht, die also die bekannte cubische Raumcurve ist, so dass es auf $\mathfrak{A}^4$ ausser $\mathfrak{R}^3$ noch 120 cubische Raumcurven $\mathfrak{S}^3$ giebt; doch nur 60 von diesen bleiben ungetheilte cubische Raumcurven, die übrigen 60 lösen sich auf je in eine Durchschnittsgerade und eine Verbindungsgerade zweier Knotenpunkte, diese doppelt gerechnet; so dass sich auch die oben erwähnten 120 Netze des Gebüsches, in denen drei Ebenenpaare vorkommen, auf 60, in denen blos drei sich befinden, und 15, welche vier enthalten, reduciren. (Man sehe No. 36.)

Je zwei Curven $\mathfrak{S}^6$ schneiden sich in vier Punkten, den Spitzen der vier Kegel des Büschels, das ihren beiden Netzen gemeinsam ist, und constituiren ein Büschel von Curven $\mathfrak{S}^6$. Geht eine Curve $\mathfrak{S}^6$ durch einen der Knotenpunkte der Fläche $\mathfrak{A}^4$, z. B. durch P, so ist dieser für sie ein Doppelpunkt. Alle Büschelgrundcurven des Gebüsches gehen durch die sechs Grundpunkte; die Grundcurven also derjenigen, zu denen der Kegel des Gebüsches mit der Spitze P gehört, haben in derselben einen Doppelpunkt und der genannte Kegel repräsentirt bekanntlich zwei Kegel jedes solchen Büschels; so zeigt sich von einer andern Seite der Grund der Duplicität von P auf $\mathfrak{S}^6$.

Alle Curven $\mathfrak{S}^6$, die durch einen Grundpunkt und einen andern

*) Des Verf. Buch über die Flächen dritter Ordnung No. 65. 56.

Punkt auf $\mathfrak{A}^4$ gelegt sind, haben nur noch einen festen Punkt gemein, weil der vierte sich mit dem Grundpunkte vereinigt hat.

Wählt man gar zwei Grundpunkte zu festen Punkten eines Büschels von Curven $\mathfrak{S}^6$, so sind beide weiteren festen Punkte mit ihnen zusammengefallen, und die Curven haben nur die beiden Doppelpunkte gemein.

Von der Curve $\mathfrak{S}^6$ durch drei Grundpunkte soll im nächsten Abschnitte gesprochen werden; sie geht auch durch die drei übrigen und ist die Curve $\mathfrak{R}^3$ doppelt.

IX.

34. Wir halten nun sechs Grundpunkte $P\Pi\mathfrak{B}_1\mathfrak{B}_2\mathfrak{B}_3\mathfrak{B}_4$ fest und wollen zu einem siebenten $\mathfrak{B}_5$ stets den associirten achten Punkt $\mathfrak{B}_0$ suchen. Zuerst wollen wir $\mathfrak{B}_5$ einige ausgezeichnete Lagen hinsichtlich der sechs festen Punkte geben, dann (in den beiden nächsten Abschnitten) werden wir den Ort des achten Punktes suchen, wenn der siebente eine Gerade oder eine Ebene durchläuft, also die associirte Curve oder Fläche dieser Gebilde*).

Es falle der Punkt $\mathfrak{B}_5$ auf die Verbindungsgerade zweier der festen Grundpunkte, z. B. auf $\mathfrak{B}_1\mathfrak{B}_2$. Wenn nun g_x und γ_x zwei correspondirende Axen durch P und Π sind, welche irgend eine Fläche des Netzes erzeugen, so ist also $g_x(\mathfrak{B}_1\mathfrak{B}_2\mathfrak{B}_3\mathfrak{B}_4\mathfrak{B}_5) = \gamma_x(\mathfrak{B}_1\mathfrak{B}_2\mathfrak{B}_3\mathfrak{B}_4\mathfrak{B}_5)$, mithin fallen in den beiden projectivischen Punktreihen, in denen die Ebenenbüschel um g_x und γ_x die Gerade $\mathfrak{B}_1\mathfrak{B}_2\mathfrak{B}_5$ treffen, dreimal zwei entsprechende Punkte, folglich alle zusammen; woraus hervorgeht, dass die Durchschnittsgeraden je zweier entsprechenden Ebenen die Gerade $\mathfrak{B}_1\mathfrak{B}_2\mathfrak{B}_5$ treffen, diese also auf der Fläche und demnach auf allen Flächen des Netzes liegt; ist ja doch der Satz, dass eine Fläche zweiten Grades, die durch drei Punkte einer Geraden geht, diese ganz enthält, hinlänglich bekannt. Wir werden also auch vermuthen können, dass der associirte achte Punkt die ganze Verbindungsgerade erfüllt, was nun auf Grund der bisherigen Betrachtungen genauer nachgewiesen werden soll.

Da die drei Punkte $b_1 b_2 b_5$ und ebenso $\beta_1\beta_2\beta_5$ in $\mathfrak{E}$ auf je einer Geraden liegen, so zerfallen die beiden Kegelschnitte S_0 und Σ_0 in die beiden Geradenpaare $(b_1 b_2 b_5, b_3 b_4)$ und $(\beta_1\beta_2\beta_5, \beta_3\beta_4)$ mit den Schnittpunkten s und σ. Der analoge Kegelschnitt zu S_0 durch

*) Man vergl. die Abhandlung des Herrn Geiser: Ueber zwei geometrische Probleme, Journal von Crelle-Borchardt Bd. 67, so wie die Resultate der Untersuchungen des Herrn Reye über das allgemeine Flächengebüsche zweiter Ordnung, welche er in seiner Geometrie der Lage II S. 255 mittheilt.

$\beta_1\beta_2\beta_3\beta_4$ zerfällt in die Geraden $\beta_1\beta_2$, $\beta_3\beta_4$ (No. 3.), der aber durch $\beta_1\beta_2\beta_3\beta_5$ in die Geraden $\beta_1\beta_2\beta_5$ und $\beta_3\sigma'$, wenn σ' auf $\beta_1\beta_2\beta_5$ so liegt, dass $(b_1\,b_2\,b_5\,s) = (\beta_1\,\beta_2\,\beta_5\,\sigma')$*). Beiden Geradenpaaren ist ausser β_3 (und β_1, β_2) die ganze Gerade $\beta_1\beta_2\beta_5$ gemein; in diese hat sich also der Punkt β_0 erweitert. In gleicher Weise hat sich der Punkt b_0 zur Geraden $b_1\,b_2\,b_5$ erweitert. Folglich hat sich der Punkt $\mathfrak{B}_0$ in die Schnittgerade der beiden Ebenen $(P, b_1 b_2 b_5)$ und $(\Pi, \beta_1\beta_2\beta_5)$, d. i. in die Gerade $\mathfrak{B}_1\mathfrak{B}_2\mathfrak{B}_5$ erweitert.

Legt man also bei sechs festen Grundpunkten eines Netzes zweiter Ordnung den siebenten auf die Verbindungsgerade zweier der festen, so erfüllt der associirte achte diese ganze Gerade.

Drei Flächen zweiten Grades, die durch dieselbe Gerade gehen, haben, sofern sie nicht demselben Büschel angehören, also noch durch eine der Geraden zweimal begegnende cubische Raumcurve gehen, vier Punkte ausserhalb der Geraden gemein.

35. Es liege nun der siebente Punkt $\mathfrak{B}_5$ auf der cubischen Raumcurve $\mathfrak{R}^3$ durch die sechs festen Grundpunkte, dann liegt $\mathfrak{P}$ sowohl auf dem Kegelschnitt $S_0 = (b_1 b_2 b_3 b_4 b_5)$, als auch auf $\Sigma_0 = (\beta_1\beta_2\beta_3\beta_4\beta_5)$, denn dieselben sind die Projectionen der Curve $\mathfrak{R}^3$ aus P und Π. Nun ist aber $\mathfrak{P}\,(b_1\,b_2\,b_3\,b_4\,b_5) = \mathfrak{P}\,(\beta_1\,\beta_2\,\beta_3\,\beta_4\,\beta_5)$. Folglich gilt dies auch für je zwei Punkte p_x (auf S_0) und π_x (auf Σ_0); die beiden Kegelschnitte S_0 und Σ_0 correspondiren einander, oder in den Kegelschnitt Σ_0 hat sich der Punkt β_0 und in S_0 der Punkt b_0 erweitert, und an die Stelle des Punktes $\mathfrak{B}_0 = (Pb_0, \Pi\beta_0)$ tritt die Schnittcurve der Kegel $(P\,S_0)$ und $(\Pi\,\Sigma_0)$ d. i. (abgesehen von $P\Pi$ selbst) die Curve $\mathfrak{R}^3$.

Also, wenn bei sechs festen Grundpunkten eines Netzes zweiter Ordnung der siebente Grundpunkt auf die durch jene sechs bestimmte cubische Raumcurve fällt, so erfüllt der achte associirte Punkt diese ganze Raumcurve, so dass

*) Diese Bedingung bewirkt, dass $p_x\,(b_1\,b_2\,b_3\,b_5) = \pi_x\,(\beta_1\,\beta_2\,\beta_3\,\beta_5)$, wenn p_x auf $b_3\,b_4$, π_x auf $\beta_3\sigma'$ liegt; denn beide anharmonischen Verhältnisse haben den Werth $\omega = (b_1\,b_2\,s\,b_5) = (\beta_1\,\beta_2\,\sigma'\,\beta_5)$. Nun gilt für jeden Werth des anharmonischen Verhältnisses (nicht blos für -1, welcher bei der Harmonicität statt hat) der Satz: Fallen von drei Strahlen (Punkten), die ein gegebenes anharmonisches Verhältniss umfassen, zwei zusammen, dann muss sich mit ihnen auch einer von den beiden übrigen vereinigen. Also kann das anharmonische Verhältniss von vier Strahlen, von denen drei zusammengefallen sind, jeden beliebigen Werth haben, mithin z. B., wenn p_x auf $b_1\,b_2\,b_5$ oder π_x auf $\beta_1\,\beta_2\,\beta_5$ liegt, so kann dem anharmonischen Verhältnisse $p_x\,(b_1\,b_2\,b_3\,b_5)$ oder $\pi_x\,(\beta_1\,\beta_2\,\beta_3\,\beta_5)$ auch der Werth ω beigelegt werden, so dass diese beiden Verhältnisse stets diesen Werth haben und einander gleich sind, wo auch p_x auf $(b_1\,b_2\,b_5,\; b_3\,b_4)$ und π_x auf $(\beta_1\,\beta_2\,\beta_5,\; \beta_3\,\sigma')$ liege.

sämmtliche Flächen des Netzes durch sie gehen. Eine Fläche zweiten Grades, die mit einer cubischen Raumcurve sieben Punkte gemein hat, enthält dieselbe ganz.

Die übrigen 5 Kegelschnitte S (No. 5.) fallen, wie leicht einzusehen ist, in unserm Falle mit S_0, die Σ mit Σ_0 zusammen.

36. Wenn, wie in No. 34, alle Flächen eines Netzes durch eine Gerade und vier Grundpunkte gehen, so zerfällt die Grundcurve jedes Büschels in diese feste Gerade und eine dieselbe zweimal treffende und durch die vier Grundpunkte gehende veränderliche cubische Raumcurve. Das System also der cubischen Raumcurven durch vier Punkte und mit einer gegebenen Secante ist doppelt unendlich (ähnlich dem der Raumcurven vierter Ordnung und erster Species durch acht associirte Punkte). Durch jeden Punkt im Raume geht eine Curve, durch jeden Punkt auf der Secante einfach unendlich viele, welche den Kegel erfüllen, der zu Kanten die Secante und die Verbindungslinien des Punktes mit den vier Grundpunkten hat.

Weil durch die Grundcurve eines Flächenbüschels, die in eine Gerade und eine cubische Raumcurve zerfällt, nur zwei Kegel gehen, die ihre Spitzen in den Begegnungspunkten der beiden Theile der Grundcurve haben, und deren jeder 2 Kegel des allgemeinen Falles repräsentirt, so reducirt sich die Kegelspitzencurve für das Netz, dessen Flächen alle durch eine Gerade gehen, auf die Gerade doppelt gedacht; der fehlende Bestandtheil wird durch die Durchschnittsgeraden der vier Ebenenpaare gebildet, die in dem Netze enthalten sind. Da dies Quadrupel von Durchschnittsgeraden, das einer Verbindungsgeraden begegnet, aus vier Tripeln besteht, so ergeben sich uns die $15.4 = 60$ Tripel, deren zugehörige $\mathfrak{S}^3$ zerfällt. (Man s. No. 33.)

Also eine besondere Abart der Curven $\mathfrak{S}^6$ bilden auf $\mathfrak{A}^4$ die Systeme aus je einer Verbindungsgeraden zweier Knotenpunkte (doppelt gedacht) und den Durchschnittsgeraden der vier Ebenenpaare, in deren einer Ebene jene Verbindungsgerade liegt.

37. In dem Netze, dessen Flächen alle durch eine cubische Raumcurve $\mathfrak{R}^3$ — die Grundcurve des Netzes — gehen, zerfallen ebenfalls alle Büschelgrundcurven in die feste Curve $\mathfrak{R}^3$ und eine bewegliche Secante derselben. In gleicher Weise wie oben erkennen wir, dass die Kegelspitzencurve sich auf die Curve $\mathfrak{R}^3$ (doppelt gedacht) reducirt*).

*) Dass die Kegelspitzencurve dieses Netzes sich von der sechsten auf die dritte Ordnung erniedrigt, muss sich auch aus der Betrachtung der No. 30. ergeben. Da sich in dem vorliegenden Falle die beiden Kegelschnitte S_0 und Σ_0 hinsichtlich der beiden Gruppen G^5 und Γ^5 correspondiren, so correspondirt jeder

Also ist die Curve $\mathfrak{R}^3$ auf $\mathfrak{A}^4$ (doppelt gedacht) auch eine Abart der Curven $\mathfrak{S}^6$.

Die Kegel des Gebüsches, die ihre Spitzen auf dieser Curve haben und speciell die, welche sie in einem der sechs Grundpunkte haben, gehören zum Netze, dessen Grundcurve $\mathfrak{R}^3$ ist. Eine Curve $\mathfrak{S}^6$, die durch drei Punkte dieser Curve $\mathfrak{R}^3$ gelegt ist, also auch besonders durch drei Grundpunkte, reducirt sich stets auf die Curve $\mathfrak{R}^3$ selbst. Für jedes System von Curven $\mathfrak{S}^6$, gelegt durch zwei feste Punkte auf $\mathfrak{R}^3$ — zu dem also diese Curve mit gehört, sowie auch die etwaigen Abarten $\mathfrak{S}^5$, $\mathfrak{S}^4$, $\mathfrak{S}^3$ —, fallen die beiden ferneren festen Punkte mit jenen stets zusammen, so dass alle Curven $\mathfrak{S}^6$, gelegt durch zwei Punkte von $\mathfrak{R}^3$, sich in denselben berühren. —

38. Es ist oben gesagt (No. 34.), dass je zwei Curven $\mathfrak{S}^6$ sich in vier Punkten schneiden. Keine irreducible Curve $\mathfrak{S}^6$ trifft eine oder mehrere der 10 Durchschnittsgeraden der Ebenenpaare; sobald eine Kerncurve dies thut, zerspaltet sie sich auf die in No. 33. angegebene Weise, denn dann liegt mindestens eine Spitze des Ebenenpaar-Kegels auf $\mathfrak{S}^6$, so dass dieser zum zugehörigen Netze gehört und also natürlich alle seine unendlich vielen Spitzen an dessen Kerncurve theilnehmen. Von den vollständigen Curven $\mathfrak{S}^6$ wird nun der übrig bleibende Bestandtheil $\mathfrak{S}^5$, $\mathfrak{S}^4$ oder $\mathfrak{S}^3$ viermal getroffen, sowie auch diese degenerirten Curven einander je viermal treffen, da alle Durchschnittsgeraden von Ebenenpaaren gegen einander windschief sind. Von den zehn Durchschnittsgeraden wird $\mathfrak{R}^3$ im Allgemeinen nicht getroffen (ebenso wenig wie eine vollständige Curve $\mathfrak{S}^6$); diese Curve wird also von allen $\mathfrak{S}^6$, $\mathfrak{S}^5$, $\mathfrak{S}^4$, $\mathfrak{S}^3$ zweimal getroffen (da sie selbst doppelt zu denken ist). Jede Verbindungsgerade von zwei Grundpunkten begegnet ebenso jeder $\mathfrak{S}^6$ doppelt, und nicht minder jeder $\mathfrak{S}^5$, $\mathfrak{S}^4$, $\mathfrak{S}^3$, deren zugehörige 1, 2, 3 Durchschnittsgeraden die Verbindungsgerade nicht treffen.

Trifft die einer Curve $\mathfrak{S}^5$ zugehörige Durchschnittsgerade s die Verbindungsgerade l zweier Knotenpunkte, so haben die beiden Netze, zu deren Kerncurven $\mathfrak{S}^5$ und l resp. gehören, während s zu beiden gehört (No. 36.), ein Büschel gemein, in dem das Ebenenpaar mit der Durchschnittsgeraden s sich befindet; dessen eine Ebene ist (sl), und der fernere Bestandtheil der Grundcurve ausser l setzt sich zusammen aus einer Geraden m in dieser Ebene (durch den dritten Grundpunkt

---

beliebigen, also auch einer durch $\mathfrak{P}$ gehenden Geraden L, weil sie S_0 zweimal trifft, ausser dem doppelten Kegelschnitte Σ_0 eine Gerade Λ, die im Allgemeinen nicht durch $\mathfrak{P}$ geht, da dies Σ_0 schon thut. Also liegt auf L nur ein Paar correspondirender Punkte; demnach befindet sich in jeder Ebene durch $P\Pi$ nur ein Paar correspondirender Axen, folglich neben den beiden Punkten P und Π, die ersichtlich Kegelspitzen sind, nur noch eine.

in derselben) und einem Kegelschnitt in der andern Ebene (durch deren drei Grundpunkte). Durch diese Grundcurve geht ausser dem Ebenenpaare nur ein einziger Kegel, der seine Spitze in (l, m) hat. Dies ist der Begegnungspunkt von $\mathfrak{S}^5$ mit l.

Begegnet von den beiden einer Curve $\mathfrak{S}^4$ zugehörigen Durchschnittsgeraden s und s_1 nur eine der Geraden l, so begegnen sich auch $\mathfrak{S}^4$ und l einmal; treffen aber beide die Gerade l, so hat $\mathfrak{S}^4$ mit l keinen Punkt gemein; in dem Büschel, das den Netzen gemein ist, zu deren beiden Kerncurven s und s_1 gehören, während $\mathfrak{S}^4$ an der einen, l an der andern theilnimmt, befinden sich zwei Ebenenpaare (die mit den Schnittgeraden s und s_1), also kein wirklicher Kegel.

Wenn endlich von den drei einer Curve $\mathfrak{S}^3$ zugehörigen Durchschnittsgeraden eine, zwei oder alle drei die Gerade l treffen, so trifft $\mathfrak{S}^3$ diese Gerade einmal, gar nicht oder zerfällt in die doppelte Gerade l und die vierte Durchschnittsgerade, die derselben begegnet.

39. Wir wollen die sechs ausgezeichneten Kegel des Gebüsches, welche ihre Spitzen in den Grundpunkten $P, \Pi, \mathfrak{B}_1, \mathfrak{B}_2, \mathfrak{B}_3, \mathfrak{B}_4$ haben, mit $\mathfrak{K}_P, \mathfrak{K}_\Pi, \mathfrak{K}_1, \mathfrak{K}_2, \mathfrak{K}_3, \mathfrak{K}_4$ bezeichnen. Verlegen wir den siebenten Grundpunkt $\mathfrak{B}_5$ eines Netzes aus dem Gebüsche auf einen dieser Kegel, z. B. auf $\mathfrak{K}_P$, so geht der Kegelschnitt $S_0 = (b_1\, b_2\, b_3\, b_4\, b_5)$ durch $\mathfrak{P}$, jedoch nicht gleichfalls der Kegelschnitt $\Sigma_0 = (\beta_1\, \beta_2\, \beta_3\, \beta_4\, \beta_5)$, es sei denn, dass $\mathfrak{B}_5$ gerade auf die Curve $\mathfrak{R}^3$, die sich ja auf allen sechs ausgezeichneten Kegeln befindet, zu liegen komme; was wir im Allgemeinen nicht annehmen. Die beiden analogen Kegelschnitte zu S_0 durch $\beta_1\, \beta_2\, \beta_3\, \beta_4$ und $\beta_1\, \beta_2\, \beta_3\, \beta_5$ gehen, da $\mathfrak{P}$ auf S_0 liegt und jederzeit $\mathfrak{P}\,(b_1\, b_2\, b_3\, b_4\, b_5) \barwedge \mathfrak{P}\,(\beta_1\, \beta_2\, \beta_3\, \beta_4\, \beta_5)$ ist, beide auch durch $\mathfrak{P}$, so dass also dieser ihr vierter Schnittpunkt und der correspondirende Punkt β_0 des Kegelschnitts S_0 ist. Der correspondirende Punkt b_0 des Kegelschnitts Σ_0 wird sich dagegen mit dem Punkte $\mathfrak{B}_5$ auf $\mathfrak{K}_P$ ändern; wo er aber auch liege, stets ist, da $\beta_0 = \mathfrak{P}$, der achte associirte Punkt $\mathfrak{B}_0 = (Pb_0, \Pi\mathfrak{P}) = P$.

Liegt also bei sechs festen Grundpunkten eines Netzes der siebente auf einem der sechs ausgezeichneten Kegel zweiten Grades, die durch diese Punkte gehen und ihre Spitzen in je einem von ihnen haben, so ist der associirte achte Punkt stets diese Spitze, fällt also mit einem der festen Grundpunkte zusammen. Kommt freilich der siebente Punkt auf die durch die sechs Punkte geführte cubische Raumcurve $\mathfrak{R}^3$, welche sich auf allen sechs Kegeln befindet, zu liegen, so sind ihm nicht nur die sechs Kegelspitzen oder Grundpunkte, sondern die ganze Curve $\mathfrak{R}^3$ associirt (No. 35).

Jede Kante eines solchen ausgezeichneten Kegels, z. B. K_P, hat mithin — abgesehen von dem Punkte P — die Curve $\mathfrak{R}^3$ zur associirten Curve und zwar sind beide so associirt, dass dem Punkte, in dem $\mathfrak{R}^3$ von der Kante zum zweiten Male getroffen wird, die ganze Curve $\mathfrak{R}^3$, allen übrigen Punkten der Kante der eine Punkt P associirt ist.

40. Umgekehrt: Fällt der siebente Punkt mit einem der sechs festen Grundpunkte zusammen, so sind ihm alle Punkte des ausgezeichneten Kegels, der seine Spitze in diesem Grundpunkte hat, associirt und, was uns eigentlich doch nur noch zu beweisen bleibt, blos diese Punkte (jeder Richtung durch die Spitze entspricht ein bestimmter Punkt des Kegels).

Es falle also $\mathfrak{B}_5$ mit P zusammen, so wird b_5 unbestimmt, β_5 fällt in den Punkt $\mathfrak{P}$; der Kegelschnitt Σ_0 ist also $(\beta_1 \beta_2 \beta_3 \beta_4\, \mathfrak{P})$, hingegen S_0 erweitert sich zu dem ganzen Büschel durch $(b_1\, b_1\, b_3\, b_4)$. Jedenfalls kann der Punkt b_0 nur auf dem analogen Kegelschnitt durch $(b_1\, b_2\, b_3\, b_4)$ zu Σ_0 sich befinden; dieser ist, da $\mathfrak{P}$ auf Σ_0 liegt und $\mathfrak{P}\,(b_1\, b_2\, b_3\, b_4) \equiv \mathfrak{P}\,(\beta_1\, \beta_2\, \beta_3\, \beta_4)$, der Kegelschnitt $(\mathfrak{P}\, b_1\, b_2\, b_3\, b_4)$; nun muss $\mathfrak{B}_0$ stets auf Pb_0 sich befinden, also kann $\mathfrak{B}_0$ nur auf dem Kegel über dem genannten Kegelschnitte und mit der Spitze P zu finden sein, d. i. aber auf dem Kegel $\mathfrak{K}_P$.

41. Wir legen nun den siebenten Punkt $\mathfrak{B}_5$ auf die Ebene dreier der sechs festen Punkte, z. B. auf $(P\,\mathfrak{B}_1\,\mathfrak{B}_2)$, so gehört das Paar der Ebenen $(P\mathfrak{B}_1\mathfrak{B}_2\mathfrak{B}_5)$ und $(\mathfrak{B}_3\mathfrak{B}_4\Pi)$ ersichtlich zum Netze, und der associirte achte Punkt muss auf einer der beiden Ebenen liegen; wir vermuthen auf der zweiten, da jede Grundcurve des Netzes die erste schon viermal, die zweite erst dreimal trifft und doch durch den achten Punkt gehen muss. Es lässt sich dies aber auch auf Grund unserer Construction des achten Punktes erkennen. Da offenbar die drei Punkte $b_1\, b_2\, b_5$ in gerader Linie liegen, so zerfällt der Kegelschnitt S_0 in diese Gerade und in $b_3\, b_4$; der analoge Kegelschnitt durch $\beta_1\, \beta_2\, \beta_3\, \beta_4$ ist $(\beta_1\, \beta_2,\, \beta_3\, \beta_4)$, der durch $\beta_1\, \beta_2\, \beta_3\, \beta_5$ ist ein Kegelschnitt, der mit diesen vier Punkten das anharmonische Verhältniss $(b_1\, b_2\, s\, b_5)$ umfasst, wenn s der Schnittpunkt des Geradenpaares S_0 ist*). Dieser Kegelschnitt und das Paar $(\beta_1\, \beta_2,\, \beta_3\, \beta_4)$ treffen sich ausser in β_1, β_2, β_3 noch in einem vierten Punkte β_0 auf $\beta_3\, \beta_4$; da nun $\mathfrak{B}_0$ stets auf $\Pi\beta_0$ liegt, so leuchtet ein, dass $\mathfrak{B}_0$ auf der Ebene $(\Pi\beta_3\,\beta_4) = (\Pi\,\mathfrak{B}_3\,\mathfrak{B}_4)$ liegt.

Befindet sich also der siebente Grundpunkt auf der Ebene von dreien der sechs festen Grundpunkte, so liegt der associirte achte auf der Ebene der drei andern festen.

Befindet sich folglich dieser siebente Grundpunkt auf

*) Hier gelten ähnliche Betrachtungen, wie in der Anmerk. zu No. 34.

der Schnittgeraden eines der zehn Ebenenpaare des Gebüsches, so liegt auch der achte auf dieser Geraden.

Dass er mit dem siebenten zusammenfällt, also jeder Punkt einer solchen Geraden sich selbst associirt ist, wird sich im nächsten Abschnitte als eine Folgerung des Satzes ergeben, dass das bei jedem Punkte der Fläche $\mathfrak{A}^4$ der Fall ist.

X.

42. Da im Allgemeinen eine Gerade $\mathfrak{L}$ jeden der sechs ausgezeichneten Kegel zweimal trifft, so geht in Folge von No. 40. ihre associirte Curve durch jeden der Grundpunkte doppelt. Eine Gerade jedoch, welche durch einen der Grundpunkte geht, trifft den ausgezeichneten Kegel, der seine Spitze in demselben hat, ausserdem nicht mehr, jeden der fünf anderen aber nur noch einmal. Folglich ist ihr, abgesehen von dem Kegel, welcher dem Grundpunkte associirt ist, eine Curve associirt, die durch diesen Grundpunkt nicht geht, durch jeden der anderen aber einmal.

Ferner müssen zwei associirte Curven, da sie Punkt für Punkt auf einander bezogen sind, von demselben Geschlechte sein (man s. No. 7.), also die associirte Curve einer Geraden wird stets das Geschlecht 0 haben, d. h. wenn ihre Ordnung n ist, so wird die Anzahl der wirklichen und scheinbaren Doppelpunkte $\frac{(n-1)(n-2)}{1.2.}$ sein.

43. Bewegen wir zuerst den Punkt $\mathfrak{B}_5$ auf einer Geraden $\mathfrak{L}$, die durch einen Grundpunkt, z. B. P, geht; so bleibt b_5 fest, während β_5 die Geraden $\mathfrak{P}b_5$ durchläuft; es bleibt ferner der Kegelschnitt S_0 fest und also auch der analoge Kegelschnitt Σ_5 desselben durch $\beta_1\beta_2\beta_3\beta_4$, auf dem sich β_0 befinden muss. Jeder Punkt ξ dieses Kegelschnitts wird einmal β_0, denn wenn x ein beliebiger Punkt auf S_0 ist, so ist doch $x\,(b_1\,b_2\,b_3\,b_4) = \xi\,(\beta_1\,\beta_2\,\beta_3\,\beta_4)$. Wenn nun der dem Strahle xb_5 entsprechende im Büschel ξ die Gerade $\mathfrak{P}b_5$ in β_5 trifft, so ist dies der Punkt β_5, dem ξ als β_0 zugehört. $\mathfrak{B}_0$ muss nun auf $\Pi\beta_0$ liegen. Bewegt sich also $\mathfrak{B}_5$ auf der Geraden $\mathfrak{L} = Pb_5$, so beschreibt $\Pi\mathfrak{B}_0$ den Kegel $(\Pi\Sigma_5)$, der durch $\Pi\,(\mathfrak{B}_1\,\mathfrak{B}_2\,\mathfrak{B}_3\,\mathfrak{B}_4)$ geht und der analoge zu dem durch $P\,(\mathfrak{B}_1\,\mathfrak{B}_2\,\mathfrak{B}_3\,\mathfrak{B}_4)$ und $\mathfrak{L}$ ist. Vertauschen wir Π mit einem der vier übrigen Grundpunkte, z. B. mit $\mathfrak{B}_1$, so ergiebt sich als Ort von $\mathfrak{B}_1\,\mathfrak{B}_0$ der analoge Kegel durch $\mathfrak{B}_1\,(\mathfrak{B}_2\,\mathfrak{B}_3\,\mathfrak{B}_4\,\Pi)$ zu dem Kegel durch $P\,(\mathfrak{B}_2\,\mathfrak{B}_3\,\mathfrak{B}_4\,\Pi)$ und $\mathfrak{L}$; mithin als Ort des Punktes $\mathfrak{B}_0$ die cubische Raumcurve $\mathfrak{L}^3$, die diesen beiden Kegeln ausser $\Pi\mathfrak{B}_1$ gemein ist und die durch $\mathfrak{B}_1\,\mathfrak{B}_2\,\mathfrak{B}_3\,\mathfrak{B}_4\,\Pi$ geht. Bewegt sich $\mathfrak{L}$ auf einem Ke-

gel durch $P(\mathfrak{B}_1\,\mathfrak{B}_2\,\mathfrak{B}_3\,\mathfrak{B}_4)$, so durchstreicht $\mathfrak{L}^3$ den analogen Kegel durch $\Pi\,(\mathfrak{B}_1\,\mathfrak{B}_2\,\mathfrak{B}_3\,\mathfrak{B}_4)$.

44. Diese beiden Kegel sind aber zwei entsprechende Kegel D_x und Δ_x der beiden Büschel, durch welche wir die Fläche $\mathfrak{A}^4$ erzeugt haben (Abschnitt VIII). Es falle also der Punkt $\mathfrak{B}_5$ auf $\mathfrak{L}$ in einen der Punkte, in denen diese Kante von D_x die Schnittcurve $s_x^4 = (D_x, \Delta_x)$ trifft, dann kommt β_5 auf den Kegelschnitt Σ_5, über dem ja Δ_x steht, zu liegen (derselbe wird Σ_0). Wählt man ihn nun zum Punkt $\mathfrak{x}$ und sucht nach der vorigen Nummer auf $b_5\,\mathfrak{P}$ den Punkt, für den er β_0 wird, so wird sich ergeben, dass er für sich selber β_0 wird; also $\Pi\,\mathfrak{B}_0\,\beta_0$ wird identisch mit $\Pi\,\mathfrak{B}_5\,\beta_5$. In ähnlicher Weise wird $P\mathfrak{B}_0\,b_0$ mit $P\mathfrak{B}_5\,b_5$ identisch, d. h. $\mathfrak{B}_0$ mit $\mathfrak{B}_5$. Also, da die Curven s_x^4 die Fläche $\mathfrak{A}^4$ erzeugen, haben wir nun folgende Resultate:

Die Punkte der Fläche $\mathfrak{A}^4$ sind sich selber associirt, mithin auch die Durchschnittsgeraden der zehn Ebenenpaare des Gebüsches durch die sechs festen Grundpunkte. Von den Punkten auf $\mathfrak{R}^3$ und auf den 15 Verbindungsgeraden der Grundpunkte versteht sich dies wegen No. 34 und 35 von selbst.

Jeder Geraden $\mathfrak{L}$, die durch einen der sechs Grundpunkte geht, ist eine cubische Raumcurve $\mathfrak{L}^3$ associirt, auf der die fünf übrigen Grundpunkte liegen und die jener in zwei sich selbst associirten, auf der Fläche $\mathfrak{A}^4$ gelegenen Punkten begegnet. Also auch umgekehrt, da nach No. 29. zwei Socii vertauscht werden können: Jeder der doppelt unendlich vielen cubischen Raumcurven durch fünf der Grundpunkte ist ihre vom sechsten Grundpunkte ausgehende Secante associirt. Dies führt auch zu einer andern Erzeugung der Fläche $\mathfrak{A}^4$.

Jede Fläche zweiten Grades, die durch die sechs Grundpunkte und einen beliebigen Punkt auf $\mathfrak{L}$ geht, geht durch dessen Socius auf $\mathfrak{L}^3$, und geht sie durch einen Punkt auf $\mathfrak{L}^3$, so geht sie durch den Socius auf $\mathfrak{L}$. Geht sie durch zwei Punkte auf $\mathfrak{L}^3$, also auch durch deren Socii auf $\mathfrak{L}$, so enthält sie die ganze $\mathfrak{L}$ — weil drei Punkte derselben — und folglich auch die ganze $\mathfrak{L}^3$, von der sie sieben Punkte enthält. Es zeigt sich hier die gegenseitige Abhängigkeit der beiden Sätze, dass eine Fläche zweiten Grades, die durch drei Punkte einer Geraden oder sieben Punkte einer cubischen Raumcurve gelegt ist, diese Gerade oder diese Curve vollständig enthält.

45. Es ist, wie eben erwähnt, in No. 29. gezeigt worden, dass der associirte achte Punkt mit jedem der sieben, denen er associirt ist, vertauscht werden kann. Ferner ist in No. 39. bewiesen worden, dass der associirte Punkt zu sieben Punkten eines Kegels zweiten Grades, von denen einer in der Spitze liegt, mit diesem zusammenfällt. Daraus erhalten wir also nochmals das Resultat, dass der Socius der

Spitze jedes Kegels unseres Gebüsches oder, was dasselbe ist, jedes Punktes der Kernfläche $\mathfrak{A}^4$ mit diesem Punkte sich vereinigt.

Ferner haben wir in der vorigen Nummer gefunden, dass, wenn sieben Punkte so auf einer cubischen Raumcurve und einer Secante derselben liegen, dass sechs, $\Pi\,\mathfrak{B}_1\mathfrak{B}_2\mathfrak{B}_3\mathfrak{B}_4\mathfrak{B}_0$, auf der Raumcurve und einer, P, auf der Secante liegt, der achte $\mathfrak{B}_5$ auch auf der Secante sich befindet. Vertauschen wir $\mathfrak{B}_0$ und P, so erhalten wir das wichtige Resultat:

Bei sechs gegebenen festen Grundpunkten $P\Pi\mathfrak{B}_1\mathfrak{B}_2\mathfrak{B}_3\mathfrak{B}_4$ befindet sich der einem siebenten $\mathfrak{B}_5$ associirte $\mathfrak{B}_0$ stets auf der von $\mathfrak{B}_5$ an die cubische Raumcurve $\mathfrak{R}^3$ durch die sechs festen Grundpunkte gelegten Secante.

46. Nun ist es leicht, die associirte Curve einer beliebigen Geraden $\mathfrak{L}$ nachzuweisen. Durch die sechs festen Grundpunkte und durch die Gerade $\mathfrak{L}$, d. h. durch drei beliebige Punkte von $\mathfrak{L}$, geht ja eine Fläche des Gebüsches, F^2. Auf ihr muss natürlich die Socia von $\mathfrak{L}$ liegen. Der Socius jedes Punktes von $\mathfrak{L}$ liegt nach der vorigen Nummer auf der von ihm ausgehenden Secante von $\mathfrak{R}^3$, und zwar dort, wo sie F^2 zum zweiten Male trifft. Die Fläche, welche durch diese Secanten erzeugt wird, ist vierter Ordnung, F^4, und hat $\mathfrak{L}$ zur einfachen, $\mathfrak{R}^3$ zur Doppellinie*). Folglich ist die associirte Curve der Geraden $\mathfrak{L}$ der fernere Durchschnitt $\mathfrak{L}^7$ der beiden Flächen F^4 und F^2 ausser $\mathfrak{L}$. Sobald nämlich $\mathfrak{L}$ die Curve $\mathfrak{R}^3$ nicht trifft, haben die Flächen F^2 und F^4 ausser $\mathfrak{L}$ und ihrer Socia keinen Punkt mehr gemein, denn die durch einen solchen Punkt gehende Erzeugende von F^4 hätte ja ausser dem Punkte noch den Punkt, in dem sie $\mathfrak{L}$ trifft, und dessen Socius mit F^2 gemein, läge also auf F^2, mithin auch $\mathfrak{R}^3$, von der diese Erzeugende ja eine Secante ist und die dann mit F^2 acht Punkte gemeinsam hätte; dann begegnete aber $\mathfrak{R}^3$ der auf F^2 befindlichen Geraden $\mathfrak{L}$ doch mindestens einmal. Die sechs Grundpunkte liegen auf $\mathfrak{L}^7$ doppelt, weil sie die Begegnungspunkte der Doppelcurve $\mathfrak{R}^3$ von F^4 mit F^2 sind.

Die associirte Curve einer Geraden $\mathfrak{L}$, welche der Raumcurve $\mathfrak{R}^3$ nicht begegnet, ist eine Curve siebenter Ordnung $\mathfrak{L}^7$, welche die sechs Grundpunkte zu Doppelpunkten hat. Ihr Geschlecht ist Null, also hat sie noch neun scheinbare Doppelpunkte und ist demnach vom 12. Range; also $\mathfrak{L}^7_{12}$.

$\mathfrak{L}$ und $\mathfrak{L}^7_{12}$ begegnen sich in vier Punkten von $\mathfrak{A}^4$, die sich selber associirt sind.

47. α) Trifft die Gerade $\mathfrak{L}$ die Curve $\mathfrak{R}^3$ einmal (in p_1), dann degenerirt F^4 in die Fläche F^2 und den Kegel über $\mathfrak{R}^3$ mit der

---

*) Reye. Geometrie der Lage II, Seite 98.

Spitze p_1. Der Schnitt von F^4 und F^2 wird illusorisch. An der Socia von $\mathfrak{L}$ aber nimmt ersichtlich die ganze Curve $\mathfrak{R}^3$, dem Punkte p_1 associirt, Theil. Die eigentliche Socia von $\mathfrak{L}$ ist also eine Curve vierter Ordnung $\mathfrak{L}^4$ auf F^2, die einmal durch die sechs Grundpunkte geht (da der andere Bestandtheil $\mathfrak{R}^3$ auch durch dieselben geht) und jede Secante dieser Curve auf F^2 einmal trifft, im associirten Punkte des Punktes, in dem dieselbe der $\mathfrak{L}$ begegnet; hingegen dieser Geraden begegnet $\mathfrak{L}^4$ dreimal, in deren drei weiteren Schnittpunkten mit $\mathfrak{A}^4$. Also ist $\mathfrak{L}^4$ zweiter Species und sechsten Ranges, was ja auch aus dem Geschlecht 0 sich ergiebt; daher $\mathfrak{L}^4_6$.

β) Trifft $\mathfrak{L}$ die Curve $\mathfrak{R}^3$ gar zweimal (in p_1 und p_2), so zerfällt $\mathfrak{L}^7$ in die doppelte $\mathfrak{R}^3$ (welche die Doppelpunkte enthält) und die Gerade $\mathfrak{L}$, denn diese ist ja eben die von jedem ihrer Punkte an $\mathfrak{R}^3$ gehende Secante selbst. Die Paare der Socii auf der Secante $\mathfrak{L}$ bilden eine Involution, denn man kann sie als Schnittpunktenpaare von $\mathfrak{L}$ mit den Flächen irgend eines Büschels aus dem Gebüsche auffassen. Asymptotenpunkte sind also die beiden ferneren Schnittpunkte der Geraden $\mathfrak{L}$ mit $\mathfrak{A}^4$, ausser p_1 und p_2. Diese Punkte p_1 und p_2 bilden selbst ein Paar, da ja jedem Punkte von $\mathfrak{R}^3$ jeder andere associirt ist oder jede Fläche (des Gebüsches) durch p_1 von $\mathfrak{R}^3$ sieben Punkte, folglich diese ganze Curve und also auch p_2 enthält. Sämmtliche Secanten von $\mathfrak{R}^3$ treffen demnach $\mathfrak{A}^4$ in vier harmonischen Punkten, von denen die beiden Endpunkte zugeordnet sind*).

48. Die Durchschnittsgerade s jedes der zehn Ebenenpaare des Gebüsches hat sich (Punkt für Punkt) zur associirten Curve (No. 41. und 44.) und ausserdem noch die sechs Verbindungsgeraden von zwei Grundpunkten, die ihr begegnen, und deren jede eben ihrem Begegnungspunkte mit s associirt ist.

Ebenso nimmt jede solche Verbindungsgerade l stets an der associirten Curve einer Geraden $\mathfrak{L}$, welcher sie begegnet, Theil und begegnet dem übrigen Bestandtheile, der eigentlichen Socia von $\mathfrak{L}$, ausser in den beiden Grundpunkten, welche l verbindet und die deshalb auf dieser eigentlichen Socia blos einfache Punkte sind, in einem Punkte, dem Socius des Punktes $(\mathfrak{L}, l)$, sofern dieser zu $\mathfrak{L}$ gerechnet wird.

α) Begegnet also $\mathfrak{L}$ blos einer Verbindungsgeraden, z. B. $P\Pi$, so ist ihre Socia — abgesehen von $P\Pi$ — eine Curve sechster Ordnung $\mathfrak{L}^6$, die durch P, Π einfach, durch $\mathfrak{P}_1 \mathfrak{P}_2 \mathfrak{P}_3 \mathfrak{P}_4$ doppelt geht, ausserdem noch sechs scheinbare Doppelpunkte hat und vom 10. Range ist;

*) Reye. Sopra le curve gobbe ecc.

also $\mathfrak{L}^6_{10}$. $\mathfrak{L}$ und $\mathfrak{L}^6_{10}$ begegnen sich dreimal, weil $\mathfrak{L}$ die Fläche $\mathfrak{A}^4$ schon auf l einmal trifft.

β) Trifft $\mathfrak{L}$ ausser der Verbindungsgeraden $l = P\Pi$ noch $\mathfrak{R}^3$ in einem Punkte ausserhalb l — wenn $\mathfrak{L}$ die Curve $\mathfrak{R}^3$ auf einer Geraden l trifft, so kann es doch nur in einem der beiden Grundpunkte sein und wir kommen wieder auf die in No. 43. behandelten Geraden $\mathfrak{L}$ —, so ist ihr eine Raumcurve dritter Ordnung L^3_4 *) associirt, welche durch die vier Grundpunkte $\mathfrak{B}_1 \mathfrak{B}_2 \mathfrak{B}_3 \mathfrak{B}_4$ einfach geht, durch P und Π aber gar nicht; der Geraden $\mathfrak{L}$ begegnet sie zweimal.

Dass eine Gerade $\mathfrak{L}$ eine Verbindungsgerade l und zugleich die Curve $\mathfrak{R}^3$ noch zweimal trifft, ist nicht möglich, da von jedem Punkte an $\mathfrak{R}^3$ nur eine Secante geht.

γ) Es begegne $\mathfrak{L}$ zwei gegen einander windschiefen Verbindungsgeraden l, z. B. $P\Pi$ und $\mathfrak{B}_1\mathfrak{B}_2$, so ist ihre Socia eine Curve fünfter Ordnung, die durch $P\Pi\,\mathfrak{B}_1\mathfrak{B}_2$ einfach geht, jede der beiden Geraden l noch einmal trifft, $\mathfrak{B}_3\mathfrak{B}_4$ zu Doppelpunkten hat, ausserdem vier scheinbare Doppelpunkte besitzt und vom 8. Range ist, also $\mathfrak{L}^5_8$. $\mathfrak{L}^5_8$ und $\mathfrak{L}$ treffen einander zweimal.

δ) Wenn nun ausserdem $\mathfrak{L}$ noch $\mathfrak{R}^3$ einmal trifft, also auf der durch ($\mathfrak{R}^3$, $P\Pi$, $\mathfrak{B}_1\mathfrak{B}_2$) bestimmten Fläche zweiten Grades liegt (solcher Flächen giebt es 45), so ist ihr ein Kegelschnitt L^2 associirt, der durch $\mathfrak{B}_3\mathfrak{B}_4$ geht und $\mathfrak{L}$ einmal trifft.

ε) Eine Gerade $\mathfrak{L}$ treffe drei gegeneinander windschiefe Verbindungslinien l, z. B. $P\Pi$, $\mathfrak{B}_1\mathfrak{B}_2$, $\mathfrak{B}_3\mathfrak{B}_4$, liege demnach auf dem durch diese drei Geraden erzeugten Hyperboloide (solcher Hyperboloide giebt es 15); so ist ihr eine Curve vierter Ordnung associirt, die durch alle sechs Grundpunkte einfach geht und jeder der drei Geraden ausserdem noch einmal begegnet. Sie befindet sich auf dem genannten Hyperboloide selber und ist eine Curve zweiter Species (vom 6. Range), also L^4_6 **); der Geraden $\mathfrak{L}$, der sie associirt ist, und allen Geraden derselben Schaar begegnet sie einmal.

ζ) Es treffe $\mathfrak{L}$ zwei sich schneidende Geraden l, z. B. $\mathfrak{B}_1\mathfrak{B}_2$ und $\mathfrak{B}_1\mathfrak{B}_3$ (ohne just durch $\mathfrak{B}_1$ zu gehen), so trifft sie auch $\mathfrak{B}_2\mathfrak{B}_3$, und da sie überhaupt in der Ebene ($\mathfrak{B}_1\,\mathfrak{B}_2\,\mathfrak{B}_3$) liegt, so muss sich ihre Socia in der Ebene ($P\Pi\mathfrak{B}_4$) befinden (No. 41.). Sie ist eine (ebene) Curve vierter Ordnung mit drei Doppelpunkten $\mathfrak{B}_4\,P\Pi$ (Geschlecht 0), welche $\mathfrak{L}$ einmal trifft.

η) Geht $\mathfrak{L}$ durch einen Grundpunkt P und trifft eine Verbin-

*) Zum Unterschiede von den Curven $\mathfrak{L}_4^3$ derselben Art, die einer durch einen Grundpunkt gehenden Geraden associirt sind (No. 43.).

**) Zum Unterschiede von den Curven $\mathfrak{L}^4_6$ derselben Art, welche einer Geraden $\mathfrak{L}$ associirt sind, die der Raumcurve $\mathfrak{R}^3$ einmal begegnen (No. 47^a.).

dungsgerade $\mathfrak{B}_1\mathfrak{B}_2$, so ist ihr ein Kegelschnitt $\mathfrak{L}^2$ in der Ebene $(\Pi\,\mathfrak{B}_3\mathfrak{B}_4)$ associirt, welcher der Geraden $\mathfrak{L}$ einmal begegnet und durch $\Pi\,\mathfrak{B}_3\mathfrak{B}_4$ geht.

ϑ) Endlich einer Geraden $\mathfrak{L}$, die durch einen Grundpunkt P geht und zwei gegen einander windschiefe Geraden l, z. B. $\mathfrak{B}_1\mathfrak{B}_2$ und $\mathfrak{B}_3\mathfrak{B}_4$, trifft, (solcher Geraden giebt es 90), ist wiederum eine Gerade $\mathfrak{L}^1$ associirt, die durch Π geht, und zwar die Schnittgerade der Ebenen $(\Pi\,\mathfrak{B}_3\mathfrak{B}_4)$ und $(\Pi\,\mathfrak{B}_1\mathfrak{B}_2)$ oder die Gerade durch Π, welche $\mathfrak{B}_1\mathfrak{B}_2$ und $\mathfrak{B}_3\mathfrak{B}_4$ trifft; in der That, alle Flächen durch die sechs Grundpunkte, welche $\mathfrak{L}$ enthalten, enthalten auch $\mathfrak{L}^1$.

XI.

49. Die Ordnung der Fläche, welche einer beliebigen Ebene $\mathfrak{T}$ associirt ist, ist nun sehr leicht zu finden. Diese Fläche wird ersichtlich von einer beliebigen Geraden in so vielen Punkten getroffen, als deren Socia von der Ebene $\mathfrak{T}$. Folglich ist sie ebenfalls siebenter Ordnung. Die Curve $\mathfrak{R}^3$ liegt dreifach auf dieser Fläche $\mathfrak{T}^7$, weil sie ihren drei Begegnungspunkten mit $\mathfrak{T}$ associirt ist; ebenso befinden sich die 15 Verbindungsgeraden l je zweier Grundpunkte auf $\mathfrak{T}^7$ als einfache Geraden; der Schnitt der Fläche $\mathfrak{T}^7$ mit der Ebene $\mathfrak{T}$ besteht aus der Curve vierter Ordnung $\mathfrak{C}^4 = (\mathfrak{T}, \mathfrak{A}^4)$, deren Punkte sich selber associirt sind, und den drei Secanten von $\mathfrak{R}^3$, welche in $\mathfrak{T}$ liegen und die also die Punkte von $\mathfrak{T}$ enthalten, welche ihre Socii auch auf $\mathfrak{T}$ haben, ohne mit ihnen zusammenzufallen. Die dreifache Curve $\mathfrak{R}^3$, die 15 Geraden l und die Curve $\mathfrak{C}^4$ bilden den Durchschnitt der Flächen $\mathfrak{T}^7$ und $\mathfrak{A}^4$. Jede durch einen Grundpunkt gehende Gerade hat zur Socia eine cubische Raumcurve, trifft also $\mathfrak{T}^7$ ausser im Grundpunkte noch dreimal, folglich sind die sechs Grundpunkte vierfache Punkte auf $\mathfrak{T}^7$. Jeder von ihnen ist allen Punkten eines Kegelschnitts auf $\mathfrak{T}$ associirt.

50. Auf $\mathfrak{T}^7$ liegt ein doppelt unendliches System von Curven $\mathfrak{L}^7_{12}$, durch je zwei Punkte ist eine bestimmt und je zwei haben ausser den Grundpunkten noch einen Punkt gemein. Von diesen Curven sind zwei und zwei derartig vereinigt, dass sie auf derselben Fläche zweiten Grades liegen und deren vollen Schnitt mit $\mathfrak{T}^7$ bilden.

Die Fläche F^2 nämlich des Gebüsches, welche durch eine Gerade $\mathfrak{L}$ auf $\mathfrak{T}$ gelegt ist und also deren Socia $\mathfrak{L}^7_{12}$ auf $\mathfrak{T}^7$ enthält, schneidet $\mathfrak{T}$ noch in einer zweiten Geraden und enthält folglich auch deren associirte Curve.

Die Fläche vierter Ordnung F^4, auf der die von den Punkten auf $\mathfrak{L}$ ausgehenden Secanten von $\mathfrak{R}^3$ sich befinden, durchschneidet $\mathfrak{T}^7$ in der sechsfach zu rechnenden $\mathfrak{R}^3$, deren drei Secanten auf $\mathfrak{T}$ und der Socia von $\mathfrak{L}$.

Auf $\mathfrak{T}^7$ befinden sich drei Systeme von einfach unendlich vielen Curven $\mathfrak{L}_6^4$ (No. 47^a.); je zwei desselben Systems treffen sich, ausser in den Grundpunkten, nicht mehr, wohl aber je zwei verschiedener Systeme. Aehnliches gilt auch für die 15 Systeme von Curven $\mathfrak{L}_{10}^6$ (No. 48^a.). Je einem jener und einem dieser Systeme ist, (abgesehen von der Raumcurve $\mathfrak{R}^3$ oder der zugehörigen Verbindungsgeraden) eine Raumcurve L_4^3 (No. 48$^\beta$.) gemein. Von allen diesen Curven wird jede $\mathfrak{L}_{12}^7$ einmal (ausser in den Grundpunkten) getroffen.

Von einer Ebene durch drei Grundpunkte wird $\mathfrak{T}^7$, ausser in deren drei Verbindungsgeraden, noch in einer Curve vierter Ordnung, die in den drei Grundpunkten Doppelpunkte hat, durchschnitten; es ist dies die associirte Curve der Schnittgeraden der Ebene $\mathfrak{T}$ mit der Ebene der drei anderen Grundpunkte (No. 48$^\zeta$.).

51. Es gehe die Ebene $\mathfrak{T}$ durch einen der Grundpunkte, z. B. durch P, so ist ihr, abgesehen von dem Kegel $\mathfrak{K}_P$, eine Fläche fünfter Ordnung $\mathfrak{T}^5$ associirt, welche den Punkt P zum doppelten Punkte, die fünf übrigen zu dreifachen hat, auf welcher $\mathfrak{R}^3$ nur noch zweifach liegt und sich blos die zehn Verbindungsgeraden der dreifachen Grundpunkte befinden; von der Ebene $\mathfrak{T}$ wird sie, ausser in $\mathfrak{C}^4$ nur noch in der Secante von $\mathfrak{R}^3$ geschnitten, welche nicht durch P geht.

Die doppelt unendlich vielen Curven $\mathfrak{L}_{12}^7$ sind geblieben; Systeme von Raumcurven $\mathfrak{L}_6^4$ giebt es nur noch zwei; das dritte — dessen associirte Geraden durch P gehen — hat sich verwandelt in ein System von cubischen Raumcurven ($\mathfrak{L}^3$ oder) $\mathfrak{L}_4^3$ (No. 44.). Jede dieser Curven wird von einer gewissen Kante des Kegels $\mathfrak{K}_P$ einmal getroffen und durch dieselbe zur Curve $\mathfrak{L}_6^4$ vervollständigt. Die 15 Systeme von Curven $\mathfrak{L}_{10}^6$ haben sich auf 10 vermindert. Es giebt noch 20 Curven L_4^3 auf $\mathfrak{T}^5$ und 10 Kegelschnitte $\mathfrak{L}^2$ (No. 48$^\eta$.). Diese Kegelschnitte liegen in den 10 Ebenen durch je drei Grundpunkte, zu denen P nicht gehört.

Mit einer Curve $\mathfrak{L}_{12}^7$ liegt stets auf derselben Fläche zweiten Grades eine Curve $\mathfrak{L}_4^3$, denn wenn eine Fläche des Gebüsches $\mathfrak{T}$ in zwei Geraden schneidet, so muss doch die eine durch P gehen.

52. Geht die Ebene $\mathfrak{T}$ durch zwei Grundpunkte, z. B. P und Π, so zerfällt ihre Socia in die beiden Kegel $\mathfrak{K}_P$ und $\mathfrak{K}_\Pi$ und eine Fläche dritter Ordnung $\mathfrak{T}^3$, auf welcher P,Π und $\mathfrak{R}^3$ einfach sind, hingegen $\mathfrak{P}_1\,\mathfrak{P}_2\,\mathfrak{P}_3\,\mathfrak{P}_4$ Doppelpunkte. Sie enthält nur die sechs Verbindungsgeraden dieser vier Punkte und wird von der Ebene $\mathfrak{T}$ in der Curve dritter Ordnung $\mathfrak{C}^3$ geschnitten, welche diese mit $\mathfrak{A}^4$ ausser $P\Pi$ gemein hat.

Jede Gerade $\mathfrak{L}$ in der Ebene $\mathfrak{T}$ begegnet der Geraden $P\Pi$; folglich enthält die Fläche ein doppelt unendliches System von Curven $\mathfrak{L}^6_{10}$, deren jede diesmal mit keiner andern vereinigt ist, sondern den vollen Durchschnitt von $\mathfrak{T}^3$ mit der Fläche des Gebüsches bildet, die durch $\mathfrak{L}$ gelegt ist; die zweite Gerade, in der diese Fläche die Ebene $\mathfrak{T}$ schneidet, ist ja stets $P\Pi$, die sich selber associirt ist und auf den beiden Kegeln liegt.

Auf $\mathfrak{T}^3$ liegen ferner drei Systeme von cubischen Curven und zwar zwei von Curven $\mathfrak{L}^3_4$ (No. 44.) und eins von Curven L^3_4 (No. 48$^\beta$.); jedes enthält sechs Kegelschnitte $\mathfrak{L}^2$ resp. L^2 (No. 48$^\gamma$. und 48$^\delta$.) Die Curven L^3_4 liegen stets mit $\mathfrak{R}^3$, die Curven $\mathfrak{L}^3_4$ aber je zwei und zwei auf derselben Fläche zweiter Ordnung und die beiden cubischen Raumcurven verhalten sich gegen deren beide Schaaren entgegengesetzt*).

Endlich giebt es auch drei Curven L^4_6 auf $\mathfrak{T}^3$ (No. 47$^\epsilon$.).

53. Es ist aus der Theorie der cubischen Flächen mit vier Knotenpunkten bekannt**), dass eine solche Fläche noch drei Gerade enthält, die in einer Ebene liegen und von denen jede zwei Gegenkanten des Tetraeders der vier Knotenpunkte $\mathfrak{B}_1\,\mathfrak{B}_2\,\mathfrak{B}_3\,\mathfrak{B}_4$ trifft. Zwei solche Gegenkanten z. B. sind $\mathfrak{B}_1\mathfrak{B}_2$ und $\mathfrak{B}_3\mathfrak{B}_4$. Legt man durch deren Spuren auf $\mathfrak{T}$, durch den dritten Schnittpunkt Q der Curve $\mathfrak{R}^3$ mit der Ebene $\mathfrak{T}$ und durch die beiden Punkte P und Π einen Kegelschnitt $q_1{}^2$, so liegt dieser auf einer Fläche des Gebüsches, auf der auch die Geraden $\mathfrak{B}_1\mathfrak{B}_2$, $\mathfrak{B}_3\mathfrak{B}_4$ und die Curve $\mathfrak{R}^3$ sich befinden, welche also die Fläche $\mathfrak{T}^3$ noch in einer Geraden q_1 schneidet, die dem Kegelschnitte $q_1{}^2$ associirt ist und mit $\mathfrak{B}_1\mathfrak{B}_2$, $\mathfrak{B}_3\mathfrak{B}_4$ eine cubische Curve zusammensetzen muss, also beiden Geraden begegnet***). Diese beiden Geraden und die Curve $\mathfrak{R}^3$ setzen mit q_1 die volle Socia (6. Ordnung) von $q_1{}^2$ zusammen; eine Socia dieser Ordnung haben alle Kegelschnitte, welche auf Flächen des Gebüsches sich befinden und in der Ebene $\mathfrak{T}$ liegen, folglich durch P und Π gehen. Die beiden anderen Paare von Gegenkanten des Tetraeders geben zwei ähnliche Kegelschnitte $q_2{}^2$ und $q_3{}^2$ und als deren associirte Curven die beiden Geraden q_2 und q_3, welche $\mathfrak{B}_1\,\mathfrak{B}_3$, $\mathfrak{B}_2\,\mathfrak{B}_4$ resp. $\mathfrak{B}_1\mathfrak{B}_4$, $\mathfrak{B}_2\mathfrak{B}_3$ begegnen. q_1 trifft z. B. q_2 im Socius des vierten Punktes, den die beiden Kegelschnitte $q_1{}^2$ und $q_2{}^2$ ausser P, Π, Q gemein haben. Also liegen die drei Geraden $q_1\,q_2\,q_3$ in einer Ebene. Jede von ihnen trifft $\mathfrak{R}^3$ einmal und wird von allen Curven $\mathfrak{L}^6_{10}$ und L^4_6 doppelt getroffen, weil die Geraden, denen diese associirt sind, den associirten Kegelschnitt q^2 zweimal treffen.

*) Des Verf. Buch über die Flächen dritter Ordnung No. 58.

**) Ebenda No. 123.

***) Ebenda No. 58.

Jede durch eine Kante des Knotenpunktstetraeders, z. B. $\mathfrak{B}_1\mathfrak{B}_2$, gehende Ebene schneidet $\mathfrak{T}^3$ noch in einem Kegelschnitte K^2, der durch $\mathfrak{B}_1$, $\mathfrak{B}_2$ geht und sich auf einer Fläche des Gebüsches befindet, folglich ist ihm in der Ebene $\mathfrak{T}$ der Durchschnittskegelschnitt dieser Fläche associirt, der durch P, Π, den Schnittpunkt der Ebene $\mathfrak{T}$ mit der Gegenkante $\mathfrak{B}_3\mathfrak{B}_4$ und durch Q geht, denn jener Kegelschnitt K^2 trifft ersichtlich die Gerade $\mathfrak{B}_3\mathfrak{B}_4$ und die Curve $\mathfrak{R}^3$, so dass diese auf der genannten Fläche zweiten Grades liegen und die Socia sechster Ordnung von K^2 vervollständigen. Die Kegelschnitte auf $\mathfrak{T}^3$ in den Ebenen durch eine Kante des Knotenpunktstetraeders sind also den Kegelschnitten eines Büschels in $\mathfrak{T}$ associirt.

Einem Kegelschnitte C^2 auf $\mathfrak{T}^3$, dessen Ebene durch eine der drei Geraden q geht, z. B. durch q_1, und der also jeder der vier Kanten des Tetraeders, welche q_1 nicht trifft, einmal, der Curve $\mathfrak{R}^3$ zweimal begegnet, ist in der Ebene $\mathfrak{T}$ eine Curve vierter Ordnung associirt (ausserdem noch die Curve $\mathfrak{R}^3$ doppelt und die vier genannten Kanten); denn die Socia einer beliebigen Geraden $\mathfrak{L}$ in $\mathfrak{T}$ ist eine Curve $\mathfrak{L}^6_{10}$, welche q_1 zweimal, also C^2 viermal begegnet. Diese Curve vierter Ordnung geht zweimal durch P, Π (auf der vollständigen Socia von C^2, den ja jeder der sechs ausgezeichneten Kegel viermal trifft, sind diese Punkte vierfache) und durch Q, ausserdem noch einmal durch die Spuren der vier von q_1 nicht getroffenen Kanten, folglich bilden auch diese Curven ein Büschel, denn sie haben $3.4 + 4 = 16$ Punkte gemein.

54. Geht endlich $\mathfrak{T}$ gar durch drei Grundpunkte, so reducirt sich ihre associirte Fläche, abgesehen von den drei Kegeln, auf denen diese drei Punkte vierfach, die drei anderen Grundpunkte und die Curve $\mathfrak{R}^3$ dreifach liegen, auf die Ebene der drei anderen Grundpunkte (No. 41.). In Betreff einer beliebigen Geraden einer solchen Ebene und einer Geraden durch einen der drei Grundpunkte sehe man No. 48^{ξ} und 48^{η}.

XII.

55. Jede Gerade $\mathfrak{L}$ durch einen der sechs Grundpunkte hat zur Socia eine cubische Raumcurve $\mathfrak{L}^3$ durch die fünf anderen Grundpunkte, welche jener in ihren beiden ferneren Schnittpunkten $\mathfrak{a}_1$ und $\mathfrak{a}_2$ mit $\mathfrak{A}^4$ begegnet und mit ihr die Grundcurve eines Büschels des Gebüsches zusammensetzt (No. 44.), in dem sich nur die beiden Kegel K_1 und K_2 mit den Spitzen $\mathfrak{a}_1$ und $\mathfrak{a}_2$ befinden. Demnach fallen die beiden ferneren festen Punkte, welche allen durch $\mathfrak{a}_1$ und $\mathfrak{a}_2$ gehenden Curven $\mathfrak{S}^6$ auf $\mathfrak{A}^4$ noch gemein sind, resp. mit $\mathfrak{a}_1$ und $\mathfrak{a}_2$ zusammen (No. 33.). Alle Curven $\mathfrak{S}^6$ also — die degenerirten $\mathfrak{S}^5$; $\mathfrak{S}^4$, $\mathfrak{S}^3$ mit eingerechnet — auf $\mathfrak{A}^4$, welche durch zwei mit einem Grundpunkte in gerader Linie liegende Punkte $\mathfrak{a}_1$ und $\mathfrak{a}_2$ gelegt sind, berühren

sich in denselben. (Man vergl. das ähnliche Resultat, wenn die beiden Punkte $\mathfrak{a}_1$ und $\mathfrak{a}_2$ auf $\mathfrak{R}^3$ sich befinden, No. 37.)

56. Ein beliebiger Punkt $\mathfrak{a}_1$ auf $\mathfrak{A}^4$ — die Spitze des Kegels K_1 des Gebüsches — bestimmt mit den sechs Grundpunkten ein Netz $N(\mathfrak{a}_1)$ des Gebüsches. Sämmtliche doppelt unendlich vielen Grundcurven dieses Netzes gehen durch $\mathfrak{a}_1$ und seinen Socius, der mit $\mathfrak{a}_1$ zusammenfällt (No. 44) und zwar in der Richtung der Secante a_1 von $\mathfrak{a}_1$ an $\mathfrak{R}^3$ neben $\mathfrak{a}_1$ zu liegen kommt. Einfach unendlich viele von den Grundcurven haben in $\mathfrak{a}_1$ einen Doppelpunkt, nämlich diejenigen, in deren Büschel sich der Kegel K_1 befindet. Daraus folgt, dass die Kegelspitzencurve $\mathfrak{S}_1{}^6$ des Netzes $N(\mathfrak{a}_1)$ einen Doppelpunkt in $\mathfrak{a}_1$ hat, während sonst jeder Punkt einer Kegelspitzencurve nur für ein Büschel ihres Netzes Doppelpunkt ist (unsere Kegelspitzencurve geht ja auch durch einen Grundpunkt ihres Netzes). Die übrigen Grundcurven des Netzes berühren die Secante a_1 an $\mathfrak{R}^3$ in $\mathfrak{a}_1$, denn der Socius von $\mathfrak{a}_1$, durch den sie ja alle gehen müssen, liegt eben auf a_1 neben $\mathfrak{a}_1$, oder: Das Netz $N(\mathfrak{a}_1)$ hat mit dem Netze $N(\mathfrak{R}^3)$ durch $\mathfrak{R}^3$ ein Büschel $B_1(\mathfrak{R}_3)$ gemein, jedes Büschel jenes Netzes mit diesem Netze eine Fläche dieses Büschels. Nun werden alle Flächen eines Büschels $B(\mathfrak{a}_1)$, dessen Grundcurve $\mathfrak{R}^4(\mathfrak{a}_1)$ zweimal durch $\mathfrak{a}_1$ geht, in $\mathfrak{a}_1$ von derselben Ebene $\mathfrak{S}_1$ berührt — welche den Kegel K_1 in den Tangenten t_1' und t_1'' der Grundcurve in $\mathfrak{a}_1$ an ihre beiden Aeste durchschneidet —; diese Ebenen $\mathfrak{S}_1$ gehen alle durch a_1, da zu jedem der Büschel eine Fläche aus $B_1(\mathfrak{R}^3)$ gehört, auf der a_1 die eine durch $\mathfrak{a}_1$ gehende Gerade ist. Ferner hat jedes andere Büschel aus $N(\mathfrak{a}_1)$, dessen Grundcurve nur einmal durch $\mathfrak{a}_1$ geht, mit jedem der Büschel $B(\mathfrak{a}_1)$ eine Fläche gemein, so dass sich auch die Berührungsebenen in $\mathfrak{a}_1$ an alle Flächen eines solchen Büschels um a_1 drehen, folglich a_1 die Tangente in $\mathfrak{a}_1$ an die Grundcurve ist*).

57. Von den Ebenen $\mathfrak{S}_1$ (durch a_1) tangiren zwei den Kegel K_1; in einer solchen Ebene $\mathfrak{S}_1$ fallen also die beiden Geraden t_1' und t_1'' zusammen, die Grundcurve des Büschels, dessen Flächen alle von $\mathfrak{S}_1$ berührt werden, bekommt in $\mathfrak{a}_1$ eine Spitze.

Jeder Punkt auf $\mathfrak{A}^4$ ist für unendlich viele Grundcurven des Gebüsches Doppelpunkt, für zwei ist er Spitze. In den Büscheln dieser letzteren Grundcurven repräsentirt K_1 drei Kegel.

Die Secante a_1 liegt nicht auf dem Kegel K_1, so lange der Punkt $\mathfrak{a}_1$ ausserhalb der Curve $\mathfrak{R}^3$ liegt. Kommt $\mathfrak{a}_1$ auf diese Curve zu liegen,

*) Man sehe hierzu des Verfassers Abhandlung: Untersuchungen über das Flächennetz 2. Ordnung, Journal von Crelle-Borchardt, Bd. 70, Seite 212.

so verliert einerseits a_1 ihre Bedeutung, indem sie sich zum Kegel $K_1 = (\mathfrak{a}_1, \mathfrak{R}^3)$ erweitert. Andererseits, da $N(\mathfrak{a}_1)$ in diesem Falle mit dem Netze $N(\mathfrak{R}^3)$ identisch wird, in welchem alle Büschelgrundcurven aus $\mathfrak{R}^3$ und einer Secante m dieser Curve bestehen, also 2 Doppelpunkte haben, so ist kein Punkt $\mathfrak{a}_1$ auf $\mathfrak{R}^3$ Rückkehrpunkt für eine Grundcurve des Gebüsches; einmal freilich, wo die Secante m zur Tangente in $\mathfrak{a}_1$ wird, fallen die beiden Doppelpunkte der Grundcurve bei $\mathfrak{a}_1$ neben einander.

Die Curve $\mathfrak{S}_1^6$ geht offenbar auch durch die beiden Punkte p' und p'', in denen a_1 die Curve $\mathfrak{R}^3$ trifft, denn das sind die Spitzen der beiden Kegel im Büschel B_1 $(\mathfrak{R}^3)$. Jede der Ebenen $\mathfrak{S}_1$ (durch a_1) trifft also die Curve $\mathfrak{S}_1^6$ ausser in dem Doppelpunkte $\mathfrak{a}_1$ und den beiden Punkten p' und p'' noch in zwei Punkten, den Spitzen der beiden anderen Kegel (ausser dem doppelten Kegel K_1) in dem Büschel, dessen Flächen von $\mathfrak{S}_1$ alle berührt werden. Sechs Ebenen $\mathfrak{S}_1$ berühren $\mathfrak{S}_1^6$; der Berührungspunkt, in welchen die Spitze eines zweiten doppelten Kegels fällt, liegt mit $\mathfrak{a}_1$ und je einem Grundpunkte in gerader Linie (No. 55). In den beiden Ebenen $\mathfrak{S}_1$, welche durch die Tangenten an $\mathfrak{S}_1^6$ in $\mathfrak{a}_1$ gehen, ist die eine von den weiteren Spitzen noch in den Punkt $\mathfrak{a}_1$ gefallen, die andere sei der Punkt $\mathfrak{a}_1'$; sie gehören den Büscheln $B(\mathfrak{a}_1)$ zu, deren Grundcurven in $\mathfrak{a}_1$ eine Spitze besitzen, und sind die Berührungsebenen von a_1 an K_1.

Alle Curven $\mathfrak{S}^6$, die durch $\mathfrak{a}_1$ und einen zweiten Punkt auf $\mathfrak{S}_1^6$ gehen — zu ihnen gehört $\mathfrak{S}_1^6$ selbst — haben noch einen dritten Punkt auf $\mathfrak{S}_1^6$ gemein und berühren sich in $\mathfrak{a}_1$; fällt der zweite Punkt in einen der beiden Punkte $\mathfrak{a}_1'$, so vereinigt sich der dritte Punkt auch noch mit $\mathfrak{a}_1$, so dass sich alle Curven $\mathfrak{S}^6$ durch $\mathfrak{a}_1$ und $\mathfrak{a}_1'$ in $\mathfrak{a}_1$ osculiren*).

Bromberg, den 2. Januar 1869.

---

*) Zum Schlusse bemerke ich noch, dass ich leider nicht im Stande gewesen bin, mir genauere Kenntniss von den Abhandlungen über das Problem der Homographie zu verschaffen, welche die Herren Chasles (Comptes rendus, 31. December 1855), de Jonquières (Nouvelles Annales de mathématiques, t. XVII) und Cremona (ebenda, t. XX) verfasst haben. Nach dem, was ich über dieselben durch Mittheilungen erfahren habe, glaube ich durch meine Arbeit eine vollständige synthetische Auflösung des Problems (gegenüber der analytischen des Herrn Cremona) geliefert und demselben als etwas Neues die äusserst wichtige Anwendung auf die Flächen zweiten Grades hinzugefügt zu haben.

Zur Theorie des Krümmungsmaasses.

Von E. Beltrami in Bologna.

Ich habe schon mehrmals Gelegenheit gehabt, auf gewisse Ausdrücke aufmerksam zu machen, die mir nicht unwesentliche Dienste in der allgemeinen analytischen Theorie der Flächen zu gewähren scheinen. Ich meine damit jene Ausdrücke, die ich, auf sehr entscheidende Analogien gestützt, als Differentialparameter erster und zweiter Ordnung einer gegebenen Function der Gaussischen krummlinigen Coordinaten bezeichnet habe, und deren nützliche Anwendung von mir in vielfacher Richtung angedeutet ist.

Unter Voraussetzung der gewöhnlichen Darstellung

$$ds^2 = E\,du^2 + 2F\,du\,dv + G\,dv^2$$

für das Linienelement der Fläche, sind die in Rede stehenden Ausdrücke folgende, wo $\varphi(u, v)$, $\psi(u, v)$ zwei beliebige Functionen der unabhängigen Variabeln u, v bezeichnen*):

$$\Delta_1 \varphi = \frac{E\left(\frac{\partial \varphi}{\partial v}\right)^2 - 2F\frac{\partial \varphi}{\partial v}\frac{\partial \varphi}{\partial u} + G\left(\frac{\partial \varphi}{\partial u}\right)^2}{EG - F^2},$$

$$\Delta_1 \varphi\psi = \frac{E\frac{\partial \varphi}{\partial v}\frac{\partial \psi}{\partial v} - F\left(\frac{\partial \varphi}{\partial v}\frac{\partial \psi}{\partial u} + \frac{\partial \varphi}{\partial u}\frac{\partial \psi}{\partial v}\right) + G\frac{\partial \varphi}{\partial u}\frac{\partial \psi}{\partial u}}{EG - F^2},$$

$$\Delta_2 \varphi = \frac{1}{\sqrt{EG - F^2}}\left\{\frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{G\frac{\partial \varphi}{\partial u} - F\frac{\partial \varphi}{\partial v}}{\sqrt{EG - F^2}}\right) + \frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{E\frac{\partial \varphi}{\partial v} - F\frac{\partial \varphi}{\partial u}}{\sqrt{EG - F^2}}\right)\right\}.$$

Hier ist $\Delta_1 \varphi$ der Differentialparameter erster Ordnung, und $\Delta_2 \varphi$ der zweiter Ordnung der Function $\varphi(u, v)$; $\Delta_1 \varphi\psi$ bezeichne ich als Zwischenparameter zweier Functionen $\varphi(u, v)$ und $\psi(u, v)$.

Diese drei Parameter besitzen die charakteristische Eigenschaft, dass ihre Bildung mittelst der Differentialquotienten der bezüglichen Functionen

*) Beltrami. Ricerche di analisi applicata alla geometria, Art. IV, XIV, XV (Giornale de Battaglini, Bd. 2 und 3). Ich habe hier die kleinen Veränderungen der Bezeichnung beibehalten, die ich im ersten Artikel des Aufsatzes Sulle variabili complesse in una superficie (Annali di Matem. Serie II, Bd. 1) eingeführt habe.

und der Coefficienten des Linienelementes, durch Einsetzung beliebiger neuer Variabeln u', v' statt der vorigen u, v, gar keine Veränderung erleidet; man braucht nämlich nur an die Stelle von

$$E,\quad F,\quad G,\quad \frac{\partial}{\partial u},\quad \frac{\partial}{\partial v},$$

respective

$$E',\quad F',\quad G',\quad \frac{\partial}{\partial u'},\quad \frac{\partial}{\partial v'},$$

in den obigen Ausdrücken zu setzen, um sie nach den neuen Variablen u', v', die dem Linienelemente die Form

$$ds^2 = E'\,du'^2 + 2F'\,du'\,dv' + G'\,dv'^2$$

ertheilen, zu transformiren.

Ich erlaube mir hier mit wenigen Worten einige der vorzüglichsten speciellen Eigenschaften dieser Ausdrücke auszusprechen.

Der Gleichung $\varphi(u, v) =$ const. entspricht auf der Fläche ein bestimmtes System von Curven, von denen (in der Regel) wenigstens Eine durch einen beliebigen Punkt (u, v) geht. Wenn δn dasjenige Linienelement der Fläche bezeichnet, welches von dem Punkte (u, v) ausgeht und zu der durch (u, v) gehenden Curve des Systems $\varphi =$ const. normal steht, so hat man*), wie für den Lamé'schen ersten Parameter,

$$\Delta_1 \varphi = \frac{\delta \varphi^2}{\delta n^2},$$

wo $\delta\varphi$ die Veränderung bedeutet, welche der Werth der Function bekommt am Endpunkte von δn.

Ferner ist, mit Beibehaltung dieser Bedeutung von δn,**)

$$\Delta_1 \varphi\psi = \sqrt{\Delta_1 \varphi}\,.\,\frac{\delta\psi}{\delta n},$$

vorausgesetzt, dass man unter $\sqrt{\Delta_1 \varphi}$ den positiven Werth und unter δn die Richtung des wachsenden φ versteht. Die Gleichung

$$\Delta_1 \varphi\psi = 0$$

bedingt mithin***) die Rechtwinkligkeit der beiden Curven-Systeme $\varphi =$ const. und $\psi =$ const.

Jeder Lösung $\varphi(u, v)$ der partiellen Differentialgleichung erster Ordnung

$$\Delta_1 \varphi = f(\varphi)$$

oder (was auf dasselbe hinauskommt) jeder Lösung der Gleichung

$$\Delta_1 \varphi = 1,$$

entspricht ein Curvensystem $\varphi =$ const. von eigenthümlicher Art,

---

*) Cit. Ricerche etc. Art. IV.

**) Beltrami. Teorica generale dei parametri differenziali § 3 (Memorie dell'Accademia di Bologna, serie II, Bd. 8, uñt. d. Pr.).

***) Cit. Ricerche etc. Art. XIV.

welches dadurch charakterisirt wird, dass das entsprechende orthogonale System aus kürzesten Linien besteht*). Zufolge eines bekannten Theorems von Gauss schneiden zwei beliebige Curven $\varphi = c'$, $\varphi = c''$ des ersten Systems auf diesen kürzesten Linien Bogen aus, die sämmtlich von gleicher Länge sind; und im Falle der Gleichung $\Delta_1 \varphi = 1$ ist $c'' - c'$ der Betrag dieser Länge. Die gegenseitige Beziehung der Curven eines solchen Systems $\varphi =$ const. kann also bezeichnet werden als ein geodätischer Parallelismus. Man kann dieses System auch als das der sämmtlichen geodätischen Evolventen einer beliebigen Curve auf der Fläche betrachten. Wenn die Lösung φ der Gleichung $\Delta_1 \varphi = 1$ eine willkürliche (nicht bloss additive) Constante in sich enthält, so kann daraus, ohne weitere Integration, die allgemeine endliche Gleichung der orthogonalen kürzesten Linien abgeleitet werden.

Die Gleichung

$$\Delta_1 f = 0$$

wird befriedigt durch alle Functionen f, welche abhängig sind von einem gewissen complexen Argument. Die Componenten dieses complexen Argumentes, keineswegs identisch mit u, v selber, sind Functionen von u, v, und zwar Functionen, welche aus den gegebenen Functionen E, F, G durch ein ziemlich einfaches Verfahren abgeleitet werden können**). Ist also f eine beliebige Function des in Rede stehenden complexen Argumentes, und bezeichnet man diese Function, bei Sonderung des Reellen und Imaginären, mit $\varphi + i\psi$, so wird f oder $\varphi + i\psi$ der vorstehenden Gleichung Genüge leisten. Gleichzeitig sind alsdann $\varphi =$ const. und $\psi =$ const. zwei zu einander orthogonale und isometrische Curvensysteme; mit andern Worten, bei constanten $d\varphi$ und $d\psi$ wird die Fläche in unendlich kleine Quadrate getheilt, d. h. dem Linienelemente die Form

$$ds^2 = \frac{d\varphi^2 + d\psi^2}{h^2}$$

zuertheilt. Die Functionen φ, ψ leisten gleichzeitig auch Genüge der partiellen Differentialgleichung zweiter Ordnung

$$\Delta_2 f = 0;$$

und umgekehrt, einer jeden reellen Lösung φ dieser letztern Gleichung

---

*) Cit. Ricerche, Art. IV; und

Beltrami. Sulla teoria delle linee geodetiche (Atti dell'Istituto Lombardo, Serie 2ª, Bd. 1).

Man vergleiche darüber:

Gauss. Disquis. gener. circa superf. curv. Art. XXII. (Commentationes recentiores Göttingenses, Vol. VI);

Weingarten. Ueber die Flächen, für welche einer der beiden Hauptkrümmungshalbmesser eine Function des andern ist. (Borchardt's Journ. für Math. Bd. 62).

**) Cit. Abhandl. Delle variabili complesse, Art. II.

kann immer eine zweite reelle Lösung ψ so zugeordnet werden, dass die complexe Function $\varphi + i\psi$ der Gleichung $\Delta_1 f = 0$ genügt*).

Die Bedingung dafür, dass ein Curvensystem $\varphi =$ const. isometrisch sei, d. h. mit Zuziehung des Orthogonalsystems, und mittelst einer schicklichen Wahl der Const., die Fläche in unendlich kleine Quadrate theile, ist folgende**):

$$\frac{\Delta_2 \varphi}{\Delta_1 \varphi} = \text{einer Function von } \varphi \text{ allein,}$$

wie dies bei dem Lamé'schen Parameter in der Ebene der Fall ist.

Man kann den von uns definirten zweiten Differentialparameter in eben derselben Weise aus dem ersten herleiten, wie es Jacobi, mittelst der Variationsrechnung, für die Lamé'schen Parameter im Raume gethan hat***).

Wenn die Functionen φ, ψ in einem bestimmten Flächengebiete mit ihren ersten Derivirten endlich und stetig bleiben, so findet die Gleichung

$$\int (\varphi \Delta_2 \psi - \psi \Delta_2 \varphi) d\omega + \int \left(\varphi \frac{\delta \psi}{\delta n} - \psi \frac{\delta \varphi}{\delta n}\right) ds = 0$$

statt. Hier erstreckt sich das erste Integral über alle Elemente $d\omega$ des besagten Flächengebietes, und das zweite über die zum Rande dieses Gebietes gehörigen Linienelemente ds; gleichzeitig ist unter δn ein Linienelement zu verstehen, welches normal zu ds liegt, und gegen das Innere des Gebietes gerichtet ist. Wenn für ψ in Betreff der obigen Bedingungen an einem einzigen Punkte des Gebietes eine Ausnahme stattfindet, und diese Function dort wie $\log \frac{1}{\varrho}$ unendlich wird, wo ϱ den kürzesten Abstand zwischen diesem Punkte und einem beliebigen anderen bedeutet, so gilt, anstatt der vorhergehenden Gleichung, die folgende:

$$2\pi \varphi_0 = \int (\varphi \Delta_2 \psi - \psi \Delta_2 \varphi) d\omega + \int \left(\varphi \frac{\delta \psi}{\delta n} - \psi \frac{\delta \varphi}{\delta n}\right) ds,$$

wo φ_0 den Werth von φ im Punkte $\varrho = 0$ bezeichnet†). Beim Gebrauche dieser beiden letzten Formeln sind gewisse Vorsichtsmassregeln zu beobachten, deren Erklärung ich um so mehr bei dieser gedrängten Kürze weglassen zu können glaube, als hier keine Anwendung derselben beabsichtigt wird.

Es giebt in der Gaussischen Flächentheorie zwei Grössen, die, wegen ihrer Unveränderlichkeit bei jeder Biegung der Fläche, von vorzüg-

*) Cit. Abh. Delle variabili complesse, Art. II.

**) Cit. Ricerche, Art. XVI.

***) Mathematische Werke Bd. 2. Auch cit. Abh. Teorica generale dei parametri differenziali, §. 3, wo allgemeine Formeln aufgestellt sind.

†) Cit. Abh. Delle variabili complesse, Art. V—VI.

licher Wichtigkeit sind. Ich meine das Krümmungsmaass k in jedem Punkte der Fläche, und die geodätische oder tangentielle Krümmung $\frac{1}{r}$ der auf der Fläche gezogenen Linien. Die Kenntniss von der Unveränderlichkeit dieser Grössen verdankt man, was die erste derselben anbelangt, Gauss selber*), zu dessen schönsten Entdeckungen sie wohl gehört, und, was die zweite anbetrifft, dem Herrn Minding**). Ich habe für diese Grössen, mit Anwendung der Differentialparameter, folgende neue Gleichungen aufgestellt***):

$$k = \Delta_2 \log (\mathrm{mod}\, \varkappa),$$

$$\frac{1}{r} = \frac{\Delta_2 \varphi}{\sqrt{\Delta_1 \varphi}} - \frac{\delta \sqrt{\Delta_1 \varphi}}{\delta \varphi},$$

wo $\varkappa$ der integrirende Factor der Differentialgleichung $ds^2 = 0$, d. h.

$$E\, du^2 + 2F\, du\, dv + G\, dv^2 = 0,$$

und $\varphi =$ const. die Gleichung derjenigen Curven ist, deren tangentielle Krümmung im Punkte (u, v) mit $\frac{1}{r}$ bezeichnet wird. Das Zeichen δ entspricht den simultanen Aenderungen, die bei $\Delta_1 \varphi$ und φ aus einer zur Linie $\varphi =$ const. normalen Verrückung entstehen.

Wenn der Ausdruck für ds^2 in der Form

$$ds^2 = \frac{du^2 + dv^2}{h^2}$$

gegeben ist, so kann man $\varkappa = h$ setzen, und die erste Formel gibt alsdann für k den bekannten Ausdruck

$$k = h^2 \left\{ \frac{\partial^2 \log h}{\partial u^2} + \frac{\partial^2 \log h}{\partial v^2} \right\}.$$

Man kann, wie ich zeigte†), auch die andern allgemeinen Ausdrücke, welche vom Herrn Liouville††) angegeben worden sind, aus der obigen Formel leicht ableiten.

Unsere Formel für $\frac{1}{r}$ lehrt insbesondere, dass man bei einem Systeme paralleler Curven, für welches $\Delta_1 \varphi = 1$, den einfachen Werth erhält:

$$\frac{1}{r} = \Delta_2 \varphi;$$

während man bei einem isometrischen Curvensystem, für welches $\Delta_2 \varphi = 0$, im obigen Sinne erhält:

$$\frac{1}{r} = -\frac{\delta \sqrt{\Delta_1 \varphi}}{\delta \varphi}.$$

---

*) Disquis. gener. Art. XII.

**) Crelle's Journ. für Math. Bd. 6, S. 159.

***) Cit. Ricerche. Art. XXIV und XXI.

†) Ibid Art. XXIV.

††) Journal de Mathématiques, Bd. 16, S. 130. Für die vorhergehende specielle Formel ist Bd. 12, S. 291, zu vergleichen.

Für die kürzesten Linien besteht die allgemeine Gleichung:

$$\Delta_2\varphi = \frac{1}{2}\frac{\partial\,\Delta_1\varphi}{\partial\varphi}\,.$$

Ich werde nun mit ϱ, wie oben, den kürzesten Bogen zwischen einem bestimmten Punkte 0 der Fläche und dem beliebigen Punkte (u, v) bezeichnen; mit Θ aber den Richtungswinkel dieses kürzesten Bogens, von einer beliebigen Anfangsrichtung gezählt. Es folgt dann aus den Lehren von Gauss*), dass man dem Linienelement den Ausdruck

$$ds^2 = d\varrho^2 + m^2\,d\Theta^2$$

geben kann, wo m im Allgemeinen eine Function von ϱ und Θ bezeichnet. Unter Voraussetzung der Stetigkeit und Endlichkeit des Krümmungsmaasses in der Nähe des Punktes $\varrho = 0$, ergiebt sich aus der Gaussischen Formel

$$k = -\frac{1}{m}\frac{\partial^2 m}{\partial\varrho^2}\,,$$

dass m von der Form

$$m = a\varrho + b\varrho^3$$

sein muss, wo a eine Constante, und b eine von ϱ, Θ abhängige Function ist, die mit ihrer Derivirten nach ϱ endlich und stetig bei $\varrho = 0$ bleibt: dann hat man im Punkte 0

$$k_0 = -\frac{6\,b_0}{a}\,.$$

Betrachtet man nun den zweiten Differentialparameter der Function $\log\frac{1}{\varrho}$, d. h. den Ausdruck

$$\Delta_2\log\frac{1}{\varrho} = -\frac{1}{m}\frac{\partial\frac{m}{\varrho}}{\partial\varrho}\,,$$

so findet man, für $\varrho = 0$

$$\left(\Delta_2\,\log\frac{1}{\varrho}\right)_0 = -\frac{2\,b_0}{a} = \frac{1}{3}\,k_0\,.$$

Man kann also schreiben (unter R_1, R_2 die Hauptkrümmungsradien in 0 verstanden):

$$\lim\left(\Delta_2\,\log\frac{1}{\varrho}\right) = \frac{1}{3}\,\frac{1}{R_1R_2}\,,\quad \text{für } \varrho = 0\,,$$

eine Gleichung, welche das Krümmungsmaass in einer neuen Form darbietet, und die, wie es mir scheint, vielleicht nicht ohne Interesse sein dürfte.

Diesem Ergebnisse will ich ein anderes zur Seite setzen. Dabei soll aber die bis jetzt betrachtete Fläche nicht im Gaussischen Sinne, d. h. im Zustande der unbedingten Biegsamkeit gedacht, sondern mit Erhaltung ihrer Identität, in einer ganz bestimmten Gestalt vorausgesetzt werden. Dies wird z. B. der Fall sein, wenn die rechtwinkligen Coordinaten x, y, z eines beliebigen Punktes der Fläche, angesehen

*) Disquis. gener. Art. XIX.

werden als bestimmt gegebene Functionen von zwei unabhängigen Variabeln u, v.

Man findet bei dieser Hypothese:

$$\Delta_1 x = 1 - X^2, \quad \Delta_1 y = 1 - Y^2, \quad \Delta_1 z = 1 - Z^2,$$
$$\Delta_1 yz = -YZ, \quad \Delta_1 zx = -ZX, \quad \Delta_1 xy = -XY,$$
$$\Delta_2 x = -\left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}\right) X, \quad \Delta_2 y = -\left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}\right) Y, \quad \Delta_2 z = -\left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}\right) Z,$$

wo unter X, Y, Z die Richtungscosinus der Normale der Fläche zu verstehen sind. Von diesen Formeln sind die ersten sechs vom Herrn Brioschi*), die letzten drei von mir aufgestellt worden**). Man kann die letztern, für eine specielle Wahl der Variablen u, v, in einem Aufsatze des Herrn Weierstrass leicht wiederfinden***). In den rechten Seiten derselben wird man gewisse Verbindungen erkennen, die in der mathematischen Theorie der Capillarität vorkommen†). Aus denselben drei Formeln ergiebt sich u. A., dass bei einer jeden Minimalfläche jede Schaar paralleler Ebenen ein isometrisches Schnittcurvensystem erzeugt.

Es sei nun $F(x, y, z)$ eine gegebene Function der drei Coordinaten. Nachdem man dieselbe, durch Einsetzung der entsprechenden Ausdrücke für diese Coordinaten, zu einer Function der zwei Variabeln u, v gemacht hat, ergiebt sich ohne Mühe:

$$\Delta_2 F = \frac{\partial F}{\partial x}\Delta_2 x + \frac{\partial F}{\partial y}\Delta_2 y + \frac{\partial F}{\partial z}\Delta_2 z + \frac{\partial^2 F}{\partial x^2}\Delta_1 x + \frac{\partial^2 F}{\partial y^2}\Delta_1 y + \frac{\partial^2 F}{\partial z^2}\Delta_1 z$$
$$+ 2\frac{\partial^2 F}{\partial y \partial z}\Delta_1 yz + 2\frac{\partial^2 F}{\partial z \partial x}\Delta_1 zx + 2\frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y}\Delta_1 xy,$$

oder, wegen der angegebenen Ausdrücke für $\Delta_1 x$, etc.,

$$\Delta_2 F = -\left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}\right)\left(X\frac{\partial}{\partial x} + Y\frac{\partial}{\partial y} + Z\frac{\partial}{\partial z}\right)F + \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}\right)F$$
$$- \left(X\frac{\partial}{\partial x} + Y\frac{\partial}{\partial y} + Z\frac{\partial}{\partial z}\right)^2 F,$$

eine Formel, in deren rechter Seite eine wohlbekannte symbolische Darstellungsart zur Abkürzung verwendet worden ist.

Wir wollen von dieser Formel eine specielle Anwendung auf den Fall machen, dass die Function F von der einzigen Grösse $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ abhängt. Man findet bei dieser Annahme

$$\Delta_2 F = \left\{\frac{1 + \cos^2\psi}{r} - \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}\right)\cos\psi\right\}\frac{dF}{dr} + \frac{d^2 F}{dr^2}\sin^2\psi,$$

---

*) Brioschi. Delle coordinate curvilinee (Annal. di Mat. Serie II, Bd. 1).

**) Beltrami. Sulla teoria generale delle superficie d'area minima, §. 2 (Memorie dell'Accademia di Bologna, Serie II, Bd. 7).

***) Weierstrass. Ueber die Flächen, deren mittlere Krümmung überall null ist, N° 1 (Monatsberichte der Berl. Acad. für 1866).

†) Gauss. De figura fluidorum in statu aequilibrii, Art. 24 (Commentationes recentiores Gotting. vol. VII).

wo ψ den Winkel bezeichnet, den die Normale der Fläche mit dem Radiusvector r bildet.

Setzt man in dieser Gleichung $F = \log \frac{1}{r}$, so ergiebt sich die merkwürdige Formel

$$\Delta_2 \log \frac{1}{r} = \frac{\cos \psi}{r} \left\{ \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} - \frac{2 \cos \psi}{r} \right\}.$$

Lässt man nun den Coordinatenanfang 0 in einen beliebigen aber bestimmten Punkt der gegebenen Fläche rücken, in dessen Gegend die Fläche selbst und ihre Krümmung keine Unterbrechung der Stetigkeit erleiden, so findet man sehr leicht (mittelst bekannter analytischer Beziehungen, oder einfacher geometrischer Betrachtungen) dass, wenn der Punkt (x, y, z) auf der Fläche hinlaufend dem Punkte 0 unbegrenzt sich nähert, die Gleichung stattfindet:

$$\lim \frac{2 \cos \psi}{r} = \frac{1}{R},$$

wo R den Krümmungsradius im Punkte 0 für denjenigen Normalschnitt bedeutet, nach dessen Richtung die unbegrenzte Annäherung des beweglichen Punktes zuletzt geschieht. Es ist also:

$$\lim \left(\Delta_2 \log \frac{1}{r} \right) = \frac{1}{2R} \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} - \frac{1}{R} \right),$$

oder, einer wohlbekannten Relation zufolge:

$$\lim \left(\Delta_2 \log \frac{1}{r} \right) = \frac{1}{2} \frac{1}{RR'}, \quad \text{für } r = 0,$$

wo R' den Krümmungsradius im Punkte 0 für denjenigen Normalschnitt bedeutet, der mit dem vorigen einen rechten Winkel macht.

Man schliesst hieraus, dass, während, bei unendlich abnehmendem ϱ (für ϱ die vorhergehende Bedeutung gelassen), der Werth von $\Delta_2 \log \frac{1}{\varrho}$ gegen eine bestimmte Grenze convergirt, die von der Richtung der kürzesten Linie ϱ gar nicht abhängt, und die, von dem numerischen Factor $\frac{1}{3}$ abgesehen, mit dem Gaussischen Krümmungsmaasse im Punkte $\varrho = 0$ zusammenfällt, Aehnliches für den Werth von $\Delta_2 \log \frac{1}{r}$ (wo r als die Sehne des Bogens ϱ angesehen werden kann) durchaus nicht stattfindet. Vielmehr wird die Grenze des letztern Ausdruckes, bei unendlich abnehmenden r, immer eine andere, je nachdem die Richtung eine andere wird, nach welcher zuletzt die Abnahme geschieht. Die in Rede stehende Grenze hat gleiche Werthe für zwei zu einander rechtwinklige Richtungen. Nur für die Richtungen der Hauptkrümmungsschnitte trifft sie, von dem numerischen Factor $\frac{1}{2}$ abgesehen, mit dem Krümmungsmaasse zusammen.

Bologna, den 15. März 1869.

Sur les équations de la division des fonctions abéliennes.

Par

M. Camille Jordan à Paris*).

1. Considérons un système de p^n quantités caractérisées par n indices $x, y, \ldots$ variables chacun de 0 à $p-1$ (mod. p), p étant un entier que nous supposerons premier, pour plus de simplicité. L'opération qui consiste à remplacer la quantité dont les indices sont $x, y, \ldots$ par celle dont les indices sont $ax+by+\ldots, a'x+b'y+\ldots, \ldots$ (mod p) sera une substitution si le déterminant des quantités $a, b, \ldots; a', b', \ldots; \ldots$ n'est pas divisible par p. Nous la représenterons par le symbole

$$\left| \begin{matrix} x & ax+by+\ldots \\ y & a'x+b'y+\ldots \\ \ldots & \ldots\ldots\ldots\ldots \end{matrix} \right|.$$

Lorsque ce sera plus commode, nous pourrons mettre plusieurs indices sur une même ligne, comme il suit

$$|\, x, y, \ldots \quad ax+by+\ldots, \quad a'x+b'y+\ldots, \ldots \,|.$$

L'ensemble des substitutions de la forme ci-dessus forme évidemment un groupe, qu'on peut appeler le g r o u p e l i n é a i r e d e d e g r é p^n.

2. Dans ses importantes recherches sur la transformation des fonctions abéliennes, M. Hermite a dû résoudre le problème suivant:

Soient $x_1, y_1, \ldots, x_n, y_n$; $\xi_1, \eta_1, \ldots, \xi_n, \eta_n$ *deux suites de* $2n$ *indices, répartis en* n *couples dans chacune d'elles; et soit donnée la fonction*

$$\varphi = x_1\eta_1 - \xi_1 y_1 + \ldots + x_n\eta_n - \xi_n y_n.$$

Trouver, parmi les substitutions du groupe linéaire du degré p^{2n}, *celles qui, étant opérées à la fois sur chacune des deux suites d'indices qui entrent dans la fonction* φ, *multiplieront cette fonction par un simple facteur constant (abstraction faite des multiples de* p).

Il est clair que si deux substitutions S, S' multiplient respectivement φ par des entiers constants m, m', SS' multipliera φ par l'entier

*) Extrait d'un traité des équations algébriques en cours de publication.

constant mm'. Donc les substitutions cherchées forment un groupe. Nous l'appellerons le *groupe abélien*, et ses substitutions seront dites *abéliennes*.

Soit

$$S = \left| \begin{array}{ll} x_1 & a_1' x_1 + c_1' y_1 + \ldots + a_n' x_n + c_n' y_n \\ y_1 & b_1' x_1 + d_1' y_1 + \ldots + b_n' x_n + d_n' y_n \\ \ldots & \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ x_n & a_1^{(n)} x_1 + c_1^{(n)} y_1 + \ldots + a_n^{(n)} x_n + c_n^{(n)} y_n \\ y_n & b_1^{(n)} x_1 + d_1^{(n)} y_1 + \ldots + b_n^{(n)} x_n + d_n^{(n)} y_n \end{array} \right|$$

une substitution abélienne. Exprimant qu'elle multiplie φ par m, on aura le groupe de relations suivant:

$$(1) \begin{cases} \Sigma_\nu a_\mu^{(\nu)} d_\mu^{(\nu)} - b_\mu^{(\nu)} c_\mu^{(\nu)} \equiv m, \quad \Sigma_\nu a_\mu^{(\nu)} d_{\mu'}^{(\nu)} - b_\mu^{(\nu)} c_{\mu'}^{(\nu)} \equiv 0, \quad \text{si } \mu' \gtrless \mu \pmod{p}, \\ \Sigma_\nu a_\mu^{(\nu)} b_{\mu'}^{(\nu)} - b_\mu^{(\nu)} a_{\mu'}^{(\nu)} \equiv 0, \quad \Sigma_\nu c_\mu^{(\nu)} d_{\mu'}^{(\nu)} - d_\mu^{(\nu)} c_{\mu'}^{(\nu)} \equiv 0. \end{cases}$$

3. Cherchons à déterminer la substitution réciproque

$$S^{-1} = \left| \begin{array}{ll} x_1 & \alpha_1' x_1 + \gamma_1' y_1 + \ldots + \alpha_n' x_n + \gamma_n' y_n \\ y_1 & \beta_1' x_1 + \delta_1' y_1 + \ldots + \beta_n' x_n + \delta_n' y_n \\ \ldots & \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ x_n & \alpha_1^{(n)} x_1 + \gamma_1^{(n)} y_1 + \ldots + \alpha_n^{(n)} x_n + \gamma_n^{(n)} y_n \\ y_n & \beta_1^{(n)} x_1 + \delta_1^{(n)} y_1 + \ldots + \beta_n^{(n)} x_n + \delta_n^{(n)} y_n \end{array} \right|.$$

On obtient, par hypothèse, le même résultat en multipliant φ par m, ou en y exécutant la substitution S dans les deux systèmes de variables. On ne troublera pas l'égalité de ces deux résultats en y opérant la substitution S^{-1} sur les variables $x_1, y_1, \ldots, x_n, y_n$. Donc il est indifférent de multiplier φ par m, et d'y opérer ensuite la substitution S^{-1} sur les variables x, y, ou d'y opérer la substitution S sur les variables ξ, η. Identifiant ces deux résultats, il vient

$$\begin{aligned} m\, \Sigma_{\mu,\nu} & (\alpha_\mu^{(\nu)} x_\mu + \gamma_\mu^{(\nu)} y_\mu)\, \eta_\nu - (\beta_\mu^{(\nu)} x_\mu + \delta_\mu^{(\nu)} y_\mu)\, \xi_\mu \\ & \equiv \Sigma_{\mu,\nu} x_\mu (b_\nu^{(\mu)} \xi_\nu + d_\nu^{(\mu)} \eta_\nu) - y_\mu (a_\nu^{(\mu)} \xi_\nu + c_\nu^{(\mu)} \eta_\nu), \end{aligned}$$

d'où l'on déduit

$$(2) \quad \alpha_\mu^{(\nu)} \equiv \frac{1}{m} d_\nu^{(\mu)}, \quad \gamma_\mu^{(\nu)} \equiv -\frac{1}{m} c_\nu^{(\mu)}, \quad \beta_\mu^{(\nu)} \equiv -\frac{1}{m} b_\nu^{(\mu)}, \quad \delta_\mu^{(\nu)} \equiv \frac{1}{m} a_\nu^{(\mu)}.$$

Or S^{-1} étant opérée sur les deux suites d'indices, multiplie évidemment φ par $\frac{1}{m}$. Formons les relations qui expriment cette identité, puis substituons-y les valeurs trouvées pour les quantités α, β, γ, δ: il viendra

$$(3) \begin{cases} \Sigma_\nu a_\nu^{(\mu)} d_\nu^{(\mu)} - b_\nu^{(\mu)} c_\nu^{(\mu)} \equiv m, \quad \Sigma_\nu a_\nu^{(\mu)} d_\nu^{(\mu')} - b_\nu^{(\mu)} c_\nu^{(\mu')} \equiv 0, \quad \text{si } \mu' \gtrless \mu \pmod{p}. \\ \Sigma_\nu d_\nu^{(\mu)} b_\nu^{(\mu')} - b_\nu^{(\mu)} d_\nu^{(\mu')} \equiv 0, \quad \Sigma_\nu c_\nu^{(\mu)} a_\nu^{(\mu')} - a_\nu^{(\mu)} c_\nu^{(\mu')} \equiv 0. \end{cases}$$

Ce nouveau système de relations est entièrement équivalent au système (1). Car nous venons de voir qu'il s'en déduit; et réciproquement, si les relations (3) sont satisfaites, S^{-1} multipliera φ par $\frac{1}{m}$: donc S le multipliera par m, et les relations (1) seront satisfaites.

4. Soit r une racine primitive de la congruence $r^{p-1} \equiv 1$. Le groupe abélien G contient la substitution

$$U = | x_1, y_1, \ldots, x_n, y_n \quad rx_1, y_1, \ldots, rx_n, y_n |,$$

qui multiplie φ par r. Soient S une substitution quelconque de ce groupe; $m \equiv r^\rho$ l'entier par lequel elle multiplie φ: on aura évidemment $S = U^\rho T$, T étant une nouvelle substitution de G, qui n'altère pas φ. L'exposant ρ pouvant prendre une quelconque des valeurs 0, $1, \ldots, p-2$, l'ordre de G sera égal à $p-1$ fois l'ordre Ω_n du groupe partiel H formé par les substitutions de la forme T. Soient d'ailleurs $\alpha, \beta, \ldots$ les facteurs premiers dont le produit donne $p-1$; $G, G_\alpha, G_{\alpha\beta}, \ldots, G_{p-1} = H$ les groupes respectivement formés par la combinaison des substitutions de H avec $U, U^\alpha, U^{\alpha\beta}, \ldots, U^{p-1} = 1$. Il est clair que ces groupes auront respectivement pour ordre $(p-1)\,\Omega_n$, $\frac{p-1}{\alpha}\,\Omega_n$, $\frac{p-1}{\alpha\beta}\,\Omega_n, \ldots, \Omega_n$ et que chacun d'eux sera permutable aux substitutions de G. Donc G aura pour facteurs de composition α, $\beta, \ldots,$ et les facteurs de composition de H.

Cherchons donc l'ordre de H, et ses facteurs de composition.

5. On vérifie immédiatement que H contient, entre autres substitutions, les suivantes, dans l'expression desquelles nous omettons les couples d'indices qu'elles laissent inaltérés:

$$\begin{array}{ll}
M_\mu = |\ldots, x_\mu, y_\mu, \ldots & \ldots, y_\mu, \quad -x_\mu, \ldots |, \\
L_\mu = |\ldots, x_\mu, y_\mu, \ldots & \ldots, x_\mu + y_\mu, y_\mu, \ldots |. \\
L'_\mu = |\ldots, x_\mu, y_\mu, \ldots & \ldots, x_\mu, y_\mu + x_\mu, \ldots | = M_\mu L_\mu M_\mu^{-1}, \\
N_{\mu,\nu} = |\ldots, x_\mu, y_\mu, \ldots, x_\nu, y_\nu, \ldots & \ldots, x_\mu + y_\nu, y_\mu, \ldots, x_\nu + y_\mu, y_\nu, \ldots |, \\
Q_{\mu,\nu} = |\ldots, x_\mu, y_\mu, \ldots, x_\nu, y_\nu, \ldots & \ldots, x_\mu + x_\nu, y_\mu, \ldots, x_\nu, y_\nu - y_\mu, \ldots | = M_\nu^{-1} N_{\mu,\nu} M_\nu, \\
R_{\mu,\nu} = |\ldots, x_\mu, y_\mu, \ldots, x_\nu, y_\nu, \ldots & \ldots, x_\mu, y_\mu - x_\nu, \ldots, x_\nu, y_\nu - x_\mu, \ldots | = M_\mu^{-1} Q_{\nu,\mu} M_\nu, \\
P_{\mu,\nu} = |\ldots, x_\mu, y_\mu, \ldots, x_\nu, y_\nu, \ldots & \ldots, x_\nu, \quad y_\nu, \ldots, x_\mu, \quad y_\mu, \ldots |,
\end{array}$$

6. **Théorème.** — *Le groupe H est dérivé des seules substitutions L_μ, M_μ, $N_{\mu,\nu}$; et son ordre est égal à*

$$(p^{2n}-1)\,p^{2n-1}\,(p^{2n-2}-1)\,p^{2n-3}\ldots(p^2-1)\,p.$$

En effet, soient Σ une substitution quelconque de H;

$$f_1 \equiv a_1' x_1 + c_1' y_1 + \ldots + a_n' x_n + c_n' y_n$$

la fonction que Σ fait succéder à x_1. Les coefficients $a_1', \ldots, b_n'$ ne seront pas tous congrus à zéro; et l'on pourra déterminer une substitution S, dérivée des substitutions L_μ, M_μ, $N_{\mu,\nu}$, qui remplace x par f_1.

Car soit d'abord $a_1' \gtrless 0$ (mod. p): la substitution

$$S = L_1^\beta M_1 L_1^\alpha \,.\, Q_{1,2}^{a_2'} N_{1,2}^{c_2'} \dots Q_{1,n}^{a_n'} N_{1,n}^{c_n'},$$

où α et β sont déterminés par les congruences

$$\alpha \equiv -a_1' + a_2' c_2' + \dots + a_n' c_n', \quad 1 + a_1' \beta \equiv b_1' \quad (\text{mod. p}),$$

remplace x_1 par f_1. D'ailleurs les diverses substitutions $Q_{\mu,\nu}$ étant dérivées des L_μ, M_μ, $N_{\mu,\nu}$, il en sera de même de S.

Soit maintenant $a_1' \equiv 0$, mais a_2', par exemple, $\gtrless 0$ (mod. p). On vient de voir qui'l existe une substitution s, dérivée des substitutions L_μ, M_μ, $N_{\mu,\nu}$, qui remplace x_1 par $-a_2' x_1 + b_1' y_1 + a_2' x_2 + (b_2' + b_1') y_2 + a_3' x_3 + \dots$; et la substitution $S = Q_{2,1}\, s$ le remplacera par f_1.

Soit enfin $a_1' \equiv a_2' \equiv \dots \equiv a_n' \equiv 0$, mais c_2', par exemple, $\gtrless 0$ (mod. p). Il existe une substitution s, derivée des substitutions L_μ, M_μ, $N_{\mu,\nu}$, qui remplace x_1 par $a_1' x_1 + c_1' y_1 + c_2' x_2 - a_2' y_2 + \dots$; et la substitution $S = M_2\, s$ le remplacera par f_1.

La substitution S étant ainsi déterminée dans tous les cas, on aura évidemment $\Sigma = S\Sigma'$, Σ étant une nouvelle substitution de H, qui n'altère plus l'indice x_1.

Soit $f_1' = b_1' x_1 + d_1' y_1 + \dots + b_n' x_n + d_n' y_n$ la fonction par laquelle Σ' remplace y_1. Si l'on pose dans les relations (1) $m \equiv 1$, $a_1' \equiv 1$, $c_1' \equiv a_2' \equiv c_2' \equiv \dots \equiv 0$, elles donneront $d_1' \equiv 1$. Cette condition nécessaire étant supposée remplie, la substitution

$$S' = L_1'^{b_1'} R_{1,2}^{-b_2'} Q_{2,1}^{-d_2'} \dots R_{1,n}^{-b_n'} Q_{n,1}^{-d_n'}$$

remplacera y_1 par f_1'; et l'on pourra poser $\Sigma' = S'\Sigma_1$, Σ_1 étant une nouvelle substitution de H, qui n'altère plus x_1, y_1.

Soit

$$\Sigma_1 = \left| \begin{array}{ll} x_1 & x_1 \\ y_1 & y_1 \\ x_2 & a_1'' x_1 + c_1'' y_1 + \dots + a_n'' x_n + c_n'' y_n \\ y_2 & b_1'' x_1 + d_1'' y_1 + \dots + b_n'' x_n + d_n'' y_n \\ \dots & \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ x_n & a_1^{(n)} x_1 + c_1^{(n)} y_1 + \dots + a_n^{(n)} x_n + c_n^{(n)} y_n \\ y_n & b_1^{(n)} x_1 + d_1^{(n)} y_1 + \dots + b_n^{(n)} x_n + d_n^{(n)} y_n \end{array} \right|.$$

Cette substitution doit satisfaire aux relations (1), ce qui donnera

$$a_1'' \equiv \dots \equiv a_1^{(n)} \equiv c_1'' \equiv \dots \equiv c_1^{(n)} \equiv 0.$$

Quant aux autres coefficients, les relations qui les lient sont absolument les mêmes que dans les substitutions abéliennes à $2(n-1)$ indices.

7. Donc, en combinant ensemble celles des substitutions L_μ, M_μ, $N_{\mu,\nu}$ pour lesquelles μ et ν sont > 1, on obtiendra une substitution S_1 qui remplace x_2 par $a_2'' x_2 + c_2'' y_2 + \ldots + a_n'' x_n + c_n'' y_n$, quels que soient a_2'', c_2'', ... a_n'', c_n'' (ces coefficients n'étant pas à la fois congrus à zéro) (n°. 6); et l'on aura $\Sigma_1 = S_1 \Sigma_1'$, Σ_1' étant une nouvelle substitution de H, qui n'altère plus x_1, y_1, x_2.

Soit $f_2' \equiv b_2'' x_2 + d_2'' y_2 + \ldots$ la fonction par laquelle Σ_1' remplace y_2 : les relations (1) donneront $d_2'' \equiv 1$. Cela posé, quels que soient d'ailleurs b_2'', ..., b_n'', d_n'', on trouvera une substitution S_1', dérivée des substitutions L_μ, M_μ, $N_{\mu,\nu}$ (μ et ν étant > 1) qui remplace y_2 par f_1' (n°.6); et l'on aura $\Sigma_1' = S_1' \Sigma_2$, Σ_2 étant une substitution de H, qui laisse invariables x_1, y_1, x_2, y_2.

On continuera ainsi jusqu'à ce qu'on arrive à une substitution Σ_n qui laissera tous les indices invariables, et se réduira à l'unité.

8. L'ordre du groupe abélien résulte immédiatement de ce qui précède. En effet, les fonctions différentes, telles que f_1, que les substitutions de H permettent de faire succéder à x_1, sont en nombre $p^{2n} - 1$, tous les systèmes de valeurs de a_1', c_1', ..., a_n', c_n' étant admissibles, pourvu que ces coefficients ne soient pas tous congrus à zéro. L'ordre Ω_n de H est évidemment égal à ce nombre, multiplié par l'ordre du groupe partiel H' formé par celles de ses substitutions qui n'altèrent pas x_1.

Le nombre des fonctions différentes, telles que f_1', que les substitutions de H' permettent de faire succéder à y est p^{2n-1}, les coefficients de f_1' pouvant être choisis arbitrairement, sauf l'un d'eux, qui est congru à 1. L'ordre de H' sera donc égal à $p^{2n-1}\,\Omega_{n-1}$, Ω_{n-1} étant l'ordre du groupe H_1 formé par celles des substitutions de H' qui n'altèrent pas x_1, y_1.

Continuant ainsi, on aura

$$\Omega_n = (p^{2n} - 1) p^{2n-1}\,\Omega_{n-1} = \ldots = (p^{2n} - 1) p^{2n-1} (p^{2n-2} - 1) p^{2n-3} \ldots (p^2 - 1) p.$$

Remarque. — Les substitutions de H ont toutes leur déterminant égal à 1. Car les substitutions L_μ, M_μ, $N_{\mu,\nu}$, dont elles dérivent, jouissent de cette propriété.

9. **Théorème.** — *Si p est impair, les facteurs de composition de H sont $\frac{1}{2}\Omega_n$ et 2.*

La substitution qui multiplie tous les indices par -1 fait partie de H, et ses puissances forment un groupe K, d'ordre 2, et évidemment permutable aux substitutions de H. Donc 2 est l'un des facteurs de composition cherchés; et pour prouver que les autres se réduisent à un seul, $\frac{1}{2}\Omega_n$, il suffira d'établir que K est le seul groupe contenu dans H et permutable à ses substitutions. A cet effet, nous allons montrer que *tout groupe* I, *autre que* K, *contenu dans* H *et permutable à ses substitutions, contient nécessairement toutes les substitutions de* H.

10. Soit

$$S = \begin{vmatrix} x_1 & a_1' x_1 + c_1' y_1 + \ldots + a_n' x_n + c_n' y_n \\ y_1 & b_1' x_1 + d_1' y_1 + \ldots + b_n' x_n + d_n' y_n \\ \cdots & \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ x_n & a_1^{(n)} x_1 + c_1^{(n)} y_1 + \ldots + a_n^{(n)} x_n + c_n^{(n)} y_n \\ y_n & b_1^{(n)} x_1 + d_1^{(n)} y_1 + \ldots + b_n^{(n)} x_n + d_n^{(n)} y_n \end{vmatrix}$$

une des substitutions de I, laquelle ne soit pas contenue dans K. Le groupe I contient, par hypothèse, les transformées de S par les substitutions L_μ, L_μ': il contiendra donc les suivantes : $S^{-1}.L_\mu^{-1} S L_\mu$, $S^{-1}.L_\mu'^{-1} S L_\mu'$. D'ailleurs on peut admettre que ces substitutions ne se réduisent pas toutes à l'unité; car on vérifie aisément que pour que cela eût lieu, il faudrait que S multipliât les deux indices de chacun des couples $x_1, y_1; \ldots; x_n, y_n$ par un même facteur, égal à 1 pour certains couples, tels que x_1, y_1, et à -1 pour d'autres, tels que x_2, y_2. Mais alors, la substitution $N_{1,2}$ étant permutable à I, ce groupe contiendrait la substitution $N_{1,2}^{-1} S N_{1,2}$, laquelle ne multiplie plus les indices par des facteurs constants, et pourrait être prise pour point de départ de notre raisonnement, à la place de S.

Admettons, pour fixer les idées, que $S^{-1}.L_1^{-1} S L_1$ diffère de l'unité. Cette substitution est évidemment de la forme

$$S_1 = \begin{vmatrix} x_1, y_1 & \alpha_1 x_1 + \gamma_1 y_1 + \ldots + \alpha_n x_n + \gamma_n y_n,\ y_1 - b_1' Y \\ x_2, y_2 & x_2 - a_1'' Y,\ y_2 - b_1'' Y \\ \cdots & \cdots\cdots\cdots\cdots \\ x_n, y_n & x_n - a_1^{(n)} Y,\ y_n - b_1^{(n)} Y \end{vmatrix}$$

Y étant la fonction par laquelle S^{-1} remplace y_1.

Cela posé, I contient une substitution, autre que l'unité, qui laisse invariables $2n-3$ indices. En effet, S_1 serait cette substitution, si a_1'', b_1'', ... étaient tous congrus à zéro. Supposons, au contraire, que a_1'', par exemple, ne soit pas congru à zéro. Posons

$$a_1'' l_\mu + a_1^{(\mu)} \equiv 0, \quad a_1'' m_\mu - b_1^{(\mu)} \equiv 0,$$
$$a_1'' r + b_1'' - b_1''' l_3 + a_1''' m_3 - \ldots - b_1^{(n)} l_n + a_1^{(n)} m_n \equiv 0.$$

Le groupe I contiendra S_2, transformée de S_1 par $Q_{3,2}^{l_3} R_{3,2}^{m_3} \ldots Q_{n,2}^{l_n} R_{n,2}^{m_n} L_1'^{r}$, laquelle laisse invariables $y_2, x_3, y_3, \ldots$. Cette substitution, satisfaisant en outre aux relations (1), sera de la forme

$$S_2 = \begin{vmatrix} x_1, y_1 & a_1' x_1 + c_1' y_1 + c_2' y_2,\ b_1' x_1 + d_1' y_1 + d_2' y_2 \\ x_2, y_2 & a_1'' x_1 + c_1'' y_1 + x_2 + c_2'' y_2,\ y_2 \\ \cdots & \cdots\cdots\cdots\cdots \end{vmatrix}.$$

Cela posé, I contient la substitution

$$S_3 = N_{1,2}^{-1} S_2 N_{1,2} = \begin{vmatrix} x_1, y_1 & x_1 + (1 - a_1') y_2,\ y_1 - b_1' y_2 \\ x_2, y_2 & \text{fonct. } (x_1, y_1, x_2, y_2),\ y_2 \\ \cdots & \cdots\cdots\cdots\cdots \end{vmatrix};$$

et si $1 - a_1' \gtrless 0$ (mod. p), posons

$$(1 - a_1')\, t + b_1' \equiv 0;$$

I contiendra la transformée de S_3 par $L^{\prime t}$, laquelle laisse y_1 et y_2 invariables, accroit x_1 d'un multiple de y_2, et satisfait aux relations (1): elle est donc de la forme

$$S_4 = | x_1, y_1, x_2, y_2, \ldots \quad x_1 + \alpha y_2, y_1, x_2 + \alpha y_1 + \beta y_2, y_2, \ldots |.$$

Si au contraire $1 - a_1' \equiv 0$, I contiendra la substitution $M_1^{-1} S_3 M_1$, laquelle est encore de la forme S_4.

Les deux coefficients α, β ne peuvent s'annuler à la fois; car S_4 se réduisant à l'unité, il en serait de même de S_3, S_2, S_1, qui s'en déduisent par une suite de transformations. Mais, par hypothèse, S_1 diffère de l'unité.

11. Il reste à prouver que, quels que soient d'ailleurs les coefficients α, β, la substitution S_4 et ses transformées reproduisent par leur combinaison toutes les substitutions L_μ, M_μ, $N_{\mu,\nu}$, dont H est dérivé.

Soit d'abord $\alpha \equiv 0$, d'où $\beta \gtrless 0$ (mod. p). On a $S_4^{\frac{1}{\beta}} \equiv L_2$. Donc I contient L_2; donc il contient M_2, qui est la transformée de L_2^{-1} par $M_2 L_2^{-1}$. Il contiendra L_μ et M_μ, transformées de L_2 et M_2 par $P_{2.\mu}$. Enfin il contiendra $Q_{\mu,\nu}^{-1} L_\mu L_\nu Q_{\mu,\nu} \,.\, L_\mu^{-2} L_\nu^{-1} = N_{\mu,\nu}$.

Soit maintenant $\alpha \gtrless 0$ (mod. p) : I contient la transformée de S par $Q_{2,1}^{-\frac{\beta}{2\alpha}}$, laquelle, élevée à la puissance $\frac{1}{\alpha}$ (mod. p), reproduit $N_{1,2}$. Il contiendra la substitution

$$N_{1,2} \,.\, M_2^{-1} N_{1,2} M_2 \,.\, (M_2 L_2)^{-1} N_{1,2} M_2 L_2 = L_2.$$

Ce point établi, on achève la démonstration comme précédemment.

12. **Théorème.** — *Si $p = 2$ et $n > 2$, le groupe H est simple.*

Soit I un groupe contenu dans H et permutable à ses substitutions; on démontre, comme au théorème précédent : 1° que I contient une substitution de la forme

$$S_4 = | x_1, y_1, x_2, y_2, \ldots \quad x_1 + \alpha y_2, y_1, x_2 + \alpha y_1 + \beta y_2, y_2, \ldots |;$$

2° que si $\alpha \equiv 0$ ou $\beta \equiv 0$ (mod. 2), I se confond avec H.

13. Admettons donc, comme dernière hypothèse, $\alpha \equiv \beta \equiv 1$, d'où $S_4 = N_{1,2} L_2$; I contient les substitutions suivantes:

$$S_4, \quad (P_{1,\mu} P_{2,\nu})^{-1} S_4 P_{1,\mu} P_{2,\nu} = N_{\mu,\nu} L_\mu = L_\mu N_{\mu,\nu}, \quad L_\mu N_{\mu,\nu} L_\nu N_{\mu,\nu} = L_\mu L_\nu,$$

$$M_\mu^{-1} L_\mu L_\nu M_\mu . L_\mu L_\nu = L_\mu M_\mu, \; (L_\mu M_\mu)^2 = M_\mu L_\mu, \; N_{\mu,\nu} L_\mu . L_\mu L_\pi = N_{\mu,\nu} L_\pi = L_\pi N_{\mu,\nu},$$

$$L_\mu L_\nu \,.\, L_\mu M_\mu = L_\nu M_\mu, \quad M_\mu L_\mu \,.\, L_\mu L_\nu = M_\mu L_\nu.$$

$$N_{\mu,\nu} L_\mu \,.\, L_\mu M_\pi = N_{\mu,\nu} M_\pi, \quad M_\pi L_\mu \,.\, L_\mu L_{\mu,\nu} = M_\pi N_{\mu,\nu}.$$

Donc I contient tous les produits deux à deux des substitutions L_μ, M_μ, $N_{\mu,\nu}$: donc il contient la substitution

$$M_1 L_1 M_1 . M_2 L_2 M_2 . M_3 L_3 M_3 . M_1 M_2 N_{1,2} M_1 M_2 . M_2 M_3 N_{2,3} M_2 M_3 . M_3 M_1 N_{3,1} M_3 M_1,$$

laquelle est le produit de 24 facteurs des formes L_μ, M_μ, $N_{\mu,\nu}$. Il contient sa transformée par la substitution abélienne

$$\left|\begin{array}{ll} x_1,\ y_1 & y_1+x_2+x_3,\ x_1+x_2+x_3 \\ x_2,\ y_2 & x_2,\ y_2+x_1+y_1+x_2+x_3 \\ x_3,\ y_3 & x_3,\ y_3+x_1+y_1+x_2+x_3 \\ \dots\dots & \dots\dots\dots\dots\dots\dots \end{array}\right|,$$

laquelle se réduit à L_1. Donc il contient

$$L_\mu L_1 \,.\, L_1 = L_\mu, \quad M_\mu L_1 \,.\, L_1 = M_\mu, \quad N_{\mu,\nu} L_1 \,.\, L_1 = N_{\mu,\nu},$$

et ce confond avec H. Donc H est simple.

14. Il reste enfin à considérer le cas où l'on a $p=2$, avec $n=2$. Dans se cas, on voit aisément que H a pour facteurs de composition 2 et $\frac{1}{2}\Omega_n$.

15. On sait que les équations pour la division des périodes dans les fonctions abéliennes ont précisément pour groupe celui que nous venons d'étudier*). Les resultats que nous avons trouvé relativement aux facteurs de composition de ces groupes, comparés aux théorèmes généraux exposés dans le Commentaire sur Galois que nous avons publié dans ce Journal (T. I$^{\text{er}}$, 2$^{\text{ème}}$ cahier) fournissent immédiatement la proposition suivante.

Théorème. *La résolution de l'équation qui donne la division des périodes dans les fonctions abéliennes à $2n$ périodes se ramène à celle d'une suite d'équations simples, qui toutes auront pour ordre un nombre premier (et par suite seront abéliennes), sauf une seule, dont l'ordre est égal à* $\frac{(p^{2n}-1)p^{2n-1}\dots(p^2-1)p}{2}$ *ou au double de ce nombre, si* $p=2$, $n>2$.

16. De ce théorème découlent immédiatement deux propositions importantes, generalement admises sans démonstration suffisante.

Proposition I. *Les équations considérées ne sont pas solubles par radicaux.* On sait en effet depuis Galois que toute équation soluble par radicaux peut se résoudre à l'aide d'une suite d'équations abéliennes de degré premier : donc ses facteurs de composition sont tous premiers, condition qui n'est pas remplie dans l'espèce.

Proposition II. *Si $m>6$, l'équation générale du degré m ne peut être resolue par aucune combinaison d'équations binômes avec des équations de degré inférieur à m et des équations relatives à la division des fonctions abéliennes.*

Adjoignons en effet à l'equation considérée la racine carrée de son discriminant. Son ordre se réduit à $\frac{1.2\dots m}{2}$, et il est aisé de voir qu'elle devient simple. Aucune adjonction d'équation simple ne pourra

*) Nous devons à M. Kronecker la communication de cet important résultat.

donc la résoudre si l'équation auxiliaire n'a elle-même pour ordre $\frac{1 \cdot 2 \ldots m}{2}$.

Cela posé, la résolution d'une équation binôme équivaut à la résolution successive d'équations simples, dont l'ordre étant premier, diffère de $\frac{1 \cdot 2 \ldots m}{2}$. La résolution d'une équation de degré inférieur à m équivaut à célle d'une suite d'équations simples, dont l'ordre, divisant $1 \cdot 2 \ldots (m-1)$, est inférieur à $\frac{1 \cdot 2 \ldots m}{2}$. Enfin la résolution d'une des équations de la division des fonctions abéliennes équivaut à celle d'une suite d'équations simples, dont l'ordre est premier, ou égal à $\frac{\mu \Omega_n}{2} = \frac{\mu (p^{2n}-1) p^{2n-1} \ldots (p^2-1) p}{2}$, p étant premier, et μ égal à 1 ou à 2. D'ailleurs ce dernier nombre ne peut étre égal à $\frac{1 \cdot 2 \ldots m}{2}$. Car il faudrait pour cela que $1 \cdot 2 \ldots m$ fût divisible par $p^{(2n-1)n}$: mais alors il serait plus grand que $\mu \Omega_n$. Donc aucune des équations simples auxiliaires ne pourra prouver la résolution de la proposée.

Remarque. Il peut exister dans quelques cas particuliers certaines relations entre les modules, en vertu desquelles le groupe de l'équation qui donne la division des périodes ne contienne plus qu'une partie des substitutions du groupe abélien. Ces cas d'exception échappent évidemment aux démonstrations précédentes.

Die Abbildung einer Fläche vierter Ordnung mit einer Doppelcurve zweiten Grades und einem oder mehreren Knotenpunkten.

Von G. Korndörfer in Giessen.

Herr Clebsch hat im 68ten Bande des Borchardt'schen Journals die Flächen vierter Ordnung, welche ausser einer Doppelcurve zweiten Grades keine weiteren Besonderheiten haben, auf einer Ebene abbilden gelehrt. Die Coordinaten eines Punktes der Fläche drücken sich dabei als rationale Functionen dritten Grades zweier Parameter aus, welche gleich Null gesetzt, Curven dritter Ordnung mit fünf gemeinschaftlichen Schnittpunkten darstellen.

Ich werde in vorliegendem Aufsatze mit Beziehung auf diese Abhandlung einige specielle Fälle der Fläche untersuchen, welche dadurch entstehen, dass ausser jener Doppelcurve die Fläche noch Knotenpunkte enthält, welche eine besondere Lage jener fünf Ausnahmspunkte gegeneinander bedingen. Die Existenz einiger solcher Fälle hat bereits Herr Kummer in den Monatsberichten der Berliner Acad. von 1863 nachgewiesen, die der übrigen kürzlich Herr Cayley.

Erster Fall.

Die Fläche besitzt ausser der Doppelpunktscurve noch einen besonderen Knotenpunkt.

§. 1.

Wenn von den fünf Ausnahmspunkten drei, etwa 1, 2, 3 in einer Geraden liegen, so lässt sich durch folgende Betrachtung die Existenz jenes Knotenpunkts nachweisen. Jeder ebene Schnitt der Fläche bildet sich ab als eine Curve dritter Ordnung durch die fünf Fundamentalpunkte. Ihre Gleichung ist $\Sigma \mu_i f_i = 0$. Legt man den μ_i die Bedingung auf, durch einen weiteren Punkt jener Geraden zu gehen, so zerfällt die Curve in diese Gerade selbst und eine Kegelschnittschaar durch die zwei andern Fundamentalpunkte. Jeder Kegelschnitt durch zwei Fundamentalpunkte ist die Abbildung einer Raumcurve vierter Ordnung, jeder Kegelschnitt dieser Schaar muss demnach die Abbildung einer ebenen

Curve vierter Ordnung sein. Die charakteristische Zahl p derselben ist gleich Null, weshalb die Curve drei Doppelpunkte besitzen muss. Daraus folgt, die Ebenen dieser Curven sind entweder einfache Berührungsebenen der Fläche oder sie gehen alle durch einen weiteren Knotenpunkt der Fläche. Ersterer Fall ist auszuschliessen; denn die Curven, welche durch den Schnitt zweier nicht durch einen Knotenpunkt gehenden Ebenen entstehen, schneiden sich in vier Punkten, folglich auch ihre Bilder, während je zwei der obigen Kegelschnitte nur zwei Schnittpunkte liefern.

Jeder Kegelschnitt schneidet die Abbildung der Doppelcurve noch in zwei Punktepaaren, welche die Abbildungen zweier Doppelpunkte der Curve vierter Ordnung sind; der andere im Knotenpunkte bildet sich ab als das Schnittpunktepaar jener Geraden mit dem betreffenden Kegelschnitt. Ich werde später noch direct zeigen, wie sich jener Knotenpunkt der Fläche als Gerade durch drei Fundamentalpunkte abbildet.

§. 2.

Bezeichnet N die Ordnung einer Raumcurve auf der Fläche, n die ihrer Abbildung, so stehen beide in der Relation

$$N = 3n - \Sigma\alpha,$$

wo die Zahlen α angeben, wie oft die Abbildung durch die einzelnen Fundamentalpunkte gehe.

Die Abbildung einer geraden Linie ist wieder eine Gerade durch zwei Fundamentalpunkte. Solcher sind sieben. Es liegen demnach auf der Fläche 12 Gerade; von diesen werden fünf durch die Fundamentalpunkte 1, 2, 3, 4, 5 abgebildet; die übrigen, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12 sind beziehungsweise die Verbindungslinien 1—4, 1—5, 2—4, 2—5, 3—4, 3—5, 4—5. Von diesen Geraden schneiden sich 4 im Knotenpunkt, 1, 2, 3, 12. Die Gerade 12 ist die bei der Abbildung bevorzugte; diese Art der Abbildung kann demnach auf vier verschiedene Arten geleistet werden. Jede Gerade, welche durch den Knotenpunkt geht, wird von fünf anderen geschnitten; jede Gerade, die nicht durch ihn geht, von vier. Daraus folgt, dass sich alle 12 Geraden in 26 Punkten schneiden, wobei jedoch der Knotenpunkt als sechsfacher Schnittpunkt mitgerechnet ist. Ausser demselben existiren also noch 20 Schnittpunkte.

Folgende Tabelle giebt eine Uebersicht über die Schnittpunkte.

$$\left\{\begin{array}{rl} 1 & \text{wird geschnitten von} \quad 6,\ 7,\ 2,\ 3,\ 12 \\ 2 & \text{wird geschnitten von} \quad 8,\ 9,\ 1,\ 3,\ 12 \\ 3 & \text{wird geschnitten von} \quad 10,\ 11,\ 1,\ 2,\ 12 \\ 12 & \text{wird geschnitten von} \quad 1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5 \end{array}\right\}$$

$$\left\{\begin{array}{l} 4 \text{ wird geschnitten von } 12, 6, 8, 10 \\ 5 \text{ wird geschnitten von } 12, 7, 9, 11 \\ 6 \text{ wird geschnitten von } 1, 4, 9, 11 \\ 7 \text{ wird geschnitten von } 1, 5, 8, 10 \end{array}\right\}$$

$$\left\{\begin{array}{l} 8 \text{ wird geschnitten von } 2, 4, 7, 11 \\ 9 \text{ wird geschnitten von } 2, 5, 6, 10 \\ 10 \text{ wird geschnitten von } 3, 4, 7, 9 \\ 11 \text{ wird geschnitten von } 3, 5, 6, 8 \end{array}\right\}.$$

Alle Geraden, die eine und dieselbe schneiden, treffen einander nicht, mit Ausnahme der durch den Knotenpunkt gehenden.

Die Geraden bilden 26 Paare; die Scheitel von sechs derselben stossen im Knotenpunkt zusammen.

Diese 26 Paare lassen sich in vier Gruppen bringen, deren jede Gruppe alle 12 Geraden enthält. Die erste Gruppe enthält acht Paare, die so paarweise einander conjugirt sind, dass immer zwei conjugirte Paare eine gemeinsame Gerade besitzen. Sie sind:

$$\left\{\begin{array}{c} 6, 1 \\ 8, 2 \\ 10, 3 \\ 12, 5 \end{array}\right\} \quad \left\{\begin{array}{c} 7, 1 \\ 9, 2 \\ 11, 3 \\ 12, 4 \end{array}\right\}.$$

Von den drei folgenden Gruppen besitzt jede sechs Paare, die aus je zwei conjugirten Systemen von je drei Paaren bestehen.

Die Paare jedes Systems schneiden sich unter einander nicht; dagegen wird jedes Paar eines Systems von jedem Paar des conjugirten Systems geschnitten.

Diese drei Gruppen sind:

$$\left\{\begin{array}{c} 10, 4 \;;\; 7, 8 \\ 11, 5 \;;\; 6, 9 \\ 1, 2 \;;\; 12, 3 \end{array}\right\} \quad \left\{\begin{array}{c} 6, 4 \;;\; 8, 11 \\ 7, 5 \;;\; 9, 10 \\ 2, 3 \;;\; 12, 1 \end{array}\right\} \quad \left\{\begin{array}{c} 8, 4 \;;\; 6, 11 \\ 9, 5 \;;\; 7, 10 \\ 1, 3 \;;\; 12, 2 \end{array}\right\}.$$

Die Ebene jedes Paares, dessen Scheitel der Knotenpunkt, ist eine doppelt berührende Ebene der Fläche. Die Ebene jedes andern eine dreifach berührende Ebene der Fläche.

Die acht Paare der ersten Gruppe bilden 12 windschiefe Vierecke, welche in dem Knotenpunkte eine gemeinsame Ecke besitzen. Es sind folgende:

$$\left\{\begin{array}{l} 1, 6, 2, 9 \;;\; 1, 7, 2, 8 \;;\; 2, 8, 3, 11 \;;\; 2, 9, 12, 5 \\ 1, 6, 3, 11 \;;\; 1, 7, 3, 10 \;;\; 2, 8, 12, 4 \;;\; 3, 10, 12, 4 \\ 1, 6, 12, 4 \;;\; 1, 7, 12, 5 \;;\; 2, 9, 3, 10 \;;\; 3, 11, 12, 5 \end{array}\right\}.$$

Die 18 Paare der drei folgenden Gruppen bilden ebenfalls zwölf windschiefe Vierecke. Es sind diese:

$$\left\{\begin{array}{l} 6\,,4\,,8\,,11\;;\;8\,,4\,,6\,,11\;;\;4\,,10\,,6\,,9 \\ 6\,,4\,,9\,,10\;;\;8\,,4\,,7\,,10\;;\;4\,,10\,,7\,,8 \\ 7\,,5\,,8\,,11\;;\;9\,,5\,,6\,,11\;;\;5\,,11\,,6\,,9 \\ 7\,,5\,,9\,,10\;;\;9\,,5\,,7\,,10\;;\;5\,,11\,,7\,,8 \end{array}\right\}.$$

Vier einander nicht schneidende Geraden bilden eine „Vier." Jeder „Vier" ist eine andere „Vier" zugeordnet, welche beide zusammen eine „Doppelvier" bilden. Es giebt 10 Vieren, welche zusammen fünf Doppelvieren bilden. Eine Doppelvier enthält die Geraden

$$\left\{\begin{array}{l} 4\,,7\,,9\,,11 \\ 5\,,6\,,8\,,10 \end{array}\right\}.$$

Jede Gerade dieser beiden Vieren hat die Eigenschaft, dass sie die drei Geraden schneidet, welche über ihr oder unter ihr stehen, hingegen die vierte, welche direct über ihr oder unter ihr steht, nicht. Also die Gerade 7 schneidet die Geraden 5, 8, 10, nicht aber die Gerade 6. Die 4 anderen Doppelvieren sind:

$$\left\{\begin{array}{l} 6\,,8\,,10\,,12 \\ 7\,,9\,,11\,,12 \end{array}\right\}\left\{\begin{array}{l} 1\,,8\,,10\,,5 \\ 1\,,9\,,11\,,4 \end{array}\right\}\left\{\begin{array}{l} 2\,,6\,,10\,,5 \\ 2\,,7\,,11\,,4 \end{array}\right\}\left\{\begin{array}{l} 3\,,7\,,9\,,4 \\ 3\,,6\,,8\,,5 \end{array}\right\}.$$

Je zwei conjugirte Vieren haben eine gemeinsame Gerade; was das Schneiden der Geraden aus conjugirten Vieren betrifft, so gilt dieselbe Regel wie oben, wenn man von der gemeinsamen Geraden absieht.

§. 3.

Die Abbildung der Doppelcurve ist, wie Herr Clebsch a. a. O. gezeigt hat, eine Curve dritter Ordnung durch die fünf Fundamentalpunkte, welche aus einer Reihe von Punktepaaren besteht, den Abbildungen der einzelnen Punkte der Doppelcurve. Der Curvenbüschel dritter Ordnung, der durch den Schnitt des durch die Gerade 12 gelegten Ebenenbüschels mit der Fläche entsteht, bildet sich als ein Strahlbüschel ab, dessen Scheitel P die Abbildung des Punktes der Fläche ist, der dem Schnitte der Geraden 12 mit der Doppelcurve vereinigt liegt. Um ihn zu finden, legt man in dem Ausdrucke

$$\Sigma\mu_i\, f_i = 0$$

den μ_i nur die Bedingung auf, dass diese Curve durch zwei weitere Punkte der Geraden 12 gehe. Die Curve dritter Ordnung zerfällt dann hier in drei Gerade $a.\,b.\,(c+\mu d)=0$, wo $a=0$ die Verbindungslinie von 1, 2, 3, $b=0$ die Verbindungslinie von 4 und 5 ist; $c+\mu d=0$ ist der Strahlbüschel, der Schnitt $c=0$ mit $d=0$ giebt den Punkt P. Um den auf der Fläche mit P vereinigten Punkt P' zu finden, welcher der Schnitt der Geraden 12 mit der Doppelcurve ist, müssen die vier Ausdrücke $f_1\, f_2\, f_3\, f_4$ für die Coordinaten beider

Punkte dieselben Verhältnisse wie für P liefern. Bezeichnet man die durch Einsetzen der Coordinaten des Punktes P entstehenden Ausdrücke durch angehängte Null und nimmt etwa abc für f_1, abd für f_2, so dass diese Functionen für P verschwinden, so genügen die Coordinaten des Punktes P' der Gleichung $f_3 f_1^0 - f_1 f_3^0 = 0$. Der dritte Schnittpunkt der Curve mit der Abbildung der Geraden 12 liefert den Punkt P' (vgl. die ang. Abh.). Die Verbindungslinie PP' tangirt ausserdem die Curve dritter Ordnung in P. Jeder weitere durch P gehende Strahl schneidet dieselbe in einem Punktepaare, das die Abbildung des beweglichen Doppelpunkts jenes Curvenbüschels ist. Der Schnitt eines Strahls mit der Abbildungsgeraden des Knotenpunktes setzt sich mit dem Schnitt der Geraden 12 und ersterer zur Abbildung des dritten festen Doppelpunktes zusammen. Die Berührungspunkte der von P an die Curve dritter Ordnung gezogenen vier Tangenten sind die Abbildungen der vier Rückkehrpunkte der Doppelcurve.

Bildet sich die Gerade ab als eine Gerade durch zwei andere Fundamentalpunkte, so ist die Abbildung des Curvenbüschels dritter Ordnung ein Kegelschnittbüschel. Man findet dasselbe, wenn man in dem Ausdruck $\Sigma \mu_i f_i = 0$ den μ_i die Bedingung auferlegt, durch zwei weitere Punkte jener Geraden zu gehen; er nimmt dann die Form an

$$A(\varphi + \lambda \psi) = 0.$$

Jene Kegelschnitte schneiden sich dann noch in einem vierten Punkte, welcher dem Punkte P analog ist. Jeder Kegelschnitt schneidet die Abbildung der Doppelcurve jetzt noch in einem Punktepaare, welches die Abbildung des beweglichen Doppelpunktes des Curvenbüschels ist. Unter jener Schaar von Kegelschnitten finden sich vier, welche die Curve berühren; die Berührungspunkte sind abermals die Abbildungen der Rückkehrpunkte. Bildet sich die Gerade ab als Fundamentalpunkt 4 oder 5, so ist die Abbildung des Curvenbüschels dritter Ordnung auch ein Curvenbüschel dritter Ordnung mit einem Doppelpunkte in 4 oder 5. Dies verlangt zwei Bedingungsgleichungen zwischen den μ_i, also schneiden sich jene Curven noch in einem neunten Punkte, welcher dem Punkte P analog ist. Jede dieser Curven schneidet die Abbildung der Doppelcurve noch in einem Punktepaare, das die Abbildung des beweglichen Doppelpunktes der Schaar vorstellt. Unter jener Schaar finden sich vier, welche die Curve dritter Ordnung selbst berühren, und die Berührungspunkte geben wieder die Abbildung der Rückkehrpunkte.

Bildet sich die Gerade ab als Fundamentalpunkt 1, 2 oder 3, so ist die Abbildung des Curvenbüschels dritter Ordnung ein Kegelschnittbüschel, das ausserdem beziehungsweise durch 1, 2 oder 3 geht. Der vierte gemeinsame Schnittpunkt desselben ist der dem Punkte P analoge, P' liegt dann in 1, 2, 3 selbst. Der Schnitt eines der Kegelschnitte mit der Abbildung des Knotenpunktes setzt sich mit jenem Punkte 1, 2, 3 zur Abbildung des zweiten festen Doppelpunktes zusammen. Die Rückkehrpunkte ergeben sich wie oben.

§. 4.

Jede Ebene, welche durch den Knotenpunkt geht und die Fläche noch in einem Punkte berührt, schneidet Kegelschnitte aus der Fläche aus. Jede Ebene, welche nicht durch den Knotenpunkt geht und die Fläche in zwei verschiedenen Punkten berührt, schneidet ebenfalls Kegelschnitte aus. Die Ebenen der letzteren sind doppelt berührende Ebenen der Fläche. Jeder Kegelschnitt bildet sich ab entweder als Gerade durch einen Fundamentalpunkt, oder als Kegelschnitt durch vier Fundamentalpunkte. Es giebt sonach acht Kegelschnittschaaren, welche paarweise zu einander conjugirt sind. Sechs Schaaren gehen nicht durch den Knotenpunkt, wohl aber beiden andern. Ist die Abbildung eines Kegelschnitts eine Gerade durch einen Fundamentalpunkt, so ist die Abbildung des conjugirten ein Kegelschnitt durch die vier anderen. Die beiden Schaaren durch den Knotenpunkt bilden sich ab als zwei Strahlbüschel, deren Scheitel die Punkte 4 und 5 sind. Alle Kegelschnitte der beiden letzten Schaaren schneiden sich im Knotenpunkte, Kegelschnitte aus conjugirten Schaaren noch in einem weitern Punkte. Was den Schnitt der andern sechs Schaaren anbelangt, so hat man den Satz: Kegelschnitte derselben Schaar schneiden sich gar nicht, aus conjugirten Schaaren in zwei Punkten. Die Paare obiger vier Gruppen sind diesen der Art zugeordnet, dass wenn eine Schaar die Paare einer Gruppe als specielle Fälle in sich schliesst, diese von den Kegelschnitten der conjugirten Schaar getroffen werden; und die conjugirten Paare derselben Gruppe sind specielle Fälle der letztern Schaar und werden von der ersteren geschnitten.

Diese Kegelschnitte ergänzen sich mit Raumcurven sechster Ordnung zu vollständigen Durchschnitten der Fläche vierter Ordnung mit Flächen zweiter Ordnung. Die Abbildung eines vollständigen Durchschnitts ist eine Curve sechster Ordnung mit einem Doppelpunkt in jedem Fundamentalpunkt. Bildet sich der Kegelschnitt als Gerade ab, so ist die Abbildung der ergänzenden Curve eine Curve fünfter Ordnung durch jenen Fundamentalpunkt und mit Doppelpunkten in jedem der vier anderen; die Abbildung der Raumcurven sechster Ordnung, welche zu dem conjugirten Kegelschnitte gehört, ist eine Curve vierter Ordnung, welche durch jene vier einfach, durch den ersten doppelt geht. Auf diese Art entstehen sechs siebenfach unendliche Schaaren von Raumcurven sechster Ordnung, die einander paarweise zugeordnet sind und die nicht durch den Knotenpunkt gehen. Curven derselben Schaar schneiden sich in acht Punkten, aus zugeordneten Schaaren in zehn, Curven aus verschiedenen Schaaren in neun; jede trifft ihren ergänzenden Kegelschnitt in vier Punkten und noch zweimal auf der Doppelcurve, die vier ersten sind einfache Berührungspunkte der Fläche zweiter Ordnung mit der Fläche vierter Ordnung; ausserdem besitzt die Raumcurve sechster Ordnung noch zwei wirkliche Doppelpunkte auf der Doppelcurve und sechs scheinbare. Ihre charakteristische Zahl ist $p=2$. Diese Schnitte entstehen dadurch, dass die Fläche zweiter Ordnung die gegebene in vier verschiedenen Punkten berührt. Es giebt noch zwei siebenfach unendliche Schaaren von Raumcurven sechster Ordnung, welche die durch den Knotenpunkt gehenden Kegelschnitte zu vollständigen Durchschnitten ergänzen. Sie bilden sich ab als Curven vierter Ordnung mit einem Doppelpunkt in den Fundamentalpunkten 4 oder 5, welche durch die anderen Fundamentalpunkte einfach gehen. Alle diese Raumcurven gehen durch den Knotenpunkt; solche, die zu einer Schaar gehören, schneiden sich dann noch in acht, Curven verschiedener Schaaren in neun Punkten. Jede trifft ihren ergänzenden Kegelschnitt in drei Punkten, und noch zweimal auf der Doppelcurve. Die drei ersten sind einfache Berührungspunkte beider Flächen. Die Raumcurve sechster Ordnung besitzt dann noch zwei wirkliche Doppelpunkte auf der Doppelcurve und sechs scheinbare, $p = 2$. Diese Schnitte entstehen dadurch, dass die Fläche zweiter Ordnung durch den Knotenpunkt geht, und die Fläche vierter Ordnung in drei Punkten berührt.

§. 5.

Wir gehen jetzt zur Betrachtung der auf der Fläche liegenden Raumcurven dritter Ordnung über. Dieselben zerfallen auch in zwei Gruppen, solche, welche durch den Knotenpunkt gehen, und solche, welche ihn nicht treffen. Die zur ersteren Gruppe gehörigen bilden sich ab, wie aus der Formel $N = 3n - \Sigma\alpha$ folgt:

1) $n = 1, \alpha = 0$.

Es giebt eine doppelt unendliche Schaar, deren Gebilde sich als Gerade durch keinen Fundamentalpunkt abbilden.

2) $n = 2$, drei $\alpha = 1$, die anderen 0.

Es giebt drei doppelt unendliche Schaaren, die sich als Kegelschnitte durch drei Fundamentalpunkte abbilden.

Jeder Schaar sind zwei sich nicht schneidende Gerade zugeordnet, welche von derselben nicht getroffen werden, alle andern Geraden werden einmal geschnitten. Curven derselben Schaar schneiden sich ausser dem Knotenpunkte noch in einem weiteren Punkte, Curven aus verschiedenen Schaaren noch in zwei Punkten. Die zur zweiten Gruppe gehörigen bilden sich folgendermassen ab:

1) $n = 2$, drei $\alpha = 1$, die anderen 0.

Es giebt sechs doppelt unendliche Schaaren, welche sich als Kegelschnitte durch drei Fundamentalpunkte abbilden.

2) $n = 3$, ein $\alpha = 2$, vier $\alpha = 1$.

Es giebt zwei doppelt unendliche Schaaren, welche sich als Curven dritter Ordnung mit einem Doppelpunkt in einem Fundamentalpunkt abbilden. Jede Schaar ist einer Geraden zugeordnet, welche sie zweimal schneidet; die Geraden, welche diese schneiden, trifft sie gar nicht, alle anderen einmal. Curven derselben Schaar schneiden sich in einem Punkte, Curven verschiedener Schaaren, deren zugeordnete Geraden sich nicht schneiden, in zwei Punkten, solche, deren zugeordnete Gerade sich schneiden, in drei Punkten.

Jede dieser Raumcurven dritter Ordnung ergänzt sich mit einer Raumcurve fünfter Ordnung zu einem vollständigen Durchschnitt der Fläche vierter Ordnung mit einer Fläche zweiter Ordnung. Die zur ersten Gruppe gehörigen sind:

ad 1). Hierzu gehört eine fünffach unendliche Schaar Raumcurven fünfter Ordnung, die sich abbildet als Curvenschaar vierter Ordnung mit Doppelpunkten in den Fundamentalpunkten 4 und 5, einfachen Punkten in 1, 2, 3.

ad 2). Hierzu gehören drei fünffach unendliche Schaaren, die sich abbilden als Curven dritter Ordnung durch vier Fundamentalpunkte. Das p dieser Curven ist 1.

Curven derselben Schaar schneiden sich in fünf, aus verschiedenen Schaaren in sechs Punkten.

Jede dieser Raumcurven fünfter Ordnung schneidet sich mit ihrer zugehörigen Raumcurve dritter Ordnung dreimal auf der Doppelcurve, ausserdem noch in vier weiteren Punkten, welche einfache Berührungspunkte der Fläche mit der Fläche zweiter Ordnung sind; dann besitzt jede noch einen wirklichen Doppelpunkt auf der Doppelcurve.

Die zur zweiten Gruppe gehörigen sind:

ad 1). Es giebt sechs fünffach unendliche Schaaren, die sich als Curven vierter Ordnung mit Doppelpunkten in zwei einfachen Punkten in den drei andern Fundamentalpunkten abbilden.

ad 2). Es giebt zwei fünffach unendliche Schaaren, die sich als Curven dritter Ordnung durch vier Fundamentalpunkte abbilden.

Curven derselben Schaar schneiden sich in fünf Punkten, Curven verschiedener Schaaren, deren ergänzende Raumcurven dritter Ordnung sich nicht schneidenden Geraden zugeordnet sind, in sechs Punkten, wenn sie dagegen sich einander schneidenden Geraden zugeordnet sind, in sieben Punkten.

Jede Raumcurve dritter Ordnung schneidet die ihr zugeordnete Raumcurve fünfter Ordnung dreimal auf der Doppelcurve und noch in fünf weiteren Punkten, die einfache Berührungspunkte beider Flächen sind. Jede Raumcurve fünfter Ordnung besitzt noch einen wirklichen Doppelpunkt auf der Doppelcurve. Damit ein derartiges Zerfallen der Schnittcurve eintreten kann, muss die Fläche zweiter Ordnung die Fläche vierter Ordnung in fünf verschiedenen Punkten berühren.

§. 6.

Die Abbildung der Raumcurven vierter Ordnung erhält man der Formel $N = 3n - \Sigma\alpha$ entsprechend:

I. Raumcurven vierter Ordnung, die nicht durch den Knotenpunkt gehen.

1) $n = 2$, zwei $\alpha = 1$, die anderen 0.

Es giebt drei dreifach unendliche Schaaren, welche sich als Kegelschnitte durch zwei auf der Geraden 1, 2, 3 gelegene Fundamentalpunkte abbilden.

2) $n = 4$, drei $\alpha = 2$, die anderen 1.

Es giebt drei dreifach unendliche Schaaren, welche sich als Curven vierter Ordnung abbilden, die in drei Fundamentalpunkten Doppelpunkte, in den andern einfache besitzen. Jede dieser drei Schaaren ergänzt je eine der vorigen zu vollständigen Durchschnitten.

3) $n = 3$, ein $\alpha = 2$, drei $\alpha = 1$, ein $\alpha = 0$.

Es giebt 8 dreifach unendliche Schaaren, die sich als Curven dritter Ordnung mit einem Doppelpunkt abbilden. Die Schaaren sind einander paarweise conjugirt. Alle diese Curven sind zweiter Species, $p = 0$. Curven derselben Schaar schneiden sich in 2 Punkten, Curven conjugirter Schaaren in sechs, diese bilden einfache Berührungspunkte der Flächen zweiter und vierter Ordnung. Curven aus conjugirten Schaaren schneiden sich ausserdem noch viermal auf der Doppelcurve.

4) $n = 3$, alle $\alpha = 1$.

Es giebt eine vierfach unendliche Schaar von Raumcurven vierter Ordnung und erster Species, die nicht durch den Knotenpunkt geht und die sich als eine Curvenschaar dritter Ordnung durch sämmtliche Fundamentalpunkte abbildet. Irgend zwei Curven der Schaar ergänzen sich zu einem vollständigen Durchschnitt und schneiden sich viermal auf der Doppelcurve und noch in vier weiteren Punkten. Diese Schaar enthält als specielle Fälle 1) sämmtliche ebenen Schnitte, die nicht durch den Knotenpunkt gehen; 2) die Doppelschaar, welche aus zwei Gebilden zweier conjugirter Kegelschnittschaaren entsteht; 3) jede gerade Linie, die nicht durch den Knotenpunkt geht, sammt der zugehörigen Curvenschaar dritter Ordnung und endlich 4) die zwölf windschiefen Vierecke, die keine Ecke im Knotenpunkte besitzen.

II. Raumcurven vierter Ordnung, welche durch den Knotenpunkt gehen.

1) Es giebt sechs dreifach unendliche Schaaren, welche sich als Kegelschnitte durch zwei Fundamentalpunkte abbilden, von denen einer ausserhalb der Gerden 1, 2, 3, der andere auf ihr liegt.

2) Es giebt sechs dreifach unendliche Schaaren, welche sich als Curven dritter Ordnung mit einem Doppelpunkt in einem Fundamentalpunkt, und welche durch drei weitere einfach hindurchgehen, abbilden und den vorigen conjugirt sind. Curven derselben Schaar schneiden sich in zwei Punkten, Curven aus conjugirten Schaaren in fünf ausser dem Knotenpunkte. Diese fünf Punkte sind einfache Berührungspunkte der beiden sich schneidenden Flächen. Alle diese Raumcurven vierter Ordnung sind zweiter Species. Es giebt jetzt noch eine dreifach unendliche Schaar von Raumcurven vierter Ordnung, die in dem Knotenpunkte einen Doppelpunkt besitzen, welche sich als Kegelschnitte durch die Fundamentalpunkte 4 und 5 abbilden. Dieselben sind in der Schaar (I, 4.) enthalten und ergänzen sich mit Raumcurven vierter Ordnung und erster Species zu vollständigen Durchschnitten. Diese Schaar begreift als specielle Fälle in sich: 1) diejenigen ebenen Schnitte der Fläche, welche durch den Knotenpunkt gehen; 2) die Doppelschaar, welche aus zwei conjugirten Kegelschnitten oder zwei durch den Knotenpunkt gehenden Kegelschnittschaaren besteht; 3) jede durch den Knotenpunkt gehende Gerade mit der zugehörigen Curvenschaar dritter Ordnung; 4) die zwölf windschiefen Vierecke, die eine gemeinsame Ecke im Knotenpunkt besitzen.

Analytische Behandlung der Fläche.

§. 7.

Die Gleichung der Fläche vierter Ordnung, welche ausser der Doppelpunktscurve zweiten Grades noch einen einzelnen Knotenpunkt besitzt, ist von der Form $\varphi^2 - 4p^2\psi = 0$. Hierin stellt $\psi = 0$ einen Kegel zweiter Ordnung vor, dessen Spitze auf der Fläche zweiter Ordnung $\varphi = 0$ liegt. Die Spitze des Kegels ψ ist der Knotenpunkt, der Schnitt und $\varphi = 0$ mit $p = 0$ liefert die Doppelcurve, welche noch von dem Kegel ψ in den vier Rückkehrpunkten der Fläche geschnitten wird. Der Kegel ψ berührt ausserdem die Fläche vierter Ordnung längs einer Curve zweiter Ordnung. Sämmtliche Tangentenebenen des Kegels ψ schneiden demnach Kegelschnittpaare aus der Fläche aus, die im Knotenpunkte einen gemeinsamen Schnittpunkt besitzen. Der

Kegel K zweiter Ordnung, welcher im Knotenpunkt selbst die Fläche vierter Ordnung ringsum berührt, wird von der Ebene der Doppelcurve in einem Kegelschnitt geschnitten. Verbindet man die vier Schnittpunkte desselben und der Doppelcurve mit der Spitze von ψ, so erhält man die vier auf der Fläche liegenden Geraden, die ihren Vereinigungspunkt im Knotenpunkte besitzen. Durch jede dieser Geraden lassen sich zwei Tangentenebenen an den Kegel ψ legen. Die Curve dritter Ordnung, welche jede dieser aus der Fläche herausschneidet, muss nothwendigerweise in eine Gerade und einen Kegelschnitt zerfallen. Auf diese Art erhält man die anderen acht Geraden der Fläche; man kann sich auch leicht überzeugen, dass ausser diesen keine Gerade mehr auf der Fläche liegen kann. Die acht Tangentenebenen enthalten die acht Geradenpaare der beiden conjugirten Kegelschnittschaaren. Man kann dieses benutzen, um die Schnittpunkte der acht Geraden mit der Doppelschnittscurve geometrisch zu finden, wenn diese und die Schnitte ihrer Ebene mit den beiden Kegeln K und ψ verzeichnet vorliegen. Man zieht aus den vier Schnittpunkten jener mit K die acht Tangenten an ψ, so schneiden diese die Doppelpunktscurve in weiteren acht Punkten, welche die gesuchten sind.

Man kann die Gleichung der Fläche auf folgende Form bringen:

$$(\varphi^2 + 2\lambda p^2)^2 = 4p^2 (\psi + \lambda\varphi + \lambda^2 p^2)$$

Die Flächenschaaren

$$\left\{\begin{array}{r} \psi + \lambda\varphi + \lambda^2 p^2 = 0 \\ \varphi + 2\lambda p^2 = 0 \end{array}\right\}$$

durchschneiden sich in Raumcurven vierter Ordnung, erster Species, welche auf der Fläche liegen. Aus der Form dieser beiden Gleichungen geht hervor, dass die ganze Schaar $\psi + \lambda\varphi + \lambda^2 p^2 = 0$ von der Fläche $\varphi^2 - 4p^2\psi = 0$ umhüllt wird. Legt man ein Coordinatentetraeder zu Grunde, von welchem drei Ecken die Nebenecken des aus den vier Rückkehrpunkten gebildeten vollständigen Vierecks sind, und dessen andere Ecke die Spitze des Kegels ψ ist, so lässt sich die Gleichung der Fläche schreiben:

$$[ax^2 + by^2 + cz^2 + 2p(\alpha x + \beta y + \gamma z)]^2 = 4p^2(x^2 + y^2 + z^2).$$

Oder:

$$[ax^2 + by^2 + cz^2 + 2p(\alpha x + \beta y + \gamma z) + 2\lambda p^2]^2$$
$$= 4p^2[x^2(1+\lambda a) + y^2(1+\lambda b) + z^2(1+\lambda c) + 2p(\alpha x + \beta y + \gamma z)\lambda + \lambda^2 p^2].$$

Wählt man λ so, dass die Gleichung

$$x^2(1+\lambda a) + y^2(1+\lambda b) + z^2(1+\lambda c) + \lambda^2 p^2 + 2p(\alpha x + \beta y + \gamma z) = 0$$

einen Kegel zweiter Ordnung vorstellt, so erhält man eine kubische Gleichung für λ:

$$1 = \frac{\alpha^2}{a+\lambda} + \frac{\beta^2}{b+\lambda} + \frac{\gamma^2}{c+\lambda}.$$

Dieses giebt die drei Kegel, welche die Fläche vierter Ordnung doppelt berühren und deren sämmtliche Tangentenebenen Kegelschnittpaare aus der Fläche ausschneiden. Die Coordinaten der Spitzen der drei Berührungskegel werden aus den Gleichungen gefunden:

$$\left\{\begin{array}{l}(a+\lambda)\,x+\alpha p=0\\(b+\lambda)\,y+\beta p=0\\(c+\lambda)\,z+\gamma p=0\end{array}\right\}.$$

Dieses sind zugleich die Gleichungen einer Raumcurve dritter Ordnung, welche durch die drei Kegelspitzen, den Knotenpunkt, und die drei Nebenecken des vollständigen Vierecks geht. Die Gleichung der Ebene der drei Kegelspitzen ist $\alpha x+\beta y+\gamma z+p=0$; sie schneidet sich mit der im Knotenpunkte an die Fläche $\varphi=0$ gezogene Tangentenebene auf der Ebene der Doppelcurve. Verbindet man die drei Nebenecken des aus den vier Schnittpunkten des Kegelschnitts K mit der Doppelcurve gebildeten vollständigen Vierecks mit dem Knotenpunkt, so schneiden diese drei Geraden die Ebene

$$\alpha x+\beta y+\gamma z+p=0$$

in den drei Kegelspitzen.

Jede auf der Fläche liegende Gerade muss in einer Tangentenebene jedes der drei doppelt berührenden Kegel liegen, es kann aber keine in zwei verschiedenen Tangentenebenen eines und desselben Kegels enthalten sein. Daraus folgt, dass die zwölf Geraden sich dreimal zu sechs Paaren gruppiren müssen, die in jeder dieser drei Doppelschaaren vorkommen. Die sechs Paare einer Doppelschaar vertheilen sich in zwei Gruppen zu drei, und drei Paare kommen in jeder Schaar vor.

Bedeutet $A+2\varrho B+\varrho^2 C=0$ die Gleichung einer variablen Tangentenebene des Kegels ψ, so lässt sich dieser in der Form schreiben $\psi=B^2-AC$ und für den Schnitt der Tangentenebene mit der Fläche vierter Ordnung ist $\psi=(B+\varrho C)^2$. Die Flächengleichung wird dann

$$\varphi^2-4p^2\,(B+\varrho C)^2=0,$$

was sich in die beiden Factoren

$$\begin{aligned}\varphi-2p\,(B+\varrho C)&=0\\ \varphi+2p\,(B+\varrho C)&=0\end{aligned}$$

zerlegen lässt. Jeder Factor in Verbindung mit $A+2\varrho B+\varrho^2 C=0$ giebt eine Kegelschnittschaar des Kegels ψ.

Zweiver schiedene Kegelschnitte derselben, etwa der zweiten Schaar werden durch den Complex der Gleichungen

$$\begin{aligned}A+2\varrho B+\varrho^2 C&=0 \qquad & \varphi+2p\,(B+\varrho C)&=0\\ A+2\sigma B+\sigma^2 C&=0 \qquad & \varphi+2p\,(B+\sigma C)&=0\end{aligned}$$

dargestellt. Aus den beiden ersten folgt $2B+(\sigma+\varrho)\,C=0$; aus den beiden letzten $p . C = 0$. Die Bedingung $C = 0$ führt auf $A = 0$, $B = 0$. Daraus folgt, Kegelschnitte derselben Schaar schneiden sich nur im Knotenpunkt.

Für den Schnitt zweier Kegelschnitte aus conjugirten Schaaren hat man

$$A + 2\varrho B + \varrho^2 C = 0 \qquad \varphi + 2p(B + \varrho C) = 0$$
$$A + 2\sigma B + \sigma^2 C = 0 \qquad \varphi - 2p(B + \sigma C) = 0$$

Aus den beiden ersten Gleichungen folgt $2B + (\sigma + \varrho)\, C = 0$, wodurch die beiden letzten in einander übergehen. Daraus folgt, Kegelschnitte aus conjugirten Schaaren schneiden sich in zwei Punkten, von denen einer im Knotenpunkte liegt. Wird $\varrho = \sigma$, so erhält man aus den beiden letzten Gleichungen $p\,(B + \varrho C) = 0$; die beiden ersten fallen zusammen. Kegelschnitte aus conjugirten Schaaren, die in einer Ebene liegen, schneiden sich in vier Punkten, zwei liegen auf der Doppelcurve, einer im Knotenpunkt, der vierte in der Berührungscurve des Kegels ψ mit der Fläche.

Stellt man die Bedingung auf, dass die Ebene

$$A + 2\varrho B + \varrho^2 C = 0$$

die Fläche $\varphi + 2p\,(B + \varrho C) = 0$ berührt, so zerfällt die Schnittcurve in ein Linienpaar. Es ist $\psi = x^2 + y^2 + z^2 = B^2 - AC$. Daraus ergiebt sich, dass man setzen kann $B = x$, $A = y + iz$, $C = iz - y$. Die Flächengleichung wird dann

$$ax^2 + by^2 + cz^2 + 2p\,(\alpha x + \beta y + \gamma z) + 2p\,(x - \varrho y + \varrho i z) = 0,$$

die Tangentenebene

$$2\varrho x + y\,(1 - \varrho^2) + z\,(i + i\varrho^2) = 0.$$

Die Bedingung des Berührens wird durch die Gleichung ausgedrückt:

$$\begin{vmatrix} a & 0 & 0 & \alpha + 1 & 2\varrho \\ 0 & b & 0 & \beta - \varrho & 1 - \varrho^2 \\ 0 & 0 & c & \gamma + \varrho i & i + i\varrho^2 \\ \alpha + 1 & \beta - \varrho & \gamma + \varrho i & 0 & 0 \\ 2\varrho & 1 - \varrho^2 & i + i\varrho^2 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 0$$

Hieraus folgt durch eine einfache Determinantentransformation:

$$\begin{vmatrix} a & 0 & 0 & \alpha + 1 & \varrho(1 - \alpha) \\ 0 & b & 0 & \beta - \varrho & 1 - \beta\varrho \\ 0 & 0 & c & 4 + \varrho i & i - 4\varrho \\ \alpha + 1 & \beta - \varrho & 4 + \varrho i & 0 & 0 \\ \varrho\,(1 - \alpha) & 1 - \beta\varrho & i - 4\varrho & 0 & 0 \end{vmatrix} = 0.$$

Diese Gleichung vierten Grades in ϱ giebt die vier verschiedenen Werthe, welche den vier Geradepaaren entsprechen.

Bezeichnet λ eine Wurzel der cubischen Gleichung, welche dem Kegel K entspricht, so ist $K = \psi + \lambda\varphi + \lambda^2 p^2$. Führt man dieses in die Flächengleichung ein, so entsteht zunächst

$$(K - \psi + \lambda^2 p^2)^2 - 4Kp^2\lambda^2 = 0.$$

Bezeichnet $A + 2\varrho B + \varrho^2 C = 0$ die Gleichung einer beliebigen Tangentenebene von K, so hat man $K = B^2 - AC$ und für den Schnitt der Fläche mit der Ebene ist $K = (B + \varrho C)^2$. Durch Einführung dieses Werthes zerlegt sich die Flächengleichung in die beiden Factoren:

$$\psi = [(B + \varrho C) - \lambda p]^2$$
$$\psi = [(B + \varrho C) + \lambda p]^2,$$

welche in Verbindung mit $A + 2\varrho B + \varrho^2 C = 0$ die beiden conjugirten Kegelschnittschaaren des Kegels K ergeben.

Aus dem Complex der Gleichungen

$$A + 2\varrho B + \varrho^2 C = 0 \qquad [(B + \varrho C) - \lambda p]^2 = \psi$$
$$A + 2\sigma B + \sigma^2 C = 0 \qquad [(B + \sigma C) + \lambda p]^2 = \psi$$

folgt ähnlich, wie oben:

Kegelschnitte derselben Schaar schneiden sich nur auf der Doppelcurve; Kegelschnitte aus conjugirten Schaaren schneiden sich in zwei Punkten; Kegelschnitte, die in einer Ebene liegen, begegnen sich in vier Punkten, zweimal auf der Doppelcurve und zweimal auf der Berührungscurve von K mit der Fläche.

Wenn die Fläche $\psi = [(B + \varrho C) + \lambda p]^2$ von der Ebene

$$A + 2\varrho B + \varrho^2 C = 0$$

berührt wird, so zerfällt die Schnittcurve in ein Geradenpaar. Bezeichnet man eine Flächengleichung symbolisch mit $\alpha_x{}^2 = \beta_x{}^2 = \gamma_x{}^2 = \cdots$, so ist für das Berühren derselben mit einer Ebene $\mu_x = 0$ die Bedingung erforderlich $(\alpha\beta\gamma\mu)^2 = 0$. Bezeichnet man die Gleichung des Kegels ψ symbolisch mit $a_x{}^2 = b_x{}^2 = \cdots = \psi$, so schreibt sich diese Bedingung:

$$0 = (a, b, c, A + 2\varrho B + \varrho^2 C)^2 - 3(a, b, \lambda p + B + \varrho C, A + 2\varrho B + \varrho^2 C)^2,$$

oder

$$0 = (a, b, c, A + 2\varrho B + \varrho^2 C)^2 - 3(a, b, \lambda p + B + \varrho C, A + \varrho B - \lambda\varrho p)^2.$$

Dieses ist eine Gleichung vierten Grades für ϱ; der Coefficient von ϱ^4 aber muss nach dem Obigen verschwinden, damit die drei Geradenpaare dieser Kegelschnittschaar sich ergeben.

§. 8.

Wir hatten die beiden Gleichungen

$$\psi = [(B + \varrho C) - \lambda p]^2$$
$$\psi = [(B + \varrho C) + \lambda p]^2$$

in Verbindung mit der Ebene $A + 2\varrho B + \varrho^2 C = 0$. Ersetzt man den Ausdruck ψ durch $(B' + \sigma C')^2$, wenn $A' + 2\sigma B' + \sigma^2 C' = 0$ eine Tangentenebene des Kegels ψ bedeutet, so lässt sich jede dieser Gleichungen wieder in zwei Factoren zerlegen und es entstehen folgende vier Gleichungen:

$$\begin{aligned}
\lambda p + (B' + \sigma C') - (B + \varrho C) &= 0 \\
\lambda p - (B' + \sigma C') - (B + \varrho C) &= 0 \\
\lambda p + (B' + \sigma C') + (B + \varrho C) &= 0 \\
\lambda p - (B' + \sigma C') + (B + \varrho C) &= 0;
\end{aligned}$$

diese liefern in Verbindung mit den Gleichungen

$$\begin{aligned}
A + 2\varrho B + \varrho^2 C &= 0 \\
A' + 2\sigma B' + \sigma^2 C' &= 0
\end{aligned}$$

die Coordinaten der vier Schnittpunkte, in welchen die Schnittlinie der beiden Tangentenebenen von ψ und K die Fläche treffen. Diese vier Gleichungen sind zugleich vier projectivische Ebenenbündel, die ihre Scheitel in den vier Schnittpunkten der Schnittlinie der Ebenen C und C' mit der Fläche haben. Die Ebenen

$$B + \varrho C = 0 \qquad B' + \sigma C' = 0$$

gehen durch die Berührungsseiten der variabeln Tangentenebenen und der festen Tangentenebenen C und C' mit den beiden Kegeln; ihre Schnittlinie trifft die Ebene der Doppelcurve in einem Punkt, der allen vier projectivischen Ebenen gemeinsam ist.

Die drei Gleichungen

$$\begin{aligned}
\lambda p + (B + \varrho C) + (B' + \sigma C') &= 0 \\
A + 2\varrho B + \varrho^2 C &= 0 \\
A' + 2\sigma B' + \sigma^2 C' &= 0
\end{aligned}$$

drücken die x eindeutig durch ϱ, σ und umgekehrt die ϱ, σ eindeutig durch die x aus. Jedem Punkte der Fläche entspricht also eine Ebene in jedem der vier Bündel. Schneidet man daher durch eine feste Ebene die vier projectivischen Bündel und fixirt in dem betrachteten Bündel deren Durchschnitte mit den Ebenen

$$C, C' \text{ und } \lambda p + B + B'$$

als Seiten eines Coordinatendreiecks, so sind ϱ, σ die Coordinaten der Schnittlinie der beweglichen Ebene mit der festen. Auf diese Weise entsteht eine eindeutige Abbildung der Fläche in jedem der vier Bündel. Auf diese Art entstehen 12 Klassen von Abbildungen; je nach dem zu Grunde gelegten doppelt berührenden Kegel entstehen drei Gruppen und jede Gruppe enthält wieder vier Klassen, je nach dem zu Grunde gelegten Bündel. Diese vier Klassen unterscheiden sich von einander dadurch, dass aus den Kegelschnittpaaren, in welchen $C = 0$ und $C' = 0$ die gegebene Fläche schneiden, jedesmal zwei andere Kegelschnitte zu Grunde gelegt sind.

Drückt man die x rational durch ϱ und σ aus:

$$\begin{aligned}\mu x_1 &= F_1(\varrho, \sigma)\\ \mu x_2 &= F_2(\varrho, \sigma)\\ \mu x_3 &= F_3(\varrho, \sigma)\\ \mu x_4 &= F_4(\varrho, \sigma),\end{aligned}$$

so sind die vier Functionen F für die ϱ und σ vom zweiten Grade.

Die Abbildung eines ebenen Schnittes $\Sigma\mu_i\, x_i = 0$ ist demnach eine Curve vierter Classe, welche die zwei Seiten des Coordinatendreiecks $C = 0$ und $C' = 0$ zu Doppeltangenten hat. Die erste entspricht dem Werthe $\varrho = 0$, die zweite dem Werthe $\sigma = 0$.

Bezeichnet man die vier im Knotenpunkt sich schneidenden Geraden mit $a_1\, a_2\, a_3\, a_4$ und sind die Paare, welche in den Kegelschnittschaaren des Kegels ψ vorkommen,

$$\begin{matrix} a_1\, b_1 & , & a_2\, b_2 & , & a_3\, b_3 & , & a_4\, b_4 \\ a_1\, c_1 & , & a_2\, c_2 & , & a_3\, c_3 & , & a_4\, c_4, \end{matrix}$$

so werden die Paare, welche zu einem doppelt berührenden Kegel gehören, folgende sein:

$$\begin{matrix} b_3\, c_4 & c_3\, b_4 & a_1\, a_2 \\ c_1\, b_2 & b_1\, c_2 & a_3\, a_4. \end{matrix}$$

Dieses folgt leicht aus den früher gemachten Bemerkungen. Nehmen wir jetzt ferner an, die Kegelschnitte der zu Grunde gelegten Ebenen C und C' gehören den Schaaren an, in welchen die Paare

$$\begin{matrix} a_1\, b_1 & , & a_2\, b_2 & , & a_3\, b_3 & , & a_4\, b_4 \\ b_3\, c_4 & , & b_4\, c_3 & , & a_1\, a_2 & & \end{matrix}$$

vorkommen. Es tritt nun viermal ein, dass eine Gerade in beiden Reihen auftritt; die sie bestimmenden Tangentenebenen geben demnach nicht einen Punkt der Fläche, sondern eine ganze Reihe von Punkten, die aber alle durch eine und dieselbe Gerade in der Abbildung dargestellt werden müssen. Jeder ebene Schnitt wird von diesen vier Geraden a_1, a_2, b_3, b_4 in vier Punkten getroffen, die Abbildung eines jeden muss demnach die Abbildungen dieser vier festen Geraden zu vier festen Tangenten besitzen. Alle ebenen Schnitte haben demnach vier gemeinsame Doppeltangenten und vier gemeinsame einfache Tangenten.

Eine der festen Doppeltangenten und zwei der einfachen Tangenten a_1 und a_2 stellen zugleich Abbildungen des Knotenpunktes dar. Lässt man die eine Tangentenebene, d. i. σ beständig wandern, die andere, ϱ, dagegen fest durch den Knotenpunkt gehen, so dass der Werth ϱ der Ebene des Paares $a_1\, a_2$ entspricht, so schneiden sich die in ersterer liegenden Kegelschnitte beständig in demselben. Der Knotenpunkt wird daher durch unzählig viele Geraden abgebildet, deren eine Coordinate constant ist. Alle diese Geraden bilden folglich einen Strahlbüschel. Die

Abbildung aller durch den Knotenpunkt gehenden Schnitte muss die Abbildung desselben enthalten, sie zerfällt daher in eine Curve dritter Classe mit einer Doppeltangente und zwei festen einfachen Tangenten b_3 und b_4, und in einen Punkt. Die zweite feste Doppeltangente geht durch denselben und ist noch eine einfache Tangente an die Curve dritter Classe.

Man kann sich auch folgendermassen überzeugen, dass die unendlich vieldeutige Abbildung des Knotenpunktes einen Strahlbüschel bilden muss. Zwei beliebig durch den Knotenpunkt gelegte Ebenen schneiden sich in einer Geraden, die die Fläche noch in zwei weiteren Punkten trifft; die Bilder der Schnittcurven müssen daher nur zwei gemeinsame bewegliche Tangenten besitzen. Dieses bedingt ein Zerfallen der Curve vierter Classe. Zwei Kegelschnitte sind undenkbar, da dann der eine eine feste Doppeltangente hätte, es bleibt nur das Zerfallen in eine Curve dritter Classe und in einen Punkt möglich. Durch denselben gehen dann die eine Doppeltangente, sowie a_1 und a_2, überhaupt die ganze unendlich vieldeutige Abbildung des Knotenpunkts. Zwei dieser Curven dritter Classe besitzen sonach eine gemeinsame Doppeltangente C, die gemeinsamen Tangenten b_3 und b_4 und berühren noch einmal die Linie C', können also zwei weitere gemeinsame bewegliche Tangenten besitzen.

Verstehen wir jetzt unter ϱ und σ Punktcoordinaten, so tritt an die Stelle des Systems Curven vierter Classe, ein System von Curven vierter Ordnung mit zwei gemeinsamen Doppelpunkten und vier gemeinsamen einfachen Punkten; zwei der letzteren liegen mit einem der ersteren auf einer Geraden. Dieses sind die Bilder zweier durch den Knotenpunkt gehenden Geraden $a_1\,a_2$; die der beiden anderen werden dargestellt durch die Verbindungslinien der Punkte b_3, b_4 mit dem nicht auf der Geraden liegenden Doppelpunkt 2. Zu jeder der durch den Knotenpunkt gehenden Geraden gehören zwei sich nicht schneidende, die mit ihr in einer Ebene liegen. Die zu a_1 und a_2 gehörigen bilden sich ab als Verbindungslinien dieser Punkte mit dem zweiten Knotenpunkt und als Kegelschnitte durch die zwei Doppelpunkte, durch b_3 und b_4 und durch a_1 und a_2. Die zu den beiden anderen gehörigen Geraden haben zur Abbildung b_3 und b_4 und die Verbindungslinien dieser Punkte mit dem ersten Doppelpunkt. Die beiden Doppelpunkte sind die Bilder zweier Kegelschnitte aus nicht conjugirten Schaaren; ihre Verbindungslinie ist das Bild ihres Schnittpunkts. Dieser Abbildung ist eine andere conjugirt, bei welcher sich die beiden anderen durch den Knotenpunkt gehenden Geraden a_3 und a_4 als Punkte abbilden. Auf solche Weise entstehen sechs Gruppen von Abbildungen, die paarweise conjugirt sind. Jede dieser Gruppen enthält wieder zwei, je nachdem sich die einander nicht treffenden Geraden, die zu den zwei anderen durch den Knotenpunkt gehenden Geraden gehören, als Punkte und Gerade abbilden.

Die eine durch den Knotenpunkt gehende Kegelschnittschaar bildet sich ab als Strahlbüschel, dessen Scheitel der Doppelpunkt 2, die conjugirte Schaar als Kegelschnittbüschel durch die zwei Doppelpunkte, durch b_3 und b_4. Von den übrigen Schaaren bilden sich vier ab als Kegelschnitte durch die zwei Doppelpunkte und durch je zwei der übrigen Punkte; eine Schaar, als Gerade durch den Doppelpunkt 1, deren conjugirte als Curvenbüschel dritter Ordnung mit einem Doppelpunkt in 2.

Nehmen wir nun die Ebenen der Geradenpaare $a_3\, b_3$, $b_3\, c_4$ zu Ausgangsebenen C und C', so erleidet die Abbildung eine wesentliche Modification. Für $\varrho = \infty$, $\sigma = \infty$ müssen die x unbestimmt werden, dieses kann nur dadurch geschehen, dass in den vier Gleichungen $x_i = F_i(\varrho, \sigma)$ die Coefficienten von $\varrho^2.\sigma^2$ verschwinden. Die x_i drücken sich dann durch Functionen dritten Grades in ϱ, σ aus; die Abbildungscurven werden zu Curven dritter Ordnung, die fünf gemeinsame einfache Tangenten besitzen, nämlich die Bilder dreier sich im Knotenpunkt schneidenden Geraden $a_1\, a_2\, a_3$ und zweier sich nicht schneidenden Geraden b_4 und c_4. Ueberträgt man das System von Curven dritter Classe mit fünf gemeinsamen Tangenten in ein System von Curven dritter Ordnung mit fünf gemeinsamen Schnittpunkten, so sind wir zu der Abbildung zurückgekehrt, von der wir ursprünglich ausgingen.

Ich erwähne jetzt noch einer andern Art von Abbildung, auf die man kommt, wenn man von den Tangentenebenen zweier doppelt berührenden Kegel ausgeht. Die Flächengleichung zerlegt sich in die vier Factoren

$$\begin{aligned}
0 &= (\lambda - \lambda')\, p + (B + \varrho C) + (B' + \sigma C') \\
0 &= (\lambda - \lambda')\, p + (B + \varrho C) - (B' + \sigma C') \\
0 &= (\lambda - \lambda')\, p - (B - \varrho C) + (B' + \sigma C') \\
0 &= (\lambda - \lambda')\, p - (B - \varrho C) - (B' + \sigma C').
\end{aligned}$$

Die erste dieser Gleichungen stellt mit Hülfe von

$$\begin{aligned}
A + 2\varrho B + \varrho^2 C &= 0 \\
A' + 2\sigma B' + \sigma^2 C' &= 0,
\end{aligned}$$

die x als rationale Functionen vierten Grades in ϱ und σ dar, ähnlich wie oben. In der einen Tangentenschaar kommen die Geradenpaare vor:

$$\begin{array}{ccc}
b_1\, c_4 & c_1\, b_4 & a_2\, a_3 \\
b_2\, c_3 & c_2\, b_3 & a_1\, a_1,
\end{array}$$

in der andern

$$\begin{array}{ccc}
b_3\, c_4 & c_3\, b_4 & a_1\, a_2 \\
c_1\, b_2 & b_1\, c_2 & a_4\, a_3.
\end{array}$$

Benutzt man bei dem ersten Kegel die Kegelschnittschaar, welche die Paare

$$b_1\,c_4 \qquad c_1\,b_4 \qquad a_2\,a_3,$$

bei dem zweiten Kegel die, welche

$$b_3\,c_4 \qquad c_3\,b_4 \qquad a_1\,a_2$$

enthält, so erhält man bei der Abbildung zunächst wieder die festen Doppeltangenten C, C', dann die gemeinsamen Geraden c_4, b_4 als einfache Tangenten. Schneiden sich nun die Ebenen der Paare $a_2\,a_3$ und $a_1\,a_2$, so bildet sich deren Schnittlinie a_2 zunächst als feste Gerade ab; beide Ebenen treffen sich nochmals in dem Schnittpunkt von a_2 und a_3, der sich wieder als dieselbe Gerade abbildet. Ueberträgt man das System von Liniencoordinaten in Punktcoordinaten, so haben alle ebenen Schnitte zwei Doppelpunkte C, C', zwei einfache Punkte c_4, b_4 und zwei unendlich nahegerückte oder zusammenfallende Punkte a_2 gemein. Die Bilder der drei andern durch den Knotenpunkt gehenden Geraden sind die Verbindungslinien von C und C' mit a_2 und der Kegelschnitt durch C, C', a_2, c_4, b_4. Die zwei Geraden, welche a_2 treffen, bilden sich ab als Kegelschnitte durch C, C', einen der Punkte c_4 oder b_4 und die beiden unendlich nahe gerückten Punkte. Vier andere Geraden entstehen durch die Verbindung von C und C' mit c_4 und b_4.

Die beiden durch den Knotenpunkt gehenden Kegelschnittschaaren bilden sich ab als Kegelschnitte durch a_2, C, C' und einen der anderen Punkte c_4 und b_4; zwei weitere Schaaren als Geraden durch einen der Doppelpunkte; deren conjugirte als Curven dritter Ordnung durch b_4, c_4, die beiden unendlich nahen Punkte, durch denselben Doppelpunkt und mit einem Doppelpunkt im andern; die beiden letzten endlich als Kegelschnitte durch die zwei Doppelpunkte und durch die zwei einfachen Punkte oder durch die zwei unendlich nahen Punkte.

Je nach Wahl der beiden Kegel, die benutzt werden, entstehen 3 Classen von Abbildungen, jede enthält wieder vier Gruppen, je nach den Kegelschnitten, in deren Schnittpunkt man sich bewegt. Diese vier unterscheiden sich von einander dadurch, dass sich immer eine andere der durch den Knotenpunkt gehenden Geraden als Punkt abbildet; bei jenen drei werden immer zwei andere sich nicht schneidende Geraden, die eine der drei anderen durch den Knotenpunkt gehenden Geraden treffen, benutzt.

Werden zu Ausgangsebenen C und C' zwei Tangentenebenen benutzt, die eine gemeinsame Gerade c_4 oder b_4 besitzen, so geht das System von Curven vierter Ordnung über in ein System von Curven dritter Ordnung, die beiden festen Doppelpunkte werden zu einfachen Punkten, welche die Bilder zweier sich nicht schneidender Geraden b_1, b_3 oder c_1, c_3 sind.

Die Gerade c_4 oder b_4 verschwindet ganz aus der Bildebene. Von den fünf Ausnahmspunkten stellt einer der zusammenfallenden eine durch den Knotenpunkt gehende Gerade vor; die drei anderen sind drei sich nicht schneidende Geraden, von denen jede eine der drei übrigen durch den Knotenpunkt gehenden Geraden trifft. Diese selbst sind die Verbindungslinien jener mit den zusammenfallenden Punkten. Die drei einfachen Punkte lassen sich dreimal zu 2 verbinden, was drei weitere Geraden darstellt, endlich werden die beiden a_2 treffenden Geraden erhalten als Verbindungslinie der zusammenfallenden Punkte und als Kegelschnitt durch die fünf Fundamentalpunkte. Es ist leicht einzusehen, wie die zwölf verschiedenen Gruppen der Abbildungen hier entstehen.

Zweiter Fall.

Die Fläche besitzt ausser der Doppelpunktscurve noch zwei besondere Knotenpunkte, von denen jeder die Spitze eines einfach berührenden Kegels ist.

§. 1.

Wenn der vorige Fall zweimal eintritt, dass also zweimal drei Punkte auf einer Geraden zu liegen kommen (etwa 1, 3, 5 und 2, 4, 5), so stellt jede dieser Geraden einen auf der Fläche liegenden Knotenpunkt dar. Die drei Punkte auf jeder Geraden entsprechen drei durch den Knotenpunkt gehenden Geraden, der beiden gemeinsame Punkt (5) ist das Bild einer durch die zwei Knotenpunkte gehenden Geraden, die ganz in der Fläche enthalten ist. Diese ist danach die bei der Abbildung bevorzugte Gerade. Ausser jenen fünf liegen auf der Fläche noch vier weitere, die aber keinen der Knotenpunkte treffen. Sie werden erhalten durch die anderen vier Verbindungslinien der Ausnahmspunkte; und zwar seien die Verbindungslinien 1—2, 2—3, 1—4, 3—4 beziehungsweise als Gerade 6, 7, 8, 9 bezeichnet. Jede durch einen Knotenpunkt gehende Gerade wird von vieren geschnitten, jede andere von dreien. Dieses giebt zusammen 16 Schnittpunkte, wobei aber jeder Knotenpunkt als dreifacher Schnittpunkt gerechnet ist. Ausser diesen schneiden sich die neun Geraden noch in zehn Punkten. Sie bilden sonach 16 Paare, von denen zweimal drei Paare in jedem Knotenpunkt zusammentreffen. Die neun Geraden bilden zusammen vier windschiefe Vierecke, von denen je zwei in einem Knotenpunkte eine gemeinsame Ecke und ein gemeinsames Paar besitzen.

Die in den Knotenpunkten sich vereinigenden Paare sind 1,5; 1,3; 5,3; 2,5; 2,4; 4,5. Die vier nicht durch diese gehenden Geraden bilden die Paare 6,9; 7,8. Von den anderen acht Paaren besitzen je zwei eine gemeinsame Gerade:

$$\begin{array}{ccccccc} 1,6 & ; & 2,6 & ; & 3,7 & ; & 4,8 \\ 1,8 & ; & 2,7 & ; & 3,9 & ; & 4,9. \end{array}$$

Die windschiefen Vierecke sind:

$$\begin{Bmatrix} 8,7,1,3 \\ 6,9,1,3 \end{Bmatrix} \qquad \begin{Bmatrix} 8,7,2,4 \\ 6,9,2,4 \end{Bmatrix}.$$

Die Doppelcurve bildet sich ab als eine Curve dritter Ordnung durch die fünf Fundamentalpunkte. Die Auffindung von weiteren sie bestimmenden Punkten geschieht ebenso, wie früher (vgl. §. 3.). Das zu einer Geraden, die sich wieder als Gerade abbildet, gehörige Curvenbüschel dritter Ordnung, stellt in der Bildebene ein Kegelschnittbüschel durch die drei anderen Fundamentalpunkte vor; dieses hat dann noch einen vierten Punkt P gemein, der ein Punkt der Doppelcurve ist. Der entsprechende Punkt P' findet sich, wie oben, er liegt ausserdem auf der Geraden selbst. Der Kegelschnitt der Schaar, welcher dann noch durch P' geht, muss die Doppelcurve in P berühren, er ist die Abbildung des Schnitts der Fläche mit derjenigen ihrer Tangentenebenen im Schnittpunkte der Doppelcurve mit jener Geraden, welche letztere ganz enthält. Der Schnitt der andern Tangentenebene bildet sich ab als Curve dritter Ordnung durch die fünf Fundamentalpunkte, durch P' und mit einem Doppelpunkt in P.

Das zu einer Geraden, die sich als Fundamentalpunkt, z. B. 1, abbildet, gehörige Curvenbüschel dritter Ordnung, wird in der Abbildung ein Kegelschnittbüschel durch 1, und durch die auf der andern Geraden liegenden Fundamentalpunkte 2 und 4. Der ausserdem noch allen gemeinsame vierte Schnittpunkt ist der dem Punkt P analoge.

Für die Gerade, die sich als Fundamentalpunkt 5 abbildet, stellen sich die zugehörigen Curven dritter Ordnung dar als Strahlenbüschel. Dessen Scheitel ist der dem Punkt P analoge.

§. 2.

Es giebt vier Kegelschnittschaaren, die sich als Geraden durch einen der Fundamentalpunkte 1, 2, 3, 4 abbilden. Die durch 1, 3 gehenden sind einander conjugirt und treffen sich in einem Knotenpunkte, die durch 2, 4 gehenden sind ebenfalls conjugirt und schneiden sich im andern. Die eine der durch den ersten Knotenpunkt gehenden Schaaren enthält als specielle Fälle die Paare 7, 2; 9, 4; 1, 5; die andere enthält die Paare 8, 4; 6, 2; 3, 5. Die beiden durch den zweiten Knotenpunkt gehenden Schaaren enthalten die Paare 6, 1;

7, 3; 2, 5 und 8, 1; 9, 3; 4, 5. Je zwei Paare, die zu conjugirten Schaaren gehören, enthalten eine durch einen Knotenpunkt gehende gemeinsame Gerade. Es liegen jetzt noch auf der Fläche zwei weitere einander conjugirte Schaaren, die aber keinen der Knotenpunkte treffen. Die eine Schaar hat zur Abbildung einen Strahlbüschel, dessen Scheitel der Punkt 5 ist; sie begreift die Paare 6, 9; 7, 8 in sich; die andere Schaar bildet sich als Kegelschnittbüschel durch 1, 2, 3, 4 ab; sie enthält die Paare 1, 3; 2, 4. Die zwei zu einer Schaar gehörigen Paare schneiden einander nicht; dagegen wird jedes Paar einer Schaar von jedem Paar der conjugirten getroffen. Kegelschnitte derselben Schaar, die keinen der Knotenpunkte treffen, schneiden einander nicht; Kegelschnitte aus conjugirten Schaaren schneiden sich in zwei Punkten; ihre Ebenen sind doppelt berührende Ebenen der Fläche. Kegelschnitte derselben Schaar, die einem Knotenpunkte angehört, schneiden sich ausser demselben nicht, Kegelschnitte aus conjugirten Schaaren noch in einem weiteren Punkte. Ihre Ebenen sind einfache Tangentenebenen.

Jeder dieser Kegelschnitte ergänzt sich mit einer Raumcurve sechster Ordnung zu einem vollständigen Durchschnitt der Fläche mit einer Fläche zweiter Ordnung. Ist der Kegelschnitt in der Abbildung eine Gerade durch einen Fundamentalpunkt 1, so ist die der Raumcurve sechster Ordnung eine Curve vierter Ordnung, welche durch alle Fundamentalpunkte geht und in 3 einen Doppelpunkt besitzt. Jeder Kegelschnitt trifft seine ergänzende Raumcurve ausser im Knotenpunkt, zweimal auf der Doppelcurve, und dreimal in andern Punkten, die einfache Berührungspunkte der beiden Flächen sind. Jede der Raumcurven besitzt zwei wirkliche Doppelpunkte auf der Doppelcurve. Curven derselben Schaar schneiden sich in acht, Curven verschiedener Schaaren in neun, aus conjugirten Schaaren in zehn Punkten. Solcher Raumcurven sechster Ordnung giebt es vier siebenfach unendliche Schaaren. Damit ein solches Zerfallen der Schnittcurve eintrete, muss die Fläche zweiter Ordnung durch einen Knotenpunkt gehen und die gegebene in drei verschiedenen Punkten berühren.

Bildet sich der Kegelschnitt ab als Gerade durch 5, so wird eine Curve fünfter Ordnung durch denselben Punkt und mit Doppelpunkten in den vier übrigen das Bild der Ergänzungscurve sein. Das zu einem conjugirten Kegelschnitt gehörige ist eine Curve vierter Ordnung, welche durch alle Fundamentalpunkte einfach geht und in 5 einen Doppelpunkt hat. Jeder Kegelschnitt schneidet seine Ergänzungscurve zweimal auf der Doppelcurve und in vier weiteren Punkten. Damit ein solches Zerfallen der Schnittcurve eintreten kann, muss die Fläche zweiter Ordnung die gegebene in vier Punkten berühren. Solcher Raumcurven sechster Ordnung giebt es zwei siebenfach unendliche Schaaren, jede Curve einer Schaar besitzt zwei wirkliche Doppelpunkte auf der Doppelcurve.

§. 3.

Ich betrachte jetzt die Raumcurven dritter Ordnung, welche auf der Oberfläche liegen.

1) Es giebt eine doppelt unendliche Schaar, welche durch die beiden Knotenpunkte geht, und die sich als Geradenschaar durch keinen der Fundamentalpunkte abbildet. Jede Curve der Schaar wird von jeder der neun Geraden getroffen; zwei Curven der Schaar schneiden sich ausser in den Knotenpunkten noch in einem Punkte.

2) Es giebt vier doppelt unendliche Schaaren, die sich als Kegelschnitte durch drei Fundamentalpunkte abbilden. Zwei Schaaren gehen durch den ersten Knotenpunkt, die beiden anderen durch den zweiten. Alle Curven der vier Schaaren schneiden die fünf durch die Knotenpunkte gehenden Geraden einmal. Die übrigen vier Geraden sind jeder Schaar so zugeordnet, dass zwei sich nicht schneidende Geraden einer Schaar gar nicht, die beiden anderen einmal getroffen werden, die andere durch denselben Knotenpunkt gehende Schaar verhält sich dann entgegengesetzt. Curven derselben Schaar schneiden sich noch in einem Punkt, Curven verschiedener Schaaren in zwei Punkten.

3) Es giebt vier doppelt unendliche Schaaren, die sich als Kegelschnitte durch drei Fundamentalpunkte abbilden, die aber durch keinen der Knotenpunkte gehen. Jede Schaar ist einer der vier keinen Knotenpunkt schneidenden Geraden zugeordnet, welche von jeder Curve der Schaar zweimal geschnitten wird, die diese schneidenden Geraden werden gar nicht, alle übrigen einmal getroffen. Curven derselben Schaar schneiden sich in einem Punkte, Curven aus Schaaren, die zwei sich schneidenden Geraden zugeordnet sind, in drei Punkten; Curven aus Schaaren, die zwei sich nicht schneidenden zugeordnet sind, in zwei Punkten.

Jede dieser Raumcurven dritter Ordnung ergänzt sich mit einer Raumcurve fünfter Ordnung zu einem vollständigen Durchschnitt der Fläche mit einer Fläche zweiter Ordnung.

1) Zu 1 gehört eine fünffach unendliche Schaar, die sich abbildet als Curvenschaar dritter Ordnung durch die Punkte 1, 2, 3, 4. Jede Raumcurve dritter Ordnung der Schaar schneidet sich mit ihrer Ergänzungscurve dreimal auf der Doppelcurve, in beiden Knotenpunkten und in drei anderen Punkten der Fläche. Damit demnach ein solches Zerfallen der Schnittcurve möglich sei, muss die Fläche zweiter Ordnung durch die beiden Knotenpunkte gehen und in drei ver-

schiedenen Punkten berühren. Jede dieser Raumcurven fünfter Ordnung besitzt einen wirklichen Doppelpunkt auf der Doppelcurve und vier scheinbare, $p = 1$. Zwei Curven der Schaar schneiden sich in fünf Punkten.

2) Hierzu gehören vier fünffach unendliche Schaaren, die sich abbilden als Curven dritter Ordnung durch vier Fundamentalpunkte. Jede dahin gehörige Raumcurve dritter Ordnung wird von ihrer Ergänzungscurve ausser in einem der Knotenpunkte, dreimal auf der Doppelcurve und in vier weiteren Punkten der Fläche geschnitten. Die Fläche zweiter Ordnung muss demnach die gegebene in vier verschiedenen Punkten berühren und durch einen Knotenpunkt gehen. Wie oben ist $p = 1$, da ein wirklicher Doppelpunkt auf der Doppelcurve und vier scheinbare für jede Curve sich ergeben. Curven derselben Schaar und verschiedener Schaaren treffen sich in fünf Punkten.

3) Hierzu gehören vier fünffach unendliche Schaaren, die sich als Curven vierter Ordnung mit zwei Doppelpunkten in zwei Fundamentalpunkten und einfachen in den übrigen abbilden. Jede Curve dritter Ordnung schneidet ihre Ergänzungscurve dreimal auf der Doppelcurve und fünfmal auf der Fläche. Die Fläche zweiter Ordnung muss demnach die gegebene in fünf verschiedenen Punkten berühren. Jede Curve fünfter Ordnung besitzt einen wirklichen und vier scheinbare Doppelpunkte. Curven derselben Schaar schneiden sich in fünf Punkten, Curven verschiedener Schaaren, die sich schneidenden Geraden zugeordnet sind, in sieben; Curven solcher Schaaren, die sich nicht schneidenden Geraden zugeordnet sind, in sechs Punkten.

§. 4.

Die auf der Fläche liegenden Raumcurven vierter Ordnung theilen sich folgendermassen ein: 1) Es giebt zwei einander conjugirte dreifach unendliche Schaaren, die sich als Kegelschnitte durch zwei auf einer der Geraden liegende Fundamentalpunkte 1, 3 oder 2, 4 abbilden. Jede Curve der einen Schaar besitzt im ersten, jede der andern Schaar im zweiten Knotenpunkte einen wirklichen Doppelpunkt. Curven derselben Schaar schneiden sich in zwei Punkten, aus conjugirten Schaaren viermal auf der Doppelcurve und in vier weiteren Punkten der Fläche. Damit ein solches Zerfallen eintrete, muss die Fläche zweiter Ordnung durch die Knotenpunkte gehen und in vier verschiedenen Punkten berühren. Specielle Fälle jeder Schaar sind 1) die durch denselben Knotenpunkt gehenden ebenen Schnitte; 2) die ihn treffenden Geraden, jede in Verbindung mit dem zugehörigen Curvenbüschel dritter Ordnung; 3) je zwei Gebilde aus conjugirten Kegelschnittschaaren, die den Knotenpunkt schneiden; 4) die zwei windschiefen Vierecke, die eine gemeinsame Ecke in ihm besitzen.

2) Es giebt vier dreifach unendliche Schaaren, die sich als Kegelschnitte durch zwei nicht auf einer Geraden liegende Ausnahmspunkte abbilden. Alle diese gehen durch beide Knotenpunkte. Diese Schaaren ergänzen sich paarweise zu vollständigen Durchschnitten. Sich ergänzende Curven treffen einander noch viermal auf der Doppelcurve und in vier weiteren Punkten der Fläche; Curven derselben Schaar schneiden sich noch zweimal, Curven verschiedener Schaaren dreimal.

3) Es giebt vier dreifach unendliche Schaaren, die sich als Kegelschnitte durch zwei auf einer Geraden liegende Ausnahmspunkte, wobei immer Punkt 5 ist, abbilden. Zwei Schaaren gehen durch den einen, zwei durch den andern Knotenpunkt. Jede ergänzt sich mit einer Raumcurve vierter Ordnung, deren Bild eine Curve dritter Ordnung ist, welche durch alle Fundamentalpunkte ausser 5 geht und einen Doppelpunkt in dem auf derselben Geraden liegenden Fundamentalpunkt besitzt. Curven conjugirter Schaaren begegnen sich im Knotenpunkte, viermal auf der Doppelcurve und noch fünfmal auf der Fläche. Der Schnitt erfordert daher, dass die Fläche zweiter Ordnung durch einen Knotenpunkt gehe und in fünf verschiedenen Punkten berühre.

Jede Curve der vier ersten Schaaren ist einer der nicht durch einen Knotenpunkt gehenden vier Geraden, jede der vier letzten ist einer der vier einen Knotenpunkt treffenden zugeordnet. Jede Curve einer Schaar schneidet die zugehörige Gerade in zwei Punkten. Curven einer Gruppe schneiden einander in drei, verschiedener Gruppen in fünf, Curven derselben Schaar in zwei Punkten.

4) Es giebt vier dreifach unendliche Schaaren, die sich als Curven dritter Ordnung durch drei auf einer Geraden liegende Fundamentalpunkte und mit einem Doppelpunkt in einem weitern abbilden. Die vier Schaaren zerfallen in zwei Paare, deren Curven sich zu vollständigen Durchschnitten ergänzen.

Alle bis jetzt angegebenen Raumcurven vierter Ordnung sind zweiter Species.

5) Es giebt jetzt noch eine vierfach unendliche Schaar, die sich als Curvenschaar dritter Ordnung durch die fünf Fundamentalpunkte abbildet. Jede Curve der Schaar ergänzt sich mit einer andern zu einem vollständigen Durchschnitt; die Curven treffen keinen der Knotenpunkte und schneiden viermal die Doppelcurve. Je zwei Curven schneiden sich noch in vier weiteren Punkten, die einfache Berührungspunkte der beiden Flächen sind.

Specielle Fälle der Schaar sind: 1) Alle ebenen Schnitte, die nicht durch einen Knotenpunkt gehen; 2) jede der vier Geraden 6, 7, 8, 9 mit der zugehörigen Curvenschaar dritter Ordnung; 3) je zwei Gebilde aus den zwei conjugirten Kegelschnittschaaren, deren Ebenen Doppelberührebenen der Fläche sind. Alle diese Curven sind erster Species. Man kann die unter 1) aufgeführten Curven als specielle Schaaren dieses Systems ansehen.

Analytische Behandlung der Fläche.

§. 5.

Eine solche Fläche mit zwei besonderen Knotenpunkten, deren jeder die Spitze eines einfach berührenden Kegels ist, hat zur Gleichungsform

$$(p^2 + \psi - \chi)^2 = 4p^2\psi;$$

oder, was dasselbe ist:

$$(p^2 + \chi - \psi)^2 = 4p^2\chi.$$

wo $\psi = 0$ ein Kegel ist, dessen Spitze auf der Fläche $p^2 - \chi = 0$ liegt, $\chi = 0$ ein Kegel, dessen Spitze auf der Fläche $p^2 - \psi = 0$ liegt.

Eine noch einfachere Form der Fläche ist

$$p + \sqrt{\psi} + \sqrt{\chi} = 0.$$

$p = 0$ ist die Gleichung einer Ebene, deren Schnitt mit $\chi - \psi = 0$ die Doppelcurve giebt; die beiden Kegelspitzen sind die Knotenpunkte. Die vier Schnittpunkte von $p = 0$, $\chi = 0$, $\psi = 0$ geben die vier Rückkehrpunkte der Doppelcurve.

Ich werde nachweisen, wie sich die Form $(p^2 + \psi - \chi)^2 = 4\,p^2\,\psi$ sehr leicht ableiten lässt aus der Form $\varphi^2 - 4p^2\,\psi = 0$, worin ψ ein Kegel, dessen Spitze auf φ liegt, wenn die Forderung gestellt wird, dass die Fläche ausser diesem Knotenpunkt noch einen zweiten besitzen soll. Ich nehme ein Coordinatentetraeder, dessen eine Ecke $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$ die Spitze von ψ, dessen andere Ecke $x = 0$, $y = 0$, $t = 0$ der neue Knotenpunkt sein soll. Die Gleichung der Fläche schreibt sich dann:

$$(a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2 + 2a_{13}xz + 2a_{14}xt + 2a_{23}yz + 2a_{24}yt + a_{33}z^2 + 2a_{34}zt)^2$$
$$= 4(ax + by + cz + dt)^2\left\{b_{11}x^2 + 2b_{12}xy + b_{22}y^2 + 2b_{13}xz + 2b_{23}yz + b_{33}z^2\right\}.$$

Werden die beiden anderen Ecken des Tetraeders in zwei beliebige Punkte der Doppelcurve gelegt, so werden die Coefficienten a_{11}, a_{22}, a und b zu Null und es bleibt:

$$(2a_{12}xy + 2a_{13}xz + 2a_{14}xt + 2a_{23}yz + 2a_{24}yt + a_{33}z^2 + 2a_{34}zt)^2$$
$$= 4(cz + dt)^2\left\{b_{11}x^2 + 2b_{12}xy + b_{22}y^2 + 2b_{13}xz + 2b_{23}yz + b_{33}z^2\right\}.$$

Die Bedingung, dass der Punkt $x = 0$, $y = 0$, $t = 0$ ein Knotenpunkt der Fläche sein soll, verlangt die Richtigkeit der Gleichungen:

$$a_{13} \cdot a_{33} = 2c^2\, b_{13}$$
$$a_{23} \cdot a_{33} = 2c^2\, b_{23}$$
$$a_{33} \cdot a_{33} = 4c^2\, b_{33}$$
$$a_{33} \cdot a_{34} = 2cd\, b_{33}.$$

Eliminirt man mit Hülfe dieser vier Gleichungen die Coefficienten $a_{13}, a_{23}, a_{33}, a_{34}$, so nimmt die Flächengleichung die Form an:

$$\left\{ 2a_{12}xy + 2a_{14}xt + 2a_{24}yt + \frac{4c^2}{a_{33}}\left(b_{13}xz + b_{23}yz + z^2 b_{33}\right) + \frac{4b_{33}}{a_{33}}\, cdzt \right\}^2$$
$$= 4(cz + dt)^2 \left\{ b_{11}x^2 + 2b_{12}xy + b_{22}y^2 + 2b_{13}xz + 2b_{23}yz + b_{33}z^2 \right\}.$$

Dieses kann man in die Form bringen:

$$\left\{ \frac{2c^2}{a_{33}}\left(b_{11}x^2 + 2b_{12}xy + b_{22}y^2 + 2b_{13} + z + 2b_{23}yz + b_{33}z^2\right)\right.$$
$$+ \frac{2b_{33}}{a_{33}}\cdot\left(c^2z^2 + 2cdzt + d^2t^2\right) - \left(\frac{2b_{11}}{a_{33}}\, c^2x^2 + 2xy\left(\frac{2b_{12}}{a_{33}}\, c^2 - a_{12}\right)\right.$$
$$\left.\left. + \frac{2b_{22}}{a_{33}}\, c^2y^2 - 2a_{14}xt - 2a_{24}yt + \frac{2b_{33}}{a_{33}}\, d^2t^2\right)\right\}^2$$
$$= 4(cz + dt)^2 \left\{ b_{11}x^2 + 2b_{12}xy + b_{22}y^2 + 2b_{13}xz + 2b_{23}yz + b_{33}z^2 \right\}.$$

Oder

$$\left\{ \frac{2c^2}{a_{33}}\,\psi + \frac{2b_{33}}{a_{33}}\cdot p^2 - \chi \right\}^2 = 4p^2\psi.$$

Wie man sich leicht überzeugt, ist das negative Glied der linken Seite, gleich Null gesetzt, die Gleichung $\chi = 0$ eines Kegels, dessen Spitze der Punkt $x=0$, $y=0$, $t=0$. Unbeschadet der Allgemeinheit kann man die Quotienten

$$\frac{2c^2}{a_{33}}\,,\quad \frac{2b_{33}}{a_{33}}$$

gleich 1 annehmen, sodass die Form

$$(p^2 + \psi - \chi)^2 = 4p^2\psi$$

hergestellt ist. Die Bedingung, dass die Spitze von ψ auf der Fläche $p^2 - \chi$ und die Spitze von χ auf der Fläche $p^2 - \psi$ liegt, ist von selbst erfüllt.

Ich werde jetzt zeigen, dass die Verbindungslinie der beiden Knotenpunkte ganz in der Fläche enthalten ist. Sind die Coordinaten des einen x_1, x_2, x_3, x_4, die des andern $\xi_1, \xi_2, \xi_3, \xi_4$, so sind die eines beliebigen Punktes der Verbindungslinie

$$x_1 + \lambda\xi_1\,,\; x_2 + \lambda\xi_2\,,\; x_3 + \lambda\xi_3\,,\; x_4 + \lambda\xi_4.$$

Setzt man diese in die Gleichung der Fläche ein, entwickelt nach dem Taylor'schen Lehrsatz und berücksichtigt die Bedingungen

$$\frac{\partial\psi}{\partial x_i} = 0\,,\; \frac{\partial\chi}{\partial\xi_i} = 0\,,\; p_x^2 - \chi_x = 0 \text{ und } p_\xi^2 - \psi_\xi = 0,$$

so entsteht zunächst die Gleichung:

$$(2p_xp_\xi + \lambda p_\xi^2 + \lambda\psi_\xi)^2 = 4\psi_\xi \left\{ p_x^2 + 2\lambda p_xp_\xi + \lambda^2p_\xi^2 \right\}.$$

Es bedeuten p_x, p_ξ die Gleichungen der Ebene p, χ_x, ψ_ξ die Gleichungen der Kegel χ und ψ einmal mit den Coordinaten x, dann mit ξ geschrieben.

Diese Gleichung kann mit Hülfe der Bedingungsgleichungen in die Identität

$$4\,\psi_\xi\,(\sqrt{\chi_x} + \lambda\,\sqrt{\psi_\xi})^2 = 4\,\psi_\xi\,(\sqrt{\chi_x} + \lambda\,\sqrt{\psi_\xi})^2$$

verwandelt werden, woraus die Richtigkeit des Satzes folgt.

Denkt man sich in irgend einem Punkte der Verbindungsgeraden eine Tangentenebene an die Fläche gelegt, so muss die Gerade ganz in ihr enthalten sein. Der Berührungspunkt ist ein Doppelpunkt der Schnittcurve, welche deren vier auf einer Geraden liegende besitzt. Sie zerfällt demnach in die doppelt gerechnete Gerade und in einen Kegelschnitt. Diese Tangentenebene ist also eine singuläre Berührungsebene, welche die Fläche längs der Geraden tangirt.

Es lässt sich dieses auch leicht analytisch nachweisen. Ich gehe von der Gleichungsform aus $p + \sqrt{\psi} + \sqrt{\chi} = 0$. Liegt das Coordinatentetraeder so, dass zwei Ecken $x=0, y=0, t=0$ und $x=0, y=0, z=0$ in die Knotenpunkte fallen, so lässt sich diese Gleichung schreiben:

$$(ax+by+cz+dt)+\sqrt{a_{11}x^2+2a_{12}xy+a_{22}y^2+2a_{13}xz+2a_{23}yz+a_{33}z^2}$$
$$+\sqrt{b_{11}x^2+2b_{12}xy+b_{22}y^2+2b_{13}xt+2b_{23}yt+b_{33}t^2}=0.$$

Die Bedingungen $p_x^2 - \chi_x = 0$ und $p_\xi^2 - \psi_\xi = 0$ sind ausgedrückt durch $c^2 - a_{33} = 0$ und $d^2 - b_{33} = 0$. Betrachtet man die Fläche in der Nähe eines Punktes jener ausgezeichneten Geraden, so sind x, y sehr klein, z und t endlich. Mit Vernachlässigung der höheren Potenzen von x, y geht die Flächengleichung in die ihrer Tangentenebene in jenem Punkte über, nämlich:

$$\left(ax+by+cz+dt\right)+\sqrt{a_{33}z^2}+\frac{1}{\sqrt{a_{33}}}\left(a_{13}x+a_{23}y\right)+\sqrt{b_{33}\,t^2}$$
$$+\frac{1}{\sqrt{b_{33}}}\left(b_{13}\,x+b_{23}\right)=0,$$

oder

$$x\left(a+\frac{a_{13}}{\sqrt{a_{33}}}\right)+y\left(b+\frac{b_{13}}{\sqrt{b_{33}}}\right)+z(c+\sqrt{a_{33}})+t\,(d+\sqrt{b_{33}})=0.$$

Die Glieder in z und t fallen weg und die Tangentenebene

$$x\left(a+\frac{a_{13}}{\sqrt{a_{33}}}\right)+y\left(b+\frac{b_{13}}{\sqrt{b_{33}}}\right)=0$$

ist unabhängig von der speciellen Lage des Punktes auf der Geraden, mithin für alle Punkte derselben die gleiche.

Hieraus folgt, die beiden Kegel K und K', die in den Knotenpunkten die gedachte Fläche ringsum berühren, liegen so, dass sie sich und die Fläche längs einer Geraden berühren; ihre Schnitte K und K' mit der Ebene p berühren sonach in einem gemeinschaftlichen Punkte die Doppelcurve.

Ausser diesem Berührungspunkte hat jeder der Kegelschnitte K und K' noch zwei Punkte mit der Doppelcurve gemein. Diese mit den Kegelspitzen verbunden geben die anderen vier Geraden, welche die Knotenpunkte schneiden. Wenn man durch die zwei zu K gehörigen Geraden die vier Tangentenebenen an den Kegel ψ legt, dessen Spitze mit der von K zusammenfällt, so schneidet jede dieser eine weitere Gerade aus der Fläche aus. Legt man durch die Doppelgerade die beiden Tangentenebenen an ψ, so trifft jede die Fläche in einer der zu K' gehörigen Geraden, wie sich leicht einsehen lässt. Auf diese Weise entstehen die sechs Geradenpaare, die in zwei Gruppen zu je drei vertheilt, in den beiden zu ψ gehörigen Kegelschnittschaaren auftreten. Führt man dieselbe Construction mit den zu K' gehörigen zwei Geraden aus, so folgt daraus, dass die vier durch diese an den Kegel χ gelegten Tangentenebenen die Fläche in denselben vier Geraden schneiden, die bei dem Kegel ψ auftreten, da ausser jenen neun Geraden die Fläche keine weitere enthalten kann.

Die fünf Kegelschnitte, die Doppelcurve und die Schnitte ihrer Ebene mit den Kegeln K, K', ψ, χ, welche mit denselben Buchstaben bezeichnet werden sollen, stehen sonach in folgender einfacher Beziehung zu einander. Es berühren K und K' die Doppelcurve in einem gemeinsamen Punkte; zieht man von diesem die zwei Tangenten an ψ oder χ, so schneiden diese die Doppelcurve in den zwei Punkten, in welchen χ oder ψ dieselbe noch schneidet. Und zieht man von den beiden anderen Schnittpunkten der Curven K und K' mit der Doppelcurve die vier Tangenten an ψ oder χ, so treffen diese dieselbe in den nämlichen vier Punkten.

§. 6.

Die Flächengleichung lässt sich in der Form darstellen:

$$(p^2 + \psi - \chi + 2\lambda p^2)^2 = 4p^2 \left\{\psi + \lambda(p^2 + \psi - \chi) + \lambda^2 p^2\right\}.$$

Giebt man dem λ einen solchen Werth, dass die Gleichung

$$\psi + \lambda(p^2 + \psi - \chi) + \lambda^2 p^2 = 0$$

einen Kegel bedeutet, so ergeben sich die doppelt berührenden Kegel der Fläche; nur die Werthe $\lambda = 0$ und $\lambda = -1$ geben die Kegel ψ und χ, welche die Fläche einfach einhüllen. Ich werde nachweisen, wie diese Werthe Doppelwurzeln der Gleichung fünften Grades in λ sind, welche durch Nullsetzen der Determinante von

$$\psi + \lambda(p^2 + \psi - \chi) + \lambda^2 p^2 = 0$$

entsteht. Sei das Coordinatentetraeder so gewählt, dass eine Ecke in die Spitze von ψ, die drei anderen in die Nebenecken des aus den vier Rückkehrpunkten gebildeten vollständigen Vierecks fallen. Obige Gleichung wird dadurch:

$$(x^2+y^2+z^2)(1+\lambda)-\lambda(b_{11}x^2+b_{22}y^2+b_{33}z^2+b_{44}t^2+2b_{14}xt+2b_{24}yt+2b_{34}zt)$$
$$+t^2(\lambda+\lambda^2)=0.$$

Die Bedingung, dass der Coefficient von $-\lambda$ in dieser Gleichung der Kegel ψ ist, wird ausgedrückt durch

$$1=\frac{b_{14}^2}{b_{11}}+\frac{b_{24}^2}{b_{22}}+\frac{b_{34}^2}{b_{33}}.$$

Es muss $b_{44}=1$ sein, wenn die Spitze x, y, z des Kegels ψ auf der Fläche $t^2-\chi$ liegen soll. Die Coordinaten der Spitze des Kegels χ sind:

$$\begin{aligned} x &= -\, b_{22}\, b_{33}\, b_{14} \\ y &= -\, b_{11}\, b_{33}\, b_{24} \\ z &= -\, b_{11}\, b_{22}\, b_{34} \\ t &= \, b_{11}\, b_{22}\, b_{33} \end{aligned}$$

und die Bedingung, dass dieser Punkt auf der Fläche $t^2-\psi$ liegen soll, ist

$$1=\frac{b_{14}^2}{b_{11}^2}+\frac{b_{24}^2}{b_{22}^2}+\frac{b_{34}^2}{b_{33}^2}.$$

Setzt man die Determinante der obigen Gleichung in λ gleich Null, so entsteht die in λ cubische Gleichung

$$1=\frac{b_{34}^2}{1+\lambda-\lambda b_{33}}+\frac{b_{24}^2}{1+\lambda-\lambda b_{22}}+\frac{b_{14}^2}{1+\lambda-\lambda b_{11}}$$

nachdem sich der Factor λ weggehoben hat.

Subtrahirt man hiervon

$$1=\frac{b_{34}^2}{b_{33}}+\frac{b_{24}^2}{b_{22}}+\frac{b_{14}^2}{b_{11}},$$

so bleibt die in λ quadratische Gleichung

$$0=\frac{b_{34}^2}{b_{33}}\cdot\frac{b_{33}-1}{1+\lambda-\lambda b_{33}}+\frac{b_{24}^2}{b_{22}}\cdot\frac{b_{22}-1}{1+\lambda-\lambda b_{22}}+\frac{b_{14}^2}{b_{11}}\cdot\frac{b_{11}-1}{1+\lambda-\lambda b_{11}},$$

indem sich der Factor $(1+\lambda)$ weghebt. Subtrahirt man hiervon

$$0=\frac{b_{34}^2}{b_{33}^2}(b_{33}-1)+\frac{b_{24}^2}{b_{22}^2}(b_{22}-1)+\frac{b_{14}^2}{b_{11}^2}(b_{11}-1),$$

welche Gleichung durch Abziehen der beiden Bedingungsgleichungen entsteht, so bleibt eine lineare Gleichung in λ zurück:

$$\begin{aligned} 0 = {} & b_{34}^2(b_{33}-1)\,b_{11}b_{22}\left\{1+\lambda-\lambda(b_{11}+b_{22})+(\lambda-1)\,b_{11}\,b_{22}\right\} \\ & + b_{24}^2(b_{22}-1)\,b_{33}b_{11}\left\{1+\lambda-\lambda(b_{11}+b_{33})+(\lambda-1)\,b_{11}\,b_{33}\right\} \\ & + b_{14}^2(b_{11}-1)\,b_{22}b_{33}\left\{1+\lambda-\lambda(b_{22}+b_{33})+(\lambda-1)\,b_{33}\,b_{22}\right\}, \end{aligned}$$

indem sich noch einmal der Factor $(1+\lambda)$ weghebt. Hieraus findet man den Werth λ, welcher die Spitze des einzigen wirklichen doppelt berührenden Kegels giebt. Die Coordinaten einer Spitze finden sich aus

$$x(1+\lambda-\lambda b_{11})+b_{14}=0$$
$$y(1+\lambda-\lambda b_{22})+b_{24}=0$$
$$z(1+\lambda-\lambda b_{33})+b_{34}=0.$$

Diese drei Gleichungen stellen eine Raumcurve dritter Ordnung dar, welche durch die Kegelspitze, die beiden Knotenpunkte und die drei Nebenecken des aus den vier Rückkehrpunkten gebildeten Vierecks geht.

Die durch jeden der Knotenpunkte an den doppelt berührenden Kegel gelegten Tangentenebenen schneiden je zwei Geradenpaare aus der Fläche aus, die ihren Schnittpunkt in jenem besitzen. Eins dieser muss nothwendigerweise die Verbindungslinie der Knotenpunkte enthalten. Daraus folgt, die durch diese und die Kegelspitze gelegte Ebene ist eine Tangentenebene der Fläche, sie fällt mit der singulären Tangentenebene zusammen. Auf diese Weise entstehen die zwei Geradenpaare der einen Schaar von Kegelschnitten, deren Ebenen Doppelberührebenen der Fläche sind; als drittes Geradenpaar kann man die doppelt gerechnete Verbindungslinie der Knotenpunkte hinzufügen. Die zwei Paare, die in der conjugirten Schaar auftreten, sind dann die beiden, welche die vier keinen der Knotenpunkte treffenden Geraden mit einander bilden. Es ergiebt sich hiernach eine einfache Construction der Spitze des doppelt berührenden Kegels; denn die Schnittlinie der Ebenen der beiden ersten Geradenpaare durchdringt die singuläre Tangentenebene in jenem Punkte.

Eine beliebige Tangentenebene des Kegels ψ ist

$$A+2\varrho B+\varrho^2 C=0,$$

dann ist $\psi=B^2-AC$ und für den Schnitt mit der Fläche kann man setzen $\psi=(B+\varrho C)^2$. Die Gleichung derselben zerfällt sofort in die Factoren

$$[p+(B+\varrho C)]^2=\chi$$
$$[p-(B+\varrho C)]^2=\chi.$$

Diese beiden stellen in Verbindung mit $A+2\varrho B+\varrho^2 C=0$ die zu dem Kegel ψ gehörigen Kegelschnittschaaren vor. Der Complex der Gleichungen

$$A+2\varrho B+\varrho^2 C=0 \qquad [p+(B+\varrho C)]^2=\chi$$
$$A+2\sigma B+\sigma^2 C=0 \qquad [p-(B+\sigma C)]^2=\chi$$

lehrt, dass sich Kegelschnitte derselben Schaar nur im Knotenpunkt, solche aus conjugirten Schaaren zweimal, worunter einmal ein Knotenpunkt, und solche, die in derselben Ebene liegen, viermal, zweimal auf der Doppelcurve, einmal auf der Berührungscurve des Kegels ψ und im Knotenpunkt schneiden. So oft die Ebene $A+2\varrho B+\varrho^2 C$ eine Tangentenebene wird, zerfällt der Kegelschnitt in ein Geradenpaar. Die zugehörigen Werthe von ϱ finden sich aus der Gleichung dritten Grades:

$0 = \{a, b, c, A + 2\varrho B + \varrho^2 C\}^2 - 3\{a, b, p + B + \varrho C, A + \varrho B - \varrho p\}^2,$ wenn symbolisch $\chi = a_x^2 = b_x^2 = c_x^2$ gesetzt wird. Nach dem Obigen muss in dieser Gleichung der Coefficient von ϱ^4 verschwinden. Die Kegelschnittschaaren des Kegels χ werden auf dieselbe Weise gefunden.

Für den doppeltberührenden Kegel $K = \psi + \lambda\,(p^2 + \psi - \chi) + p^2\lambda^2$ sei $A'' + 2\varrho B'' + \varrho^2 C'' = 0$ eine Tangentenebene. Zunächst verwandelt sich die Gleichung der Fläche mit Benutzung von

$$p^2 + \psi - \chi = \frac{p^2\lambda^2 - K - \psi}{\lambda}$$

in $(p^2\lambda^2 - \psi + K)^2 = 4p^2\lambda^2 K$, was in die Factoren

$$[p\lambda - (B'' + \varrho C'')]^2 = \psi$$
$$[p\lambda + (B'' + \varrho C'')]^2 = \psi$$

zerfällt, wenn $K = (B'' + \varrho C'')^2$ gesetzt wird. Auf demselben Wege wie oben findet man, dass sich Kegelschnitte derselben Schaar nur auf der Doppelcurve, solche aus verschiedenen Schaaren zweimal, Kegelschnitte, welche in derselben Ebene liegen viermal, nämlich zweimal auf der Doppelcurve und zweimal auf der Berührungscurve von K mit der Fläche schneiden.

Die cubische Gleichung in ϱ, welche die Geradenpaare der einen Kegelschnittschaar ergiebt, wird

$$0 = \{a, b, c, A'' + 2\varrho B'' + \varrho^2 C''\}^2$$
$$- 3\{a, b, \lambda p + B'' + \varrho C'', A'' + \varrho B'' - \varrho p\lambda\}^2,$$

in welcher der Coefficient von ϱ^4 verschwinden muss. Die singuläre Tangentenebene wird einem der Werthe von ϱ entsprechen.

§. 7.

Setzt man in den beiden Factoren

$$[p + (B + \varrho C)]^2 = \chi$$
$$[p - (B + \varrho C)]^2 = \chi$$

für χ den Ausdruck $(B' + \sigma C')^2$, wenn $A' + 2\sigma B' + \sigma^2 C' = 0$ eine beliebige Tangentenebene des Kegels χ darstellt, so löst sich die Flächengleichung in die vier Factoren auf,

$$p + (B + \varrho C) + (B' + \sigma C') = 0$$
$$p + (B + \varrho C) - (B' + \sigma C') = 0$$
$$p - (B + \varrho C) + (B' + \sigma C') = 0$$
$$p - (B + \varrho C) - (B' + \sigma C') = 0.$$

Diese vier zusammen mit den Gleichungen der zwei variabeln Tangentenebenen stellen die vier Schnittpunkte ihrer Schnittlinie mit der Fläche vor; die Coordinaten derselben sind ausgedrückt als rationale Functionen vierten Grades in ϱ, σ. Die Schnitte der vier projectivischen Ebenenbündel mit einer festen Ebene stellen vier eindeutige Abbildungen der Fläche dar, die sich von einander nur durch verschiedene Combination der zu Grunde gelegten Kegelschnitte unterscheiden, in welche die Schnitte von $C=0$ und $C'=0$ mit der Fläche zerfallen. Die ebenen Schnitte bilden sich wieder als Curven vierter Classe mit zwei festen Doppeltangenten ab, den Schnitten von C und C' mit der festen Ebene; ausserdem müssen sie vier einfache feste Tangenten besitzen, die sich leicht durch folgende Betrachtung ergeben. In den beiden benutzten Kegelschnittschaaren kommen die Paare vor:

$a_1 c_1$, $a_2 d_1$, $A_1 b_2$ in der einen,
$b_1 d_1$, $b_2 d_2$, $A_1 a_1$ in der conjugirten Schaar.

Dabei ist A_1 die Verbindungsgerade der Knotenpunkte, a_1, a_2 sind die durch den einen, b_1, b_2 die durch den andern gehenden Geraden, endlich c_1, c_2, d_1, d_2 die vier letzten, sodass $c_1\, c_2$ mit a_1 und $d_1\, d_2$ mit a_2, $c_1\, d_1$ mit b_1 und $c_2\, d_2$ mit b_2 in einer Ebene liegen. Die Paare $a_1 c_1$ und $a_1 A_1$, $a_2 d_1$ und $b_1 d_1$, $A_1 b_2$ und $b_2 d_2$, endlich $A_1 b_2$ und $A_1 a_1$ schneiden sich jedesmal in einer Geraden. Alle Punkte einer solchen entsprechen demselben Werthepaar ϱ, σ, ihre Abbildungen sind demnach wieder gerade Linien, die festen einfachen Tangenten der ebenen Schnitte.

Ganz wie oben lässt sich folgern, dass beide Knotenpunkte eine unendlich vieldeutige Abbildung besitzen müssen, für den ersten σ constant, ϱ variabel, für den zweiten σ variabel und ϱ constant; beziehungsweise die Ebenen der Paare $A_1 a_1$ und $A_1 b_2$ unbeweglich gedacht. Daraus folgt die Gruppirung der festen Tangenten in zwei Strahlbüschel C, a_1, A_1 und C', b_2, A_1 mit dem gemeinsamen Strahl A_1. Die einzige Gerade d_1 ist unabhängig von den beiden Büscheln. Ueberträgt man das System in Punktcoordinaten, so sind die Abbildungen der ebenen Schnitte Curven vierter Ordnung mit zwei Doppelpunkten und vier einfachen. Die beiden ersten C und C' liegen mit drei der letztern, a_1, b_2, A_1, so, dass C, A_1, a_1 und C', A_1, b_2 auf einer Geraden liegen. Diese beiden Geraden sind die Bilder der zwei Knotenpunkte, A_1 ist ihre gemeinsame Gerade, a_1, b_1, sowie die Verbindungslinien der Doppelpunkte mit d_1 stellen die vier andern dar, die ihnen angehören. Die vier letzten endlich sind d_1, die Verbindungen von C mit a_1 und C' mit b_2, und der Kegelschnitt durch d_1, C, C', a_1 b_2.

Die Kegelschnittschaaren des doppelt berührenden Kegels bilden sich dann ab als Kegelschnittbüschel durch die beiden Doppelpunkte und a_1, b_2 oder d_1, A_1. Die vier andern bilden sich ab als zwei Strahlbüschel, deren Scheitel die Doppelpunkte und zwei Kegelschnittbüschel durch die Doppelpunkte, durch d_1 und a_1 oder d_1 und b_2. Die vier verschiedenen Classen von Abbildungen unterscheiden sich dadurch, dass immer eine andere der vier keinem Knotenpunkte angehörigen Geraden sich als Fundamentalpunkt abbildet.

Nimmt man zu Ausgangsebenen C und C' die Ebenen zweier Geradenpaare $a_2 d_1$ und $d_1 b_1$, so werden die Functionen vierten Grades $x_i = F_i(\varrho, \sigma)$ zu Functionen dritten Grades, die beiden Doppelpunkte gehen in einfache Punkte, den Bildern der sich nicht schneidenden Geraden a_2, b_1, über, der Punkt d_1 verschwindet ganz aus der Abbildung und die Bilder ebener Schnitte sind Curven dritter Ordnung mit den fünf Fundamentalpunkten als einfachen festen Punkten. Auf diese Art sind wir zu der anfänglichen Abbildung zurückgekehrt.

Benutzen wir zur Erzeugung der Fläche durch projectivische Gebilde die Kegel ψ und K, so sind die vier Ebenenbündel:

$$\begin{aligned}
p\lambda + (B'' + \sigma C'') - (B + \varrho C) &= 0\\
p\lambda + (B'' + \sigma C'') + (B + \varrho C) &= 0\\
p\lambda - (B'' + \sigma C'') + (B + \varrho C) &= 0\\
p\lambda - (B'' + \sigma C'') - (B + \varrho C) &= 0,
\end{aligned}$$

aus welchen sich die x wieder mit Hülfe der Gleichungen der beiden Tangentenebenen als rationale Functionen vierten Grades in ϱ, σ darstellen. Werden zur Abbildung die Kegelschaaren benutzt, in denen die Geradenpaare

$$\begin{matrix} a_1 c_1 & , & a_2 d_1 & , & A_1 b_2 \\ d_1 c_2 & , & c_1 d_2 & , & A_1 A_1 \end{matrix}$$

vorkommen, so erhält man wieder die festen Doppeltangenten C und C'' und die festen einfachen Tangenten d_1 und c_1. Die Kegelspitze ψ muss sich als Strahlbüschel abbilden, dem auch der feste Strahl A_1 angehört. Die wandernde Tangentenebene des Kegels ψ behält ihre Lage, wenn sie durch das Paar $A_1 b_2$ geht, einmal bei, es muss sich A_1 noch einmal als ein dem ersten unendlich naher Strahl abbilden. Die Uebertragung in Punktcoordinaten führt auf zwei Doppelpunkte C, C'', zwei einfache d_1, c_1 und zwei unendlich nahe A_1; die mit C in einer Geraden liegen. Diese stellt den einen, die beiden zusammenfallenden Punkte A_1 den andern Knotenpunkt und die Verbindungsgerade beider dar. Die beiden dem ersten angehörigen Geraden bilden sich ab als die Verbindungslinien von C'' mit c_1 und d_1, und die den letzteren schneidenden sind die Gerade $C'' A_1$ und der Kegelschnitt durch C'', C, d_1, c_1, A_1. Ausserdem geben die Verbindungslinien von C mit d_1 und c_1 die beiden letzten Geraden der Fläche.

Die zum ersten Knotenpunkte gehörigen Kegelschnittschaaren bilden sich ab als Strahlbüschel durch C'' und Kegelschnittbüschel durch C, C'', c_1, d_1; die des letztern als Kegelschnittbüschel durch die beiden Doppelpunkte, je einen der zusammenfallenden und je einen der übrigen beiden Punkte. Die beiden übrigen sind der Strahlbüschel durch C und das Curvenbüschel dritter Ordnung, welches durch sämmtliche Fundamentalpunkte geht und noch in C'' einen Doppelpunkt besitzt. Man erhält zwei Gruppen von Abbildungen, je nach der Benutzung des einen oder andern Knotenpunktes und jede enthält wieder zwei, je nachdem sich zwei einander nicht schneidende der vier letzten Geraden als Fundamentalpunkte der Geraden abbilden.

Werden die Ebenen zweier Geradenpaare, z. B. $a_2 d_1$ und $d_1 c_2$ als Ausgangsebenen C und C'' benutzt, so werden die Doppelpunkte zu einfachen, den Bildern der Geraden a_2 und c_2, d_1 verschwindet ganz aus der Bildebene und man erhält ein System von Curven dritter Ordnung durch fünf Fundamentalpunkte. Zwei derselben sind unendlich nahe gerückt und liegen mit einem dritten in einer Geraden. Die den ersten Knotenpunkt treffenden Geraden bilden sich ab als a_2, A_1 und Verbindungslinie der Punkte c_2, c_1; die zum zweiten gehörigen ausser A_1, als die Verbindungen der Punkte c_2 und c_1 mit A_1; die zwei letzten als $a_2 c_2$ und $a_2 c_1$. Die Kegelschnittschaaren des ersten Knotenpunktes sind die zwei Strahlbüschel, welche c_1 und c_2 zu Scheiteln besitzen, die des letzteren sind der Strahlbüschel mit dem Scheitel A_1 und der Kegelschnittbüschel durch a_2, c_1, c_2 und einen der unendlich nahen Punkte. Die beiden letzten Schaaren endlich sind der Strahlbüschel mit dem Scheitel a_2 und der Kegelschnittbüschel durch c_1, c_2 und die beiden zusammenfallenden Punkte.

(Die Untersuchung anderer Fälle der vorliegenden Flächenart folgt im nächsten Heft.)

Der Flächenbüschel zweiter Ordnung in synthetischer Behandlung.

Von H. Müller in Freiburg i. Br.

Die erste Construction der durch neun Punkte gehenden Fläche zweiter Ordnung wurde von Hesse gegeben im 24. Bande von Crelle's Journal. Dieselbe gründet sich auf einen Satz, welcher der analytischen Geometrie entlehnt ist.

Im 62. Bande desselben Journals gab Schröter eine auf synthetischen Betrachtungen gegründete Construction der Fläche, welche die Erzeugung der Fläche zweiten Grades durch reciproke Strahlenbündel voraussetzt und ihre Lösung in der Feststellung der durch sieben Punktepaare bestimmten Verwandtschaft zweiten Grades findet.

Die erste vollständig synthetische Betrachtung über das Flächenbüschel zweiter Ordnung, welche die Construction der durch neun Punkte bestimmten Fläche enthält, wurde von Reye angestellt in seinen „Vorlesungen über die Geometrie der Lage." Dieselbe gründet sich auf die Betrachtung von räumlichen Systemen, welche zu demselben Systeme in polarer Verwandtschaft stehen und von denen zwei beliebige den gleichen Strahlencomplex erzeugen.

Es ist demnach wohl nicht ganz unnütz, darauf aufmerksam zu machen, dass die Eigenschaften des Flächenbüschels zweiter Ordnung auch durch synthetische Betrachtungen erhalten werden können, welche auf den Sätzen über ebene Kegelschnittbüschel fussen.

Im Folgenden sind zunächst die in Anwendung kommenden Sätze aufgezählt.

§. 1.

1) Alle Kegelschnitte, welche durch vier feste Punkte a, b, c, d gehen, bilden ein Kegelschnittbüschel.

Die Curven dieses Büschels erzeugen auf allen durch einen der vier Punkte a, b, c, d gehenden Geraden projectivische Punktreihen, in welchen die auf demselben Kegelschnitte des Büschels liegenden Punkte entsprechende sind.

Auf einer Geraden, welche keinen der Punkte a, b, c, d enthält, erzeugt der Kegelschnittbüschel eine Involution, in welcher je zwei auf demselben Kegelschnitte gelegene Punkte einander conjugirt sind.

2) Die Polaren beliebiger Punkte der Ebene in Bezug auf die Kegelschnitte des Büschels bilden Strahlbüschel, welche mit den oben genannten Punktreihen und dem Kegelschnittbüschel selbst projectivisch sind.

3) Aus 1) und 2) folgt leicht:

Ist auf einer Geraden eine Involution gegeben, so kann man in Bezug auf einen Punkt m der Geraden und die verschiedenen Punktepaare der Involution immer die vierten harmonischen Punkte suchen.

Die für verschiedene Lagen des Punktes m auf diese Weise erhaltenen Punktreihen sind projectivisch auf einander bezogen, wenn immer die vierten harmonischen Punkte in Beziehung auf das gleiche Punktepaar der Involution einander entsprechend gesetzt werden.

Hat man dagegen zwei Involutionen auf zwei verschiedenen Geraden, so kann man diese Punktreihen für beide Involutionen construiren und projectivisch auf einander beziehen Dadurch sind die Involutionen selbst projectivisch auf einander bezogen und man sieht:

Um zwei Involutionen projectivisch auf einander zu beziehen, kann man willkürlich drei Paare von Punktgruppen in beiden einander entsprechend setzen. Dadurch ist dann jedem Punktepaare der einen Involution ein solches in der andern zugeordnet.

4) Auf irgend zwei Geraden, welche keinen der Punkte a, b, c, d enthalten, erzeugt das oben betrachtete Kegelschnittbüschel projectivische Involutionen, in welchen die auf dem gleichen Kegelschnitte des Büschels gelegenen Punktepaare einander entsprechen. Diese Involutionen haben aber noch eine besondere Eigenthümlichkeit. Der Schnittpunkt der beiden Geraden gehört nämlich zwei entsprechenden Gruppen der beiden Involutionen an.

Solche Involutionen werden nun im Folgenden mehrfach verwendet, und sie sollen daher der Kürze halber mit dem Namen von „projectivischen Involutionen in perspectivischer Lage“ belegt werden.

In der That zeigen sie eine Analogie mit den projectivischen Punktreihen in perspectivischer Lage, welche sich durch den aus dem Bisherigen leicht zu folgernden Satze ergiebt:

Hat man auf zwei Geraden zwei projectivische und perspectivisch gelegte Involutionen und legt man durch die vier Punkte zweier entsprechender Punktepaare und einen fünften festen Punkt der Ebene Kegelschnitte, so bilden alle diese Kegelschnitte ein Büschel, das heisst, sie schneiden sich in drei weiteren festen Punkten (von denen zwei imaginär sein können).

§. 2.

1) Um nun zu der ursprünglich gestellten Aufgabe zu kommen, seien $p_1\, p_2\, p_3 \ldots p_9$ die Punkte, durch welche eine Fläche F zweiter Ordnung gelegt werden soll.

Man lege durch $p_1\, p_2\, p_3$ eine Ebene A und durch $p_4\, p_5\, p_6$ eine solche B.

G sei die Schnittlinie von A und B, auf welcher zwei Punkte m und n willkürlich angenommen werden.

Durch $p_1\, p_2\, p_3\, m\, n$ einerseits und $p_4\, p_5\, p_6\, m\, n$ andererseits sind zwei Kegelschnitte K und L bestimmt, welche $m\, n$ zur gemeinschaftlichen Sehne haben und mit dem Punkte p_7 eine einzige Fläche F zweiter Ordnung bestimmen*).

Der Schnitt einer beliebigen durch p_7 gelegten Ebene C mit F ist nämlich bestimmt durch diesen Punkt und die vier Schnittpunkte von C mit K und L.

Es sollen nun die Punkte m und n so bestimmt werden, dass die Fläche F noch durch die Punkte p_8 und p_9 geht:

2) Lassen wir zuerst m noch fest und den beweglichen Punkt n die Lagen $n_1, n_2, \ldots$ annehmen, so entsteht eine ganze Reihe von Flächen $F_1, F_2, F_3, \ldots$, welche die acht Punkte $p_1\, p_2 \ldots p_7$ und m gemein haben.

Nun ist nach §. 1, 4) leicht zu zeigen, dass diese Flächen F_i ein Flächenbüschel zweiter Ordnung bilden, das heisst, dass sie sich ausser in jenen festen acht Punkten noch in einer Raumcurve vierter Ordnung schneiden und dass durch einen einzigen weitern Punkt z. B. p_8 im Allgemeinen nur eine Fläche F_i geht.

Die Flächen F_i werden von A und B in den Kegelschnitten zweier Büschel $\varkappa$ und λ geschnitten, welche respective die festen Punkte $p_1\, p_2\, p_3\, m$ und $p_4\, p_5\, p_6\, m$ zu Grundpunkten haben. In beiden Büscheln sollen nun die Kegelschnitte K_i und L_i, welche der nämlichen Fläche F_i angehören, als entsprechend betrachtet werden.

Eine beliebige, durch p_7 gelegte Ebene C schneide die Ebenen A und B in den Geraden α und β, welche den Punkt q mit der Geraden G gemein haben.

Auf α und β entstehen durch die Schnittpunkte mit den Kegelschnitten K_i und L_i Involutionen, welche projectivisch sind, weil sie beide mit der Punktreihe $n_1\, n_2 \ldots n_i$ projectivisch sein müssen. Ausserdem sieht man leicht, dass diese Involutionen perspectivisch liegen, indem diejenige der Flächen F_i, welche durch q geht, zwei entspre-

---

*) Siehe Reye, Geometrie der Lage II, pag. 29.

chende Gruppen der Involutionen erzeugt, welche beide den Punkt q enthalten.

Alle Kegelschnitte in C, welche man durch die Punkte von entsprechenden Gruppen der Involutionen und den Punkt p_7 legen kann, bilden demnach ein Büschel und schneiden sich mindestens in einem und höchstens in drei weiteren reellen Punkten.

Diese Kegelschnitte sind aber die Schnitte der Flächen F mit der Ebene C, so dass jede Ebene C ausser p_7 mindestens noch einen und höchstens noch drei reelle gemeinschaftliche Punkte der Flächen F enthält.

Lässt man C sich bewegen, so beschreiben diese Punkte eine Curve S, und wenn man die vorigen Betrachtungen nun wiederholt, indem man einen beliebigen Punkt von S an die Stelle von p_7 treten lässt, so zeigt sich, dass diese Curve S mit jeder Ebene vier Punkte gemein hat.

3) Legen wir nun die Ebene C durch die beiden Punkte p_7 und p_8, so wird diese Ebene die Flächen F_i in einem Kegelschnittbüschel schneiden. Da p_7 einer der Grundpunkte dieses Büschels ist, so werden die Kegelschnitte desselben auf $p_7\,p_8$ eine Punktreihe $o_1\ o_2\ o_3\ \ldots$ erzeugen projectivisch mit der Punktreihe $n_1\ n_2\ n_3\ \ldots$. Der Punkt p_8, als Punkt dieser Reihe betrachtet, wird dann einem der Punkte $n_1\ n_2 \ldots$ entsprechen, den wir jetzt schlechthin n nennen wollen. Die Fläche F, welche durch $p_1\,p_2\,p_3 \ldots p_7\ m\ n$ bestimmt ist, ist also die einzige Fläche des Büschels, welche auch durch p_8 geht:

D u r c h j e d e n P u n k t m d e r G e r a d e n G i s t n u r e i n e F l ä c h e z w e i t e r O r d n u n g m ö g l i c h, w e l c h e d i e P u n k t e $p_1\ p_2 \ldots p_8$ e n t h ä l t.

4) Die Constructionen, welche nöthig sind, um bis zu diesem Punkte zu gelangen, sind also folgende:

m und n_i seien zwei beliebig angenommene Punkte auf G, C eine durch $p_7\ p_8$ gehende Ebene, welche die Ebenen A und B in den Geraden α und β schneidet. Man suche die Durchschnittspunkte des durch $p_1\,p_2\,p_3\ m\ n_i$ gelegten Kegelschnitts K_i mit α und die Schnittpunkte des durch $p_4\,p_5\,p_6\ m\ n_i$ gelegten Kegelschnitts L_i mit β. Durch diese vier Schnittpunkte und p_7 denke man sich einen neuen Kegelschnitt gelegt und seinen zweiten Durchschnitt o_i mit der Geraden $p_7\ p_8$ bestimmt.

Ganz dasselbe thue man mit Verwendung von zwei andern Punkten n_r und n_s, und man kommt auf zwei Punkte $o_r\ o_s$ der Geraden $p_7\,p_8$. Dadurch ist die Projectivität der Reihen $n_i\ n_r\ n_s \ldots$ und $o_i\ o_r\ o_s$ festgestellt und man kann den Punkt n der ersten Reihe bestimmen, welcher dem Punkte p_8 der zweiten entspricht. Die durch $p_1 \ldots p_7\,m\,n$

bestimmte Fläche F, welche nach §. 2, 1 construirt wird, geht durch p_8.

Diese Construction wird dann unmöglich, wenn p_8 einer der Grundpunkte des in C enthaltenen Kegelschnittbüschels ist.

In diesem Falle geht eben jede Fläche des Büschels durch p_8.

5) In der vorigen Nummer wurde ein Mittel angegeben, mit dem man beliebig viele durch acht Punkte $p_1\, p_2\, p_3 \ldots p_8$ gehende Flächen zweiter Ordnung construiren kann, und zwar geht durch einen Punkt m_i der Schnittlinie G von A und B nur eine einzige solche Fläche F_i.

Es soll nun gezeigt werden, dass alle diese Flächen einem Flächenbüschel zweiter Ordnung angehören.

Zwei jener Flächen F_1 und F_2 mögen die Ebene A in den Kegelschnitten K_1 und K_2 schneiden und die Ebene B in den Kegelschnitten L_1 und L_2.

Die beiden ersten haben die Punkte $p_1\, p_2\, p_3$ und noch einen vierten r; die beiden letzten dagegen die Punkte $p_3\, p_4\, p_5$ und einen vierten s gemein.

K_1 und L_1, sowie K_2 und L_2 haben G zur gemeinschaftlichen Sehne und schneiden diese Gerade bezüglich in den Punkten m_1, n_1 und m_2, n_2.

Die beiden Paare von Kegelschnitten bestimmen nun in den Ebenen A und B zwei Kegelschnittbüschel, welche $\varkappa$ und λ heissen mögen und auf der Geraden G die nämliche Involution erzeugen, welche je durch die zwei Punktepaare $m_1\, n_1$ und $m_2\, n_2$ vollständig bestimmt ist. Bezeichnet man zwei Kegelschnitte K_i und L_i als entsprechend, wenn sie G in dem nämlichen Punkte m_i schneiden, so sind dadurch die beiden Involutionen auf G so auf einander bezogen, dass die entsprechenden Gruppen einander decken und je zwei entsprechende Kegelschnitte der beiden Büschel G zur gemeinschaftlichen Sehne haben.

Solche zwei Kegelschnitte K_i und L_i bilden nun mit p_7 zusammen die bedingenden Elemente für eine einzige Fläche Φ_i zweiter Ordnung. (§. 2, 1.)

Von diesen Flächen Φ_i ist leicht zu zeigen, dass dieselben einen Flächenbüschel zweiter Ordnung bilden, das heisst, dass sie von jeder Ebene in einem Kegelschnittbüschel geschnitten werden.

Man würde zu diesem Zwecke zunächst eine Ebene C durch p_7 legen und gerade wie dies in §. 2, 2) geschehen ist, beweisen, dass diese Ebene die Flächen Φ_i in einem Kegelschnittbüschel schneidet.

Ist sodann C_1 eine ganz beliebige Ebene, so wird dieselbe von zwei Flächen Φ_i und Φ_k in zwei Kegelschnitten getroffen, welche vier Punkte a, b, c, d gemein haben. Legt man nun C speciell durch p_7 und einen dieser Punkte, so folgt sogleich, dass der letztere allen

Flächen Φ gemein ist, dass also die Kegelschnitte, in welchen C_1 von den Flächen Φ getroffen wird, sämmtlich die Punkte a, b, c, d gemein haben; was zu beweisen war.

Da nun die Flächen Φ_i, weil sie ein Büschel bilden, alle Punkte gemein haben, welche irgend zwei derselben gemein sind, und da die Flächen F_1 und F_2, welche dem Büschel auch angehören, durch $p_1 p_2 \ldots p_8$ gehen, so gehen auch alle Flächen Φ_i durch $p_1 p_2 \ldots p_8$.

Es soll aber noch gezeigt werden, dass die Flächen dieses Büschels die einzigen sind, welche die Punkte $p_1 p_2 \ldots p_8$ enthalten.

Zunächst ist klar, dass jede Fläche, welche durch $p_1 p_2 \ldots p_8$ geht und einen Punkt m_i der Geraden G enthält, dem Büschel angehört, denn es ist gezeigt worden (§. 2, 3), dass durch diese 9 Punkte nur eine einzige Fläche geht und es muss daher dieselbe mit der Fläche Φ_i zusammenfallen, welche durch das Punktepaar m_i n_i der Involution geht, in welcher der Flächenbüschel von G geschnitten wird.

Gäbe es aber überhaupt eine Fläche Ψ zweiter Ordnung, welche durch $p_1 p_2 \ldots p_8$ ginge und dem betrachteten Büschel nicht angehörte, so könnte man mit Ψ und einer Fläche Φ_i des Büschels einen zweiten Flächenbüschel bestimmen. Dann müssten aber alle Flächen des letzten Büschels, welche G schneiden, nach dem Vorigen nothwendig mit Flächen des ersten Büschels zusammenfallen, was nicht möglich ist, wenn nicht die beiden Büschel identisch sind.

6) Um von den Flächen des Büschels diejenige zu finden, welche noch durch p_9 geht, wird man durch p_9 eine Ebene legen, welche das Flächenbüschel in einem Kegelschnittbüschel schneidet. Von den Curven des letztern geht eine einzige durch p_9. Sie hat in den Kegelschnittbüscheln auf den Ebenen A und B zwei entsprechende Kegelschnitte, welche G zur gemeinsamen Sehne haben. Dieselben bilden mit (zum Beispiel) p_7 zusammen die bestimmenden Stücke für diejenige Fläche zweiter Ordnung, welche durch $p_1 p_2 \ldots p_8 p_9$ geht (vgl. §. 2, 1).

§. 3.

Im Frühern wurde zuerst durch $p_1 p_2 \ldots p_7$ und einen beliebigen Punkt m_1 von G ein Flächenbüschel zweiter Ordnung bestimmt und in demselben diejenige Fläche gesucht, welche durch p_8 geht. Dabei wurde angenommen, dass p_8 kein den Flächen des Büschels gemeinsamer Punkt sei. Dieser Fall soll nun besonders betrachtet werden:

a) p_8 ist ein den Flächen des Büschels $p_1 p_2 \ldots p_7 m_1$ gemeinsamer Punkt.

Bestimmt man nun noch durch $p_1 p_2 \ldots p_7$ und einen andern Punkt m_2 von G ein zweites Flächenbüschel, so können zwei Fälle eintreten:

b) p_8 ist kein den Flächen dieses Büschels gemeinsamer Punkt.

c) p_8 ist ein solcher.

Finden die Bedingungen *a*) und *c*) statt, so gehen durch jeden Punkt m_i zwei Flächen, welche $p_1\, p_2 \ldots p_7\, p_8$ enthalten. Dieselben bestimmen ein neues Büschel, in welchem eine Fläche durch einen weitern Punkt n_i von G geht.

Es gehen also dann alle Flächen, welche G in zwei beliebigen Punkten m_i und n_i schneiden und durch $p_1\, p_2 \ldots p_7$ gehen, auch durch p_8.

Für Flächen, welche G nicht in reellen Punkten treffen, gilt das Gleiche.

Man denke sich zwei beliebige durch $p_1 \ldots p_7$ gehende Flächen Ψ_1 und Ψ_2, so bestimmen dieselben ein Büschel. In demselben wähle man zwei Flächen $\Psi_i\, \Psi_k$, welche G schneiden, und zwar in den Punktepaaren $m_i\, n_i$ und $m_k\, n_k$. Dann gehen nach dem Vorigen $\Psi_i\, \Psi_k$ und in Folge dessen Ψ_1 und Ψ_2 durch p_8, das heisst:

Wenn die Bedingungen *a*) und *c*) stattfinden, das heisst, wenn p_8 auf drei durch $p_1\, p_2 \ldots p_7$ gelegten, nicht in einem Büschel enthaltenen Flächen zweiter Ordnung gelegen ist, so gehen alle durch $p_1\, p_2 \ldots p_7$ gelegte Flächen auch durch p_8.

Ist dagegen *c*) nicht erfüllt, so gehen durch $p_1\, p_2 \ldots p_8$ keine anderen Flächen als diejenigen des Büschels $p_1\, p_2 \ldots p_7\, m$, und die früheren Betrachtungen werden dadurch nicht gestört.

In Betreff eines synthetischen Beweises des Satzes, dass immer ein solcher Punkt p_8 gefunden werden kann, welcher auf drei nicht in einem Büschel enthaltenen Flächen zweiter Ordnung, die durch sieben Punkte gehen, und somit auf allen diesen Flächen gelegen ist, siehe Hesse Crelle's Journal Bd. 26. oder meine Abhandlung pag. 407. der Annalen.

Bemerkung über die Geometrie auf den windschiefen Flächen dritter Ordnung.

Von A. Clebsch in Göttingen.

In dem Folgenden will ich ein Verfahren angeben, wie man die auf einer windschiefen Fläche dritter Ordnung liegenden Curvenschaaren einfach und übersichtlich classificiren kann. Dabei bemerke ich nur zunächst Folgendes:

Die windschiefen Flächen dritter Ordnung werden (vgl. Borchardts Journal, Bd. 67. p. 17) auf einer Ebene so abgebildet, dass die ebenen Schnitte sich durch Kegelschnitte darstellen, welche durch einen festen Punkt A der Bildebene gehen, und die Verbindungslinie zweier andern Punkte B, C harmonisch theilen. Solche zu B, C harmonische Punkte sind die Bilder eines Punktes der Doppelgeraden.

Wenn man also Raumcurven untersucht, deren Bilder Curven n^{ter} Ordnung mit αfachen Punkten in A sind, so findet man zwei Arten von Specialisirungen, welche diese Curven erfahren können. Erstens können einmal oder mehrere Male Schnittpunkte der Curve mit BC zu B und C harmonisch liegen; zweitens können vielfache Punkte der Curve ausserhalb des Punktes A auftreten. In beiden Fällen hat man besondere Fälle der entsprechenden Raumcurve vor sich, in denen wirkliche Doppelpunkte eintreten; doch ist der Charakter dieser Ausartung in beiden Fällen gänzlich verschieden. Im ersten Falle treten wirkliche Doppelpunkte auf, welche auf der Doppellinie der Fläche liegen, und bei denen beide Zweige der Curve sich auf verschiedenen Mänteln der Fläche befinden. Durch eine solche Ausartung wird das Geschlecht der Abbildung, also auch der Raumcurve, nicht erniedrigt. Dagegen tritt eine solche Erniedrigung im zweiten Falle ein, wo die singuläre Tangentenebene der specialisirten Raumcurve zugleich Tangentenebene der Fläche ist.

Ich werde im Folgenden diese beiden Ausartungen nicht als besondere Classen von Raumcurven auffassen, sondern sie als Grenzfälle betrachten, welche unter denjenigen enthalten sind, die sich als Curven n^{ter} Ordnung mit αfachem Punkte in A abbilden. Man hat dann nur die durch diese beiden Zahlen charakterisirten Familien (n, α) zu untersuchen.

Die Familie (n, α) wird gebildet aus Raumcurven, deren Ordnung N und deren Geschlecht p (letzteres mit der soeben besprochenen Einschränkung) durch die Formeln gegeben sind:

$$(1)\qquad \begin{cases} N = 2n - \alpha \\ p = \frac{n-1\,.\,n-2}{2} - \frac{\alpha\,.\,\alpha-1}{2} = \frac{n-1-\alpha\,.\,n-2+\alpha}{2}\,. \end{cases}$$

Es ist nun zweckmässig, diese Familien nach p zu ordnen, und dabei die Bezeichnungen einzuführen:

$$(2)\qquad \begin{cases} x = n-2+\alpha \\ y = n-1-\alpha\,, \end{cases}$$

wodurch man die Formeln erhält:

$$(3)\qquad \begin{cases} n = \frac{x+y+3}{2} & \alpha = \frac{x-y+1}{2} \\ N = \frac{x+3y+5}{2} & p = \frac{xy}{2}\,. \end{cases}$$

Von den Zahlen x, y ist nothwendig stets eine gerade, die andere ungerade. Ferner kann, $n = 1$ ausgenommen, eine Curve n^{ter} Ordnung höchstens einen $(n-1)$fachen Punkt haben, wenn sie nicht zerfallen soll, was ich immer ausschliesse. Daher ist $\alpha \leqq n-1$ (für $n > 1$), und also für $n > 1$ x und y nicht negativ. Es ergeben sich daraus folgende Fälle, welche zu betrachten sind:

1. $n = 1$. Je nachdem $\alpha = 1$ oder $\alpha = 0$, erhält man die Schaar von Geraden, welche durch den Punkt A gehen, und welche Bilder der Erzeugenden der Fläche sind; oder Gerade der Bildebene, welche nicht durch A gehen, und welche also Bilder der Kegelschnitte sind, welche mit je einer der Erzeugenden ebene Schnitte bilden.

2. $n > 1$, $p = 0$. Dies kann auf doppelte Weise eintreten. Die Gleichung $x = 0$ ist nur möglich, wenn $n = 2$, $\alpha = 0$. Man erhält also nur Kegelschnitte, welche nicht durch A gehen. Ihnen entsprechen Raumcurven vierter Ordnung und zweiter Species.

Dagegen führt $y = 0$ auf eine unendliche Reihe von Curvenfamilien. Denn setzt man $\alpha = n - 1$, so wird

$$x = 2n - 3\quad,\quad N = n + 1.$$

Es giebt also auf der Fläche eine unendliche Schaar von Curvenfamilien des Geschlechts $p = 0$; von jeder Ordnung $N > 2$ existirt eine solche Familie, deren Glieder jede Erzeugende einmal treffen.

Man sieht, dass unter diesen Familien auch wieder eine Schaar von Raumcurven vierter Ordnung und zweiter Species sich befindet. Sie ist von der vorigen gänzlich verschieden; denn jede Curve der vorigen Art schneidet jede Erzeugende zweimal, jede der letzten Art aber schneidet jede Erzeugende nur einmal.

3. $p > 0$. Für jedes grössere p giebt es nur eine endliche Anzahl von Curvenfamilien. Man erhält die ihnen

entsprechenden Zahlen x, y, indem man die Zahl $2p$ auf alle möglichen Arten in einen geraden und einen ungeraden Factor zerlegt, und nur dabei beachtet, dass

$$\alpha = \frac{x-y+1}{2}$$

nicht negativ sein kann, dass also y höchstens um 1 grösser sein kann als x.

Insbesondere also giebt es für $p = 2^n$ nur immer eine Classe, für welche $x = 2^{n+1}$, $y = 1$. Die Zerlegung $x = 2p$, $y = 1$ kommt immer vor, und giebt $N = p + 4$; ist p eine ungerade Primzahl, so giebt nur noch eine andere, nämlich $x = p$, $y = 2$, $N = \frac{p+11}{2}$; bei $p = 3$ ist auch noch die aus der Vertauschung von x und y hervorgehende Zerlegung $x = 2$, $y = 3$ hinzuzufügen.

Die ersten Werthe von p geben folgende Curvenfamilien:

$p = 1$:

x	y	N	n	α
2	1	5	3	1
1	2	6	3	0

$p = 2$:

x	y	N	n	α
4	1	6	4	2

$p = 3$:

x	y	N	n	α
6	1	7	5	3
3	2	7	4	1
2	3	8	4	0

$p = 4$:

x	y	N	n	α
8	1	8	6	4

$p = 5$:

x	y	N	n	α
10	1	9	7	5
5	2	8	5	2

$p = 6$:

x	y	N	n	α
12	1	10	8	6
4	3	9	5	1
3	4	10	5	0.

Göttingen, den 26. März 1869.

Verbesserungen.

p. 31. In den beiden letzten Formeln ist statt $+\frac{\lambda}{4k}$ zu setzen $-\frac{\lambda}{4k}$.

p. 148. Z. 8 u. 10. Statt V zu setzen v.

p. 153. 154. In No. 22 statt r_α zu s. r_β, und statt r_β zu s. r_γ.

p. 272. Z. 3. Statt „der Doppelcurve" zu s. „der Abbildung der Doppelcurve."

p. 295. letzte Z. Statt „Punktepaare" zu s. „Curve."

p. 296. Z. 1. Statt 2 zu s. 3.

p. 296. Z. 2. Statt 4 zu s. 3.

p. 436. Z. 11. Statt *divisé* zu s. *divisés.*

p. 437. Z. 21. Statt *que nous* zu s. *que nous nous.*

p. 445. Z. 6. Statt $[K, K']$ zu s. $\frac{[K, K']}{6T}$, und statt r zu s. $\frac{r}{da \, . \, db \, . \, dc}$.

p. 445. Z. 10. Statt r^2 zu s. $\left(\frac{r}{da \, . \, db \, . \, dc}\right)^2$.

p. 451. Z. 7 v. u. Statt $\Sigma\left(x' \frac{\partial F}{\partial x}\right)$ zu s. $2\Sigma\left(x' \frac{\partial F}{\partial x}\right)$.

p. 579. Statt der Zeilen 11, 12 u. 13 ist zu setzen: wo $\varkappa$ einen integrirenden Factor für denjenigen linearen complexen Differentialausdruck bezeichnet, dessen Modul

$$ds^2 \quad \text{d. h.} \quad Edu^2 + 2Fdudv + Gdv^2$$

ist, und wo $\varphi = Const.$ die Gleichung derjenigen Curven bedeutet, deren tangentielle etc. etc.

Sur une formule de Leibniz. Par Hoüel. Bordeaux 1869.

INHALT.

Verantwortliche Redaction: A. Clebsch und C. Neumann.

2