航空委員會

航空研究院

研究報告第十九號

正向質圓筒之彈性穩定問題

林致平　　王培生

張壽寶　　施以仁

三十四年六月

航空研究院出版刊物

研究報告

技術叢編

（成都西華印書館代印）

航 空 委 員 會

航 空 研 究 院

研究報告第十九號

正向質圓筒之彈性穩定問題

林致平　　王培生

張壽寶　　施以仁

三十四年六月

目　　錄

正向質圓筒之彈性穩定問題

著者：林致平 王培生
張壽寶 施以仁

第一節 導言

較近關於薄殼圓筒或薄殼球體彈性穩定 (Elastic stability) 問題之研討，風起雲擁，然就諸理論所得，查其皺褶載荷 (Buckling load) 之值，輒有超過實際試驗結果之三倍至五倍者，且皺褶時所呈之波型 (Wave pattern)，與原述者，恆迥不相侔。Karman 與錢學森二氏曾指出該項問題癥結之所在，而認為一般曲殼體之彈性穩定問題，僅可以大位移波型理論 (Non-linear large deflection theory) 探討之。按以往之典式理論 (Classical theory)，係根據波幅 (Wave amplitude) 處於極小之假定，實與此新論有別焉。

由實際之觀察，殼體於彈性平衡時，常呈菱形或鑽石狀波型，且其皺褶載荷之值，亦遠較典式理論所導得者為小。於波幅為殼厚之數倍時，由大位移波型理論，所導得之波型與皺褶載荷，均與試驗時所呈者甚為相似，故大位移波型理論，實為研討薄殼體彈性穩定問題較完滿之理論也。

本文係引用上述之大位移波型理論，研討正向質 (Orthotropic) 圓筒受軸向 (Axial direction) 壓力時之彈性穩定問題。首論筒殼中面任意點之應力 (Stress) 與應變 (Strain)，導得平衡方程式 (Equation of equilibrium)。然此方程式之確解，不易求得，故降而求其近似解 (Approximate solution)。先設一合理之放射向 (Radial direction) 位移波型，內含若干待定係數，繼求筒殼每整波間 (One complete wave panel) 內所儲之總蓄能值 (Total elastic energy)，而以總蓄能值應為最小值之條件，確定波型之待定係數，而導得壓應力與放射向位移波幅及圓筒端縮 (End shortening) 之關係。末舉樺木層板 (Plywood) 圓筒為釋例，就其結果，繪成圖表，並討論之。文中所用之標註，列於附錄中。

第二節　筒殼中面之應力及其平衡方程式

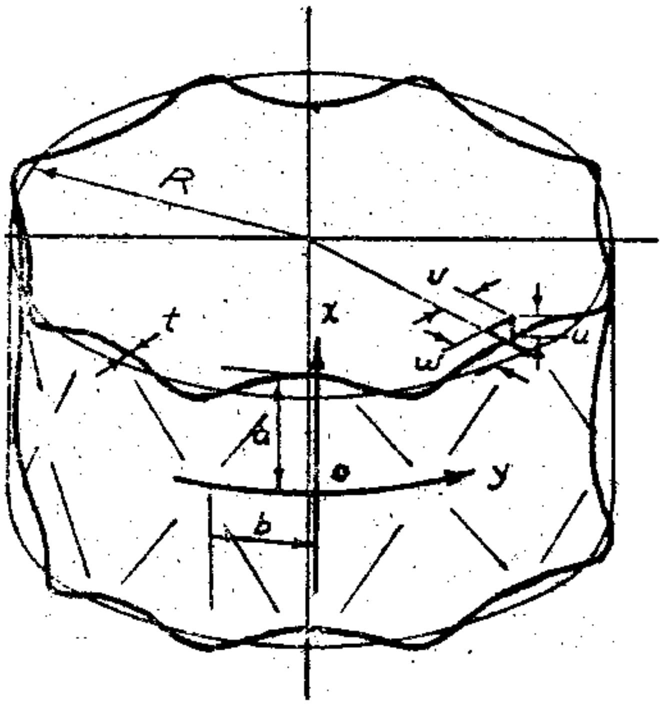
設一正向賓薄殼圓筒，於未變形時，筒殼中面之半徑爲 R, 殼之厚度爲 t, 今於其中面 (Median surface) 上，令軸向之量度爲 x, 週向 (Circumferential direction) 之量度爲 y, 而以 u, v 及 w 各表沿 x, y 及放射向之分位移 (Components of displacement), (見第一圖)。則此中面上任意點之單位應變 e_x, e_y 及剪應變 γ_{xy} 之可以包含分位移之二次項式，分別書之如下：

$$
\begin{aligned}
e_x &= \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)^2 \\
e_y &= \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial w}{\partial y}\right)^2 - \frac{w}{R} \\
\gamma_{xy} &= \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial x}\frac{\partial w}{\partial y}
\end{aligned} \tag{1}
$$

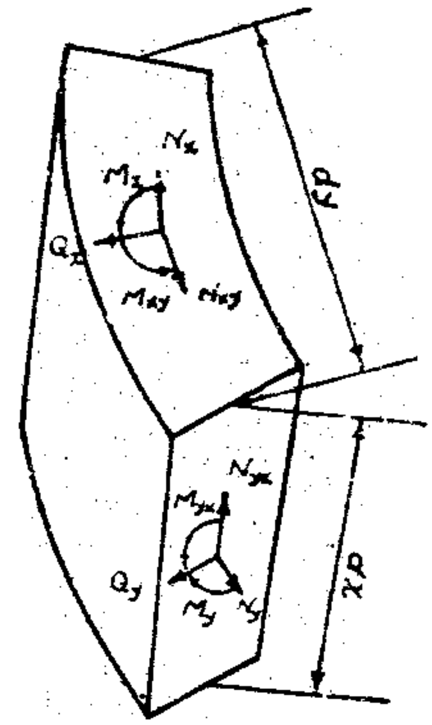
由通化之霍克氏定律 (Generalized Hooke's law)，正向賓筒殼中面上應力與應變之關係，可以下式表示之：

$$
\begin{aligned}
\sigma_x &= \frac{E_x}{1-\nu_{xy}\nu_{yx}}\left(e_x + \nu_{yx} e_y\right) \\
\sigma_y &= \frac{E_y}{1-\nu_{xy}\nu_{yx}}\left(e_y + \nu_{xy} e_x\right) \\
\tau_{xy} &= G_{xy}\gamma_{xy}
\end{aligned} \tag{2}
$$

式中 E_x 與 E_y 係 x 與 y 向之彈性模數，ν_{xy} 爲 y 向應變由於 x 向應力之帕松比 (Poisson's ratio)，而 G_{xy} 爲此二向之剪力模數。



第 一 圖



第二圖　筒殼局部之週界斷面各爲單位長度時所受之外力及力矩

茲將(1)式代入(2)式,則得筒殼中面上之分應力與分位移之關係如下式：

$$\sigma_x=\frac{E_x}{(1-\nu_{xp}\nu_{px})}\left[\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{1}{2}\left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)^2+\nu_{px}\left\{\frac{\partial v}{\partial y}+\frac{1}{2}\left(\frac{\partial w}{\partial y}\right)^2-\frac{w}{R}\right\}\right]$$

$$\sigma_p=\frac{E_p}{(1-\nu_{xp}\nu_{px})}\left[\frac{\partial v}{\partial y}+\frac{1}{2}\left(\frac{\partial w}{\partial y}\right)^2-\frac{w}{R}+\nu_{xp}\left\{\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{1}{2}\left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)^2\right\}\right]\quad(3)$$

$$\tau_{xp}=G_{xp}\left(\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial v}{\partial x}+\frac{\partial w}{\partial x}\frac{\partial w}{\partial y}\right)$$

今自筒殼中割取一小部份，其週界爲兩相鄰之含軸斷面，與兩垂直於筒軸之斷面。此局部筒殼，設其各邊爲單位長度時，所受之外力及力矩如第二圖所示。依照 Donnell 氏之擬議，其中面之曲變 (Change of curvature) 與單位扭轉 (Unit twist), 可簡書如下：

$$\chi_x=\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\qquad\chi_{xp}=\frac{\partial^2 w}{\partial x\,\partial y}\qquad\chi_p=\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\quad(4)$$

則該局部受外力作用時之平衡條件 (Condition of equilibrium)，約若下列各式所示：

$$
\begin{aligned}
&\frac{\partial N_x}{\partial x}+\frac{\partial N_{yx}}{\partial y}=0\\
&\frac{\partial N_y}{\partial y}+\frac{\partial N_{xy}}{\partial x}=0\\
&\frac{\partial Q_x}{\partial x}+\frac{\partial Q_y}{\partial y}+N_x\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}+N_y\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}+2N_{xy}\frac{\partial^2 w}{\partial x\,\partial y}+\frac{N_y}{R}+q=0\\
&\frac{\partial M_{xy}}{\partial x}-\frac{\partial M_y}{\partial y}+Q_y=0\\
&\frac{\partial M_{yx}}{\partial y}+\frac{\partial M_x}{\partial x}-Q_x=0
\end{aligned}
\tag{5}
$$

式中 q 爲作用於殼面之外壓力，在本文內，$q=0$，故可略去之。式中之首二式，可用 Airy 氏應力函數 $F(x, y)$ 適合之，卽

$$
N_x=t\,\sigma_x=t\frac{\partial^2 F}{\partial y^2}\qquad N_y=t\,\sigma_y=t\frac{\partial^2 F}{\partial x^2}
$$

$$
N_{xy}=t\,\tau_{xy}=-t\frac{\partial^2 F}{\partial x\,\partial y}\tag{6}
$$

又式中之力矩，可以下式表之：

$$
\begin{aligned}
M_x&=-D_1\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}+\nu_{yx}\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\right)\\
M_y&=-D_2\left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}+\nu_{xy}\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\right)\\
M_{xy}&=-M_{yx}=D_3\frac{\partial^2 w}{\partial x\,\partial y}
\end{aligned}
\tag{7}
$$

式中

$$
D_1=\frac{E_x t^3}{12(1-\nu_{xy}\nu_{yx})}\qquad D_2=\frac{E_y t^3}{12(1-\nu_{xy}\nu_{yx})}
$$

$$
D_3=\frac{t^3}{6}G_{xy}
$$

引用正向質材料之特性，$\frac{\nu_{xy}}{E_x}=\frac{\nu_{yx}}{E_y}$，消除 (3) 式與 (6) 式內之變數 u, v, 則得 Airy 氏應力函數 $F(x,y)$ 與放射向分位移 w 之關係如下式：

$$\alpha\frac{\partial^4 F}{\partial x^4}+2\beta\frac{\partial^4 F}{\partial x^2\partial y^2}+\frac{\partial^4 F}{\partial y^4}=E_x\left\{\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x\,\partial y}\right)^2-\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}-\frac{1}{R}\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\right\} \tag{8}$$

上式係示應力與應變之符合條件 (Condition of compatibility)，式中

$$\alpha=E_x/E_y \qquad \beta=\tfrac{1}{2}\lambda-\nu_{xy}$$

又
$$\lambda=E_x/G_{xy} \tag{9}$$

由 (5) 式之後三式，消除 Q_x 與 Q_y，並用 (6) 式之 Airy 氏應力函數及 (7) 式之力矩公式，導得 F 與 w 之另一關係如下式：

$$\alpha\frac{\partial^4 w}{\partial x^4}+2\beta'\frac{\partial^4 w}{\partial x^2\partial y^2}+\frac{\partial^4 w}{\partial y^4}$$
$$=\frac{12(\alpha-\nu_{xy}^2)}{E_x t^2}\left\{\frac{1}{R}\frac{\partial^2 F}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 F}{\partial x^2}\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 F}{\partial y^2}\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}-2\frac{\partial^2 F}{\partial x\,\partial y}\frac{\partial^2 w}{\partial x\,\partial y}\right\} \tag{10}$$

式中 $\beta'=\frac{2}{\lambda}(\beta\nu_{xy}+\alpha)$

當 $R\to\infty$ 時，則 (8), (10) 兩式，表 F, w 在正向質平板內之關係。又如該兩式中之 $\alpha=1$, $\nu_{xy}=\nu_{yx}=\nu$, 及 $\lambda=2(1+\nu)$, 即 $\alpha=1$, $\beta=1$, 與 $\beta'=1$ 時，則該兩式簡化爲 F, w 在勻向質 (isotropic) 圓筒內之關係式。

由 (8), (10) 兩式，與所須適合之邊緣條件 (Boundary condition), 可求得 F 及 w, 以之分別代入 (6), (7) 兩式，則筒殼中面上之應力及力矩，均可求得矣。然在一般情況下，F 及 w 之確解，輒不易求得，故降而求其近似解。首設一合理之 w 函數，內含若干待定係數，以之代入 (8) 式，求得 F 與筒殼中面之分應力；繼求筒殼每整波間內所儲之總勢能值，而以總勢能值爲最小值之條件下，確定 w 函數內之待定係數。本文卽採用此法，以求 F 及 w 之最近似解答，從而導得壓應力與放射向位移波幅及圓筒端縮之關係。

第三節 放射向位移波型與總蓄能

今設正向質圓筒受軸向之壓力後，所呈之放射向位移波型，與 Karman 及錢學森二氏討論勻向質圓筒彈性穩定問題時所擬用者相似，即

$$\frac{w}{R}=\left(f_0+\frac{f_1}{4}\right)+\frac{f_1}{2}\left(\cos\frac{mx}{R}\cos\frac{ny}{R}+\tfrac{1}{4}\cos\frac{2mx}{R}+\tfrac{1}{4}\cos\frac{2ny}{R}\right)$$
$$+\frac{f_2}{4}\left(\cos\frac{2mx}{R}+\cos\frac{2ny}{R}\right) \qquad (11)$$

式中 f_0, f_1, f_2 諸待定係數，如前章所論，以筒殼每盤波間內總蓄能值爲最小值之條件確定之。f_0 之介入，在使薄殼有放射向擴展之可能性。f_1 爲波幅，即位移 w 在放射向之最大間差。軸向與週向之波長 (Wave length)，各爲 $\frac{2\pi R}{m}$ 與 $\frac{2\pi R}{n}$，而圓筒週圍之波數爲 n 明矣。若令 (11) 式中之 $f_0=f_2=0$，則

$$\frac{w}{R}=f_1\left\{\tfrac{1}{4}+\tfrac{1}{2}\left(\cos\frac{mx}{R}\cos\frac{ny}{R}+\tfrac{1}{4}\cos\frac{2mx}{R}+\tfrac{1}{4}\cos\frac{2ny}{R}\right)\right\} \qquad (12)$$

此即所謂菱形或鑽石狀波型者，其形與試驗時所見之大位移波型，甚爲相似。如使 (11) 式中 $\frac{f_1}{4}+\frac{f_2}{2}=0$，及 $f_0+\frac{f_1}{4}=0$，則

$$\frac{w}{R}=\frac{f_1}{2}\cos\frac{mx}{R}\cos\frac{ny}{R} \qquad (13)$$

即爲典式理論中所採用者。若係數爲其他數值時，則所呈之波型，乃界乎此兩極限之間。

茲將 (11) 式代入 (8) 式，則得 Airy 氏應力函數 $F(x, y)$ 之微分方程式爲：

$$\alpha\frac{\partial^4 F}{\partial x^4}+2\beta\frac{\partial^4 F}{\partial x^2\partial y^2}+\frac{\partial^4 F}{\partial y^4}$$
$$=-E_x\mu^2\left(\frac{n}{R}\right)^2\left\{A\cos\frac{2mx}{R}+B\cos\frac{2ny}{R}+C\cos\frac{mx}{R}\cos\frac{ny}{R}+D\cos\frac{3mx}{R}\cos\frac{ny}{R}+G\cos\frac{mx}{R}\cos\frac{3ny}{R}+H\cos\frac{2mx}{R}\cos\frac{2ny}{R}\right\}\qquad(14)$$

式中 $\mu=m/n$ 爲週向與軸向之波長比。如 $\mu>1$ 時，週向波長較軸向者爲大；反之，若 $\mu<1$，則週向波長較短。(14) 式中之係數，茲分誌如下：

$$\begin{aligned}
A&=\tfrac{1}{8}f_1^2n^2-(\tfrac{1}{2}f_1+f_2)\\
B&=\tfrac{1}{8}f_1^2n^2\\
C&=\tfrac{1}{2}f_1n^2(\tfrac{1}{2}f_1+f_2)-\tfrac{1}{2}f_1\\
D&=\tfrac{1}{4}f_1n^2(\tfrac{1}{2}f_1+f_2)\\
G&=\tfrac{1}{4}f_1n^2(\tfrac{1}{2}f_1+f_2)
\end{aligned}\qquad(15)$$

及 $$H=n^2(\tfrac{1}{2}f_1+f_2)^2$$

解此微分方程式，得 Airy 氏應力函數如下：

$$F(x,y)=-E_x\frac{1}{\mu^2}\left(\frac{R}{n}\right)^2\left\{\frac{A}{16\alpha}\cos\frac{2mx}{R}+\frac{\mu^4B}{16}\cos\frac{2ny}{R}+IC\cos\frac{mx}{R}\cos\frac{ny}{R}+JD\cos\frac{3mx}{R}\cos\frac{ny}{R}+KG\cos\frac{mx}{R}\cos\frac{3ny}{R}+\frac{IH}{16}\cos\frac{2mx}{R}\cos\frac{2ny}{R}\right\}+\frac{k_1}{2}x^2+\frac{k_2}{2}y^2\qquad(16)$$

式中 k_1 與 k_2 爲常數，而

$$I=\frac{\mu^4}{\alpha\mu^4+2\beta\mu^2+1}\qquad J=\frac{\mu^4}{81\alpha\mu^4+18\beta\mu^2+1}$$

$$K=\frac{\mu^4}{\alpha\mu^4+18\beta\mu^2+81}$$

由 (6) 式得筒殼中面上各分應力爲：

$$\sigma_x = E_x \frac{1}{\mu^2}\left\{ \frac{\mu^4 B}{4}\cos\frac{2ny}{R} + IC\cos\frac{mx}{R}\cos\frac{ny}{R} + JD\cos\frac{3mx}{R}\cos\frac{ny}{R} + 9KG\cos\frac{mx}{R}\cos\frac{3ny}{R} + \frac{IH}{4}\cos\frac{2mx}{R}\cos\frac{2ny}{R}\right\} + k_2$$

$$\sigma_y = E_x\left\{ \frac{A}{4\alpha}\cos\frac{2mx}{R} + IC\cos\frac{mx}{R}\cos\frac{ny}{R} + 9JD\cos\frac{3mx}{R}\cos\frac{ny}{R} + KG\cos\frac{mx}{R}\cos\frac{3ny}{R} + \frac{IH}{4}\cos\frac{2mx}{R}\cos\frac{2ny}{R}\right\} + k_1$$

$$\tau_{xy} = E_x \frac{1}{\mu}\left\{ IC\sin\frac{mx}{R}\sin\frac{ny}{R} + 3JD\sin\frac{3mx}{R}\sin\frac{ny}{R} + 3KG\sin\frac{mx}{R}\sin\frac{3ny}{R} + \frac{IH}{4}\sin\frac{2mx}{R}\sin\frac{2ny}{R}\right\} \tag{17}$$

在實際試驗中，所得之結果，俱以軸向之平均壓應力 σ 爲依據。由 (17) 式之首式，可知：

$$k_2 = -\sigma \tag{18}$$

由 (3) 式可導得

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{1}{E_x}(\sigma_x - \nu_{xy}\sigma_y) - \frac{1}{2}\left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)^2$$

$$\frac{\partial v}{\partial y} = \frac{1}{E_x}(\alpha\sigma_y - \nu_{xy}\sigma_x) - \frac{1}{2}\left(\frac{\partial w}{\partial y}\right)^2 + \frac{w}{R} \tag{19}$$

將 (11) 與 (17) 兩式代入 (19) 式，則得：

$$\frac{\partial u}{\partial x} = -\frac{1}{E_x}(\sigma + \nu_{xy}k_1) - \frac{1}{2}n^2\mu^2\left(\frac{3}{32}f_1^2 + \frac{1}{8}f_1 f_2 + \frac{1}{8}f_2^2\right) + \left[\begin{matrix}\text{週期性}\\\text{函數項}\end{matrix}\right]$$

$$\frac{\partial v}{\partial y} = \frac{1}{E_x}(\nu_{xy}\sigma + \alpha k_1) - \frac{1}{2}n^2\left(\frac{3}{32}f_1^2 + \frac{1}{8}f_1 f_2 + \frac{1}{8}f_2^2\right) + \left(f_0 + \frac{f_1}{4}\right) + \left[\text{週期性函數項}\right] \tag{20}$$

因 y 係沿筒殼之週向量度，而 v 爲含 y 之週期性函數，故 $\frac{\partial v}{\partial y}$ 式內之常數項應等於零，即

$$\frac{1}{E_x}(\nu_{xy}\sigma + \alpha k_1) - \frac{1}{4}n^2\left(\frac{3}{32}f_1^2 + \frac{f_1 f_2}{8} + \frac{f_2^2}{8}\right) + \left(f_0 + \frac{f_1}{4}\right) = 0 \qquad (21)$$

由是可得 k_1 之值。

筒殼每整波間內所論之總勢能，等於下列三者之代數和：

(一) 引展勢能 (Extensional elastic energy)： 筒殼每整波間內，由中面上諸應力導得之引展勢能爲：

$$W_1 = \frac{2t}{E_x}\int_0^a\int_0^b (\sigma_x^2 + \alpha\,\sigma_y^2 - 2\,\nu_{xy}\,\sigma_x\,\sigma_y + \lambda\,\tau_{xy}^2)\,dx\,dy \qquad (22)$$

式中 $2a$, $2b$ 各爲軸向與週向之波長。以 (17) 與 (21) 兩式代入 (22) 式，則得：

$$\frac{W_1}{\frac{1}{2}E_x tab} = \frac{4}{\alpha}\left\{(\alpha - \nu_{xy}^2)\left(\frac{\sigma}{E_x}\right)^2 + n^4\left(\frac{3}{64}f_1^2 + \frac{1}{16}f_1 f_2 + \frac{1}{16}f_2^2\right)^2\right.$$
$$\left. + \left(f_0 + \frac{f_1}{4}\right)^2 - 2n^2\left(\frac{3}{64}f_1^2 + \frac{1}{16}f_1 f_2 + \frac{1}{16}f_2^2\right)\left(f_0 + \frac{f_1}{4}\right)\right\}$$
$$+ \frac{A^2}{8\alpha} + \frac{\mu^4 B^2}{8} + IC^2 + JD^2 + KG^2 + \frac{I}{16}H^2 \qquad (23)$$

(二) 撓折勢能 (Bending energy)： 引用 (4) 式之曲變及單位扭轉公式，筒殼每整波間內所論之撓折勢能爲：

$$W_2 = \frac{E_x t^3}{6(\alpha - \nu_{xy}^2)}\int_0^a\int_0^b \left\{\alpha\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\right)^2 + 2\,\nu_{xy}\,\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\,\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\right)^2\right.$$
$$\left. + \frac{4(\alpha - \nu_{xy}^2)}{\lambda}\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x\,\partial y}\right)^2\right\}dx\,dy \qquad (24)$$

將 (11) 式代入 (24) 式，則得

$$\frac{W_2}{\frac{1}{2}E_x tab} = \frac{1}{6(\alpha-\nu_{xy}^2)}\left(\frac{t}{R}\right)^2 n^4\Big[f_1^2\Big\{\tfrac{1}{8}(\alpha\mu^4+2\beta'\mu^2+1)+\tfrac{1}{4}(\alpha\mu^4+1)\Big\}$$

$$+(\alpha\mu^4+1)f_1 f_2+(\alpha\mu^4+1)f_2^2\Big] \tag{25}$$

（三）筒端外力虛功值 (Virtual work)：加諸圓筒端界之外力，所作之虛功，等於外力與伸展長度之相乘積。故每盤波間內之虛功值爲：

$$W_3 = 4t\int_0^b [\sigma_x]_{x=a}\,dy\int_0^a \frac{\partial u}{\partial x}\,dx \tag{26}$$

將 (17), (20) 及 (21) 三式代入 (26) 式，則得：

$$\frac{W_3}{\frac{1}{2}E_x tab} = \frac{4}{\alpha}\frac{\sigma}{E_x}\Big\{\frac{2\sigma}{E_x}(\alpha-\nu_{xy}^2) - 2\nu_{xy}\Big(f_0+\frac{f_1}{4}\Big)$$

$$+n^2(\alpha\mu^2+\nu_{xy})\Big(\frac{3}{32}f_1^2+\frac{f_1 f_2}{8}+\frac{f_2^2}{8}\Big)\Big\} \tag{27}$$

故筒殼每盤波間內之總蓄能 W，爲三者之代數和，

$$W = W_1 + W_2 - W_3\,.$$

第四節　壓應力與放射向位移波幅及圓筒端縮之關係

欲求平均壓應力與放射向位移波幅之關係，須先尋總蓄能 W 爲最小值之條件，即

$$\frac{\partial W}{\partial f_0} = 0\,,\qquad \frac{\partial W}{\partial f_1} = 0\,,\qquad \frac{\partial W}{\partial f_2} = 0 \tag{28}$$

由 (28) 式之第一式，可導得 f_0, f_1 及 f_2 之關係如下：

$$f_0 + \frac{f_1}{4} = \frac{1}{2}n^2\Big(\frac{3}{32}f_1^2+\frac{f_1 f_2}{8}+\frac{f_2^2}{8}\Big) - \frac{\sigma}{E_x}\nu_{xy} \tag{29}$$

自上式及 (21) 式，可推知 $k_1=0$. 其意卽筒殼之放射向擴展，可使平均週向應力 σ_y 之值等於零。今以 (29) 式代入 (23), (25), (27) 各式，並應用 (15) 式所列之係數，則筒殼每盤波間內之總蓄能值可簡書爲：

$$\frac{W}{\frac{1}{2}E_x tab} = -4\left(\frac{\sigma}{E_x}\right)^2 - n^2\mu^2\frac{\sigma}{E_x}\left(\frac{3}{8}f_1^2 + \frac{1}{2}f_1 f_2 + \frac{1}{2}f_2^2\right)$$

$$+ \frac{n^4}{6(\alpha-\nu_{xy}^2)}\left(\frac{t}{R}\right)^2\Big[\left\{\tfrac{1}{8}(\alpha\mu^4+2\beta'\mu^2+1) + \tfrac{1}{4}(\alpha\mu^4+1)\right\}f_1^2$$

$$+ (\alpha\mu^4+1)f_1 f_2 + (\alpha\mu^4+1)f_2^2\Big]$$

$$+ n^4\left[\frac{f_1^4}{512}\left(\mu^4+\frac{1}{\alpha}+34I+8J+8K\right) + \frac{f_1^3 f_2}{32}(9I+2J+2K)\right.$$

$$\left. + \frac{f_1^2 f_1^2}{32}(11I+2J+2K) + \frac{I}{8}f_1 f_2^3 + \frac{I}{16}f_2^4\right]$$

$$- n^2\left[\frac{f_1^3}{64}\left(\frac{1}{\alpha}+16I\right) + \frac{f_1^2 f_2}{32}\left(\frac{1}{\alpha}+16I\right)\right]$$

$$+ \frac{f_1^2}{32}\left(\frac{1}{\alpha}+8I\right) + \frac{f_1 f_2}{8\alpha} + \frac{f_2^2}{8\alpha} \tag{30}$$

茲爲便於計算及書寫起見，取

$$\rho = \frac{f_2}{f_1}, \qquad \eta = n^2\frac{t}{R}, \qquad \xi = f_1\frac{R}{t} = \frac{\delta}{t} \tag{31}$$

式中 δ 爲筒殼皺褶時所呈之波幅，再由 (28) 式之後兩式，得平衡條件如下

$$\frac{\sigma R}{E_x t}\eta\mu^2\left(\rho+\tfrac{1}{2}\right) = (\eta\xi)^2\Big[\tfrac{1}{4}I\rho^3 + \tfrac{1}{8}(11I+2J+2K)\rho^2$$

$$+ \frac{3}{16}(9I+2J+2K)\rho + \frac{1}{64}\left(\mu^4+\frac{1}{\alpha}+34I+8J+8K\right)\Big]$$

$$-(\eta\xi)\left[\frac{1}{8}\left(\frac{1}{\alpha}+16I\right)\rho + \frac{3}{32}\left(\frac{1}{\alpha}+16I\right)\right] + \frac{1}{4\alpha}\rho + \frac{1}{8}\left(\frac{1}{\alpha}+8I\right)$$

$$+ \frac{\eta^2}{3(\alpha-\nu_{xy}^2)}\left[(\alpha\mu^4+1)\rho + \tfrac{1}{4}(\alpha\mu^4+2\beta'\mu^2+1) + \tfrac{1}{2}(\alpha\mu^4+1)\right]$$

及

$$\frac{\sigma R}{E_x t}\eta\mu^2\left(\rho+\tfrac{1}{2}\right) = (\eta\xi)^2\Big[\frac{1}{4}I\rho^3 + \frac{3}{8}I\rho^2 + \frac{1}{16}(11I+2J+2K)\rho$$

$$+ \frac{1}{32}(9I+2J+2K)\Big] - \frac{\eta\xi}{32}\left(\frac{1}{\alpha}+16I\right) + \frac{1}{4\alpha}\rho + \frac{1}{8\alpha}$$

$$+ \frac{\eta^2}{3(\alpha-\nu_{xy}^2)}\left[(\alpha\mu^4+1)\rho + \tfrac{1}{2}(\alpha\mu^4+1)\right] \tag{32}$$

由上兩式消去 $\frac{\sigma R}{E_x t}$，得 ρ 之三次方程式爲：

$$A_3\rho^3 + A_2\rho^2 + A_1\rho + A_0 = 0 \tag{33}$$

式中之係數如下：

$$A_3 = (\eta\xi)^2(3I+J+K)$$

$$A_2 = \tfrac{3}{4}(\eta\xi)^2(3I+J+K) - \tfrac{1}{2}(\eta\xi)\left(\frac{1}{\alpha} + 16I\right)$$

$$A_1 = \frac{1}{16}(\eta\xi)^2\left(\mu^4 + \frac{1}{\alpha} + 4I + 4J + 4K\right) - \tfrac{1}{2}(\eta\xi)\left(\frac{1}{\alpha} + 16I\right)$$
$$+ \left(4I - \frac{1}{\alpha}\right) - \frac{\eta^2}{3(\alpha - \nu_{xy}^2)}\left[4(\alpha\mu^4+1) - (\alpha\mu^4 + 2\beta'\mu^2 + 1)\right]$$

$$A_0 = \frac{1}{32}(\eta\xi)^2\left(\mu^4 + \frac{1}{\alpha} - 20I - 4J \mp 4K\right) + \tfrac{1}{2}\left(4I - \frac{1}{\alpha}\right)$$
$$- \frac{\eta^2}{3(\alpha - \nu_{xy}^2)}\left[2(\alpha\mu^4+1) - \tfrac{1}{2}(\alpha\mu^4 + 2\beta'\mu^2 + 1)\right] \tag{34}$$

若 $\xi=0$ 時，即波幅極小而近於零時，由 (34) 式，得 $A_3 = A_2 = 0$，及

$$A_1 = \left(4I - \frac{1}{\alpha}\right) - \frac{\eta^2}{3(\alpha - \nu_{xy}^2)}\left[4(\alpha\mu^4+1) - (\alpha\mu^4 + 2\beta'\mu^2 + 1)\right]$$

$$A_0 = \tfrac{1}{2}\left(4I - \frac{1}{\alpha}\right) - \frac{\eta^2}{3(\alpha - \nu_{xy}^2)}\left[2(\alpha\mu^4+1) - \tfrac{1}{2}(\alpha\mu^4 + 2\beta'\mu^2 + 1)\right] = \frac{A_1}{2}$$

以之代入 (33) 式，得 $\rho = -\frac{1}{2}$，或 $f_2 = -\frac{1}{2}f_1$。再以此 f_1 與 f_2 之關係代入 (11) 式，則導得之波型，簡化如 (13) 式所示者，亦即與式理論中所採用之小波幅波型是也。

欲求相當壓應力 $\frac{\sigma R}{E_x t}$ 之值，首應愼擇 μ，η 兩數，繼選波幅 ξ，求得 (34) 式內之各係數，然後解 (33) 式 ρ 之三次方程式，再以 ρ 之實根數值代入 (32) 式，即可得 $\frac{\sigma R}{E_x t}$。如 ρ 之三根，均爲實數，則 $\frac{\sigma R}{E_x t}$ 之值，

應取其最小者。又爲計算便捷計，可由 (32) 式中消除 ρ 之三次項，而得

$$\frac{\sigma R}{E_x t}=\frac{1}{\eta\mu^2}\Big[\tfrac{1}{4}(\eta\xi)^2(4I+J+K)\rho^2+\Big\{\tfrac{1}{4}(\eta\xi)^2(4I+J+K)$$

$$-\tfrac{1}{8}(\eta\xi)\Big(\frac{1}{\alpha}+16I\Big)\Big\}\rho+\frac{1}{64}(\eta\xi)^2\Big(\mu^4+\frac{1}{\alpha}+16I+4J+4K\Big)$$

$$-\frac{1}{16}(\eta\xi)\Big(\frac{1}{\alpha}+16I\Big)+I+\frac{\eta^2}{12(\alpha-\nu_{xy}^2)}(\alpha\mu^4+2\beta'\mu^2+1)\Big] \tag{35}$$

若 $\xi\rightarrow 0$，即波幅趨於極小時，得

$$\Big[\frac{\sigma R}{E_x t}\Big]_{\xi\rightarrow 0}=\frac{1}{\eta\mu^2}\Big[I+\frac{\eta^2}{12(\alpha-\nu_{xy}^2)}(\alpha\mu^4+2\beta'\mu^2+1)\Big] \tag{36}$$

又當 $\eta=\sqrt{\dfrac{12I(\alpha-\nu_{xy}^2)}{\alpha\mu^4+2\beta'\mu^2+1}}$ 時，平均壓應力 σ 之值爲最小，即：

$$\text{Min.}\Big[\frac{\sigma R}{E_x t}\Big]_{\xi\rightarrow 0}=\frac{1}{\mu^2}\sqrt{\frac{I(\alpha\mu^4+2\beta'\mu^2+1)}{3(\alpha-\nu_{xy}^2)}} \tag{37}$$

此結果與典式理論所求得者相符。

吾人知實際試驗時，所能操縱者，僅爲試驗機兩端板間之距離，亦即試驗標本所受之惟一幾何限制，可資利用於測度者也。而 (35) 式僅示壓應力與位移波幅之可能平衡關係，故爲配合實際起見，須使平均壓應力展爲端縮之函數。由 (20) 式，得單位端縮 e，即每整波間內之軸向端縮除以軸向波長，爲：

$$\frac{eR}{t}=\frac{\sigma R}{E_x t}+\frac{\mu^2}{16}\xi(\eta\xi)\left(\rho^2+\rho+\tfrac{1}{4}\right) \tag{38}$$

上式表平均壓應力與圓筒端縮之關係。

第五節 釋例

今設樺木三層板爲正向質材料，其彈性常數假定如下：

$E_x = 2.0 \times 10^6$ 磅/平方吋　　$\nu_{xy} = 0.3$

$E_y = 0.2 \times 10^6$ 磅/平方吋　　$\nu_{yx} = 0.03$

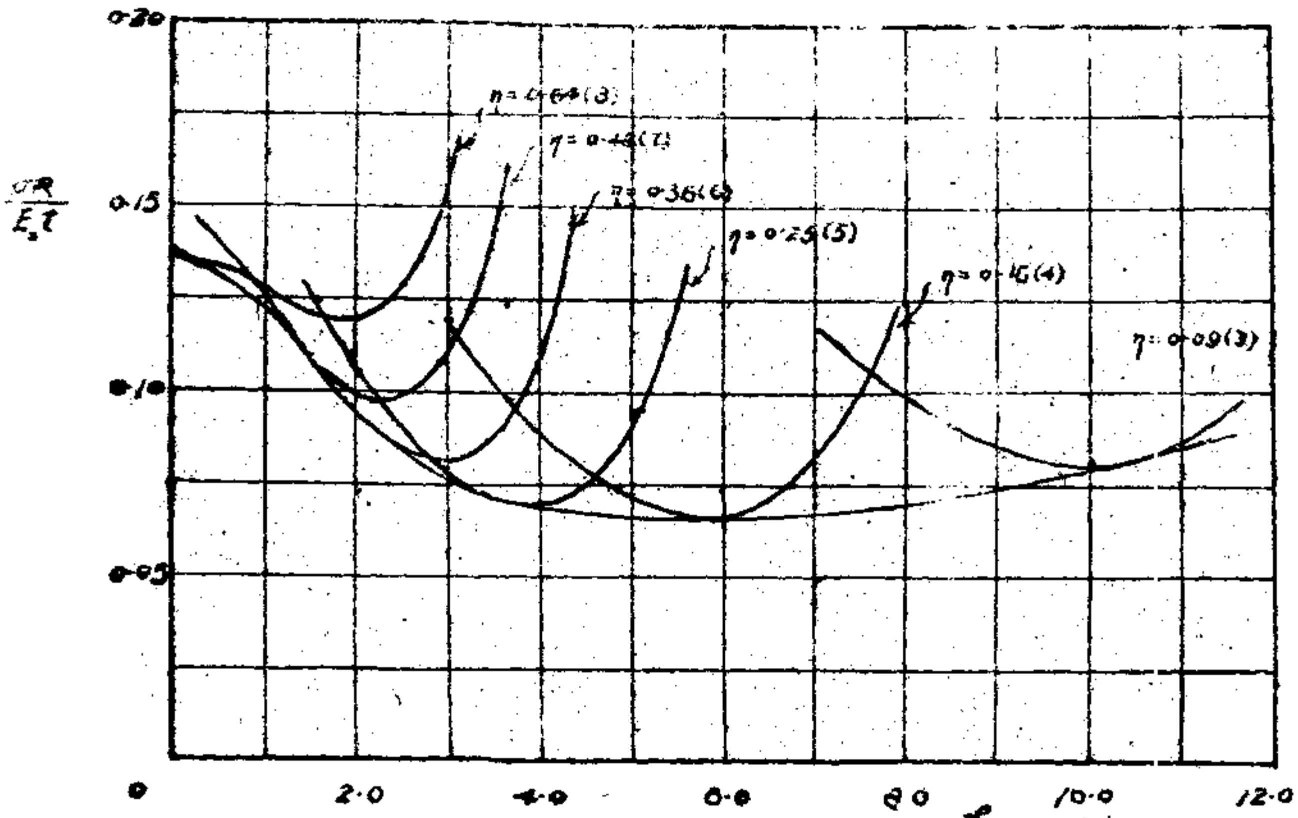
$G_{xy} = 0.125 \times 10^6$ 磅/平方吋

又設該層板製成之圓筒，其中面半徑與殼厚之比爲 $\frac{R}{t} = 100$，並取兩種週向與軸向之波長比爲例，即 $\mu = 1$，與 $\mu = 0.5$ 是也。$\mu = 1$，係示等邊之鑽石狀波型，而 $\mu = 0.5$，則爲狹長之菱形波型。

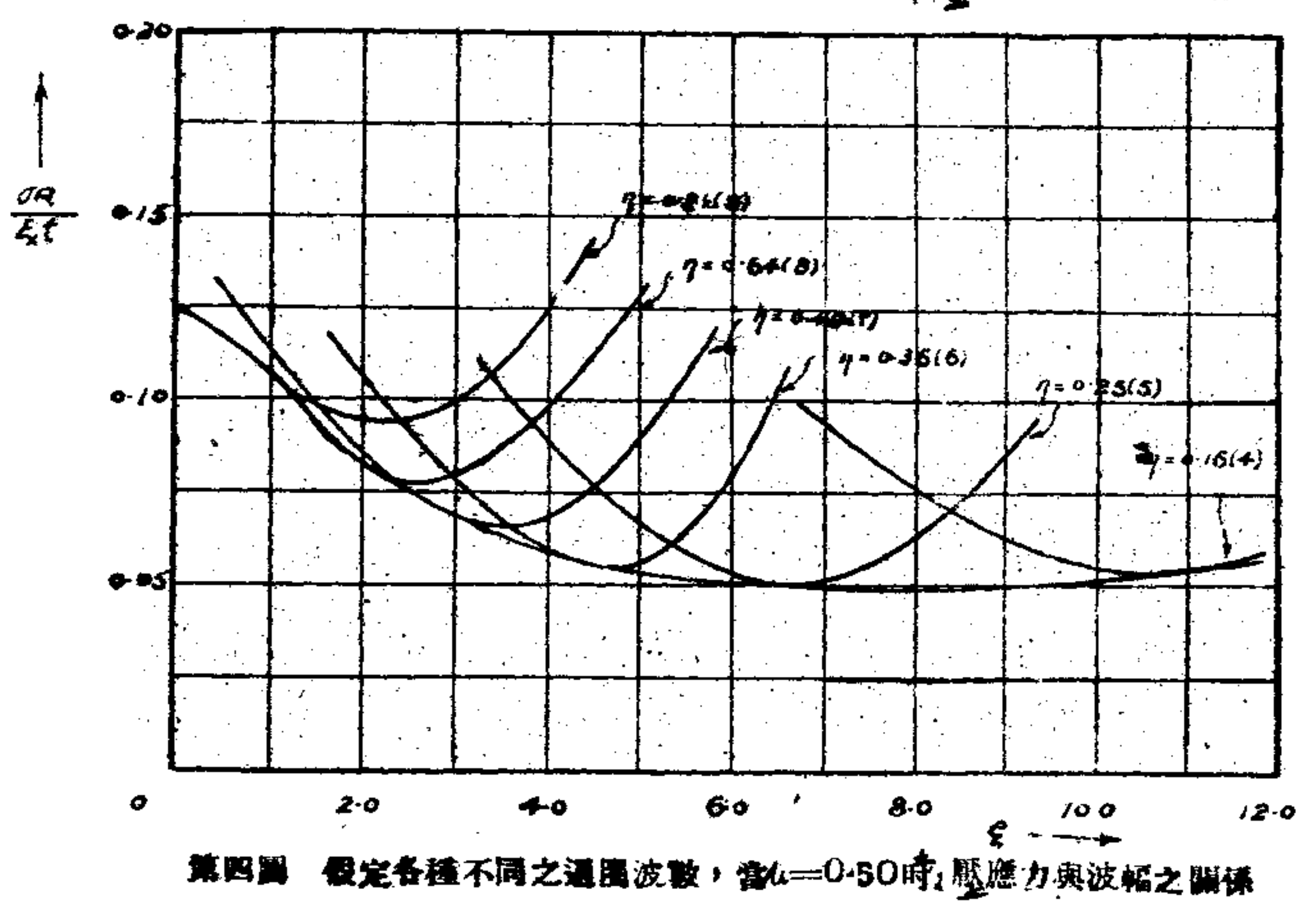
計算步驟，甚爲繁複，茲僅將其結果，示於第二圖至第六圖。其第三圖與第四圖，係示壓應力 $\frac{\sigma R}{E_x t}$ 與波幅 ξ 之關係。其第五圖與第六圖，則係示壓應力 $\frac{\sigma R}{E_x t}$ 與圓筒單位端縮 $\frac{eR}{t}$ 之關係。圖中之變數爲 η，括號內之數值爲 $\frac{R}{t} = 100$ 時之週圈波數 n.

由第三圖與第四圖，知 η 與 μ 爲定值時，即波型爲定型時，圓筒所受之壓應力 $\frac{\sigma R}{E_x t}$，當波幅漸增時，首漸低減，及達最小值後，則漸增大。又如波型擴大，即週圈波數較少，其開始之皺摺載荷 (Initial buckling load)，亦即 $\xi = 0$ 時之 $\frac{\sigma R}{E_x t}$ 值較高，然其最小值，除 $\mu = 1.0$, $\eta < 0.16$ 與 $\mu = 0.5$, $\eta < 0.25$ 以外，均趨低落。

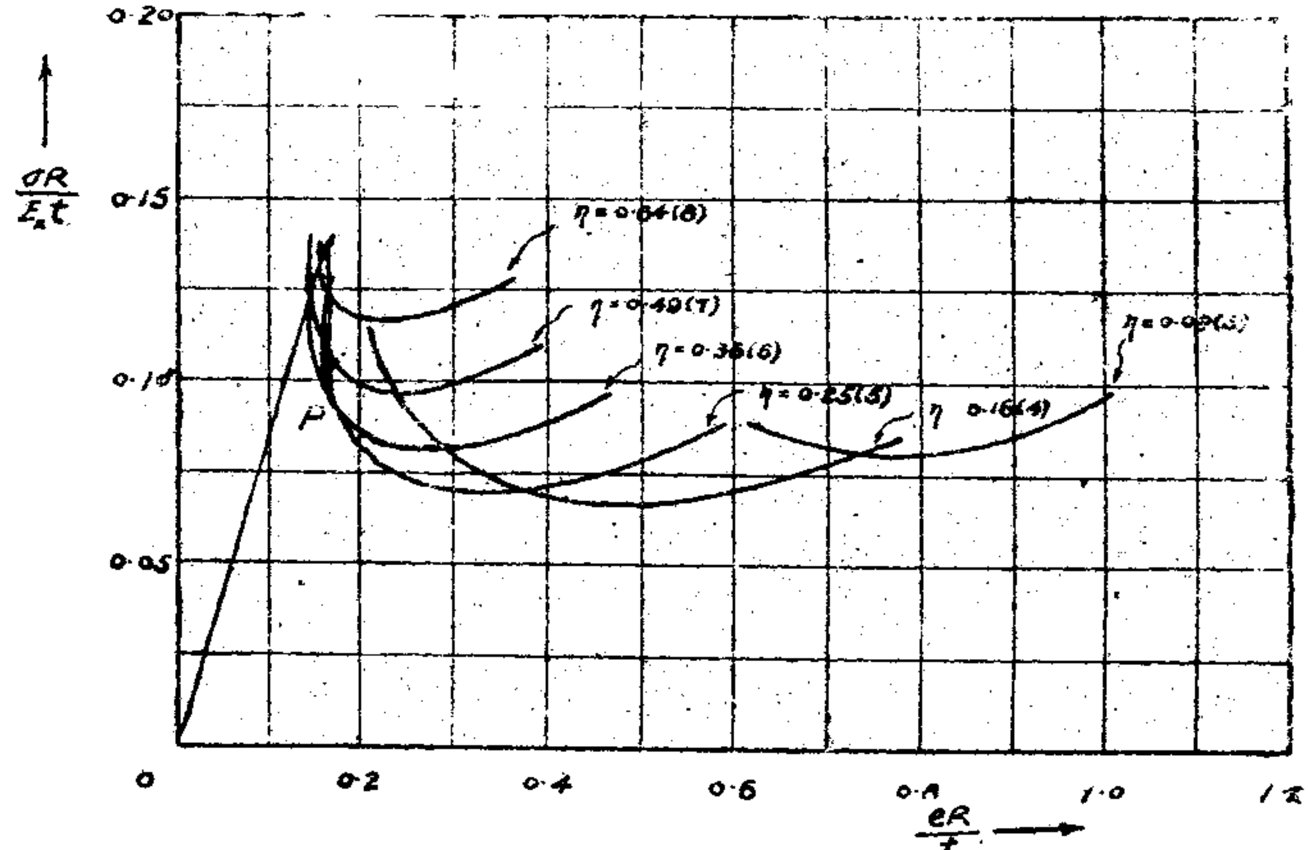
由第五圖與第六圖，知圓筒之皺摺步驟 (Buckling process)，如依照圖中曲線所示，則圓筒開始皺摺後，其端縮漸減，換言之，即試機之兩端板，必須分開以適應之，此時之皺摺，呈極不穩定現象。於實際試驗時，皺摺之進展甚速，在試驗者能使兩端板分開之前，圓筒已呈 P 點（見第五與第六圖）所示之現象。其端縮與開始皺摺時相等，而壓應力則低落甚巨。由此可解釋試驗所得之 $\frac{\sigma R}{E_x t}$ 值，遠較典式理論所示者爲小，而由本文諸式，當可求得與試驗值甚爲近似之 $\frac{\sigma R}{E_x t}$ 值也。



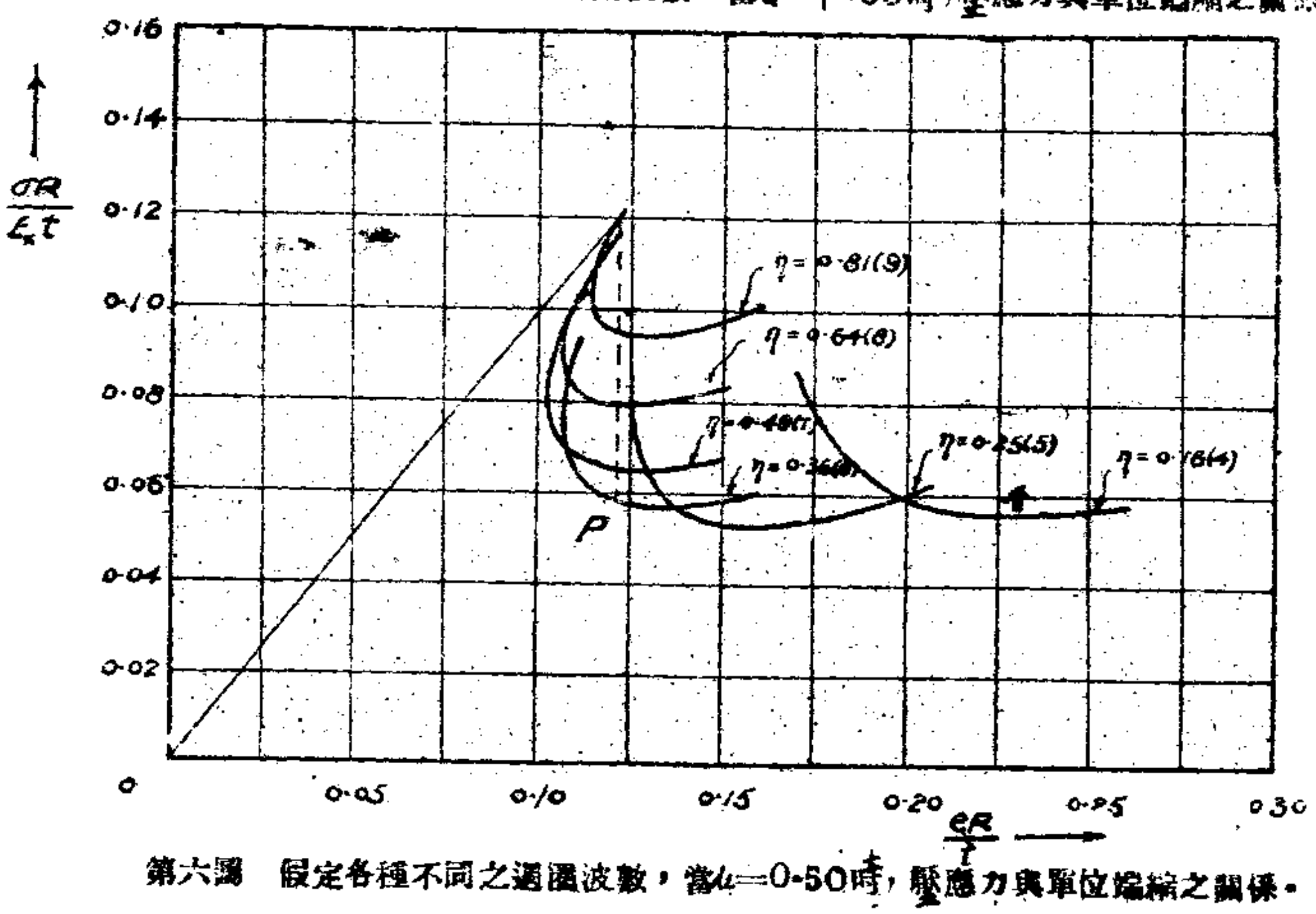
第三圖　假定各種不同之週圍波數，μ=1·00時，壓應力與波幅之關係



第四圖　假定各種不同之週圍波數，當μ=0·50時，壓應力與波幅之關係



第五圖 假定各種不同之週圈波數，當μ=1.00時，壓應力與單位遞縮之關係



第六圖 假定各種不同之週圈波數，當μ=0·50時，壓應力與單位端縮之關係。

附錄一 標註

R	圓筒中面之半徑
t	筒殼之厚度
σ	軸向之平均壓應力
e	圓筒之單位端縮 (Unit end shortening)
x, y	未變形筒殼中面上，軸向與週向之量度
u, v, w	x, y 及放射向之分位移 (Components of displacement)
e_x, e_y, γ_{xy}	x, y 向之單位應變與剪應變
$\sigma_x, \sigma_y, \tau_{xy}$	x, y 向之正應力與剪應力
E_x, E_y	x, y 向之彈性模數
ν_{xy}	y 向應變由於 x 向應力之帕松比 (Poisson's ratio associated with contraction parallel to y-axis and stress parallel to x-axis)
G_{xy}	x, y 向之剪力模數
$\chi_x, \chi_y, \chi_{xy}$	圓筒中面 x, y 向之曲變 (Change of curvature) 及單位扭轉 (Unit twist)
N_x, N_y, N_{xy}; Q_x, Q_y, Q_{xy}; M_x, M_y, M_{xy}	筒殼局部之週界斷面，各爲單位長度時，所受之外力及力矩 (見第二圖)
$F(x, y)$	Airy 氏應力函數，由 (6) 與 (16) 兩式定之
D_1, D_2, D_3	見 (7) 式
α, β, λ	見 (9) 式
β'	見 (10) 式
f_0, f_1, f_2	波型之待定係數
n	圓筒週圍之波數
$2a, 2b$	圓筒軸向與週向之波長
μ	週向與軸向之波長比
A, B, C, D, G, H	係數，見 (15) 式

I, J, K	見 (16) 式
$k_1=0$	積分常數，由 (21) 與 (29) 兩式定之
$k_2=-\sigma$	積分常數，由 (18) 式定之
W_1, W_2, W_3	每整波間內之引張蓄能，撓折蓄能，與外力之虛功值
W	每整波間內之總蓄能 (Total energy)
ρ, η, ξ	見 (31) 式
δ	筒殼皺摺時所呈之幅波 (Amplitude of wave)
A_0, A_1, A_2, A_3	係數，見 (34) 式

附錄二　參考文獻

1. T. von Karman & Tsien Hsu-Shen : *The Buckling of Spherical Shells by External Pressure.* J. of Aero. Sc., Vol. 7, No. 2, p. 43, 1939.
2. T. von Karman, L. G. Dunn & Tsien Hsu-Shen : *The Influence of Curvature on the Buckling Characteristics of Structures.* J. of Aero. Sc., Vol. 7, No. 7, p. 276, 1940.
3. T. von Karman & Tsien Hsu-Shen : *The Buckling of Thin Cylindrical Shells under Axial Compression.* J. of Aero. Sc., Vol. 8, No. 8, 1941.
4. L. A. Donnell : *A New Theory for Buckling of Thin Cylinder under Axial Compression & Bending.* A.S.M.E. Trans. Vol. 56, p. 795-806, 1934.
5. L. H. Donnell : *Stability of Thin-Walled Tubes under Torsion.* N.A.C.A. T. R. No. 479, 1934.
6. S. Timoshenko : *Theory of Plates and Shells.* 1940.
7. S. Timoshenko : *Theory of Elastic Stability.* 1936.
8. 林致平，談鎬生：正向質薄板之彈性穩定問題。 航空研究院研究報告第三號，民國三十年出版。