始

中 等

工業力學

大東機械工學研究會編

大石堂出版部
發 行

は し が き

工學を修める者には力學は最も必要な學科にして，力學を充分會得せないで工學を學ぶ事は到底不可能である。工學に志すものは先づ力學に關する充分なる知識と根底ある學力を養成する必要がある。本書は大體文部省の教授要目に準據して工業學校生徒のために，將來學ぶ工學の基礎たらしむる目的を以つて編纂したものである。

1. 生徒は既に物理學を學習して居る筈であるから，本書の編纂に當り物理學との連絡に充分意を用ひた。
1. 力學は此程度の生徒のためには相當難解な學科なれば，例題を多く入れて力學の意義，公式の應用，單位の取扱ひ等を生徒に理解し易い樣にした。特に工學上では煩雜な計算よりも圖解の方が簡單で，且つ充分目的を達する場合も多いので，必要な所では例題の解答に圖解計算の兩方を示して置いた。
1. 凡て數學，物理學の如き學科は多くの練習問題をせなければ實力がつかないものであるから，各章の終りに相當多くの練習問題を挿入して置いたから，本文を熟讀した上で練習問題について充分實力を養成せられ度い。

編纂には相當注意をしたが内容の遺漏，答の誤算，誤

植の見落し等不備な點がないとも云へぬ，識者の御叱正を得て更に改良を施し，本書の目的を達成し得れば幸甚である。

昭和十七年三月

著　　　者

中等工業力學

目　次

第一章　總　論

第二章　運　動

第三章　力

第四章　ベクトル

第五章 力の釣合

第六章 仕事及びエネルギー

第七章 摩擦

第八章 回轉運動

第九章 衝突

第十章 單弦運動

第十一章 圖式力學

附 錄

—目次終—

中等工業力學

第一章 總論

1. 力學の意義

物體の運動を研究する學問を**重學**と云ふ。總ての物理的現象は物體の運動として說明し得るが故に重學は實に物理學の基礎をなすものである。勿論物理學の應用である工學は，重學の素要なくしては到底理解する事は出來ないのである。

運動を研究するに當り，物體の質量及びこれに働く力を考へず單に時の觀念を加へて運動の形體を論ずるもの，即ち運動の幾何學を**運動學**と云ふ。運動學に物體の質量の考へを加へた物體の運動と力との關係を論ずる學問を**力學**と云ふ。

運動せる物體に關する力學を**動力學**と云ひ，物體に働く力が釣合ひを保つ場合について論究する力學を**靜力學**と云ふ。

$$
\text{重學}\begin{cases}\text{運動學}\\ \text{力學}\begin{cases}\text{動力學}\\ \text{靜力學}\end{cases}\end{cases}
$$

又力學は他の標準より質點力學，剛體力學，流體力學，彈性力學等に分類する事もある。

2. 質點と剛體

力學に於いて物體相互間の運動を論ずる場合に，物體間の距離

が物體自身の大きさに比し非常に大きい場合には，物體の大きさを考へないで一つの點と見做して取扱ふ。かような點を**質點**と云ふ。天體力學では太陽及び諸惑星でも質點として取扱ふが，分子及び原子の構造を論ずる場合には分子及び原子も質點として取扱ふことは出來ない。

質點の集合を**質點系**と云ひ，これに關する力學を**質點系力學**と云ふ。力學は物體を質點系と見做すことにより運動を簡單に取扱ふ事が出來る場合がある。

質點系を構成する各質點の相互位置不變な系を**剛體**と云ふ。即ち，剛體は如何に大きい力が作用しても大きさ及び形が變らぬ物體でかやうな物體は實在せないが，固體は作用する力が餘り大きくない限り剛體と見て差支へない。

物體の運動を論ずるに物體を剛體として取扱へば便利な場合がある。これを**剛體力學**と云ふ。以下單に物體と云ふも場合によつては質點と見做し，時によつては剛體として考へねばならぬ。

第二章　運　　動

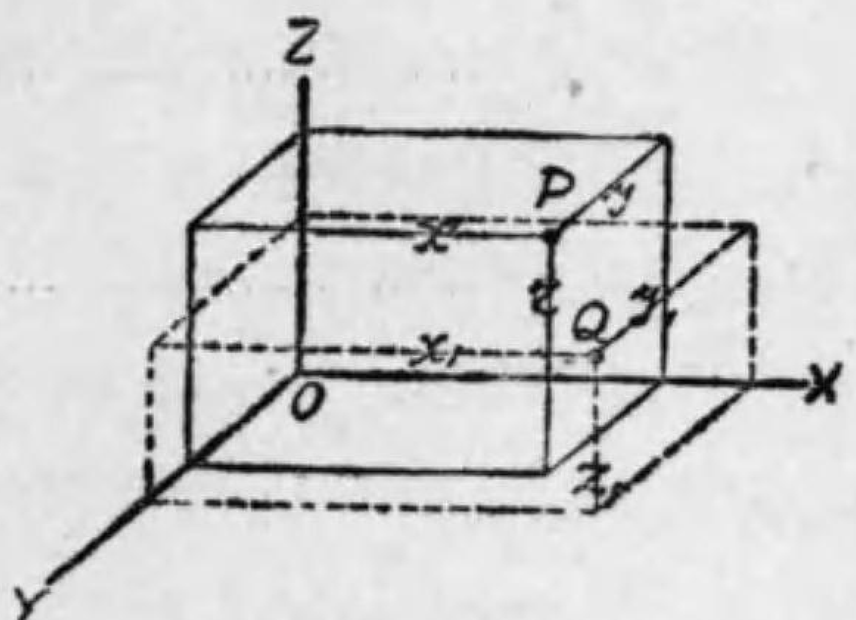
3. 靜止及運動

物體の位置を表はすには**座標**を用ふ。物體が位置を變へない時物體は**靜止**せりと云ひ，物體が時に對して其の位置を變へることを**運動**と云ふ。靜止及運動は標準により異るもので，地球上に於いては地球に對して靜止せるものは靜止，地球に對して運動せる

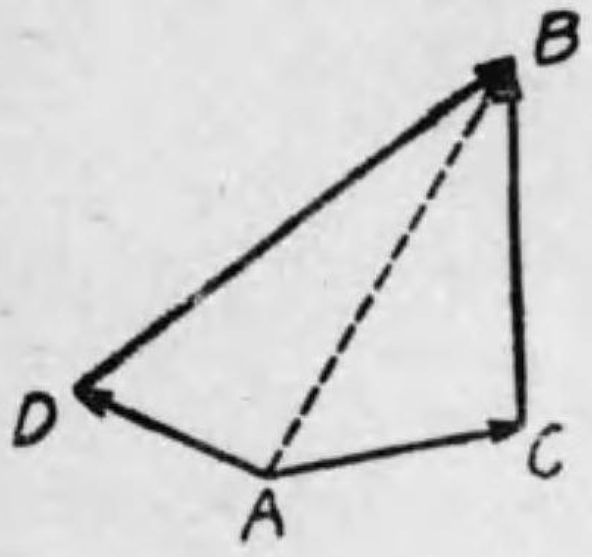
ものは，運動と見做す。之と同樣に船又は汽車の中では船又は汽車を標準にとる。

物體の運動に於いて運動の道程及速さを無視して，單に位置の變化のみを考へる時は，これを**變位**と云ふ。

第　1　圖



第　2　圖



即ち ADB の路を通る運動も ACB の路を通る運動も變位は等しく AB である。變位を表はすには**大きさ**，**方向**及び**向き**を示さねばならぬ。變位の單位は km, m, cm, ft, mile 等長さの單位を用ふ。

4. 速　　度

單位時間の變位を**速度**と云ふ。今 t の時間内に s の變位をした

第 1 表　長さの單位比較表

cm	m	km	in	ft	mil
1	0.01	—	0.39371	0.032808	—
100	1	0.001	39.371	3.2808	0.000621
—	1000	1	—	3280.8	0.621
2.5400	0.02540	—	1	0.0833	—
30.479	0.30479	0.00030479	12	1	0.000189
—	1609.3	1.6093	—	5280	1

とすると其運動の速度 v は次式によつて求められる。

$$v=\frac{s}{t}\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(1)$$

之と反對に v の速度にて t なる時間運動した變位 s は

$$s=vt\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(2)$$

速度は變位と同樣に大きさ，方向及び向きとを有し，大きはkm, m, cm 及び ft の如き長さの單位を用ひ，これを粁/時，米/分，粁秒$^{-1}$ 米分$^{-1}$，又は km/h, m/min 或は km/sec の樣に表はす。

速度の一定な運動を**等速度運動**と云ひ，一定でない運動を**不等速度運動**と云ふ。

【例題】1.　50分間に40粁を走る自動車の速度を求めよ。

【解】　$v=\frac{s}{t}=\frac{40}{50}=0.8\text{km/min}=800\text{m/min}=133\text{m/sec}.$

【例題】2.　30km/h の速度の船で一定方向に一晝夜航海すると幾何の距離に達するか。

【解】　$s=vt=30\text{km}\times24=720\text{km}$

5. 加速度

不等速度運動に於いて單位時間に變化した速度を**加速度**と云ふ。加速度にも**等加速度**と**不等加速度**とある。等加速度運動に於いて，v_1 の速度が t 秒後に v_2 の速度になつたとすると加速度 α は

$$\alpha=\frac{v_2-v_1}{t}\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(3)$$

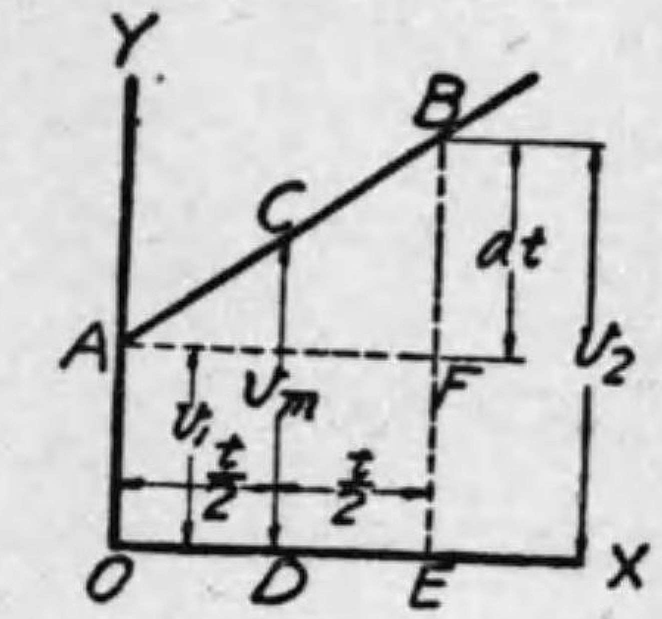
である。$v_2<v_1$ の時は α は負，$v_2>v_1$ の時は正となる。α が正なる時は速度は增す場合で，負の時は速度が減ずる場合である。$\alpha=0$ の場合は等速度運動である。

(3) 式より　$v_2=v_1+\alpha t\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(4)$

速度が一定加速度で t 秒間に v_1 より v_2 に變つたとすると第 3 圖より平均速度 v_m は，

$$v_m=\frac{v_1+v_2}{2}\cdots\cdots\cdots(5)$$

第 3 圖



t 秒間の變位 s は

$$s=v_mt=\left(\frac{v_1+v_2}{2}\right)t$$

$$=\left(\frac{v_1+v_1+\alpha t}{2}\right)t=v_1t+\frac{1}{2}\alpha t^2\cdots\cdots\cdots(6)$$

(4)式を二乘すると，

$$v_2^2=(v_1+\alpha t)^2=v_1^2+2v_1\alpha t+\alpha^2t^2$$

$$=v_1^2+2\alpha\left(v_1t+\frac{\alpha t^2}{2}\right)=v_1^2+2\alpha s\cdots\cdots\cdots(7)$$

加速度は速度を時間で除したものであるから，加速度の單位は米/秒^2，粁/時^2 或は cm/sec^2, m/sec^2, km/h^2 の如く表はす。

【例題】1.　60m/sec の速度を有する物體が20秒後に靜止せりと云ふ。此時の平均加速度を求めよ。

【解】　(3)式より

$v_2=0,\ v_1=60\text{m/sec},\ t=20\text{sec}.$

$\alpha=\frac{v_2-v_1}{t}=\frac{0-60}{20}=-3\text{m/sec}^2$

即ち減速度運動である。

【例題】2.　初速度15m/sec を有する物體が加速度 3m/sec^2 にて 8 秒間運動すると終速度何程となるか。又此の間に通過する距離を求めよ。

【解】　(4)式より

$v_1=15\text{m/sec},\ \alpha=3\text{m/sec}^2,\ t=8\text{sec}$

$v_2=v_1+\alpha t=15+3\times8=39\text{m/sec}$

通過距離 s は

(5)式より　$s=v_1t+\frac{\alpha t^2}{2}=15\times8+\frac{3\times64}{2}=216\text{m}$

【例題】3. 速度10m/sec の物體が30mを走つた時速度が 30m/sec になつたと云ふ。此時の加速度を求めよ。

【解】(7)式より

$$v_2^2=v_1^2+2as \qquad a=\frac{v_2^2-v_1^2}{2s}=\frac{30^2-10^2}{2\times30}=13.33\text{m/sec}$$

6. 落體の運動

高所にある物體は地球の中心に向つて等加速度にて落下する。加速度の大きさは場所によつて多少異るが，大略 **9.8m/sec²** でこれを**地球重力の加速度**と云ひ符號 g で表はす。物體を投げ上げると $-g$ の加速度となり速度は次第に減少する。

落體の運動は加速度 g なる等加速度運動であるから(4)(5)(6)(7)式中の加速度 α の代りに g を，運動距離 s の代りに高さ h を置き代へると其儘落體の運動式が得られる。即ち

$$v_2=v_1+gt \quad \cdots\cdots(8)$$

$$h=v_1t+\frac{gt^2}{2} \quad \cdots\cdots(9)$$

$$h=\frac{gt^2}{2}\ (v_1=0\text{のとき}) \quad \cdots\cdots(10)$$

$$v_2^2=v_1^2+2gh \quad \cdots\cdots(11)$$

【例題】1. 50m/sec の速度にて垂直上方に投げた物體の最大上昇高さ，最高點迄の時間，90mの高さに達した時の速度及6秒後の速度を求めよ。

【解】上昇の時には g は $-g$ となる。

最高點では $v_2=0$

(11)式より

$$0=v_1^2-2gh \qquad h=\frac{v_1^2}{2g}=\frac{2500}{19.6}=127.5\text{m}$$

最高點迄に要する時間は

(8)式より

$$0=v_1-gt \qquad t=\frac{v_1}{g}=\frac{50}{9.8}=5.1\text{秒}$$

90mの高さに達した時の速度は(11)式より

$$v_2=\sqrt{v_1^2-2gh}=\sqrt{50^2-2\times9.8\times90}=27.1\text{m/sec}$$

6 秒後の速度は(8)式より

$$v_2=v_1-gt=50-9.8\times6=-8.9\text{m/sec}$$

即ち物體は一度最高點に達し其點で速度は零となる。それより運動の方向が反對になり，落下し始め，6 秒後には 8.9m/sec の速度になる。即ち負號は落下を示す。

【例題】2. 300m の塔上より物體を落下せしめると同時刻に，地上より50m/sec の速度にて物體を投げ上げると，如何なる點で兩物體が出逢ふか。又其時刻を問ふ。

【解】出會ふ迄の時間を t とすると落下の距離は

$$s_1=\frac{1}{2}gt^2$$

投げ上げの距離　$s_2=v_1t-\frac{1}{2}gt^2$

塔の高さ　$H=s_1+s_2=\frac{1}{2}gt^2+\left(v_1t-\frac{1}{2}gt^2\right)$

即ち　$300=\left(\frac{1}{2}\times9.8\times t^2\right)-\left(50t-\frac{1}{2}\times9.8\times t^2\right)$

$t=6\text{sec}$

出逢ふ點が地上 h の點とすると　$s_2=h$ より

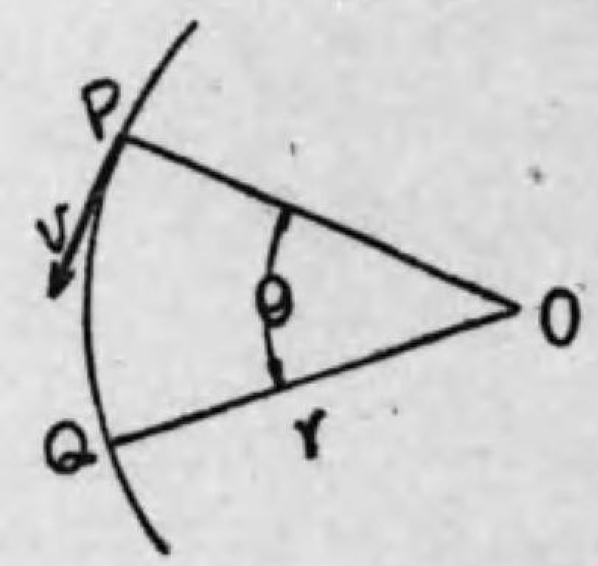
$$h=v_1t-\frac{1}{2}gt^2=50\times6-\frac{1}{2}\times9.8\times6^2=123.6\text{m}$$

7. 角速度及び角加速度

物體が回轉運動をする場合には，其速度を表はすに，回轉した角をもつてすると便利である。これを角速度といふ。角は常に孤度法によつて表はす。即ち，t 秒間に P より Q 迄 θ ラヂアン移動したとすると，角速度 ω は

$$\omega=\frac{\theta}{t}\,\mathrm{rad/sec.}\ \cdots\cdots\cdots(12)$$

第 4 圖



である。角速度に對し今迄述べた直線上の運動の速度を線速度と云ふ。

線速度と角速度との關係は

$$s=r\theta$$

$$v=\frac{s}{t}=r\frac{\theta}{t}=r\omega\cdots\cdots(13)$$

n廻轉/秒する物體の角速度は

$$\omega=2\pi n\,\mathrm{rad/sec.}\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(14)$$

回轉運動には角速度が一定な運動と一定でない運動とがある。角速度が一定でない運動に於いて，時間に對して角速度の變化する割合を**角加速度**と云ふ。角速度 ω_1 が t 秒後に ω_2 に達したとすると角加速度 β は

$$\beta=\frac{\omega_2-\omega_1}{t}\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(15)$$

或は $\omega_2=\omega_1+\beta t\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(16)$

單位は rad/sec² を用ひる。線加速度αと角加速度βとの關係は

$$\omega_1=\frac{v_1}{r}\qquad \omega_2=\frac{v_2}{r}$$

$$\therefore\ \beta=\frac{v_2-v_1}{rt}=\frac{\alpha}{r}\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(17)$$

$s=r\theta$　$v_1=r\omega_1$　$v_2=r\omega_2$　$\alpha=r\beta$ を(6)(7)の式に代入すると，

$$\theta=\omega_1 t+\frac{\beta t^2}{2}\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(18)$$

$\omega_1=0$ とすれば

$$\theta=\frac{\beta t^2}{2}\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(19)$$

$$\omega_2^2=\omega_1^2+2\beta\theta\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(20)$$

【例題】1. 直徑 1m の圓板が 1800/min の回轉をすると云ふ。角速度及線速度を求めよ。

【解】 $\omega=\dfrac{2\pi\times1800}{60}=188.4\,\mathrm{rad/sec.}$

$v=188.4\times0.5=94.2\,\mathrm{m/sec.}$

【例題】2. 直徑50cm の圓周上の線速度が 10m/min とすると 1秒間何回轉することとなるか。

【解】 $\omega=\dfrac{v}{r}=\dfrac{\frac{10}{60}}{0.25}=0.667\,\mathrm{rad/sec.}$

$\omega=2\pi n\qquad n=\dfrac{\omega}{2\pi}=\dfrac{0.667}{2\pi}=0.106$回轉/sec

【例題】3. 10rad/sec の角速度が30秒後に 1rad/sec に減じたりと云ふ。角加速度及び其間に廻轉した角度を求めよ。

【解】 $\beta=\dfrac{\omega_2-\omega_1}{t}=\dfrac{1-10}{30}=-0.3\,\mathrm{rad/sec.}$

(20)式より $\theta=\dfrac{\omega_2^2-\omega_1^2}{2\beta}=\dfrac{11-100}{-0.3}=330\,\mathrm{rad.}$

$330\times\dfrac{180}{\pi}=1895$度

練 習 問 題

(1) 90miles/h の速度は幾m/sec となるか。 (ans. 40.2m/sec)

(2) 90分間に 38km を走る汽車の速度は何 km/h なるか。 (ans. 101.5km/h)

(3) 192km/h の速度の飛行機が一定方向に 5 分間飛行すると何 km 飛ぶか。 (ans. 16km)

(4) 136km を 1 時間40分に走る汽車の速度を求めよ。 (ans. 81.6km/h)

(5) 地球重力の加速度を 32ft/sec² とし，これを cm/sec² で表はせ。 (ans. 981cm/sec²)

(6) 汽車が發車後 5 分後に 50m/sec の速度になつたといふ。其加速度及び通過距離を求めよ。 (ans. α=10m/sec², S=125m)

(7) 初速度 4m/sec，加速度 0.9m/sec² の運動體が 15m 動きたるときの速度及びそれ迄に要した時間を問ふ。(ans. $v_1=6.56$m/sec，$t=2.85$sec)

(8) 15m/sec の速度を有する物體が，10秒後に 25m/sec の速度になつたといふ。加速度を求めよ。 (ans. 1m/sec²)

(9) 72km/h の速度の列車に制動機を使用し初めて 40sec 後に停車せりといふ。平均加速度を求めよ。 (ans. −0.5m/sec²)

(10) 4.9m/sec² の加速度をもつて動き始めた物體がある。其物體の出發後5秒して同一地點より同方向に同加速度で出發し，10秒後に前の物體に追ひつくには後より出發した物體の初速度は幾らにしたらよいか。

(ans. 30.63m/sec)

(11) 50m の高さの塔より物體を落すと何秒で地上に達するか。

(ans. 3.195sec)

(12) 初速度 400m/sec の速度にて鉛直上方に發射した小銃丸の發射後2秒間に通過した距離，最高點の高さ及び最高點までの時間をもとめよ。

(ans. $s=780.4$m，$h=81.60$m，$t=40.8$sec)

(13) 垂直上方に投げ上げた物體が6秒後に最高點に達したとすると初速度及び最高點の高さを求めよ。(ans. $v_1=29.4$m/sec，$h=44.2$m)

(14) 高さ 150m の塔上より物體を落し，2秒の後塔の底面より 35m/sec の速度にて同一直線上を垂直上方に投げ上げるとき，兩物體の出合ふ時刻と其位置を求めよ。 (ans. $h=46$m，$t=2.67$sec)

(15) 井戸に石を落し2秒にて水面に達せりといふ。井戸の深さを求めよ。 (ans. 19.6m)

(16) 高さ 100m の斷崖の上より 20m/sec の初速度にて石を垂直に投下した，石が谷底に到着した時の速度と時刻を求めよ。

(ans. $v_2=48.5$m/sec，$t=2.9$sec)

(17) 石を初速度 49m/sec で鉛直に投げ上げる場合に次の各項を求めよ。

1. 8秒後の速度(v_1)と高さ(h_1)。
2. 落ちて來るまでの時間(t_2)と地上に到達したときの速度(v_2)。
3. 速度 20m/sec になるまでの時間(t_3)と其時の高さ(h_3)。

4. 石の達し得る最大高さ(h_4)とそれまでの時間(t_4)。

$$\text{ans.}\left(\begin{array}{ll} h_1=78.4\text{m}, & v_1=29.4\text{m/sec} \\ t_2=10\text{sec}, & v_2=49\text{m/sec} \\ t_3=2.96\text{sec}_3, & h_3=102\text{m}_3 \\ t_4=5\text{sec}, & h_4=122.5\text{m} \end{array}\right)$$

(18) 直徑 3m で 1800$r.p.$m の回轉體の角速度，及び先端の線速度を求めよ。 (ans. $\omega=60\pi$rad/sec，$v=283$m/sec)

(19) 180$r.v.$m の回轉體が 20sec 後 140$r.p.$m になつた。それまでに何回轉したか。又靜止までに要する時間を求めよ。

(ans. $n=135$回，$t=90$sec)

(20) 角速度 40rad/sec の車輪に制動機を働らかしたところ，30回轉で停止したと云ふ。角速度を求めよ。 (ans. 4.25rad/sec)

(21) 調車の回轉數が 10sec の間に 120 より 240 になつた。角加速度を求めよ。 (ans. 0.4πrad/sec²)

(22) 回轉數 240/min，直徑 4m のはづみ車が角加速度 2rad/sec² で次第に回轉數を增せば10秒後の角速度及び線速度を求めよ。

(ans. $\omega=45$rad/sec，$v=90$m/sec)

(23) 靜止せるはづみ車が等加速度回轉をして15秒後に 12πrad/sec の角速度になつた。其間に何回轉したか。 (ans. $n=45$)

第三章　力

ニユートンの運動に關する三つの重要なる法則があり，力學の基礎をなしてゐる。

8. 運動の第一法則

物體は外力の作用を受けない限り運動の狀態を持續す。即ち外力の作用を受けなければ靜止して居るものは永久に靜止し，運動

してゐるものは同一方向に等速度運動を續けるのである。この性質を**慣性**と云ふ。

この法則より物體の運動狀態を變化さす原因を**力**と云ふ。

9. 運動の第二法則

運動量の變化は力積に比例し，其方向は力の方向と一致す。

茲に運動量とは運動體の質量と其速度の相乘積を云ひ，力積とは力と力の作用した時間の相乘積を云ふ。即ち力を f，時間を t，最初の速度を v_1，最後の速度を v_2 とすると

$$ft = km(v_2 - v_1) \quad \cdots\cdots(21)$$

$$f = km\alpha \quad \cdots\cdots(22)$$

即ち**力は其働く向きに於ける質量と加速度の積に比例する。**一般に質量は吾々の取扱ふ範圍では一定と見做す事が出來るから，同一物體では**力は加速度に比例する。**

運動量の單位は質量及び速度の單位を並記する。例へば kg. m/sec. lbs. ft/sec の如し。

1瓦の質量の物體に 1 cm/sec² の加速度を生ずる力を單位の力とすると，K=1 となる。此時の力の單位を**ダイン**と云ふ。英式單位では，質量1封度の物體に 1 ft/sec² の加速度を生ずる力を1**パウンダル**と云ふ。ダイン及びパウンダルを**力の絶對單位**と云ふ。

力の單位としてダイン又はパウィダルのやうな絶對單位を用ふることは，實用上不便が多い。實用上には力の單位として重さの

單位瓦，瓩，磅或はポンド，噸等を用ふるのが便利である。之を力の**重力單位**と云ふ。絶對單位と動力單位との關係は次の如し。

今質量 mg の物體を地球重力によつて落下させると。gcm の加速度を生ずる。故に此物體に作用して居る重力 f は

$$f = mg \text{ ダイン} \quad \cdots\cdots(23)$$

である。此力を一般に m 瓦の重量と云ふ。即ち重力單位にて表はした力 f_g と，絶對單位にて表はした力 f_d の間には次の關係がある。

$$f_g = \frac{f_d}{g} = \frac{m}{g}\alpha \quad \cdots\cdots(24)$$

上式より g ダインが重力單位の $1g$ の力，$1000g$ ダインの力が重力單位の $1kg$ の力となる。

$\frac{m}{g} = m'$ とすると

$$f_g = m'\alpha \quad \cdots\cdots(25)$$

此 m' を**質量の重力單位**と云ふ。g は工學上では特に精密を要する場合の外は 980cm/sec² = 9.8m/sec² を用ふ。質量mkgの物體に αm の加速度を生ずる力を kg で表はすにはダインで求めた力を $1000g$ で割ればよい即ち

$$f_{kg} = \frac{m_{kg} \times 1000 \times \alpha_m \times 100}{980 \times 1000} = \frac{m_{kg}\alpha_m}{9.8} = \frac{m_{kg}}{9.8}\alpha_m \cdots(26)$$

となる。$\frac{m_{kg}}{9.8}$ は kg で表はした質量の重力單位である。

工學上に於いては各量の單位は重力單位を用ひる。從つて質量も重力單位を用ひる。

【例題】1.　質量50kgの物體に10kgの力が作用し生ずる加速度を求む。

【解】26式より　$a = \frac{fg}{m} = \frac{10 \times 9.8}{50} = 1.96\text{m/sec}^2$

【例題】2.　40m/sec の速度にて運動して居る質量30kgの物體あり，これ

に 4 kg の力が運動を妨げる方向に働くと何秒後に靜止するか。

【解】 $a=\dfrac{4\times 9.8}{30}=1.3\text{m/sec}$

此加速度は速度を減ずる方向に働く。

$$at=v$$

より　$t=\dfrac{v}{a}=\dfrac{40}{1.3}=30.8\text{sec}$

【例題】3. 靜止せる質量 30kg の物體に力が作用して10sec後に 40m/sec の速度に達したと云ふ。作用した力の大きさを求めよ。

【解】 作用した力を f とすると(29)式より

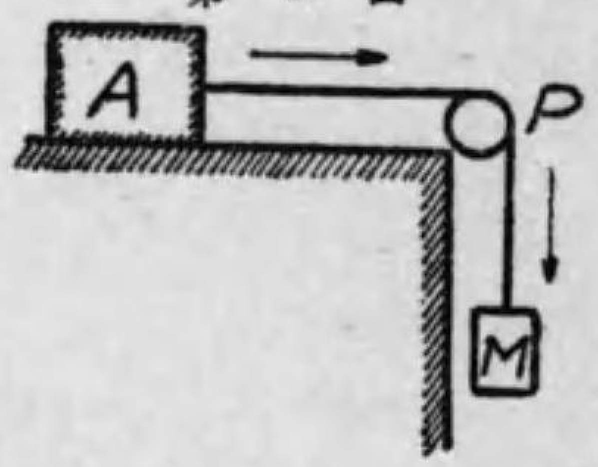
$$a=\frac{f}{\dfrac{m}{g}}$$

$$v=at=\frac{f}{\dfrac{m}{g}}t=\frac{fgt}{m}$$

$$f=\frac{mv}{gt}=\frac{30\times 40}{9.8\times 10}=12.3\text{kg}$$

【例題】4. 質量 m の物體Aに滑車Pを通して質量 M の重錘を結ぶ此時生ずる加速度及び糸に生ずる張力Tを求めよ。
但し摩擦はないものとす。

第 5 圖



【解】 M>m とすると物體は矢の方向に運動す。

物體Aに加速度運動を與へる力　Tkg

物體Mに加速度運動を與へる力　Mkg−Tkg

A及びBの加速度は相等し。

$$\mathrm{T}=\frac{m}{g}a\cdots\cdots\cdots\cdots(a)\qquad \mathrm{M}-\mathrm{T}=\frac{\mathrm{M}}{g}a\cdots\cdots\cdots\cdots(b)$$

(a)式のTを(b)式に代入すると

$$\mathrm{M}-\frac{m}{g}a=\frac{\mathrm{M}}{g}a$$

$$\mathrm{M}=\frac{a}{g}(\mathrm{M}+m)\qquad a=\frac{\mathrm{M}g}{\mathrm{M}+m}$$

a の値を(a)式に代入して

$$\mathrm{T}=\frac{m}{g}\cdot\frac{\mathrm{M}g}{\mathrm{M}+m}=\frac{\mathrm{M}m}{\mathrm{M}+m}$$

10. 運動の第三法則

ニユートンの運動の第三法則は**物體に作用を及ぼせば，その物體よりそれと等しく且方向反對なる反作用を生ずる**。質量 $m_1 m_2$ の甲乙二物體があり甲が乙に及ぼす力 f_1 により乙は α_2 の加速度を生じ，甲は乙の反作用 f_2 によつて α_1 の加速度を生じたとすると，

$$f_1=m_2\alpha_2 \qquad f_2=m_1\alpha_1 \qquad f_1=-f_2$$

$$m_2\alpha_2=-m_1\alpha_1\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(27)$$

$$\frac{\alpha_2}{\alpha_1}=-\frac{m_1}{m_2}\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(28)$$

即ち**物體間の作用と反作用によつて生ずる加速度は質量に反比例する**。

t 秒後の甲の速度を v_1，乙の速度を v_2 とすると27式の兩邊に t をかけると，

$$m_2\alpha_2 t=-m_1\alpha_1 t$$

$$m_2v_2=-m_1v_1\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(29)$$

即ち**作用及び反作用によりて生ずる運動量は相等し**。

單に力又は運動量の大きさのみを知らんとする時には，負號を考へなくてもよい。

【例題】1. 重量 40t の大砲より重量 320kg の彈丸を 800m/sec の速度にて發射する時大砲の後退速度を求めよ。

【解】 大砲の質量を m_1，速度を v_1，彈丸の質量を m_2，速度を v_2 とすると

$$m_1v_1 = m_2v_2$$

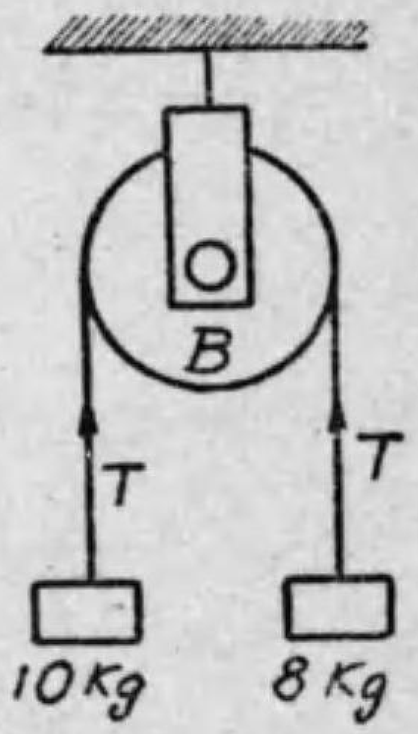
$$v_1 = \frac{m_2v_2}{m_1} = \frac{320\times800}{40000} = 6.4\text{m/sec}$$

練習問題

(1) 重量10kgの物體に2 m/sec²の加速度を生ずる力をダイン，瓦，及瓩で求めよ。 (ans. 2×10^6ダイン，2020瓦，2.020瓩)

(2) 質量100kgの物體が速度5 m/secで運動して居る。運動量は何程か。 (ans. 500kg, m/sec)

第6圖



(3) 第6圖の如き滑車裝置に於て，物體の加速度及び糸の張力Tを求めよ。

(ans. $a=1.09$m/sec², $T=8.9$kg)

(4) 重量30kgの物體に力を作用して3秒後に12m/secの速度になる樣にせんとす。力の大いさを求めよ。 (ans. 12.2kg)

(5) 重量24kgの物體が30m/secの速度で運動して居る。これに3.5kgの力が運動と反對方面に作用すると何秒後に靜止するか。(ans. 21秒)

(6) 重量600tの列車がある。これに0.14m/sec²の加速度をあたへる牽引力を求めよ。 (ans. 2856kg)

(7) 重量4 kgの物體に力が働きて，8cmの距離だけ動き，其時の速度が13m/secであつたといふ。作用した力を求めよ。 (ans. 4.31kg)

(8) 初速度3 m/sec，重量45kgの物體に力が作用して30cm通過して靜止したといふ。作用した力の大いさを求めよ。 (ans. 0.689kg)

(9) 重量28g，速度550m/secの彈丸が木材に當り，20cm突入して止つたといふ。木材の平均抵抗力を求めよ。 (ans. 2160kg)

(10) 滑車に糸をかけ糸の兩端に重量8 kg及び5 kgの物體を吊し，自由に運動させたとき，5秒間に通過せる距離及10秒後の速度を求めよ。

(ans. $s=23.3$m, $v=22.6$m/sec)

(11) エレベーターに體重50kgの人が8人乘つて1 m/sec²の加速度で昇るとき，エレベーターの床の受ける力は何程か。 (ans. 440.8kg)

(12) 重量200tonの機關車あり。其牽引力を4tとすれば，停車場を出發して36km/hの速度を得るまでの時間と，それまでに通過した距離を求めよ。但抵抗力は重量1 tonに付き14kgとす。

(ans. t=2分50秒, s=850m)

(13) 機關銃あり。一分間に500發の割合で重量30gの彈丸を發射す。彈丸の速度を500m/secとすると銃の反動を求めよ。 (ans. 12.75kg)

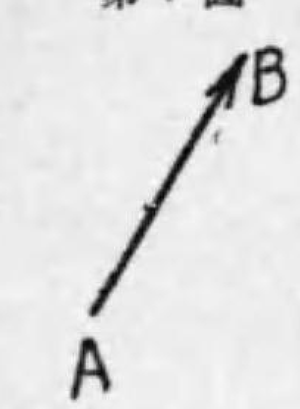
第四章 ベクトル

11. ベクトル量及びスカラー量

種々の量の中には大きさのみにて充分表はし得るものと，大きさと共に方向と向きとが同時に指定せられなければ充分表はし得ないものとがある。

大きさと共に方向と向きを必要とする量を**ベクトル量**又は**ベクトル**と云ひ，大きさのみで充分表はし得る量を**スカラー量**或は單に**スカラー**と云ふ。時間，質量，溫度，體積，面積，エネルギー等はスカラーで變位，速度，加速度，運動量，力等はベクトルである。ベクトルを圖示するには直線の方向にて其方向を，長さをもつて大きさを，矢印を付して其の向きを表はす。

第7圖

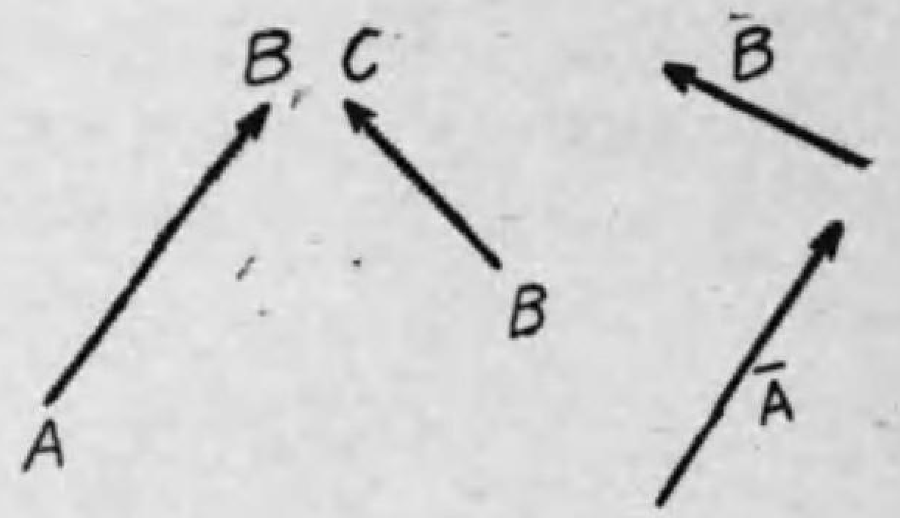


ベクトルの記號は $\overline{AB}$, $\overline{BC}$ 或は $\overline{A}$ の如く記す。

A. ベクトルの加法　A點が同時に又は順次に $\overline{AB}$, $\overline{BC}$ の變位をしたとすると何れの場合にも AはCに變位し結果 AC の變位

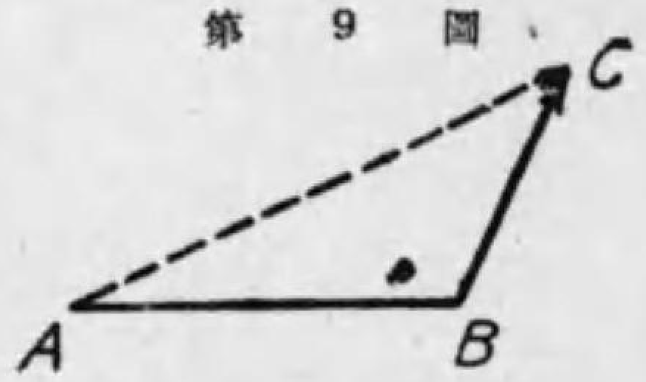
をした事になる。即ち$\overline{AB}$, $\overline{BC}$の變位の和は$\overline{AC}$の變位に等し。これを表はすに$\overline{AB}+\overline{BC}=\overline{AC}$とす。これを**ベクトル方程式**と云ふ。

第 8 圖



上式は變位に付いて述べたのであるが，一般に二つのベクトル$\overline{AB}$と$\overline{AC}$を加へるには**一つのベクトル$\overline{AB}$をベクトルの大きさに比例した直線の長さとしてベクトルの方向に引き，其終點Bより第二のベクトル$\overline{BC}$を同じくベクトルの大きさに比例した長さでベクトルの方向に引き，點Cに三角形を閉ぢるベクトル$\overline{AC}$を引くとベクトル$\overline{AC}$はベクトル$\overline{AB}$, $\overline{BC}$の和となる。**これを**ベクトルの三角形**と云ひ，$\overline{AB}$, 及び$\overline{BC}$を**分ベクトル**, $\overline{AC}$を**合ベクトル**と云ふ。

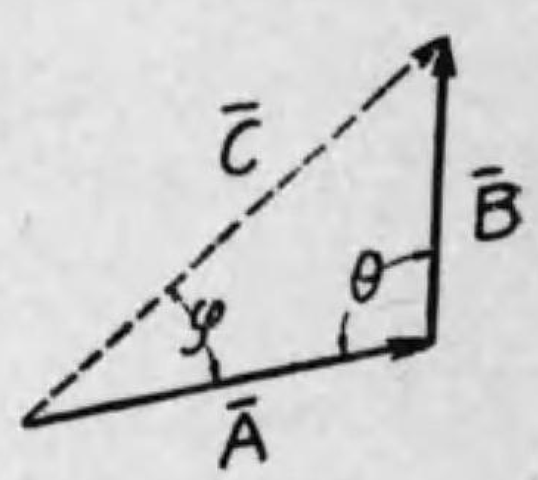
第 9 圖



ベクトルの和を求める事を**ベクトルの合成**或は**ベクトルの加法**と云ふ。

ベクトルの加法に於いては，其の和は加ふ可きベクトルの順序に關係なし。

第 10 圖



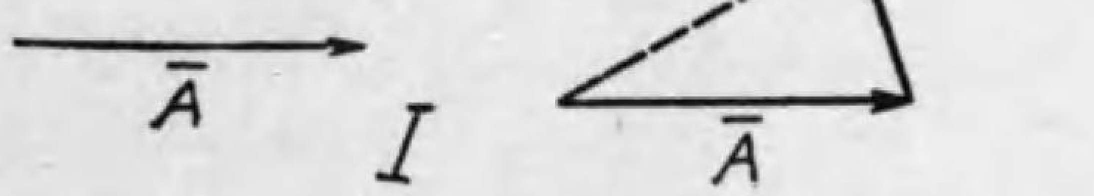
$\bar{A}$, $\bar{B}$二つの分ベクトルと合ベクトルの間には次の關係がある。

$$\bar{C}^2=\bar{A}^2+\bar{B}^2-2\bar{A}\,\bar{B}\cos\theta \quad \cdots\cdots(30)$$

$$\sin\varphi=\frac{\bar{B}}{\bar{C}}\sin\theta \quad \cdots\cdots(31)$$

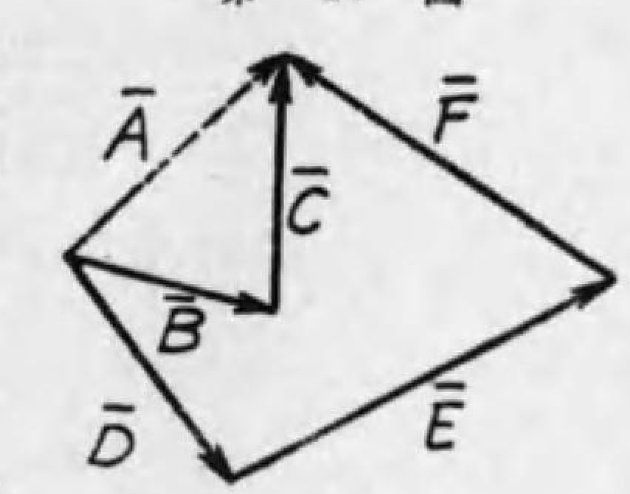
B. 多數のベクトルの加法 多數のベクトル例へば第11圖Iの$\bar{A}\,\bar{B}\,\bar{D}\,\bar{C}$を加へる時には第11圖IIのやうに任意のベクトルより順次ベクトルの方向に大きさに比例した長さで，ベクトルを引き最初の點より最後の點に到るベクトルを引けばこれが多數のベクトルの和となる。此のベクトル圖を**ベクトルの多角形**と云ふ。

第 11 圖



C. ベクトルの分解 第12圖に於て$\bar{A}$ベクトルは$\bar{B}$ベクトルと$\bar{C}$ベクトルの和とも$\bar{D}$, $\bar{E}$, $\bar{F}$ベクトルの和とも云ふ事が出來る。此樣に一つのベクトルを二つ以上の分ベクトルに分つ事を**ベクトルの分解**と云ふ。

第 12 圖



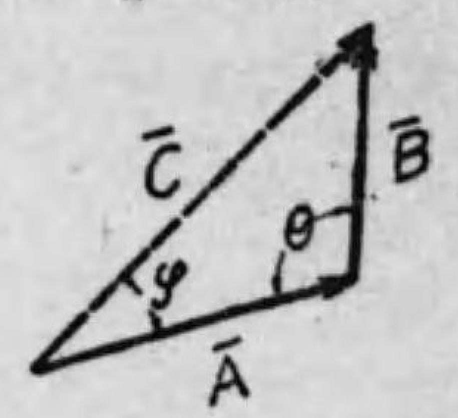
ベクトルは如何なる方向に如何なる大きさにも分解する事が出來るが，大きさ又は方向の中，一方が與へられると分ベクトルは確立す。

ベクトルの三角形に於ては分ベクトルと合ベクトルの間に次の

關係がある。

$$\frac{\bar{C}}{\sin\theta}=\frac{\bar{A}}{\sin(\theta+\varphi)}=\frac{\bar{B}}{\sin\varphi}\cdots(32)$$

第 13 圖

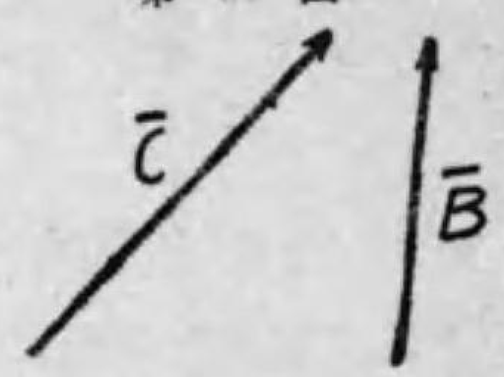


これをラミーの定理と云ふ。

$\theta=\frac{\pi}{2}$ 即ち $\bar{C}$ を直角な二方向に分解すると

$$\bar{A}=\bar{C}\cos\varphi \qquad \bar{B}=\bar{C}\sin\varphi \cdots\cdots(33)$$

第 14 圖

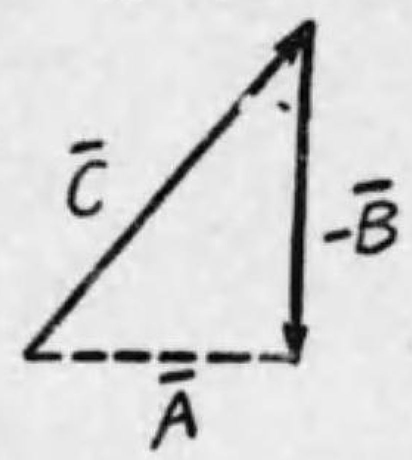


D. ベクトルの減法 $\bar{C}$ ベクトルより $\bar{B}$ ベクトルを引く事は次の樣になる。

$$\bar{C}-\bar{B}=\bar{C}+(-\bar{B})=\bar{A}\cdots\cdots(34)$$

即ち**一つのベクトルより他のベクトルを減ずるには被減ベクトルに減ベクトルの符號を變へて（向きを代へて）加へる。**

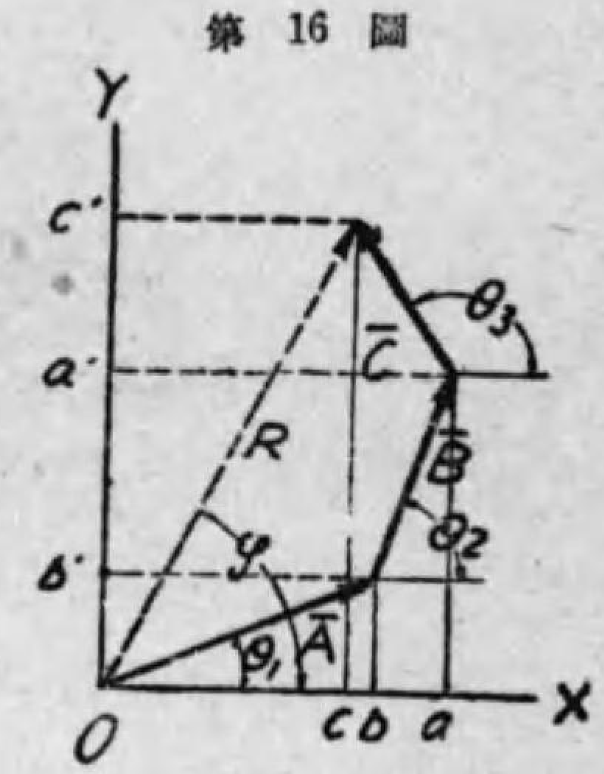
第 15 圖



E. ベクトル合成の解析的方法 ベクトルの合成に直交二軸 X, Y を利用すると便利である。

第16圖に於いて $\bar{A}, \bar{B}, \bar{C}$……を分ベクトル, $\bar{R}$ を合ベクトル, θ_1, θ_2……を夫々分ベクトルがX軸となす角度, φ を合ベクトルRがX軸となす角度とすると，圖よりX軸方向では

第 16 圖



$$R\cos\varphi=\bar{A}\cos\theta_1+\bar{B}\cos\theta_2$$
$$+\bar{C}\cos\theta_3+\cdots\cdots=X\cdots\cdots(35)$$

Y軸方向の分ベクトル

$$R\sin\varphi=\bar{A}\sin\theta_1+\bar{B}\sin\theta+_2$$

$$+\bar{B}\sin\theta_2+\bar{B}\sin\theta_3+\cdots\cdots=Y\cdots\cdots(36)$$

となることがわかる。

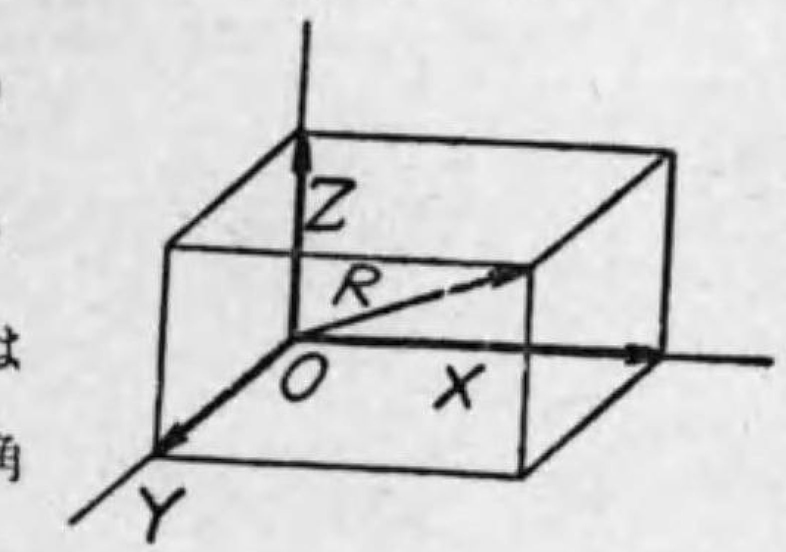
即ち**多類のベクトルのX，Y軸方向の分ベクトルの和は合ベクトルのX，Y軸方向の分ベクトルに等し。**

$$R=\sqrt{X^2+Y^2}\cdots\cdots(37)$$

$$\cos\varphi=\frac{X}{Y}\cdots\cdots(38)$$

$$\sin\varphi=\frac{Y}{R}\cdots\cdots(39)$$

第 17 圖



ベクトルが一平面にない時にはベクトル圖は空間に書かれた多角形となる。此時には，

$$R=\sqrt{X^2+Y^2+Z^2}\cdots\cdots(40)$$

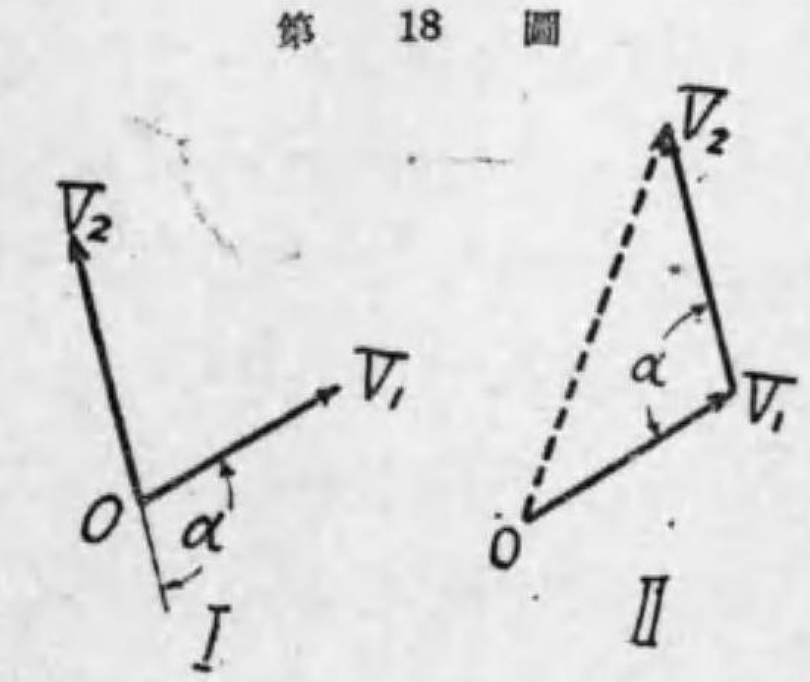
$$\cos\alpha=\frac{X}{R}\quad \cos\beta=\frac{Y}{R}\quad \cos\gamma=\frac{Z}{R}\cdots(41)$$

となる。

12. 速度の合成及び分解

速度はベクトルなれば一つの物體が二つ以上の速度を同時に受ける場合，例へば拋射體の如きは各速度のベクトルの合ベクトルの方向に運動する。これを**合速度**と云ひ各速度を**分速度**と云ふ。合速度を見出すことを**速度の合成**と云ふ。

第 18 圖



逆に一つの速度を二つ以上

の速度に分解することを**速度の分解**と云ふ。

合速度を求めるにはベクトルの加法により例へば第18圖のやうに一つの物體 o が V_1, V_2 の速度を同時に受けると，V_1 及び V_2 の合ベクトル, oV_2 が合成速度の大きさ及び方向を表はす。合速度の大きさ及び方向は尺度と分度器によつて求められるが計算によつて求めると次の關係がある。oV_1 と oV_2 のなす角度を θ とすると

$$OV_2 = \sqrt{V_1^2+V_2^2-2V_1V_2\cos\alpha} \quad \cdots\cdots(42)$$

$$\sin\theta = \frac{V_1\sin\alpha}{OV_2} \quad \cdots\cdots(43)$$

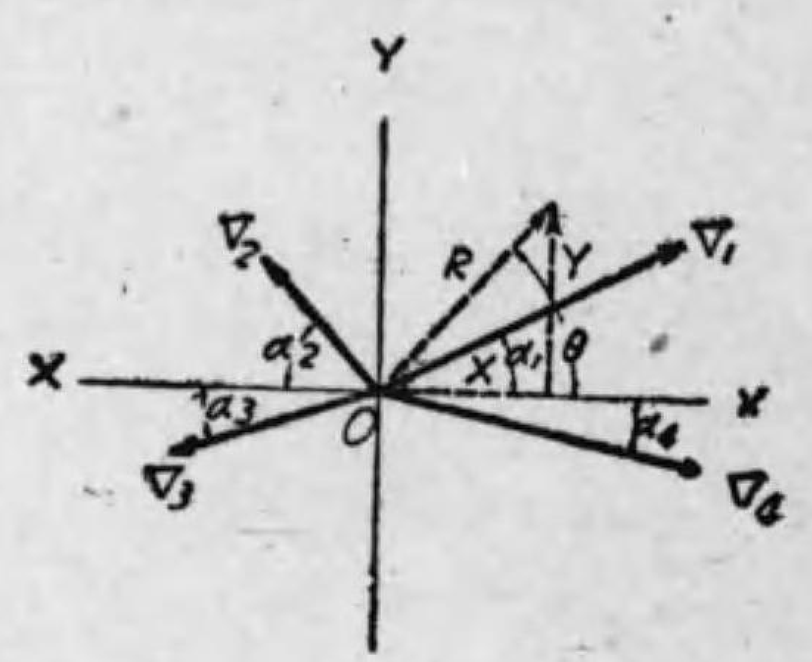
$\alpha=90^\circ$ の時には

$$OV^2 = V_1^2+V_2^2 \quad \cdots\cdots(44)$$

$$\sin\theta = \frac{V_1}{OV_2} = \frac{V_1}{\sqrt{V_1^2+V_2^2}} \quad \cdots\cdots(45)$$

となる。

第 19 圖



合速度を求めるには解析的方法によれば最も便利である。

第19圖の如くOを原點として直角に交る二軸XYをとる，各速度のX軸方向の分速度の和を**X**, **Y**軸方向の分速度の和を**Y**, 合速度をRとすると

$$X = V_1\cos\alpha_1 - V_2\cos\alpha_2 - V_3\cos\alpha_3 + V_4\cos\alpha_4 + \cdots(46)$$

$$Y = V_1\sin\alpha_1 + V_2\sin\alpha_2 - V_3\sin\alpha_3 - V_4\sin\alpha_4 + \cdots(47)$$

$$R = \sqrt{X^2+Y^2} \quad \cdots\cdots(48)$$

$$\tan\theta = \frac{Y}{X} \quad \cdots\cdots(49)$$

【例題】 第20圖Ⅰの如く一つの物體に同時に 10m/sec, 20m/sec, 50m/sec の速度が加はる時の合速度を求めよ。

【解】 圖式。

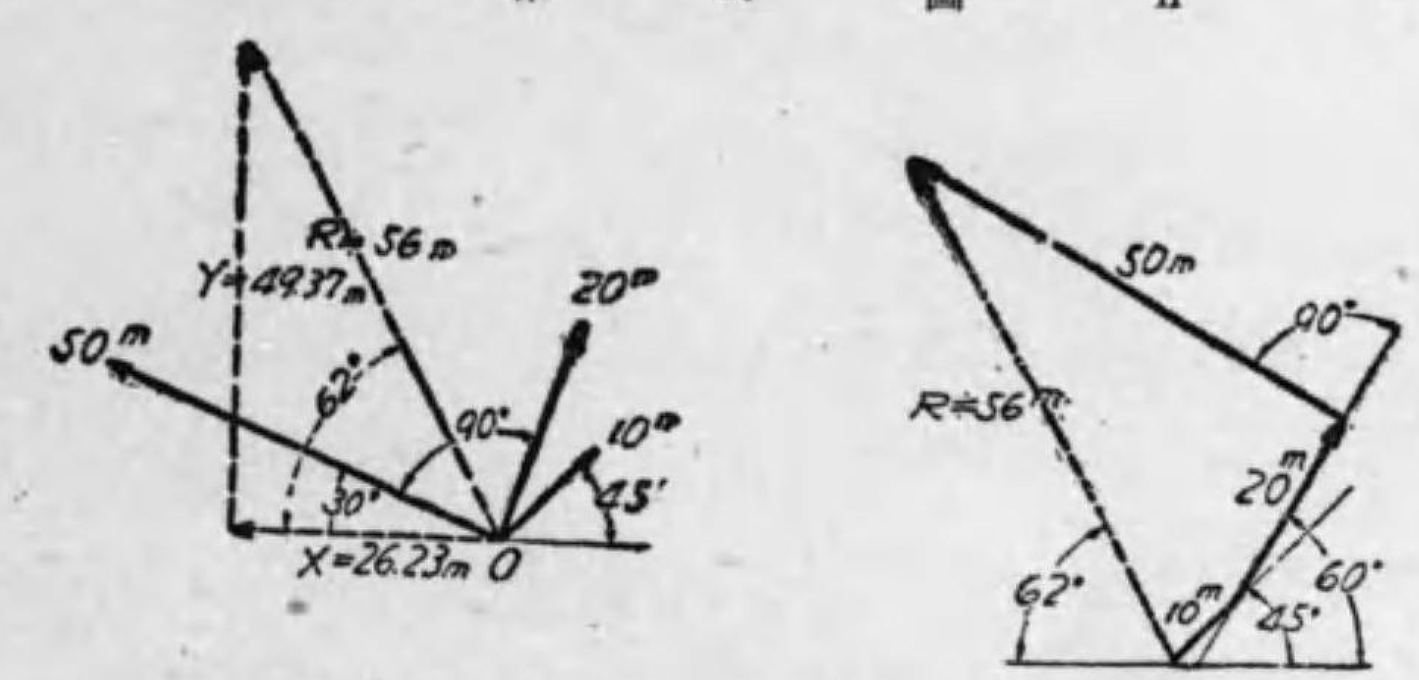
1m/sec を 1mm としてベクトル圖をかく。

合速度は 56mm 即ち 56m/sec となる。

解析的解法

$X=10\cos45^\circ+20\cos60^\circ-50\cos30^\circ=7.07+10-43.3=26.23$m/sec

Ⅰ 第 20 圖 Ⅱ



$Y=10\sin45^\circ+20\sin60^\circ+50\sin30^\circ=7.07+17.3+25=49.37$m/sec

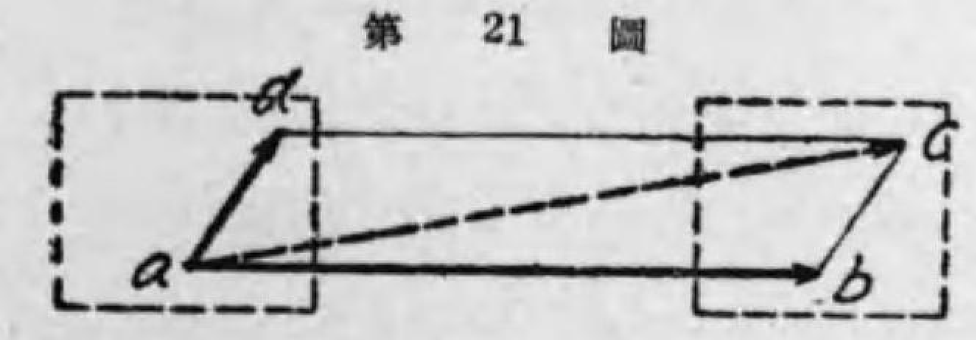
$R=\sqrt{X^2+Y^2}=\sqrt{26.23+49.37}\fallingdotseq56$m/sec

$\tan\theta=\frac{Y}{X}=\frac{49.37}{-26.23}=-1.88 \qquad \theta\fallingdotseq62^\circ$

13. 相對運動

客車中の人が客車が ab の距離進行する間に，人が a の座席より d の座席に移つたとすると，人は地球に對しては ab の變位を受けつ客車に對して ad の變位

第 21 圖



をし，結局地球に對して ac の變位をした事となる。ab 及び ac は地球に對する變位なればこれを**絕對變位**と云ひ，ad は人の客車に對する變位なればこれを**相對變位**と云ふ。

上の例より次のことがわかる。

1. 汽車の絕對變位と，汽車に對する人の相對變位のベクトル和は人の絕對變位のベクトルとなる。

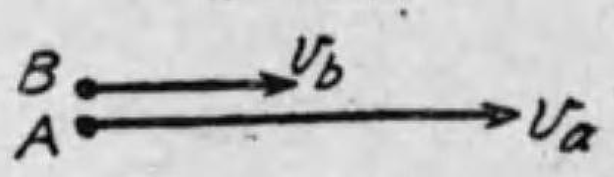
2. 人の絕對變位のベクトルより汽車の絕對變位のベクトルを減ずると人の汽車に對する相對變位のベクトルとなる。

速度は一秒間の變位なれば，變位の代りに速度に於いても上の法則は成立する。

上述のことを直線上の運動と比較して見るに，第22圖のA及びBは同一直線上を運動して居りAは v_a の速度でBは v_b の速度で走つて居るものとする，Bに對するAの相對速度 v_{ab} は

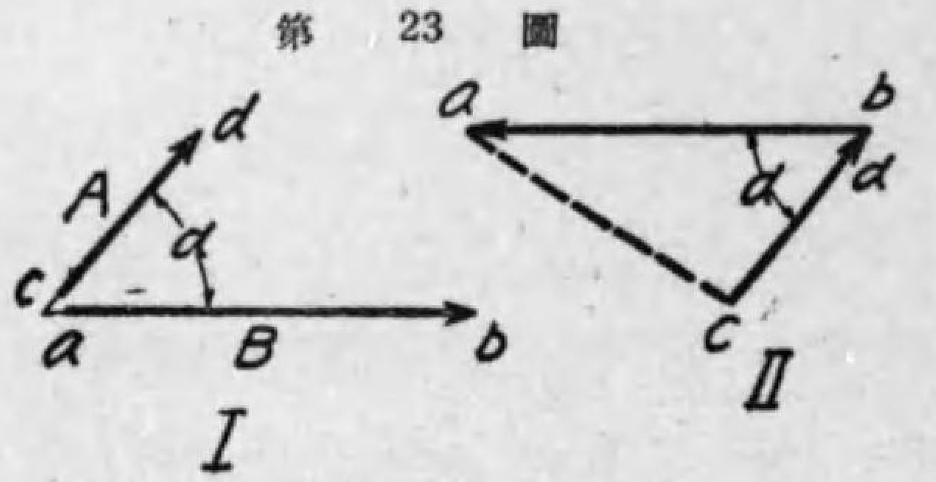
$$\left.\begin{aligned} v_{ab} &= v_a - v_b \\ v_b &= v_a - v_{ab} \\ v_a &= v_{ab} + v_b \end{aligned}\right\} \cdots\cdots\cdots\cdots(50)$$

第 22 圖



となり，直線上の運動に於ては代數的の加減法によつて，Bに對するAの相對速度が求められるが，一直線上でなく或角度をして居る場合にはベクトル的加減法によつて求める。即ち第23圖IのBの絕對速度を ab，A

第 23 圖



の絕對速度を cd とするとAのBに對する相對速度は

$$\overline{cd} - \overline{ab} = \overline{ac} \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(51)$$

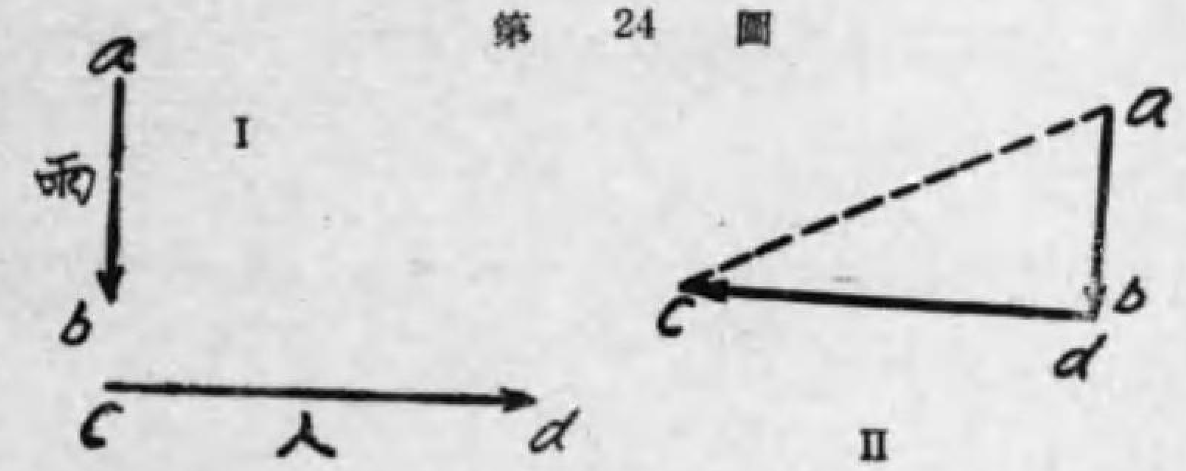
之を圖示すると第27圖IIの如し。計算によれば

$$ac = \sqrt{cd^2 + ab^2 - 2ab.cd\cos\alpha} \cdots\cdots\cdots\cdots(52)$$

となる。

相對速度の場合に運動が直線運動でも又は或る角度をして居る場合でも代數的かベクトル的かの差はあるが加法か，減法かの關係は相等し。

第 24 圖



【例題】 第24圖に於いて雨は人に對して，如何なる方向に如何なる速度で降つて居る様に見えるか。

【解】 人に對する雨の相對速度を求めればよし。

圖示すると第24圖右側の如く

$$\tan\theta = \frac{ab}{cd}$$

の方向に

$$v_{ac} = \sqrt{cd^2 + ab^2}$$

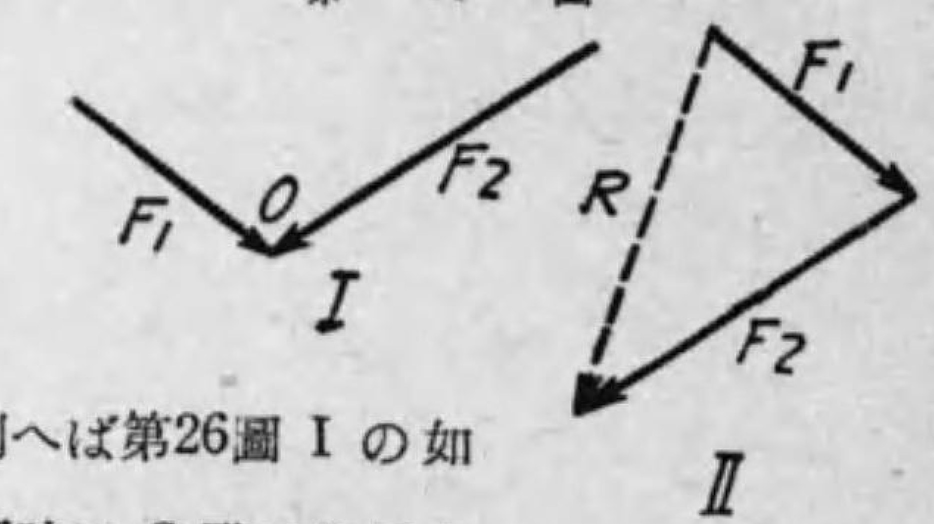
の速度で降つて居る様に見える。

14. 力の合成

力はベクトルなれば，第25圖の如く一點Oに F_1, F_2 の二力が同時に作用する場合には，F_1, F_2 の二つのベクトルの和Rをこの，二力の**合力**と云ひ $F. F_2$ を**分力**と云ふ。F_1F_2 **二力が同時に働く事と，Rの力一つが働く結果は同一である**。合力を求めることを**力**

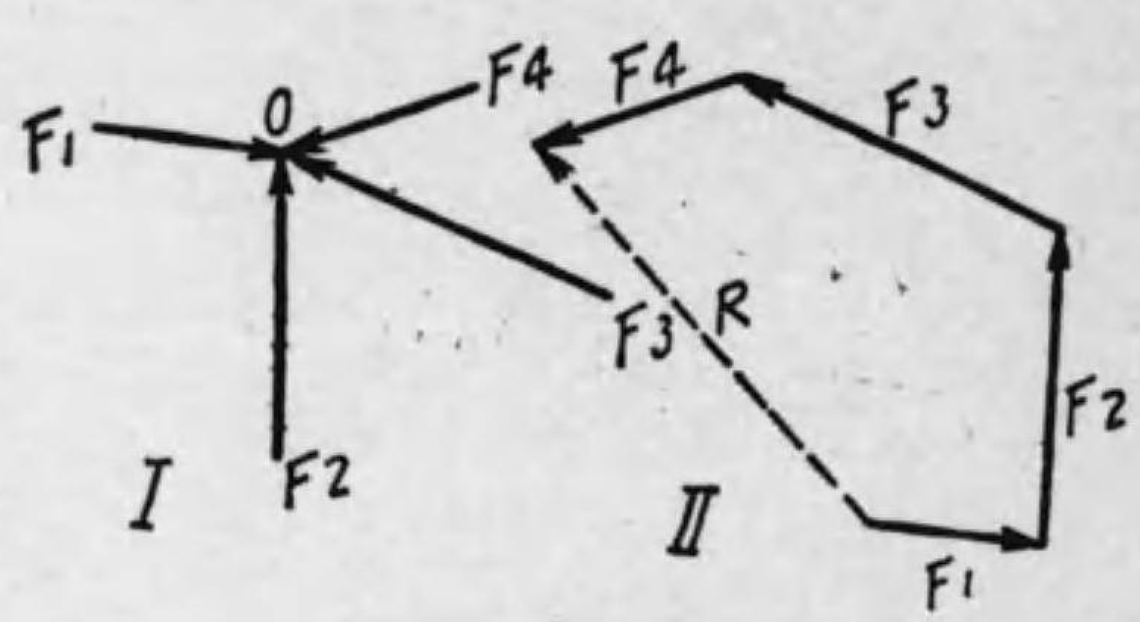
の合成と云ふ。

第 25 圖



三力以上の力が一點Oに作用する場合には，これ等の力のベクトルの合ベクトルが合力である。例へば第26圖 I の如く F_1, F_2, F_3, F_4 の力が同時に O 點に作用する時の合力は第25圖 II のRとなる。合力を求めることは合ベクトルを求めることなれば，座標軸を使用する解析的方法によると便利である。即ち，合力 R は各分力の X, Y 軸方向の分力の和を X Y とすると第11節と同様に次の如くなる。

第 26 圖



$$R=\sqrt{X^2+Y^2+Z^2} \quad \cdots\cdots\cdots\cdots(53)$$

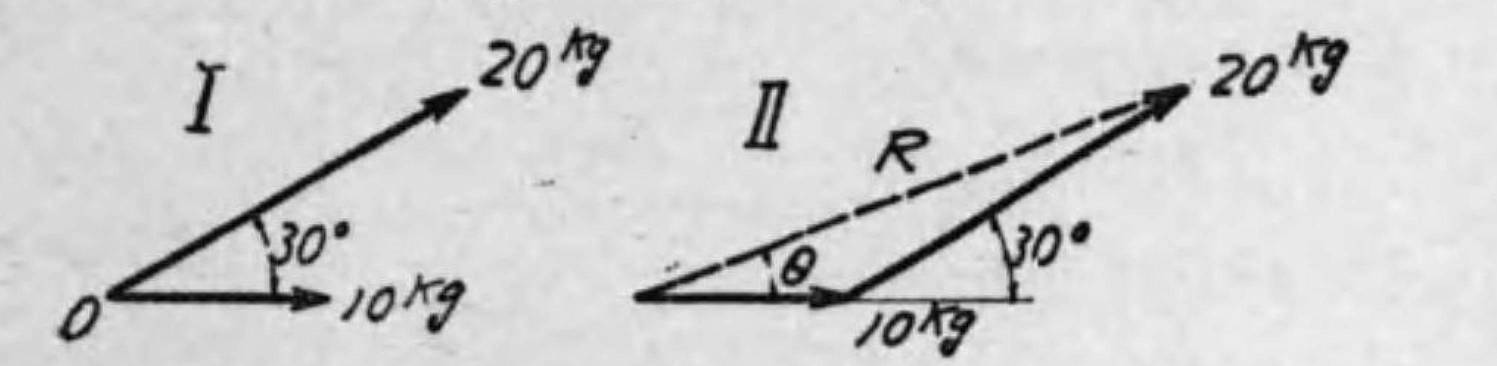
【例題】1.　一點 O に 10kg と 20kg の力が30°の角度をして働く，この二力の合力の大きさと方向を求めよ。

【解】 **圖式**　1kg の力を 1mm で表はすと 10kg の力は 1cm 20kgの力は 2cm となる。

第27圖のやうなベクトル三角形を書くと $R \fallingdotseq 29$mm となる。故に合力 $R \fallingdotseq 29$kg, $\theta=20°$

計算　$\alpha=180°-30°=150°$

第 27 圖



$$\therefore \quad R=\sqrt{10^2+20^2-2\times10\times20\times\cos150°}=29.1\text{kg}$$

ラミーの定理より

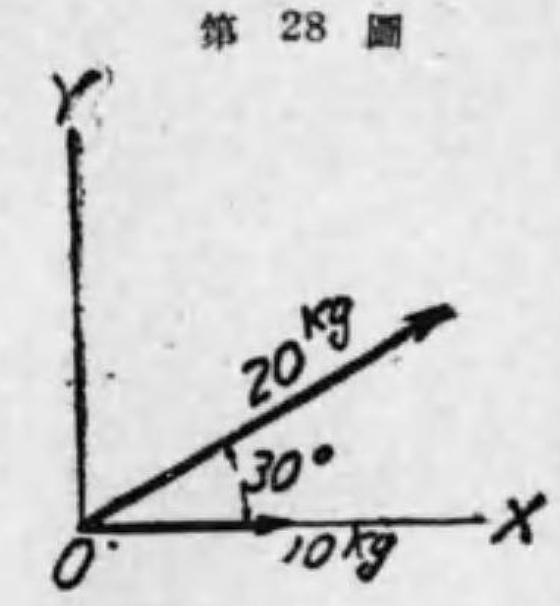
$$\frac{R}{\sin\alpha}=\frac{20}{\sin\theta}$$

$$\frac{29.1}{\sin150}=\frac{20}{\sin\theta} \qquad \sin\theta=\frac{20\times\sin150}{29.1}=\frac{20\times\frac{1}{2}}{29.1}=0.344$$

$$\theta=20°16'$$

解析的方法　O 點を原點とし 10kg の力の方向をX軸，これに直角な方向を Y 軸とする。

第 28 圖



X軸方向の分力の和 $X=10+20\cos30°$

$$=27.3\text{kg}$$

Y軸方向の分力の和 $Y=20\times\sin30°$

$$=10\text{kg}$$

$$R=\sqrt{X^2+Y^2}=\sqrt{10^2+27.3^2}=29.1$$

$$\tan\theta=\frac{Y}{X}=\frac{10}{27.3}=0.366$$

$$\theta=20°16'$$

【例題】2.　第29圖の如く一點Oに7kg, 10kg, 20kg, 15kg の力が作用する時の合力及び合力の方向を求めよ。

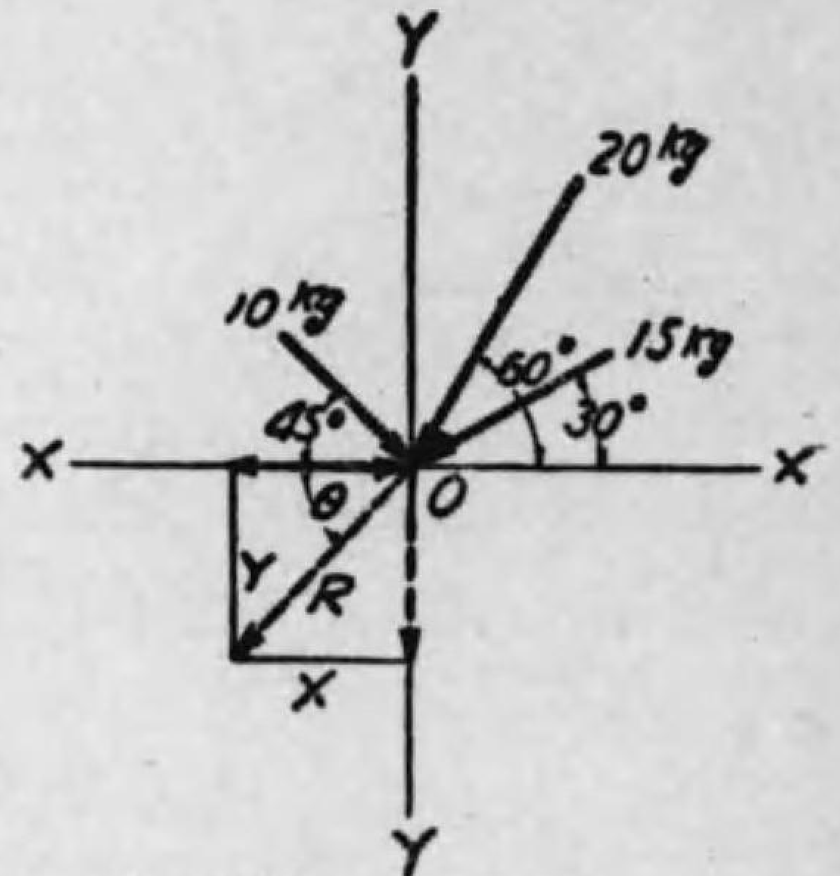
【解】 X軸方向の分力の和。

$$7\text{kg}+10\text{kg}\cos45°-20\text{kg}\cos60°-15\text{kg}\cos30°=7\text{kg}+10\text{kg}$$
$$\times\frac{1}{\sqrt{2}}-20\text{kg}\times\frac{1}{2}-15\text{kg}\times\frac{\sqrt{3}}{2}=7\text{kg}\times7.1\text{kg}-10\text{kg}$$
$$-12.9\text{kg}=-8.8\text{kg}$$

Y軸方向の力の和。

$10\mathrm{kg}\sin45+20\mathrm{kg}\sin60$
$+15\mathrm{kg}\sin30$
$=10\mathrm{kg}\frac{1}{\sqrt{2}}$
$+20\mathrm{kg}\frac{\sqrt{3}}{2}$
$+15\mathrm{kg}\times\frac{1}{2}$
$=7.1\mathrm{kg}+17.4\mathrm{kg}$
$+7.5\mathrm{kg}=-32\mathrm{kg}$
$R=\sqrt{8.8^2+32^2}$
$=34.22(\mathrm{kg})$
$\tan\theta=\frac{-8.8}{-32}=0.275$

第 29 圖

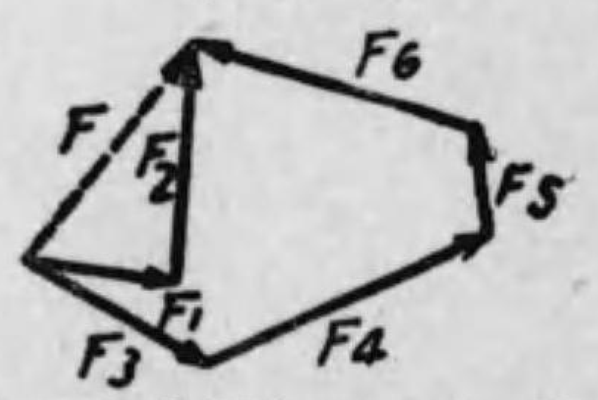


$\theta=15°24'$

15. 力の分解

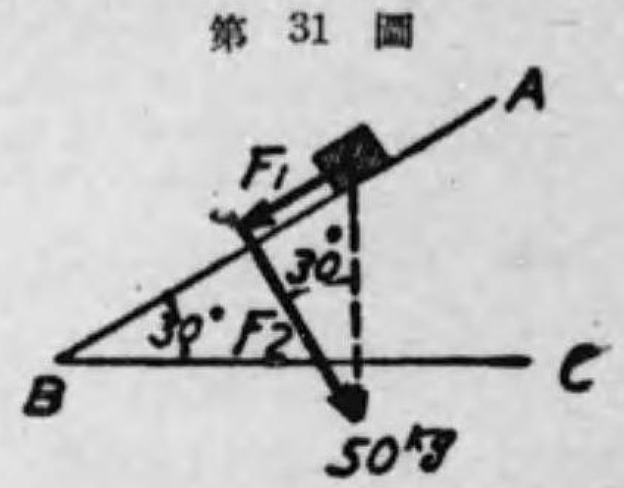
力の分解とは與へられた力と同一効果を有する二つ以上の力を求めることである。例へば力Fを力F_1とF_2の合力と考へれば力FはF_1, F_2の二力に分解することが出來る。又F_3, F_4, F_5, F_6にも分解することが出來る。

第 30 圖



斯樣に力は如何なる方向に如何なる大きさにも分解出來るが，實際の問題では直交二軸に分解することが最も多く，其の他の場合では方向及分力の數は豫めきまつて居るから困難はない。

第 31 圖



【例題】 第31圖の如く傾斜角30°の斜面上に50kgの物體がある。斜面に垂直及び平行な分力を求めよ。

【解】 垂直分力F_2……$50\mathrm{kg}\times\cos30°=50\mathrm{kg}\times\frac{\sqrt{3}}{2}=43.30\mathrm{kg}$

平行分力F_1……$5°\mathrm{kg}\times\sin30°=50\mathrm{kg}\times\frac{1}{2}=25$

16. 角速度及び角加速度のベクトル算法

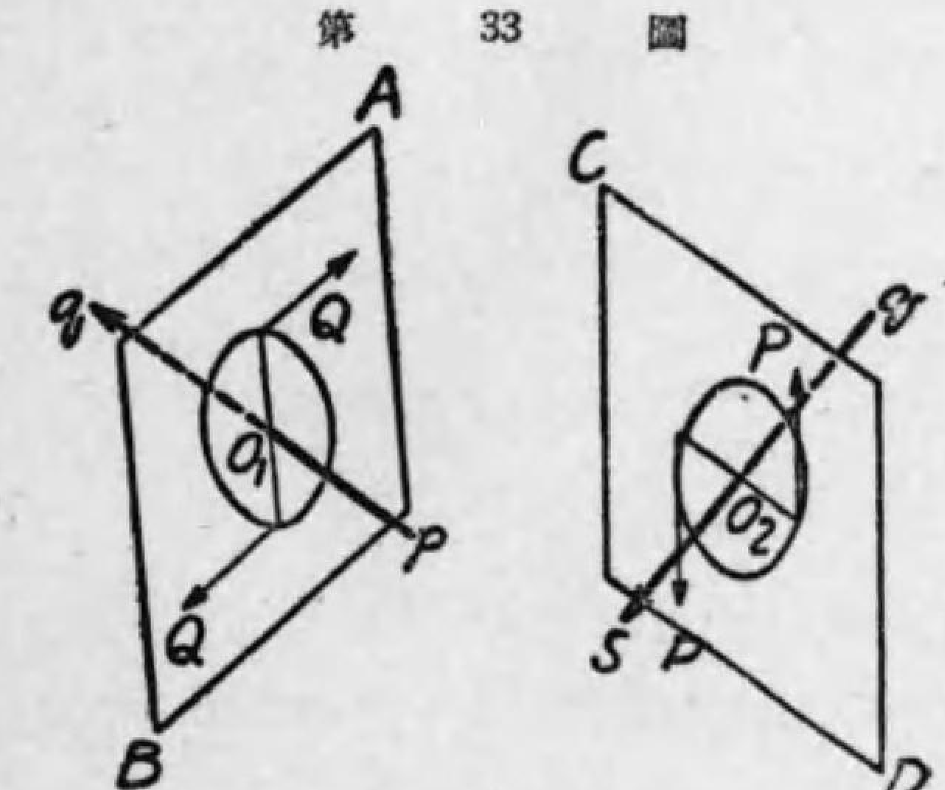
角速度，角加速度及びモーメントはベクトルであるが，回轉性のものであるから前節にのべたやうなベクトルの計算をするには或る約束をせねばならぬ。

第 32 圖

ベクトルの大きさは回轉面に直角に立てた直線の長さで示し，向きは右廻りなら右ねぢの進む方向に左廻りの時には反對にとる。

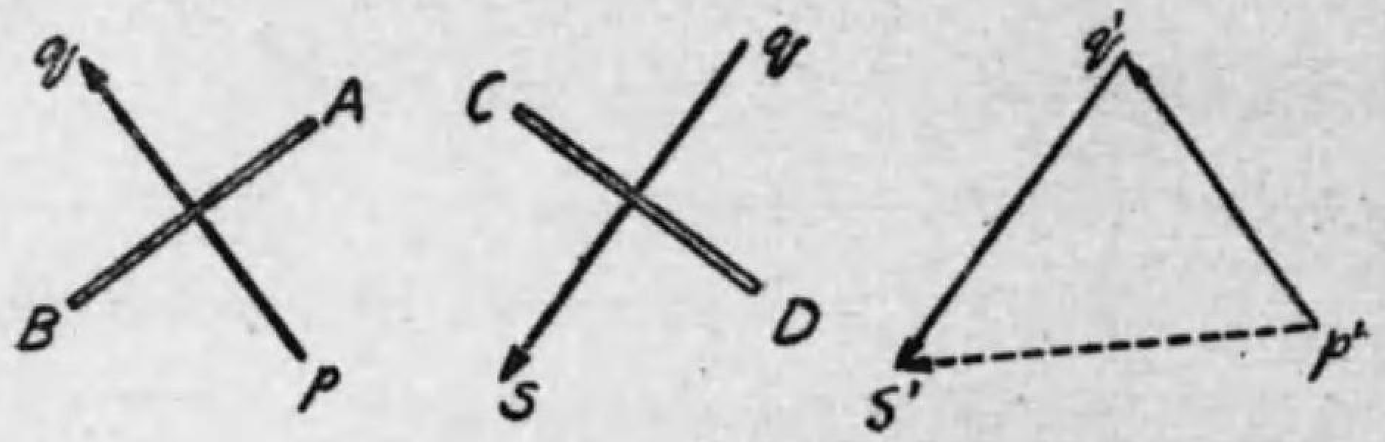
角速度，角加速度のベルトルの合成，分解は力のベクトル等と同樣である。例へば第33圖 I の如き偶力が働くと，これ等の合偶力を求めるにはIIIの如く pq に等しく $p'q'$を，qs に等しく $q's'$ をとると，$p's'$ が合成ベルトル即ち合成偶力の大きさ及び回轉方向を示す。

第 33 圖



I

I 平行軸の周りの回轉運動 第34圖のIの B

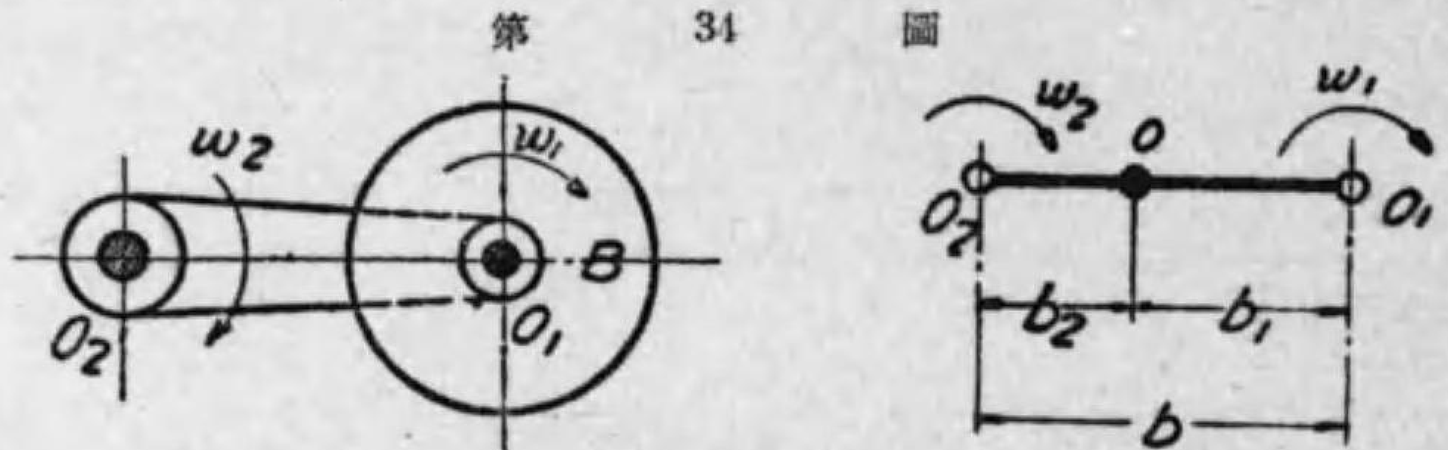


III

II

が c_1 の周りに角速度 ω_1 で回轉すると同時に，c_2 の周りに ω_1 と同方向に角速度 ω_2 で回轉する場合に，B の受ける合成運動は第34圖IIに於いて o 點を $b_1\omega=b_2\omega_2$ の關係なる樣に定めた點とすると

第 34 圖



I II

B上の o 點は下向きに ω_2b_2 の線速度を有すと同時に上向きに ω_1b_1 の速度を有しこれは相等しいから，結局 o 點の速度は零となる。故に物體Bの受ける合成運動は o を通つて o_1, o_2 軸に平行な假想軸の周りに ω で回轉すると同樣である。

o_1 の速度は $(b_1+b_2)\omega_2$ であるがこれは o の周りの速度 $b_1\omega$ に等しく

又 $b_1\omega_1=b_2\omega_2 \qquad b_2=b_1\dfrac{\omega_1}{\omega_2}$

$$\therefore\ b_1\omega=(b_1+b_2)\omega_2=\left(b_1+b_1\frac{\omega_1}{\omega_2}\right)\omega_2$$

$$=b_1(\omega_1+\omega_2)\cdots\cdots\cdots\cdots(54)$$

$$\therefore\ \omega=\omega_1+\omega_2\ \cdots\cdots\cdots\cdots(55)$$

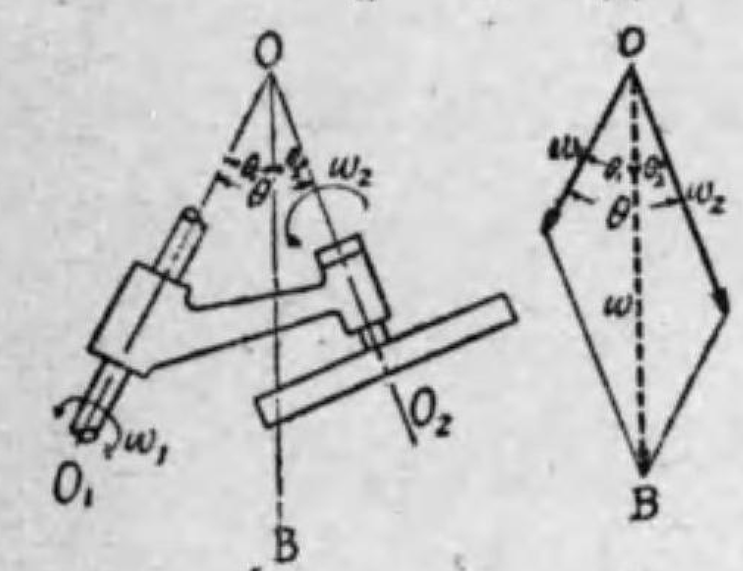
即ち合角速度は $\omega_1+\omega_2$ に等し，ω_1, ω_2 が反對方向なれば

$$\omega=\omega_1-\omega_2\ \cdots\cdots\cdots\cdots(56)$$

平行軸 $o_1, o_2, o_3\cdots\cdots o_n$ の周りの角速度を $\omega_1, \omega_2, \omega_3\cdots\cdots\omega_n$ とするとこれ等の合角速度 ω は

$$\omega=\omega_1+\omega_2+\omega_3+\cdots\cdots+\omega_n\ \cdots\cdots\cdots\cdots(57)$$

第 35 圖



I II

II 交叉する軸の周りの回轉

第35圖で物體Bは o_1 軸の周りに ω_1, o_2 軸の周りに ω_2 の角速度で回轉する時は，第35圖の Iの平行四邊形よりO軸の周りに角速度 ω の合角速度で回轉すると同樣である。

$$\omega^2=\omega_1^2+\omega_2^2-2\omega_1\omega_2\cos\theta\ \cdots\cdots\cdots\cdots(58)$$

OBの方向は

$$\sin\theta_1:\sin\theta_2:\sin\theta=\omega_2:\omega_1:\omega\cdots\cdots\cdots\cdots(59)$$

【例題】 物體がX軸の周りに ω_1 Y軸の周りに $2\omega_1$ の角速度で回轉する時の合角速度及び合角速度の軸の方向を求めよ。

【解】 合角速度 $\omega=\sqrt{\omega_1^2+2\omega^2}=\sqrt{3\omega_1^2}=1.73\omega_1$

X軸との角度を β とすると

$\tan\beta=\dfrac{2\omega_1}{\omega_1}=2 \qquad \beta=63°30'$

17. 拋 射 體

地球上の點より任意の方向に物體を投射すると物體は曲線を畫いて運動する。之を**拋射體の運動**と稱し此の曲線を彈道と云ふ。今運動の取扱ひを簡單にする爲に次の假定をする。

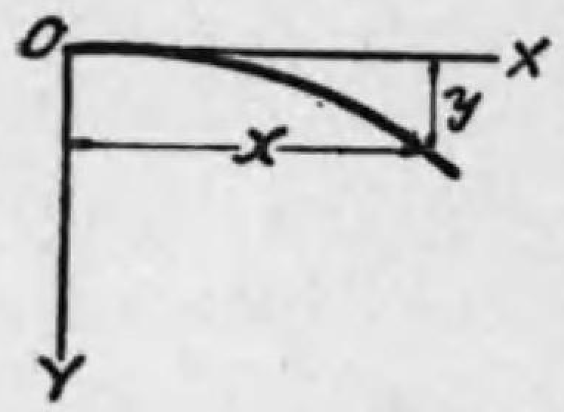
1. 運動の範圍內にては重力の加速度の方向及び大きさは一定なりとす。

2. 空氣の抵抗はないものとす。

3. 地球の自轉を考慮せず。

I **水平拋射** 一點Oより水平方向に速度vで物體を拋射した場合を考へる。

第36圖



點Oを原點としてXY二軸をとりt秒後の物體の位置P(xy)を求める。X軸方向には速度vの等速度運動にて，Y軸方向には初速度なき落下運動なれば，X軸方向の速度をv_x, y軸方向の速度をv_yとすると，

$$v_x=v \qquad x=vt \cdots\cdots(60)$$

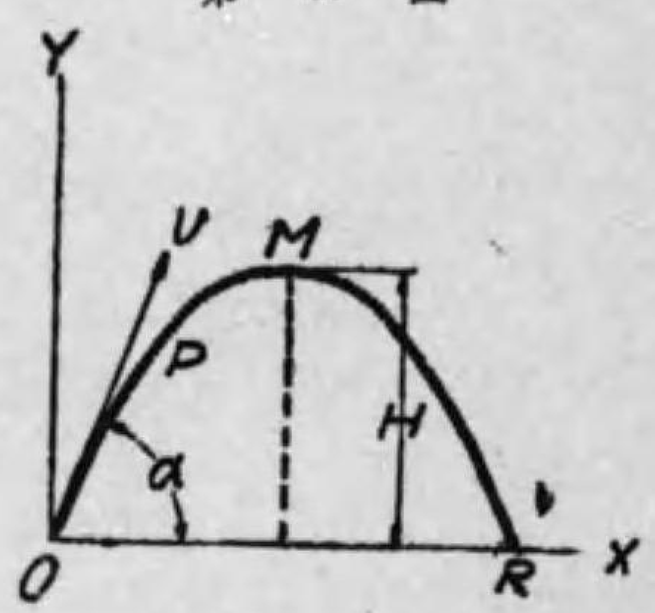
$$v_y=gt \qquad y=\frac{1}{2}gt^2 \cdots\cdots(61)$$

xyの兩式より

$$x^2=\frac{2v^2}{g}y \cdots\cdots(62)$$

第62式は彈道の式にして彈道は拋物線となる事を示す。

第37圖



II **任意の方向への拋射** 一點よりX軸とαの角度の方向に初速度vで物體を投射したものとするとP點に於いては $v_x=v\cos\alpha$

$$x=vt\cos\alpha \cdots\cdots(63)$$

$$v_y=v\sin\alpha-gt \qquad y=vt\sin\alpha-\frac{1}{2}gt^2 \cdots\cdots(64)$$

彈道の式は63式よりtを出し64式に代入すると

$$y=x\tan\alpha-\frac{1}{2}\frac{gx^2}{v^2}(1+\tan^2\alpha) \cdots\cdots(65)$$

拋射體がO點と同一水平面上Rに達する迄の時間を**飛行時間**と云ひ，次の如くして求められる。

R點は $y=0$ なるが故に

$$vt\sin\alpha-\frac{1}{2}gt^2=0$$

$$\therefore\ t=0 \quad 或は \quad t=\frac{2v\sin\alpha}{g} \cdots\cdots(66)$$

Oより最高點M迄の時間を**上昇時間**と云ふ。M點に於いては$v_y=0$であるから

$$v\sin\alpha-gt=0$$

$$t=\frac{v\sin\alpha}{g} \cdots\cdots(67)$$

66式と67式より**飛行時間は上昇時間の二倍即ち上昇時間と下降時間とは相等しい**事が分る。

最高度Hを求むるには67式に64式を代入すればよい。

$$H=y=\frac{v^2\sin^2\alpha}{g}-\frac{1}{2}g\frac{v^2\sin^2\alpha}{g^2}$$

$$=\frac{v^2\sin^2\alpha}{g} \cdots\cdots(68)$$

水平距離Lは63式に66式を代入して

$$L=v\cos\alpha\frac{2v\sin\alpha}{g}=\frac{v^2\sin2\alpha}{g} \cdots\cdots(69)$$

69式は $2\alpha=90^\circ$ $\alpha=45^\circ$ の時最大である。

任意の點Pに於いての速度v_pは

$$v_p=\sqrt{v_x^2+v_y^2}=\sqrt{(v\cos\alpha)^2+(v\sin\alpha-gt)^2}$$

$$=\sqrt{v^2-2vgt\sin\alpha+g^2t^2}$$

$$=\sqrt{v^2-2g\left(vt\sin\alpha-\frac{1}{2}gt^2\right)}$$

$$=\sqrt{v^2-2gy} \cdots\cdots(70)$$

上式より任意の點の速度は上昇下降の別なく高さのみによつて定まる。

【例題】1. 水平面と30°の仰角で100m/sの速度にて拋射せる物體の最高度，同一水平面に到着する迄の時間，水平距離，2秒後の速度及び水平との角度を求めよ。

【解】 最高度は63式より

$$H=\frac{v^2\sin^2\alpha}{2g}=\frac{100^2\times\left(\frac{1}{2}\right)^2}{2\times 9.8}=127.5\text{m}$$

飛行時間は66式より

$$t=\frac{2v\sin\alpha}{g}=\frac{2\times100\times\frac{1}{2}}{9.8}=10.2\text{sec}$$

水平距離Lは69式より

$$L=\frac{v^2\sin 2\alpha}{g}=\frac{100^2\times\frac{\sqrt{3}}{2}}{9.8}=883\text{m}$$

2秒後の速度は

垂直速度 $v_y=v\sin\alpha-gt=100\times\frac{1}{2}-9.8\times2=30.4\text{m/sec}$

水平速度 $v_x=v\cos\alpha=100\times\frac{\sqrt{3}}{2}=86.6\text{m/sec}$

速　度 $v_t=\sqrt{v_y{}^2+v_x{}^2}=\sqrt{30.4^2+86.6^2}=91\text{m/sec}$

水平との角度は

$$\tan\theta=\frac{v_y}{v_x}=\frac{30.4}{86.6}=0.355$$

$$\theta=19°30'$$

【例題】2. 彈丸の初速度を960m/secとす。理論上の最大着彈距離を求めよ。

【解】 最大着彈距離を得るには69式の $\alpha=45°$ とせねばならぬ。

$$L=\frac{v^2\sin 2\alpha}{g}=\frac{960^2\times\sin 90°}{9.8}=94000\text{m}$$

練習問題

(1) 水平面と42°の角をなす方向に 300m/sec の速度で運動せる物體の水平，垂直兩方向の分速度を求めよ。

(ans. 222.93m/sec, 200.73m/sec)

(2) 8km/hの速度で船を漕ぐことの出來る人が，水の速度6km/hの河を直角に漕ぎ渡らんとす。船の方向を如何なる方向に漕いだらよいか。

(ans. 上流に向き 48°35′)

(3) 甲，乙二艘の船が同時に同港を發して，甲は北西に15kmの速度にて走り，乙は西より30°南の方向に17kmの速度で走つてゐるといふ。甲に對する乙の關係速度を求めよ。 (ans. 19.6km)

(4) 雨が垂直に20ft/secの速さで降つて居る中を自轉車にのつて居る人が12mile/hの速度で走つて居る。人に對する雨の相對速度並に方向を求めよ。 (ans. $v=26.64$ft/sec $\theta=41°21'$)

(5) 15m/secの速度で西方に向つて走る船上にある人が，船の進行方向に對して，直角方向に2m/secの速度で北方に石を投げた。船に對する相對速度を求めよ。 (ans. 5,4m/secの方向，東より北に21°48′)

(6) 次のP.Q二力の合力の大きさ及び方向を，圖式及計算によつて求めよ。

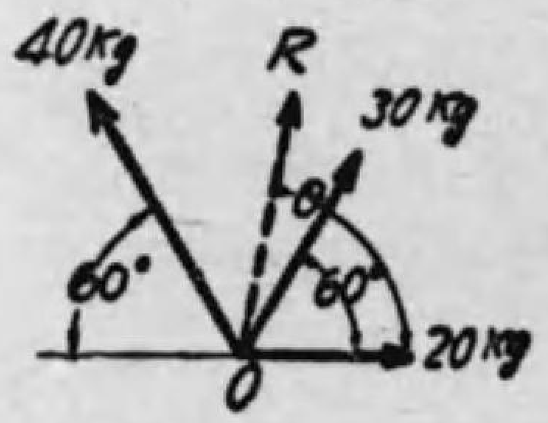
	Pkg	Qkg	P.Q間の角度
a.	150	120	0°
b.	130	85	90°
c.	93	85	30°
d.	182	62	135°
e.	184	62	180°

$$\left(\text{ans. } a\begin{cases}270\text{kg}\\30\text{kg}\end{cases} b\begin{cases}R=155.2\text{kg}\\\theta=56°50',\end{cases} c\begin{cases}R=172\text{kg}\\\theta=15°40',\end{cases} d\begin{cases}R=144.9\text{kg}\\\theta=117°20',\end{cases} e\begin{cases}R=-122\text{kg}\\\theta=180°\end{cases}\right)$$

（7）　第38圖のような力の合力の大きさ，及方向を圖式及び計算により求めよ。

（ans.　$R=62.5$kg，$\theta=76°10'$）

第 38 圖



（8）　20°の斜面に，50kg の物體をのせた時の斜面に水平，垂直な分力を求めよ。

（ans.　水平力 17kg，垂直力47kg）

（9）　速度 200km/h の飛行機が高度 1500m より地上に爆彈を投下せんとす。何米手前で投下したらよいか。　（ans.　969.3m）

（10）　初速度 600m/sec の彈丸で，水平距離 10km の點を砲撃せんとす。大砲の仰角及び彈丸の飛行時間を求めよ。（ans.　$\alpha=7°55'$，$t=16.8$sec）

（11）　彈丸の初速度 700m/sec の小銃を仰角 30° にて發射した時の

1. 水平着彈距離 L　　2. 飛行時間 t

3. 最大高さ H　　4. 上昇時間 t_2

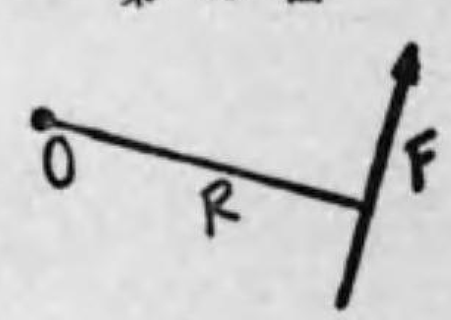
5. 發射後30秒の速度 v を求めよ。

（ans.　$L=43300$m，$t=1$分11.5秒，$H=6250$m，$t_2=36$秒，$v=610$m/sec）

第五章　力の釣合

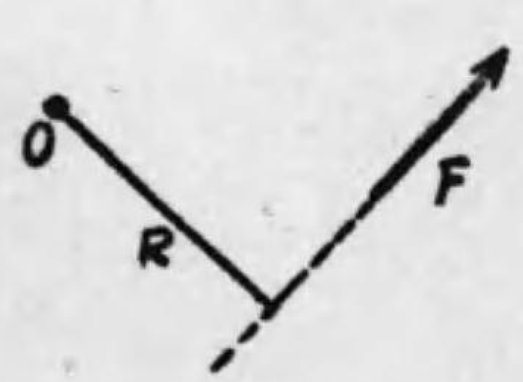
18.　力のモーメント

第 39 圖



力が物體に働き，物體を或る軸Oの周りに廻轉せしめやうとする效果は，力FとOより力の作用線に下した垂線の長さRとの積の大きさによる。

第 40 圖



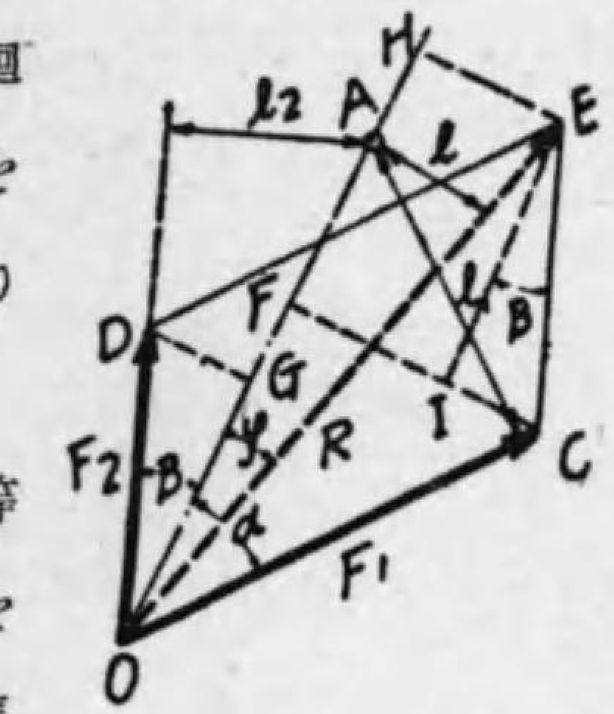
Oより力のベクトル上に垂線が引けぬ時には力の作用線上に下した垂線を用ふ。

$$T=FR \cdots\cdots (71)$$

Tを**力のモーメント**或は**力の能率**又は**トルク**と云ひ，Rをモーメントの**臂**と云ふ。モーメントの單位は，力及び距離の單位を並記した m.kg，cm.g，ft.lbs にて表はす。

モーメントは力Fを底邊とし，廻轉軸Oを頂點とする三角形の面積の二倍を以つて表はされる。

第 41 圖



力のモーメントは右廻りのものと左廻りのものとがある。これは正負の符號を附して區別する。本書に於いては右廻りを正，左廻りを負として取扱ふ。

二力を F_1，F_2 合力をRとし，これ等の力が任意の點Aに對するモーメントをとる l_1, l_2, l を F_1, F_2, R に下した垂線の長さとすれば F_1, F_2 のA點に對するモーメントの和は圖より

$$\begin{aligned}
F_1l_1-F_2l_2&=\overline{OC}\cdot\overline{OA}\sin\alpha-\overline{OD}\cdot\overline{OA}\sin\beta\\
&=\overline{OA}(\overline{OC}\sin\alpha-\overline{OD}\sin\beta) \qquad (\overline{DG}=\overline{CI})\\
&=\overline{OA}(\overline{CF}-\overline{DG})\\
&=\overline{OA}\cdot\overline{FI}=\overline{OA}\cdot\overline{EH} \qquad \left(\begin{aligned}&\overline{EH}=OE\sin\varphi\\&OE=R\quad OA\sin\varphi=l\end{aligned}\right)\\
&=\overline{OA}\cdot OE\sin\varphi\\
&=Rl \cdots\cdots (72)
\end{aligned}$$

F_1，F_2 の外に F_3，F_4……の力がO點に會する時も F_3 とRのA點に對するモーメントの代數和は其合力 R_1 のA點に對するモーメントに等し。順次同樣なことが成立する。即ち

數多の分力の其平面内の一點に對するモーメントの代數和は，其合力の同一點に對するモーメントに等し。

力が釣合ふ場合には合力は零である。故に

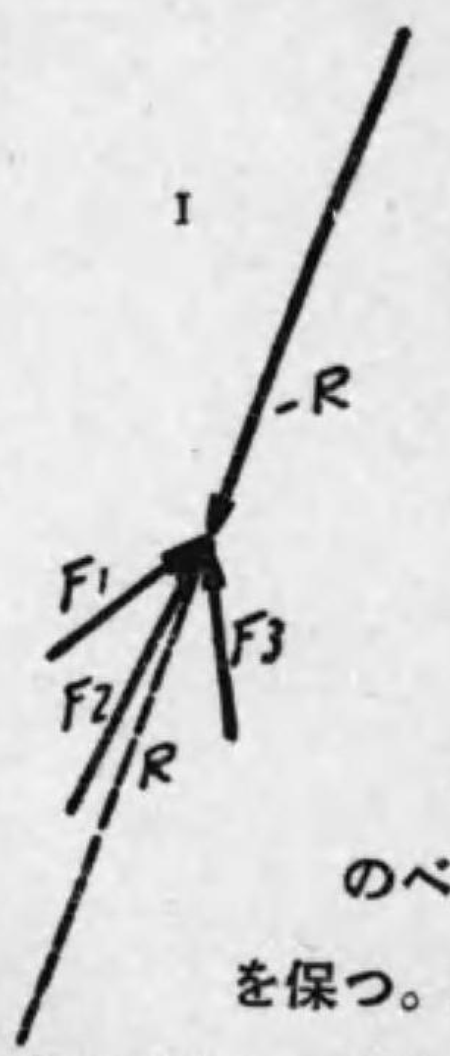
一點に會する各力が釣合ひを保つなら，各力の任意の點に對するモーメントの代數和は零となる。

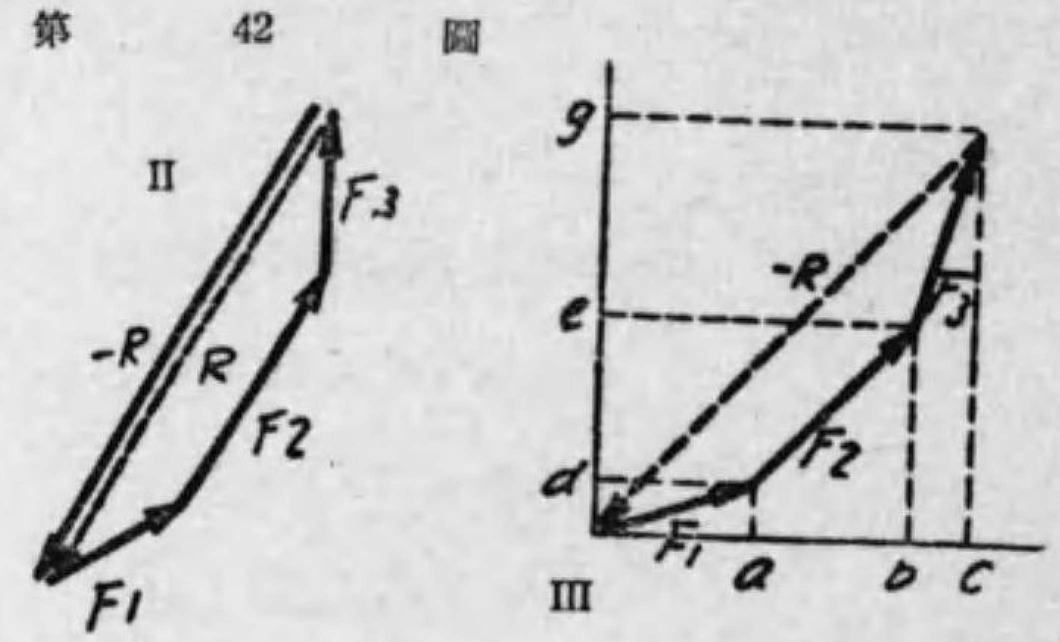
モーメントはベクトル量なれば，角速度，角加速度のベクトルと同じ約束によつて取扱へば其合成，分解は速度，加速度，力等と同様容易に出來る。

19. 一點に働く力の釣合

合力と大きさ等しく方向反對の力が作用すると物體は運動せず，即ち之等の諸力は釣合ふ。此場合には各分力と $(-R)$ とのべ

第 42 圖



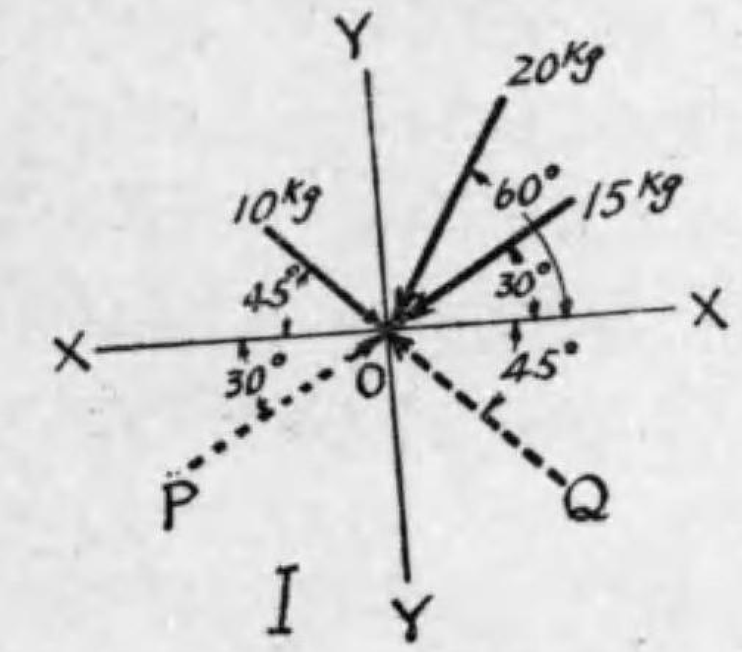


クトル多角形は閉ぢる。即ち**一點に働く諸力のベクトル多角形が閉ぢる時は之等の諸力は釣合を保つ。**又逆に**一點に働く諸力が釣合ふ爲には，之等の力のベクトル多角形は閉ぢるを要する。**

諸力をX及びY軸に分解して考へれば，一點に働く諸力が釣

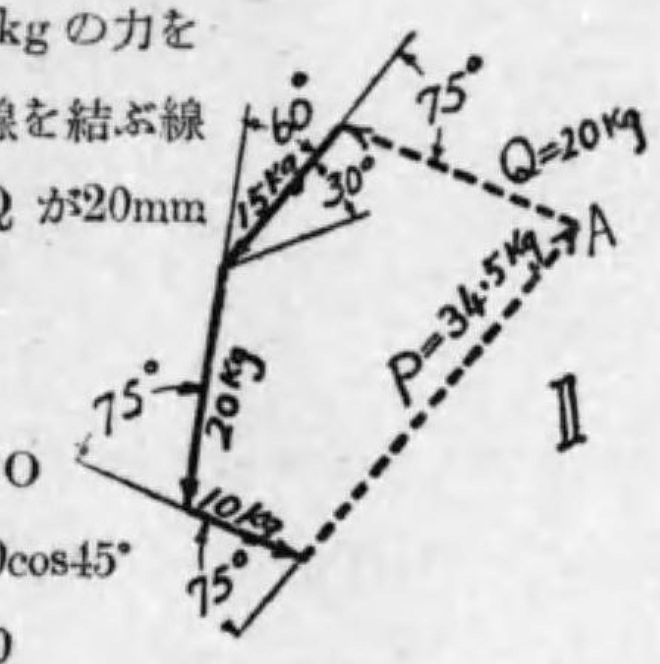
合ひにあればX, Y及Z軸方向の分力の和が零となる。又逆に**一點に働く諸力のX Y及Z軸方向の分力が零なれば物體は釣合ひにある。**

第 43 圖



【例題】1.　圖の如く一點Oに15kg, 10kg, 20kg 及び P, Q の力が作用して釣合ひにあるとすれば，P及び Q の力の大きさは何程となるか。

【解】 圖式　1kgの力を 1mmで表はす。第43圖IIの如く10kgの力より75°の線と，15kg の力より75° の線を引き其交點A と 10kg の力をぶ結線がPとなり交點と 15kg の線を結ぶ線がQとなる。圖よりPが 34.5mmQ が20mm となるから P=34.5kg, Q=20kg



解析的方法

釣合の條件より　　X=O　Y=O

$$X \cdots\cdots 15\cos 30^\circ + 20\cos 60^\circ - 10\cos 45^\circ - P\cos 30^\circ + Q\cos 45^\circ = 0$$

$$13 + 10 - 7.07 - 0.866P + 0.707Q = 0$$

$$15.93 - 0.866P + 0.707Q = 0 \cdots\cdots\cdots\cdots (a)$$

$$Y \cdots\cdots Q\sin 45^\circ + P\sin 30^\circ - 10\sin 45^\circ - 20\sin 60^\circ - 15\sin 30^\circ = 0$$

$$0.707Q + 0.5P - 7.07 - 17.3 - 7.5 = 0$$

$$0.707Q + 0.5P - 31.87 = 0 \cdots\cdots\cdots\cdots (b)$$

$$(a)-(b)\quad -15.93 - 0.366P = 0$$

$$P = 35\text{kg}$$

Pの値を b 式に代入し

$$0.707Q + 17.5 - 31.87 = 0 \qquad Q = 20.3\text{kg}$$

20. 物體に作用する力の釣合

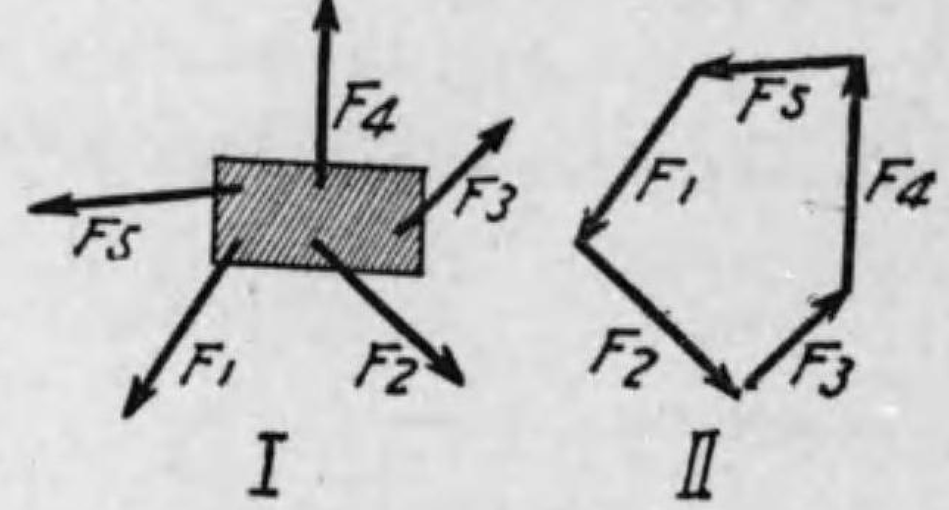
物體の運動は線運動か，回轉運動か，或は此二つの合成したものである。故に物體が多くの力を受けて釣合ひにあるためには次の二條件が必要である。

1. 移動を起す合力が零になる爲に，作用せる力のベクトル和が零であるか，又は座標軸に分解せる分力の和が零である事。

2. 回軸運動を生ずる力のモーメントの代數和が零なる事。

或る物體に F_1, F_2, F_3, F_4, F_5 の力が作用して釣合つて居るとすると，此内の一力の方向を反對にした力，例へば－F_3 は殘りの力 F_1, F_2, F_4, F_5 の合力と考へる事が出來る。之等の力のモーメントを T_1, T_2, T_3, T_4, とすると，釣合ひの條件は

第 44 圖



$$T_1+T_2+T_3+T_4+T_5=0 \quad \cdots\cdots(73)$$

これより

$$T_1+T_2+T_4+T_5=-T_3 \quad \cdots\cdots(74)$$

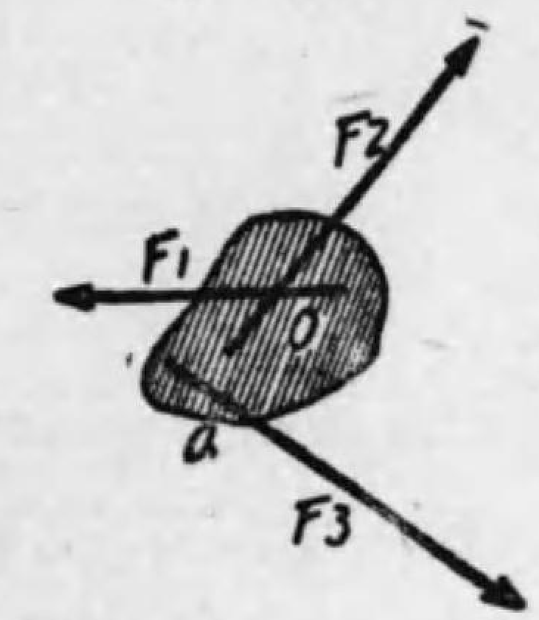
即ち分力のモーメントの和は合力のモーメントに等し。

物體に F_1, F_2, F_3 の三力が働いて釣合ひにあるものとすれば，此等の力は釣合の二つの條件を充たさねばならぬ。

釣合ひの第二條件より F_1 F_2 の作用線の交點 O に對するモーメントをとれば，F_1F_2 のモーメントは零で F_3 のモーメントは，O よ

り F_3 に下した垂線の長さを Oa とすると $F_3\times Oa$ となる，釣合ふ爲には

第 45 圖



$$F_3\times Oa=0$$

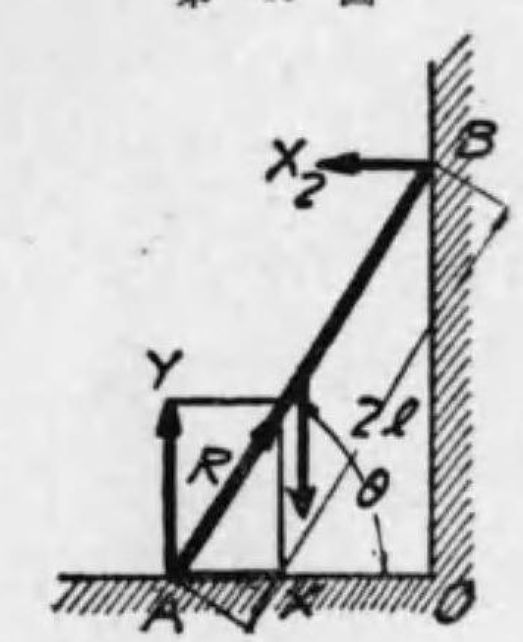
ならざるべからず。從つて

$$Oa=0$$

即ち**三力が釣合ひにある時には，三力の作用線の延長は一點に合す。**

【例題】1. 重量W，長さ$2l$，太さ一樣な棒の下端を蝶番にて支へ，上端を滑らかな壁にたてかける時，AB に置ける抗力を求めよ。但し棒は水平と θ の角をす。

第 46 圖



【解】 蝶番に於ける水平，垂直分力を X. Y. B に於ける水平抗力を X_2 とすると釣合の條件より

$$X-X_2=0 \quad \cdots\cdots(1)$$

$$W-Y=0 \quad \cdots\cdots(2)$$

A に對するモーメントをとると

$$Wl\cos\theta-2X_2l\sin\theta=0 \quad \cdots\cdots(3)$$

(3)式より $X_2=\frac{1}{2}W\cot\theta$

(1)式より $X=X_2=\frac{1}{2}W\cot\theta$

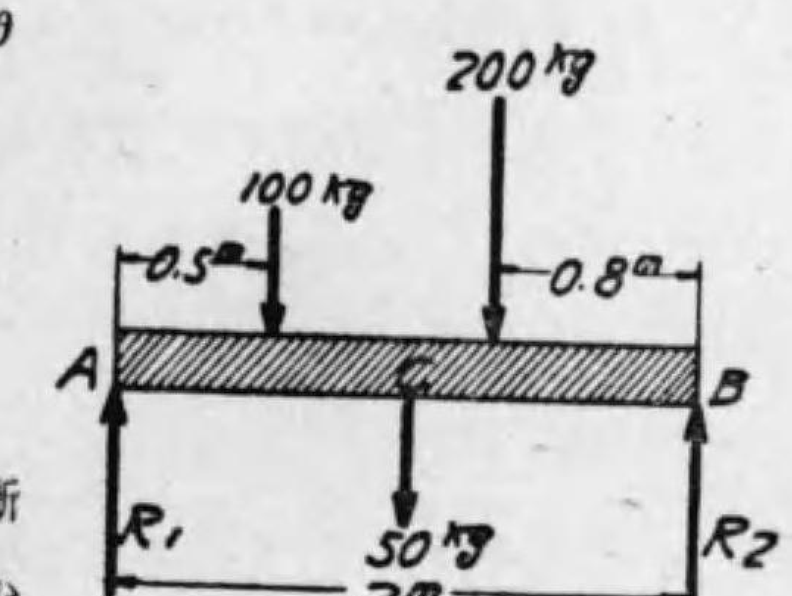
A に於ける抗力 R は

$$R=\sqrt{X^2+Y^2}$$

$$=\sqrt{\left(\frac{1}{2}W\cot\theta\right)^2+W^2}$$

$$=W\sqrt{\frac{1}{4}\cot^2\theta+1}$$

第 47 圖



【例題】2. 長さ2m，重量50kg，斷面一樣な棒に圖のやうな荷重をかけた時，支點の反力を求めよ。

【解】 自重は長さの中央にかゝるAに對するモーメントをとると

$M=100\times0.5+50\times1+200\times(2-0.8)=2R_2$

$R_2=170\text{kg}$

釣合にある場合はY軸方向の力の代數和は零なれば

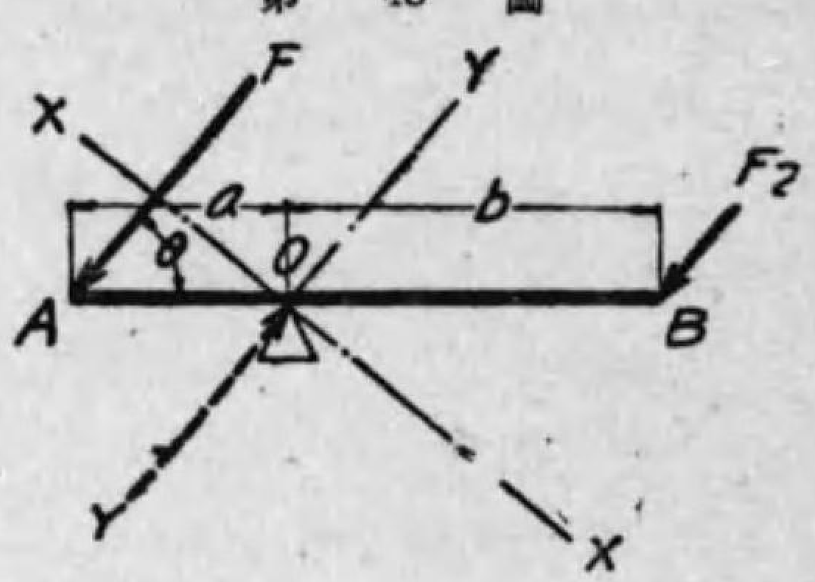
$50+100+200=R_1+R_2=R_1+170$

$R_1=180\text{kg}$

21. 平行力の合成

I **平行にして同方向なる二力** ABの物體に F_1, F_2 の平行な二力が作用したときO點を支へると釣合ふものとする。O點を通り，F_1 F_2 に直角な方向にX軸，平行な方向にY軸をとる。O點に於いてY軸方向の反力をRとすると釣合の條件より

第 48 圖



$$F_1+F_2=R \quad\cdots\cdots(75)$$

Oに對する能率より

$$F_1 a\sin\theta=F_2 b\sin\theta \qquad \frac{F_1}{F_2}=\frac{b}{a} \quad\cdots\cdots(76)$$

の關係がある。反力Rの大きさは F_1 F_2 の合力の大きさに等しく方向は反對である。此點は合力の作用する點で，この點を**平行力の中心**と云ふ。

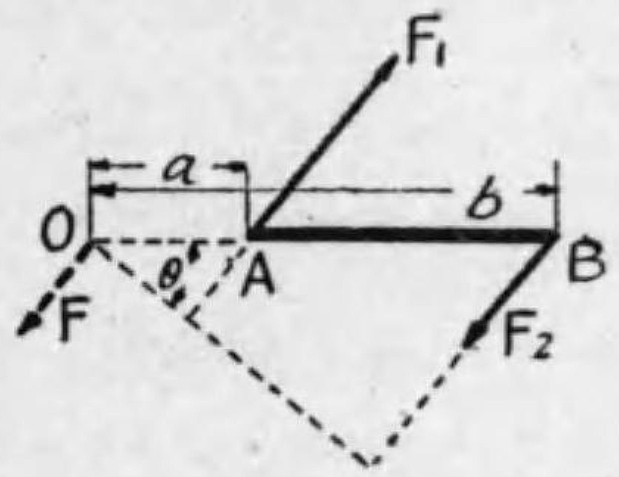
以上の事より次の定理を得る。

1. **平行にして同方向なる二力の合力の大きさは各力の大きさの和に等し。**

2. **平行にして同方向なる二力の中心は，ABを逆比に內分する點である。**

II **平行にして方向反對なる二力** 物體の二點ABに F_1 F_2 の平行にして方向反對な二力が作用したとすると，方向反對の平行力なれば第49圖にては物體ABは右廻りに回轉せようとする，この回轉を止めるためにABの延張上任意の點Oに力Fを加へ物體が釣合つたとすると前と同樣に

第 49 圖



$$F+F_2-F_1=0$$

$$F=F_1-F_2 \quad\cdots\cdots(77)$$

B點に對する能率をとると

$$F_1(b-a)\cos\theta=Fb\cos\theta$$

$$F_1(b-a)=Fb=(F_1-F_2)b$$

$$F_1b-F_1a=F_1b-F_2b$$

$$F_1a=F_2b$$

$$\frac{F_1}{F_2}=\frac{b}{a} \quad\cdots\cdots(78)$$

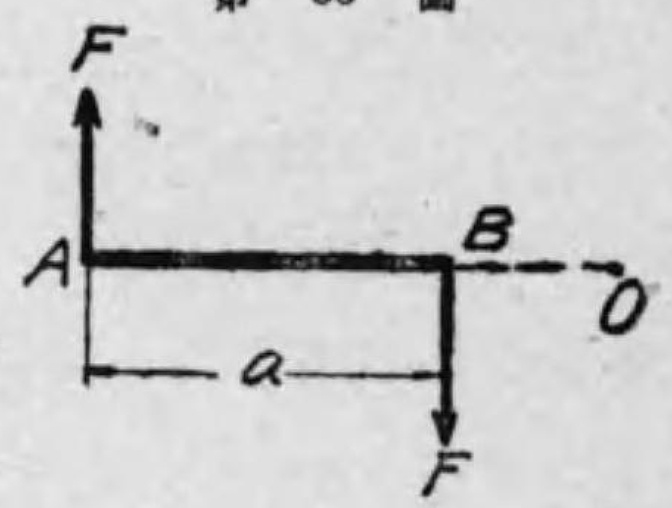
これより，次の定理を得る。

1 **平行にして方向反對な二力の合力の大きさは二力の差に等し。**

2 **平行にして方向反對なる二力の中心は，直線ABを二力の逆比に外分する點である。**

22. 偶　力

第 50 圖



力の大きさ等しく方向反對なる平行力を**偶力**と云ひ，二力間の垂直距離 a を偶力の**臂**と云ふ。今第50圖の様な偶力があり，任意の一點Oの周りに廻轉運動を與へるものとする。二力のO點の周りのモーメントは

$$F.OA-F.OB=F(OA-OB)=Fa \quad \cdots\cdots(79)$$

となる。即ち偶力によつて起る廻轉力は，力Fと臂 a の積によつて定る。Fa のモーメントを**偶力のモーメント**と云ふ。

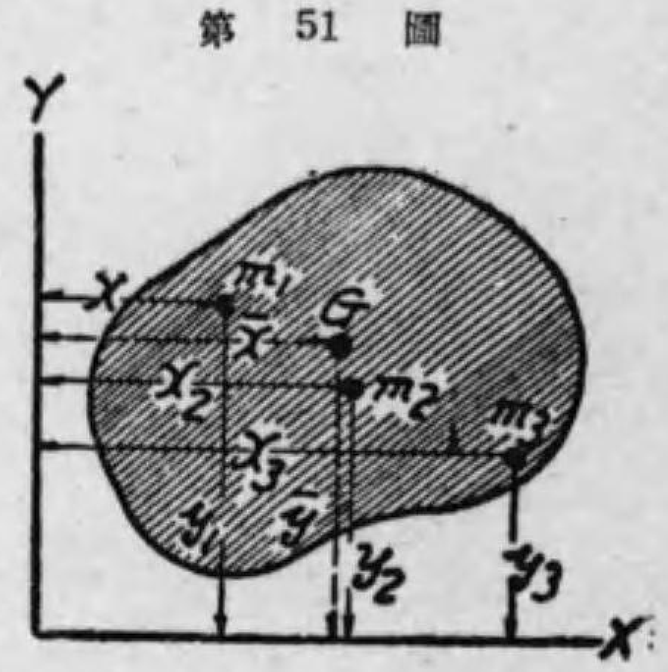
第21節第49圖のBに對するモーメントをとれば

$$F_1(b-a)\cos\theta=Fb\cos\theta=(F_1-F_2)b\cos\theta \qquad b=\frac{F_1(b-a)}{F_1-F_2}$$

偶力に於いては $F_1=F_2$ なれば $b=\infty$ となる。即ち合成力の働く點は無限大の點となる，結局 $F_1=F_2$ の時は合力は存在せないことを示す。故に**偶力が物體に作用しても全體を移動することなく唯物體を回轉するのみである。**

23. 重　心

第 51 圖



物體は無數の小片の集合と見做す事が出來る。重量は各小片に働く地球重力の合力にして，此合力の着力點を**重心**と云ふ。重力の方向は物體の大きさが餘り大きくない場合には

平行と見做す事が出來る。即ち重心は平行力の中心である。今物體を構成する各小片の重量を，w_1, w_2, w_3…… とし全重量をWとすると第21節より

$$W=w_1+w_2+w_3+\cdots\cdots(80)$$

次に任意の點Oに於いて，重力の方向にY軸を垂直な方向にX軸をとる。X軸より $w_1\,w_2\,w_3$ に到る距離を $y_1\,y_2\,y_3$…… としY軸よりの距離を $x_1\,x_2\,x_3$……，重心の座標を $\overline{x}\ \overline{y}$ とすると第18節より

$$W\overline{x}=w_1x_1+w_2x_2+w_3x_3+\cdots\cdots(81)$$

$$\overline{x}=\frac{w_1x_1+w_2x_2+w_3x_3+\cdots\cdots}{W}=\frac{\Sigma wx}{W}\cdots(82)$$

次にX軸の方向が重力の方向と考へると前同様

$$W\overline{y}=w_1y_1+w_2y_2+w_3y_3+\cdots\cdots(83)$$

$$\overline{y}=\frac{w_1y_1+w_2y_2+w_3y_3+\cdots\cdots}{W}=\frac{\Sigma wy}{W}\cdots(84)$$

$\overline{x}\ \overline{y}$ は重心の位置である。

次の形の重心は既に幾何學にて學んだ所である。

第 52 圖

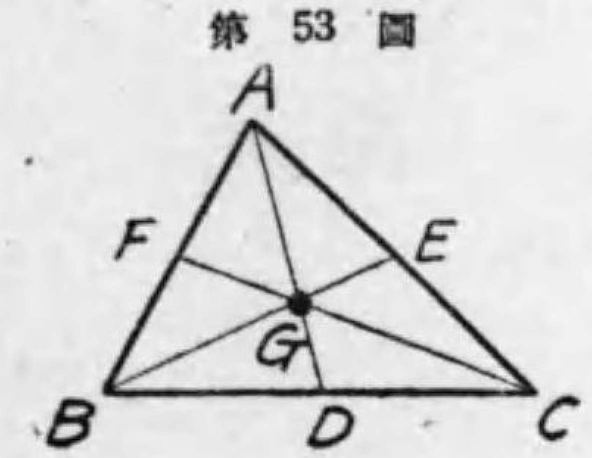
1. 直　線

長さの中點

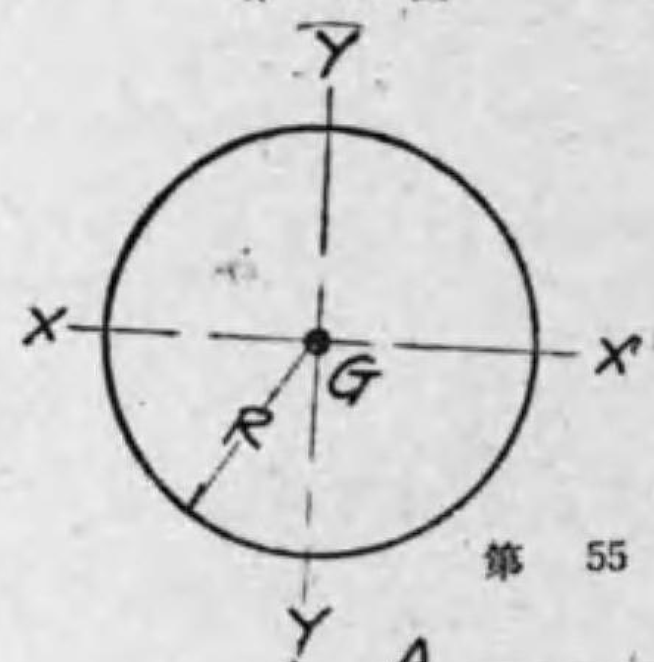
第 53 圖

2. 三　角　形

中線の交點



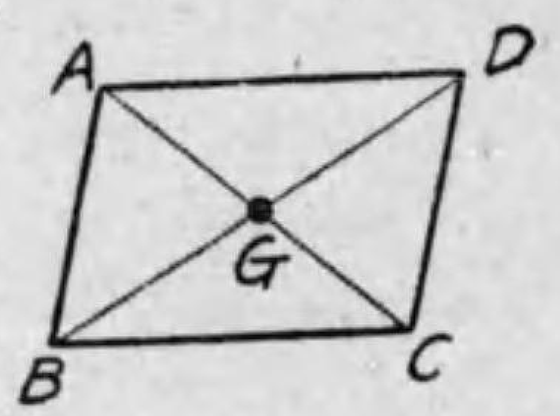
第 54 圖



3. **圓**

圓の中心

第 55 圖



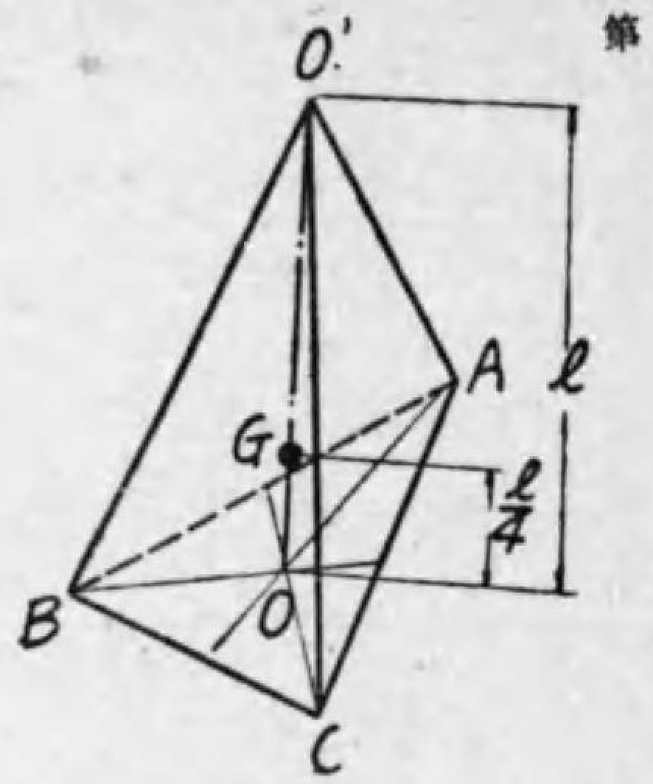
4. **平行四邊形**

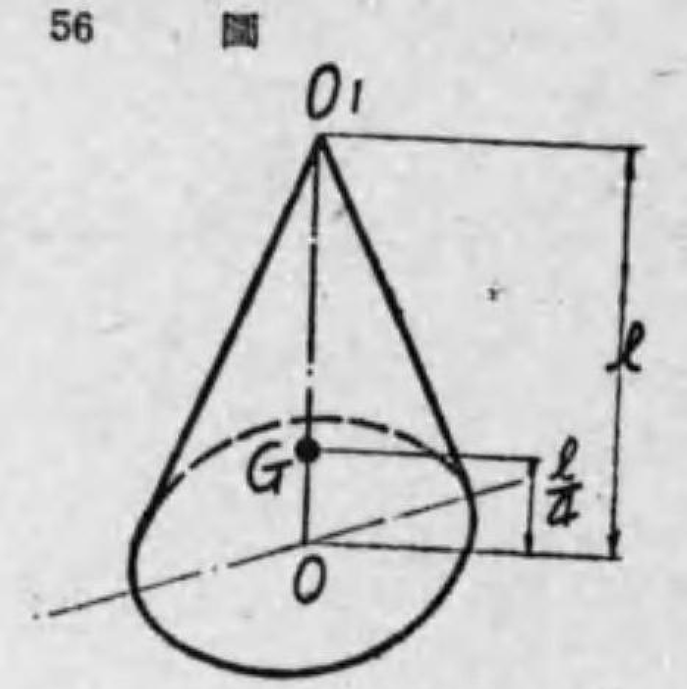
對角線の交點

5. **圓錐及角錐**

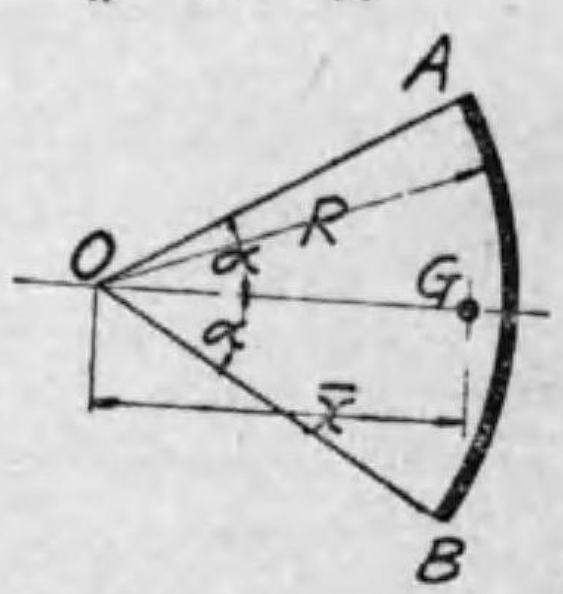
底面の重心と頂點を結ぶ線の底面より$\frac{1}{4}$の高さ。

第 56 圖





第 57 圖



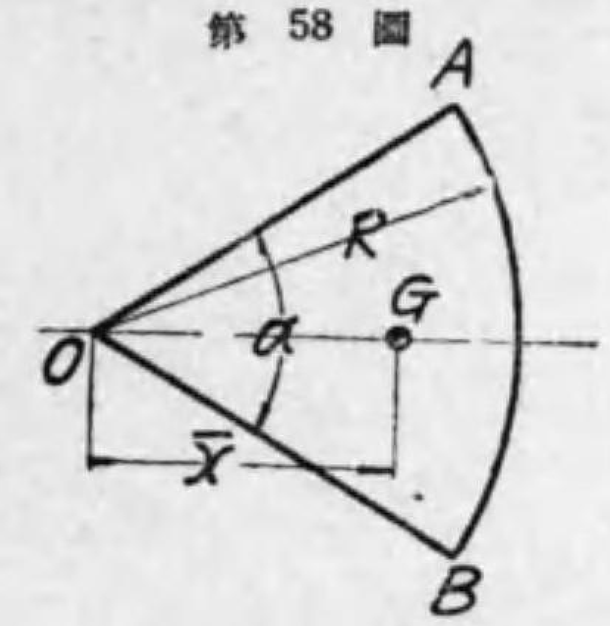
6. **圓　　弧**

∠AOBの二等分線上Oより

$$\bar{x}=R\frac{\sin\alpha}{\alpha}\frac{180}{\pi}\cdots\cdots\cdots(85)$$

αは度

第 58 圖



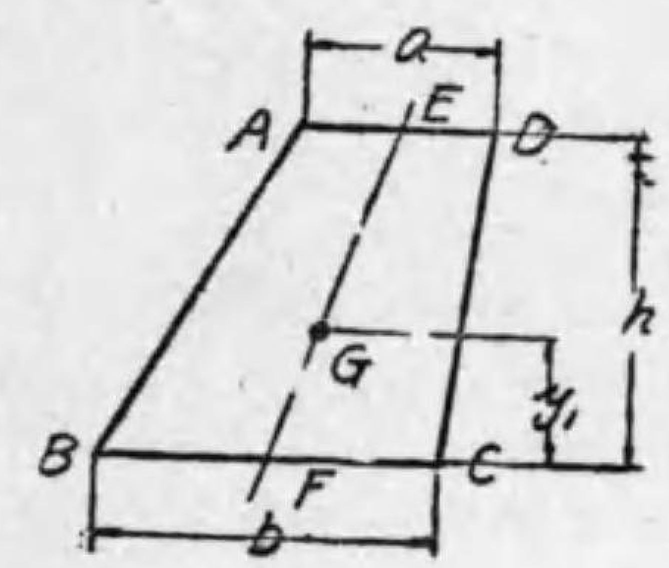
7. **扇　　形**

∠AOBの二等分線上Oより

$$\bar{x}=\frac{2}{3}\frac{R\sin\alpha}{\alpha}\frac{180}{\pi}\cdots\cdots(86)$$

(αは度)

第 59 圖



8. **梯　　形**

$$y_1=\frac{h}{3}\left(\frac{2a+b}{a+b}\right)\cdots\cdots\cdots(87)$$

24. 質心容積の中心及び面心

重心の座標は82式及び84式より

$$\bar{x}=\frac{\Sigma wx}{W}$$

$$\bar{y}=\frac{\Sigma wy}{W}$$

である。然るに $w_1=km_1$　$w_2=km_2$　M＝全質量とすると

$$\bar{x}=\frac{\Sigma wx}{\Sigma w}=\frac{\Sigma kmx}{\Sigma mk}=\frac{k\Sigma mx}{k\Sigma m}=\frac{\Sigma mx}{\Sigma m}$$

$$=\frac{\Sigma mx}{M}\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(88)$$

同様に

$$\bar{y}=\frac{\Sigma my}{\Sigma m}=\frac{\Sigma my}{M}\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(89)$$

此式で表はされる點を**質量の中心**，又は**質心**と云ふ。重心と質心は一致する事は勿論である。

又物體が同質の材料よりなる時は各點の重量は體積 v に比例する。即ち

$$w_1=Kv_1 \qquad w_2=Kv_2$$

但しKは常數である。

$$\Sigma w=K\Sigma v$$

$$\Sigma wx=K\Sigma vx$$

故に $$\bar{x}=\frac{\Sigma wx}{\Sigma w}=\frac{\Sigma Kvx}{\Sigma Kv}=\frac{K\Sigma vx}{K\Sigma v}=\frac{\Sigma vx}{V}\cdots\cdots(90)$$

同様に $$\bar{y}=\frac{K\Sigma vy}{K\Sigma v}=\frac{\Sigma vy}{V}\cdots\cdots(91)$$

此式で表はされる $\bar{x}\ \bar{y}$ 點を**容積の中心**と云ふ。均質な物體の重心と容積の中心は一致する。

物體が厚さ一様で均質な材料よりなる場合には重量は其の表面積に比例する。a_1, a_2……を表面積とすると

即ち $w_1=ka_1$ $w_2=ka_2$ A＝全面積とすると

$$\bar{x}=\frac{\Sigma wx}{\Sigma w}=\frac{\Sigma kax}{\Sigma ka}=\frac{k\Sigma ax}{k\Sigma a}=\frac{\Sigma ax}{\Sigma a}$$

$$=\frac{\Sigma ax}{A}\cdots\cdots(92)$$

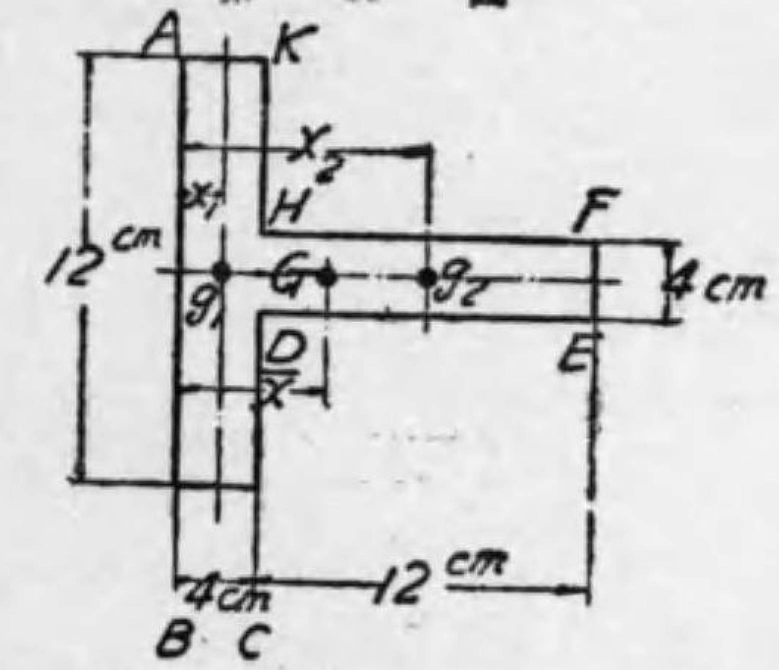
同様 $$\bar{y}=\frac{\Sigma ay}{\Sigma a}=\frac{\Sigma ay}{A}\cdots\cdots(93)$$

此式に依つて示される點を**面積の中心**，或は**面心**と云ふ。厚さが同一で均質な材料よりなる平面では面心と重心は一致する。

X及びY軸が重心を通る時は Σwx, Σmx 及び Σvx 又は Σwy, Σmy, Σvy は零となる。此の逆も又眞である。**即ち或る軸に對する物體のモーメントの代數和が零なれば其軸は重心を通る。**

【例題】1. 第60圖の重心を求めよ。

第60圖



【解】 平面圖形なれば面心を求めればよし。

此圖形は ABCK と DEFH との二つの矩形の集合である。ABCK の重心は g_1で，AB より 2cm，面積は $12\times4=48cm^2$。DEFH の矩形の重心は g_2 で AB 線より 10cm，面積は $12\times4=48cm^2$ である。g_1 g_2 は共に XX 線上にあれば圖形全體の重心 G も XX 上にある筈である。

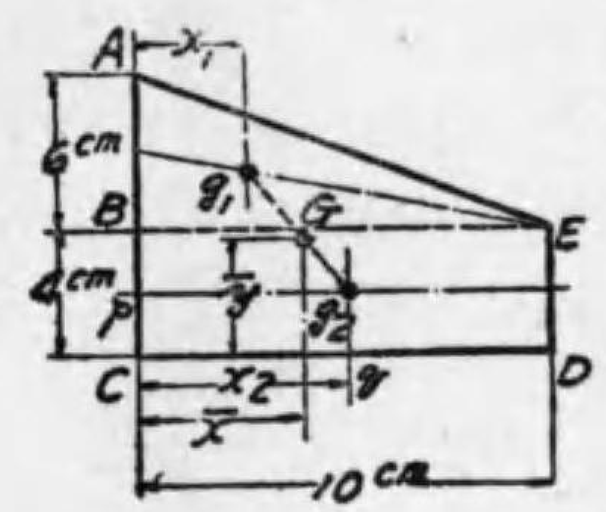
圖形全面積は $48+48=96cm^2$

故 92式より

$$x=\frac{\Sigma ax}{A}=\frac{48\times2+48\times10}{96}=\frac{576}{96}=6cm$$

【例題】2. 第61圖の面心を求めよ。

第61圖



【解】 三角形 ABE と矩形 BCDE とに分けて考へる。

三角形の面積

$$a_1=\frac{1}{2}\times6\times10=30cm^2$$

矩形の面積 $a_2=4\times10=40cm^2$

$$x_1=\frac{1}{3}CD=\frac{10}{3}=3\frac{1}{3}cm$$

$$x_2=\frac{1}{2}CD=\frac{1}{2}\times10=5cm$$

$$y_1=CB+\frac{1}{3}AB=4+2=6cm$$

$$y_2=\frac{CB}{2}=2cm$$

全面積$A=30+40=70cm^2$

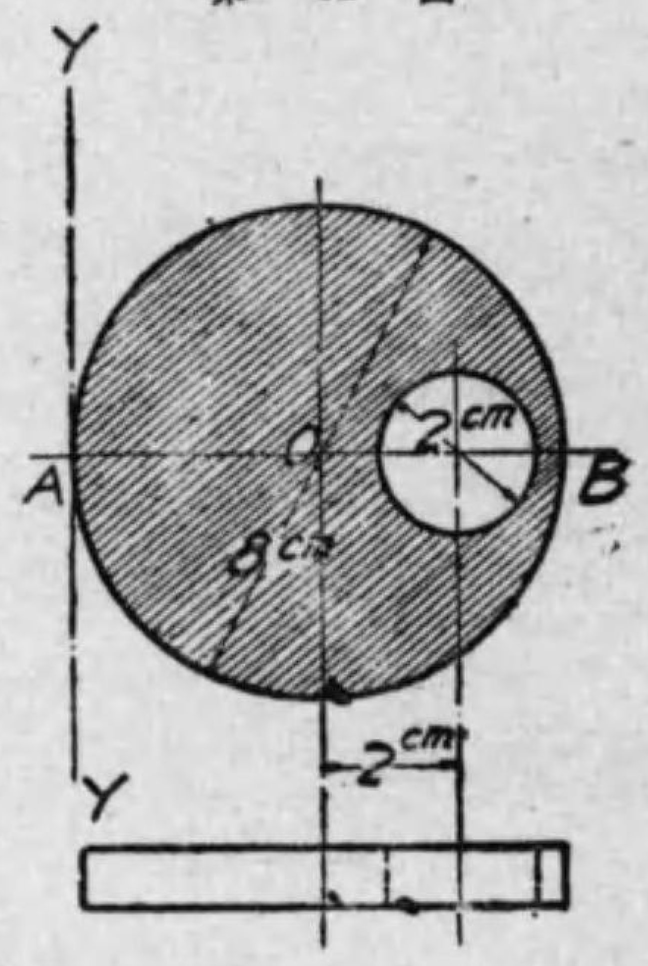
92式より

$$\bar{x}=\frac{\Sigma ax}{A}=\frac{30\times\frac{10}{3}+40\times5}{70}=\frac{100+200}{70}=4.29\text{cm}$$

$$\bar{y}=\frac{\Sigma ay}{A}=\frac{30\times6+30\times2}{70}=\frac{180+60}{7}=3.415\text{cm}$$

【例題】3. 第62圖に示す如き直徑8cmの圓板がある其中心より2cmの所を中心にして直徑2cmの穴を有するものの重心を求めよ。

第62圖



【解】 圓板の一點で直徑2cmの圓をくりぬいたことは，くりぬかない圓板の直角2cmの圓の中心に，上向きに直徑2cmの圓板の重量と同等の力fを加へたことと同樣である。故にくりぬかない圓板の重量が中心Oに下向きに働き，fが2cmの圓の中心に上向きに働くとして計算した平行力の中心がくりぬいた板の重心となる。

面心の場合には重量の代りに面積を使用したらよい。

圓板Oの重心及びfの作用點は直徑AB上にあれば，くりぬいた板の重心もAB線上にある筈である。

面心を求めるに

直徑2cmの圓の面積 $a_1=\frac{\pi}{4}d_1^2=\frac{\pi}{4}\times2^2=3.14\text{cm}^2$

O圓の面積 $a_2=\frac{\pi}{4}d_2^2=\frac{\pi}{4}\times8^2=50.25\text{cm}^2$

くりぬいた板の面積

$A=a_2-a_1=50.25-3.14=47.11\text{cm}^2$

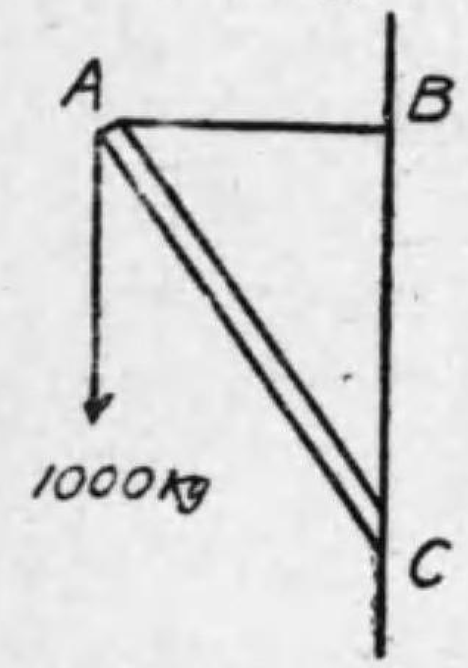
YY軸に對するモーメントより面心を求めれば

$$\bar{x}=\frac{\Sigma ax}{A}=\frac{(50.25\times4)-(3.14\times6)}{47.11}=\frac{201.00-18.84}{47.11}=3.865\text{cm}$$

練習問題

（1） 第63圖に於てACの棒の長さは2mにして，C點で壁BCに取りつけられる。綱ABは水平で長さは1.6mあり，AC, ABに働らく力を求めよ。

第63圖



(ans. ACの力1666.7kg
ABの力1333.3kg)

（2） 180kgの浮揚力のある氣球が風壓を受けて，綱が水平と60°の角をしたといふ。風壓及綱に作用する張力を求めよ。

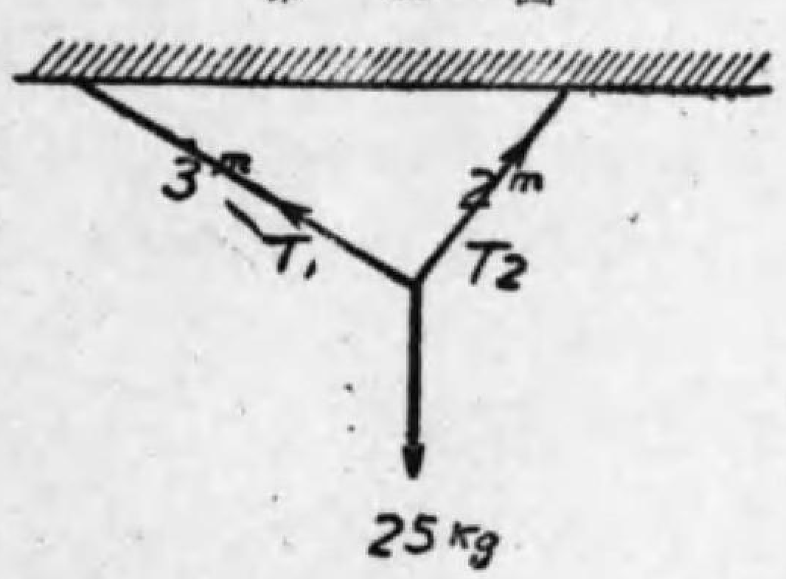
(ans. 風壓103.9kg，張力207.8kg)

（3） 半徑30mで曲れる線路に於いてレール間の巾1.43m，外側のレールは內側のレールより38mm高い此上を走らす列車の速度を求めよ。

(ans. $v=8.84$m/sec)

（4） 第64圖の樣に長さ5mの糸を吊し，一端より3mの點に重量25kgの物體を吊すと，各糸に働く張力は何kgとなるか。

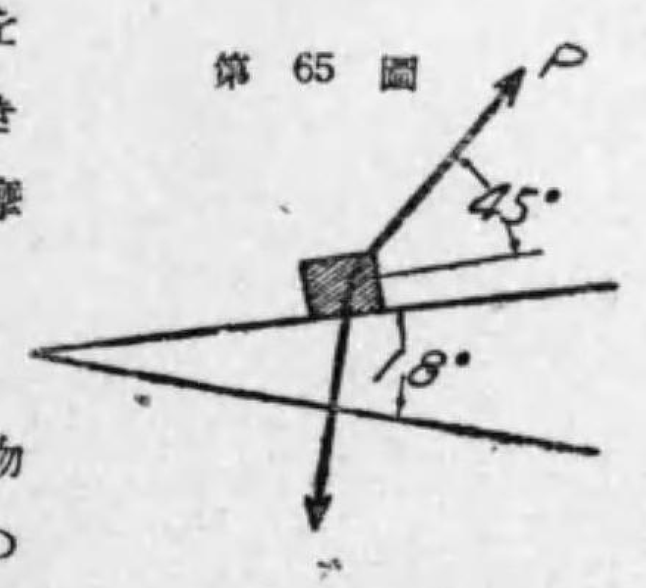
第64圖



(ans. 18.1kg, 22.5kg)

（5） 重量1tの物體を傾斜18°の斜面を斜面と，45°の方向に押上げる力の大きさを求めよ。但し物體と斜面間には摩擦はないものとす。

第65圖



(ans. 437kg)

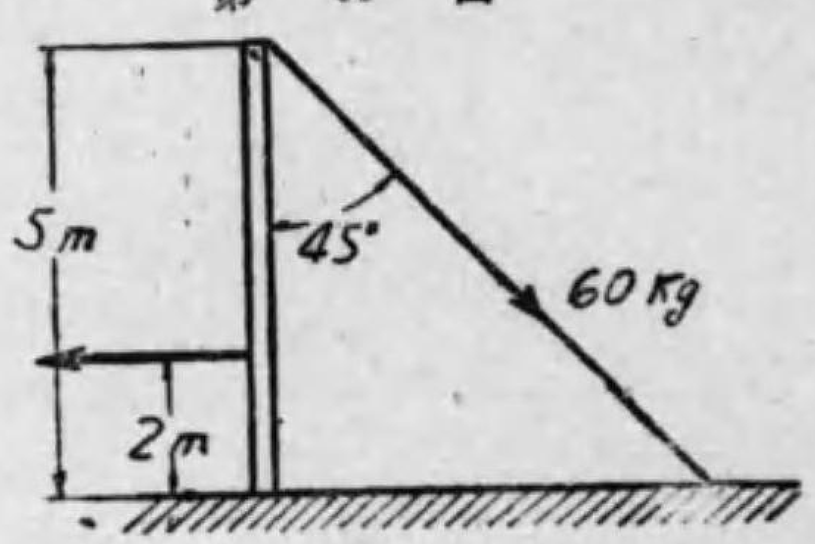
（6） 摩擦のない斜面に重量10kgの物體をのせ，これを斜面に平行な5kgの

力で支へ得ると云ふ斜面の角度を求めよ。 (ans. $\theta=30°$)

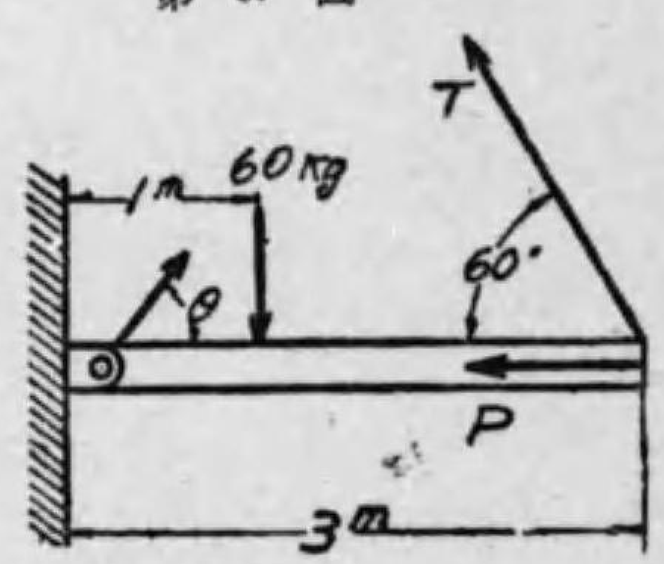
(7) 10kg の物體を糸で吊し水平に押し，糸が水平面と30°の角をした時の水平力F及糸の張力Tを求めよ。(ans. T=20kg, F=17.32kg)

(8) 直立した長さ5mの棒の頂點に綱を結び，これを棒と45°の方向に60kgの力にて引張り，他の綱を棒の下端より2mの點に付け，これを水平に引張つて棒を垂直に保つ。水平の綱に働らく力を求めよ。 (ans. 106kg)

第 66 圖



第 67 圖



(9) 長さ3mの棒を水平にし，一端を蝶番にて壁に取つけ，他端は綱で圖のように棒と60°の方向に吊す。棒には蝶番より1mの點に60kgの物體をのせたとすると，蝶番に生ずる反力R，綱の張力T及び棒の壓力Pを求めよ。但し棒は重量のないものとす。

(ans. R=41.6kg, $T=\frac{40}{\sqrt{3}}$kg, $P=\frac{20}{\sqrt{3}}$kg)

(10) 太さ一樣にして長さ72cmの棒の一端に3kg，他端に31kgを吊し，1端より13cmの點で支へれば釣合ふといふ。棒の重量を問ふ。

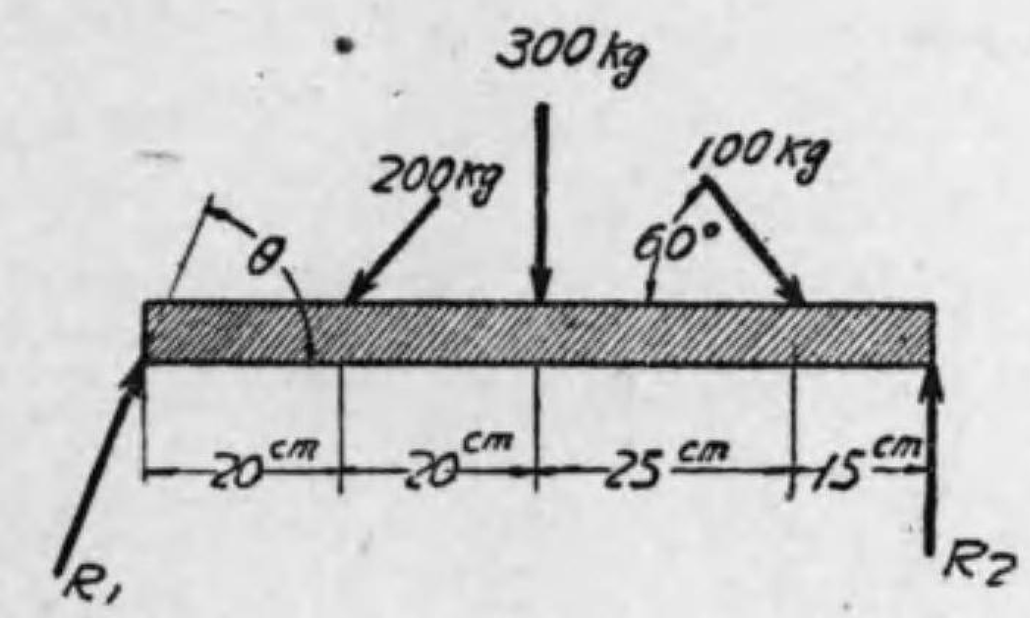
(ans. 9.83kg)

(11) 長さ150cm，太さ一樣な棒を兩端にて水平に支へ，一端より50cmの所に30kg，70cmの所に40kgの物體をのせた。棒の重さが1mにつき5kgとして兩端の反力を求めよ。 (ans. 45.1kg, 32.4kg)

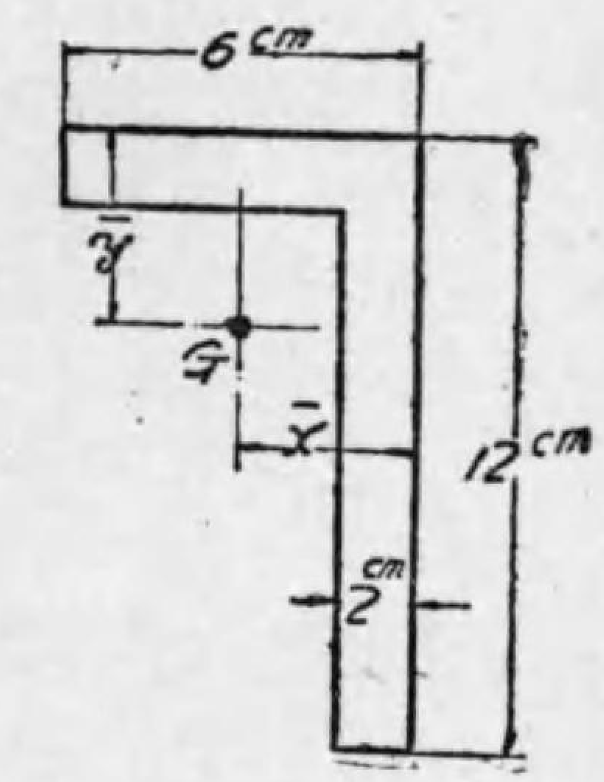
(12) 長さ80cmの水平梁に圖のような力が作用す。支點の反力R_1R_2及びθを求めよ。

(ans. $R_1=301$kg, $R_2=115$kg, $\theta=51°20'$)

第 68 圖



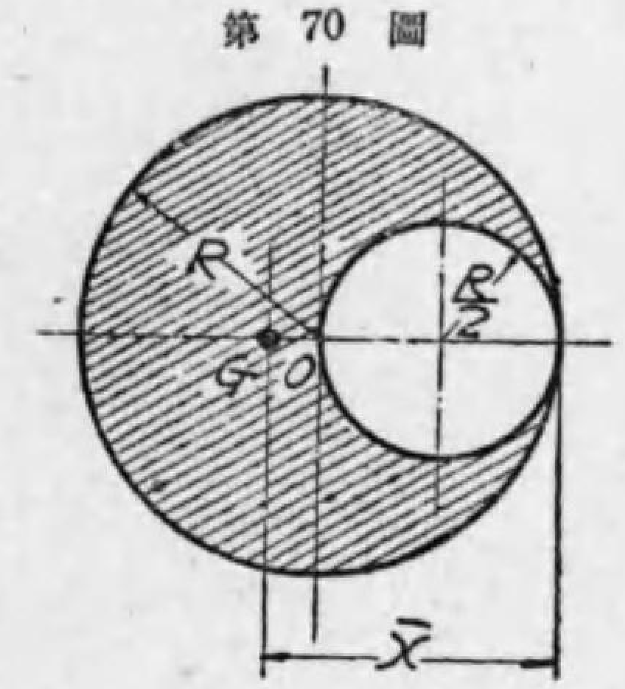
第 69 圖



(13) 圖の如き直角定規の重心を求めよ。

(ans. $\bar{x}=1\frac{3}{4}$cm, $\bar{y}=4\frac{3}{4}$cm)

第 70 圖



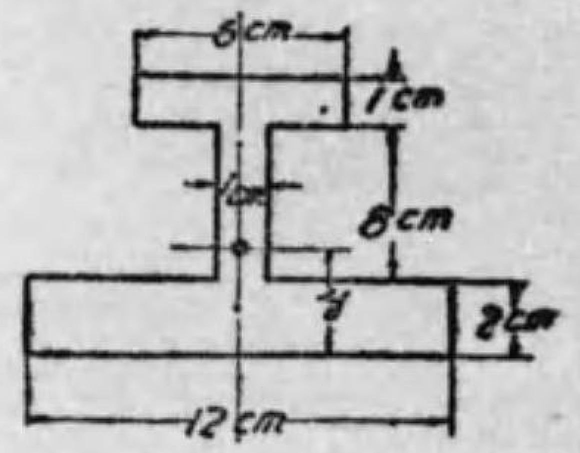
(14) 圖に示す如く半徑Rの圓板より，$\frac{R}{2}$の半徑の圓板を截りとつた。殘部の面心を求めよ。

(ans. $\bar{x}=\frac{7}{6}R$)

(15) 第71圖に示す斷面の重心を求めよ。

(ans. $\bar{y}=3.55$cm)

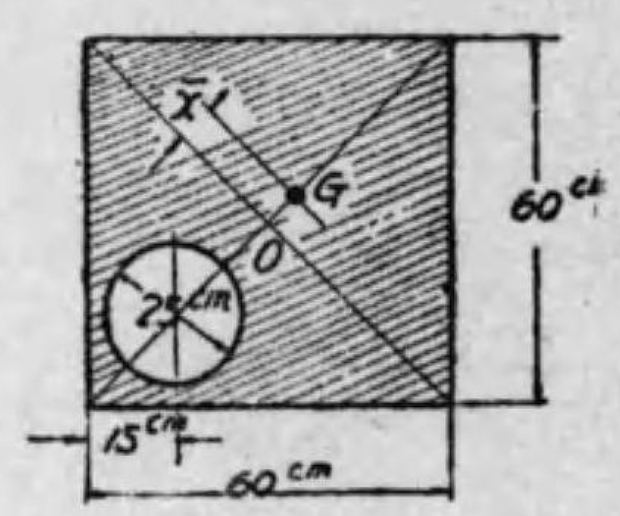
第 71 圖



(16) 第72圖の如き斷面の重心を求めよ。

(ans. $\bar{x}=3.35$cm)

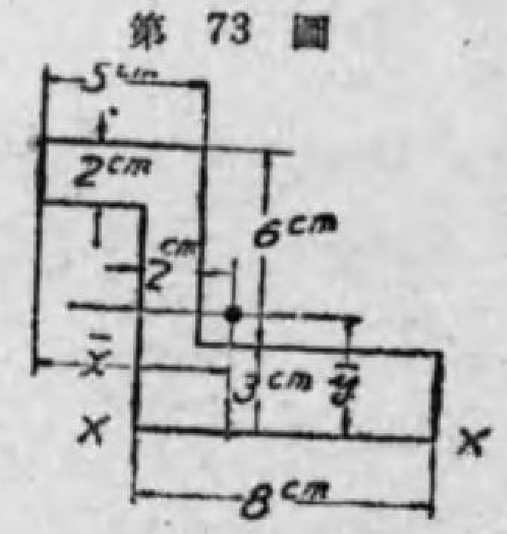
第 72 圖



(17) 第73圖に示す斷面の重心を求めよ。

(ans. $\bar{x}=5.35$cm, $\bar{y}=3.715$cm)

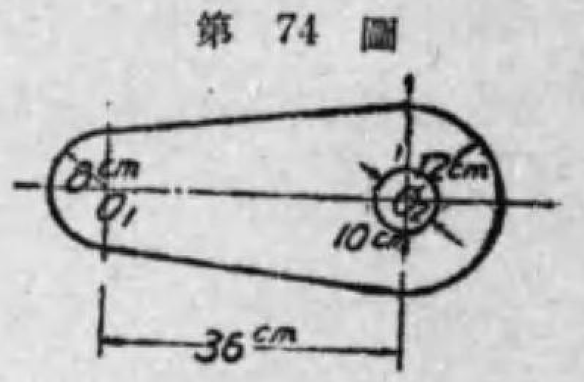
第 73 圖



(18) 第74圖の重心を求めよ。

(ans. O_2よりO_1の方向に15.4cmの點)

第 74 圖

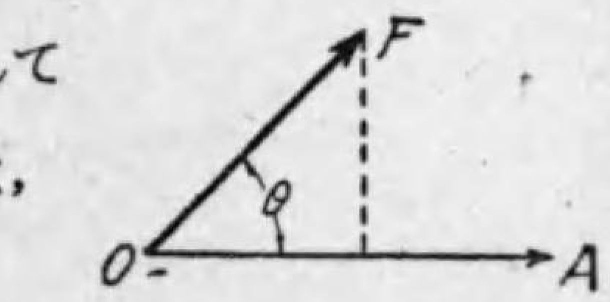


第六章 仕事及びエネルギー

25. 仕　　事

物體に力Fが連續作用して，力の方向に距離Sだけ動いたとすると，力はFSなる**仕事**をしたと云ふ。

第 75 圖



力の方向と變位の方向がθの角度をして居る場合には，變位の方向に有効な力は，力の變位方向の分力なれば，仕事Wは

$$\mathbf{W=SF\cos\theta} \quad \cdots\cdots(94)$$

である。

仕事の絶對單位は1ダインの力が作用して，力の方向に1cm變位した仕事を以つてし，これを**1エルグ**と云ふ。即ち

$$\mathbf{W(エルグ)=F(ダイン)\times S(糎)} \quad \cdots\cdots(95)$$

實用上に於いては力はkgにて，變位はmを使用し此の時の仕事の單位はkg.mにて表はす。即ち

$$\mathbf{W(kgm)}=\mathrm{Fkg}\times \mathrm{S(m)}=\frac{\mathrm{F(ダイン)}}{980\times1000}\times\frac{\mathrm{Scm}}{100}$$

$$=\frac{\mathbf{W(エルグ)}}{\mathbf{9.8\times10^7}} \quad \cdots\cdots(96)$$

の關係がある。

英國制にては力を封度にて變位を呎とし，仕事の單位は呎封度にて表はす。

【例題】1. 重量15kgの物體を等速度で20mの高さに迄上げるに要する仕事を求めよ。

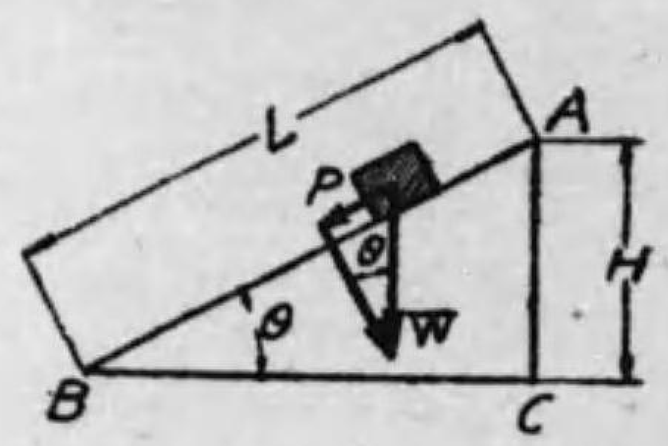
【解】 重量15kgとは地球が此物體を引く力が15kgで，これを上げるに

も15kg の力を要するものなれば仕事 W は

$W=15\times20=200$kgm

【例題】2.　物體を斜面に沿ふてある高さ迄上げる仕事は斜面の底面より垂直に其高さ迄上げる仕事に等しいことを證明せよ。

第 76 圖



【解】　W の斜面に沿ふ分力 P は

$P=W\sin\theta$

仕事$=FS=PL=WL\sin\theta=WH$

26. 工　　率

單位時間にした仕事を**工率**又は動力と云ふ。物體に F の力が作用して, t 秒間に力の方向に S の距離變位したとするると, 工率 P は

$$P=\frac{W}{t}=\frac{F.S}{t}=F\frac{S}{t}=Fv\cdots\cdots(97)$$

v は速度を表はす。即ち**工率は連續作用した力と力と同方向の物體の速度との相乘積に等し。**

工率の單位には仕事の單位と同じ kgm 或は呎封度を用ふるか, **ワツト**或は千位の**キロワツト**又は**馬力**なる單位を用ひる。

1馬力とはメートル制では1秒間に 75kgm の割合で成される仕事を云ふ。即ち Fkg の力で力の方向に t 秒間に速度Vで Sm 變位したとすると工率を馬力で表はせば

$$H.P=\frac{FS}{75t}=\frac{FV}{75}\cdots\cdots(98)$$

英國制では, 1秒間に550呎封度の割合で仕事をする工率を1馬力と云ふ。

ワツト又はキロワツトは電氣工學上に多く使用される工率の單

位である。工率の各種單位の關係は次の如し。

1米馬力$=75$kgm$=0.98634$英馬力$=736$ワツト

1英馬力$=550$呎封度$=1.0144$米馬力$=746$ワツト

1キロワツト$=1.36$米馬力$=1.34$英馬力

工率に時間を乘ずると, 仕事となり, 馬力時, キロワツト時と云ひ動力賣買に普通用ひられる。

【例題】1.　重量 1000kg の物體を等速度で40秒間に 300m の高さにひき上げる起重機の工率を求めよ。

【解】　$P=\dfrac{1000\times300}{75\times40}=100$馬力

【例題】2.　例題1の起重機を運轉するに電動機を使用せんとす。起重機の摩擦抵抗が電動機出力の$\dfrac{3}{10}$とすると何キロワツトの電動機を使用したらよいか。

【解】　電動機の出力を P とすると

$P(1-0.3)=100$

$P=\dfrac{100}{0.7}=143$馬力

1キロワツト$=1.36$馬力

なれば

$\dfrac{143}{1.36}=105$キロワツト

【例題】3.　平坦な線路上を 60km/h の速度で 300t の列車を引く機關車がある。各種の抵抗は 1t につき 2kg とすれば機關車の馬力數を見出せ。

【解】　全抵抗　2×300kg

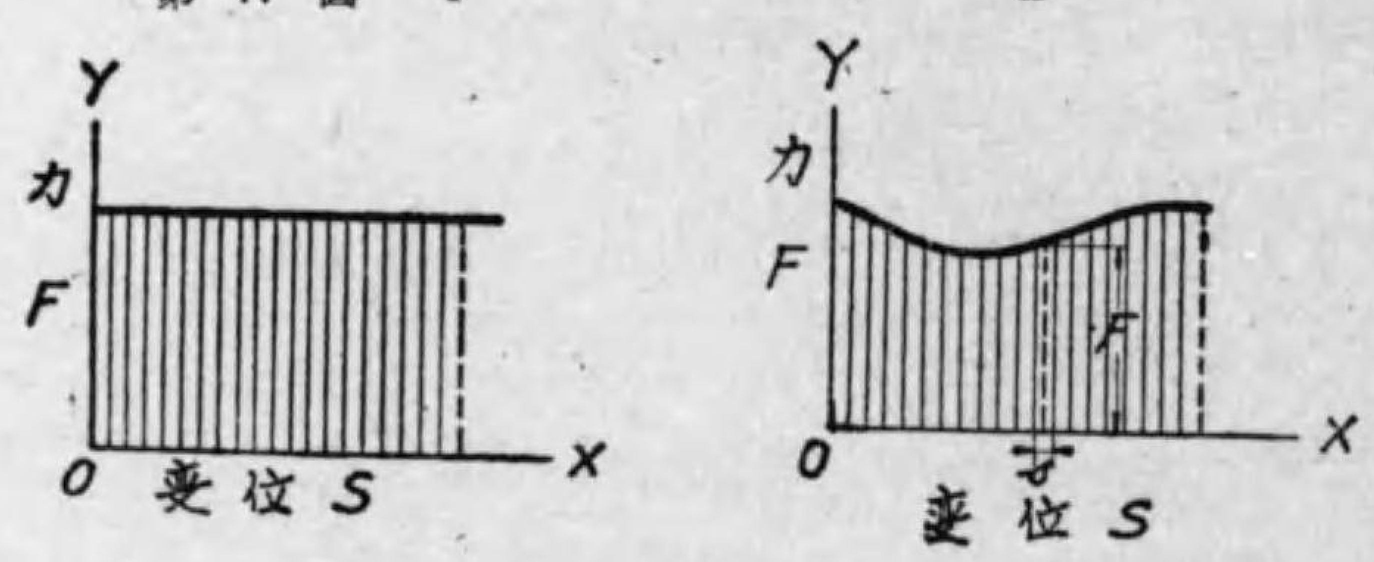
速度　$\dfrac{60\times1000}{60\times60}$m/sec

馬力數　$P=\dfrac{2\times300\times60\times1000}{60\times60\times75}=133.5$馬力

27. 仕事及び工程の圖示

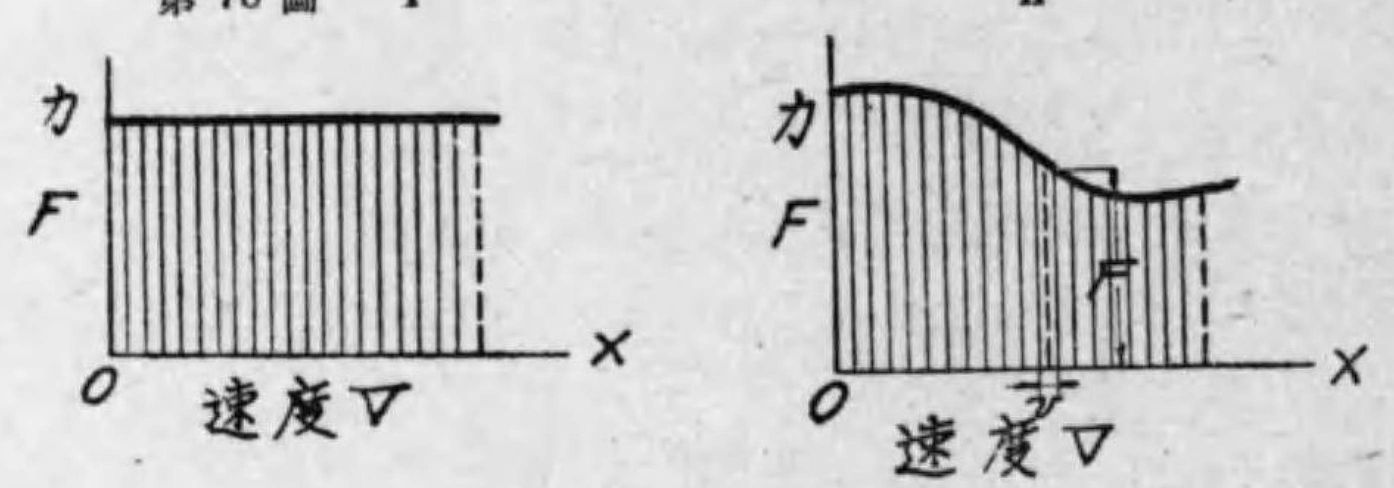
仕事は力と變位の積であるから，直交二軸の一軸に力を，他軸に變位をとり力と變位の關係を圖示すると，曲線と軸との間の面積は仕事を表はす。第77圖Ⅰは作用する力が一定の場合でⅡは力の大きさが絶へず變化する場合を示す。

第 77 圖　Ⅰ　　Ⅱ



工率は力と速度の積であるから直交二軸に力と速度をとれば曲線と軸の間の面積は工率を表はす。第78圖Ⅰは力が一定の場合でⅡは力の大きさが絶えず變化する場合を示す。

第 78 圖　Ⅰ　　Ⅱ



28. エネルギー

仕事をなし得る能力を**エネルギー**と云ふ。即ちエネルギーを持つてゐるものは仕事をすることが出來るし，反對に仕事をするこ

との出來るものはエネルギーをもつて居ると云ふ。

高い所にある物體の樣に靜止の狀態に於いて有するエネルギーを**位置のエネルギー**と云ひ，飛行中の彈丸の樣に運動の狀態に於いて有するエネルギーを**運動のエネルギー**と云ふ。

エネルギーの單位は仕事の單位と同一でエルグ，瓦·糎(g·cm)，瓩·米(kg·m)，呎封度(ft·lbs)を用ふ。

Ⅰ　**位置のエネルギー**　或る基準面より h m の高さにある Wkg の物體は，基準面より其高さ迄上げるに $Whkgm$ の仕事を要するから，$Whkgm$ の位置のエネルギーを有する。位置のエネルギーは高さ h の大きさによつて異るもので，高さを測る基準面によつてエネルギーの大きさは變るのである。

Ⅱ　**運動のエネルギー**　飛行中の彈丸は重力に抵抗して上昇し，障壁に當つてはこれを破壞する等の仕事をし得るからエネルギーを有するのである。この樣に運動狀態に於いてもつて居るエネルギーを運動のエネルギーと云ふ。運動のエネルギーの大きさは運動體が靜止迄にし得る仕事の量を以つて表はす。

;7式より（αは負）

$$v_2^2=v_1^2-2\alpha S=0$$

$$\alpha=\frac{F}{m}$$

$$v_1^2=2\frac{F}{m}S$$

靜止までにする仕事は(絶對單位)

$$W=FS=\frac{1}{2}mv_1^2=\textbf{運動のエネルギー}\,(K.E)\cdots(99)$$

實用單位を使用すると，質量 $m$kg の物體が，vm の速度で運動

して居る時有する運動のエネルギー K. Ekgm は

$$K.Ekgm=\frac{1}{2}\,\frac{m}{g}v^2 \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(100)$$

である。

【例題】1. 高さ 10m で水量 $1m^3/sec$ の流れを有する瀑布が出し得る理論上の馬力を求めよ。

【解】 位置のエネルギー $=Wh=1000\times1\times10=10000$kg. m

$$HP=\frac{10000}{75}=133.3\text{馬力}$$

【例題】2. 重量 1t の彈丸が 800m/sec の速度を以つて飛んで居る，これが有する運動のエネルギーを求めよ。

【解】 100式より

$$K.Ekgm=\frac{1}{2}\,\frac{m}{g}v^2=\frac{1}{2}\,\frac{1000}{9.8}\times(800)^2=3.27\times10^7\text{kg. m}$$

【例題】3. 重量 5kg で 25m/sec の速度で走つて居る物體を 28m/sec の速度にするには何程のエネルギーを與へたらよいか。

【解】 運動のエネルギーの增加 $=\frac{5}{9.8}(28^2-25^2)=81.1$kg. m

即ち 81.1kg. m のエネルギーを與へればよい。

練 習 問 題

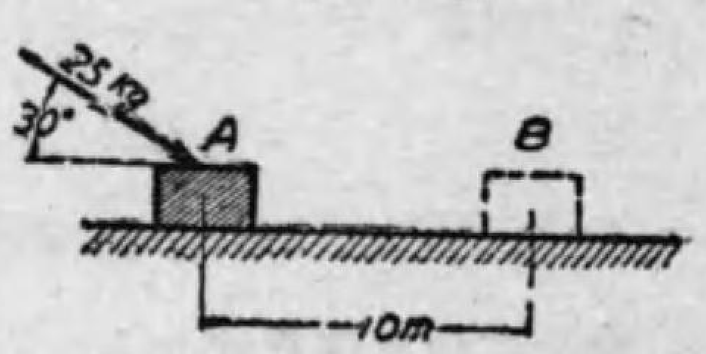
（1） 或る物體に 1kg の力が働らいて 3m 變位した。この時した仕事をエルグ及 kgm で求めよ。 （ans. 29.4×10^7エルグ，3kgm）

（2） 或る物體に 800kg の力が働らいて 1700kgm の仕事をしたといふ。變位を求めよ。 （ans. 2.125m）

（3） 深さ 600m の坑底より 1.5t の石炭を揚ぐるに要する仕事を求めよ。 （ans. 9×10^5kgm）

（4） 物體に變位の方向と 30° の角度をした 25kg の力を加へて，10m 變位したといふ。仕事を求めよ。 （ans. 216kgm）

第 79 圖



（5） 每時 $500m^3$ の水を 30m の高さに上げる工率を求めよ。但水 $1m^3$ の重さは 1000kg とす。 （ans. 55.5馬力）

（6） 5t の重量を 4 秒間に等速度で 9.7m の高さに引上げる起重機の工率を馬力及びキロワツトで求めよ。（ans. 161.6馬力，119キロワツト）

（7） 人力によつて重量 1.5t の錨を 28m の海底より12分間に引き上げんとす。人數を求めよ。但し一人の力量を 1/12 馬力とす。 （ans. 9.33人即10人）

（8） 勾配のない線路を 225K.W の電動機 6臺を備へる機關車が100km/h の速度で走るといふ。列車抵抗を求めよ。 （ans. 4950kg）

（9） 深さ 100m の坑内で，$0.5m^3/sec$ の割合で湧出する水を汲み出すポンプの理論馬力を求む。 （ans. 666馬力）

（10） 重量 1kg の物體が 10m の高さより落下すると，何程の速度となるか。 （ans. 14m/sec）

（11） 重量 300t，速度 10m/sec の機關車に 2t の力が 1km の距離作用すると列車の速度は何程となるか。 （ans. 15.2m/sec）

（12） 25m/sec の等速度にて運動して居る 100kg の物體の有するエネルギーで，25kg の物體を何米の高さまで上げ得るか。（ans. 254.9m）

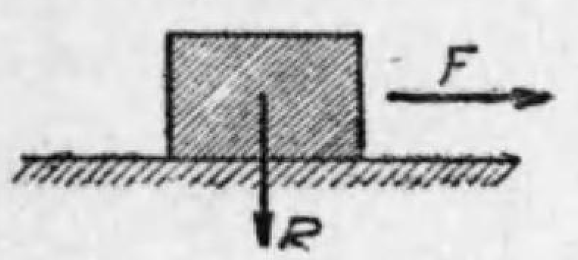
（13） 重量 2kg の物體を 25m の高さより落した。地面に達した時に有する運動のエネルギーを求めよ。 （ans. 290.5kgm）

第七章 摩 擦

29. 滑動摩擦

二物體が互に摩れ合ふ面には此運動を妨げる一種の力を生ずるこの現象を**摩擦**と云ひ，此力を**摩擦力**と云ふ。

第 80 圖



實驗の結果によれば摩擦力は摩擦面に直角に働く壓力に比例し，接觸面積

の大小には關係なし。故に摩擦力をF，直角壓力をRとすると次の關係がある。

$$F=\mu R \cdots\cdots(101)$$

μ は接觸面の性質に關する實驗的の定數で，これを**摩擦係數**と云ふ。摩擦係數は第2表の如し。

第2表　摩擦係數

物體	表面の狀態	靜摩擦係數	動摩擦係數
鑄鐵と鑄鐵或はブロンズ	乾燥	—	0.21
	滑油小量	0.16	0.15
鍛鐵と鍛鐵	乾燥	—	0.44
	注油小量	0.13	—
軟鋼と鑄鐵或はブロンズ	乾燥	0.19	0.18
	注油	—	0.16
軟鋼と軟鋼	乾燥	0.15	0.10
	注油	0.1	0.009
木材と金屬	燥乾	0.55	0.2—0.5
	注油	0.11	0.1
木材と木材	乾燥	0.4—0.6	0.3—0.5
	注油	0.11	0.04—0.16
革と金屬	乾燥	0.3—0.5	0.25—0.5
	注油	0.12—0.25	0.15

或重量の物體を机上に動かす場合には直角壓力は物體の重量で，此の時の摩擦力Fは第101式を以つて表はされる。物體が運動する爲には加へる力PはFより大なるを要す。P−Fはその運動を起す力で運動の加速度はこれによつて生ずる。

摩擦力は常に運動の向きに對して反對の向きに生ずるもので靜

止して居る物體を動かさんとする時生ずる摩擦を**靜摩擦**と云ひ，運動中の摩擦を**動摩擦**と云ふ。**靜摩擦係數**と**動摩擦係數**とは値が違ふもので，一般には靜摩擦係數は動摩擦係數より大である。

摩擦を小さくするために接觸面に給油することがある。給油をすると油膜と固體面の接觸となり固體同士の接觸より摩擦係數が小さくなる。給油面の摩擦は油の種類給油の程度によつて異るが

1. **接觸面の性質よりも廣狹が關係す，狹ければ油が押出されて摩擦係數は大きくなる。**
2. **運動の速さが速くなると摩擦係數ば大きくなる。**
3. **溫度の變化により油の性質が變り摩擦係數も異る。**

【例題】1. 重量100kgの物體を机上を滑らすに何程の力を要するか。但し摩擦係數を0.3とす。

【解】 $F=\mu R=0.3\times100=30\text{kg}$

【例題】2. 重量250kgの物體を水平面上を滑らすに50kgの力を要した。摩擦係數を求めよ。

【解】 $F=\mu R$

$$\mu=\frac{F}{R}=\frac{50}{250}=0.2$$

【例題】3. 20m/secの速度の物體が摩擦係數0.1の水平面上を滑つて居る，何秒後に靜止するか。

【解】 物體の重量をW，摩擦力をF，加速度を a とすると

$$F=\mu W \qquad F=\frac{W}{g}a$$

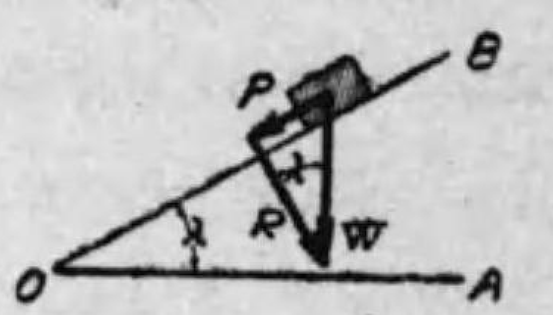
$$\therefore\ \frac{W}{g}a=\mu W \qquad a=\mu g \qquad v=at$$

$$t=\frac{v}{a} \qquad t=\frac{v}{\mu g}=\frac{20}{0.1\times9.8}=20.4\text{sec}$$

30. 摩擦角

第81圖の樣な斜面上に重量Wの物體をのせ，λ を次第に大きくして或る角度に達すると，物體は斜面に沿ふて正に滑り落ちんとす。此の時の力の釣合の條件は

第 81 圖



P をWの斜面に沿ふ水平分力，Rを垂直分力とすると

$$P=W\sin\lambda$$

$$R=W\cos\lambda$$

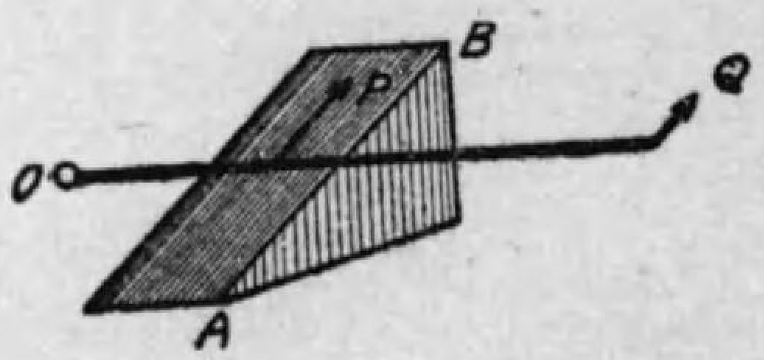
$$P=\mu R\quad より$$

$$W\sin\lambda=\mu W\cos\lambda$$

$$\mu=\frac{\sin\lambda}{\cos\lambda}=\tan\lambda \quad\cdots\cdots\cdots\cdots(102)$$

此 λ を**摩擦角**と云ふ。即ち斜面の傾斜角が摩擦角より小なれば物體は摩擦により斜面上にとゞまり，摩擦角より大なれば留る事が出來ず滑り落ちる。

第 82 圖

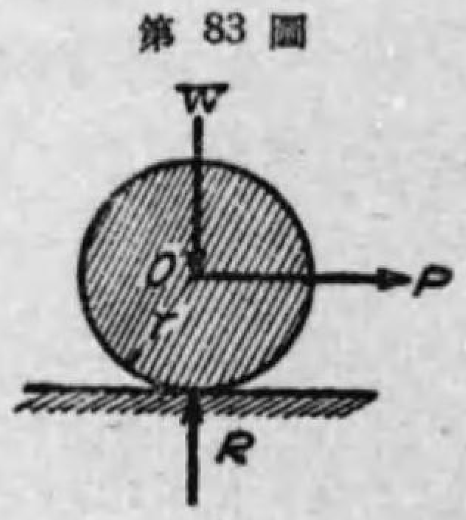


【例題】 第81圖の裝置に於いて傾斜角 λ が 16°42′ になつた時物體は滑り始めた，斜面と物體間の摩擦係數を求めよ。

【解】 $\mu=\tan\lambda=\tan 16°42'=0.3$

31. 回轉摩擦

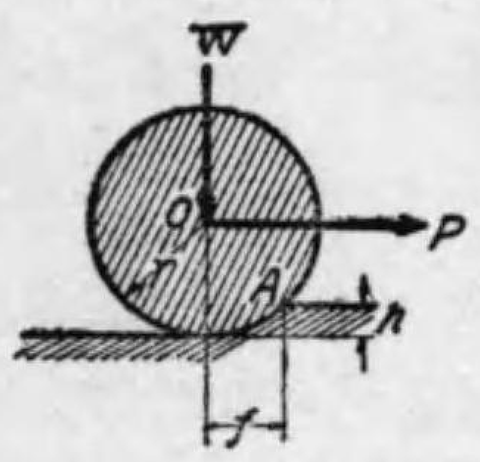
第 83 圖



第83圖の樣に平面上に載せた圓筒に，水平力Pを加へると接觸面の摩擦力Fによる Fr のモーメントにて圓筒は回轉する。摩擦が全然ない時には回轉せず。圓筒及平面

が正しく且つ荷重が加はらない場合には接觸面は一直線をする筈であるが，荷重が加はると接觸面は第84圖の樣に幾分變形した面で接觸する。此時A點に對するモーメントをとると

第 84 圖



$$P(r-h)=Wf \cdots\cdots\cdots\cdots(103)$$

h は r に比し甚だ小さいから無視して，

$$Pr=T=Wf \qquad P=W\frac{f}{r} \cdots\cdots\cdots(104)$$

f を**回轉摩擦係數**と云ひ，r と同一單位で表す。

第 3 表　回轉摩擦係數

物　　體	回轉摩擦係數
鑄鐵と鑄鐵	0.005
軟鋼と軟鋼	0.005
燒入れ鋼の輪，或は球と鋼の環或は軸受	0.0005～0.001

$\frac{f}{r}$ は μ に比し極めて小なれば物體を運搬するに滑らすより轉がす方が輕く動き，動力の損失が少くてすむ。ローラーベヤーリング及びボールベヤーリングは此目的に使用されるのである。

【例題】 1. 重い物體を運搬するにころを使用する事がある。此の時の關係を述べよ。

第 85 圖

【解】 A, Bをころとす。

W…物體の重量

P…牽引力

W_1…ころの總重量

f, f'…ころの上面及び下面の回轉摩擦係數

r…ころの半徑

とすると上面の回轉抵抗モーメント T_1 は

$$T_1=Wf$$

下面の回轉抵抗モーメント T_2 は

$$T_2=(W+W_1)f'$$

力 P がこの下面に對するモーメント T は

$$T=2Pr$$

依つて　$T=T_1+T_2$

$$2Pr=Wf+(W+W)f'$$

$$P=\frac{Wf+(W+W_1)f'}{2r}\quad\cdots\cdots\cdots\cdots(A)$$

【例題】2. 水平に車輪を牽く場合の牽引力を求めよ。

【解】 W…荷重

W_1…車輪の重量

r…車軸の半徑

R…車輪の半徑

μ…車軸の滑り摩擦係數

f…車輪の回轉摩擦係數

とすると，車軸の摩擦モーメント T_1 は

$$T_1=\mu Wr$$

回轉抵抗モーメント T_2 は

$$T_2=(W+W_1)f$$

故に車軸を P なる水平力で引くと，線路に P なる摩擦力を生じ PR のモーメントで車輪を回轉する。依つて

$$PR=T_1+T_2=\mu Wr+f(W+W_1)$$

$$P=\frac{\mu Wr+f(W+W_1)}{R}\quad\cdots\cdots\cdots\cdots(B)$$

【例題】3. 直徑 13cm のころの上に重量 2t の物體をのせて引く時の力を求めよ。但し $f=0.05$, $f'=0.08$ としころの重量は無視する。

【解】 例題1より $P=\dfrac{Wf+(W+W_1)f'}{2r}=\dfrac{2000\times0.05+2000\times0.08}{13}$

$=20$kg

【例題】4. トロッコの車輪の直徑 60cm，車軸の直徑 10cm，$\mu=0.1$，$f=0.05$ とすると荷重 1t についての牽引力を求めよ。但し車輪の重量

を無視す。

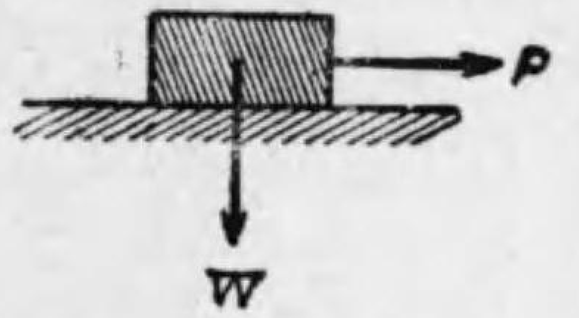
【解】 B式より $P=\dfrac{\mu Wr+f(W+W_1)}{R}=\dfrac{01.\times1000\times5+0.05\times1000}{30}$

$=18.3$kg

32. 摩擦によるエネルギーの損失

物體を運動せしめようとすれば摩擦力は常に運動と反對方向に生じ，この爲にエネルギーの損失を生ず。

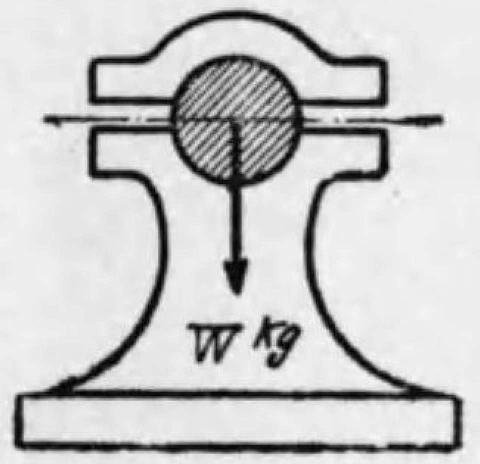
第 86 圖



第86圖に於いて物體が v の速度で運動して居り，物體と平面間の摩擦係數を μ とすれば摩擦力 F による損失工率 P は

$$P=Fv=W\mu v\text{kgm}\quad\cdots\cdots\cdots\cdots(105)$$

第 87 圖



第87圖の様な軸受の軸に Wkg の重量がかゝり，毎分 N 回轉するとすれば損失工率Pは

$$P=\frac{2\pi\mu rWN}{60}\text{kg·m}\quad\cdots\cdots(106)$$

$$H{\cdot}P=\frac{2\pi\mu rWN}{60\times75}\quad\cdots\cdots(107)$$

となる。(v(m)は軸の半徑とす)

摩擦によりて失はれたエネルギーは電氣或は熱になり消散するが大部分は熱になるので，摩擦の大きい軸受は熱せられる。エネルギーの消散を防ぐ事は動力の經濟的使用上極めて肝要な事なれば，この爲に摩擦面は成可く滑かに作り，且つ注油して摩擦係數が小さくなる樣にする。

【例題】 重量 5t を受け毎分100回轉する直徑 100mm の軸あり。摩擦係數を 0.012 とし損失馬力を求めよ。

【解】 107式より

$$HP=\frac{2\pi\mu rWN}{60\times75}=\frac{2\pi\times0.012\times\frac{10}{2}\times5000\times100}{60\times75\times100}=0.42HP$$

33. 機械効率

機械は外部よりエネルギーを受け取り有効な仕事をなすものである。機械に供給したエネルギーを**入力**，機械が外部にした有効な仕事を**出力**と云ふ。機械には必ず摩擦其他の損失を伴ふものであるから常に出力は入力より小さくなる。

エネルギー不滅の法則より

入力＝出力＋機械損失＋運動のエネルギーの變化

の關係がある。機械が等速度運動をする時には運動のエネルギーの變化はない。此の時の出力と入力の比を**機械効率**と云ふ。即ち機械効率 η は

$$\eta=\frac{\text{出力}}{\text{入力}}\times100\% \quad\cdots\cdots\cdots\cdots(108)$$

普通のウオームギヤー，スクリージヤツキ，萬力等は作用する力を取り去ると自然に逆回轉せない事が必要である。この性質を**自己支へ**と云ふ。

今入力を W_i，出力を W_o，損失動力を W_l とすると自己支へなるためには逆に働き得ないことより $W_l \geqq W_o$

$$\eta=\frac{W_o}{W_i}=\frac{W_o}{W_o+W_l}=\frac{1}{1+\frac{W_l}{W_o}}\leqq0.5\cdots(109)$$

即ち**自己支への効率は50％以下なり。**

【例題】1. 五馬力の電動機を附した起重機で一秒間に重量500kgの物體を0.5mの割合で揚げることが出來た。この起重機の機械効率を求めよ。

【解】 入力　75×5＝375kg.m

出力　500×0.5＝250kg.m

効率　$\eta=\frac{\text{出力}}{\text{入力}}=\frac{250}{375}=0.666=66.6\%$

【例題】2. 30m の高さに毎時 300m³ の水を揚ぐるポンプの馬力數を求む。但し揚水馬力の$\frac{1}{4}$が摩擦により損失するものとす。

【解】 水 1m^3 の重量＝1000kg

1秒間の揚水の重量$=\frac{1000\times300}{60\times60}=83.4$kg

1秒間の有効仕事＝83.4×30＝2502kg.m

馬力$=\frac{2502}{75}=33.35$馬力

損失馬力$=\frac{33.35}{4}=8.34$馬力

ポンプの所要馬力＝33.35＋8.34＝41.69馬力

34. 力比及び速比

Aの機械がBの機械に動力を傳へて作業を行ふ場合に

F_a，v_a………Aの機械がBに作用する力及びAの機械の速度

F_b，v_b………Bの機械が作業物に加へる力及び速度

η ……………Bの機械の効率

W_i，W_o……Bの機械の入力及び出力

とすると

$$\eta=\frac{W_o}{W_i}=\frac{F_b v_b}{F_a v_a}\quad\therefore\quad\frac{F_b}{F_a}=\eta\frac{v_a}{v_b}\cdots\cdots(110)$$

$\frac{F_b}{F_a}$を**力比**$\frac{v_b}{v_a}$を**速比**と云ふ。即ち

$$\text{力比}=\text{効率}\times\frac{1}{\text{速比}}\quad\cdots\cdots\cdots\cdots(111)$$

$\eta=1$ 即ち B の機械にエネルギーの損失がないとすれば

$$\text{力比}=\frac{1}{\text{速比}}\quad\cdots\cdots\cdots\cdots(112)$$

以上より機械はエネルギーを増減することは出來ないが，速比を小さくすれば小さい力で大きな力を出すことが出來る。

【例題】 速比$=\frac{1}{18.5}$，効率$=55\%$の機械あり。これに25kg の力を加へれば此機械は何程の力を出し得るか。

【解】 110式より

$$\frac{F_b}{F_a}=\eta\frac{v_a}{v_b}$$

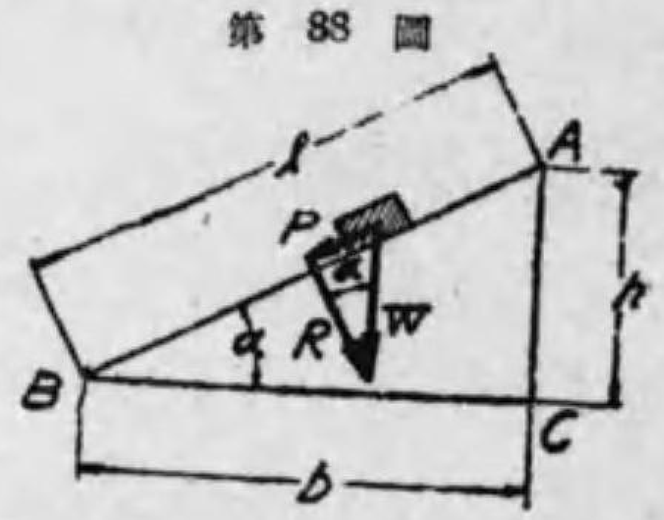
$$F_b=F_a\eta\frac{v_a}{v_b}=25\times0.55\times18.5=254.4\text{kg}$$

35. 斜面上の物體の釣合

A. 斜面上を自己の重さによつて滑り落ちる力に抵抗する力

摩擦角より大きい傾斜角の場合には物體は滑り落ちる。此場合には摩擦力をFとすると次の關係がある。

第 88 圖



$$F=\mu R=\mu W\cos\alpha\cdots(113)$$

摩擦力Fは物體の運動と反對即ち斜面に沿ふて上向きに働くから滑り落ちる力をQとすると

$$Q=P-F=W\sin\alpha-\mu W\cos\alpha=W(\sin\alpha-\mu\cos\alpha)$$

仕事の原理より

$$Pl=(F+Q)l=Wh$$

$$\therefore\ (\mu W\cos\alpha+Q)l=Wh$$

$$l\mu W\cos\alpha+Ql=Wl\sin\alpha$$

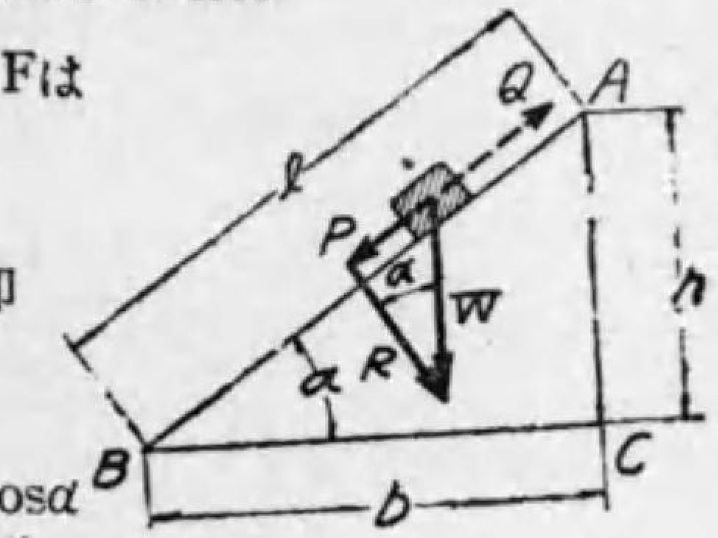
$$Q=W(\sin\alpha-\mu\cos\alpha)$$

然るに $\sin\alpha=\frac{h}{l}$ $\cos\alpha=\frac{b}{l}$

$$Q=W\frac{h-\mu b}{l}\cdots\cdots(114)$$

B. 斜面に平行な力で物體を押し上げる場合

第 89 圖



押し上げる力をQとすると摩擦力Fは

$$F=\mu R=\mu W\cos\alpha$$

此場合Fは物體の運動と反方向即ち下向きに働く。仕事の原理より

$$Ql=Wh+Fl=Wh+\mu Wl\cos\alpha\cdots\cdots(a)$$

此處に $l\cos\alpha=b$

故に $Ql=Wh+\mu Wb$

$$Q=\frac{W(h+\mu b)}{l}\cdots\cdots(115)$$

又115式中

$h=l\sin\alpha$ $b=l\cos\alpha$

なれば

$$Ql=Wl\sin\alpha+\mu Wl\cos\alpha$$

$$Q=W(\sin\alpha+\mu\cos\alpha)\cdots\cdots(116)$$

$$\mu=\tan\lambda=\frac{\sin\lambda}{\cos\lambda}$$

なれば

$$Q=W\frac{\sin\alpha\cos\lambda+\sin\lambda\cos\alpha}{\cos\lambda}$$

$$\therefore\ Q=W\frac{\sin(\alpha+\lambda)}{\cos\lambda}\cdots\cdots(117)$$

力比 $\frac{W}{Q}=\frac{l}{h+\mu b}=\frac{\cos\lambda}{\sin(\alpha+\lambda)}\cdots\cdots(118)$

速比$=\frac{v}{V}=\frac{h}{l}\cdots\cdots(119)$

効率 $\eta=\frac{W}{Q}\times\frac{h}{l}=\frac{W}{Q}\sin\alpha=\frac{\cos\lambda\sin\alpha}{\sin(\alpha+\lambda)}$

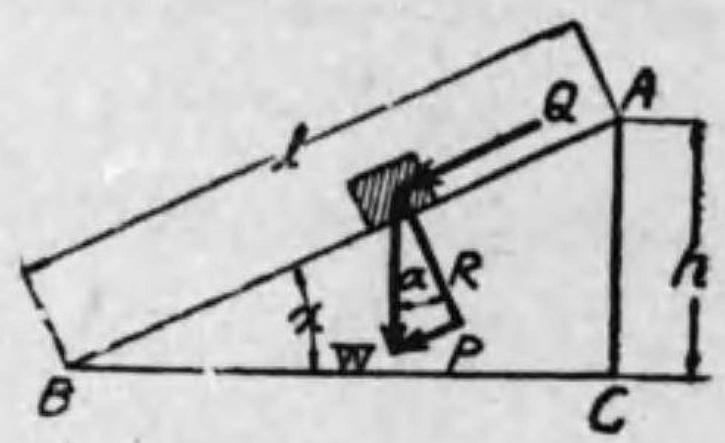
$$=\frac{l}{h+\mu b}\cdot\frac{h}{l}=\frac{h}{h+\mu b}\quad\cdots\cdots(120)$$

(a)の式より摩擦係數μ, 長さlの斜面をQの力でWの物體を押し上げる仕事は同じ摩擦係數μを有する水平面上BCを摩擦力μWに打ち勝つて $BC=b$ の長さ動く仕事と, CよりA迄垂直に持ち上げる仕事の和に等し

C. 斜面に沿ふて物體を押し下す場合

αが摩擦角より小さい場合には, 斜面を物體を押し下すには力を要する。これをQとする摩擦力Fは

第 90 圖



$$F=\mu R=\mu W\cos\alpha$$

物體を斜面を滑らす力はQと共に物體の重量も關係するものなれば仕事の原理より

$$Ql+Wh=Fl$$

$$\therefore\ Ql=Fl-Wh=\mu Rl-Wh$$

$$\therefore\ Ql=\mu lW\cos\alpha-Wh$$

此處に $l\cos\alpha=b$ なれば

$$Ql=W(\mu b-h)$$

$$Q=W\frac{(\mu b-h)}{l}\quad\cdots\cdots\cdots\cdots(121)$$

又 $h=l\sin\alpha$ なれば

$$Ql=\mu Wl\cos\alpha-Wl\sin\alpha$$

$$Q=W(\mu\cos\alpha-\sin\alpha)$$

$\mu=\tan\lambda=\frac{\sin\lambda}{\cos\lambda}$ なれば

$$Q=W\left(\frac{\sin\lambda}{\cos\lambda}\cos\alpha-\sin\alpha\right)=W\frac{\sin\lambda\cos\alpha-\cos\lambda\sin\alpha}{\cos\lambda}$$

$$=W\frac{\sin(\lambda-\alpha)}{\cos\lambda}\quad\cdots\cdots\cdots\cdots(122)$$

$$力比=\frac{W}{Q}=\frac{l}{(\mu b-h)}=\frac{\cos\lambda}{\sin(\lambda-\alpha)}\quad\cdots(123)$$

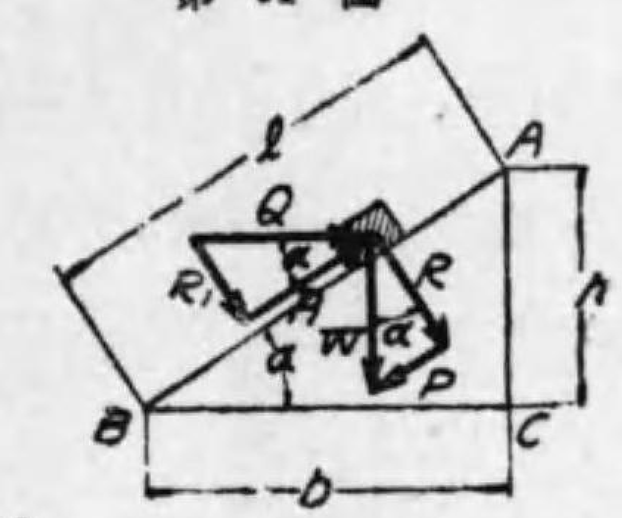
$$速比=\frac{v}{V}=\frac{h}{l}\quad\cdots\cdots\cdots\cdots(124)$$

$$\eta=\frac{Wh}{Ql}=\frac{h}{(\mu b-h)}\quad\cdots\cdots\cdots\cdots(125)$$

D. 水平な力で物體を斜面に沿ふて押し上げる場合

此場合には斜面を直角に押す力は $R+R_1$ となる。故に摩擦力Fは

第 91 圖



$$F=\mu(R+R_1)$$

$$=\mu(W\cos\alpha+Q\sin\alpha)$$

仕事の原理より

$$Qb=Wh+Fl=Wh+\mu(R+R_1)l$$

$$=Wh+\mu(W\cos\alpha+Q\sin\alpha)l$$

$$=Wh+\mu Wl\cos\alpha+\mu Ql\sin\alpha$$

然るに $l\cos\alpha=b$ $\quad l\sin\alpha=h$

故に $Qb=Wh+\mu Wb+\mu Qh$

$$\therefore\ Q(b-\mu h)=W(h+\mu b)$$

$$Q=W\left(\frac{h+\mu b}{b-\mu h}\right)\quad\cdots\cdots\cdots\cdots(126)$$

又 $Ql\cos\alpha=Wl\sin\alpha+\mu Wl\cos\alpha+\mu Ql\sin\alpha$

$$\therefore\ Q(\cos\alpha-\mu\sin\alpha)=W(\sin\alpha+\mu\cos\alpha)$$

$$Q=W\frac{\sin\alpha+\mu\cos\alpha}{\cos\alpha-\mu\sin\alpha}\quad\cdots\cdots\cdots\cdots(127)$$

$\mu=\tan\lambda=\dfrac{\sin\lambda}{\cos\lambda}$ を代入して

$$Q=W\frac{\sin\alpha\cos\lambda+\cos\alpha\sin\lambda}{\cos\alpha\cos\lambda-\sin\lambda\sin\alpha}$$

$$=W\frac{\sin(\alpha+\lambda)}{\cos(\alpha+\lambda)}=W\tan(\alpha+\lambda)\quad\cdots\cdots(128)$$

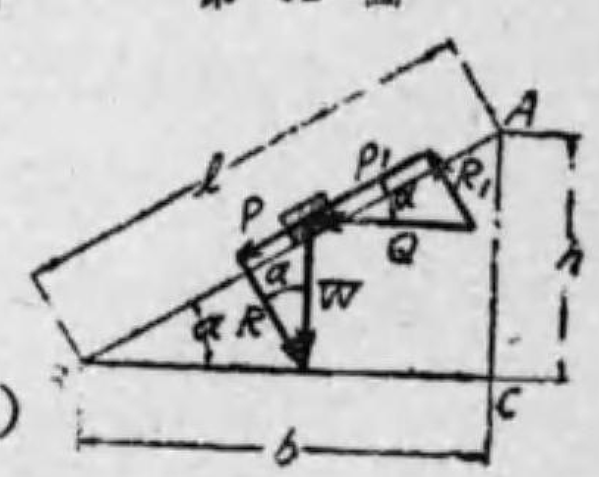
$$\text{力比}=\frac{W}{Q}=\frac{(b-\mu h)}{h+\mu b}=\frac{1}{\tan(\alpha+\lambda)}$$

$$=\cot(\alpha+\lambda)\quad\cdots\cdots\cdots\cdots(129)$$

$$\text{速比}=\frac{v}{V}=\frac{h}{b}=\tan\alpha\cdots\cdots\cdots\cdots(130)$$

$$\text{効率}\quad\eta=\frac{Wh}{Qb}=\cot(\alpha+\lambda)\times\tan\alpha\cdots\cdots(131)$$

E. 水平な力を加へて物體を引下す場合



第 92 圖

此場合は傾斜角が摩擦角より小さい場合である。直壓力は前と反對に$(R-R_1)$となる。

$$F=\mu(R-R_1)=\mu(W\cos\alpha-Q\sin\alpha)$$

仕事の原理より

$$Qb+Wh=Fl$$

$$Qb=Fl-Wh=\mu(W\cos\alpha-Q\sin\alpha)l-Wh$$

前同様にして

$$Qb=\mu Wb-\mu Qh-Wh$$

$$\therefore\quad Q(b+\mu h)=W(\mu b-h)$$

$$Q=W\left(\frac{\mu b-h}{b+\mu h}\right)\cdots\cdots\cdots\cdots(132)$$

又 $Ql\cos\alpha=\mu Wl\cos\alpha-\mu Ql\sin\alpha-Wl\sin\alpha$

$$\therefore\quad Q(\cos\alpha+\mu\sin\alpha)=W(\mu\cos\alpha-\sin\alpha)$$

$$Q=W\frac{\mu\cos\alpha-\sin\alpha}{\cos\alpha+\mu\sin\alpha}\cdots\cdots\cdots\cdots(133)$$

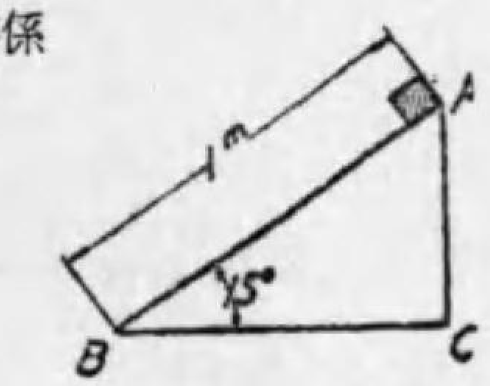
$$\text{力比}=\frac{W}{Q}=\frac{b+\mu h}{\mu b-h}=\frac{1}{\tan(\lambda-\alpha)}$$

$$=\cos(\lambda-\alpha)\cdots\cdots\cdots\cdots(134)$$

$$\text{速比}=\frac{v}{V}=\frac{h}{l}=\sin\alpha\cdots\cdots\cdots\cdots(135)$$

$$\text{効率}\quad\eta=\frac{Wh}{Ql}=\cot(\lambda-\alpha)\sin\alpha\cdots\cdots(136)$$

【例題】 1. 第93圖のやうな斜面を物體が滑り落ちるに2分要したと云ふ。物體と斜面間の摩擦係數を求めよ。



第 93 圖

【解】 滑り落ちんとする力

$f=W\sin 15^\circ-\mu W\cos 15^\circ$

滑り落ちる加速度を a とすると

$\dfrac{W}{g}a=f=W\sin 15^\circ-\mu W\cos 15^\circ$

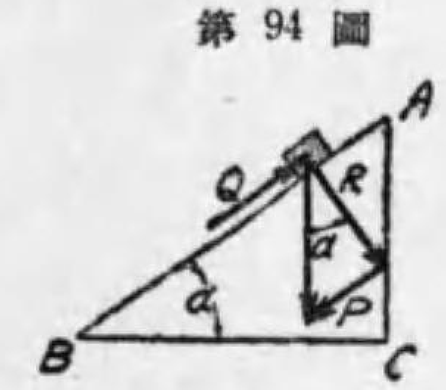
$a=g(\sin 15^\circ-\mu\cos 15^\circ)$

$=9.8\times(0.259-\mu\times 0.965)$

$s=\dfrac{1}{2}at^2$ より $1=\dfrac{1}{2}\times 9.8\times(0.259-\mu\times 0.965)$

$\mu=0.216$

【例題】 2. 或る斜面を重量 100kg の物體を斜面に平行なる力にて引き上げるに摩擦がない時には 50kg で足る。摩擦係數が0.14の時には何程の力を要するか。



第 94 圖

【解】 摩擦がない時には

$F=P=W\sin\alpha$

$\sin\alpha=\dfrac{F}{W}=\dfrac{50}{100}=0.5\qquad\alpha=30^\circ$

摩擦がある時には

$\mu=0.14$

116式の

$\alpha=30^\circ$

なれば

$$Q=W(\mu\cos\alpha+\sin\alpha)=100\times(0.14\times0.866+0.5)=62.3\text{kg}$$

【例題】3. 傾斜角20°, 斜面の長さ20m, 摩擦係數0.14の斜面を100kgの物體を水平な力で押し上げる力仕事及び效率を求めよ。

【解】131式より

$$\eta=\frac{Wh}{Qb}=\cot(\alpha+\lambda)\tan\alpha$$

に於いて

$\tan\lambda=0.14$

なれば $\lambda=8^\circ$

$$\eta=\cot(20^\circ+8^\circ)\tan20^\circ$$
$$=1.88\times0.364=0.685$$

理論上の仕事$=100\times20\sin20=100\times20\times0.342=684$kgm

所要仕事$=\dfrac{684}{0.685}=1000$kgm

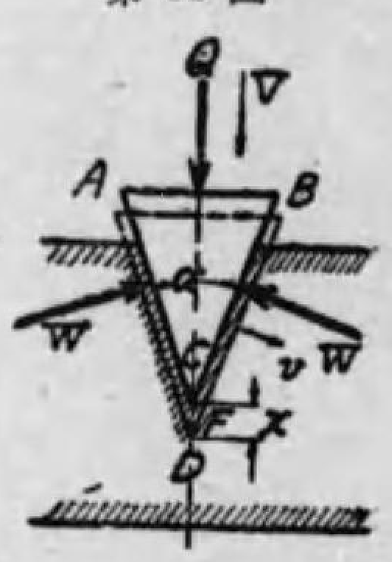
所要力$=\dfrac{\text{仕事}}{\text{斜面の長さ}}=\dfrac{1000}{20}=50$kg

所要力は又128式より

$$Q=W\tan(\alpha+\lambda)=100\times\tan(20+8)=100\times0.531=53.1\text{kg}$$

36. 楔

第95圖



楔は斜面の應用にして機械部分としてはキー又はコッターとして使用せられる。

ABCの二等邊三角形の楔について述べる。

今Qの力で點線の位置迄深さxだけ打込まれ，このため楔の兩側にWの抵抗力が生じたとする。

$$\overline{CF}=x\sin\frac{\alpha}{2}$$

Qのした仕事は

$$Qx=2W\overline{CF}=2Wx\sin\frac{\alpha}{2}$$

$$\frac{W}{Q}=\frac{1}{2\sin\frac{\alpha}{2}}\cdots\cdots(137)$$

然るに楔と相手の物體間には必ず摩擦があるものなれば，この摩擦係數をμとすれば摩擦力Fは

$$F=2\mu W$$

此ために消費する仕事は

$$2\mu W\overline{DF}=2\mu Wx\cos\frac{\alpha}{2}$$

仕事の原理より

$$Qx=2Wx\sin\frac{\alpha}{2}+2\mu Wx\cos\frac{\alpha}{2}$$

$$\textbf{力比}=\frac{W}{Q}=\frac{1}{2\left(\sin\frac{\alpha}{2}+\mu\cos\frac{\alpha}{2}\right)}\cdots\cdots(138)$$

$$\textbf{速比}=\frac{v}{V}=\frac{2x\sin\frac{\alpha}{2}}{x}=2\sin\frac{\alpha}{2}\cdots\cdots(139)$$

$$\textbf{效率}\quad\eta=\frac{W}{Q}\times2\sin\frac{\alpha}{2}=\frac{\tan\frac{\alpha}{2}}{\mu+\tan\frac{\alpha}{2}}\cdots(140)$$

【例題】木材に25°の楔を打込む場合に $W=300$kg とすれば Q は何程となるか。但し $\mu=0.36$

【解】138式より

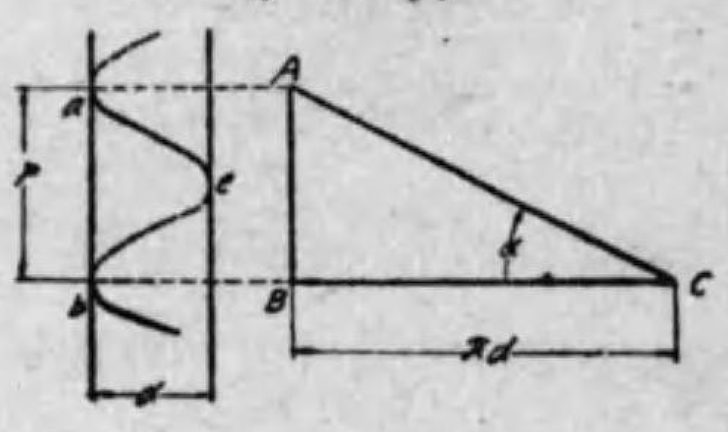
$$\frac{W}{Q}=\frac{1}{2\left(\sin\frac{\alpha}{2}+\mu\cos\frac{\alpha}{2}\right)}=\frac{1}{2(\sin12.5+0.36\cos12.5)}$$

$$=\frac{1}{2\times 0.568}$$

$$Q=2\times 0.568\times 300=340.8\text{kg}$$

37. ね　ぢ

第 96 圖



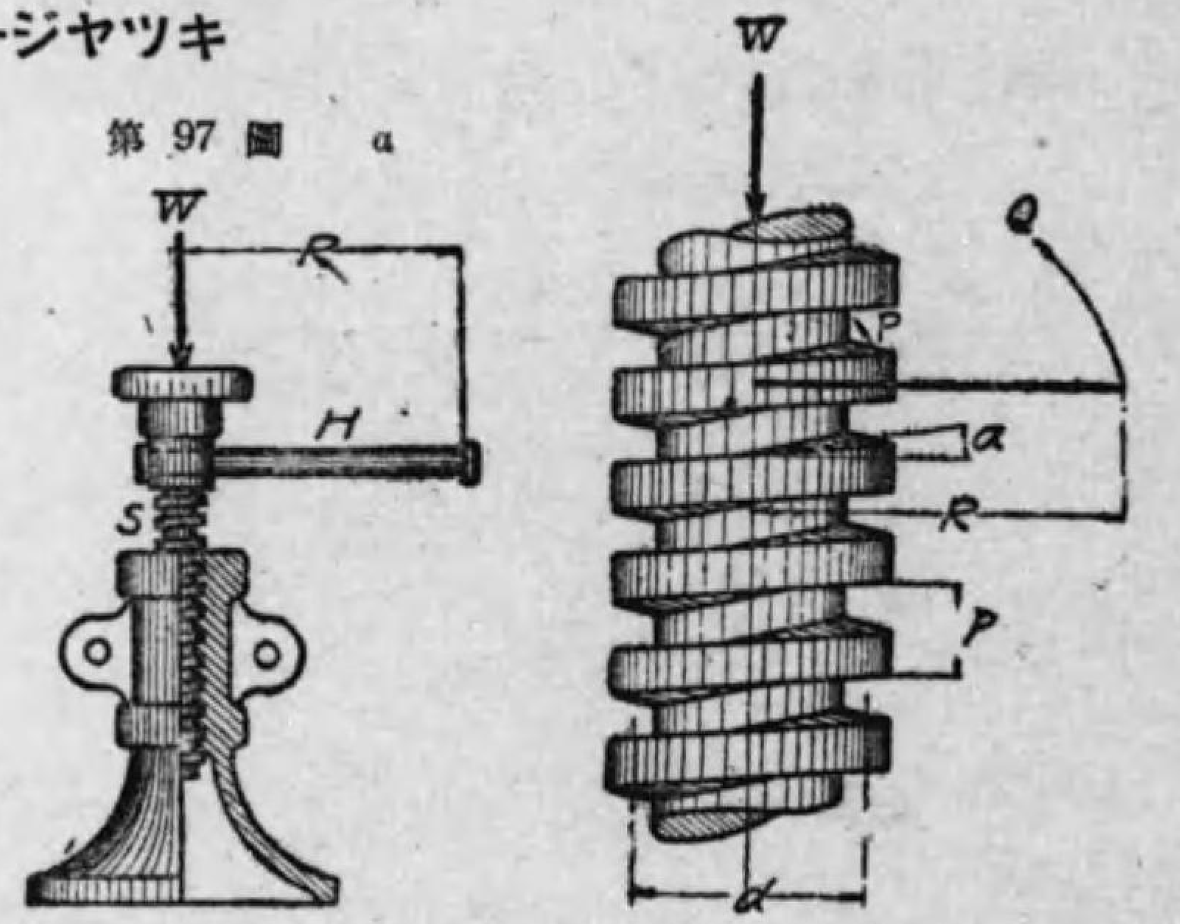
ねぢは斜面の應用にして AC の斜面が圓筒上に aeb のねぢ山を生ずる。底面BCが πd の時 AB をねぢの刻みと云ふ。

$$\tan\alpha=\frac{p}{\pi d}\ \cdots\cdots\cdots\cdots(141)$$

次にねぢの應用について述べる。

I　スクリユージヤツキ

第 97 圖　a　b



スクリユージヤツキは第97圖 a のやうな裝置でハンドルHにQの力を加へて回轉すると，ねぢが回轉してWの重量を上げる，ハンドルを廻すことは丁度斜面を水平の力で物押を押し上げると同樣である。今

d…ねぢの平均直徑　　p…ピッチ

μ…ねぢ間の摩擦係數　　Q…ハンドルに加へる力

R…ハンドルの長さ

P…Qによりねぢの平均半徑上に生ずる力

とすると

$$QR=P\frac{d}{2}\qquad \mathbf{Q=P\frac{d}{2R}}\ \cdots\cdots\cdots(142)$$

128式より　$P=W\tan(\alpha+\lambda)$

$$\therefore\ \mathbf{Q=W\tan(\alpha+\lambda)\frac{d}{2R}}\ \cdots\cdots\cdots(143)$$

或は　$$\frac{\mathbf{Q}}{\mathbf{W}}=\frac{d}{2R}\left(\frac{\tan\alpha+\tan\lambda}{1-\tan\alpha\tan\lambda}\right)\ \cdots\cdots\cdots(144)$$

然るに　$\tan\alpha=\dfrac{p}{\pi d}$　　$\mu=\tan\lambda$

$$\therefore\ \frac{\mathbf{Q}}{\mathbf{W}}=\frac{d}{2R}\left(\frac{p+\mu\pi d}{\pi d-\mu p}\right)\ \cdots\cdots\cdots(145)$$

$$\textbf{力比}\ \ \frac{\mathbf{W}}{\mathbf{Q}}=\frac{2R}{d}\left(\frac{\pi d-\mu p}{p+\mu\pi d}\right)\ \cdots\cdots\cdots(146)$$

物體を下す場合には134式に相當するから

$$P=W\tan(\lambda-\alpha)$$

又　$Q=P\dfrac{d}{2R}$

Pを代入して

$$\mathbf{Q=W\tan(\lambda-\alpha)\frac{d}{2R}}\ \cdots\cdots\cdots(147)$$

$$\frac{Q}{W}=\frac{d}{2R}\tan(\lambda-\alpha)$$

然るに　$\tan(\lambda-\alpha)=\dfrac{\tan\lambda-\tan\alpha}{1+\tan\alpha\tan\lambda}$

$$\therefore\ \frac{\mathbf{Q}}{\mathbf{W}}=\frac{d}{2R}\left(\frac{\tan\lambda-\tan\alpha}{1+\tan\lambda\tan\alpha}\right)$$

$$=\frac{d}{2R}\left(\frac{\mu\pi d-p}{\pi d+\mu p}\right)\ \cdots\cdots\cdots(148)$$

故に　$$\textbf{力比}=\frac{\mathbf{W}}{\mathbf{Q}}=\frac{2R}{d}\left(\frac{\pi d+\mu p}{\mu\pi d-p}\right)\ \cdots\cdots\cdots(149)$$

上式に於いてWに對しQ<0なればハンドルに力を加へなくともWは自身の重量によつて下ることになる。即ち Q=0 の時が此極限である。

148式より

$$Q=W\frac{d}{2R}\ \frac{(\mu\pi d-p)}{(\pi d+\mu p)}\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(150)$$

又

$$Q=W\frac{d}{2R}\left(\frac{\tan\lambda-\tan\alpha}{1+\tan\lambda\tan\alpha}\right)\cdots\cdots\cdots\cdots(151)$$

上式より Q=0 なるためには

$$\mu\pi d-p=0$$

或は　$\tan\lambda-\tan\alpha=0$

即ち　$\mu\pi d-p\leqq 0$

或は　$\tan\lambda-\tan\alpha\leqq 0$

なれば自己支へはなくなる。

スクリユーヂヤツキの效率は次の如くなる

ハンドル一回轉につきねぢは1ピツチ上下するのであるから

$$速比=\frac{p}{2\pi R}\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(152)$$

$$效率\quad \eta=\frac{W}{Q}\ \frac{p}{2\pi R}=\frac{2R}{d}\ \frac{1}{\tan(\lambda+\theta)}\ \frac{p}{2\pi R}$$

$$=\frac{p}{\pi d}\ \frac{1}{\tan(\alpha+\lambda)}=\frac{\tan\alpha}{\tan(\alpha+\lambda)}$$

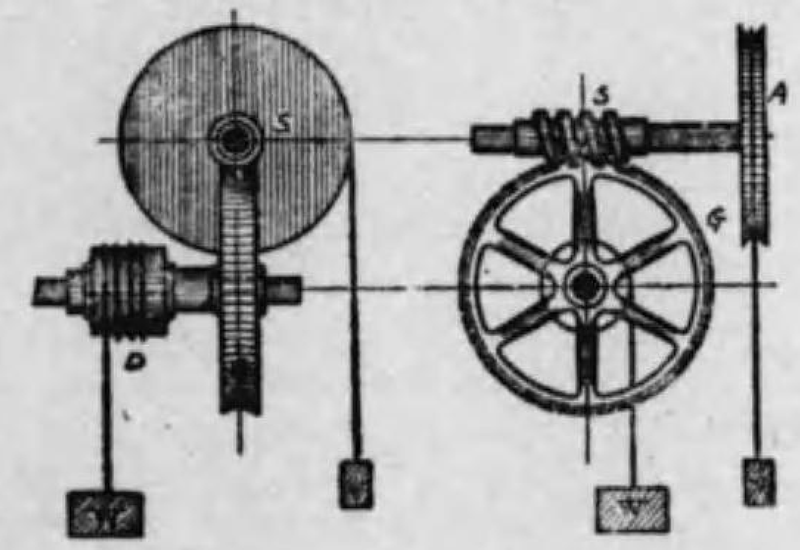
$$=\frac{\pi d-p\pi}{p+\mu\pi d}\ \frac{p}{\pi d}\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(153)$$

II　ウオーム利用捲揚機械

第99圖はウオームを利用した捲揚機にしてウオームは一重ねぢとす。今

p…ピツチ

第 98 圖



第 99 圖

R…ハンドホイールの半徑

N…ウオームホイールの齒數

r…荷重のかゝる軸の半徑

w…ハンドホイールに加へる力

とすればウオームが一回轉すれば，一重ねぢなればウオームホイールは一齒回轉する。即 $\frac{1}{N}$ 回轉する。二重ねぢの時は $\frac{2}{N}$ 回轉する。ウオームのねぢ數を n とするとハンドルの變位 $2\pi R$ に對し軸の變位は $\frac{n}{N}\times 2\pi r$ となる。仕事の原理より

$$2\pi Rw=2\pi rW\frac{n}{N}$$

$$力比=\frac{W}{w}=\frac{R}{r}\ \frac{N}{n}\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(154)$$

$$速比=\frac{\frac{n}{N}\times 2\pi r}{2\pi R}=\frac{r}{R}\ \frac{n}{N}\ \cdots\cdots\cdots\cdots(155)$$

$$效率\quad \eta=\frac{2\pi rWn}{2\pi RwN}=\frac{W}{w}\ \frac{r}{R}\ \frac{n}{N}\ \cdots\cdots(156)$$

【例題】1.　スクリユーヂヤツキがある。$d=37$mm, $p=8$mm, R=30cmにて2tの重量を持上げんとす。荷重を押上げる力，力比，速比，效率及び下す場合の力を求めよ。但し $\mu=0.14$ とす。

【解】 押上げる場合143式

$$Q=W\tan(\alpha+\lambda)\frac{d}{2R}$$

に於いて $\tan\lambda=\mu=0.14$

$$\lambda=8^\circ$$

又 $\tan\alpha=\frac{p}{\pi d}=\frac{8}{\pi\times37}=\frac{8}{116.3}=0.069 \qquad \alpha=4^\circ$

$$\therefore\ Q=W\tan(\alpha+\lambda)\frac{d}{2R}=2000\times\tan(4+8)\frac{3.7}{2\times30}=26.2\text{kg}$$

$$\text{力比}=\frac{W}{Q}=\frac{2000}{26.2}=76.4$$

$$\text{速比}=\frac{v}{V}=\frac{p}{2\pi R}=\frac{0.8}{2\pi\times30}=0.00424$$

$$\text{効率}\quad \eta=\frac{\tan\alpha}{\tan(\alpha+\lambda)}=\frac{0.069}{0.21256}=0.324$$

下す時の力

147式より

$$Q=W\tan(\lambda-\alpha)\frac{d}{2R}=2000\times\tan(8-4)\times\frac{3.7}{2\times30}=8.62\text{kg}$$

【例題】 2. ウオーム捲上機で R=9吋, $r=2\frac{1}{4}$吋, N=30, $n=2$, $\eta=55\%$ として20lbs, の力にて何程の重量が上げ得られるか。

【解】 156式

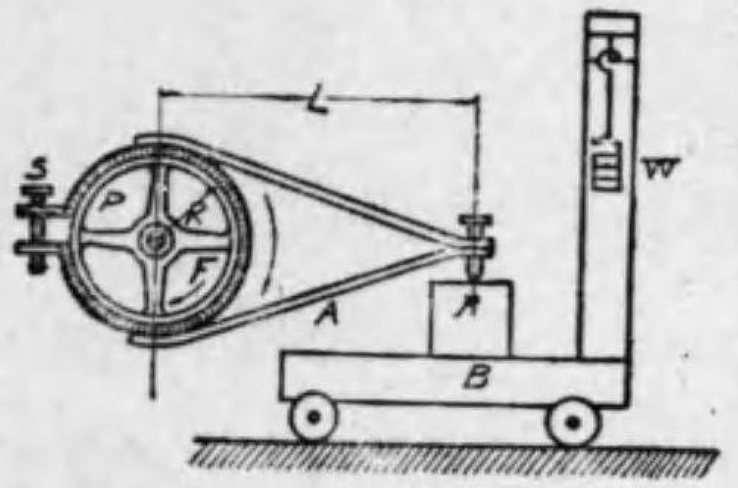
$$\eta=\frac{Wrn}{wRN}\quad \text{より}\quad 0.55=\frac{W\times2\frac{1}{4}\times2}{20\times9\times30}$$

$$W=\frac{55}{100}\times20\times\frac{9\times30}{2\times2\frac{1}{4}}=660\text{lbs}$$

38. 摩擦動力計

原動機の動力の大きさを測定する計器を動力計と云ふ。第100圖は摩擦を利用して，動力を測定する動力計なれば摩擦動力計と云ふ。

第 100 圖



F…制動車輪に作用する摩擦力(kg)

R…制動車輪の半徑(m)

N…毎分の回轉數

L…桿杆の長さ(m)

W…臺秤に表はれる力(kg)

とすると機械の馬力は

$$\text{H.P}=\frac{2\pi RNF}{60\times75}=\frac{2\pi NLW}{60\times75}\ \cdots\cdots\cdots\cdots(157)$$

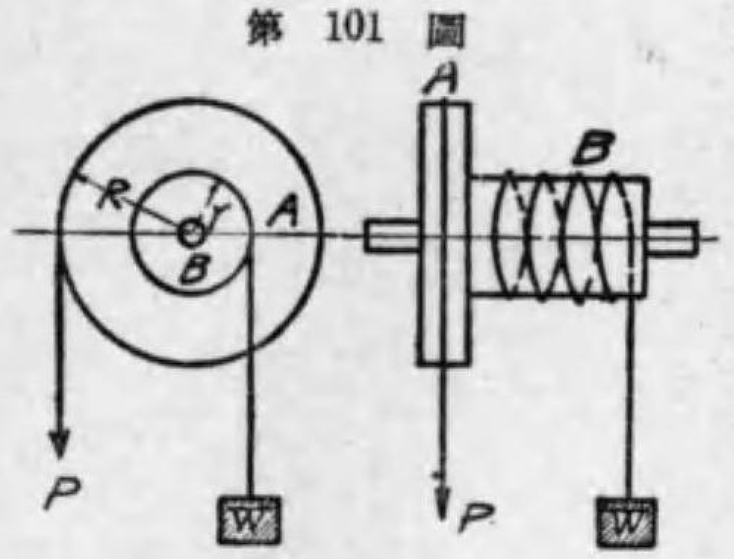
【例題】 毎分回轉數400, 出力20馬力の石油發動機の動力を測定するに, 桿杆の長さ1.2mの摩擦動力計を使用すると，臺秤に表はれる力を求めよ。

【解】 157式より

$$W=\frac{\text{H.P}\times60\times75}{2\pi NL}=\frac{20\times60\times75}{2\pi\times400\times1.2}=62.5\text{kg}$$

39. 輪 軸

第 101 圖



輪軸は一種の起重機にて，小さい力で重い物體を揚げる事が出來る。

構造は大なる直徑の圓板Aに直徑の小さい軸を固定し，AとBには反對方向に綱を巻きつけてある。

今圓板にP, 軸にWの力を加へて釣合にあるものとすればモーメントより

$$PR=Wr$$

依つて $\text{力比}=\frac{W}{P}=\frac{R}{r}\ \cdots\cdots\cdots\cdots(158)$

即ち力比は半徑に反比例す。

$$速比=\frac{2\pi r}{2\pi R}=\frac{r}{R}\cdots\cdots(159)$$

$$効率\quad \eta=\frac{2\pi r W}{2\pi RP}=\frac{W}{P}\times\frac{r}{R}$$

$$=力比\times速比\cdots\cdots(160)$$

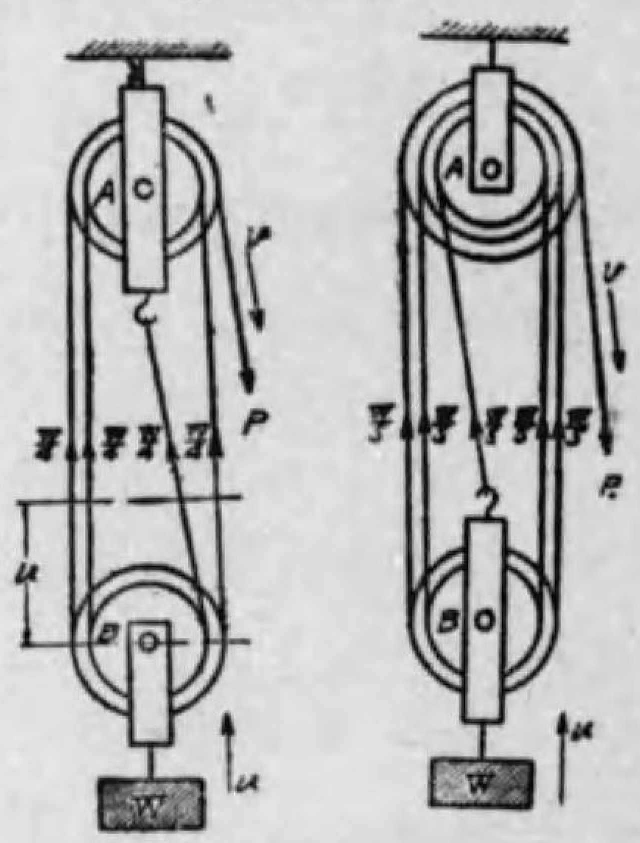
上式よりRを大きく，rを小さくする程小なる力で重いものを揚げることが出來る。然し物體の揚る速度は小さくなる。

40. 滑　車

I 組立滑車

組立滑車は定滑車，動滑車共等しい直徑の車を同一の軸に取つけたものである。各綱は動滑車と定滑車間の距離が直徑に比して大なる場合には，平行と見做すことが出來る。各綱に生ずる張力は自由端を引く力Pに等し。

第 102 圖



今Wの物體を引き上げるにn本の綱を用ひ，自由端をvの等速度で引張るとすれば，平行力の釣合より

$$W=nP \qquad \frac{W}{P}=n$$

$$P=\frac{W}{n}\cdots\cdots(161)$$

となる。實際の場合には軸と車の間の摩擦のため

$$P>\frac{W}{n}$$

でなくては物體を揚げることは出來ない。

次に物體がuの速度で上るために自由端をvで引くとすれば

$$nu=v\cdots\cdots(162)$$

の關係でなくてはならぬ。又軸と車の間に摩擦がないものとすると

$$Wu=Pv$$

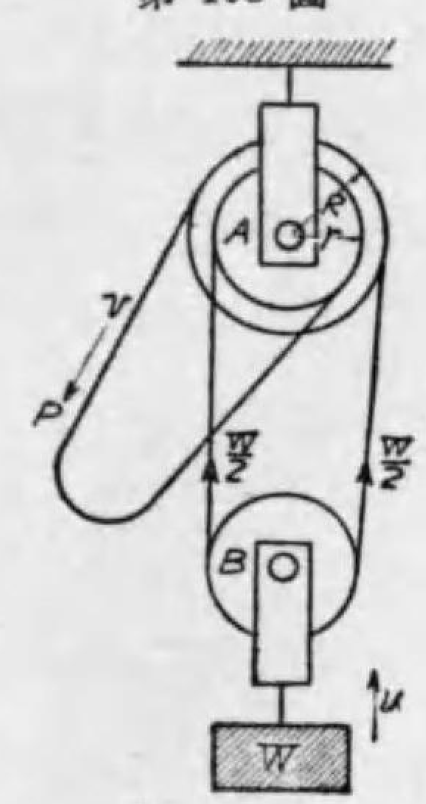
$$\frac{W}{P}=\frac{v}{u}\cdots\cdots(163)$$

即ち力比が大きくなる程速比は小さくなる。軸と軸受間に摩擦があればエネルギーの一部を損失するから効率ηは

$$\eta=\frac{Wu}{Pv}=\frac{W}{nP}\cdots\cdots(164)$$

となる。

第 103 圖



II 差動滑車

第103圖のやうに一個の動滑車と二個の直經の異る定滑車を鎖にて連結せるものを差動滑車と云ふ。

定滑車の中心に對するモーメントをとれば

$$PR+\frac{W}{2}r=\frac{W}{2}R$$

$$P=\frac{W}{2}\ \frac{R-r}{R}$$

$$\frac{W}{P}=\frac{2R}{R-r}\cdots\cdots(165)$$

上式より$R-r$の値を小さくすると重いものを揚げることが出來る。實際の場合には軸と車の間に摩擦があるために力比は上式よりも小さくなる。

次にPにて鎖を引くとABの一回轉にて鎖は$2\pi R$上つて$2\pi r$下り結果Wを吊して居る鎖は$2(R-r)$短縮される。Wの上る高さ

は其半分 $\pi(R-r)$ なれば速比は

$$\frac{v}{u}=\frac{2\pi R}{\pi(R-r)}=\frac{2R}{R-r}\quad\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(166)$$

故に効率 η は

$$\eta=\frac{Wu}{Pv}=\frac{W}{P}\cdot\frac{R-r}{2R}\quad\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(167)$$

となる。

【例題】1. 第102圖の滑車にて 62lbs, の物體を引き上げるに摩擦がないものとするとPの値は何程となるか。又Pが25.5lbs であつたとすると効率を求めよ。

【解】 $n=4$　　$W=62\text{lbs}$,

$$P=\frac{W}{n}=\frac{62}{4}=15.5\text{lbs},$$

$$\eta=\frac{W}{nP}=\frac{62}{4\times25.5}0.608=60.8\%$$

【例題】2. 差動滑車にて $R=9.6\text{cm}$　$r=9\text{cm}$, $W=1\text{t}$, $P=80\text{kg}$ とす。η 及び速比を求めよ。

【解】 $$\eta=\frac{W}{P}\cdot\frac{R-r}{2R}=\frac{1000}{80}\times\frac{9.6-9}{2\times9.6}=0.39=39\%$$

$$\frac{v}{u}=\frac{2R}{R-r}=\frac{2\times9.6}{9.6-9}=32$$

練習問題

(1) 水平面上にある重量 80kg の物體を，30kg の力で引張つた所動き出したといふ。摩擦係數を求めよ。 **(ans. 0.375)**

(2) 鐵板上に載せた重量 15kg の物體を動かすに，4kg の水平力を要すといふ。摩擦係數を求めよ。 **(ans, 0.267)**

(3) $\mu=0.155$ の摩擦角を求めよ。 **(ans. 8°55′)**

(4) 重量 50kg の物體を摩擦係數 0.2 の水平面に載せ，水平と 45° の方向に引張つて動かすとすれば，引張る力及水平面を押す力を求めよ。 **(ans. 11.78kg, 41.6kg)**

(5) 或重量の物體が水平面上に置かれて居る。これに 20kg の水平力を

加へると動かすことが出來る。然るに水平に對して30°の方向に引くときは，18kg の力を要すといふ物體の重量及摩擦係數を求めよ。 **(ans. 41kg, μ=0.49)**

(6) 重量 200kg の物體を車輪の直徑 80cm, 重量 20kg の荷車に載せて引く時の牽引力を求めよ。但し $f=0.02$cm とす。 **(ans. 0.11kg)**

(7) 軌道上をトロッコに土砂 1/2t を積みて運搬せんとするに，車體の重量を 100kg とし，車の直徑を 40cm とすれば，牽引力何程となるか。但 $f=0.01$cm とす。 **(ans. 0.3kg)**

(8) 1/800 の勾配の軌道上を，荷重 8000kg, 車輪の重量 2000kg の車輛20輛を連結して，等速度にて上る時の牽引力を求めよ。 但車輪の半徑 50cm, 車軸の直徑 5cm, $\mu=0.06$, $f=0.05$cm とす。 **(ans. 1410kg)**

(9) 重量 9.5t の物體を摩擦係數 0.17 の水平面上を，120m/sec の速度で動かす工率を求めよ。 **(ans. 5.88馬力)**

(10) 重さ 10t の發電機が半徑 10cm の軸にて支へられ，10回轉/分 す。軸と軸承の摩擦係數を 0.1 とすると，摩擦により損失する馬力を求めよ。 **(ans. 1.396馬力)**

(11) 直徑 150mm の軸が重量 3t を受けて 80回轉/分 す。摩擦係數を 0.012 とすれば損失馬力何程となるか。 **(ans. 0.303馬力)**

(12) 或る電動機が 4.34 キロワットの電力を消費して，5 馬力を出すといふ。効率を求めよ。 **(ans. 85%)**

(13) 或機械に於て理論上800呎，封度の仕事が得られる可きに，實際に560呎，封度の仕事をしたり。効率を求めよ。 **(ans. 70%)**

(14) 深さ 600ft の坑内より毎分224封度の割合にて石炭を揚げる捲上機の馬力を求めよ。但し効率を60%とす。 **(ans. 6.78馬力)**

(15) 或るガソリン車のエンヂンの工率は 500 馬力にして，牽引力は 315kg, 速度は毎時 300km なりといふ。ガソリン車の出力及び効率を求めよ。 **(ans. 350馬力, η=70%)**

(16) 或る機械に於て速比 1/12.5 で20kg の力を加へて 112kg の力を出したといふ。力比及び効率を求めよ。 **(ans. 力比5.6, η=44.8%)**

(17) 或る卷揚機で速比 1/23, $\eta=74\%$ である。今 350kg の荷重を釣り揚げんとすればこれに加へる力及力比を求めよ。

(ans. 20.6kg, 力比17)

(18) 傾斜角20°の斜面上に 100kg の物體を載せ, これを引上げるに斜面と 30° の角度に引き, 50kg の力を要するといふ。斜面と物體間の摩擦係數を求めよ。 **(ans. $\mu=0.132$)**

(19) 重量 100kg の物體を傾斜角45°の斜面に載せた場合, これを斜面に平行に支へる力と, 水平に支へる力を比較せよ。

(ans. 斜面に平行な力49.5kg, 水平な力53.9kg)

(20) 傾斜角10°, 摩擦係數 0.2 の斜面上を水平な力にて物體を押上げる時の力比及び効率を求めよ。 **(ans. 力比25, 効率15%)**

(21) 重量 50kg の物體を傾斜角 10° の斜面上に載せ, 水平な力にて引上げんとす水平な力の大きさ及び効率を求めよ。但し $\mu=0.15$ とす。

(ans. Q=16kg, $\eta=54\%$)

(22) 勾配 1/12 の楔を, 2.24t の力にて木材に打込む場合に, $\mu=0.1$ とすれば引裂く力及び効率は何程となるか。

(ans. W=31.36t, $\eta=29.4\%$)

(23) スクリユージヤツキがある $d=46$mm, $p=12$mm, R=60cm とす。3t の荷重を押上げる力及び押し下す力を求めよ。但し $\mu=0.09$ とす。

(ans. 20kg, 1kg)

(24) $d=4$吋, $d'=1$吋, R=4呎 のスクリユージヤツキがある。Q=600lbs の力を加へたならば, 何程の荷重を上げ得るか。又効率は何程となるか。但し $\mu=0.1$ とす。 **(ans. $\eta=44\%$, W=3.55t)**

(25) ウオーム利用卷上機に於て, ハンドルの直徑 8 吋, 荷重のかゝる軸の直徑 5 吋, ウオームホイールの齒數72である。58lbs の力を加へて 3t(1t=2240lbs)の荷重を上げ得たといふ。効率を求めよ。

(ans. 50.3%)

(26) L=1.2m の摩擦動力計にて出力30馬力, 300回轉/分 の發動機の動力を測定せば, 台秤に表はれる重量何程となるか。 **(ans. 59.7kg)**

(27) 組立滑車あり。動滑車には 6 本の綱が懸つてゐる。重量 500kg の荷重を引上ぐるには何程の力を要するか。但し効率を70%とす。

(ans. 120kg)

(28) 第103圖の差動滑車に於て R=9.6cm $r=9$cm にして, 80kg の力にて重量 1t の荷重を引上げることが出來た。速比及効率を求めよ。

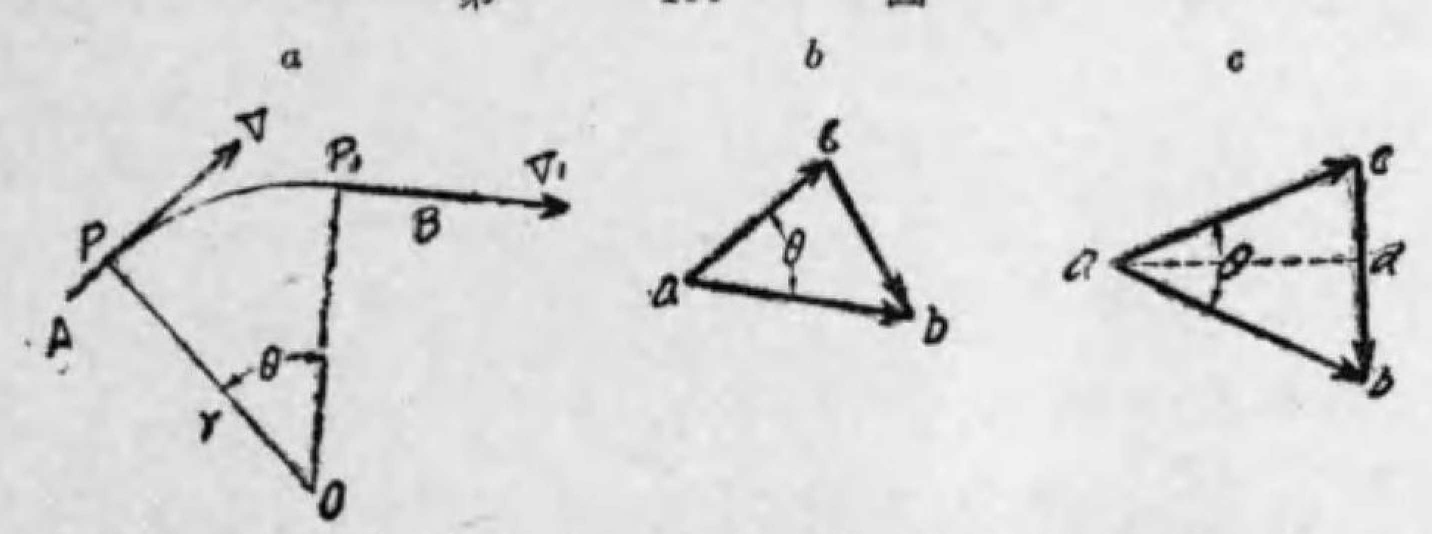
(ans. 速比32, $\eta=39\%$)

第八章 回轉運動

41. 法線加速度

物體が半徑 r の圓周に沿ふて運動する場合に, 物體は第104圖 a の圓周上の一點Pにある時はPVの方向に, P_1 にある時には P_1V_1 の

第 104 圖



方向に運動せねばならぬ。P にある物體が P_1 に來ると PV の方向に進まず, 方向を變へて P_1V_1 の方向に進むには加速度を伴ふ可きである。加速度を求めるには第104圖 b のやうに P にある時の速度 V をベクトル ac で, P_1 にある時の速度 V_1 をベクトル ab で表はすと cb は速度變化のベクトルである。P より P_1 に達する迄の時間を t とすると, 平均加速度 α は

$$\alpha=\frac{\overline{cb}}{t}$$

$\overline{ac}=\overline{ab}$ とすると

$$\overline{cb}=2\overline{ac}\ \sin\frac{\theta}{2}$$

$\overline{ac}$ の速度を V, P の角速度を ω とすると，

$$\overline{cb}=2V\sin\frac{\theta}{2}\qquad t=\frac{\theta}{\omega}$$

$$\therefore\ \alpha=\frac{\overline{cb}}{t}=\frac{2V}{t}\sin\frac{\theta}{2}=\frac{2V\omega}{\theta}\sin\frac{\theta}{2}$$

$$=\frac{2V\omega}{r\theta}r\sin\frac{\theta}{2}$$

$$r\theta=\widehat{PP'}\qquad 2r\sin\frac{\theta}{2}=弦PP'$$

即ち $\alpha=V\omega\frac{弦PP'}{弧PP'}$

θ が極小さい場合には

$$\frac{弦PP'}{弧PP'}\fallingdotseq 1$$

$$\therefore\ \alpha=V\omega=\omega^2r=\frac{V^2}{r}\ \cdots\cdots(168)$$

α の大きさ及び方向は，ベクトル $\overline{cb}$ にて表はされ，$\widehat{PP'}$ が極めて接近せる場合には $\overline{cb}$ は半徑方向と一致し中心Oに向ふ。即ち，物體が圓周上を等速度で運動する場合には，中心に向ふ第168式にて示される大きさの加速度を有するもので，これを放射加速度と云ふ。

42. 遠 心 力

物體を圓弧に沿ふて運動させるには，絶えず中心に向ふ力を加へ，放射加速度を生ぜしめねばならぬ。此の力を**求心力**と云ふ。

物體に求心力が作用すると，其反作用として物體にはこれと方向反對にして，大きさの等しい力を生ずる。これを**遠心力**と云ふ。

求心力及び遠心力は放射加速度によつて生ずるものなれば，重量Wkgの物體が半徑rmの圓運動をするとき生ずる遠心力Fkgは第168式より

$$\textbf{遠心力(kg)＝求心力(kg)}=\frac{W}{g}\alpha=\frac{W}{g}\omega^2r$$

$$=\frac{W}{g}\frac{V^2}{r}\ \cdots\cdots(169)$$

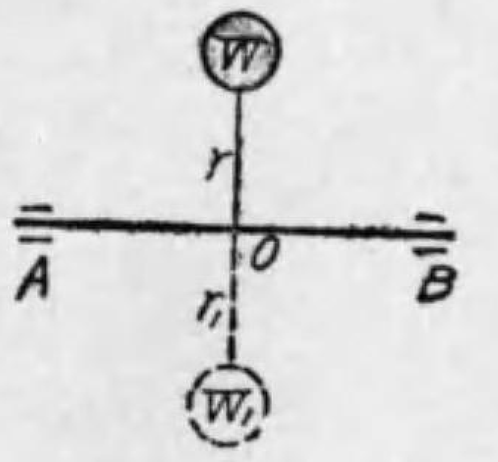
【例題】 半徑2mの糸の一端に重量100gの物體をむすび，他端を以つて100rad/minの圓運動をさせると糸に生ずる張力は何程となるか。

【解】 糸に生ずる張力は遠心力である。

$$F=\frac{W}{g}\omega^2r=\frac{0.1}{9.8}\times\left(\frac{2\pi\times100}{60}\right)^2\times2=3.7\text{kg}$$

43. 回轉體の釣合

第 105 圖



軸ABより r の距離に W の重量があるとすると，軸は回轉してWが鉛直に向つて靜止する。Wの回轉面でOWの延長上 r_1 の位置に重量W_1を加へ

$$Wr=W_1r_1\ \cdots\cdots(169)$$

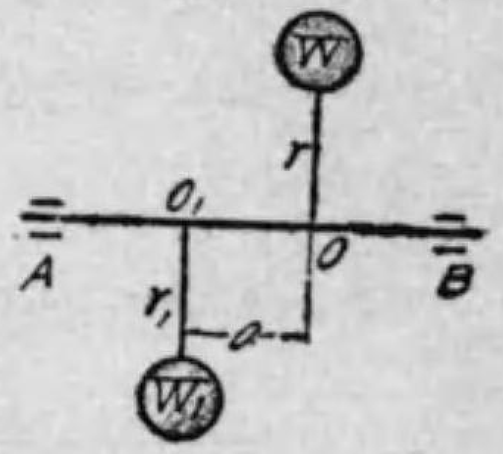
となると軸は如何なる位置にも靜止する。W_1 は OW の延長上でなく第106圖の如くOより a だけ離れた oW と同一平面の位置に加へても釣合ひを保つ。斯かる釣合ひを**靜止の釣合**と云ふ。

これより靜止の釣合をさせるには，重い側から重量 W を取り去るか，又は反對側に Wr のモーメンに等しいモーメントを加へて全體の重心が回轉軸に來る樣にすればよい。

然し第106圖の如き場合に軸が角速度 ω で回轉して居ると，各

重錘の遠心力によるモーメントにより，軸は平衡を保つ事が出來ず，軸受には回轉性の壓力を，軸には曲げ作用を生じ，機械各部に振動を生ずる。

第 106 圖



即ち靜的釣合ひのとれて居るもの必ず**動的釣合**ひがとれて居るとは限らない。靜的釣合ひは單純であるが動的釣合は複雜である。機械各部の安全と運轉の靜肅との爲には機械各部は充分動的平衡がとれて居らねばならぬ。

A. 同一回轉面上にある回轉體の釣合

第105圖に於いて軸ABが角速度ωで回轉し，軸の一方に不平衡重量があり，これを動的に釣合はせようとしてW_1を加へたものとする。各重錘に生ずる遠心力f, f_1(kg)は

$$f=\frac{W}{g}r\omega^2$$

$$f_1=\frac{W_1}{g}r_1\omega^2$$

軸が釣合ふ爲には

$$f=f_1$$

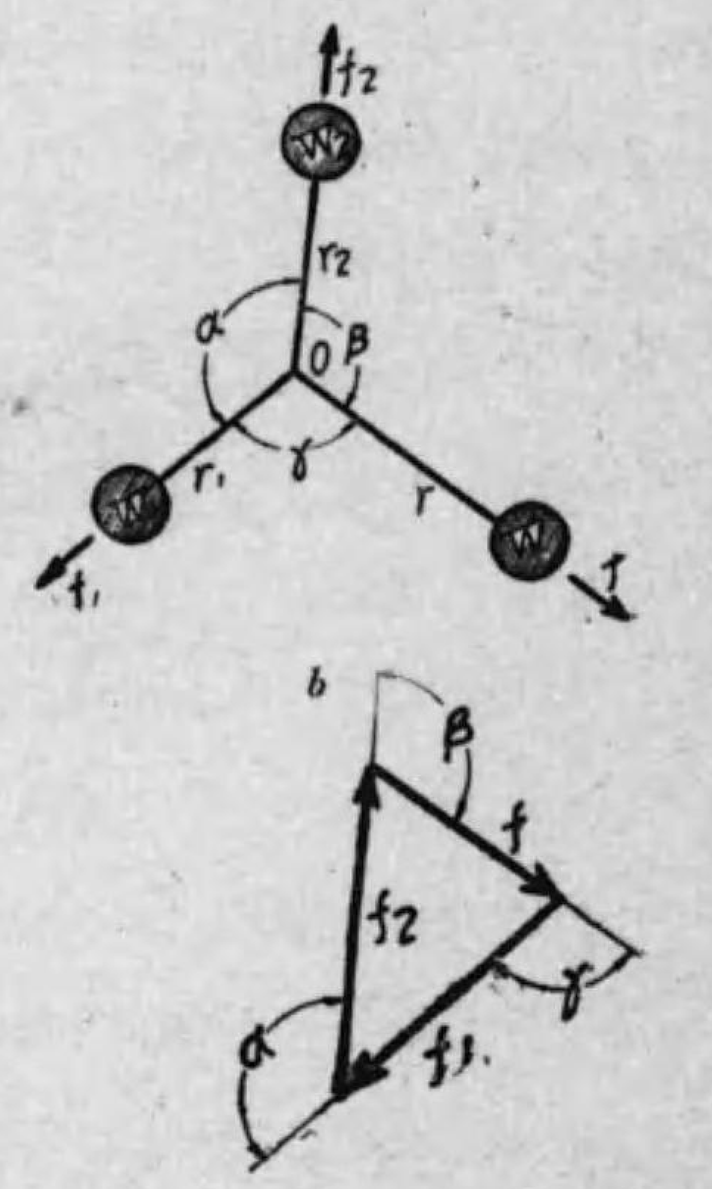
即ち

$$\frac{W}{g}r\omega^2=\frac{W_1}{g}r_1\omega^2$$

$$Wr=W_1r_1$$

$$\frac{W}{W_1}=\frac{r_1}{r}\quad\cdots\cdots\cdots\cdots(171)$$

第 107 圖 a



即ち W 及びW_1の大きさを半徑に反比例して，軸線に對して正反對の位置に置けば完全な動的釣合がとれる。

第107圖の如く不平衡重量 W_1W_2

があり，Wの附加により釣合はし得たとする。W_1W_2及びW による遠心力を f_1, f_2, f (kg) とすれば

$$f=\frac{W}{g}\omega^2r\qquad f_1=\frac{W_1}{g}\omega^2r_1\qquad f_2=\frac{W_2}{g}\omega^2r_2$$

32式より

$$\frac{f}{\sin\alpha}=\frac{f_1}{\sin\beta}=\frac{f_2}{\sin\gamma}$$

$$\frac{\frac{W}{g}\omega^2r}{\sin\alpha}=\frac{\frac{W_1}{g}\omega^2r_1}{\sin\beta}=\frac{\frac{W_2}{g}\omega^2r_2}{\sin\gamma}$$

$$\frac{Wr}{\sin\alpha}=\frac{W_1r_1}{\sin\beta}=\frac{W_2r_2}{\sin\gamma}\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(172)$$

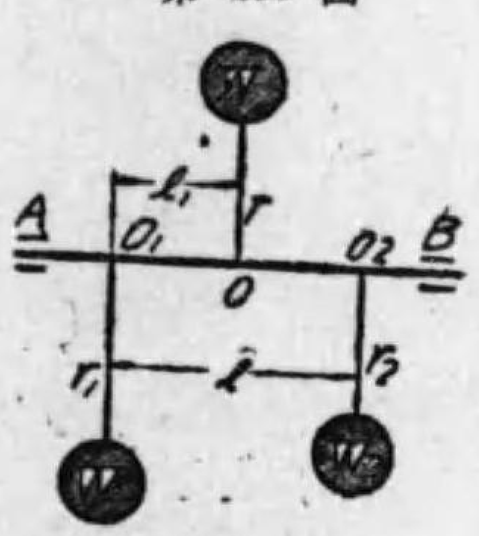
の關係になると釣合ひを保つ。

不平衡部分が三つ以上の場合には各不平衡重量に生ずる遠心力の釣合ひとして，第20節の方法によつて平衡せしめる重錘の重量及び軸よりの距離は求められる。

B. 異る回轉面上にある回轉體の釣合

不平衡部分を動的釣合ひならしめるに，附加重錘と不平衡重量を同一回轉面上に置く事が出來ない場合がある。此場合には不平衡重量と附加重錘の遠心力は一點に會合せないから力と共に力のモーメントが釣合ふ樣附加重量は力のためと，モーメントのためと二つの重量を別個の平面に加へねばならぬ。

第 108 圖



第108圖の樣に W の不平衡部分に W_1 W_2 の平衡重量を附加したとする。O_1 に對する各遠心力のモーメントを取れば

$$\frac{W}{g}\omega^2rl_1-\frac{W_2}{g}\omega^2r_2l=0$$

$$W r l_1 = W_2 r_2 l$$

$$W_2 = W\frac{r l_1}{r_2 l} \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(173)$$

$$\frac{W}{g}\omega^2 r = \frac{W_1}{g}\omega^2 r_1 + \frac{W_2}{g}\omega^2 r_2$$

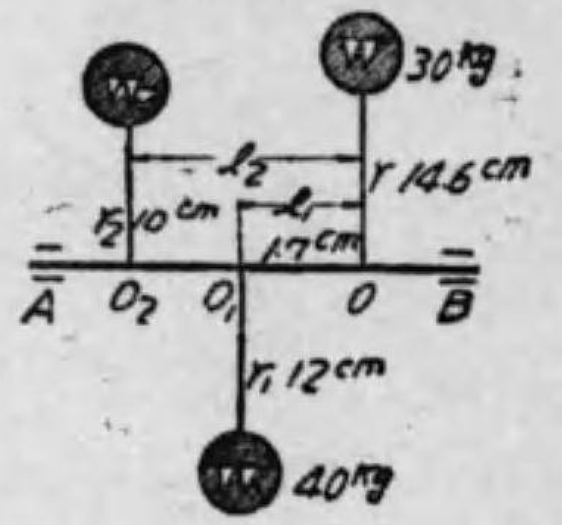
$$W r = W_1 r_1 + W_2 r_2$$

これに173式の W_2 の値を代入すると，

$$W r = W_1 r_1 + W\frac{r l_1}{l}$$

$$W_1 = W\frac{r}{r_1}\left(1-\frac{l_1}{l}\right) \cdots\cdots(174)$$

第 109 圖



【例題】 回轉軸の不平衡重量 W=30kg が軸より $r=14.6$cm の位置にあり，これに釣合すために $W_1 W_2$ を附加せんとす。

$W_1=40$kg　$r_1=12$cm　$l_1=1.7$cm　$r_2=10$cm

とせば W_2 及 l_2 は何程となるか。

【解】 $\frac{W_1}{g}\omega^2 r_1 - \frac{W_2}{g}\omega^2 r_2 = \frac{W}{g}\omega^2 r$

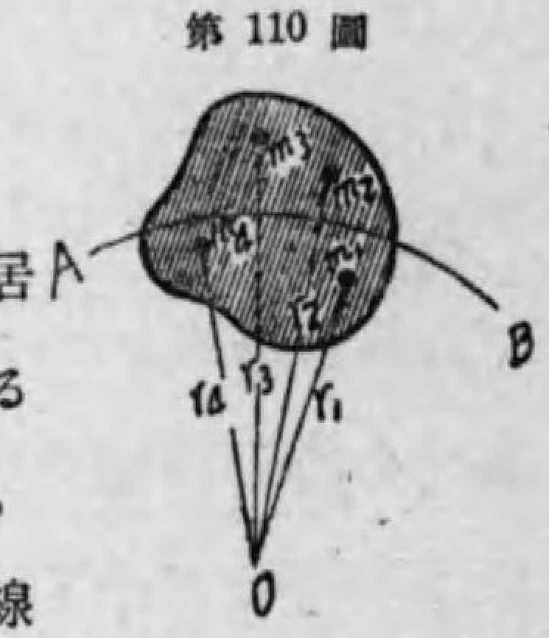
$$W_2 = \frac{W_1 r_1 - W r}{r_2} = \frac{40\times12-30\times14.6}{10} = 4.2\text{kg}$$

A點に對するモーメントより

$$\frac{W_1}{g}\omega^2 r_1 l_1 = \frac{W_2}{g}\omega^2 r_2 l_2$$

$$l_2 = \frac{\frac{W_1}{g}\omega^2 r_1 l_1}{\frac{W_2}{g}\omega^2 r_2} = \frac{40\times12\times1.7}{4.2\times10} = 19.4\text{cm}$$

第 110 圖



44. 回轉體のエネルギー

重量Wの物體がOを中心として回轉して居る時有する全エネルギーは，物體を構成する各小部分の有するエネルギーの總和に等し。今 $m_1, m_2, m_3\cdots\cdots$ を各極小部分の質量とし線

速度を $v_1, v_2, v_3\cdots\cdots$，Oよりの半徑を $r_1, r_2, r_3\cdots\cdots$ 角速度を ω とすると，第99式より

回轉體の運動のエネルギー

$$K.E = \frac{1}{2}m_1 v_1^2 + \frac{1}{2}m_2 v_2^2 + \frac{1}{2}m_3 v_3^2 + \cdots\cdots$$

$$= \frac{1}{2}m_1 r_1^2\omega^2 + \frac{1}{2}m_2 r_2^2\omega^2 + \frac{1}{2}m_3 r_3^2\omega^2 + \cdots\cdots$$

$$= \frac{1}{2}\omega^2(m_1 r_1^2 + m_2 r_2^2 + m_3 r_3^2 + \cdots) \cdots\cdots(175)$$

となる。 此の $m_1 r_1^2 + m_2 r_2^2 + m_3 r_3^2 + \cdots\cdots = \Sigma m r^2$ をO點に對する**慣性モーメント**と云ひ，Iで表はす。

然る時は第175式は

$$K.E = \frac{1}{2}I\omega^2 \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(176)$$

重力單位の慣性モーメント I_g は

$$I_g = \frac{m_1}{g}r_1^2 + \frac{m_2}{g}r_2^2 + \frac{m^3}{g}r_3^2 + \cdots\cdots$$

$$= \frac{1}{g}I \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(177)$$

となる。

即ち回轉體の有する運動のエネルギーK.E(kgm)は

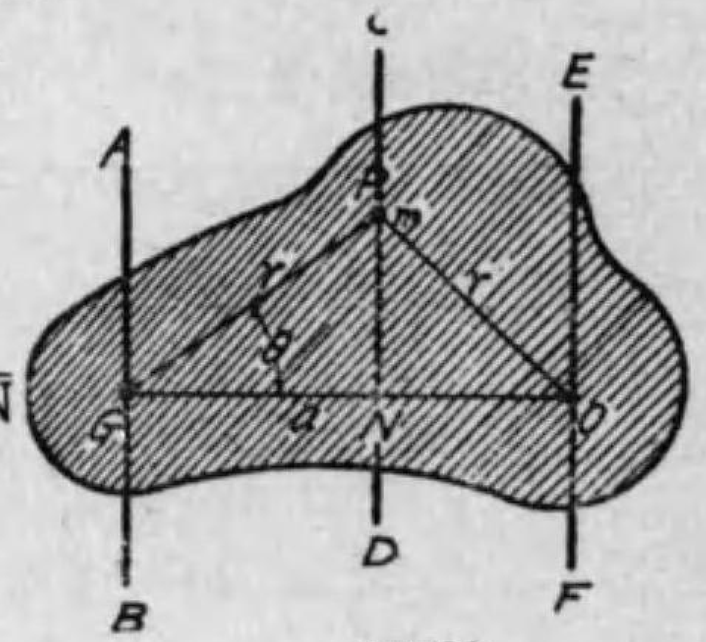
$$K.E = \frac{1}{2}I_g v^2 \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(178)$$

45. 慣性モーメント及び回轉半徑

慣性モーメントは前述の如く $\Sigma m r^2$ であるが，重心Gを通る軸に關する慣性モーメント I_G がわかつて居り此軸に平行で，a の距離にある軸 E·F に關する慣性能率 I は第111圖より次の如くなる。

$$r_1^2 = r^2 + a^2 - 2ar\cos\theta$$

第 111 圖 I



$$\mathrm{I}=\Sigma mr^2=\Sigma m(r^2+a^2-2a\overline{\mathrm{GN}})$$
$$=\Sigma mr^2+\Sigma ma^2-\Sigma 2am\overline{\mathrm{GN}}$$
$$=\Sigma mr^2+a^2\Sigma m-2a\Sigma m\overline{\mathrm{GN}}$$
$$=\mathrm{I}_G+a^2\mathrm{M}-2a\Sigma m\overline{\mathrm{GN}}$$

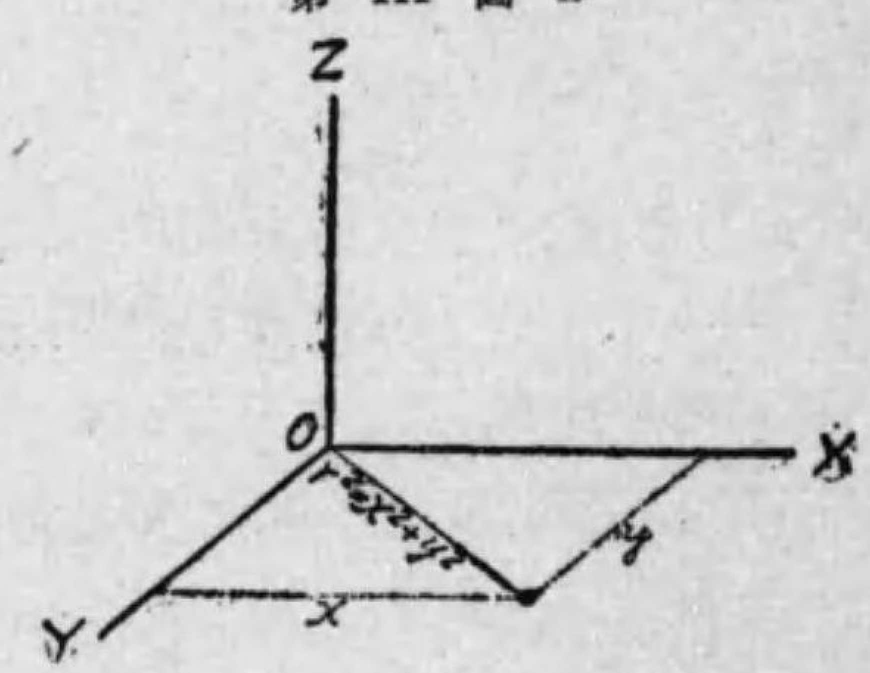
此處に G は重心であるから $\Sigma m\overline{\mathrm{GN}}$ は零となる。

故に　$\mathbf{I}=\mathbf{I}_G+\mathbf{M}a^2$
重力單位では　$\mathbf{I'}_G=\mathbf{I}_g+\dfrac{\mathbf{M}}{g}a^2$ ……………………(179)

即ち，剛體の任意の軸に對する慣性能率 I は此軸に平行て，重心を通る軸に對する慣性能率 I_G と，重心に全質量を集中したと見なす質點の此軸に對する慣性能率 $\mathrm{M}a^2$ との和となる。

次に直交 X, Y, Z 座標軸で X 及び Y 軸に對する慣性能率が既知なる場合に，Z 軸に對する慣性能率は次の如くして求められる。

第 111 圖 II



第111b圖に於いて Z 軸より P 點迄の距離を r とすると

$$r^2=x^2+y^2$$
$$mr^2=mx^2+my^2$$
$$\Sigma mr^2=\Sigma mx^2+\Sigma my^2$$

即ち x 軸 y 軸 z 軸に關する慣性モーメントを夫々 I_x, I_y, I_z とすると

$$\mathbf{I}_z=\mathbf{I}_x+\mathbf{I}_y \text{……………………………………(180)}$$

即ち Z 軸に對する慣性モーメントは X 軸と Y 軸に對する慣性モーメントの和に等し。

Z 軸に對する慣性モーメントを特に**極慣性モーメント**と云ふ。

今回轉軸より K の距離の一點に質量 M の質點があつたとすると，此質點が回轉軸に對する慣性モーメントは

$$\mathbf{I}=\mathbf{MK}^2 \quad \text{或は} \quad \mathbf{I}_g=\frac{\mathbf{M}}{g}\mathbf{K}_2 \text{……………(181)}$$

これと同樣に，物體の回轉軸に對する慣性モーメント I を，

$$\left.\begin{array}{l}\mathbf{I}=\Sigma mr^2=\mathbf{MK}^2\\ \mathbf{K}=\sqrt{\dfrac{\mathbf{I}}{\mathbf{M}}}\end{array}\right\} \quad \text{或は} \quad \mathbf{I}_g=\frac{\mathbf{M}}{g}\mathbf{K}^2 \text{……(182)}$$

即ち物體の全質量を軸より K の距離の一點に集中したと見做す距離 K を回轉半徑と云ふ。

回轉體の有するエネルギー(重力單位)を回轉半徑で表はすと

$$\mathbf{K.E}=\frac{1}{2}\mathbf{I}_g\omega^2=\frac{1}{2}\ \frac{\mathbf{M}}{g}\mathbf{K}^2\omega^2(\mathrm{k}g.\mathrm{m}) \text{………(183)}$$

となる。

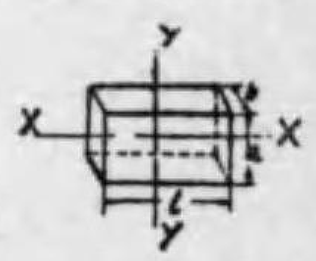
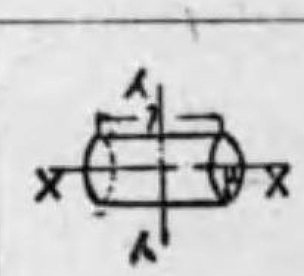
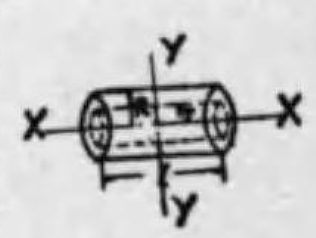
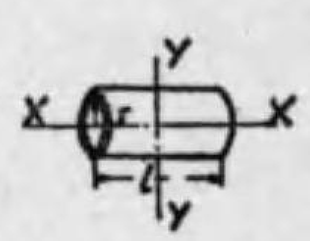
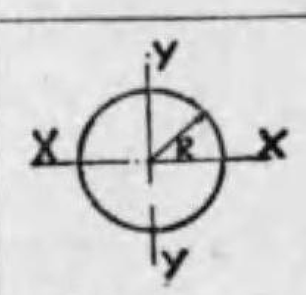
今簡單な形の物體の重心を通る軸に對する慣性能率及び回轉半徑(重力單位)を示せば第 3 表の如し。

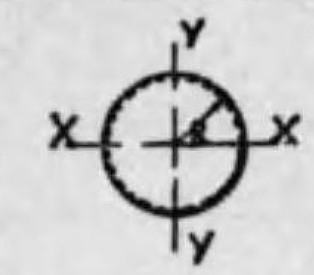
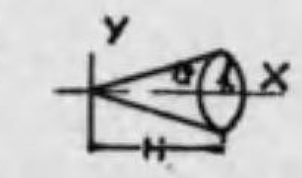
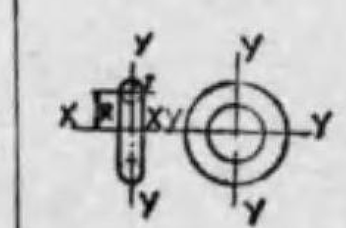
慣性モーメントには特に單位はなく使用した質量の單位と距離の單位を明かにするため質量の單位と長さの單位を並記し，m^2, kg, cm^2, g の如くす。質量と長さの單位は何れを先にしてもよいが本書では長さの單位を先にすると約束す。

回轉半徑の單位は慣性モーメントに用ひた長さの單位を用ひる。

第3表 慣性能率

I_x……X軸に關する慣性モーメント　K_x……X軸に關する回轉半徑
I_y……Y軸に關する慣性モーメント　K_y……Y軸に關する回轉半徑

形	狀	I	K
細い棒		$I_x=\frac{1}{12g}Ml^2$ $I_y=\frac{1}{3g}Ml^2$	$K_x=\frac{l}{\sqrt{12}}$ $K_y=\frac{l}{3}$
直角柱		$I_x=\frac{1}{12g}M(a^2+b^2)$ $I_y=\frac{1}{12g}M(b^2+l^2)$	$K_x=\sqrt{\frac{a^2+b^2}{12}}$ $K_y=\sqrt{\frac{b^2+l^2}{12}}$
直圓柱		$I_x=\frac{1}{2g}Mr^2$ $I_y=\frac{1}{12g}M(3r^2+l^2)$	$K_x=\frac{r}{\sqrt{2}}$ $K_y=\sqrt{\frac{3r^2+l^2}{12}}$
中空直圓柱		$I_x=\frac{1}{2g}M(R^2+r^2)$ $I_y=\frac{1}{4g}M\left(R^2+r^2+\frac{l^2}{3}\right)$	$K_x=\sqrt{\frac{R^2+r^2}{2}}$ $K_y=\sqrt{\frac{3R^2+3r^2+l^2}{12}}$
薄い中空圓柱		$I_x=\frac{Mr^2}{g}$ $I_y=\frac{M}{2g}\left(r^2+\frac{l^2}{6}\right)$	$K_x=r$ $K_y=\sqrt{\frac{6r^2+l^2}{12}}$
球		$I_x=I_y=\frac{2}{5g}MR^2$	$K_x=K_y=\frac{2R}{\sqrt{10}}$
中空球		$I_x=I_y=\frac{2}{5g}M\frac{R^5-r^5}{R^3-r^3}$	$K_x=K_y=\sqrt{\frac{2}{5}\left(\frac{R^5-r^5}{R^3-r^3}\right)}$

薄い中空球		$I_x=I_y=\frac{2}{3g}MR^2$	$K_x=K_y=\frac{2R}{\sqrt{6}}$
直圓錐		$I_x=\frac{3}{10g}Mr^2$ $I_y=\frac{3}{5g}M\left(\frac{r^2}{4}+l^2\right)$	$K_x=\sqrt{0.3r}$ $K_y=\sqrt{\frac{3r^2+12l^2}{20}}$
圓環		$I_x=\frac{M}{g}\left(R^2+\frac{3}{4}r^2\right)$ $I_y=\frac{M}{g}\left(\frac{R^2}{2}+\frac{5}{8}r^2\right)$	$K_x=\frac{1}{2}\sqrt{4R^2+3r^2}$ $K_y=\sqrt{\frac{4R^2+5r^2}{8}}$

【例題】 1. 鑄鐵製はずみ車がある外徑 1.8m, 內徑1.5m, 厚さ0.2m の矩形斷面を有す。これが每分180回轉する時のエネルギーを求めよ。但し鑄鐵 1m³ の重量は 7.8t とす。

【解】 第3表よりX軸に對する回轉半徑 K_x は

$$K_x=\sqrt{\frac{R^2+r^2}{2}}=\sqrt{\frac{\left(\frac{1.8}{2}\right)^2+\left(\frac{1.5}{2}\right)^2}{2}}=0.828\text{m}$$

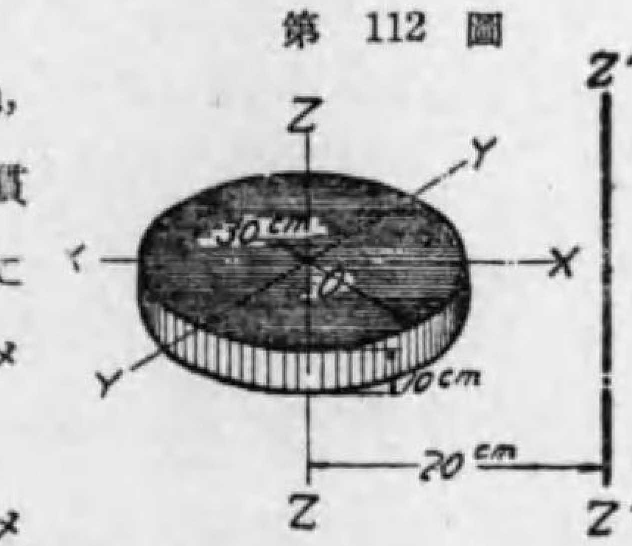
はずみ車の重量Wは

$$W=w\left(\frac{\pi}{4}D_1{}^2-\frac{\pi}{4}D_2{}^2\right)t=7800\times\frac{\pi}{4}(1.8^2-1.5^2)\times0.2$$
$$=1225\text{kg}$$

故にエネルギーK,Eは

$$K.E=\frac{1}{2}\frac{W}{g}K_x{}^2\omega^2=\frac{1}{2}\frac{1225}{9.8}\times0.828^2\times\left(\frac{2\pi\times180}{60}\right)^2$$
$$=1522\text{kg.m}$$

第 112 圖



【例題】 2. 直徑 D=30cm, 厚さ t=10cm, 重さ 80kg の圓板のX及 Z 軸に對する慣性モーメント及び軸より 20cm の距離にあるZ軸と平行な軸に對する慣性モーメント $I_{z\prime}$ を求めよ。

【解】 第3表より重力單位の慣性モーメ

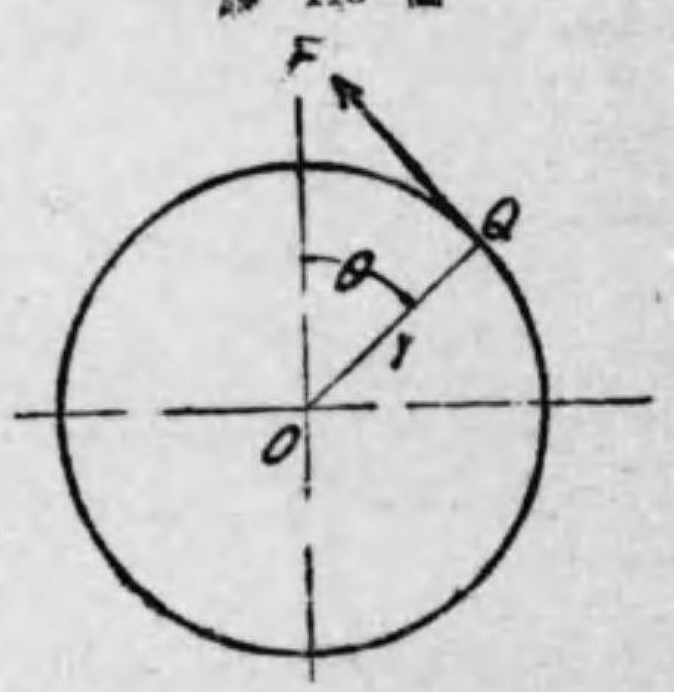
ント I_y は

$$I_y=\frac{1}{12}\frac{M}{g}(3r^2+l^2)=\frac{1}{12}\times\frac{80}{9.8}\times\left\{3\times\left(\frac{30}{2}\right)^2+10^2\right\}$$
$$=517\text{cmkg}$$
$$I_z=I_x+I_y=2I_y=2\times517=1034\text{cm}^2\text{kg}$$
$$I_{z1}=I_z+\frac{M}{g}a^2=1034+\frac{80}{9.8}\times20^2=4294\text{cm}^2\text{kg}$$

46. モーメント，工率及び角力積と角運動量

回轉體中の一點Qが中心Oに對して力のモーメント $T=Fr$ を受けつゝ回轉運動をなし，t秒間に θ だけ回轉したとすると共間にした仕事Wは

第 113 圖



$$W=Fs=Fr\theta=T\theta \quad \cdots\cdots(184)$$

此間に角速度が ω_1 から ω_2 に變化したとすると

$$W=T\theta=\frac{1}{2}I(\omega_2^2-\omega_1^2)\cdots\cdots\cdots\cdots(185)$$

重力單位で表はすと

$$W_g=\frac{1}{2}I_g(\omega_2^2-\omega_1^2) \qquad I_g=\frac{I}{g}$$

工率Pは

$$P=\frac{W}{t}=\frac{T\theta}{t}=T\omega\cdots\cdots\cdots\cdots(186)$$

T……m. kg　　ω……Rad/sec,　　N……Rev/min,

とすると

$$HP=\frac{T\omega}{75}=\frac{2\pi NT}{60\times75}\cdots\cdots\cdots\cdots(187)$$

Qの質量を m kg，速度を vm とすると mvr をO軸に對する**角運動量**又は**運動量のモーメント**と云ふ。故に物體全體としては，

$$\textbf{角運動量}=\Sigma mvr=\Sigma m\omega r^2=\omega\Sigma mr^2$$
$$=I\omega\cdots\cdots\cdots\cdots(188)$$

物體の速度が ω_1 より ω_2 に變化した時の角運動量の變化は

$$\textbf{角運動量の變化}=I\omega_2-I\omega_1$$
$$=I(\omega_2-\omega_1)\cdots\cdots\cdots\cdots(189)$$

α 及び β を夫々線加速度及角加速度とすると

$$\Sigma m\alpha tr=\Sigma\frac{m\alpha tr^2}{r}=\Sigma mr^2\beta t=I\beta t\cdots\cdots(190)$$
$$\Sigma m\alpha r=\Sigma Fr=T=I\beta\cdots\cdots\cdots\cdots(191)$$

$m(v_2-v_1)=Ft$ であるから

$$\Sigma Ftr=Tt=\Sigma(mv_2r-mv_1r)$$
$$=I\omega_2-I\omega_1\cdots\cdots\cdots\cdots(192)$$

$T\times t$ はトルクト共作用時間を示し，これを**角力積**と云ふ。即ち**角力積は角運動量に等し**。

47. 線運動と角運動の比較

(191), (184), (186), (177), (189)(192)式より線運動の

F を T
M を I
v を ω
α を β
s を θ

に置き代へると回轉運動の式となる。

線運動	回轉運動
力$F=M\alpha$	力のモーメント $T=I\beta$
仕事$W=Fs$	仕事 $W=T\theta$
工率$P=Fv$	工率 $P=T\omega$
運動のエネルギー $K.E=\frac{1}{2}Mv^2$	運動のエネルギー $E.K=\frac{1}{2}I\omega^2$
力積と運動量 $Ft=Mv$	角力積と角運動量 $Tt=I\omega$

【例題】1. 200mkgのモーメントにて毎分1800回轉する發動機の馬力を求めよ。

【解】186式より

$$P=T\omega=T\times2\pi\frac{N}{60}=200\times2\pi\times\frac{1800}{60}=37600\text{kgm}$$

$$HP=\frac{P}{75}=\frac{37600}{75}=500\text{馬力}$$

【例題】2. 直徑20cm，回轉數1800にして300馬力を傳達する發動機の回轉力を求めよ。

【解】187式より

$$H.P=\frac{2\pi NT}{60\times75}$$

$$300=\frac{2\pi\times1800T}{60\times75}$$

$$T=\frac{300\times60\times75}{2\pi\times1800}=131.4\text{mkg}$$

$$T=Fr \qquad F=\frac{T}{r}=\frac{131.4}{0.1}=1314\text{kg}$$

【例題】3. 回轉體の慣性モーメント100m²kg，回轉モーメント40mkgと云ふ。始動後1分後の回轉數を求めよ。

【解】191式より

$$T=I\beta$$

$$40=100\beta \qquad \beta=\frac{40}{100}=0.4\text{rad/sec}^2$$

1分後の角速度 $\omega=\beta t=0.4\times60=24\text{rad/sec}$

$$\text{回轉數}=\frac{60\omega}{2\pi}=\frac{60\times24}{2\pi}=239.\ \text{R. P. M.}$$

【例題】4. 重量1000kgのはづみ車が毎分180回轉して居る。回轉半徑1m，軸の直徑10cm，軸と軸承間の摩擦係數を0.03とすれば靜止迄に何秒を要するか。

【解】191式より

$$Tt=I\omega_2-I\omega_1=MK^2(\omega_2-\omega_1)$$

$$T=1000\times0.03\times0.05=1.5\text{mkg} \qquad \omega_2=0$$

$$1.5t=I\omega_1 \qquad t=\frac{I\omega_1}{1.5}=\frac{MK^2\omega_1}{1.5}=\frac{1000\times1\times2\pi\times180}{1.5\times60}$$

$$=1255\text{sec.}$$

48. はづみ車

第185式より慣性能率の大きい物體の角速度を，極僅か速くするにも大きなエネルギーを要する。

氣筩數の少い內燃機關や剪斷機等は回轉數が絶えず變化するものであるが，之に慣性能率の大きい物體をつけて置くと，他よりエネルギーが供給されて回轉が速くならうとしても慣性能率が大きい爲に回轉は極僅かより速くならず，エネルギーが取り去られ回轉が減ずる場合には多少のエネルギーが取り去られても，回轉の變化は少い。故に**回轉數の變化を少くするには慣性能率の大きい物體をつけておけばよい**。これをはづみ車と云ふ。

ω……平均角速度

ω_1……最大角速度

ω_2……最小角速度

とすると

$$\omega=\frac{\omega_1+\omega_2}{2}\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(193)$$

はづみ車が ω_2 より ω_1 になつた爲回轉體に蓄へられたエネルギー e はIを慣性能率とすると，185式より

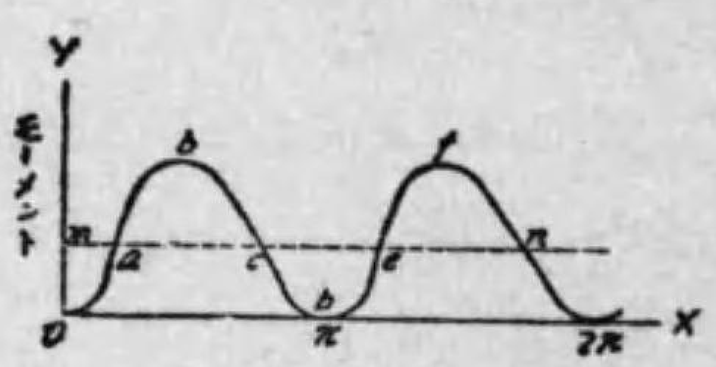
$$e=\frac{1}{2}\mathrm{I}(\omega_1^2-\omega_2^2)=\frac{1}{2}\mathrm{I}(\omega_1-\omega_2)(\omega_1+\omega_2)$$

$$=\omega\mathrm{I}(\omega_1-\omega_2)=\mathrm{I}\omega^2\frac{\omega_1-\omega_2}{\omega}=\omega^2\mathbf{I}q\cdots\cdots\cdots(194)$$

此處に　$q=\dfrac{\omega_1-\omega_2}{\omega}$

とす。これは機關に於いてはづみ車を回轉するためにクランクに與へられる過分のエネルギーである。即ち，第114圖の o, a, b, c, d がモーメントの變化する有様，$m\,a\,c\,n$ が平均モーメントの線圖とすると，面積 abc 及び efn は過分のエネルギーではづみ車に蓄積され，cde のエネルギーは不足時にはづみ車より補給す。e 及び q の値は機械の種類によつて異り此値が小さい程回轉の變化が少いのである。

第 114 圖



【例題】 氣筒直徑D＝30cm，行程L＝40cm，毎分の回轉數N＝180，平均有効壓力P＝10kg/cm² の機關で $q=\dfrac{1}{150}$ とするに要するはづみ車を設計せよ。但しeは0.15とす。

【解】 機關が1行程になされる仕事Wは

$$\mathrm{W}=\frac{\pi}{4}\mathrm{D}^2\mathrm{PmL}=\frac{\pi}{4}\times(30)^2\times10\times0.4=2520\mathrm{kgm}$$

$$\therefore\quad e=0.15\mathrm{W}=2520\times0.15=\frac{1}{150}\times\left(\frac{180}{60}\times2\pi\right)^2\mathrm{I}$$

$$\mathrm{I}=160\mathrm{kg}$$

回轉半徑 K＝1m とすると

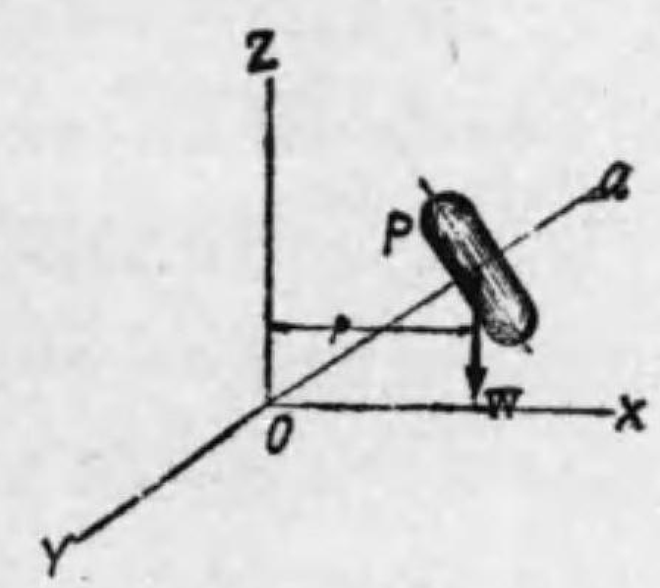
$$\mathrm{M}=\frac{160}{1}=160$$

此質量Mは重力單位なれば重量 w は

$$w=\mathrm{M}g=160\times9.8=1568\mathrm{kg}$$

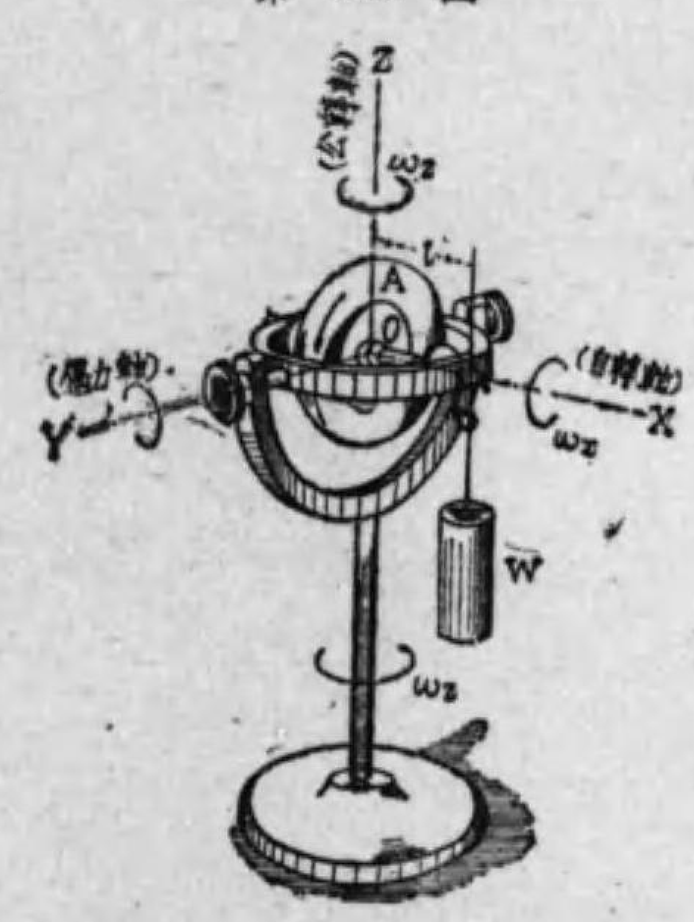
49. ジヤイロスコープ

第 115 圖



第115圖の様に $o\,a$ の軸を有する物體を傾斜して立てると物體は Wp の偶力により倒れるが，若し物體が $o\,a$ 軸の周りに高速度で回轉して居ると倒れないでZ軸の周りを一定の角速度 ϕ で回轉する。$o\,a$ 軸の周りの回轉を**自轉**，Z軸の周りの回轉を**公轉**と云ふ。

第 116 圖



第116圖のX軸を自轉軸としこれにWの錘を吊すと，Y軸の周りにトルクを生じ自轉軸は傾かないでZ軸の周りに公轉する。

斯くの如く回轉軸Xの周りに自轉しつゝ，Z軸の周りに公轉する運動を**ヂヤイロ運動**と云ひ，第116圖の如き裝置をヂヤイロスコープと云ふ。

自轉，公轉及偶力の方向については，O點に向つてOX, OY, OZを見たとき，左廻りを正，右廻りを負とすると自轉，公轉及トルクの方向に關し次の定理がある。

自轉，公轉が同符號(正と正又は負と負)なる時はトルクは正に

異符號(一つが正で他が負)の時は負となる。

これ代數學の掛算に於ける符號の關係と全く同一である。

上述の如く，ヂヤイロスコープが ω_x で自轉中に Wp の偶力が作用すると公轉を生じ，公轉中は Wp の偶力に抵抗する作用を生ず。これを**ヂヤイロ抵抗偶力**と云ふ。即ち，偶力がない場合にはヂヤイロスコープ自轉軸は空間に一定不變の方向を保つ。この性質を**ヂヤイロスコープの自轉軸の不動性**と云ふ。ヂヤイロスコープは自轉軸の不動性があるので，羅針盤，魚形水雷の進行方向の確定，航空機，艦船の安定等各方面に利用せられる。今第117圖に於いてX軸の周りに自轉しつゝ t 秒間に公轉にZ軸の周りによりOX′の位置に θ の角度回轉したとすると，角運動量の變化はベクトル ab にて表はされ，この爲にY軸に Wp の偶力を生ずる。偶力をTとすると，191式より

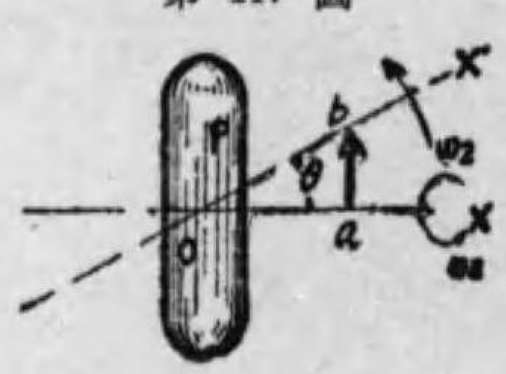
$$T=\frac{角運動量の變化ab}{t}$$

$$ab=oa\tan\theta$$

θ は極めて小なれば

$$ab\fallingdotseq oa\times\theta$$

第 117 圖



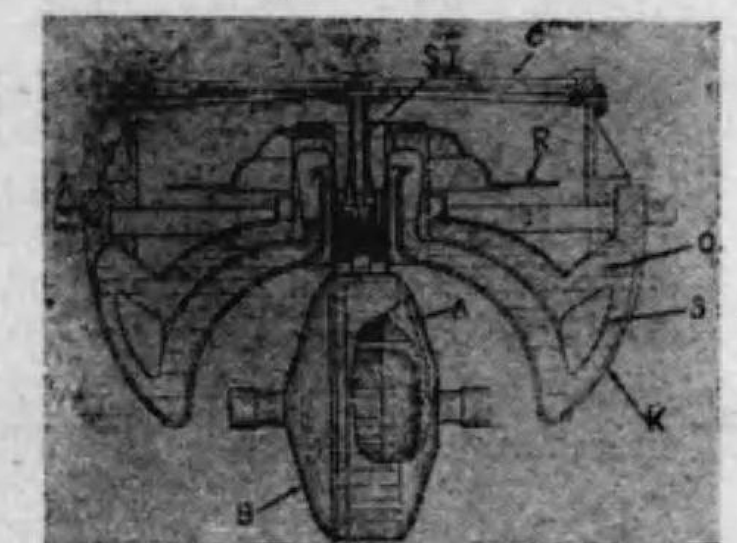
故に　$$T=\frac{oa\times\theta}{t}$$

$$oa=I_x\omega_x \qquad \frac{\theta}{t}=\omega_z$$

$$\therefore\ T=I_x\omega_x\omega_z \cdots\cdots\cdots\cdots(195)$$

即ちヂヤイロスコープの支持偶力は回轉體の自轉軸に對する慣性モーメン及び，自轉，公轉の角速度の積となる。

第 118 圖　a

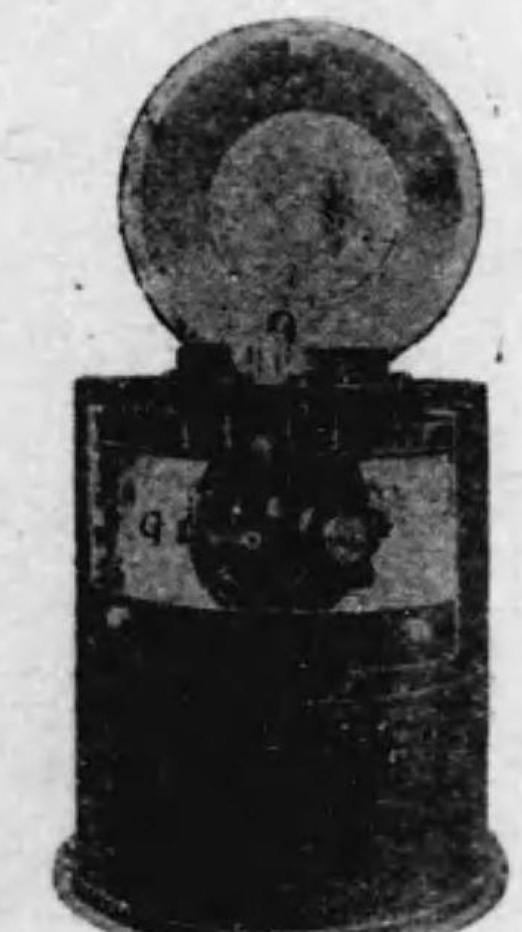


ヂヤイロコンパス

G ガラス　R 方位板　Q 水銀

S 浮　A ヂヤイロスコープ

b



ヂヤイロコンパス

G ジヤイロスコープ

c

魚形水雷

A 壓縮空氣機關　G ヂヤイロスコープ

練習問題

(1) 重さ5kgの物體を，長さ2mの糸につけて，100回轉/分 で回轉するときの遠心力を求めよ。　(ans. 113kg)

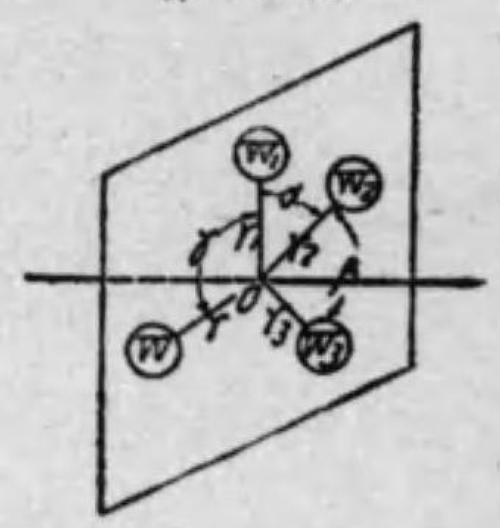
(2) 重量180gの物體を長さ1.5mの糸の一端に結び，水平面内にて回轉して，糸の張力が1kgとなるようにせんとす。回轉數を求めよ。　(ans. 57.6R.P.M)

(3) 5kgの力にて切れる糸に，重量600gの物體を付けて，水平面上に半徑7cmの圓運動をさせると，物體の線速度が何程になつて切れるか。　(ans. 7.56m/sec)

(4) 重さ 115lbs の物體を回轉軸より18吋の距離に附した軸が，600R. p. m をする時軸より12吋の距離に正反對に重錘を附して釣合はさんとす。重錘の重量を求めよ。 (ans. 168lbs)

(5) 第110圖に於て

第 119 圖



$W_1=10kg$, $W_2=5kg$, $W_3=20kg$

$r_1=24cm$, $r_2=20cm$, $r_3=16cm$

$\alpha=45°$, $\beta=90°$

なるとき $r=12cm$ の所に何程の重錘を附したら釣合ふか。又 γ を求めよ。

(ans. $W=25.7kg$, $\gamma=105°50'$)

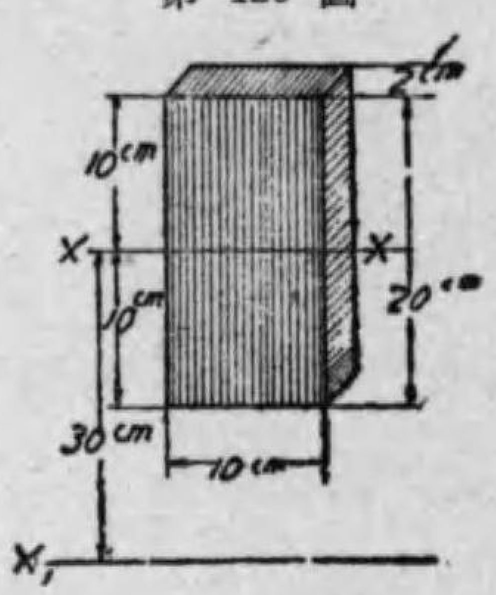
(6) 毎分300回轉するはずみ車がある。リムの外徑100cm, 內徑80cm, 巾 12cm とす。回轉エネルギーを求めよ。但比重を 7.8 とす。 (ans. 2500kg. m)

(7) 回轉半徑 0.5m, 重量 12kg の物體が毎分1800回轉する時の運動のエネルギーを求めよ。 (ans. 5440kgm)

(8) 或物體の重量 800kg, 回轉半徑 0.6m であるといふ。これが毎分180回轉するとき有する，運動のエネルギーは何程となるか。 (ans, 5221kgm)

(9) 第120圖の如き重量 3kg の鐵板を，XX 軸の周りに毎分 180回轉するときの運動のエネルギーと，XX軸より30cmの距離にあり，XX 軸に平行な X_1X_1 軸の周りに同じ回轉數で回轉する場合の運動のエネルギーを求めよ。 (ans. $E_x=1828kgm$, $E_{x_1}=43500kgm$)

第 120 圖



(10) 275mkg の回轉モーメントによつて，毎分150回轉する機械の馬力を求めよ。 (ans. 57.6馬力)

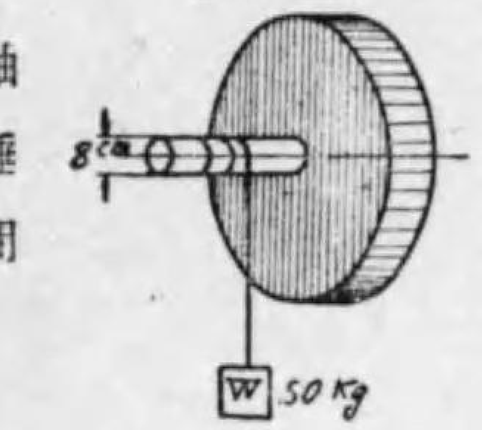
(11) 毎分200回轉で 250 馬力を發生する蒸汽機關の回轉モーメントを求

めよ。 (ans. 896mkg)

(12) 慣性モーメントが $150m^2kg$ の回轉體が 15sec 間に回轉數が200R. P. M. より 300R. P. M. になつたといふ。加へたモーメントを求めよ。 (ans. 105mkg)

(13) 重量 300kg, 回轉半徑 0.6m の車輪がある。これが直徑 8cm の水平軸にて支へられる。此軸に綱を捲き，下端に 50kg の重錘を附けると重錘の下降加速度は何程となるか。但し軸と軸受間には摩擦はないものとす。

第 121 圖



(ans. $0.0073m/sec^2$)

(14) 毎分80回轉して居る重量 4t, 回轉半徑 1.6m のはずみ車を放置すると，100回轉した後の回轉數は何程となるか。又靜止迄の回轉數を求めよ。但軸受の摩擦により一回轉に付き 200kgm のエネルギーを失なふものとす。 (ans. 53.9R. P. M, 133R. P. M)

(15) 毎分300回轉してゐるはずみ車がある。外徑 1m, 慣性モーメントが $300m^2kg$ である。これに 100kg の壓力の制動機を作用すれば靜止迄に何秒要するか。又靜止迄の回轉數を求めよ。但し車周の摩擦係數を0.3 とす。 (ans. $t=70sec$ N=175回轉)

第九章 衝 突

50. 衝 突

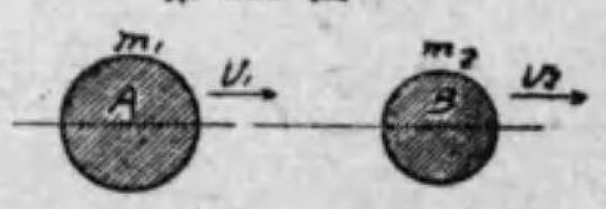
物體が衝突した時衝突後はなれる事なく一體となりて運動する物體を**非彈性體**と云ひ，衝突後はなれる物體を**彈性體**と云ふ。

二物體が衝突する時衝突前の二物體の相對速度の方向が，衝突の時の接觸點の法線と一致する衝突を**向心衝突**と云ひ，相對速度の方向が法線に傾いて居る衝突を**斜衝突**と云ふ。

51. 非彈性球の向心衝突

第122圖の如く質量 $m_1 m_2$ の二つの非彈性球が同一直線上を運動し，$v_1>v_2$ なれば衝突し合體して運動を繼續する。衝突後合體の速度をVとすると，運動の第三法則より運動量の變化は同一なれば

第 122 圖



$$m_1v_1-m_1V=m_2V-m_2v_2$$

$$m_1v_1+m_2v_2=(m_1+m_2)V$$

$$\therefore\ V=\frac{m_1v_1+m_2v_2}{m_1+m_2}\cdots\cdots\cdots\cdots(196)$$

衝突前の運動のエネルギーの和は

$$E_1=\frac{1}{2}m_1v_1^2+\frac{1}{2}m_2v_2^2$$

衝突後の運動のエネルギーは

$$E_2=\frac{1}{2}(m_1+m_2)V^2$$

故に衝突によるエネルギーの損失は

$$E_1-E_2=\left(\frac{1}{2}m_1v_1^2+\frac{1}{2}m_2v_2^2\right)-\frac{1}{2}(m_1+m_2)V^2$$

$$=\frac{1}{2}(m_1v_1^2+m_2v_2^2)-\frac{1}{2}(m_1+m_2)\ \frac{(m_1v_1+m_2v_2)^2}{(m_1+m_2)^2}$$

$$=\frac{1}{2}\ \frac{(m_1v_1^2+m_2v_2^2)(m_1+m_2)-(m_1v_1+m_2v_2)^2}{m_1+m_2}$$

$$=\frac{1}{2}\ \frac{m_1m_2(v_1-v_1)^2}{m_1+m_2}\cdots\cdots\cdots\cdots(197)$$

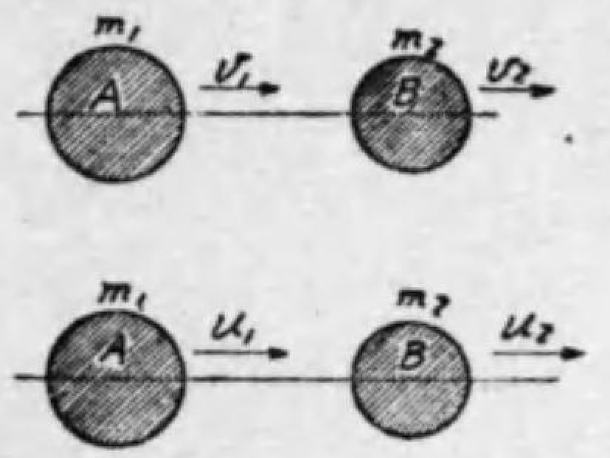
此のエネルギーの損失は衝突時に物體の變形，音響等によりエネルギーの損失を生ずるからである。

52. 彈性球の向心衝突

金屬，硝子，象牙等の彈性體の球が衝突すると，衝突の時反撥

して，衝突後は合體せずはなれて運動する。質量を m_1, m_2，衝突前の速度を $v_1 v_2$，衝突後の速度を u_1, u_2 とすると，衝突する爲には，$v_1>v_2$ 分離する爲には $u_1<u_2$ である。

第 123 圖



前と同樣に運動量の變化は同一なれば，

$$m_1v_1-m_1u_1=m_2u_2-m_2v_2$$

$$\therefore\ m_1v_1+m_2v_2=m_1u_1+m_2u_2\cdots\cdots\cdots\cdots(198)$$

ニュートンの實驗によれば**彈性體の向心衝突に於いて近突り速度 v_1-v_2 と分離速度 u_2-u_1 の比は速度に無關係で兩球の物質の種類によつて定まる定數である。**これを**反撥係數**と云ふ。反撥係數を e とすると

$$e=\frac{u_2-u_1}{v_1-v_2}\cdots\cdots\cdots\cdots(199)$$

e の値を示すと次の如し。

硝子球と硝子球	0.94
鋼球と鋼球	0.55
鑄鐵と鑄鐵	0.50
象牙球と象牙球	0.81
木材と木材	0.5
鉛球と鉛球	0.20

完全な非彈性球では $u_1=u_2$ なれば $e=0$ であり，$e=1$ の物體は實在せないが假想してこれを完全彈性體と云ふ。

(198)式及び(199)式より

$$\left.\begin{aligned} u_1&=v_1-\frac{m_2(1+e)}{m_1+m_2}(v_1-v_2) \\ u_2&=v_2+\frac{m_1(1+e)}{m_1+m_2}(v_1-v_2) \end{aligned}\right\} \cdots\cdots\cdots\cdots(200)$$

となる。

第(200)式に於いて $m_1=m_2$, $e=1$ とすると $u_1=v_2$, $u_2=v_1$ となる。

即ち**質量の等しい完全彈性球が向心衝突すれば，其速度は互に交換せられる。**

衝突による運動のエネルギーの損失は，

$$E=\frac{1}{2}m_1v_1^2+\frac{1}{2}m_2v_2^2-\frac{1}{2}(m_1u_1^2+m_2u_2^2)$$

$$=\frac{1}{2}(1-e^2)\frac{m_1m_2}{m_1+m_2}(v_2-v_1)^2 \cdots\cdots\cdots\cdots(201)$$

上式に於いて $e<1$ であるから E は常に正即ち衝突によつて必ずエネルギーの一部を損失するのである。$e=1$ の時はエネルギーの損失なし。式中 E を kgm として表はすには質量は $\frac{m}{g}v$ 及び u は m を使用する。

53. 球が壁に對する衝突

A 球が壁に向心衝突する場合

球が壁に衝突する場合には前式の各々に $m_2=\infty, v_2=0$ を代入すればよい。即ち200式は次の如くなる。

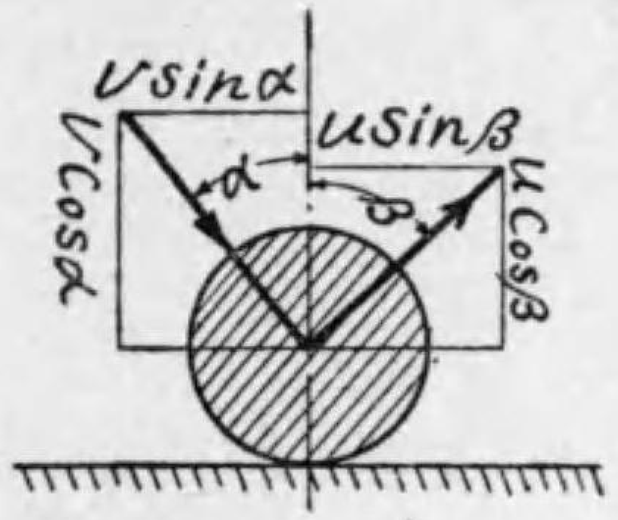
$$u_1=v_1-\frac{m_2(1+e)}{m_1+m_2}(v_1-v_2)=v_1-\frac{1+e}{\frac{m_1}{m_2}+1}(v_1-v_2)$$

$$=-ev_1 \cdots\cdots\cdots\cdots(202)$$

$$u_2=0 \cdots\cdots\cdots\cdots(203)$$

即ち**固定壁に球が垂直に衝突すれば，最初の速度に反撥係數を乘じた速度で垂直に撥ね反される。**

第 124 圖



B 球が壁に斜衝突する場合

v, u……球の衝突前後の速度

α ……投射角

β ……反射角

とし壁が滑かであるとすると，

$$v\sin\alpha=u\sin\beta \qquad ev\cos\alpha=u\cos\beta$$

$$u=\sqrt{u^2\cos^2\beta+u^2\sin^2\beta}=$$

$$v\sqrt{\sin^2\alpha+e^2\cos^2\alpha} \cdots\cdots\cdots\cdots(204)$$

$$\tan\beta=\frac{\tan\alpha}{e} \cdots\cdots\cdots\cdots(205)$$

上式に於いて $e=1$ なる時は $u=v$, $\beta=\alpha$ となる。即ち完全彈性球が壁に衝突する場合には反射角は投射角に等し。實際には $e<1$ なる故 $u<v$, $\beta>\alpha$。

【例題】1. 重量 2kg の非彈性物體が速度 5m/sec で反對方向に運動する重量 1kg, 速度 4m の物體に向心衝突する。二物體の終速度及び衝突により損失する運動のエネルギーを見出せ。

【解】 $v_1=5\text{m/sec}$ $\quad v_2=4\text{m/sec}$

質量を重力單位で表はせば

$$m_1=\frac{2}{9.8} \qquad m_2=\frac{1}{9.8}$$

$$v_1=-ev_1$$

第196式に代入すると

$$V=\frac{m_1v_1+m_2v_2}{m_1+m_2}=\frac{\frac{1}{9.8}(2\times5-1\times4)}{\frac{1}{9.8}(2+1)}=2\text{m/sec}$$

損失運動のエネルギーEは第196式より

$$E=E_1-E_2=\left(\frac{1}{2}\ \frac{2}{9.8}\times5^2+\frac{1}{2}\times\frac{1}{9.8}\times4^2\right)-\frac{1}{2}\ \frac{2+1}{9.8}$$

$$\times2^2=2.76\text{kgm}$$

【例題】2. 靜止せる10kgの鋼球を重量4kgの槌を持つて12m/secの速度で打つた時の各々の速度及び運動のエネルギーの損失を求めよ。但し反撥係數を0.55とす。

【解】 第199式より

$$e=\frac{u_2-u_1}{v_1-v_2}$$

$$0.55=\frac{u_2-u_1}{(12-0)}\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(a)$$

$$6.6=u_2-u_1$$

最初の運動量の關係より

$$m_1v_1+m_2v_2=m_1u_1+m_2u_2$$

$$4u_1+10u_2=10\times0+4\times12\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(b)$$

(a)式及び(b)式より

$u_1=1.54$m/sec （鋼球の速度）

$u_2=-4.06$m/sec （槌の速度）

運動のエネルギー損失は

$$E=E_1-E_2=\frac{1}{2}\times\frac{4}{9.8}\times12^2-\left(\frac{1}{2}\times\frac{4}{9.8}\times1.54+\frac{1}{2}\times\frac{10}{9.8}\right.$$

$$\left.\times4.06^2\right)=20.15\text{kgm}$$

【例題】3. 重量Wの重錘がHの高さより重量wの杭の上に落ちて杭がlだけ沈下したと云ふ。非彈性體の衝突と見做して土地の抵抗力R及び衝激に相當する靜荷重を求めよ。

【解】 重錘が杭に當る瞬間の速度 $v_1=\sqrt{2gH}$　　$v_2=0$

196式より

$$V=\frac{m_1v_1}{m_1+m_2}=\frac{W\sqrt{2gH}}{W+w}$$

衝突後重錘と杭の有する運動のエネルギー$+(W+w)l=Rl$

$$Rl=\frac{1}{2}\ \frac{W+w}{g}V^2+(W+w)l=\frac{W^2H}{W+w}+(W+w)l$$

$$R=\frac{W^2H}{(W+w)l}+(W+w)$$

重錘の衝擊力と等しい靜荷重Pは

$$P=R-w=\frac{W^2H}{(W+w)l}+W$$

Wに比しwが極小なればwは無視して

$$P=W\left(\frac{H}{l}+1\right)$$

練習問題

（1） 靜止せる重量5kgの鋼球を，重量2kgの槌で4m/secの速度で打擊すると，衝突後の鋼球及び槌の速度並びに運動のエネルギーの損失は何程となるか。但し$e=0.55$とす。

（ans. **$u_1=-0.43$m/sec, $u_2=1.77$m/sec, E=0.82kgm**）

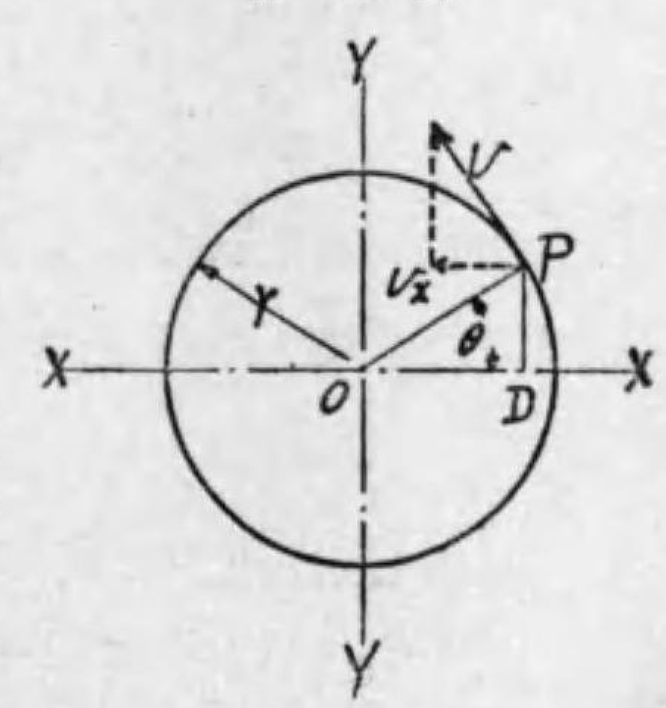
（2） 3mの高さよりゴム球を水平面上に落すと何米の高さまで上るか。但 $e=0.9$ とす。　（ans. **2.43m**）

（3） 例題3に於て W=400kg, $w=100$kg, H=3m, $l=15$cm の時R及びPは何程となるか。　（ans. **R=6900kg, P=6800kg**）

第十章　單弦運動

54. 單弦運動

第125圖



一點PがOを中心とする圓周上を等速度で回轉する時，Pの直徑XX上の射影Dの運動を**單弦運動**と云ふ。

PがOを中心とする等速圓運動をするとDはOを中心として直徑上を左右に往復運動をする。此の樣に同一途上を一定時間內

に往復する運動を振動と云ふ。其中心Oを**振動の中心**と云ひ最大變位 OX，を**振幅**，一往復に要する時間を**周期**，單位時間の往復數を**振動數**と云ふ。

PがXより角速度ωでt秒間にθ回轉したとし，Dの位置がOよりxになつたとすると，

$$x=r\cos\theta=r\cos\omega t$$

$$v=\omega r$$

vのXX方向の分速度v_xは

$$v_x=v\sin\theta=\omega r\sin\omega t$$

然るに圖より

$$\sin\omega t=\frac{\sqrt{r^2-x^2}}{r}$$

故に
$$v_x=\omega r\frac{\sqrt{r^2-x^2}}{r}=\omega\sqrt{r^2-x^2}\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(206)$$

次にPの半徑方向の加速度は40節より$\omega^2 r$で常に圓の中心Oに向ふ。

XX，方向の分加速度αは

$$\alpha=\omega^2 r\cos\omega t=\omega^2 x\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(207)$$

207式は甚だ重要な式でこれを**單弦運動方程式**と云ふ。即ち**加速度が或る一定點よりの距離に正比例し，且つ其點に向く如き直線運動を單弦運動**と云ふ。

又力は質量と加速度の積なれば物體が運動する場合に，**力の大きさが或る一定點よりの距離に比例し且つ常に其點に向つて動く樣な直線運動を單弦運動**と云ふ。

週期Tは

$$\omega T=2\pi \qquad T=\frac{2\pi}{\omega}$$

然るに(207)式より

$$\omega=\sqrt{\frac{\alpha}{x}}$$

$$\therefore\quad T=\frac{2\pi}{\sqrt{\frac{\alpha}{x}}}=2\pi\sqrt{\frac{x}{\alpha}}\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(208)$$

(206)式と(207)式よりXX，方向の速度及加速度は何れもxと共に變化し，O點即ち$x=0$の點で

$$v_x=\omega r \qquad \alpha=0$$

となる。**即O點では速度は最大となるが加速度は零となる。**

次に$x=r$の點では

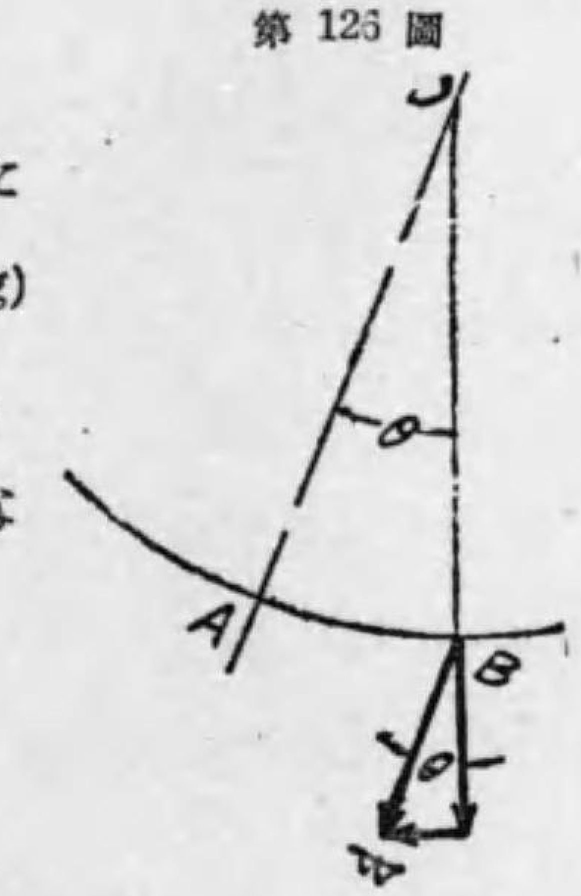
$$v=0 \qquad \alpha=\omega^2 r$$

即ち $x=r$ の點では速度は零となりαは最大となる。

蔓卷ばねの縱振動は全く單弦運動で往復機關のピストン及びクロスヘッドは之れに近い運動をする。

55. 單振子

第125圖



圖に示すやうな重さのないと假定した糸の一端Oを固着し，他端に質量をm(kg)の物體を釣るしたものを**單振子**と云ふ。

物體が圖のB點にあるとき糸に平行な分力Qkgは

$$Q=w\cos\theta$$

糸に直角な分力Pkgは

$$P=-w\sin\theta=-m\sin\theta$$

Pの負號はPが常に中心Aに向ふ事を示す。

ABの接線方向の力Pは重力單位(kg)なれば接線方向の加速度をαとすると24式より

$$P=\frac{m}{g}\alpha$$

故に次の關係がある。

$$\frac{m}{g}\alpha=-m\sin\theta$$

$$\alpha=-g\sin\theta$$

θが極めて小さい場合には

$$\sin\theta \fallingdotseq \theta$$

$$\therefore\ \boldsymbol{\alpha=-g\theta} \quad\cdots\cdots(209)$$

$\widehat{AB}\fallingdotseq x \qquad \overline{OB}=l$ とすると,

$$x=l\theta \qquad \theta=\frac{x}{l}$$

此の値を209式に代入すると

$$\boldsymbol{\alpha=-\frac{g}{l}x} \quad\cdots\cdots(210)$$

αの式を單弦運動の一般式205式と比較すると,$\frac{g}{l}$ はω^2に該當し單振子に於いてθが小なれば,單弦運動なる事を示す。故に207式のωの代りに $\sqrt{\frac{g}{l}}$ とおき

$$\mathbf{T}=\frac{2\pi}{\sqrt{\frac{g}{l}}}=2\pi\sqrt{\frac{l}{g}} \quad\cdots\cdots(211)$$

即ち**θ小なる單振子の週期Tは振子の長さlが一定なれば物體の重さや振幅に關係なく一定である**。これを振子の**等時性**と云ふ。

【例題】1. 週期2秒の單振子の糸の長さを求めよ。

【解】 $T=2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}$ より

$$l=\frac{T^2g}{4\pi^2}=\frac{2^2\times980}{4\pi^2}\fallingdotseq 99\mathrm{cm}$$

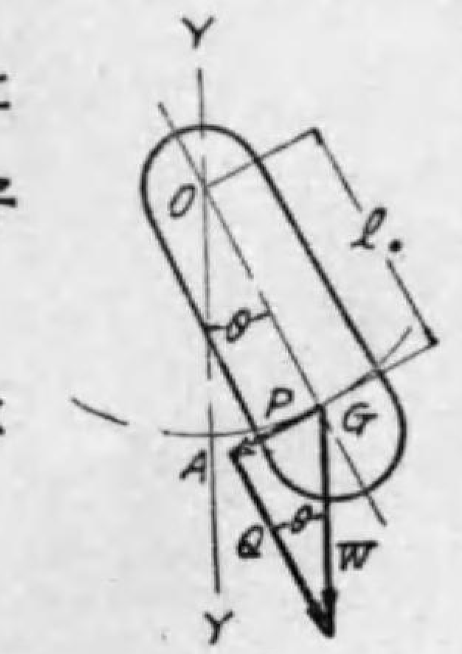
【例題】2. 或る地點で長さ 80m の單振子を振動させた所,周期1.8secであつた。此地點のgの値を求めよ。

【解】 $T=2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}$

$$g=\frac{4\pi^2l}{T^2}=\frac{4\pi^2\times80}{1.8^2}=974\mathrm{cm/sec^2}$$

56. 複振子

第127圖



重量W(kg)の物體を重心以外の點Oで水平に支へ鉛直面に振動し得る樣にしたものを**複振子**又は**物理振子**と云ふ。

Gを重心とすると,接線方向の分力P(kg)は

$$P=-W\sin\theta$$

重力單位の質量Mは $M=\frac{W}{g}$

$$\therefore\ \mathbf{P=-Mg\sin\theta} \quad\cdots\cdots(212)$$

Oに對するPのモーメントは,Oに對する慣性モーメント(重力單位)をI,Oの周りの角加速度をβとすると

$$Pl_o=-Wl_o\sin\theta$$

$$Pl_o=I\beta$$

重心Gを過りOに平行な軸に對する慣性能率を I_G とすると

$$I=I_G+Ml_o^2$$

故に $Pl_o=(I_G+Ml_o^2)\beta$

上式にPの値を代入すると，

$$-Mgl_o\sin\theta=(I_G+Ml_o^2)\beta$$

$$-gl_o\sin\theta=\left(\frac{I_G}{M}+l_o^2\right)\beta$$

Gに對する回轉半徑を k とすると，

$$\frac{I_G}{M}=k^2$$

$$-gl_o\sin\theta=(k^2+l_o^2)\beta$$

$$\beta=-\frac{g}{k^2+l_o^2}l_o\sin\theta\cdots\cdots(213)$$

重心GのGAに沿ふ線加速度を α とすると，

$$\alpha=l_o\beta=-\frac{g}{k^2+l_o^2}l_o^2\sin\theta\cdots\cdots(214)$$

θ が極小なる時は　$\sin\theta\fallingdotseq\theta$

故に　$$\alpha=-\frac{g}{k^2+l_o^2}l_o^2\theta\cdots\cdots(215)$$

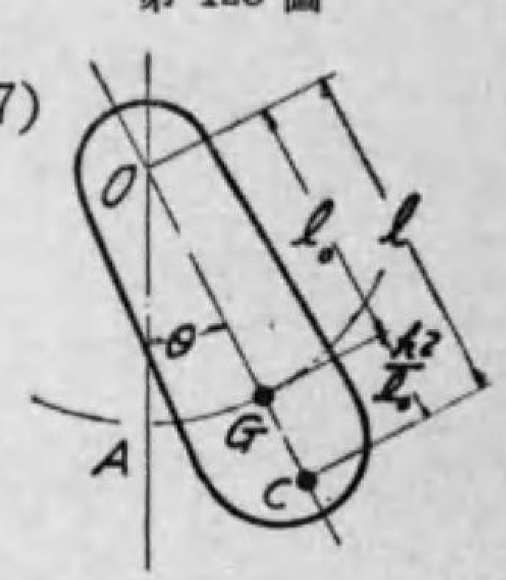
$\widehat{AG}=x$　とすれば　$x=l_o\theta$　$\theta=\frac{x}{l_o}$

故に　$$\alpha=\frac{gl_o}{k^2+l_o^2}x\cdots\cdots(216)$$

即ち複振子の運動も θ が極小さい時は，加速度は中央よりの距離 x に比例するから單弦運動なる事がわかる。

單弦運動の一般式207式と比較すれば ω^2 に當るものは $\frac{gl_o}{k^2+l^2}$ なることがわかる，故に週期T，は208式より

第 128 圖



$$T=\frac{2\pi}{\sqrt{\frac{gl}{k^2+l^2}}}=2\pi\sqrt{\frac{k^2+l_o^2}{gl_o}}\cdots(217)$$

上の複振子と同一周期の單振子を考へると，211式と217式より

$$2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}=2\pi\sqrt{\frac{k^2+l_o^2}{gl_o}}$$

$$l=\frac{k^2+l_o^2}{l_o}=\frac{k^2}{l_o}+l_o\cdots\cdots(218)$$

即ちOより重心迄の距離が l_o，重量Wの複振子は l_o より $\frac{k^2}{l_o}$ だけ遠い點Cに複振子の全重量を集中した單振子の周期と等しい。

此 $\frac{k_2}{l_o}+l_o$ を**相當單振子の長さ**Cを**振動の中心**と云ふ。

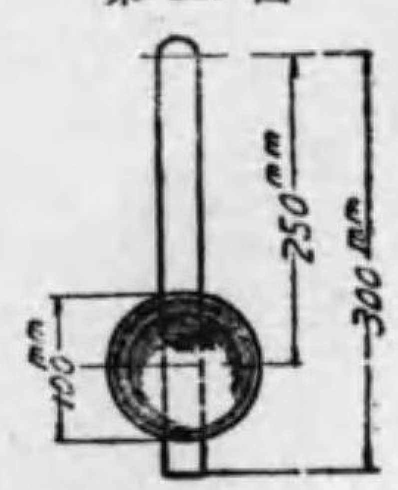
第128圖に於いてOの代りにCを軸として振動さすと，重心G點の距離は $\frac{k^2}{l_o}$ なれば，

$$T=2\pi\sqrt{\frac{k^2+\left(\frac{k^2}{l_o}\right)^2}{g\frac{k^2}{l_o}}}=2\pi\sqrt{\frac{l_o^2+k^2}{gl_o}}\cdots\cdots(219)$$

即ち**振動の中心を中心として振動さすも週期は相等しい。**

【例題】 圖の如く重さ80g，直徑10cmの金屬圓板を重量20g，長さ30cmの棒に取つけて振動させた。此振子の相當單振子の長さ及び周期を求めよ。但し $g=980\text{cm/sec}^2$ とす。

第 129 圖



【解】 218式より

$l=\frac{k^2}{l_o}+l_o$　に於いて

$$l_o=\frac{80\times25+20\times\frac{30}{2}}{100}=23\text{cm}$$

全部のOに對する慣性能率(重力單位)は第3表より

$$I=\frac{1}{2}m_1r^2+m_1a^2+\frac{1}{3}m_2l^2$$

$$=\frac{1}{2}\times\frac{80}{980}\times5^2+\frac{80}{980}\times25^2+\frac{1}{3}\times\frac{20}{980}\times30^2$$

$$=\frac{(1000+50000+6000)}{980}=57000\text{cm}^2\cdot g$$

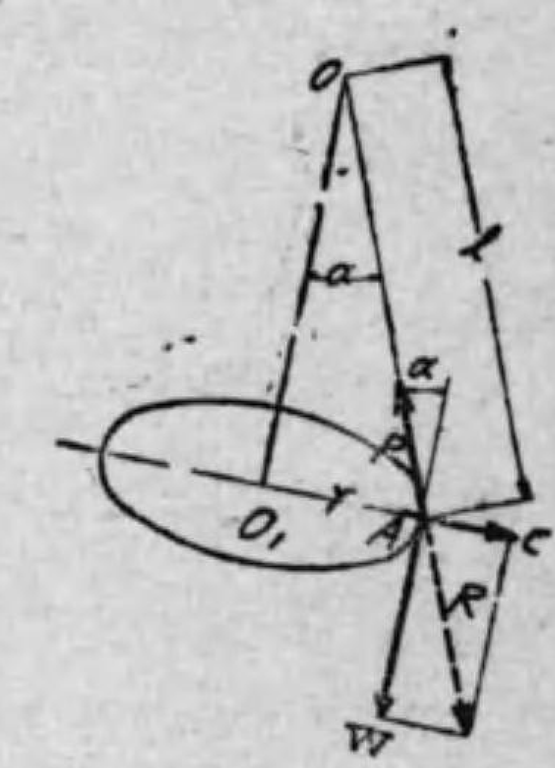
$$k^2=\frac{I}{M}=\frac{980}{100}\times\frac{1}{980}\times57000=570\text{cm}^2$$

∴ $l=\frac{k^2}{l_o}+l_o=\frac{570}{23}+23=47.8\text{cm}$

∴ $T=2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}=2\pi\sqrt{\frac{47.8}{980}}\fallingdotseq 1\text{sec}$

57. 圓錐振子

第 130 圖



重さのない長さ l の糸にW (kg) の重量を附し, OO_1を軸としてOAの水平圓に沿ふて回轉する裝置を圓錐振子と云ふ。

此裝置に於いて遠心力をC(kg), 糸の張力 R(kg), 物體の角速度を ω とすると

$$C=\frac{W}{g}\omega^2 r$$

P.C.W三力の釣合ひの條件より

$$\frac{W}{\cos\alpha}=P=\frac{C}{\sin\alpha}$$

$$\tan\alpha=\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}=\frac{C}{W}=\frac{W}{g}\omega^2 r\frac{1}{W}=\frac{\omega^2 r}{g}$$

然るに圖より $OO_1=h$ とすると $\tan\alpha=\frac{r}{h}$

故に $\frac{r}{h}=\frac{\omega^2 r}{g}$

$$\frac{1}{h}=\frac{\omega^2}{g}$$

$$h=l\cos\alpha=\frac{g}{\omega^2}\quad\cdots\cdots(220)$$

$$\omega=\sqrt{\frac{g}{h}}\quad\cdots\cdots(221)$$

一分間の回轉數を n とすると,

$$h=\frac{g}{\left(2\pi\frac{n}{60}\right)^2}=\frac{3600g}{4\pi^2n^2}=\frac{89500}{n^2}\text{cm}\quad\cdots(222)$$

$$2\pi\frac{n}{60}=\sqrt{\frac{g}{h}}$$

又 $n=\frac{30}{\pi}\sqrt{\frac{g}{h}}$ ……(223)

となる。即ち第222式より**錘の高さは回轉數の二乘に反比例し錘の重量及び糸の長さに關係なし。**

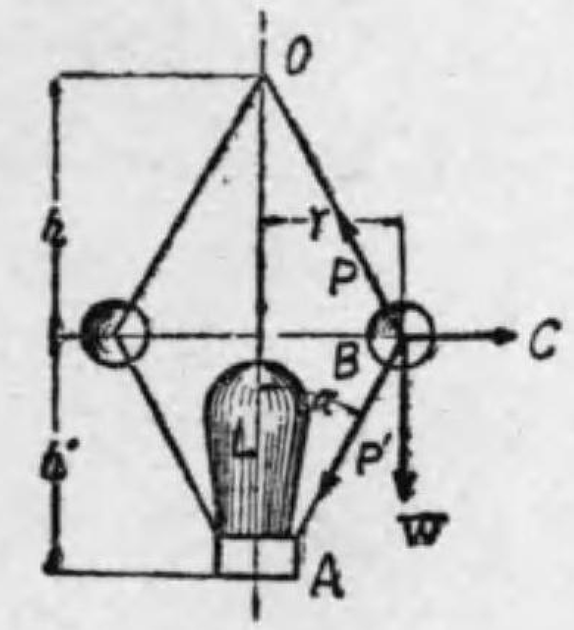
週期Tは $T=\frac{2\pi}{\omega}=2\pi\sqrt{\frac{h}{g}}$ ……(224)

單位時間の回轉數 n は

$$n=\frac{1}{T}=\frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{g}{h}}\quad\cdots\cdots(225)$$

機械の調速機は圓錐振子の利用である。

第 131 圖



第131圖の如くAの部分に重量Lを加へると重錘の上りを抑制する。此時には

$$Ch=Wr+(Ph+P'h')\sin\alpha$$

然るに $P'=\frac{1}{2}L\sec\alpha$

又 $h=h'$ とすると $P=P'$

となる

$$\frac{W}{g}r\omega^2 h=Wr+\frac{L}{2}\sin\alpha\sec\alpha(h+h')$$

$$\frac{W}{g}r\omega^2 h=Wr+Lh\tan\alpha$$

$$\therefore\ h=\frac{g}{\omega^2}\left(\frac{W+L}{W}\right)=\frac{89500}{n^2}\left(1+\frac{L}{W}\right)\cdots\cdots(226)$$

即ち222式と226式を比較するとLの重量を加へたため同一回轉でも錘の上りは大きくなる。

【例題】 1 分間に80回轉する圓錐振子が 1cm 上るためには何回轉增加したらよいか。但し $g=9.81\text{m/sec}$ とす。

【解】 220式 $h=\frac{g}{\omega^2}$ に於いて

$$\omega=\frac{2\pi\times 80}{60}=\frac{8\pi}{3}\,\text{rad/sec.}$$

$$\therefore\ h=\frac{9.81}{\left(\frac{8\pi}{3}\right)^2}=0.14\text{m}$$

1cm 上ると $h'=0.14-0.01=0.13$

此時の角速度は

$$\omega=\sqrt{\frac{g}{h}}=\sqrt{\frac{9.81}{0.13}}=8.69\,\text{rad/sec.}$$

回轉數にすると

$$\frac{60\omega}{2\pi}=\frac{60\times 8.69}{2\times 3.14}=83\text{R. P. M}$$

即回轉數の增加 83−80=3R. P. M

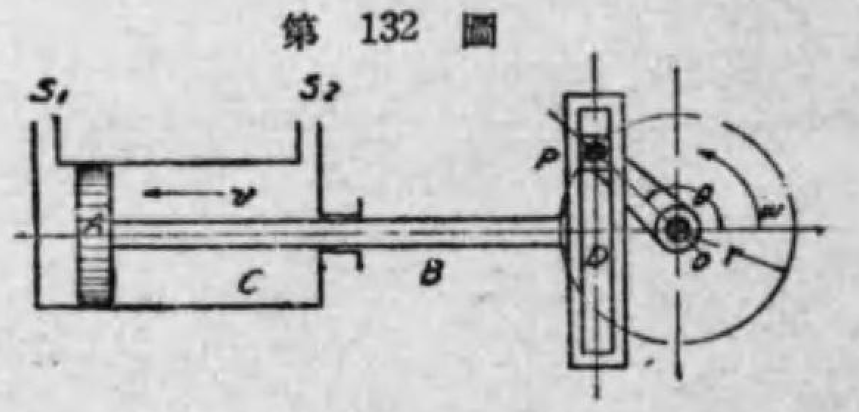
練習問題

(1) 單弦運動をして居る物體が中心より 10cm の距離で2m, 7cmの距離で2.5cm の速度であるといふ。振幅, 周期及最大速度を求めよ。

(ans. $r=1.38$, $T=0.235$, $v=2.9$m/sec)

(2) 第130圖のポンプにて $r=25$cm, $\omega=2\pi$rad/sec, なりといふ。$\theta=40°$ の點のピストンの變位, 速度, 加速度を求めよ。

第 132 圖



($x=0.16$m, $v=1.8$m/sec, $\alpha=14.2$m/sec^2)

(3) 或地點で長さ 3m の振子を振らせて周期 1·736sec を得たり。g の値を求めよ。 (ans. 9.815m/sec^2)

(4) 重さ 800kg の車を第133圖のやうに, A 點で水平支へ刄にて支へて自由に振動させた所, 1分間に27振動した。A點及O軸に對する慣性モーメントを求めよ。

(ans. $I_a=50$mkg, $I_o=29.6$mkg)

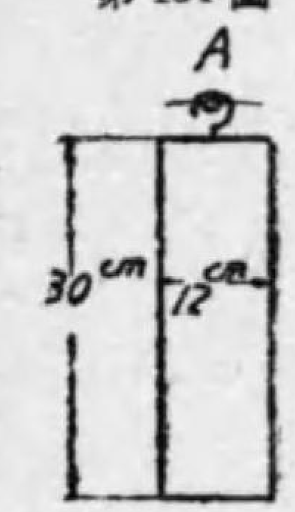
第 133 圖

(5) 長さ 80cm の單振子が100回振動するに, 155.5秒を要したといふ。此地點の g を求めよ。 (ans. $g=9.796$m/sec)

(6) 第134圖のような直徑 12cm, 長さ 30cm の丸棒を A 點を中心として振動させるときの周期及び振動の中心の位置を見出せ。

(ans. T=0.91sec, Aより 20.6cm

第 134 圖



(7) 100 R. P. M. の圓錐振子が 0.5cm 上るには回轉數を幾ら增したらよいか。 (ans. 3回轉)

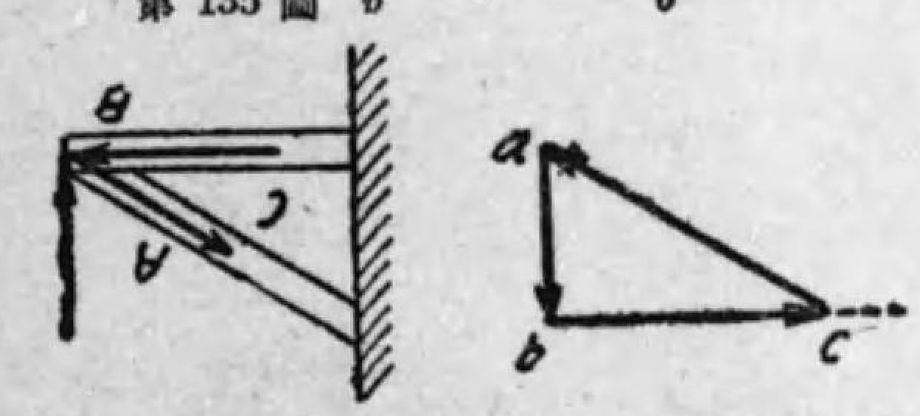
(8) 第131圖に於て W=3kg, L=40kg, A 點の摩擦抵抗2kg とすれば, 每分200回轉する時, h の高さを求めよ。(摩擦力はこれだけ L が少さくなつたとすればよい) (ans. $h=33.5$cm)

第十一章 圖式力學

58. 圖式力學

平面上の力の釣合ひの問題をとくに計算用ひず, ベクトル線圖による方法を**圖法力學**と云ふ。複雜な構造物に加はる荷重を知つて, 各部に及ぼす力を見出すには最も便利である。

第 135 圖

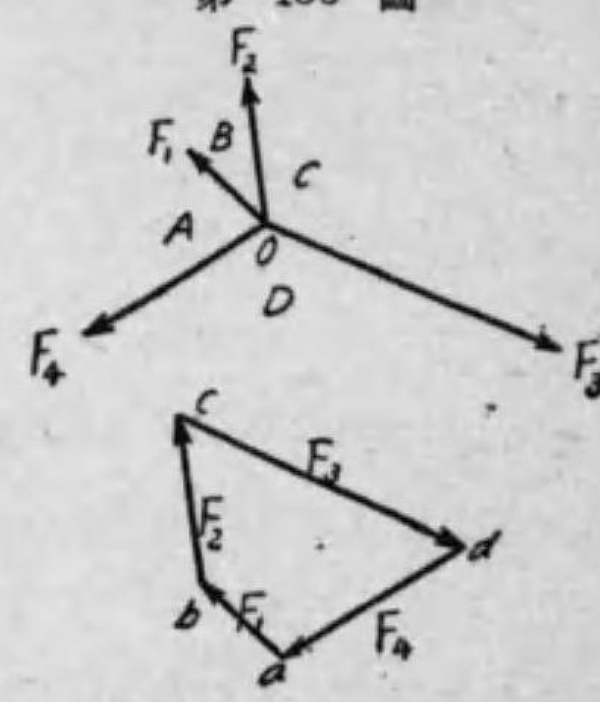


構造物を適當な縮尺で畫き, これに第135圖の樣にこれに働く力の位置, 方向及び向きを記入したものを**構造圖**と云ふ。此の時各組子に働く力を表はすにバウの記號法が使用せられる。

バウの記號法では力自身には何等の記號をつけないで第 136 圖

様に，力に依つて區劃された空間に A, B, C……の如く記號を附し，F_1の力を *ab* の力，F_2の力を *bc* の力と呼ぶのである。バウの記號法によつて表はした力のベクトル圖を作り，力が釣合つて居れば 第136圖の如き多角形が得られる。

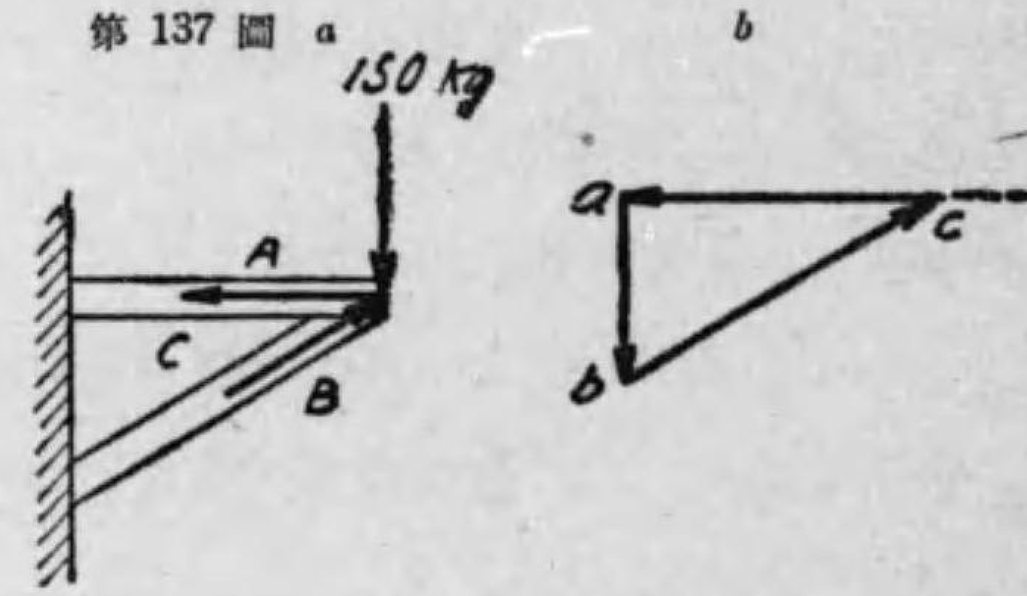
第 136 圖



バウの記號法を用ひると構造圖とベクトル圖を對照するに便利である。空間には大文字を A, B, C …… の如く，力のベクトルを表はすには *ab. bc, cd*……の如く小文字を用ひ，且つ右廻りに讀む。

最も簡單な構造物につき圖法力學によつて各部に働く力を求める。

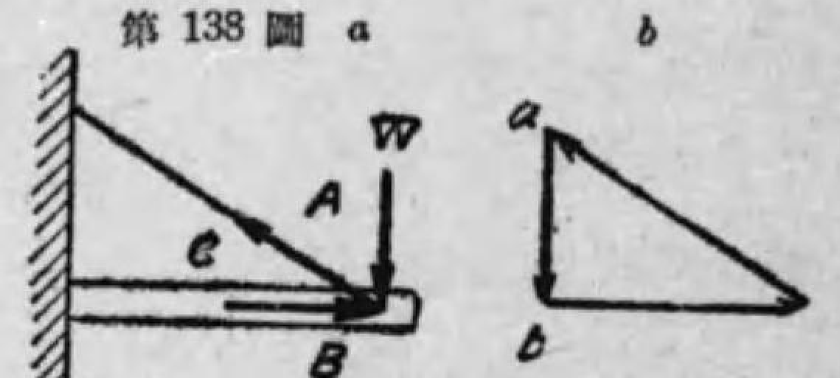
第 137 圖 a　　b



第137圖に於いて空間に記號を附す。150kg の力をベクトル*ab*で表はす。

桁 BC に並行に *b* より *bc* を引く，*a*を通り桁 CA に並行に *ca* を引く。各桁內の內力と 150kg の力は釣合つて居るのであるから矢印は *ab, bc, ca*の順序に附す。

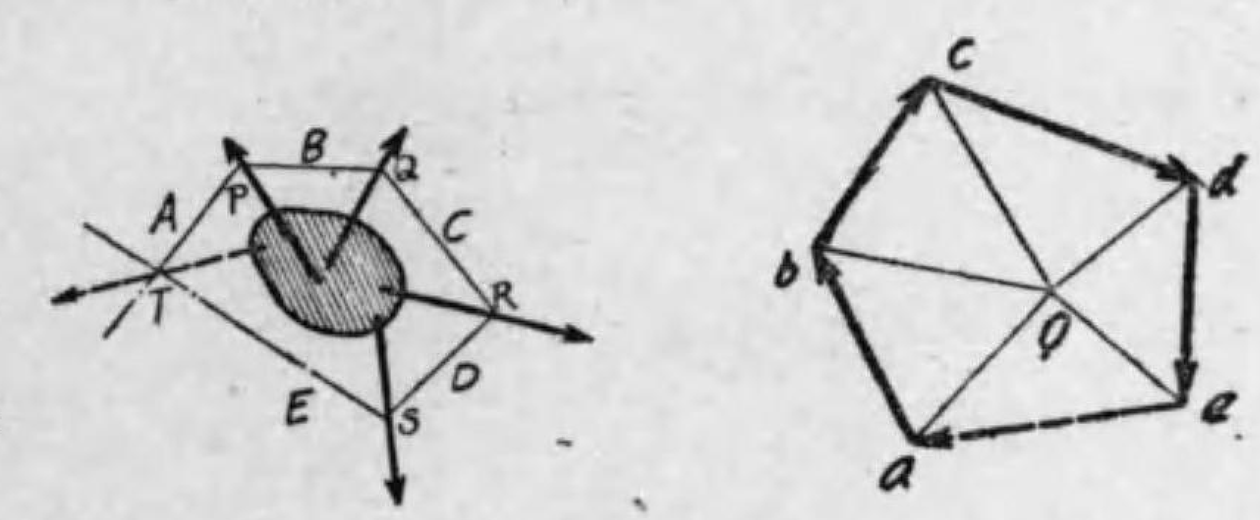
第 138 圖 a　　b



此ベクトル圖より *ca* は桁CAに生ずる內力，*bc*は桁 BC に動く內力を表はす。

力が一點に會する時には前の如く簡單であるが，第139圖の如く一點に會さない力の場合には，ベクトル線圖のみでは解く事は出來ない。F_1, F_2, F_3, F_4 の力が一點に會さない力とし其れに釣合ふ力Fを求めんとす。

第 139 圖 a　　b

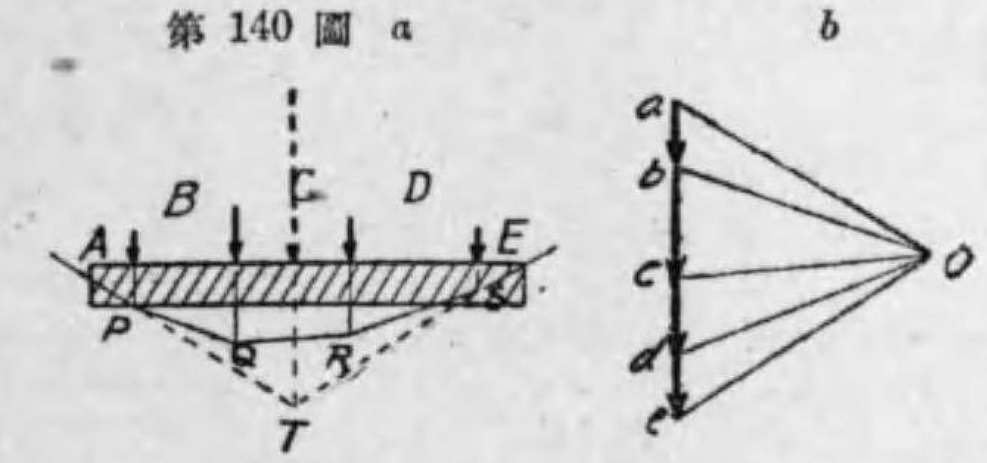


先づ *b* 圖の如くベクトル多角形 *eabcde* を作ると *ea*は釣合ふ力 Fの大きさ方向を示す。然し着力點は不明である。着力點を見出すにはベクトル多角形中の任意の點 *o* をとり *oa, ob, oc, od, oe* を結ぶ。此の *o* を**極**と云ひ，*oa, ob*……を**極線**と云ふ。

次にABの力上に任意の點 P をとり，P より A の空間に*oa*に平行に PT を，*ob* に平行に B の空間にPQを，*oc* に平行に C の空間に QRを，*od* に平行にDの空間に RSを，*oe* に平行にEの空間 ST を引くと T點は合力Fの動く點を示す。PQRST を**リンク多角形**と云ふ。

次に平行力の場合を考へるに，平行力のベクトル線圖は一直線となり合力の大きさは各力の 和 *ae* となる。次に合力の作用點はベクトル線圖外任意の點に *o* をとり

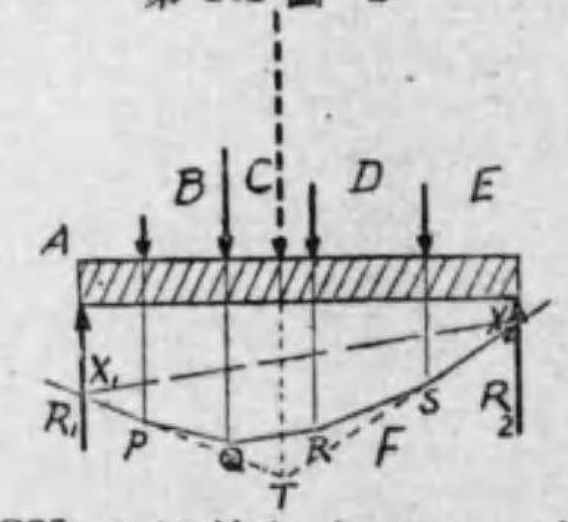
第 140 圖 a　　b



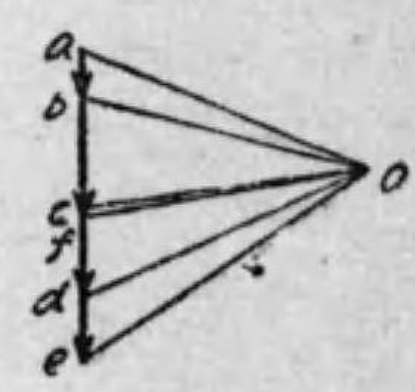
oa, ob, oc, od, oe を引く，oa に平行にPTを ob に平行にPQを，ocに平行に QR, od に平行に RS, oe に平行にSTを引くとPTとSTの會する點Tは合力の作用點を示す。此點に ae と大きさ等しく方向反對の力を作用すると釣合ふ。

平行力を二點にて支持されて居るとし，この支持力R_1 R_2を求めるには前と同様にしてベクトル線圖及び X_1PQRSX_2 の折線を求める。次に支點をX_1,X_2とし，X_1X_2 に平行にベクトル of を引けば ef は EF 即ち R_2の大きさを示し，fa は FA 即ち R_1 の大きさを示す。

第 141 圖 a



b

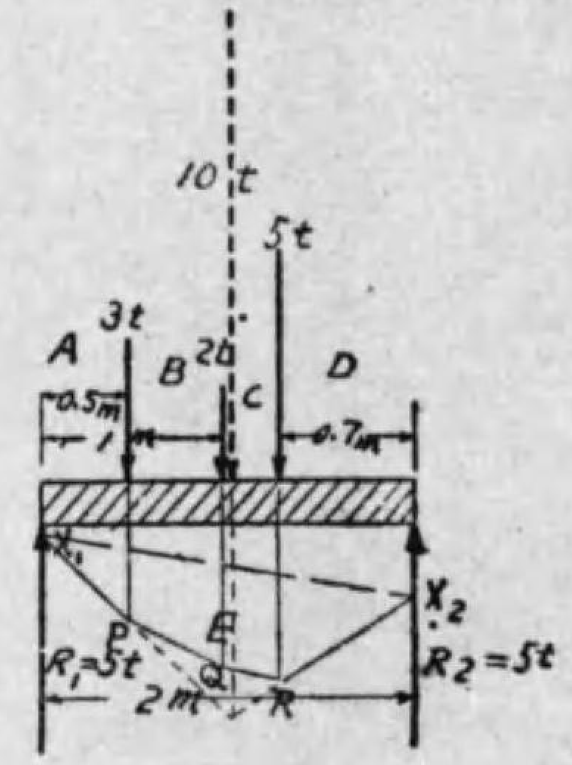


【例題】 梁に圖の如き荷重がかゝつた時の反力R_1R_2を求めよ。

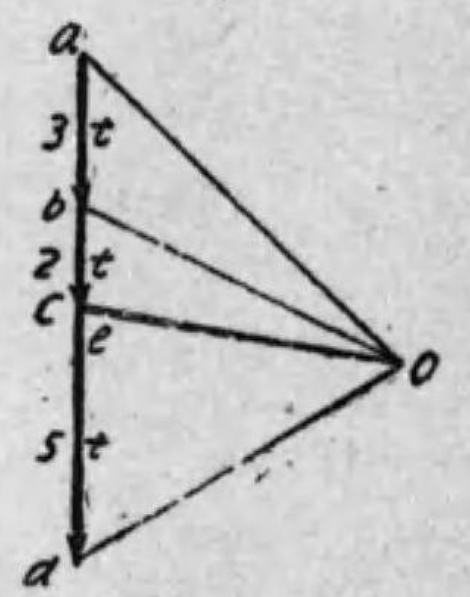
【解】

1. 空間にABCDEの符號を附す。
2. ab, bc, cdの長さを力の大きさに比例して引く。
3. oa, ob, oc, od を引く。
4. X_1PQRX_2 の折線を引く。
5. X_1X_2線を引く。
6. X_1X_2 に平行して oe を引く。

第 142 圖 a



b



7. oe に oa 及び ob の比例常數をかけると，R_1 の大さがわかる。
8. ed に oa 及び ob の比例常數をかけると R_2 が出る。

結果　　1t を 0.5cmの長さで 1m を 2cm でかくと，

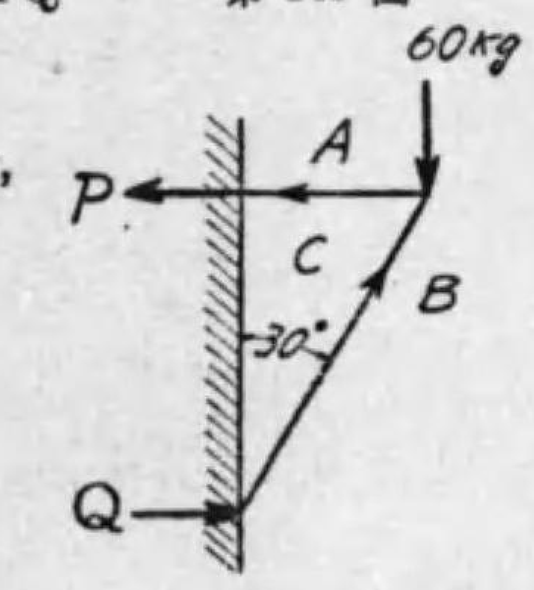
$R_1=25cm=5t$　　$R_2=25cm=5t$

練習問題

（1） 第143圖に於て BC 及 CA の桁に働く力 PQ を圖法及び計算によつて求めよ。

（ans. CA=34.6kg，BC=69.3kg，P=Q=34.6kg）

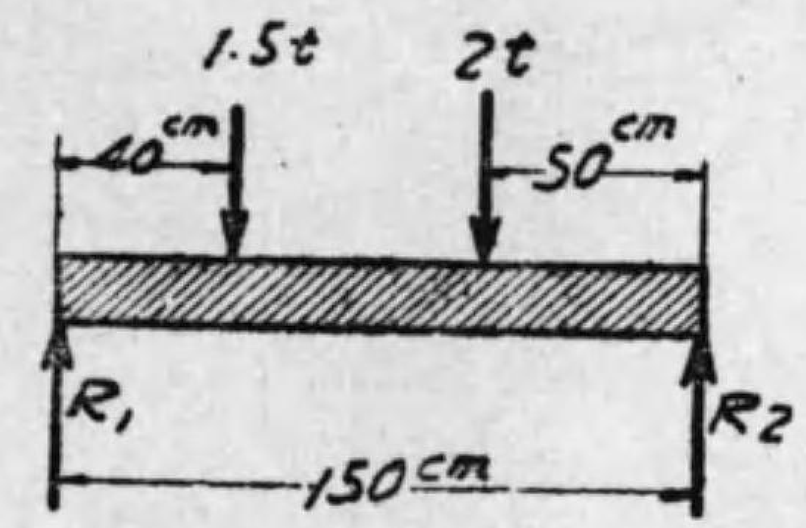
第 143 圖



（2） 第144圖の装置に於て梁は斷面積一様にして重量 1t とすればR_1R_2は何程となるか。

（ans. 2.23t，2.26t）

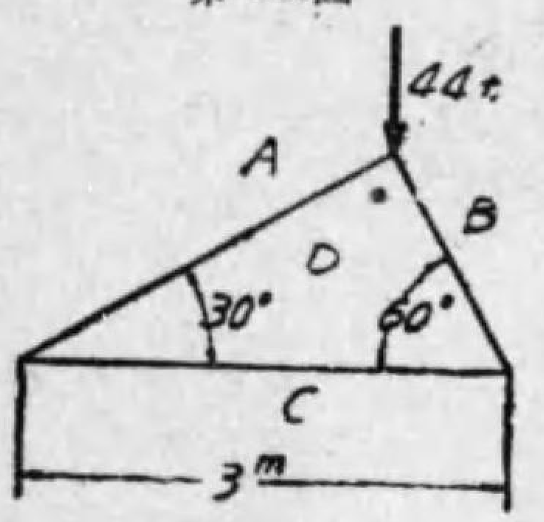
第 144 圖



（3） 第145圖の各桁に働らく力を計算及び圖式によつて求めよ。

（ans. DA=22kg．BD=38.1kg，CD=19.05kg）

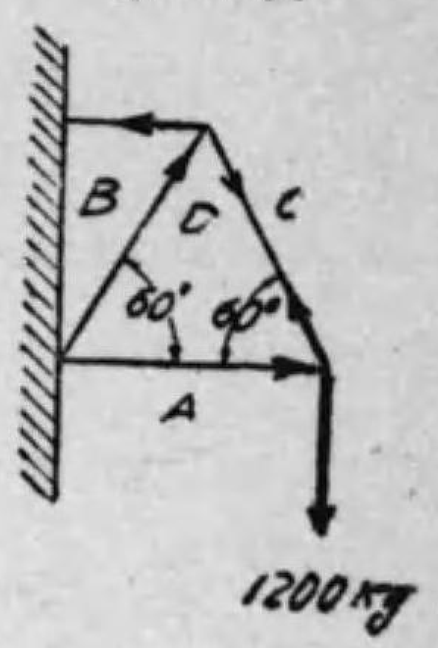
第 145圖



（4） 第146圖各部の力を求めよ。

$\left(\text{ans.}\ \begin{matrix} CD = 1385\,kg, & AD = 693\,kg \\ BD = 1385\,kg, & BC = 1385\,kg \end{matrix}\right)$

第 146 圖



附　　錄

第1表　常用對數表

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9		0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
10	0000	043	086	128	170	212	253	294	334	374	55	7404	412	419	427	435	443	451	459	466	474
11	414	453	492	531	569	607	645	682	719	755	56	482	490	497	505	513	520	528	536	543	551
12	792	828	864	899	934	969	*004	*038	*072	*106	57	559	566	574	582	589	597	604	612	619	627
13	1139	173	206	239	271	303	335	367	399	430	58	634	642	649	657	664	672	679	686	694	701
14	461	492	523	553	584	614	644	673	703	732	59	709	716	723	731	738	745	752	760	767	774
15	761	790	818	847	875	903	931	959	987	*014	60	782	789	796	803	810	818	825	832	839	846
16	2041	068	095	122	148	175	201	227	253	279	61	853	860	868	875	882	889	896	903	910	917
17	304	330	355	380	405	430	455	480	504	529	62	924	931	938	945	952	959	966	973	980	987
18	553	577	601	625	648	672	695	718	742	765	63	993	*000	*007	*014	*021	*028	*035	*041	*048	*055
19	788	810	833	856	878	900	923	945	967	989	64	8062	069	075	082	089	096	102	109	116	122
20	3010	032	054	075	096	118	139	160	181	201	65	129	136	142	149	156	162	169	176	182	189
21	222	243	263	284	304	324	345	365	385	404	66	195	202	209	215	222	228	235	241	248	254
22	424	444	464	483	502	522	541	560	579	598	67	261	267	274	280	287	293	299	306	312	319
23	617	636	655	674	692	711	729	747	766	784	68	325	331	338	344	351	357	363	370	376	382
24	802	820	838	856	874	892	909	927	945	962	69	388	395	401	407	414	420	426	432	439	445
25	979	997	*014	*031	*048	*065	*082	*099	*116	*133	70	451	457	463	470	476	482	488	494	500	506
26	4150	166	183	200	216	232	249	265	281	298	71	513	519	525	531	537	543	549	555	561	567
27	314	330	346	362	378	393	409	425	440	456	72	573	579	585	591	597	603	609	615	621	627
28	472	487	502	518	533	548	564	579	594	609	73	633	639	645	651	657	663	669	675	681	686
29	624	639	654	669	683	698	713	728	742	757	74	692	698	704	710	716	722	727	733	739	745
30	771	786	800	814	829	843	857	871	886	900	75	751	756	762	768	774	779	785	791	797	802
31	914	928	942	955	969	983	997	*011	*024	*038	76	808	814	820	825	831	837	842	848	854	859
32	5051	065	079	092	105	119	132	145	159	172	77	865	871	876	882	887	893	899	904	910	915
33	185	198	211	224	237	250	263	276	289	302	78	921	927	932	938	943	949	954	960	965	971
34	315	328	340	353	366	378	391	403	416	428	79	976	982	987	993	998	*004	*009	*015	*020	*025
35	441	453	465	478	490	502	514	527	539	551	80	9031	036	042	047	053	058	063	069	074	079
36	563	575	587	599	611	623	635	647	658	670	81	085	090	096	101	106	112	117	122	128	133
37	682	694	705	717	729	740	752	763	775	786	82	138	143	149	154	159	165	170	175	180	186
38	798	809	821	832	843	855	866	877	888	899	83	191	196	201	206	212	217	222	227	232	238
39	911	922	933	944	955	966	977	988	999	*010	84	243	248	253	258	263	269	274	279	284	289
40	6021	031	042	053	064	075	085	096	107	117	85	294	299	304	309	315	320	325	330	335	340
41	128	138	149	160	170	180	191	201	212	222	86	345	350	355	360	365	370	375	380	385	390
42	232	243	253	263	274	284	294	304	314	325	87	395	400	405	410	415	420	425	430	435	440
43	335	345	355	365	375	385	395	405	415	425	88	445	450	455	460	465	469	474	479	484	489
44	435	444	454	464	474	484	493	503	513	522	89	494	499	504	509	513	518	523	528	533	538
45	532	542	551	561	571	580	590	599	609	618	90	542	547	552	557	562	566	571	576	581	586
46	628	637	646	656	665	675	684	693	702	712	91	590	595	600	605	609	614	619	624	628	633
47	721	730	739	749	758	767	776	785	794	803	92	638	643	647	652	657	661	666	671	675	680
48	812	821	830	839	848	857	866	875	884	893	93	685	689	694	699	703	708	713	717	722	727
49	902	911	920	928	937	946	955	964	972	981	94	731	736	741	745	750	754	759	763	768	773
50	990	998	*007	*016	*024	*033	*042	*050	*059	*067	95	777	782	786	791	795	800	805	809	814	818
51	7076	084	093	101	110	118	126	135	143	152	96	823	827	832	836	841	845	850	854	859	863
52	160	168	177	185	193	202	210	218	226	235	97	868	872	877	881	886	890	894	899	903	908
53	243	251	259	267	275	284	292	300	308	316	98	912	917	921	926	930	934	939	943	948	952
54	324	332	340	348	356	364	372	380	388	396	99	956	961	965	969	974	978	983	987	991	996

比 例 部 分 表

	11	12	13	14	15	16	17	18	19	21	22	23	24	25	26	27	28	29	31
1	1.1	1.2	1.3	1.4	1.5	1.6	1.7	1.8	1.9	2.1	2.2	2.3	2.4	2.5	2.6	2.7	2.8	2.9	3.1
2	2.2	2.4	2.6	2.8	3.0	3.2	3.4	3.6	3.8	4.2	4.4	4.6	4.8	5.0	5.2	5.4	5.6	5.8	6.2
3	3.3	3.6	3 9	4.2	4.5	4.8	5.1	5.4	5.7	6.3	6.6	6 9	7.2	7.5	7.8	8.1	8.4	8.7	9.3
4	4.4	4.8	5.2	5.6	6.0	6.4	6.8	7.2	7.6	8.4	8.8	9.2	9.6	10.0	10.4	10.8	11.2	11.6	12.4
5	5.5	6.0	6.5	7.0	7.5	8.0	8.5	9.0	9.5	10.5	11 0	11.5	12.0	12.5	13.0	13.5	14.0	14.5	15.5
6	6.6	7.2	7.8	8.4	9.0	9.6	10.2	10.8	11.4	12.6	13.2	13.8	14.4	15.0	15.6	16.2	16.8	17.4	18.6
7	7.7	8.4	9.1	9.8	10.5	11.2	11.9	12.6	13.3	14.7	15.4	16.1	16.8	17.5	18.2	18.9	19.6	20.3	21.7
8	8 8	9.6	10.4	11.2	12.0	12.8	13.6	14.4	15.2	16.8	17.6	18.4	19.2	20.0	20.8	21.6	22.4	23.2	24.8
9	9.9	10.8	11.7	12.6	13.5	14.4	15.3	16.2	17.1	18.9	19.8	20.7	21.6	22.5	23.4	24.3	25.2	26.1	27.9
	32	33	34	35	36	37	38	39	41	42	43	44	45	46	47	48	49	51	52
1	3.2	3.3	3.4	3.5	3 6	3.7	3.8	3 9	4.1	4 2	4.3	4.4	4.5	4.6	4.7	4.8	4.9	5.1	5.2
2	6 4	6.6	6.8	7.0	7.2	7.4	7.6	7.8	8.2	8.4	8.6	8.8	9.0	9.2	9.4	9.6	9.8	10.2	10.4
3	9.6	9.9	10.2	10.5	10.8	11.1	11.4	11.7	12.3	12.6	12 9	13.2	13.5	13.8	14.1	14.4	14.7	15.3	15.6
4	12 8	13.2	13.6	14.0	14.4	14.8	15.2	15.6	16.4	16.8	17.2	17.6	18.0	18.4	18.8	19.2	19.6	20.4	20.8
5	16.0	16.5	17.0	17.5	18.0	18.5	19.0	19.5	20.5	21.0	21.5	22.0	22.5	23.0	23.5	24.0	24.5	25.5	26.0
6	19.2	19.8	20.4	21.0	21.6	22.2	22.8	23.4	24.6	25.2	25.8	26.4	27.0	27.6	28.2	28.8	29.4	30.6	31.2
7	22.4	23.1	23.8	24.5	25.2	25.9	26.6	27.3	28.7	29.4	30.1	30.8	31.5	32.2	32.9	33.6	34.3	35.7	36.4
8	25.6	26.4	27.2	28.0	28.8	29.6	30.4	31.2	32.8	33.6	34.4	35.2	36.0	36.8	37.6	38.4	39.2	40.8	41.6
9	28.8	29.7	30.6	31.5	32.4	33.3	34.2	35.1	36.9	37.8	38.7	39.6	40.5	41.4	42.3	43.2	44.1	45.9	46.8
	53	54	55	56	57	58	59	61	62	63	64	65	66	67	68	69	71	73	74
1	5.3	5.4	5.5	5.6	5.7	5.8	5.9	6.1	6.2	6.3	6.4	6.5	6.6	6.7	6.8	6.9	7.1	7.3	7.4
2	10.6	10.8	11.0	11.2	11.4	11.6	11.8	12.2	12.4	12.6	12.8	13.0	13.2	13.4	13.6	13.8	14.2	14.6	14.8
3	15.9	16.2	16.5	16.8	17.1	17.4	17.7	18.3	18.6	18.9	19.2	19.5	19.8	20.1	20.4	20.7	21.3	21.9	22.2
4	21.2	21.6	22.0	22.4	22.8	23.2	23.6	24.4	24.8	25.2	25.6	26.0	26.4	26.8	27.2	27.6	28.4	29.2	29.6
5	26.5	27.0	27.5	28.0	28.5	29.0	29.5	30.5	31.0	31.5	32.0	32.5	33.0	33.5	34.0	34.5	35.5	36.5	37.0
6	31 8	32.4	33.0	33.6	34.2	34.8	35.4	36.6	37.2	37.8	38.4	39.0	39.6	40.2	40.8	41.4	42.6	43.8	44.4
7	37.1	37.8	38.5	39.2	39.9	40.6	41.3	42.7	43.4	44.1	44.8	45.5	46.2	46.9	47.6	48.3	49.7	51.1	51.8
8	42.4	43.2	44.0	44.8	45.6	46.4	47.2	48.8	49.6	50.4	51.2	52.0	52.8	53.6	54.4	55.2	56.8	58.4	59.2
9	47.7	48.6	49.5	50.4	51.3	52.2	53.1	54.9	55.8	56.7	57.6	58.5	59.4	60.3	61.2	62.1	63.9	65.7	66.6
	75	76	77	78	79	81	82	84	85	86	87	89	91	93	94	95	97	98	99
1	7.5	7.6	7.7	7.8	7.9	8.1	8.2	8.4	8.5	8.6	8.7	8.9	9.1	9.3	9.4	9.5	9.7	9.8	9.9
2	15.0	15.2	15.4	15.6	15.8	16.2	16.4	16.8	17.0	17.2	17.4	17.8	18.2	18.6	18.8	19.0	19.4	19.6	19.8
3	22.5	22.8	23.1	23.4	23.7	24.3	24.6	25.2	25.5	25.8	26.1	26.7	27.3	27.9	28.2	28.5	29.1	29.4	29.7
4	30.0	30.4	30.8	31.2	31.6	32.4	32.8	33 6	34.0	34.4	34.8	35.6	36.4	37.2	37.6	38.0	38.8	39.2	39.6
5	37.5	38.0	38.5	39.0	39.5	40.5	41.0	42.0	42.5	43.0	43.5	44.5	45.5	46.5	47.0	47.5	48.5	49.0	49.5
6	45.0	45.6	46.2	46.8	47.4	48.6	49.2	50.4	51.0	51.6	52.2	53.4	54.6	55.8	56.4	57.0	58.2	58.8	59.4
7	52.5	53.2	53.9	54.6	55.3	56.7	57.4	58.8	59.5	60.2	60.9	62.3	63.7	65.1	65.8	66.5	67.9	68.6	69.3
8	60.0	60.8	61.6	62.4	63.2	64.8	65.6	67.2	68.0	68.8	69.6	71.2	72.8	74.4	75.2	76.0	77.6	78.4	79.2
9	67.5	68.4	69.3	70.2	71.1	72.9	73.8	75.6	76.5	77.4	78.3	80.1	81.9	83.7	84.6	85.5	87.3	88.2	89.1

第 2 表 三 角 函 數 表

正 弦

度	- 0′ 0°·0	6′ 0°·1	12′ 0°·2	18′ 0°·3	24′ 0°·4	30′ 0°·5	36′ 0°·6	42′ 0°·7	48′ 0°·8	54′ 0°·9	比例部分 1	2	3	4	5
0	·00000	00175	00349	00524	00698	00873	01047	01222	01396	01571	29	58	87	117	145
1	·01745	01920	02094	02269	02443	02618	02792	02967	03141	03316	29	58	87	117	145
2	·03490	03664	03839	04013	04188	04362	04536	04711	04885	05059	29	58	87	116	145
3	·05234	05408	05582	05756	05931	06105	06279	06453	06627	06802	29	58	87	116	145
4	·06976	07150	07324	07498	07672	07846	08020	08194	08368	08542	29	58	87	116	145
5	·08716	08889	09063	09237	09411	09585	09758	09932	10106	10279	29	58	87	116	145
6	·10453	10626	10800	10973	11147	11320	11494	11667	11840	12014	29	58	87	116	145
7	·12187	12360	12533	12706	12880	13053	13226	13399	13572	13744	29	58	87	115	144
8	·13917	14090	14263	14436	14608	14781	14954	15126	15299	15471	29	58	86	115	144
9	·15643	15816	15988	16160	16333	16505	16677	16849	17021	17193	29	57	86	115	144
10	·17365	17537	17708	17880	18052	18224	18395	18567	18738	18910	29	57	86	114	143
11	·19081	19252	19423	19595	19766	19937	20108	20279	20450	20620	29	57	86	114	143
12	·20791	20962	21132	21303	21474	21644	21814	21985	22155	22325	28	57	85	114	142
13	·22495	22665	22835	23005	23175	23345	23514	23684	23853	24023	28	57	85	113	141
14	·24192	24362	24531	24700	24869	25038	25207	25376	25545	25713	28	56	85	113	141
15	·25882	26050	26219	26387	26556	26724	26892	27060	27228	27396	28	56	84	112	140
16	·27564	27731	27899	28067	28234	28402	28569	28736	28903	29070	28	56	84	112	139
17	·29237	29404	29571	29737	29904	30071	30237	30403	30570	30736	28	56	83	111	139
18	·30902	31068	31233	31399	31565	31730	31896	32061	32227	32392	28	55	83	110	138
19	·32557	32722	32887	33051	33216	33381	33545	33710	33874	34038	27	55	82	110	137
20	·34202	34366	34530	34694	34857	35021	35184	35347	35511	35674	27	55	82	109	136
21	·35837	36000	36162	36325	36488	36650	36812	36975	37137	37299	27	54	81	108	135
22	·37461	37622	37784	37946	38107	38268	38430	38591	38752	38912	27	54	81	107	134
23	·39073	39234	39394	39555	39715	39875	40035	40195	40355	40514	27	53	80	107	133
24	·40674	40833	40992	41151	41310	41469	41628	41787	41945	42104	27	53	79	106	132
25	·42262	42420	42578	42736	42894	43051	43209	43366	43523	43680	26	53	79	105	131
26	·43837	43994	44151	44307	44464	44620	44776	44932	45088	45243	26	52	78	104	130
27	·45399	45554	45710	45865	46020	46175	46330	46484	46639	46793	26	52	77	103	129
28	·46947	47101	47255	47409	47562	47716	47869	48022	48175	48328	26	51	77	102	128
29	·48481	48634	48786	48938	49090	49242	49394	49546	49697	49849	25	51	76	101	126
30	·50000	50151	50302	50453	50603	50754	50904	51054	51204	51354	25	50	75	100	125
31	·51504	51653	51803	51952	52101	52250	52399	52547	52696	52844	25	50	74	99	124
32	·52992	53140	53288	53435	53583	53730	53877	54024	54171	54317	25	49	74	98	123
33	·54464	54610	54756	54902	55048	55194	55339	55484	55630	55775	24	49	73	97	121
34	·55919	56064	56208	56353	56497	56641	56784	56928	57071	57215	24	48	72	96	120
35	·57358	57501	57643	57786	57928	58070	58212	58354	58496	58637	24	48	71	95	118
36	·58778	58920	59061	59201	59342	59482	59622	59763	59902	60042	23	47	70	94	117
37	·60181	60321	60460	60599	60738	60876	61015	61153	61291	61429	23	46	69	92	115
38	·61566	61704	61841	61978	62115	62251	62388	62524	62660	62796	23	46	68	91	114
39	·62932	63068	63203	63338	63473	63608	63742	63877	64011	64145	23	45	67	90	112
40	·64279	64412	64546	64679	64812	64945	65077	65210	65342	65474	22	44	66	88	111
41	·65606	65738	65869	66000	66131	66262	66393	66523	66653	66783	22	44	65	87	109
42	·66913	67043	67172	67301	67430	67559	67688	67816	67944	68072	22	43	64	86	107
43	·68200	68327	68455	68582	68709	68835	68962	69088	69214	69340	21	42	63	84	106
44	·69466	69591	69717	69842	69966	70091	70215	70339	70463	70587	21	41	62	83	104

正 弦

度	0 0°·0	6′ 0°·1	18′ 0°·2	18′ 0°·3	24′ 0°·4	30′ 0°·5	36′ 0°·6	42′ 0°·7	48′ 0°·8	54′ 0°·9	比例部分 1	2	3	4	5
45	·70711	70834	70957	71080	71203	71325	71447	71569	71691	71813	20	41	61	82	102
46	·71934	72055	72176	72297	72417	72537	72657	72777	72897	73016	20	40	60	80	100
47	·73135	73254	73373	73491	73610	73728	73846	73963	74080	74198	20	39	59	79	98
48	·74314	74431	74548	74664	74780	74896	75011	75126	75241	75356	20	39	58	77	96
49	·75471	75585	75700	75813	75927	76041	76154	76267	76380	76492	19	38	57	76	94
50	·76604	76717	76828	76940	77051	77162	77273	77384	77494	77605	19	37	56	74	93
51	·77715	77824	77934	78043	78152	78261	78369	78478	78586	78694	18	36	54	72	91
52	·78801	78908	79015	79122	79229	79335	79441	79547	79653	79758	18	35	53	71	89
53	·79864	79968	80073	80173	80282	80386	80489	80593	80696	80799	17	35	52	69	87
54	80902	81004	81106	81203	81310	81412	81513	81614	81714	81815	17	34	51	68	84
55	·81915	82015	82115	82214	82314	82413	82511	82610	82708	82806	16	33	49	66	82
56	·82904	83001	83098	83195	83292	83389	83485	83581	83676	83772	16	32	48	64	80
57	·83867	83962	84057	84151	84245	84339	84433	84526	84619	84712	16	31	47	62	78
58	·84805	84897	84987	·85081	85173	85264	85355	85446	85536	85627	15	31	46	61	76
59	·85717	85806	85896	85985	86074	86163	86251	86340	86427	86515	15	30	44	59	74
60	6603	86690	86777	86863	86949	87036	87121	87207	87292	87377	14	29	43	57	72
61	·87462	87546	87631	87715	87798	87882	87965	88048	88130	88213	14	28	42	56	69
62	·88295	88377	88458	88539	88620	88701	88782	88862	88942	89021	14	27	40	54	67
63	·89101	89180	89259	89337	89415	89493	89571	89649	89726	89803	13	26	39	52	65
64	·89879	89956	90032	90108	90183	90259	90334	90408	90483	90557	13	25	38	50	63
65	·90631	90704	90778	90851	90924	90996	91068	91140	91212	91283	12	24	36	48	60
66	·91355	91425	91496	91566	91636	91706	91775	91845	91914	91982	12	23	35	46	58
67	·92050	92119	92186	92254	92321	92388	92455	92521	92587	92653	11	22	33	45	56
68	·92718	92784	92849	92913	92978	93042	93106	93169	93232	93295	11	21	32	43	54
69	·93358	93420	93483	93544	93606	93667	93728	93789	93849	93999	10	20	31	41	51
70	·93969	94029	94088	94147	94206	94264	94322	94380	94438	94495	10	19	29	39	49
71	·94552	94609	94665	94721	94777	94832	94888	94943	94997	95052	9	18	28	37	46
72	·95106	95159	95213	95266	95319	95372	95424	95476	95528	95579	9	17	26	35	44
73	·95630	95681	95732	95782	95832	95882	95931	95981	96029	96078	8	17	25	33	41
74	·96126	96174	96222	96269	96316	96363	96410	96456	96502	96547	8	16	23	31	39
75	·96593	96638	96682	96727	96771	96815	96858	96902	96945	96987	7	16	22	29	36
76	·97030	97072	97113	97155	97196	97237	97278	97318	97358	97398	7	14	20	27	34
77	·97437	97476	97515	97553	97592	97630	97667	97705	97742	97778	6	13	19	25	32
78	·97815	97851	97887	97922	97958	97992	98027	98061	98096	98129	6	12	17	23	29
79	·98163	98196	98229	98261	98294	98325	98357	98388	98420	98450	5	11	16	21	27
80	·98481	98511	98541	98570	98600	98629	98657	98686	98714	98741	5	10	14	19	24
81	·98769	98796	98823	98849	98876	98902	98927	98953	98978	99002	4	9	13	17	22
82	·99027	99051	99075	99098	99122	99144	99167	99189	99211	99233	4	8	11	15	19
83	·99255	99276	99297	99317	99337	99357	99377	99396	99415	99434	3	7	10	13	16
84	·99452	99470	99488	99506	99523	99540	99556	99572	99588	99604	3	6	8	11	14
85	99619	99635	99649	99664	99678	99692	99705	99719	99731	99744	2	5	7	9	11
86	·99756	99768	99780	99792	99803	99813	99324	99834	99844	99854	2	4	5	7	9
87	·99863	99872	99881	99889	99897	99905	99912	99919	99926	99933	1	3	4	5	6
88	·99939	99945	99951	99956	99961	99966	99970	99974	99978	99982	1	2	2	3	4
89	·99985	99988	99990	99993	99995	99996	99998	99999	99999	1 0000	0	1	1	1	1
90	1·000														

正 切

度	0′ 0°·0	6′ 0°·1	12′ 0°·2	18′ 0°·3	24′ 0°·4	30′ 0°·5	36′ 0°·6	42′ 0°·7	48′ 0°·8	54′ 0°·9	比例部分 1	2	3	4	5
0	·00000	00175	00349	00524	00698	00873	01047	01222	01396	01571	29	58	87	116	146
1	·01746	01920	02095	02269	02444	02619	02793	02968	03143	03317	29	58	87	116	146
2	·03492	03667	03842	04016	04191	04366	04541	04716	04891	05066	29	58	87	117	146
3	·05241	05416	05591	05766	05941	06116	06291	06467	06642	06817	29	58	88	117	146
4	·06993	07168	07344	07519	07695	07870	08046	08221	08397	08573	29	59	88	117	146
5	·08749	08925	09101	09277	09453	09629	09805	09981	10158	10334	29	59	88	117	147
6	·10510	10687	10863	11040	11217	11394	11570	11747	11924	12101	29	59	88	118	147
7	·12278	12456	12633	12810	12988	13165	13343	13521	13698	13876	30	59	89	118	148
8	·14054	14232	14410	14588	14767	14945	15124	15302	15481	15660	30	59	89	119	149
9	·15838	16017	16196	16376	16555	16734	16914	17093	17273	17453	30	60	90	120	150
10	·17633	17813	17993	18173	18353	18534	18714	18895	19076	19257	30	60	90	120	150
11	·19438	19619	19801	19982	20164	20345	20527	20709	20891	21073	30	60	91	121	152
12	·21256	21438	21621	21804	21986	22169	22353	22536	22719	22903	30	61	92	122	153
13	·23087	23271	23455	23639	23823	24008	24193	24377	24562	24747	31	61	93	124	155
14	·24933	25118	25304	25490	25676	25862	26048	26235	26421	26608	31	62	93	124	155
15	·26795	26982	27169	27357	27545	27732	27920	28109	28297	28486	31	63	94	125	157
16	·28675	28864	29053	29242	29432	29621	29811	30001	30192	30382	32	63	95	127	158
17	·30573	30764	30955	31147	31338	31530	31722	31914	32106	32299	32	64	96	128	160
18	·32492	32685	32878	33072	33266	33460	33654	33848	34043	34238	32	65	97	129	162
19	·34433	34628	34824	35019	35216	35412	35608	35805	36002	36199	33	66	98	131	164
20	·36397	36595	36793	36991	37190	37388	37588	37787	37986	38186	33	66	99	133	166
21	·38386	38587	38787	38988	39190	39391	39593	39795	39997	40200	34	67	101	134	168
22	·40403	40606	40809	41013	41217	41421	41626	41831	42036	42242	34.	68	102	136	170
23	·42447	42654	42860	43067	43274	43481	43689	43897	44105	44314	34	69	104	138	173
24	·44523	44732	44942	45152	45362	45573	45784	45995	46206	46418	35	70	105	141	176
25	·46631	46843	47056	47270	47483	47698	47912	48127	48342	48557	36	71	107	143	179
26	·48778	48989	49206	49423	49640	49858	50076	50295	50514	50733	36	73	109	145	182
27	·50953	51173	51393	51614	51835	52057	52279	52501	52724	52947	37	74	111	148	185
28	·53171	53395	53620	53844	54070	54296	54522	54748	54975	55203	38	75	113	151	188
29	·55431	55659	55888	56117	56347	56577	56808	57039	57271	57503	38	77	115	154	192
30	·57735	57968	58201	58435	58670	58905	59140	59376	59612	59849	39	78	118	157	196
31	·60086	60324	60562	60801	61040	·61280	61520	61761	62003	62245	40	79	120	160	200
32	·62487	62730	62973	63217	63462	63707	63953	·64199	64446	64693	41	82	123	164	205
33	·64941	65189	65438	65688	65938	66189	66440	66692	66944	67197	42	84	126	167	209
34	·67451	67705	67960	68215	68471	68728	68985	69243	69502	69761	43	86	129	171	214
35	·70021	70281	70542	70804	71066	71329	71593	71857	72122	72388	44	88	132	176	219
36	·72654	72921	73189	73457	73726	73996	74267	74538	74810	75082	45	90	135	180	225
37	·75355	75629	75904	76180	76456	76733	77010	77289	77568	77848	46	92	139	185	231
38	·78129	78410	78692	78975	79259	79544	79829	80115	80402	80690	47	95	142	190	237
39	·80978	81268	81558	81849	82141	32434	82727	83022	83317	83613	49	98	147	195	244
40	·83910	84208	84507	84806	85107	85408	85710	86014	86318	86623	50	100	151	201	252
41	·86929	87236	87543	87852	88162	88473	88784	89097	89410	89725	52	103	155	207	259
42	·90040	90357	90674	90993	91313	91633	91955	92277	92601	92920	53	107	160	214	268
43	·93252	93578	93906	94235	94565	·94896	95229	95562	95897	96232	55	111	165	221	276
44	·96569	96907	97246	97586	97927	98270	98613	98950	99304	99652	57	114	171	229	286

正 切

度	0′ 0°·0	6′ 0°·1	12′ 0°·2	18′ 0°·3	24′ 0°·4	30′ 0°·5	36′ 0°·6	42′ 0°·7	48′ 0°·8	54′ 0°·9	比例部分 1	2	3	4	5
45	1·00000	00350	00701	01053	01406	01761	02117	02474	02832	03192	58	118	177	237	296
46	1·03553	93915	04279	04644	05010	05378	05747	06117	06489	06862	61	123	184	245	307
47	1·07237	07613	07990	08369	08749	09131	09514	09899	10285	10672	63	127	191	255	319
48	1·11061	11452	11844	12238	12633	13029	13428	13828	14229	14632	66	132	199	265	331
49	1·15037	15443	15851	16261	16672	17085	17500	17916	18334	18754	69	138	207	276	344
50	1·19175	19599	20024	20451	20879	21310	21742	22176	22612	23050	72	143	216	288	359
51	1·23490	23931	24375	24820	25268	25717	26169	26622	27077	27535	75	150	225	300	375
52	1·27994	28456	28919	29385	29853	30323	30795	31269	31745	32224	78	157	235	314	392
53	1·32704	33187	33673	34160	34650	35142	35637	36134	36633	37134	82	164	247	329	411
54	1·37638	38145	38653	39165	39679	40195	40714	41235	41759	42286	86	172	259	345	431
55	1·42815	43347	43881	44418	44958	45501	46046	46595	47146	47700	91	181	272	362	453
56	1·48256	48816	49378	49944	50512	51084	51658	52235	52816	53400	95	191	286	382	477
57	1·53987	54576	55170	55767	56366	56969	57575	58184	58797	59414	100	201	302	403	504
58	1·60033	60657	61283	61914	62548	63185	63826	64471	65120	65772	106	213	319	426	533
59	1·66428	67088	67752	68419	69091	69766	70446	71129	71817	72509	113	226	339	452	564
60	1·73205	73905	74610	75319	76032	76749	77471	78198	78929	79665	120	240	360	481	600
61	1·80405	81150	81900	82654	83413	84177	84946	85720	86500	87283	128	255	383	511	639
62	1·88073	88867	89667	90472	91282	92098	92920	93746	94579	95417	136	273	409	546	683
63	1·96261	97111	97967	98828	99695	2·00569	2·01449	2·02335	2·03227	2·04125	146	292	438	584	731
64	2·05030	05942	06860	07785	08716	09654	10600	11552	12511	13477	157	314	471	629	786
65	2·14451	15432	16420	17416	18419	19430	20449	21475	22510	23553	169	338	508	677	846
66	2·24604	25663	26730	27806	28891	29984	31086	32197	33317	34447	183	366	549	732	915
67	2·35585	36733	37891	39058	40235	41421	42618	43825	45043	46270	199	397	596	795	994
68	2·47509	48758	50018	51289	52571	53865	55170	56487	57815	59156					
69	2·60509	61874	63252	64642	66046	67462	68892	70335	71792	73263					
70	2·74748	76247	77761	79289	80833	82391	83965	85556	87161	88783					
71	2·90421	92076	93748	95437	97144	98868	3·00611	3·02372	3·04152	3·05950					
72	3·07768	09606	11464	13341	15240	17159	19100	21063	23048	25055					
73	3·27085	29139	31216	33317	35443	37594	39771	41973	44202	46458					
74	3·48741	51053	53393	55761	58160	60588	63048	65538	68061	70616					
75	3·73205	75828	78485	81177	83906	86671	89474	92316	95196	98117					
76	4·01078	04081	07127	10216	13350	16530	19756	23030	26352	29724					
77	4·33148	36623	40152	43735	47374	51071	54826	58641	62518	66458					
78	4·70463	74534	78673	82882	87162	91516	95945	5·00451	5·05037	5·09704					
79	5·14455	19293	24218	29235	34345	39552	44857	50264	55777	61397					
80	5·67128	72974	78938	85024	91236	97576	6·04051	6·10664	6·17419	6·24321					
81	6·31375	38587	45961	53503	61220	69116	77199	85475	93952	7·02637					
82	7·11537	20661	30018	39616	49465	59575	69957	80622	91582	8·02848					
83	8·14435	26356	38625	51259	64275	77689	91520	9·05789	9·20516	9·35724					
84	9·51436	9·6768	9·8448	10·019	10·199	10·385	10·579	10·780	10·988	11·205					
85	11·430	11·664	11·909	12·163	12·429	12·706	12·996	13·300	13·617	13·951					
86	14·301	14·669	15·056	15·464	15·895	16·350	16·832	17·343	17·886	18·464					
87	19·081	19·740	20·446	21·205	22·022	22·904	23·859	24·898	26·031	27·271					
88	28·636	30·145	31·821	33·694	35·801	38·188	40·917	44·066	47·740	52·081					
89	57·290	63·657	71·615	81·847	95·489	114·60	143·24	190·98	286·48	572·96					
90	∞														

Mean differences cease to be sufficiently accurate.

第 3 表　度とラディアンの換算表

度	0′ 0°·0	6′ 0°·1	12′ 0°·2	18′ 0°·3	24′ 0°·4	30′ 0°·5	36′ 0°·6	42′ 0°·7	48′ 0°·8	54′ 0°·9	比例部分 1	2	3	4	5
0	·00000	00175	00349	00524	00698	00873	01047	01222	01396	01571	29	58	87	116	145
1	·01745	01920	02094	02269	02443	02618	02793	02967	03142	03316	29	58	87	116	145
2	·03491	03665	03840	04014	04189	04363	04538	04712	04887	05061	29	58	87	116	145
3	·05236	05411	05585	05760	05934	06109	06283	06458	06632	06807	29	58	87	116	145
4	·06981	07156	07330	07505	07679	07854	08029	08203	08378	08552	29	58	87	116	145
5	·08727	08901	09076	09250	09425	09599	09774	09948	10123	10297	29	58	87	116	145
6	·10472	10647	10821	10996	11170	11345	11519	11694	11868	12043	29	58	87	116	145
7	·12217	12392	12566	12741	12915	13090	13264	13439	13614	13788	29	58	87	116	145
8	·13963	14137	14312	14486	14661	14835	15010	15184	15359	15533	29	58	87	116	145
9	·15708	15882	16057	16232	16406	16581	16755	16930	17104	17279	29	58	87	116	145
10	·17453	17628	17802	17977	18151	18326	18500	18675	18850	19024	29	58	87	116	145
11	·19199	19373	19548	19722	19897	20071	20246	20420	20595	20769	29	58	87	116	145
12	·20944	21118	21293	21468	21642	21817	21991	22166	22340	22515	29	58	87	116	145
13	·22689	22864	23038	23213	23387	23562	23736	23911	24086	24260	29	58	87	116	145
14	·24435	24609	24784	24958	25133	25307	25482	25656	25831	26005	29	58	87	116	145
15	·26180	26354	26529	26704	26878	27053	27227	27402	27576	27751	29	58	87	116	145
16	·27925	28100	28274	28449	28623	28798	28972	29147	29322	29496	29	58	87	116	145
17	·29671	29845	30020	30194	30369	30543	30718	30892	31067	31241	29	58	87	116	145
18	·31416	31590	31765	31940	32114	32289	32463	32638	32812	32987	29	58	87	116	145
19	·33161	33336	33510	33685	33859	34034	34208	34383	34558	34732	29	58	87	116	145
20	·34907	35081	35256	35430	35605	35779	35954	36128	36303	36477	29	58	87	116	145
21	·36652	36826	37001	37176	37350	37525	37699	37874	38048	38223	29	58	87	116	145
22	·38397	38572	38746	38921	39095	39270	39444	39619	39794	39968	29	58	87	116	145
23	·40143	40317	40492	40666	40841	41015	41190	41364	41539	41713	29	58	87	116	145
24	·41888	42062	42237	42411	42586	42761	42935	43110	43284	43459	29	58	87	116	145
25	·43633	43808	43982	44157	44331	44506	44680	44855	45029	45204	29	58	87	116	145
26	·45379	45553	45728	45902	46077	46251	46426	46600	46775	46949	29	58	87	116	145
27	·47124	47298	47473	47647	47822	47997	48171	48346	48520	48695	29	58	87	116	145
28	·48869	49044	49218	49393	49567	49742	49916	50091	50265	50440	29	58	87	116	145
29	·50615	50789	50964	51138	51313	51487	51662	51836	52011	52185	29	58	87	116	145
30	·52360	52534	52709	52883	53058	53233	53407	53582	53756	53931	29	58	87	116	145
31	·54105	54280	54454	54629	54803	54978	55152	55327	55501	55676	29	58	87	116	145
32	·55851	56025	56200	56374	56549	56723	56898	57072	57247	57421	29	58	87	116	145
33	·57596	57770	57945	58119	58294	58469	58643	58818	58992	59167	29	58	87	116	145
34	·59341	59516	59690	59865	60039	60214	60388	60563	60737	60912	29	58	87	116	145
35	·61087	61261	61436	61610	61785	61959	62134	62308	62483	62657	29	58	87	116	145
36	·62832	63006	63181	63355	63530	63705	63879	64054	64228	64403	29	58	87	116	145
37	·64577	64752	64926	65101	65275	65450	65624	65799	65973	66148	29	58	87	116	145
38	·66323	66497	66672	66846	67021	67195	67370	67544	67719	67893	29	58	87	116	145
39	·68068	68242	68417	68591	68766	68941	69115	69290	69464	69639	29	58	87	116	145
40	·69813	69988	70162	70337	70511	70686	70860	71035	71209	71384	29	58	87	116	145
41	·71558	71733	71908	72082	72257	72431	72606	72780	72955	73129	29	58	87	116	145
42	·73304	73478	73653	73827	74002	74176	74351	74526	74700	74875	29	58	87	116	145
43	·75049	75224	75398	75573	75747	75922	76096	76271	76445	76620	29	58	87	116	145
44	·76794	76969	77144	77318	77493	77667	77842	78016	78191	78365	29	58	87	116	145
45	·78540	78714	78889	79063	79238	79412	79587	79762	79936	80111	29	58	87	116	145

度とラヂイアンの換算表

度	0′ 0°·0	6′ 0°·1	12′ 0°·2	18′ 0°·3	24′ 0°·4	30′ 0°·5	36′ 0°·6	42′ 0°·7	48′ 0°·8	54′ 0°·9	比例部分 1	2	3	4	5
45	·78540	78714	78889	79063	79238	79412	79587	79762	·79936	80111	29	58	87	116	145
46	80285	80460	80634	80809	80983	81158	81332	81507	81681	·81856	29	58	87	116	145
47	82030	82205	82380	82554	82729	82903	83078	83252	83427	83601	29	58	87	116	145
48	·83776	83950	84125	84299	84474	84648	84823	84998	85172	85347	29	58	87	116	145
49	85521	85696	85870	86045	86219	86394	86568	86743	86917	87092	29	58	87	116	145
50	·87266	87441	87616	87790	87965	88139	88314	88488	88663	88837	29	58	87	116	145
51	·89012	89186	89361	89535	89710	89884	90059	90234	90408	90583	29	58	87	116	145
52	·90757	90932	91106	91281	91455	91630	91804	91979	92153	92328	29	58	87	116	145
53	·92502	92677	92852	93026	93201	93375	93550	93724	93899	94073	29	58	87	116	145
54	·94248	94422	94597	94771	94946	95120	95295	95470	95644	95819	29	58	87	116	145
55	·95993	96168	96342	96517	96691	96866	97040	97215	97389	97564	29	58	87	116	145
56	·97738	97913	98088	98262	98437	98611	98786	98960	99135	99309	29	58	87	116	145
57	·99484	99658	99833	1·00007	1·00182	1·00356	1·00531	1·00706	1·00880	1·01055	29	58	87	116	145
58	1·01229	01404	01578	01753	01927	02102	02276	02451	02625	02800	29	58	87	116	145
59	1·02974	03149	03323	·03498	03673	03847	04022	04196	04371	04545	29	58	87	116	145
60	1·04720	04894	05069	05243	05418	05592	05767	05941	06116	06291	29	58	87	116	145
61	1·06465	06640	06814	06989	07163	07338	07512	07687	07861	08036	29	58	87	116	145
62	1·08210	08385	08559	08734	08909	09083	09258	09432	09607	09781	29	58	87	116	145
63	1·09956	10130	10305	10479	10654	10828	11003	11177	11352	11527	29	58	87	116	145
64	1·11701	11876	12050	12225	12399	12574	12748	12923	13097	13272	29	58	87	116	145
65	1·13446	13621	13795	13970	14145	14319	14494	14668	14843	15017	29	58	87	116	145
66	1·15192	15366	15541	15715	15890	16064	16239	16413	16588	16763	29	58	87	116	145
67	1·16937	17112	17286	17461	17635	17810	17984	18159	18333	18508	29	58	87	116	145
68	1·18682	18857	19031	19206	19381	19555	19730	19904	20079	20253	29	58	87	116	145
69	1·20428	20602	20777	20951	21126	21300	21475	21649	21824	21999	29	58	87	116	145
70	1·22173	22348	22522	22697	22871	23046	23220	23395	23569	23744	29	58	87	116	145
71	1·23918	24093	24267	24442	24617	24791	24966	25140	25315	25489	29	58	87	116	145
72	1·25664	25838	26013	26187	26362	26536	26711	26885	27060	27234	29	58	87	116	145
73	1·27409	27584	27758	27933	28107	28282	28456	28631	28805	28980	29	58	87	116	145
74	1·29154	29329	29503	29678	29852	30027	30202	30376	30551	30725	29	58	87	116	145
75	1·30900	31074	31249	31423	31598	31772	31947	32121	32296	32470	29	58	87	116	145
76	1·32645	32820	32994	33169	33343	33518	33692	33867	34041	34216	29	58	87	116	145
77	1·34390	34565	34739	34914	35088	35263	35438	35612	35787	35961	29	58	87	116	145
78	1·36136	36310	36485	36659	36834	37008	37183	37357	37532	37706	29	58	87	116	145
79	1·37881	38056	38230	38405	38579	38754	38928	39103	39277	39452	29	58	87	116	145
80	1·39626	39801	39975	40150	40324	40499	40674	40848	41023	41197	29	58	87	116	145
81	1·41372	41546	41721	41895	42070	42244	42419	42593	42768	42942	29	58	87	116	145
82	1·43117	43292	43466	43641	43815	43990	44164	44339	44513	44688	29	58	87	116	145
83	1·44862	45037	45211	45386	45560	45735	45910	46084	46259	46433	29	58	87	116	145
84	1·46608	46782	46957	47131	47306	47480	47655	47829	48004	48178	29	58	87	116	145
85	1·48353	48528	48702	48877	49051	49226	49400	49575	49749	49924	29	58	87	116	145
86	1·50098	50273	50447	50622	50796	50971	51146	51320	51495	51669	29	58	87	116	145
87	1·51844	52018	52193	52367	52542	52716	52891	53065	53240	53414	29	58	87	116	145
88	1·53589	53764	53938	54113	54287	54462	54636	54811	54985	55160	29	58	87	116	145
89	1·55334	55509	55683	55858	56032	56207	56381	56556	56731	56905	29	58	87	116	145

第4表 乘冪，根，逆數

n	n^2	n^3	$\sqrt{n}$	$\sqrt[3]{n}$	$\sqrt{10n}$	$\sqrt[3]{10n}$	$\sqrt[3]{100n}$	$\frac{1}{n}$
1	1	1	1	1	3·1623	2·1544	4·6416	1
2	4	8	1·4142	1·2599	4·4721	2·7144	5·8480	50000
3	9	27	1·7321	1·4422	5·4772	3·1072	6·6943	33333
4	16	64	2000	1·5874	6·3246	3·4200	7·3681	25000
5	25	125	2·2361	1·7100	7·0711	3·6840	7·9370	20000
6	36	216	2·4495	1·8171	7·7460	3·9149	8·4343	16667
7	49	343	2·6458	1·9129	8·3666	4·1213	8·8790	·14286
8	64	512	2·8284	2·000	8·9443	4·3089	9·2832	·12500
9	81	729	3·000	2·0801	9·4868	4·4814	9·6549	·11111
10	100	1000	3·1623	2·1544	10·000	4·6416	10·0000	·10000
11	121	1331	3·3166	2·2240	10·4881	4·7914	10·3228	·090909
12	144	1728	3·4641	2·2894	10·9545	4·9324	10·6266	·083333
13	169	2197	3·6056	2·3513	11·4018	5·0658	10·9139	·076923
14	196	2744	3·7417	2·4101	11·8322	5·1925	11·1869	·071429
15	225	3375	3·8730	2·4662	12·2474	5·3133	11·4471	·066667
16	256	4096	4·000	2·5198	12·6491	5·4288	11·6961	·062500
17	289	4913	4·1231	2·5713	13·0384	5·5397	11·9348	·058824
18	324	5832	4·2426	2·6207	13·4164	5·6462	12·1644	·055556
19	361	6859	4·3589	2·6684	13·7840	5·7489	12·3856	·052632
20	400	8000	4·4721	2·7144	14·1421	5·8480	12·5992	·05000
21	441	9261	4·5826	2·7589	14·4914	5·9439	12·8058	·047619
22	484	10648	4·6904	2·8020	14·8324	6·0368	13·0059	·045455
23	529	12167	4·7958	2·8439	15·1658	6·1269	13·2001	·043478
24	576	13824	4·8990	2·8845	15·4919	6·2145	13·3887	·041667
25	625	15625	5·000	2·9240	15·8114	6·2996	13·5721	·04000
26	676	17576	5·0990	2·9625	16·1245	6·3825	13·7507	·038462
27	729	19683	5·1962	3·0000	16·4317	6·4633	13·9248	·037037
28	784	21952	5·2915	3·0366	16·7332	6·5421	14·0946	·035714
29	841	24389	5·3852	3·0723	17·0294	6·6191	14·2604	·034483
30	900	27000	5·4772	3·1072	17·3205	6·6943	14·4225	·033333
31	961	29791	5·5678	3·1414	17·6068	6·7679	14·5810	·032258
32	1024	32768	5·6569	3·1748	17·8885	6·8399	14·7361	·031250
33	1089	35937	5·7446	3·2075	18·1659	6·9104	14·8881	·030303
34	1156	39304	5·8310	3·2396	18·4391	6·9795	15·0369	·029412
35	1225	42875	5·9161	3·2711	18·7083	7·0473	15·1829	·028571
36	1296	46656	6·000	3·3019	18·9737	7·1138	15·3262	·027778
37	1369	50653	6·0828	3·3322	19·2354	7·1791	15·4668	·027027
38	1444	54872	6·1644	3·3620	19·4936	7·2432	15·6049	·026316
39	1521	59319	6·2450	3·3912	19·7484	7·3061	15·7406	·025641
40	1600	64000	6·3246	3·4200	20·000	7·3681	15·8740	·02500
41	1681	68921	6·4031	3·4482	20·2485	7·4290	16·0052	·024390
42	1764	74088	6·4807	3·4760	20·4939	7·4889	16·1343	·023810
43	1849	79507	6·5574	3·5034	20·7364	7·5478	16·2613	·023256
44	1936	85184	6·6332	3·5303	20·9762	7·6059	16·3864	·022727
45	2025	91125	6·7082	3·5569	21·2132	7·6631	16·5096	·022222
46	2116	97336	6·7823	3·5830	21·4476	7·7194	16·6310	·021739
47	2209	103823	6·8557	3·6088	21·6795	7·7750	16·7507	·021277
48	2304	110592	6·9282	3·6342	21·9089	7·8297	16·8687	·020833
49	2401	117649	7·000	3·6593	22·1359	7·8837	16·9850	·020408
50	2500	125000	7·0711	3·6840	22·3607	7·9370	17·0998	·02000

乘 冪，根，逆 數

n	n^2	n^3	$\sqrt{n}$	$\sqrt[3]{n}$	$\sqrt{10n}$	$\sqrt[3]{10n}$	$\sqrt[3]{100n}$	$\frac{1}{n}$
51	2601	132651	7.1414	3.7084	22.5832	7.9896	17.2130	.019608
52	2704	140608	7.2111	3.7325	22.8035	8.0415	17.3248	.019231
53	2809	148877	7.2801	3.7563	23.0217	8.0927	17.4351	.018868
54	2916	157464	7.3485	3.7798	23.2379	8.1433	17.5441	.018519
55	3025	166375	7.4162	3.8030	23.4521	8.1932	17.6517	.018182
56	3136	175616	7.4833	3.8259	23.6643	8.2426	17.7581	.017857
57	3249	185193	7.5498	3.8485	23.8747	8.2913	17.8632	.017544
58	3364	195112	7.6158	3.8709	24.0832	8.3396	17.9670	.017241
59	3481	205379	7.6811	3.8930	24.2899	8.3872	18.0697	.016949
60	3600	216000	7.7460	3.9149	24.4949	8.4343	18.1712	.016667
61	3721	226981	7.8102	3.9365	24.6982	8.4809	18.2716	.016393
62	3844	238328	7.8740	3.9579	24.8998	8.5270	18.3709	.016129
63	3969	250047	7.9373	3.9791	25.0998	8.5726	18.4691	.015873
64	4096	262144	8.000	4.000	25.2982	8.6177	18.5664	.015625
65	4225	274625	8.0623	4.0207	25.4951	8.6624	18.6626	.015385
66	4356	287496	8.1240	4.0412	25.6905	8.7066	18.7578	.015152
67	4489	300763	8.1854	4.0615	25.8844	8.7503	18.8520	.014925
68	4624	314432	8.2462	4.0817	26.0768	8.7937	18.9454	.014706
69	4761	328509	8.3066	4.1016	26.2679	8.8366	19.0378	.014493
70	4900	343000	8.3666	4.1213	26.4575	8.8790	19.1293	.014286
71	5041	357911	8.4261	4.1408	26.6458	8.9211	19.2200	.014085
72	5184	373248	8.4853	4.1602	26.8328	8.9628	19.3098	.013889
73	5329	389017	8.5440	4.1793	27.0185	9.0041	19.3988	.013699
74	5476	405224	8.6023	4.1983	27.2029	9.0450	19.4870	.013514
75	5625	421875	8.6603	4.2172	27.3861	9.0856	19.5743	.013333
76	5776	438976	8.7178	4.2558	27.5681	9.1258	19.6610	.013158
77	5929	456533	8.7750	4.2543	27.7489	9.1657	19.7468	.012987
78	6084	474552	8.8318	4.2727	27.9285	9.2052	19.8319	.012821
79	6241	493039	8.8882	4.2908	28.1069	9.2443	19.9163	.012658
80	6400	512000	8.9443	4.3089	28.2843	9.2832	20.0000	.012500
81	6561	531441	9.0000	4.3267	28.4605	9.3217	20.0830	.012346
82	6724	551368	9.0554	4.3445	28.6356	9.3599	20.1653	.012195
83	6889	571787	9.1104	4.3621	28.8097	9.3978	20.2469	.012048
84	7056	592704	9.1652	4.3795	28.9828	9.4354	20.3279	.011905
85	7225	614125	9.2195	4.3968	29.1548	9.4727	20.4083	.011765
86	7396	636056	9.2736	4.4140	29.3258	9.5097	20.4880	.011628
87	7569	658503	9.3274	4.4310	29.4958	9.5464	20.5671	.011494
88	7744	681472	9.3808	4.4480	29.6648	9.5828	20.6456	.011364
89	7921	704969	9.4340	4.4647	29.8329	9.6190	20.7235	.011236
90	8100	729000	9.4868	4.4814	30.000	9.6549	20.8008	.011111
91	8281	753571	9.5394	4.4979	30.1662	9.6905	20.8776	.010989
92	8464	778688	9.5917	4.5144	30.3315	9.7259	20.9538	.010870
93	8649	804357	9.6437	4.5307	30.4959	9.7610	21.0294	.010753
94	8836	830584	9.6954	4.5468	30.6594	9.7959	21.1045	.010638
95	9025	857375	9.7468	4.5629	30.8221	9.8305	21.1791	.010526
96	9216	884736	9.7980	4.5789	30.9839	9.8648	21.2532	.010417
97	9409	912673	9.8489	4.5947	31.1448	9.8990	21.3267	.010309
98	9604	941192	9.8995	4.6104	31.3050	9.9329	21.3997	.010204
99	9801	970299	9.9499	4.6261	31.4643	9.9666	21.4723	.010101
100	10000	1000000	10.000	4.6416	31.6228	10.000	21.5443	.0100

第 5 表　面積，體積，其他公式

圓 の 面 積 $=\frac{\pi}{4}\times(\text{直徑})^2=0.7854\times(\text{直徑})^2=\pi\times(\text{半徑})^2$

三角形の面積 $=\frac{(\text{底邊})\times(\text{高さ})}{2}$

矩形の面積 $=(\text{長邊})\times(\text{短邊})$

正方形の面積 $=(\text{一邊})^2$

梯形の面積 $=\frac{(\text{上底})+(\text{下底})}{2}\times\text{高さ}$

環形の面積 $=\frac{\pi}{4}\times\{(\text{外徑})^2-(\text{內徑})^2\}=\pi\times(\text{平均直徑})\times(\text{幅})$

扇形の面積 $=\frac{(\text{弧の長さ})\times(\text{半徑})}{2}=\frac{(\text{半徑})\times(\text{中心角})}{114.5}$

楕圓の面積 $=\frac{\pi}{4}\times(\text{長軸})\times(\text{短軸})$

球の表面積 $=4\times\pi\times(\text{半徑})^2=\pi\times(\text{直徑})^2$

柱體の體積 $=(\text{底面積})\times(\text{高さ})$

柱體の表面積 $=(\text{斷面周圍の長さ})\times(\text{高さ})$

圓周の長さ $=\pi\times(\text{直徑})=2\times\pi\times(\text{半徑})$

楕圓の周圍 $=\pi\times(\text{長軸})\times(\text{短軸})$

楕圓體の體積 $=\frac{\pi}{6}\times(\text{長軸})\times(\text{短軸})$

球の體積 $=\frac{4}{3}\times\pi\times(\text{半徑})^3=\frac{\pi}{6}\times(\text{直徑})^2$

錐體の體積 $=\frac{(\text{底面積})\times(\text{高さ})}{3}$

圓周率 π の値 $=3.141592653\cdots\cdots\cdots\cdots\fallingdotseq 3.142\fallingdotseq\frac{22}{7}$

$2\times\pi=6.283$　　$\frac{\pi}{4}=0.7854$

$\frac{1}{\pi}=0.3183$　　$\frac{4}{\pi}=1.273$

$1\text{rad}=57.296^\circ=57^\circ 17'46''$

第6表 長さの單位比較

cm	m	km	in	it	mile
1	0.01	0.00001	0.39371	0.032808	—
100	1	0.001	39.371	3.2808	0.00006214
—	1000	1	—	3280.8	0.62138
2.5400	0.02540	—	1	0.08333	—
30.479	0.30479	0.0003048	12	1	0.0001894
—	1609.3	1.6093	—	5.280	1

第7表 質量の單位比較

g	kg	t（佛噸）	os	lbs	t（英噸）
1	0.001	—	0.035274	0.0022046	—
1000	1	0.001	35.27	2.205	0.0098420
—	1000	1	—	2205	0.9842
28.350	0.02835	—	1	0.0625	0.0000279
453.6	0.4536	0.0004536	16	1	0.0004464
—	1016	1.016	—	2240	1

第8表 力の單位比較

kg	lbs	t（英 噸）	Poundal
1	2.205	$0.0_{3}9842$	70.88
0.4536	1	$0.0_{3}4464$	32.15
1016	2240	1	72021
0.01411	0.03110	$0.0_{4}1389$	1

第9表 動力の單位比較

P.S	H.P	K.W	kg m/sec	ft, lbs/sec
1	0.9858	0.7355	75	542.8
1.014	1	0.7461	76.13	550
1.3596	1.3403	1	102.04	738.1

第10表 工業用材料の比重

材料	比重
鑄鐵	7.2
軟鋼	7.7
鋼	7.85
銅	8.82
眞鍮	8.4
砲金	8.85
鉛	11.37
アルミニューム	2.56
松	0.52
杉	0.40
花崗岩	2.6—2.7
硝子	2.4—2.6
ゴム	0.91—0.96
石炭	1.2—1.5
煉瓦	1.2—2.2
コンクリート	2.2

昭和十七年三月 五 日 印　刷
昭和十七年三月十五日 發　行

中等工業力學

定價 金壹圓貳拾錢

著　者　大東機械工學研究會

大阪市大正區泉尾竹之町三ノ一三
發行者　中　西　儀　藏

大阪市東區博勞町一丁目六五
印刷所　八　ツ　橋　印　刷　所

發行所　大　石　堂　出　版　部
會員番號 116040
大阪市大正區泉尾竹之町三ノ一三

配給元　日本出版配給株式會社
東京市神田區淡路町二丁目九番地

機　工　學　會　編

著　者	品　目	形状頁數		定價	送料
機工學會編	力學及材料强弱學	A列5	136	1.10	.06
同	機構學	〃	120	0.90	〃
同	材料及工作法 前編	〃	140	1.10	〃
同	同 後編	〃	150	1.15	〃
同	水力及水力機械	〃	190	1.45	〃
同	汽力原動機	〃	150	1.15	〃
同	內燃機關	〃	150	1.20	〃
同	實用 用器畫法	A列4	62	.75	〃
同	基本機械製圖	〃	132	1.50	.12
同	機械工學	A列5	226	1.50	.09
同	工業數學	〃	192	1.00	.06
其他機械工學ニ關スル教科書					
小谷寛之亮氏著	航空力學	A列5	150	1.20	0.6
茨木正雄氏著	金屬材料	〃	150	1.20	〃
山本次男氏著	工業力學	〃	420	3.00	.21
曾是敬氏著	最新 機械工學教本	〃	220	1.60	.09
同	最新 機械製圖教本	A列4	104	1.25	.12
同	同 增補版	〃	130	1.40	.12
茨木正雄氏著	航空機材料 前編	A列5	125	1.00	.06
陶山誠太郎氏著	新工業簿記	〃	250	1.70	.09
二川道次氏著	最新 解析微分積分學	〃	360	3.00	.15
小泉庄司氏著	初等力學	〃	112	.75	.06

終