民國二十六年二月教育部審定

高級中學教科書

三角術

趙修乾編

商務印書館發行

教育部教科圖書審定執照

該據商務印書館呈送趙修乾編高中三角術 共一册經本部審定合於高級中學之用其有效期限三學年自二十六年二月二十二日起至二十九年七月三十一日止合行發給執照

右給商務印書館 收執

中華民國 年二月二十二日

字第 伍 號

依照教育部修正課程標準編輯

高級中學教科書

三角術

趙修乾編

商務印書館發行

本書於二十六年二月經
國民政府教育部審定
領到中字第五號執照

中華民國二十六年六月審定本第一版
中華民國二十七年一月審定本第三版

(51224)

高級中學教科書 三角術一冊

每冊實價國幣陸角
外埠酌加運費匯費

編纂者 趙修乾

發行人 王雲五 長沙南正街

印刷所 商務印書館 長沙南正街

發行所 商務印書館 各地

(本書校對者胡述聰)

周

四

編輯大意

一. 本書依據教育部最近頒布修正課程標準編著,供高級中學程度之用.

一. 本書論角約分二段:第一段論銳角之三角函數,為初中三角之複習;第二段論一般角之三角函數,而繫以三角方程之解法.至於倍角,半角諸函數均置於斜三角形解法之後者,期於由淺入深不致開卷茫然也.

一. 三角級數,極座標之曲線,函數之指數式(exponential form),雙曲線函數(hyperbolic function)等,因課程關係或缺而不書,或語而不詳.有志之士,尙宜於高等數學中求之.

一. 一式每引二證,一問或設數解,意在使能者知變化之妙,而興趣彌增;不能者則雖蔽於此,亦可悟諸彼.

一. 演算錯誤,每不自覺,施以校對,是非判然.故本書注重校對.

一. 習題之答數,不全載出.其載者固可充校對之用,其不載者則得數非自行校對不可.

一. 此書層節大致仿Moritz三角學,教材則傍採Loney, Hobson, Hall and, Knight, Wentworth等書.至於編者出意之處,亦不爲少.

一. 度量衡之不統一,亦現世紀之一憾事.原書所有哩,呎,磅,噸等非十進之單位,茲皆以公尺,公斤等換算之.

二十五年六月編者識

目　錄

第一章　銳角之三角函數

第二章　直角三角形之眞數解法

第三章　對　數

第四章 直角三角形之對數解法

第五章 任意角及其計算法

第六章　任意角之三角函數

第七章　三角形之性質

第八章 斜角三角形之解法

第九章 兩角和及較之三角函數

第十章 三角方程式

第十一章　三角函數造表法

三角術

第一章

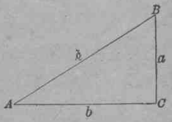
銳角之三角函數

§1. 銳角函數之定義 銳角函數之定義,學者已於初中三角習知之.茲爲便於複習計,再重行詳述之如次:

設有銳角 A,自其一邊上任取一點 B,向他邊作垂線 BC,則成直角三角形 ABC. 命 A 角之對邊 BC 爲 a,鄰邊 AC 爲 b,斜邊 AB 爲 c,則三邊間有下六比,即

$$\frac{a}{c},\ \frac{b}{c},\ \frac{a}{b}$$

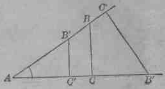
及其逆數 $\frac{c}{a},\ \frac{c}{b},\ \frac{b}{a}$.



A 角若定,則各比不因 B 點之位置而變.何則,試於角之任一邊上,另取 B' 點,向其對邊作垂線 $B'C'$;則 $AB'C'$

與 ABC 爲相似三角形,而

$$\frac{B'C'}{AB'}=\frac{BC}{AB}=\frac{a}{c};$$



是 A 角之對邊與斜邊之比,不因 B 點之位置而變也.其他五比之不變,亦可類推

然角變則如前所得各比卽隨之而變,蓋角變後之三角形不與原形相似也.故三角形中每兩邊之比乃一角之函數 (function).六比皆有專名如下:

A 角之對邊與斜邊之比,爲其角之**正弦** (sine),記以 $\sin A$.卽

$$\sin A=\frac{a}{c}.$$

A 角之鄰邊與斜邊之比,爲其角之**餘弦** (cosine),記以 $\cos A$.卽

$$\cos A=\frac{b}{c}.$$

A 角之對邊與鄰邊之比,爲其角之**正切** (tangent),記以 $\tan A$.卽

$$\tan A=\frac{a}{b}.$$

正弦之逆數,爲其角之**餘割** (cosecant),記以 $\csc A$.卽

$$\csc A=\frac{c}{a}.$$

餘弦之逆數,爲其角之正割 (secant), 記以 sec A. 卽

$$\sec A=\frac{c}{b}.$$

正切之逆數,爲其角之餘切 (cotangent), 記以 cot A. 卽

$$\cot A=\frac{b}{a}.$$

1 與餘弦之差,爲其角之正矢(versed sine), 記以 vers$A$. 卽

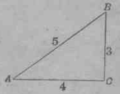
$$\text{vers } A=1-\cos A.$$

1 與正弦之差,爲其角之餘矢 (coversed sine), 記以 covers A. 卽

$$\text{covers } A=1-\sin A.$$

正矢與餘矢不常用.

例一　直角三角形之邊爲 3, 4, 5; 求邊 3 之對角 A 之三角函數.



解　$\sin A=\frac{\text{對邊}}{\text{斜邊}}=\frac{3}{5}.$

同理　$\cos A=\frac{4}{5}$, $\tan A=\frac{3}{4}.$

餘切爲正切之逆數, 卽

$$\cot A=\frac{1}{\frac{3}{4}}=\frac{4}{3}.$$

同理 $\sec A=\frac{5}{4}$, $\csc A=\frac{5}{3}$.

例二 有直角三角形,倚於直角之二邊爲 a 與 b; 求邊 a 之對角 A 之正弦,餘弦,正切.

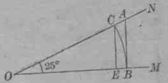
解 因斜邊 $c=\sqrt{a^2+b^2}$,

故 $$\sin A=\frac{a}{c}=\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}.$$

同理 $$\cos A=\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}},\ \tan A=\frac{a}{b}.$$

例三 試作圖求 25° 之各函數.

解 用分度板作 $\angle MON=25^\circ$. 於 OM 上取適宜之長 OB, 譬如 10 公分,以 O 爲中心, OB 爲半徑,畫 BC 弧,交 ON 於 C; 引 CE 與 BA, 各垂直於 OB; 量各線之長,當得



$CE=4.23$ 公分, $OE=9.06$ 公分, $AB=4.66$ 公分, $OC=10$ 公分.

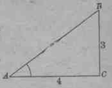
故 $$\sin 25^\circ=\frac{EC}{OC}=\frac{4.23}{10}=0.423,\quad \csc 25^\circ=\frac{1}{\sin 25^\circ}=2.364,$$

$$\cos 25^\circ=\frac{OE}{OC}=\frac{9.06}{10}=0.906,\quad \sec 25^\circ=\frac{1}{\cos 25^\circ}=1.104,$$

$$\tan 25^\circ=\frac{BA}{OB}=\frac{4.66}{10}=0.466,\quad \cot 25^\circ=\frac{1}{\tan 25^\circ}=2.145.$$

求正餘弦則用 COE 三角形，求正切則用 AOB 三角形，無他，使分母成爲整數，易於計算耳.

例四　某角之正切爲 $\frac{3}{4}$，試畫其角.

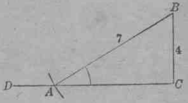


解　引 AC，其長爲 4 單位，作 CB 垂直於 AC，定 BC 之長爲 3 單位；連 AB，

則　　$\angle CAB$ 爲所求之角.

因　　$\tan CAB = \frac{BC}{AC} = \frac{3}{4}$ 故也.

例五　試作一角令其正弦爲 $\frac{4}{7}$



解　引 CD 直線，作 $BC \perp CD$，且使 $BC=4$；以 B 爲中心，以 7 爲半徑而畫圓弧，截 CD 於 A；連結 AB，則 $\angle BAC$ 卽爲所求之角.

因　　$\sin BAC = \frac{BC}{AB} = \frac{4}{7}$ 故也.

又法以 7 爲直徑畫半圓，復以 B 爲中心，4 爲半徑，畫一弧，截半圓於 C；連結 AC，亦得 $\angle BAC$. 學者試作其圖，且證其理.

習 題 一

1. 證 $\sin A \csc A=1, \cos A \sec A=1, \tan A \cot A=1$

2. 直角三角形之邊爲5, 12, 13, 求邊5之對角A之三角函數.

3. 如上三角形,求邊12之對角B之三角函數

4. 比較以上兩題之答數,且應用A, B互爲餘角之關係可得方程式

$$\sin A=\cos B=\cos(90^\circ-A).$$

試仿此更書出其餘類似諸方程式.

5. 有直角三角形,鄰於直角之邊爲15與8;求邊8之對角A之函數;求邊8之鄰角B之函數.

6. 利用上題之結果,試證

$$\frac{\sin A}{\cos A}=\tan A, \ \frac{\cos A}{\sin A}=\cot A.$$

7. 直角三角形之一邊爲9,斜邊爲41;求其夾角之各函數.

8. 有直角三角形,鄰於直角之邊爲p^2-q^2及$2pq$;求邊$2pq$之對角B之正弦,餘弦及正切.

9. 已知$\sin A=\frac{3}{5}$,求vers A及covers A.

10. 已知 $\sin A=\frac{7}{25}$,求其餘各函數.

11. 求 45° 之各函數

[作直角三角形,使鄰於直角之二邊皆爲 a.]

12. 求 30° 之各函數.

[直角三角形之一角若爲他角之二倍,則斜邊爲最短邊之二倍;命最短邊爲 a.]

13. 試作圖求 15° 之各函數.

14. 已知 $\sin A=\frac{5}{7}$,試作圖測 A 之度數.

15. 已知 $\cos A=\frac{2}{3}$,試作圖測 A 之度數.

16. 由 $a^2+b^2=c^2$ 之關係,證

$$\frac{\sin A}{\cos A}=\tan A,\ \frac{\cos A}{\sin A}=\cot A.$$

17. 用上法證

$\sin^2 A+\cos^2 A=1,\ \tan^2 A+1=\sec^2 A,\ \cot^2 A+1=\csc^2 A$*.

18. 試作圖求 10° 至 80° 間每 10° 之正弦之值

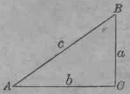
19. 試作圖求同上各角之餘弦及正切.

20. 當角自 0° 漸大而至於 90°, 則正弦,正切,正割由小漸大,而餘弦,餘切,餘割由大反小;試證明之.

* $\sin^2 A$ 爲 $(\sin A)^2$ 之意; 一般而言, $\sin^n A$ 即 $(\sin A)^n$; 他函數亦然.但 $n=-1$ 時爲例外. $\sin^{-1} A$ 等另有意義,非指 $(\sin A)^{-1}$, 見 §67.

21. 正弦餘弦常小於1,正切餘切則可有一切之值;試說明之

§2 餘角之各函數 設三角形 ABC, C 爲直角, a, b, c 爲三邊,則 A 與 B 互爲餘角,而



$$\sin A = \frac{a}{c},$$

$$\cos B = \frac{a}{c}$$

故

$$\left.\begin{aligned}
\sin A &= \frac{a}{c} = \cos B = \cos(90^\circ - A).\\
\text{同理}\quad \cos A &= \frac{b}{c} = \sin B = \sin(90^\circ - A),\\
\tan A &= \frac{a}{b} = \cot B = \cot(90^\circ - A),\\
\cot A &= \frac{b}{a} = \tan B = \tan(90^\circ - A),\\
\sec A &= \frac{c}{b} = \csc B = \csc(90 - A),\\
\csc A &= \frac{c}{a} = \sec B = \sec(90^\circ - A).
\end{aligned}\right\} \qquad (1$$

正弦與餘弦,正切與餘切,正割與餘割,各互稱爲**餘函數** (cofunction) (1)式乃表某角之某函數,爲其餘角之餘函數.應用此理,則凡銳角之 數皆可以小於45°之某函數表之.譬如

$$\sin 75^\circ = \cos(90^\circ - 75^\circ) = \cos 15^\circ,$$

$$\cot 50^\circ = \tan(90^\circ - 50^\circ) = \tan 40^\circ \text{ 等.}$$

例　若 $\cot A = \tan 8A$, 求 A 之一值.

解　$\cot A$ 常等於 $\tan(90^\circ - A)$, 在此又適等於 $\tan 8A$.

故　$$\tan(90^\circ - A) = \tan 8A.$$

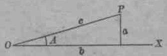
能滿足此方程式者,有

$$90^\circ - A = 8A, \text{ 即 } A = 10^\circ.$$

但 A 之值尚不止此,說見後.

§3. 特別角之函數　角之函數易於決定者,有數種:

I. 0°之函數.　設 $\angle POX = A$, OX 爲定直線, $OP = c$ 爲動直線繞 O 而旋轉.自 P 向 OX 引一垂線而作直角三角形,其高爲 a, 底邊爲 b; 則當



A 角漸大之際, a 增而 b 減;反之, A 角漸小,則 a 減而 b 增; A 小至於 0, 則 a 減而爲 0, b 增而爲 c. 故得

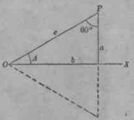
$$\sin 0^\circ = \frac{0}{c} = 0,\ \cos 0^\circ = \frac{c}{c} = 1,\ \tan 0^\circ = \frac{0}{c} = 0.$$

II. 30°之函數.　設 $A = 30^\circ$, 則其餘角爲 60°, 而直角三角形,成正三角形之一半.命正三角形之各邊爲 c, 則

$$a=\frac{c}{2},$$

$$b=\sqrt{c^2-\left(\frac{c}{2}\right)^2}=\sqrt{\frac{3}{4}c^2}$$

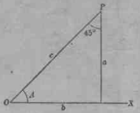
$$=\frac{1}{2}c\sqrt{3}.$$



故　$\sin 30^\circ=\frac{\frac{1}{2}c}{c}=\frac{1}{2}$, $\cos 30^\circ=\frac{\frac{1}{2}c\sqrt{3}}{c}=\frac{\sqrt{3}}{2}$,

$\tan 30^\circ=\frac{\frac{1}{2}c}{\frac{1}{2}c\sqrt{3}}=\frac{1}{\sqrt{3}}$.

III. 45°之函數. 若 $\angle A=45^\circ$,則直角三角形有二邊相等即



$$a=b;$$

而　$$c^2=a^2+a^2=2a^2,$$

故　$$a=\frac{c}{\sqrt{2}}.$$

故　$\sin 45^\circ=\frac{\frac{c}{\sqrt{2}}}{c}=\frac{1}{\sqrt{2}}$, $\cos 45^\circ=\frac{\frac{c}{\sqrt{2}}}{c}=\frac{1}{\sqrt{2}}$,

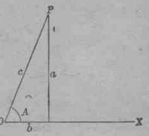
$\tan 45^\circ=\frac{\frac{c}{\sqrt{2}}}{\frac{c}{\sqrt{2}}}=1.$

IV. 60°之函數　60°爲30°之餘角,故由(1)式

$$\sin 60^\circ=\cos 30=\frac{\sqrt{3}}{2},\ \cos 60^\circ=\sin 30^\circ=\frac{1}{2},$$

$$\tan 60^\circ=\frac{\sin 60^\circ}{\cos 60^\circ}=\sqrt{3}.$$

V. 90°之函數. 當 A 近於 90°, 則 a 近於 c, 而 b 近於 0, 及至極限,遂得



$$\sin 90^\circ=\frac{c}{c}=1,\ \cos 90^\circ=\frac{0}{c}=0,$$

$$\tan 90^\circ=\frac{c}{0}=\infty.$$

今將上述結果,列表於下*.

	0°	30°	45°	60°	90°
sin	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
cos	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{1}{2}$	0
tan	0	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	1	$\sqrt{3}$	∞

其餘三函數因與上列三函數有互為逆數關係,不難求得其值,故未將其列出.

*此表甚重要,茲特整齊其值如右,以便記憶.

$\sqrt{2}=1.414$,

$\sqrt{3}=1.732$.

	0°	30°	45°	60°	90°
sin	$\frac{1}{2}\sqrt{0}$	$\frac{1}{2}\sqrt{1}$	$\frac{1}{2}\sqrt{2}$	$\frac{1}{2}\sqrt{3}$	$\sqrt{4}$
cos	$\frac{1}{2}\sqrt{4}$	$\frac{1}{2}\sqrt{3}$	$\frac{1}{2}\sqrt{2}$	$\frac{1}{2}\sqrt{1}$	$\frac{1}{2}\sqrt{0}$
tan	0	$\frac{1}{3}\sqrt{3}$	$\frac{1}{3}\sqrt{3^2}$	$\frac{1}{3}\sqrt{3^3}$	∞

習題二

1 下列各數試各以其餘角之函數表之.

sin 40°, cos 50°, tan 48°, cot 22.5°, sec 60°, csc 56°20′.

2. 試以小於45°之函數表下列各數.

tan 75°, cos 67°30′, sin 57°35′, sec 73°45′30″.

3. 試用斜邊為2之直角三角形,求30°之各函數.

4. 試用底邊為1之直角三角形,求45°之各函數.

5. 試用餘角關係,由0°各函數,求90°各函數.

6. 求0°, 30°, 45°, 60°, 90°之正割,餘割,餘切;並列之為表.

7. 若 $\sin A=\cos A$, 求 A 之值.

8. 若 $\tan A=\cot(45°+A)$, 求 A 之值

9. 若 $\sin(45°+A)=\cos(30°+A)$, 求 A 之值.

10. 若 $\tan 2A=\cot 3A$, 求 A 之值.

11. 若 $\sin 2A=\cos(45°-A)$, 求 A 之值.

12. 若 $\cot A=\tan(n-1)A$, 求 A 之值.

13. 證 $\operatorname{vers} A=\operatorname{covers}(90°-A)$,

$\operatorname{covers} A=\operatorname{vers}(90°-A)$.

14. 證 $\tan^2 30°+\tan^2 45°+\tan^2 60°=4\frac{1}{3}$.

15. 證 $\sin 30^\circ \cos 60^\circ + \cos 30^\circ \sin 60^\circ = 1$.

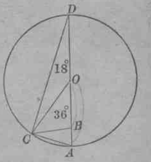
16. 證 $4\cot^2 45^\circ - \sec^2 60^\circ + \sin^2 30^\circ = \frac{1}{8}$.

17. 如下圖於圓 O 之直徑 AD 上,作

$$AO : OB = OB : BA$$

又截取 $AC = OB$, 則由幾何學知 $\angle CDA = 18^\circ$.

命 $AC = x$, $AO = r$; 證



$$x = r\left(-\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{5}\right),$$

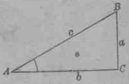
及 $\sin 18^\circ = \frac{1}{4}(-1 + \sqrt{5})$,

$$\cos 18^\circ = \frac{1}{4}\sqrt{10 + 2\sqrt{5}},$$

$$\tan 18^\circ = \frac{1}{5}\sqrt{25 - 10\sqrt{5}},$$

$$\cot 18^\circ = \sqrt{5 + 2\sqrt{5}}.$$

§4 基本公式 設直角三角形 ABC 之斜邊與餘二邊各爲 c, a, b, 則



$$a^2 + b^2 = c^2.$$

遞以 c^2, b^2, a^2 除之,得

$$\left.\begin{aligned}
&\left(\frac{a}{c}\right)^2 + \left(\frac{b}{c}\right)^2 = 1, \quad \text{即} \quad \sin^2 A + \cos^2 A = 1,\\
&\left(\frac{a}{b}\right)^2 + 1 = \left(\frac{c}{b}\right)^2, \quad \text{即} \quad \tan^2 A + 1 = \sec^2 A,\\
&1 + \left(\frac{b}{a}\right)^2 = \left(\frac{c}{a}\right)^2, \quad \text{即} \quad 1 + \cot^2 A = \csc^2 A.
\end{aligned}\right\} \qquad (2)$$

此三式謂之三角函數之平方關係 (square relations).

由定義,又得逆數關係 (reciprocal relations) 如下.

$$\left.\begin{aligned}\sin A\csc A=1,\\ \cos A\sec A=1,\\ \tan A\cot A=1.\end{aligned}\right\}\qquad(3)$$

下列兩種關係,亦甚重要:

$$\tan A=\frac{\sin A}{\cos A},\quad \cot A=\frac{\cos A}{\sin A}.\qquad(4)$$

此可以 $\sin A=\frac{a}{c}$, $\cos A=\frac{b}{c}$, $\tan A=\frac{a}{b}$

代入式中而證之.

§5. 以一函數表諸函數

例 試以 $\sin A$ 表其餘諸函數.

解 由 (2), $\cos A=\sqrt{1-\sin^2 A}$.

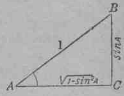
由 (4), $\tan A=\frac{\sin A}{\cos A}=\frac{\sin A}{\sqrt{1-\sin^2 A}}$.

由 (3), $\sec A=\frac{1}{\cos A}=\frac{1}{\sqrt{1-\sin^2 A}}$.

又 $\csc A=\frac{1}{\sin A}$.

又 $\cot A=\frac{1}{\tan A}=\frac{\sqrt{1-\sin^2 A}}{\sin A}$.

別解　如圖命 $AB=1$, 則



$$\sin A=\frac{BC}{AB}=BC,$$

$$AC=\sqrt{\overline{AB}^2-\overline{BC}^2}=\sqrt{1-\sin^2 A}.$$

故 $\cos A=\frac{AC}{AB}=\sqrt{1-\sin^2 A},$

$$\tan A=\frac{BC}{AC}=\frac{\sin A}{\sqrt{1-\sin^2 A}}.$$

習　題　三

1. 證 $\sin A=\sqrt{1-\cos^2 A}$, $\cos A=\sqrt{1-\sin^2 A}$.

2. 證 $(1-\sin A)(1+\sin A)=\cos^2 A$,

   $(1-\cos A)(1+\cos A)=\sin^2 A$.

3. 證 $\frac{\sin A}{1-\cos A}=\frac{1+\cos A}{\sin A}$,

   $\frac{\cos A}{1-\sin A}=\frac{1+\sin A}{\cos A}$.

4. 證 $\sec A=\sqrt{1+\tan^2 A}$, $\csc A=\sqrt{1+\cot^2 A}$,

   $\tan A=\sqrt{\sec^2 A-1}$, $\cot A=\sqrt{\csc^2 A-1}$

5. 證 $(\sec A-\tan A)(\sec A+\tan A)=1$,

   $(\csc A-\cot A)(\csc A+\cot A)=1$.

6. 證 $\cos A\tan A=\sin A$, $\sin A\cot A=\cos A$,

   $\sin A\sec A=\tan A$, $\cos A\csc A=\cot A$.

7. 已知 $\sin 30^\circ=\frac{1}{2}$，求 30° 之他函數.

8. 已知 $\sin 15^\circ=\frac{1}{2}\sqrt{2-\sqrt{3}}$，求 15° 之他函數.

9. 若 $\cot\theta=\sqrt{7}$，求 $\frac{\csc^2\theta-\sec^2\theta}{\csc^2\theta+\sec^2\theta}$ 之值.

10. 若 $\sec A=\sqrt{2}$，求 $\sqrt{\frac{1+\cos A}{1-\cos A}}$ 之值.

11. 設 $\operatorname{vers} A=1-\frac{1}{\sqrt{2}}$，求

$$\sin A+\cos A+\tan A+\cot A+\sec A+\csc A.$$

§6. **函數化簡法**　三角函數爲複雜之形者，常能化之使簡，正如代數式然.常法，將式中所有諸函數，俱以正弦與餘弦表之.然後照代數式化而簡之.終復以最簡之函數表之.並用正餘弦而不獨用一函數以表之者，防有根號發生也.

例一　化簡 $\sin A+\cot A\cos A$.

解　$\cot A=\frac{\cos A}{\sin A}$，故原式爲

$$\sin A+\frac{\cos A}{\sin A}\cos A=\frac{\sin^2 A+\cos^2 A}{\sin A}$$

$$=\frac{1}{\sin A}=\csc A.$$

例二　化下式使成最簡之形:

$$\sin^2 A \tan A + \cos^2 A \cot A + 2\sin A \cos A.$$

解　各函數俱以 $\sin A$ 與 $\cos A$ 表之,則成

$$\sin^2 A \frac{\sin A}{\cos A} + \cos^2 A \frac{\cos A}{\sin A} + 2\sin A \cos A$$

$$= \frac{\sin^4 A + \cos^4 A + 2\sin^2 A \cos^2 A}{\sin A \cos A}$$

$$= \frac{(\sin^2 A + \cos^2 A)^2}{\sin A \cos A} = \frac{1}{\sin A \cos A}$$

$$= \csc A \sec A.$$

式中若只含一角,則各函數俱以直角三角形之邊表之,然後行化簡法亦可.

例三　化簡下式:

$$\sin^2 A \tan A + \cos^2 A \cot A + 2\sin A \cos A.$$

解　此式中只含一角 A; 今由 §1 之圖,得

$$\sin A = \frac{a}{c},\ \cos A = \frac{b}{c},\ \tan A = \frac{a}{b},\ \cot A = \frac{b}{a}.$$

將此等之值代入原式,得

$$\frac{a^2}{c^2} \cdot \frac{a}{b} + \frac{b^2}{c^2} \cdot \frac{b}{a} + 2 \cdot \frac{a}{c} \cdot \frac{b}{c} = \frac{a^4 + b^4 + 2a^2b^2}{abc^2}.$$

$$= \frac{(a^2+b^2)^2}{ab(a^2+b^2)} = \frac{a^2+b^2}{ab} = \frac{a}{b} + \frac{b}{a}$$

$$= \tan A + \cot A.$$

例四 化簡 $\frac{\cos\theta}{\sec\theta-\tan\theta}$.

解 上法無須泥守,譬如此題,以 $\sec\theta+\tan\theta$ 乘其分母分子亦宜.卽

$$\frac{\cos\theta}{\sec\theta-\tan\theta}\cdot\frac{\sec\theta+\tan\theta}{\sec\theta+\tan\theta}=\frac{\cos\theta(\sec\theta+\tan\theta)}{\sec^2\theta-\tan^2\theta}$$

$$=\cos\theta(\sec\theta+\tan\theta)=1+\sin\theta.$$

§7 三角恆等式 凡方程式,不因變數之變化而失其相等之性質者,曰**恆等式**(identity).如

$$(x+1)(x-1)=x^2-1.$$

無論 x 爲何數,兩邊皆能相等,故爲恆等式.又如

$$x^2+6=5x,$$

含 x 爲 2 或 3 之外,兩邊皆不能相等,故非恆等式.

恆等式之含有三角函數者,曰**三角恆等式**. §4 所列八公式,皆其最著者也.此外諸三角恆等式,均可由此八公式間接導出之.證明恆等之法,須將式之各邊化爲最簡而得相同之式.

例一 證恆等式

$$(1-\tan A)(1-\cot A)+\sec A\csc A=2.$$

解 以 $\tan A=\frac{\sin A}{\cos A}$, $\cot A=\frac{\cos A}{\sin A}$,

$$\sec A=\frac{1}{\cos A},\ \csc A=\frac{1}{\sin A}.$$

代入原式之左邊,得

$$\left(1-\frac{\sin A}{\cos A}\right)\left(1-\frac{\cos A}{\sin A}\right)+\frac{1}{\cos A}\cdot\frac{1}{\sin A}$$

$$=\frac{(\cos A-\sin A)(\sin A-\cos A)+1}{\cos A\sin A}$$

$$=\frac{2\sin A\cos A-\sin^2 A-\cos^2 A+1}{\cos A\sin A}$$

$$=\frac{2\sin A\cos A}{\cos A\sin A}=2.$$

或以 $\tan A=\frac{a}{b}$, $\cot A=\frac{b}{a}$, $\sec A=\frac{c}{b}$, $\csc A=\frac{c}{a}$ 代入原式之左邊,亦得

$$\left(1-\frac{a}{b}\right)\left(1-\frac{b}{a}\right)+\frac{c}{b}\cdot\frac{c}{a}=\frac{(b-a\ (a-b)+c^2}{ab}$$

$$=\frac{2ab-a^2-b^2+c^2}{ab}=\frac{2ab}{ab}=2.$$

例二　證恆等式

$$\sin x\tan^2 x+\csc x\sec^2 x=2\tan x\sec x+\csc x-\sin x.$$

解　左邊 $=\sin x\frac{\sin^2 x}{\cos^2 x}+\frac{1}{\sin x}\cdot\frac{1}{\cos^2 x}$

$$=\frac{\sin^4 x+1}{\sin x\cos^2 x};$$

$$右邊=\frac{2\sin x}{\cos x}\cdot\frac{1}{\cos x}+\frac{1}{\sin x}-\sin x$$

$$=\frac{2\sin^2 x+\cos^2 x-\sin^2 x\cos^2 x}{\sin x\cos^2 x}$$

$$=\frac{\sin^2 x+\cos^2 x+\sin^2 x(1-\cos^2 x)}{\sin x\cos^2 x}$$

$$=\frac{1+\sin^4 x}{\sin x\cos^2 x}.$$

故原式爲恆等式.

習 題 四

化簡下列各式:

1. $\dfrac{\sin A}{\csc A}+\dfrac{\cos A}{\sec A}$.

2. $\dfrac{\cos A}{\sin A}\cdot\dfrac{1}{\cot^2 A}$.

3. $\tan^2 x\csc^2 x-1$.

4. $\sec\alpha-\tan\alpha\sin\alpha$.

5. $\dfrac{\cos y}{1-\tan y}-\dfrac{\sin y}{\cot y-1}$.

6. $\cot\theta+\dfrac{\sin\theta}{1+\cos\theta}$.

7. $\dfrac{\sin^2 x}{1-\cos x}$.

8. $\dfrac{\cos^2 x}{1-\sin x}$.

9. $\dfrac{\cos\theta}{\sec\theta+\tan\theta}$.

10. $\dfrac{\tan A+\tan B}{\cot A+\cot B}$.

11. $\dfrac{\sin B}{1+\cos B}+\dfrac{1+\cos B}{\sin B}$.

12. $\sqrt{\dfrac{1-\sin A}{1+\sin A}}$.

13. $\sin^4 B+\cos^4 B+2\sin^2 B\cos^2 B$.

14. $\sin A(\sec A+\csc A)-\cos A(\sec A-\csc A)$.

15. $\cot B-\sec B\csc B(1-2\sin^2 B)$.

16. $(1+\sin A)(\sec A-\tan A)$.

17. $(\sin x+\cos x)^2+(\sin x-\cos x)^2$.

18. $2(\sin^6\theta+\cos^6\theta)-3(\sin^4\theta+\cos^4\theta)+1$.

19. $\dfrac{\cos A\cot A-\sin A\tan A}{\csc A-\sec A}$.

20. $\csc^4 x(1-\cos^4 x)-2\cot^2 x$.

21. $(\cos x\cos y+\sin x\sin y)^2+(\sin x\cos y-\cos x\sin y)^2$.

22. $(x\cos\alpha-y\sin\alpha)^2+(x\sin\alpha+y\cos\alpha)^2$.

23. $\dfrac{\sec^2 A\sin^2 A-\csc^2 A+\csc^2 A\cos^2 A}{\sec^2 A\sin^2 A-\csc^2 A\cos^2 A}$.

試證明下列恆等式:

24. $\sin^2 A\sec^2 A=\sec^2 A-1$.

25. $(\sin B+\cos B)^2=1+2\sin B\cos B$.

26. $\sin^4 x-\cos^4 x=\sin^2 x-\cos^2 x=1-2\cos^2 x=2\sin^2 x-1$.

27. $(\sin^2\theta-\cos^2\theta)^2=1-4\sin^2\theta\cos^2\theta$.

28. $\sin^3 x+\cos^3 x=(\sin x+\cos x)(1-\sin x\cos x)$

29. $\dfrac{\cot A\cos A}{\cot A+\cos A}=\dfrac{\cot A-\cos A}{\cot A\cos A}$.

30. $(\sin A+\cos A)(\tan A+\cot A)=\sec A+\csc A$.

31. $\dfrac{\sec\theta+\csc\theta}{\sec\theta-\csc\theta}=\dfrac{\tan\theta+1}{\tan\theta-1}=\dfrac{1+\cot\theta}{1-\cot\theta}.$

32. $\sec^4 A+\tan^4 A=1+2\sec^2 A\tan^2 A.$

33. $\tan\alpha+\tan\beta=\tan\alpha\tan\beta(\cot\alpha+\cot\beta).$

34. $(1+\sin x+\cos x)^2=2(1+\sin x)(1+\cos x).$

35. $\dfrac{\tan A+\sec A-1}{\tan A-\sec A+1}=\tan A+\sec A.$

36. $\cos^4 x-\sin^4 x=\cos^2 x(1-\tan x)(1+\tan x).$

37. $\cos^2 x+\sin^2 x\sin^2 y+\sin^2 x\cos^2 y=1.$

38. $(\cos\alpha\cos\beta+\sin\alpha\sin\beta\cos\gamma)^2+(\sin\alpha\cos\beta$

$-\cos\alpha\sin\beta\cos\gamma)^2=1-\sin^2\beta\sin^2\gamma.$

第 二 章

直角三角形之眞數解法

§8. 三角函數眞數表 30°, 45°, 60° 等各函數之計算,已如前述.至於他角之各函數,則算式頗煩;昔人爲便利起見,曾將 0° 至 90° 間各角之函數之值,列之爲表,是謂**三角眞數表** (table of natural trigonometrical functions). 表依其用途而精粗不一:有列各函數每 10′ 之值者,有列每 1′ 或每 10″ 或每 1″ 之值者.蓋氏對數表中,載正弦,餘弦,正切,餘切等每 10′ 之值,至小數第四位止,恰合日常計算之用.惟此表不載正割,餘割,須由餘弦,正弦之逆數計算之.

§9. 三角函數眞數表之用法

例一 求 tan 34°50′ 之值.

解 檢表*第 71 頁左端爲 34 之橫行,及上端爲 50′ 之直行,於其交叉處得 6959; 又左第一行中 34 稍上 30 之處,其右有 0.; 故知

---

*商務印書館出版蓋氏對數表

$$\tan 34°50' = 0.6959.$$

例二 求 $\cos 43°40'$ 之值.

解 自第70頁左第九行43處向左觀,又自下端40′處向上觀,於交叉處得7234;故

$$\cos 43°40' = 0.7234.$$

再觀此數之左端與上端,知此數又等於 $\sin 46°20'$.

例三 求 $\sin 18°32'$ 之值.

解 檢表得

$$\sin 18°30' = 0.3173,$$

$$\sin 18°40' = 0.3201.$$

可見角差10′,則正弦差0.0028,是爲表差(tabular difference),但角之微差與函數之微差殆成正比例*.今設角差2′而正弦差 x, 則由比例式

$$10' : 2' = 0.0028 : x,$$

得 x 爲0.00056,整之則爲0.0006,故

$$\sin 18°32' = 0.3173 + 0.0006 = 0.3179.$$

表差與正弦差亦可由表求之之法:檢與0.3173同橫行,且與 d 同直行之數,得28,此與表差相當;復檢 P.P. 小

* 角差與函數差本非正比例,然若角差甚微,則角差與函數差,爲計算之便利計,視爲成正比例亦無不可.蓋用精確方法計算,與用比例法計算,所差甚微,此卽所謂比例差之原理.

表中28之下第二列,得5.6,此與正弦差相當.其算式如下:

由 $P.P.$ 小表,

$$\begin{array}{r|l} \sin 18°30' = 0.3173 & \\ 2' \cdots\cdots 5 & 6 \\ \hline \therefore\ \sin 18°32' = 0.3179. & \end{array}$$

例四　求 $\cos 67°23'$ 之值.

解

$$\begin{array}{r|l} \cos 67°20' = 0.3854 & \\ 3' \cdots\cdots -8 & 1 \\ \hline \therefore\ \cos 67°23' = 0.3846. & \end{array}$$

角增則餘弦反減,故餘弦差爲負;餘切餘割亦然.帶秒之角須先化之爲分之小數,然後適用 $P.P.$ 小表.

例五　求 $\tan 63°16'30''$.

解　$63°16'30'' = 63°16.5'$,

$$\begin{array}{r|l} \tan 63°10' \quad = 1.977 & \\ 6' \cdots\cdots 8 & 4 \\ 0.5' \cdots\cdots & 7 \\ \hline \therefore\ \tan 63°16.5' = 1.986. & \end{array}$$

例六　有 $\sin x = 0.4572$, 求 x.

解　檢表知 $\sin x$ 之眞數在下二數之間:

$$\sin 27°10' = 0.4566,$$

$$\sin 27°20' = 0.4592.$$

應用比例法得比例式

$$\frac{x-27°10'}{27°20'-27°10'}=\frac{\sin x-\sin 27°10'}{\sin 27°20'-\sin 27°10'},$$

卽
$$\frac{x-27°10'}{10'}=\frac{0.0006}{0.0026},$$

$$\therefore\quad x=27°12.3'.$$

角差亦可由 *P.P.* 小表求之,算式如下:

$$\begin{array}{r|l}
\multicolumn{2}{l}{0.4572} \\
\multicolumn{2}{l}{0.4566 \quad =\sin 27°10'} \\
\hline
6 & \\
5 & 2 \cdots\cdots\cdots\cdots 2' \\
\hline
 & 8 \\
 & 78 \cdots\cdots\cdots 0.3' \\
\hline
 & 2 \quad \therefore\quad \overline{x=27°12.3'}.
\end{array}$$

小數尾 2 無影響於分位上,故略之.

例七 有 $\cot x=0.5455$, 求 x.

解

$$\begin{array}{r|l}
\multicolumn{2}{l}{0.5455} \\
\multicolumn{2}{l}{0.5430 \quad =\cot 61°30'} \\
\hline
25 & \\
22 & 2\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots -6' \\
\hline
2 & 8\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots -0.8'
\end{array}$$

$$\therefore\quad \overline{x=61°23.2'}=61°23'12''.$$

§10. 誤差之範圍 由四位之三角函數眞數表得來

之角,其秒數不足爲準,今就前節例六而論之.因製表時小數尾施行四捨五入之結果,故 $\sin 27°10'$ 之值不必適爲 0.4566, 實爲 0.45655 與 0.45665 間之某值. $\sin 27°20'$ 亦然,實爲 0.45915 與 0.45925 間之某值;故表差 $\sin 27°20' - \sin 27°10'$ 不必卽爲 0.0026, 但可作爲小於

$$0.45925 - 0.45655 = 0.00270,$$

而大於　$$0.45915 - 0.45665 = 0.00250.$$

又 $\sin x$ 之值只知其四位,本可代表 0.45715 與 0.45725 間之任一值;故 $\sin x - \sin 27°10'$ 大於

$$0.45715 - 0.45665 = 0.00050,$$

而小於　$$0.45725 - 0.45655 = 0.00070.$$

故　$$\frac{0.00070}{0.00250} > \frac{x - 27°10'}{10'} > \frac{0.00050}{0.00270},$$

卽　$$27°12.8' > x > 27°11.9'.$$

前例以 x 爲 $27°12.3'$, 然則 $0.5'$ 以內之出入,在所不免矣.

誤差亦非定值,乃隨表差而變,大抵表差愈大則誤差愈小;故檢角小於45°者,用餘弦莫如用正弦爲精確;蓋正弦之變化著,而餘弦之變化微也;反之,角大於45°者,以用餘弦爲精確.雖然,表差過大,則比例差之原理失其效用,而誤差亦不爲小;故檢小角用餘切莫如用正切,檢

90°附近之角用正切莫如用餘切.欲求更精確之數值,則非有較多位之眞數表不可.

習 題 五

求下列1—4題各函數之值:

1. $\sin 26^\circ$, $\cos 27^\circ 30'$, $\tan 25^\circ 40'$, $\cot 29^\circ 50'$.

2. $\cos 64^\circ$, $\sin 62^\circ 30'$, $\cot 64^\circ 20'$, $\tan 60^\circ 10'$.

3. $\sin 6^\circ 07'$, $\cos 63^\circ 37'$, $\tan 22^\circ 22'$, $\tan 27^\circ 00' 30''$.

4. $\sec 25^\circ 35'$, $\csc 25^\circ 28'$.

5. 求以下各式中 x 之值:

$\sin x = 0.4904$, $\cos x = 0.4904$, $\tan x = 1.894$, $\cot x = 1.894$,

$\sin x = 0.4267$, $\cos x = 0.4900$, $\tan x = 1.761$, $\cot x = 2.144$.

6. 若 $\sin x = 0.4250$, $\sin y = 0.9052$; 求證 $x + y = 90^\circ$.

7. 若 $\sin x = 0.4488$, $\sin y = 0.4743$; 求證 $x + y = 55^\circ$.

設三角形 ABC, C 爲直角, A, B, C 之對邊各爲 a, b, c; 試解下列各題:

8. 有 $A = 26^\circ 15'$, $c = 35.0$; 求 a, b, B.

9. 有 $A = 63^\circ 40' 30''$, $b = 363$; 求 a, c.

10. 有 $b = 4.63$, $c = 10.0$, 求 A.

11. 有 $a = 475.0$, $b = 237.5$; 求 A, B, c.

12. 有 $\tan x = 2.121$. 試由四位眞數表適用比例差之

原理求 x, 且推算答數之誤差範圍.

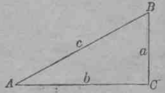
§11. 直角三角形之解法　直角三角形中 如已知其二邊或一邊一銳角, 則其餘邊與角可應用下列之關係求之:

I. $\frac{a}{c}=\sin A$,

II. $\frac{b}{c}=\cos A$,

III. $\frac{a}{b}=\tan A$,

IV. $A+B=90°$.



例一　直角三角形之一角為 $25°48'$, 斜邊為 235.0; 求餘邊與角.

解　如上圖, 令 $A=25°48'$, $c=235.0$.

(1) 求 a.　$a=c\sin A$,

由表得　$\sin A=0.4352$,

故　$a=235\times 0.4352=102.3$.

(2) 求 b.　$b=c\cos A=235\times 0.9003=211.6$.

(3) 求 B.　$B=90°-A=64°12'$.

(4) 校對.　欲考察答數有無錯誤, 須以未經用過之公式而校對之.本題已用I, II, IV三公式,茲以III式為校對

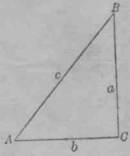
由表得 $\tan A = 0.4834,$

但 $\dfrac{a}{b} = \dfrac{102.3}{211.6} = 0.4835.$

末位之微差由於截去之小數尾,不足怪也.

解題時可依題意作一圖然後視察圖中邊角之關係,便可立成計算式如下例:

例二 $a = 449.3,\ b = 418.5$; 求 $A, B, c.$



解

(1) 求 A. 由圖 $\tan A = \dfrac{a}{b} = \dfrac{449.3}{418.5}$

$= 1.0736,$

$\therefore\ A = 47°02'.$

(2) 求 B. $B = 90° - A = 42°58'.$

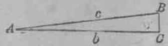
(3) 求 c. 由圖 $\cos A = \dfrac{b}{c},$

而 $\cos A = 0.6816,$

故 $c = \dfrac{b}{\cos A} = \dfrac{418.5}{0.6816} = 614.0.$

(4) 校對. $c \sin A = 614 \times 0.7318 = 449.3 = a.$

故此計算無誤. 用 $a^2 + b^2 = c^2$ 之關係,亦足校對,惟稍繁耳.



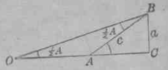
設已知 b 邊與 c 邊,而此二邊略相等;則 A 角與 B 角不能由

$$\cos A=\frac{b}{c}=\sin B$$

求之.何則,b 若略等於 c,則 A 甚小而 B 甚近於 $90°$;檢表知 $0°$ 附近之餘弦,與 $90°$ 附近之正弦,都無甚變化.故由上式不得精密之數値.此際以用下式爲便:

$$\tan\frac{A}{2}=\sqrt{\frac{c-b}{c+b}} \tag{5}$$

欲證此式,可如右圖,設 ABC 直角三角形,引長 CA 至 O,使 AO 等於 c,則 $\angle CAB=\angle AOB+\angle ABO$.



又因 $\triangle AOB$ 爲二等邊,故 $\angle AOB=\frac{A}{2}$,

$$\tan\frac{A}{2}=\frac{a}{c+b}=\frac{\sqrt{c^2-b^2}}{c+b}=\sqrt{\frac{c-b}{c+b}}.$$

例　$b=25.7$, $c=26.8$;求 A, B, a.

解　$c-b=1.1$, $c+b=52.5$.

$$\tan\frac{A}{2}=\sqrt{\frac{1.1}{52.5}}=\sqrt{0.020952}=0.1447,$$

$$\therefore\ \frac{A}{2}=8°14',\ A=16°28'.$$

$$B=90°-A=73°32'.$$

$$a=b\tan A=25.7\times 0.2956=7.6.$$

校對: $a^2=c^2-b^2=(c-b)(c+b)$,

$$a^2=(7.6)^2=57.76,$$

$$(c-b)(c+b)=1.1\times 52.5=57.75.$$

習 題 六

試解下列各直角三角形:

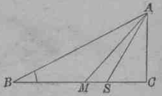
1. $a=10.00$, $A=25°$; 求 b, c.
2. $c=350$, $A=56°45'$; 求 B, a, b.
3. $c=45.7$, $B=44°50'$; 求 a, b.
4. $a=170$, $b=850$; 求 A, B, c.
5. $b=6.57$, $c=10.6$; 求 A, B, a.

以下四題求得答數後須校對之:

6. $b=253$, $A=36°30'$; 求 a, B, c.
7. $a=346$, $B=50°$; 求餘邊.
8. $b=13.5$, $B=28°40'$; 求 a, c, A.
9. $a=0.81$, $b=2.54$; 求 c, A, B.
10. 有二等邊三角形底邊368,頂角52°,試求其高.
11. 有圓內接正五邊形;若圓之半徑爲10,求五邊形之周圍及面積.
12. 直角三角形之面積等於$\frac{1}{2}bc\sin A$或$\frac{1}{2}ac\sin B$,

試證之.

13. 有直角三角形 ABC 如圖, $AB=338$, $\angle B=40°$; 問中線 AM, $\angle A$ 之等分線 AS, 及兩線間之角 MAS, 各宜如何求之?



14. 有細長直角三角形, $b=4.75$, $c=5.25$, 求 A, B, a.

15. $a=9.6$, $c=10.4$, 試求餘邊與角,並校對之.

16. 由 § 11 第四圖,證 $\tan\frac{A}{2}=\frac{c-b}{a}$.

17. 試更證 $\sin\frac{A}{2}=\sqrt{\frac{c-b}{2c}}$, $\cos\frac{A}{2}=\sqrt{\frac{c+b}{2c}}$.

18. 有斜角三角形 ABC, $AB=120$, $BC=150$, $B=67°30'$; 試解此三角形.

[自 A 點或 C 點向對邊作垂線,分原三角形爲兩直角三角形.]

19. 有斜角三角形,一邊爲 57.3, 傍於此邊之角爲 $85°45'$ 及 $75°30'$; 試解之.

第　三　章

對　數

§12. 定義　若 $a^x=M$, 則 x 稱曰以 a 爲底(base)之 M 之對數(logarithm,)記以

$$x=\log_a M.$$

M 特名曰眞數.

例如　　$10^2=100$,　故　$2=\log_{10}100$,

$2^4=16$,　故　$4=\log_2 16$,

$9^{-\frac{3}{2}}=\frac{1}{27}$,　故　$-\frac{3}{2}=\log_9\left(\frac{1}{27}\right)$,

$a^0=1$,　故　$0=\log_a 1$.

§13. 基本公式

命　　$$M=a^x,\quad N=a^y,$$

則　　$$MN=a^x\times a^y=a^{x+y},$$

$$\frac{M}{N}=\frac{a^x}{a^y}=a^{x-y},$$

$$M^n=(a^x)^n=a^{nx}.$$

故
$$\left.\begin{aligned}\log_a(MN)&=x+y=\log_a M+\log_a N,\\ \log_a\left(\frac{M}{N}\right)&=x-y=\log_a M-\log_a N,\\ \log_a(M^n)&=nx=n\log_a M.\end{aligned}\right\}\qquad(6)$$

第一式表積之對數為其因數之對數之和,第二式表分數之對數為分子之對數減分母之對數.第三式表乘方之對數為其數之對數乘指數.

例
$$\log_a(2\times3\times7)=\log_a(2\times3)+\log_a7$$
$$=\log_a2+\log_a3+\log_a7.$$
$$\log_a\frac{29}{7}=\log_a29-\log_a7.$$
$$\log_a3^5=5\log_a3.$$
$$\log_a\sqrt[3]{17}=\log_a(17)^{\frac{1}{3}}=\frac{1}{3}\log_a17.$$

§14　常用對數　實用上之對數,以10為底,稱曰常用對數(common logarithm);底恆略而不書.由定義知數之對數不能盡為整數,譬如

$$10^3<3154<10^4,$$

則　$3<\log 3154<4,\quad \therefore\ \log 3154=3+$小數.

同理　$10^{-2}<0.05<10^{-1},$

則　$-2<\log 0.05<-1,\quad \therefore\ \log 0.05=-2+$小數.

蓋以10為底之對數除10之整數方者外,皆由整數部與小數部相合而成;前者稱曰對數之首數(characteristic),

後者稱曰對數之尾數(mantissa);首數有正有負,然爲便利起見,尾數常使爲正;故若已知

$$0.05=10^{-1.30103},$$

則其對數不寫作 $\log 0.05=-1.30103$,

而寫作 $\qquad\qquad =-2+0.69897$,

且又略爲 $\qquad\qquad =\bar{2}.69897$.

§15. 首數之推算 由前節知數在10以上而小於100者,其首數爲1;數在100以上而小於1000者,其首數爲2等.總之,凡數其個位之前有幾位,則其首數爲幾.如

$$\log 314,\ \log 87.26,\ \log 2.7,\ \log 3500$$

之首數各爲 $\quad 2,\qquad 1,\qquad 0,\qquad 3.$

又知數在1與0.1間者,其首數爲 -1;數在0.1與0.01間者,其首數爲 -2 等;故凡小數自個位之0起共有幾個0,則其首數爲負幾.如

$$\log 0.4,\ \log 0.374,\ \log 0.00039,\ \log 0.03$$

之首數各爲 $\quad -1,\qquad -1,\qquad -4,\qquad -2.$

§16. 尾數之法則 設已知

$$\log 1.41=0.14922,$$

則有 $\log 14100=\log(1.41\times 10^4)\ =0.14922+4=4.14922,$

$$\log 0.0141=\log(1.41\times 10^{-2})=0.14922-2=\bar{2}.14922.$$

是故二數只異其小數點之位置者,其尾數必同.

習 題 七

1. 有 $5^3=125$, $5^2=25$, $5^1=5$, 試書出以 5 爲底之 125, 25, 5, $\frac{1}{5}$, $\frac{1}{25}$, $\frac{1}{125}$ 諸對數.

2. $\log_4 2=0.5$, $\log_3 81=4$, $\log_{10} 3.1623=0.5$, $\log_b a=c$ 等, 試以指數式表之.

3. 求 $\log_3 27$, $\log_{10} 10000$, $\log_a a$, $\log_3\frac{1}{27}$, $\log_a a^{\frac{3}{2}}$.

4. 試以 $\log 2$, $\log 3$, $\log 5$ 表下列各數:

$$\log 15,\ \log\frac{10}{3},\ \log\frac{5}{6},\ \log 100,\ \log\sqrt{\frac{15}{2}},\ \log\frac{\sqrt{6}\sqrt[3]{15}}{\sqrt[5]{60}}$$

5. 已知 $\log_{10}2=0.30103$, $\log_{10}3=0.47712$, $\log_{10}5=0.69897$, 求 $\log_{10}4$, $\log_{10}0.3$, $\log_{10}0.75$, $\log_{10}\sqrt[3]{5}$, $\log_{10}\sqrt{\frac{1280}{729}}$.

6. 在常用對數中, 567, 56.7, 5670, 5.67, 0.000567, 0.567 之首數各爲何?

7. 已知 $\log 635=2.80277$, 求 6.35, 63500, 0.635, 0.0000335 之對數.

8. 某三數之對數爲 3.6533, 1.6533, 0.6533, 問各數之整數部各有幾位?

9. 已知 $\log 57$ 之尾數爲 75587, 問何數之對數爲

1.75587, 2.75587, 0.75587, $\overline{1}.75587$?

10. 已知 $\log 673$ 之尾數爲 82802, 求 673, 673^2, $\sqrt{673}$, $\sqrt[3]{673}$ 之對數.

11. 已知 $\log 3=0.47712$, 問 3^{25}, 3^{100}, 30^{15}, 27^5, 各爲幾位之數?

12. 已知 $\log 3=0.47712$, $\log 7=0.84510$, 求 21, $\frac{3}{7}$, $\sqrt[3]{\frac{7}{9}}$, $\sqrt{0.3\times 49}$ 之對數.

§17. 常用對數表 對數除少數特例外,皆爲不盡數,故不得不截去其尾之一部,以求實用;通常之計算,取尾數之初五位,大抵足用;依數之次第,列之爲表是謂**五位對數表** 其首數不載於表,須照§18之法推算之.

例一 求 $\log 224.5$.

解 由葢氏對數表第5頁左第一行224處向右看,又由上端5處向下看得行列相交處之數 5122 卽尾數也由§18知首數爲2, 故得

$$\log 224.5=2.35122.$$

例二 有 $\log x=\overline{3}.15351$, 求 x.

解 檢表第3頁與尾數15351相當之眞數爲1424; 又因首數爲 -3, 故此數自個位起當有三個0,卽

$$x=0.001424.$$

例三　求 $\log 1912.6$.

解　由表得　$\log 1912 = 3.28149$

$\log 1913 = 3.28171$

$\quad 1 \qquad 22$

應用比例差之原理,知眞數差 1 與尾數差 22 之比,等於眞數差 0.6 與尾數差 13 之比. 故

$$\log 1912.6 = 3.28149 + 0.00013 = 3.28162.$$

算式如下:

$$\log 1912 \quad = 3.28149$$

由 P.P. 小表,　$.6 \cdots\cdots 13 \mid 2$

$$\therefore \quad \log 1912.6 = 3.28162.$$

例四　有 $\log x = 1.80395$, 求 x.

解　1.80395

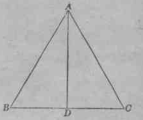
$1.80393 = \log 63.67$

$2 \cdots\cdots\cdots$

$$\therefore \quad x = 63.673.$$

例五　正三角形之一邊爲 37.56 尺,問其面積幾何?

解　令面積爲 S 平方尺. 則



$$S = \frac{1}{2} AD \cdot BC$$

$$= \frac{1}{2} \sqrt{AB^2 - BD^2} \cdot BC$$

$$= \frac{1}{2} \sqrt{BC^2 - \frac{BC^2}{4}} \cdot BC$$

$$=\frac{1}{4}\sqrt{3BC^2}\cdot BC$$

$$=\frac{\sqrt{3}}{4}BC^2$$

$$=\frac{\sqrt{3}}{4}\times(37.56)^2.$$

$$\log S=\frac{1}{2}\log 3+2\log 37.56-\log 4.$$

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2}\log 3 &= \frac{1}{2}\times 0.47712=0.23856\\
2\log 37.56 &= 2\times 1.57473=3.14946\\
-\log 4 &= -\quad 0.60206=\bar{1}.39794\\
\log S &\quad\quad =2.78596\\
\log 610.8 &= 2.78590\\
&\quad 9\cdots\cdots 6\\
\therefore\quad S &= 610.89.
\end{aligned}$$

$-\log 4$之尾數,亦變爲正,以便相加;下仿此.

例六 求 $\dfrac{(6.45)^3\times\sqrt[3]{-0.34}}{(9.37)^2\times\sqrt[4]{8.93}}$ 之値.

解 -0.34爲負數,本無對數,然符號無妨後算.

因 $$\frac{(6.45)^3\times\sqrt[3]{-0.34}}{(9.37)^2\times\sqrt[4]{8.93}}=-\frac{(6.45)^3\times\sqrt[3]{0.34}}{(9.37)^2\times\sqrt[4]{8.93}}.$$

故先求 $\dfrac{(6.45)^3\times\sqrt[3]{0.34}}{(9.37)^2\times\sqrt[4]{8.93}}$ 之値如下:

$$
\begin{aligned}
3\times\log 6.45 &= 3\times 0.80956 = 3\times 0.80956 &&= 2.42868\\
\frac{1}{3}\times\log 0.34 &= \frac{1}{3}\times\bar{1}.53148 = \frac{1}{3}(-3+2.53148) &&= \bar{1}.84383\\
-2\times\log 9.37 &= -2\times 0.97174 = -2(1-0.02826) &&= \bar{2}.05652\\
-\frac{1}{4}\times\log 8.93 &= -\frac{1}{4}\times 0.95085 = -\frac{1}{4}(4-3.04915) &&= \bar{1}.76229\\
\hline
&& \log 1.234 &= 0.09132
\end{aligned}
$$

1.238

故所求原式之值爲 -1.234.

§18 對數率

命 $\log_b N = x$, 則 $N = b^x$;

由(6)之第三式,

$$\log_a N = \log_a(b^x) = x\log_a b,$$

$$\therefore\quad \log_b N = x = \frac{\log_a N}{\log_a b}. \tag{7}$$

更命 $\mu = \dfrac{1}{\log_a b}$, 則 $\log_b N = \mu\log_a N$.

μ 名曰底 a 對於底 b 之對數率 (modulus). 如已知某底某數之對數欲求他底同數之對數祇須以對數率乘之.

§19 自然對數 凡正數除 1 以外,在理皆可用爲底;然欲易底只須乘以對數率,故底無須多設;常見之底有二種,一屬於常用對數,以 10 爲底,實際上之計算用之;一屬於自然對數 (natural logarithm), 以 e 爲底,理論上之研究用之. e 之值爲

$$e=1+1+\frac{1}{\lfloor\!\underline{2}}+\frac{1}{\lfloor\!\underline{3}}+\frac{1}{\lfloor\!\underline{4}}+\frac{1}{\lfloor\!\underline{5}}+\cdots\cdots=2.71828^{*}\cdots\cdots.$$

已知常用對數,欲求自然對數,可以下記之對數率 μ 乘之.

$$\mu_e=\frac{1}{\log_{10}e}=\frac{1}{0.43429}=2.30259\cdots\cdots.$$

習 題 八

1. 求 6315, 0.0655 之對數.
2. 求 $\log 55555$, $\log 3550.2$.
3. log63.275=x
   $\log x=63.275$, $\log y=1.81864$; 求 x y.
4. $N=\sqrt[6]{64550}$, 求 $\log N$ 及 N.
5. 求 $(6.3096)^5$.
6. 求 66.027×0.65034, $6301\div6.454$.
7. 求 $\sin 40°$, $\cos 48°30'$, $\cot 8°50'$ 之對數.

   [先求其真數,後再求其對數]
8. 2^{36} 爲幾位之數?其首三位之數字爲何?
9. 計算 $\dfrac{\sqrt[3]{(27.3)^2\times(-23.7)}}{\sqrt{(28.82)^3\times16.5}}$ 之值.
10. 設 a, b, c 爲三角形之三邊 s 爲三邊和之半,則

* 當 n 爲正整數時,$\lfloor\!\underline{n}$ 名曰 n 之階乘積,意卽爲 $n(n-1)(n-2)\cdots\cdots3\cdot2\cdot1$ 也.例如 $\lfloor\!\underline{4}=4\cdot3\cdot2\cdot1=24$. $\lfloor\!\underline{n}$ 亦可作 $n!$

三角形之面積公式爲 $A=\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$. 今若

$$a=617.3^4,\ b=345.65,\ c=467.75,\ 求\ A.$$

11. 有 $2^x=3.573$, 求 x.

12. 有 $(3.1416)^x=9.8697$, 求 x

13. 解方程式 $3^{2x}-12\times 3^x+11=0$.

14. 解方程式 $e^{\frac{x}{3}}+e^{-\frac{x}{3}}=4$, 其 $e=2.7183$.

15. 證 $\log_b a=\dfrac{1}{\log_a b}$; 若 $\log_{10}2=0.30103$, 求 $\log_2 10$.

16. 求 $\log_e 100$, $\log_e 1000$, $\log_e 0.01$, $\log_e 2$.

17. 已知 $\log_{10}3$, 求 $\log_9 10$, $\log_{27}1000$.

18. 底 2 之對數如何可變爲底 8 之對數?底 9 之對數如何可變爲底 3 之對數?

19. 證 $\log_b a\cdot\log_c b\cdot\log_a c=1$.

§20. 三角函數對數表 此表載三角各函數之對數.其組織略同於眞數表,惟因三角函數之值多小於 1,故其對數之首數負號爲多,通常以10加之,使成正號,是謂表對數 (tabular logarithm), 記號用 $L\sin A$, $L\cos A$ 等.卽

$$L\sin A=\log\sin A+10.$$

例一 求 $L\sin 15°24'36''$

解 檢表59頁 $L\sin$ 行,得

$$
\begin{array}{lrl|l}
 & L\sin 15^\circ 24' & =9.42416 & \\
\text{由 } P.P.\text{ 小表} & 30'' & 22 & 5 \\
 & 6'' & 4 & 5 \\
\hline
\end{array}
$$

$$\therefore\quad L\sin 15^\circ 24' 36'' = 9.42443.$$

例二　求 $\log\cot 75^\circ 51' 15''$.

解

$$
\begin{array}{rr|l}
\log\cot 75^\circ 51' & =9.40159 & -10 \\
10'' & -8 & 8 \\
5'' & -4 & 4 \\
\hline
\end{array}
$$

$$\therefore\quad \log\cot 75^\circ 51' 15'' = 9.40146-10.$$

例三　有 $\log\tan x = 0.08685$, 求 x.

解

$$
\begin{array}{ll}
10.08685 = & L\tan x \\
10.08673 = & L\tan 50^\circ 41'
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{r|l}
12 & \\
8 & 7 \\
\hline
3 & 3
\end{array}
\qquad\qquad
\begin{array}{r}
20'' \\
8'' \\
\hline
\end{array}
$$

$$\therefore\quad x = 50^\circ 41' 28''.$$

§21　ST.表　角 x 甚小,則 $\log\sin x$ $\log\tan x$ $\log\cot x$ 之變化甚驟,而比例差之原理不適於用; x 近於 90°, 則 $\log\cos x$, $\log\cot x$, $\log\tan x$ 亦然;後者與前者有餘角關係. 故今只論前者.

角若在 °以下,則若以秒數表角,由對數表知

$$\frac{\sin\alpha}{\alpha},\qquad \frac{\tan\alpha}{\alpha}$$

兩比之對數略成定數.茲命其值爲S與T,則

$$\log\frac{\sin\alpha}{\alpha}=S,\ \log\frac{\tan\alpha}{\alpha}=T,$$

即

$$\left.\begin{aligned}\log\sin\alpha&=\log\alpha+S,\\ \log\tan\alpha&=\log\alpha+T.\end{aligned}\right\}\qquad(8)$$

列記各小角之S與T之值者,曰$S.T.$表.

例一　求 $\log\sin 0°56'26''$.

解　$0°56'26''=3386''$,　$\therefore\ \alpha=3386.$

$$\log\alpha=3.52969$$

由表7頁下層　$S=4.68556-10$

$$\therefore\ \log\sin 0°56'26''=8.21525-10.$$

S本爲負數,表中加之以10,用時須減去之,T亦然.

求 $\log\cos 89°03'34''$ 之法同上蓋因

$$\cos 89°03'34''=\sin 0°56'26''.$$

例二　有 $\log\tan x=8.31413-10$, 求 x.

解　檢表25頁,知x略等於$1°11'$;於是由9頁求T.

$$\log\tan\alpha''=8.31413-10$$

$$T=4.68564-10$$

$$\log\alpha=3.62849\qquad\therefore\ \alpha=4251.$$

$$\therefore \quad x = a'' = 4251'' = 1^\circ 10' 51''.$$

又因 $\log\tan(90^\circ - x) = \log\cot x = -\log\tan x$,

故由 $\log(90^\circ - x)$ 或 $\log\cot x$ 求小角 x 之法同此.

習 題 九

1. 求 $L\sin 13^\circ 24'$, $L\cos 25^\circ 12'$, $L\tan 10^\circ 02'$, $L\cot 17^\circ$.

2. 求 $\log\sin 72^\circ 11'$, $\log\tan 46^\circ 17'$, $\log\cot 65^\circ 13'$, $\log\cos 67^\circ 59'$.

3. 求 $L\tan 36^\circ 30' 15''$, $L\sin 70^\circ 15' 40''$, $L\cos 16^\circ 26' 45''$, $L\cot 9^\circ 27' 42''$.

4. $L\sin x = 9.77980$, $L\tan x = 10.40017$, $L\cos x = 9.79558$; 求 x.

5. $\log\sin x = 9.97296 - 10$, $\log\cos x = 9.89609 - 10$, $\log\tan x = 0.16999$; 求 x.

6. $\log\sin x = \log 2 + \log\sin 32^\circ 10' 15'' + \log\cos 32^\circ 10' 15''$, 求 x.

7. $(\sin x)^{\frac{2}{3}} = 0.253$, 求 x.

8. 由 $\log\sin 1^\circ 20' 02''$, $\log\tan 0^\circ 45' 45''$, $\log\cot 1^\circ 0' 29''$, $\log\cos 88^\circ 54' 36''$

9. 由 $S.T.$ 表求 $\log\tan 88°05'20''$, $\log\cot 89°16'50''$；再用三角對數表以校對之.

10. $\log\sin x = 8.22925-10$, $\log\tan y = 8.43340-10$, 求 x 與 y.

第四章

直角三角形之對數解法

§22. 直角三角形之對數解法 用三角函數眞數表以解直角三角形之法,已如前述,此章更示應用對數表之解法,以見此法之捷.

例一 有 $a=316.5$, $c=521.2$, 求 A, B, b.

解 (a) 求 A, B.

$$\sin A=\frac{a}{c}.$$

$$\log\sin A=\log a-\log c.$$

$$\log a=2.50037$$

$$-\log c=7.28300-10$$

$$\log\sin A=9.78337-10$$

$$A=37°23.5'.$$

$$B=52°36.5'.$$

(b) 求 b.

$$\cos A=\frac{b}{c}.$$

$$\log b=\log c+\log\cos A.$$

$$\log c=2.71700$$

$$\log\cos A=9.90009-10$$

$$\log b=2.61709$$

$$b=414.1.$$

(c) 校對. $a^2=c^2-b^2=(c+b)(c-b).$

$$2\log a=\log(c+b)+\log(c-b).$$

$$c+b=935.3, \qquad c-b=107.1.$$

$$\begin{array}{rr} \log a = 2.50037 & \log(c+b) = 2.97095 \\ 2 & \log(c-b) = 2.02979 \\ \hline 5.00074 & 5.00074 \end{array}$$

可見所得 b 之值無差,而 A 則不必校對,亦自無差,蓋 b 從 A 得來也.

例二　有 $b=25.01$, $B=65°10'$, 求 a, c.

解　(a) 求 a.

$$\tan B=\frac{b}{a}.$$

$$\log a=\log b+\log\cot B.$$

$$\begin{array}{r} \log b = 1.39811 \\ \log\cot B = 9.66537-10 \\ \hline \log a = 1.06348 \end{array}$$

$$a=11.574.$$

(b) 求 c.

$$\sin B=\frac{b}{c}.$$

$$\log c=\log b-\log\sin B.$$

$$\begin{array}{r} \log b = 1.39811 \\ -\log\sin B = 0.04214 \\ \hline \log c = 1.44025 \end{array}$$

$$c=27.56.$$

(c) 校對.

$$c+b=52.568, \qquad c-b=2.548.$$

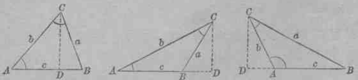
$$\begin{array}{rr} \log a = 1.06348 & \log(c+b) = 1.72072 \\ 2 & \log(c-b) = 0.40620 \\ \hline 2.12696 & 2.12692 \end{array}$$

末位不能常同,前已言之矣.

§23. 斜角三角形之直角解法　斜角三角形,分解

之則成兩直角三角形,故可應用直角三角形之解法而解之,茲分為四種:

I. 已知一邊與兩鄰角,為 b, C, A.



由 C(或 A) 向對邊或其延長線引垂線 CD.

解 ACD 直角三角形,可得 CD, AD, $\angle ACD$.

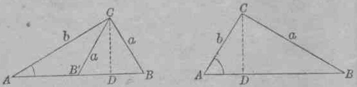
由 $\angle C$ 與 $\angle ACD$ 可得 $\angle BCD$.

然則 CBD 直角三角形中,有 CD 與 $\angle BCD$ 已知,故可以解,於是得 BC, DB 及 $\angle CBD$.

AD, DB 相加得 AB,

校對. 復由 A 向對邊作垂線解此三角形,而比較之.

II. 已知二邊及一對角,如 a, b, A



若 $a<b$, 可得兩三角形如左圖;如 $a \geqslant b$, 只得一三角形如右圖.

直角三角形 ACD 中有 b, A 已知,故可求得 CD, AD 及 $\angle ACD$.

於是直角三角形 BCD 中有 a, CD 已知,故解之得 DB 及 $\angle BCD$.

又得　　$c=AD+DB$, $C=\angle ACD+\angle DCB$,

$$B=180^\circ-(A+C).$$

若有第二答數如左圖,則又有

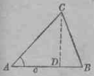
$$AB'=c'=AD-BD,\ \angle ACB'=C'=\angle ACD-\angle BCD,$$

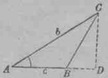
$$\angle AB'C=B'=180^\circ-(A+C').$$

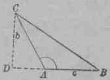
校對可用　　$c=b\cos A+a\cos B$,

蓋因 $b\cos A=AD$, $a\cos B=DB$ 故也.

III.　已知二邊及夾角,如 b, c, A.







由 C(或 B) 向對邊作垂線.

解直角三角形 ACD, 得 CD 與 AD.

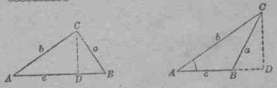
再求 DB.

解直角三角形 CBD, 得 a 及 $\angle CBD$

然則 $\angle ACB=180°-A-\angle CBD.$

校對. 由 B 向對邊作垂線,再解此三角形.

IV. 已知三邊 $a, b, c.$



命 $AD=m,\ DB=n,$

則 $CD^2=b^2-m^2=a^2-n^2,$

$$b^2-a^2=m^2-n^2=(m+n)(m-n). \tag{A}$$

如左圖, $m+n=c,$ 如右圖, $m-n=c,$

由 (A), $m-n=\dfrac{b^2-a^2}{c};$ $m+n=\dfrac{b^2-a^2}{c}.$

解之得 m 與 n, 於是直角三角形 ACD, CBD 均有兩邊已知,故可以解.

自他頂點作垂線再解此三角形,以校對之.

習題十

應用對數表試解下列1至5各直角三角形:

1. $a=168.92,\quad c=289.64.$
2. $a=43.148,\ b=84.107.$

3. $a=547.5,\ A=32°15'24''$.

4. $c=672.34,\ A=35°16'25''$.

5. 用公式(5)解 $c=34.57,\ b=34.04$ 之直角三角形.

解 6 至 11 各斜角三角形:

6. $a=342.56,\ b=125.72,\ C=37°42'24''$.

7. $b=134.5,\ c=235.2,\ A=127°36.3'$.

8. $C=127°36.5',\ A=28°31.3',\ b=312.9$.

9. $a=630.50,\ b=527.39,\ A=65°37'12''$.

10. $a=4,\ b=5,\ c=6$.

11. $A=50°,\ B=60°,\ C=70°$, 求 a, b, c 之比.

12. 四邊形 $ABCD$ 中已知 $AB=673,\ BC=589, CD=223$, $\angle ABC=105°06',\ \angle BCD=127°38'$; 求 AD.

13. 有二等邊三角形,底邊 12, 頂角 48°, 試求其高.

14. 圓內有弦,長 20 公尺,所對圓心角 42°10′, 求半徑.

15. 有二直線成 50°21′24″ 之角,又有半徑 2380 公尺之圓,與之各相切.若圓在(a)銳角內;(b)在鈍角內;試求二直線之交點至切點之距離.

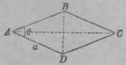
16. 正三角形之內切圓之半徑爲 r, 求外接圓之半徑.

17. 圓內有弦,其所對之圓心角爲 80°24′,若弦長減

半,問圓心角爲何?

18. 正八邊形之一邊爲 7, 求面積.

19. 設菱形之一角爲 θ, 一邊爲 a; 試證其兩對角線爲



$$2a\cos\frac{\theta}{2} \quad 2a\sin\frac{\theta}{2}.$$

若 $\theta=38^\circ$, $a=15$, 試求兩對角線之長.

20. 有圓半徑爲 r, 試證圓內接正 n 邊形之周圍及面積各爲

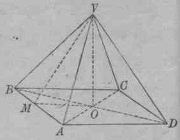
$$2nr\sin\frac{180^\circ}{n}, \quad nr^2\sin\frac{180^\circ}{n}\cos\frac{180^\circ}{n}.$$

21. 若圓之半徑爲 r, 證圓外切正 n 邊形之一邊爲

$$2r\tan\frac{180^\circ}{n}.$$

22. 有長方體長爲 8, 闊爲 10, 高爲 15; 問自一隅至對隅之對角線,與此隅之長、闊、高所成之角各如何?

23. 有正四角錐, 底邊 $AB=2a$, 斜面與底面間之角 $VMO=\theta$; 試證



高 $h=VO=a\tan\theta$,

斜高 $s=VM=a\sec\theta$,

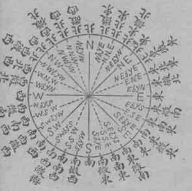
斜邊 $e=VA=a\sec VAM=\sqrt{a^2+VM^2}$,

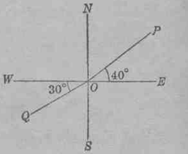
斜邊與底面間之角 VAO 之正弦爲 $\frac{h}{e}$,

斜邊與底邊間之角 VAM 之正切爲 $\frac{s}{a}$.

24.　有正六角錐,高 a, 底邊 $2a$, 求斜邊與底邊所夾之角,斜邊與底面所夾之角,斜面與底面所夾之角.

§24.　測量上之用語　航海用之羅盤針有三十二方位,其名稱如下左圖.

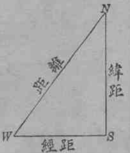




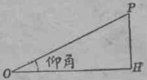
設 OP 視線偏北而與東方 OE 成 40° 之角, 則 P 之方向可以**東 40° 北**表之. 又設 ON 指北方, 則 P 之方向又可以**北 50° 東**表之. 同理 Q 之方向可以**西 30° 南**, 或**南 60° 西**表之.

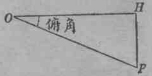
設 N, W 爲平地上之二點, 則 WN 表二點間之距離;自

W 向東西作直線,自 N 向南北作直線,相交於 S;則 WS 名曰二點間之經距 (departure), NS 名曰二點間之緯距 (latitude).



設 P 為所欲測之點, O 為觀測者之所在.由 P 作直立線 PH,又由 O 作水平線與之相交於 H.若 P 在 H 上,則 $\angle HOP$ 稱曰 P 之**仰角** (angle of elevation),亦曰**高度** (altitude);若 P 在 H 下,則 $\angle HOP$ 稱曰 P 之**俯角** (angle of depression).





習題十一

下列各題,如答數未載在後,須自行校對之:

1. 有無線電柱;離柱基185尺處測之,得仰角52°,問電柱之高?

2. 某人在直線路上,遠望一寺,與路成50°之角;沿

路前行1里,至一橫路,此路通於寺,且與前路成90°之角;問自路交叉處到寺尚有幾里?

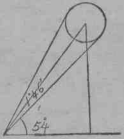
3. 有山高4820公尺,人在2332公尺之高地望之,得仰角29°15′;求此地與山頂之空中距離.

4. 大樹因風吹折一段,仍連於樹幹,與地面成35°之角;末端抵地,離樹基165尺;問樹幹尚留幾尺;未折之前樹高幾尺?

5. 屋頂立25尺之竿在平地上某處測之,得竿之上端仰角57°,下端仰角53°,求屋之高.

6. 在塔頂測平地上某處之俯角得47°13′,若於塔之中央測之,問俯角為何?

7. 有圓形氣球,兩端之視線含1°46′之角,其中心之高度為54°;若球半徑為10公尺,問球心離地若干公尺?



8 某人在塔之北方測塔頂,得仰角40°12′;向東行220公尺,見塔在西南方,再測其仰角,得25°36′;求塔高.

9. 太陽之高度自59°移至42°之間,旗竿之影增長85尺;求旗竿之高.

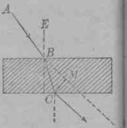
10. 乙地在甲地之東北 25 公里.今自甲地向北 23° 東新開一路,其長 10 公里;問從此向何方再開幾公里可達乙地?

11. 有 A, B 二地,人跡皆不能到,今欲測其距離,而於 AB 線上之 C 點立垂線 $CD=500$ 尺,自 D 測 $\angle CDA$ 爲 $75°35'$,測 $\angle CDB$ 爲 $34°46'$;若 (a) C 在 A, B 之間;(b) B 在 A, C 之間;試各求 A, B 之距離.

12. 鐘擺之最左位置與最右位置相距 5.73 寸,如擺長 39.1 寸,問擺過之角爲若干度?

13. 平面之上置木塊,將平面漸次傾斜,至於 $29°37'$,而木塊滑下;求摩擦係數.

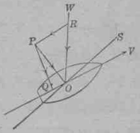
[摩擦係數等於傾斜角之正切.]



14. 有玻璃厚 0.215 寸;光線 AB 以 $55°47'$ 之投射角射入玻璃後,屈折而向 BC. 假如光自空氣入玻璃之屈折率爲 $\frac{3}{2}$, 求光線之變位 CM.

[屈折率爲投射角之正弦與屈折角之正弦之比.]

15. 有帆船對風成 60° 之角,帆面與船之進向成 15° 之角,問風力之何部分得以利用?



[命 WO 為風向, OV 為船之進向, OS 為帆面, RO 為風力單位,分解之為 $RP \parallel OS$ 及 $PO \perp OS$, 則 RP 無影響於帆,可以不計;更將 PO 分解為 $PQ \perp OV$ 及 $QO \parallel OV$, 然則 PQ 無影響於船之前進;故所得利用之風力僅有 QO 部分.]

16. 有船向西微南開駛,如駛過之經距為 315 公里,求其實際駛過之路.

17. 一船自北緯 47°30′ 向北西微北駛進 685 海里,問船在何緯度?其緯距若干?

18. 甲港在乙港北 19 海里;一船自乙港向東駛,其速度每時 9 海里;一船自甲港同時出發,歷五時兩船相遇;問甲港之船以何速度向何方前進?

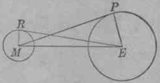
19. 有渡船在靜水之速度每時 12 里,今欲橫渡闊 21 里之河,其水流之速度每時 10 里;問至少須費幾時?

20. 有人在船中,觀北西微西突起砲火, 5 秒之後,並聞砲聲;此船向北東微北前進,其後又見該處砲火,過 10 秒乃聞其聲.問船駛過之距離,及第二次所見砲火之方向.

[假定音波速度每秒333公尺.]

21. 一船向北駛,見正西有二燈塔在一直線;二時之後,則見燈塔一在南微西,一在南西微西;若已知兩燈塔相距16公里,問船之速度?

22. 如圖圓E爲地球,圓M爲月,自M向圓E作切線MP,則$\angle PME$稱曰月之赤道地平視差(equatorial horizontal parallax);其値爲$57'02''$. EP爲地球之平均半徑,其値爲6368公里,求月與地球之距離.



[用$S.T.$表.]

23. 上圖之$\angle REM$名曰月之角半徑,(angular semi-diameter),其値爲$15'34''$;試用上題結果推算月之半徑RM.

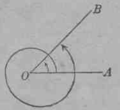
24. 太陽之赤道地平視差爲$8.8''$,求太陽與地球之距離;若太陽之角半徑爲$16'02''$,求太陽之直徑.

25. 自地球上觀之,則金星與太陽之最大距離角爲$47°30'$;今設金星之軌道爲圓形,試從上題之地球太陽距離,推算金星與太陽之距離.

第五章

任意角及其計算法

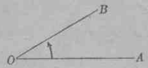
§25. **角之廣義** 初等幾何學以二半射線相交，其中所夾部分之大小，定角之大小，故角無能踰於四直角者．在三角學則不然，視角爲一動直線在一平面上繞定點之周圍旋轉而成；動線之最初位置曰始線(initial line)，其最終位置曰終線(terminal line)．自始線至終線間動線所轉過之量名曰角．故角之大小毫無際限，隨其旋轉量之多少而定．如鐘之分針然，自某時經15分，則曰轉過一直角；經 30 分，則曰轉過二直角；歷一週而復歸於原處，則曰轉過四直角；歷二週，三週，則曰轉過八直角，十二直角等．

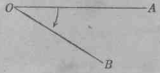


然則角不能僅以二邊之位置定之；蓋邊雖同，其角不必同也．如右圖之$\angle AOB$，可視爲$45°$，若其旋轉之狀如小矢；亦可視爲$405°$，若其旋轉之

狀如大矢;又可視爲 45° 加 360° 之若干倍,如 OB 歷若干週後始止於最終之位置.

角依動線旋轉之方向而分爲二種.與時針取同一方向者曰**負角** (negative angle);取反對方向者曰**正角** (positive angle).記角之法,先以始線後以終線.下圖之角,左爲正而右爲負,均稱曰 AOB 角.





無論正負各角,凡二角之代數和爲 90° 者,皆互稱曰**餘角** (complementary angles);二角之代數和爲 180° 者,皆互稱曰**補角** (supplementary angles).如

95° 與 -5° 互爲餘角,-110° 與 290° 互爲補角.

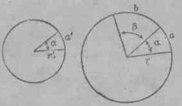
§26. 角之單位 分直角爲 90 等分,每分曰 1 度;每度分爲 60 分,每分分爲 60 秒;此謂角之**六十分法** (sexagesimal measure).度,分,秒均以符號表之,如 5 度 16 分 17 秒書爲 $5^\circ 16' 17''$,本書自首至此所用者,皆此法也.

分直角爲 100 等分,每分曰 1 級 (grade,) 每級分爲 100 分,每分分爲 100 秒;此謂角之**百分法** (centesimal measure).記法:如 25 級 16 分 88 秒,記爲

$25^g16'88''$，或略為 25.1688^g

此法依10而進,本較前法為優.然古來之書籍,圖表,儀器等類,均屬於六十分法,難以驟改.故其法至今未能通行.

§27　弧度法　如下圖,二圓有相等之圓心角 α, 則其所對之弧 a 與 a' 之比,同於半徑 r 與 r' 之比;



即　$$\frac{a}{r}=\frac{a'}{r'}.\qquad (A)$$

更就同圓而論,則圓心角 α 與 β 之比,等於所對之弧 a 與 b 之比.即

$$\frac{\alpha}{\beta}=\frac{a}{b}=\frac{a}{r}\Big/\frac{b}{r}.\qquad (B)$$

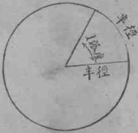
觀 (A) 式,知角若不變,則弧與半徑之比亦不變.無關於圓之大小也;觀 (B) 式,知角隨弧與半徑之比而變.是故角之大小亦可以圓弧與半徑之比測之.謂之**弧度法**(circular measure).以與半徑等長之弧所對之圓心角為角之單位,稱曰1弧度(radian).

§28　度與弧度之換算　圓周與半徑之比為 2π, 故全周角合 2π 弧度,亦即 $360°$. 是故

$$180°=\pi\text{ 弧度},\qquad (9)$$

$1° = \frac{\pi}{180}$ 弧度 $= 0.01745$ 弧度,

1 弧度 $= \frac{180°}{\pi} = 57°17'44.81''\cdots\cdots$.



例一　$\frac{3\pi}{2}$ 弧度合幾度?

解　因 π 弧度 $= 180°$,

$$\therefore\ \frac{3\pi}{3}\text{ 弧度} = \frac{3}{2} \times 180° = 270°.$$

例二　$60°$ 合幾弧度?

解　因 $1° = \frac{\pi}{180}$ 弧度,

$$\therefore\ 60° = 60 \times \frac{\pi}{180} = \frac{\pi}{3}\text{ 弧度}.$$

π 之略値常用者有 3.1416, $\frac{22}{7}$, $\frac{355}{113}$ 等,然若無特別需要,則僅書作 π 可也*.

以下凡角不明記其單位者,均係指弧度爲單位.如云有角爲 $\frac{\pi}{2}$,乃指其角爲 $\frac{\pi}{2}$ 弧度,實卽 $90°$ 非 $\frac{\pi}{2}$ 度也;又如有角爲 2,乃指有角爲 2 弧度,以六十分法記之,則爲 $114.5916°$,非 $2°$ 也.

§29.　角弧半徑之關係　設有角爲 θ,其所對之弧

* π 乃不盡數,其首31位爲3.141,592,653,589,793,238,462,643,383,279.

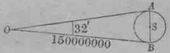
爲 s, 半徑爲 r, 則由定義得角,弧,半徑之關係如次:

$$\theta=\frac{s}{r}. \tag{10}$$

故角度,半徑三者之中任有其二,便知其餘.

例一　設地球與太陽之距離平均爲 150,000,000 公里,太陽之角直徑* 爲 $32'$; 試求太陽之直徑.

解　令人目所在點爲 O,所求之直徑爲 s 公里.因太陽所張之角甚小,其直徑 AB 略等於以 O 爲中心之小弧 AB; 又因



$$32'=\frac{32^\circ}{60}=\frac{8}{15}\times\frac{\pi}{180}\text{ 弧度;}$$

故由 (28) 式, $s=r\theta\quad 150,000,000\times\frac{8}{15}\times\frac{\pi}{180}$

$$=139.6\text{ 萬公里.}$$

此 π 作爲 3.1416 算.

例二　假定常人之目所能見之字,必其字在目中所含之角在 $5'$ 以上;然則 (a) 見字於 7 公尺處者,其字之大幾何? (b) 見字於 400 公尺處者,其字之大幾何?

解　(a) 設字之直徑爲 x 公尺,則 x 略等於半徑 7 公尺之圓中圓心角 $5'$ 所對之弧,即

*在測者目中所含太陽之角度曰角直徑.

$$x=r\theta=7\times\frac{5}{60}\times\frac{\pi}{180}=1\text{ 公分.}$$

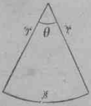
故字之直徑大於 1 公分者,始能見之.

(b) 令字之直徑為 y 公尺,仿上法得

$$y=400\times\frac{5}{60}\times\frac{\pi}{180}=58\text{ 公分.}$$

例三 設扇形之兩直邊皆為 r, 其間之角為 θ; 求扇形之面積.

解 扇形之面積等於扇形之弧長乘高折半.故命弧長為 s, 則面積 A 為



$$A=\frac{rs}{2}.$$

由 (28) 式, $$A=\frac{1}{2}r^2\theta.$$

習 題 十 二

以下設 $\pi=\frac{22}{7}$, 1 弧度 $=57.3^\circ$, n 為正整數.

1. $45^\circ48'36''$, $185^\circ59'15''$, $35^\circ30'30''$, $375^\circ00'47''$ 各合幾度?

2. 試以度,分,秒表 16.35°, 153.156°, $\frac{5}{7}$ 直角.

3. 試以弧度表 360°, 90°, 45°, $22\frac{1^\circ}{2}$, 60°, 15°, 30°, 135°, 270°, -315°, -75°

4. $\frac{\pi}{18}$, $\frac{\pi}{10}$, $\frac{\pi}{4}$, $2\frac{1}{2}\pi$, $\frac{2}{3}\pi$, 2π, $2n\pi$, 2, $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{\pi}$ 各合幾度?

5. 試以圖表 $340°$, $\frac{5}{2}$ 直角, $-\frac{3}{4}\pi$, $725°$, 2π, $2n\pi$, $(2n+1)\pi$ 等角.

6. $105°$, $-105°$, $\frac{5}{4}\pi$, $-\frac{1}{2}\pi$, $\frac{2}{3}\pi$, 2, $375°$. $2n\pi-\frac{1}{4}\pi$ 等角之終線各在何象限?

7. 與 $465°$, $-465°$ 同邊之最小正角各爲何?

8. 求與 $\frac{1}{4}\pi$ 同邊之一般角之公式.

9. $\frac{1}{2}\pi+\theta$ 之補角爲何?其餘角爲何?

10. 二等邊直角三角形之角各合幾度?幾弧度?

11. 三角形之各角爲 $1:2:3$ 之比,問各合幾度?幾弧度?

12. 正五邊形,正八邊形,正 n 邊形之一角各合幾弧度?

13 同一之角以級,度,弧度表之,則各爲 g, d, r; 試證

$$\pi(g-d)=20\,r.$$

14. 半徑 200 尺之圓上有弧長 50 尺,問此弧所對之圓心角爲幾度?幾弧度?

15. 100 尺之弧所對之圓心角爲 $1°$, 試求圓半徑.

16. 地球表面 $1°$ 之弧,其長幾何? [$r=6370$ 公里,下同.]

17. 有輪直徑 10 尺,每分鐘轉 200 次;問輪邊各點之速度每秒幾何?

18. 地球繞日之軌道假定爲圓,其半徑 15 千萬公里;問地球公轉之速度每秒幾何?

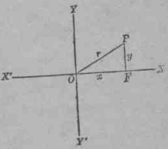
19. 有扇形高 10 公尺,面積 $26\frac{4}{21}$ 平方公尺,試求其頂角.

第　六　章

任意角之三角函數

此章以 R 表直角,即 $90°$ 或 $\frac{\pi}{2}$; 蓋本章所論諸事實無論角用何單位皆合;故直角只泛稱曰 R, 而不指定單位.然直角之單位一經指定,則其餘諸角均屬於同單位.譬如 $\sin(90°-\theta)$ 之 θ 爲度,而 $\sin\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)$ 之 θ 爲弧度,至於 $\sin(R-\theta)$ 之 θ, 則無特定之單位.

§30. 矩形座標　設 XX' 與 YY' 二直線直交於 O, 則此二直線分全平面爲 XOY, YOX', $X'OY$, $Y'OX$ 四部分,各名曰第一象限,第二象限,第三象限,第四象限.今於平面上任取 P 點,作 $PF\perp OX$, 連結 OP, 命



$$OP=r,$$

$$OF=x,$$

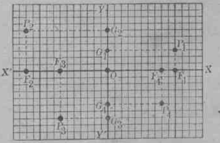
$$PF=y.$$

則 r 表 P 與 O 之距離.其符號常定為正. x 名曰 P 之橫座標 (abscissa), 如 P 在 YY' 之右則為正號,在左則為負號. y 名曰 P 之縱座標 (ordinate), 如 P 在 XX' 之上則為正,在下則為負. x, y 又總稱曰 P 之矩形座標 (rectangular coordinates).

XX' 名曰**橫軸** (axis of abscissas), 亦曰 x 軸 (x-axis). YY' 名曰**縱軸** (axis of ordinates), 亦曰 y 軸 (y-axis). 二軸又合稱曰**座標軸** (coördinate axes). O 曰**原點** (origin).

點之位置恆以縱橫兩座標記之.譬如某點之橫座標為 a, 縱座標為 b, 則某點可以 $x=a, y=b$ 或 (a, b) 記之.

觀上定義則凡點在第一象限,則 x, y 皆為正;在第二象限,則 x 為負, y 為正;在第三象限,則 x, y 皆為負;在第四象限,則 x 為正, y 為負.

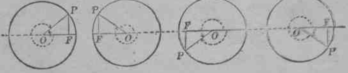


如右圖 P_1 距 y 軸為 10, 距 x 軸為 3, 故 P_1 之座標為 $(10, 3)$. 同理知 P_2 之座標為 $(-12, 6)$, P_3 之座標為 $(-7, -7)$, P_4 之座標為 $(8, -5)$; F_1, F_2, F_3, F_4 之座標各為 $(10, 0), (-12, 0), (-7, 0), (8, 0)$; G_1,

G_2, G_3, G_4 之座標各爲 $(0, 3), (0, 6), (0, -7), (0, -5)$；$O$ 之座標爲 $(0, 0)$.

§31. 任意角函數之定義　銳角函數之定義不適用於非銳角.玆重定任意角函數之定義如下:設有角 θ,取頂點 O 爲原點,以始線合於 x 軸之正向,P 爲終線上之一點,x, y 爲 P 點之矩形座標,r 爲 P 點與原點之距離;則 θ 無論正負,P 亦無論在何象限,皆爲

$$\left.\begin{aligned}\sin\theta&=\frac{y}{r}=\frac{\text{縱座標}}{\text{距離}}, &\csc\theta&=\frac{1}{\sin\theta},\\ \cos\theta&=\frac{x}{r}=\frac{\text{橫座標}}{\text{距離}}, &\sec\theta&=\frac{1}{\cos\theta},\\ \tan\theta&=\frac{y}{x}=\frac{\text{縱座標}}{\text{橫座標}}, &\cot\theta&=\frac{1}{\tan\theta}.\end{aligned}\right\}\tag{11}$$



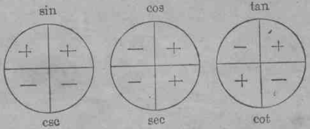
距離 r 常爲正.故由定義,知正弦之符號,同於縱座標 y;卽角在第一,二象限者正弦爲正,在第三,四象限者正弦爲負

餘弦之符號,同於橫座標 x;卽角在第一,四象限則爲正;第二,三象限則爲負

正切則縱橫兩座標同號者爲正,異號者爲負;故在一,三象限爲正,二,四象限爲負.

逆數與原數同符號,卽餘割同於正弦,正割同於餘弦,餘切同於正切.

各函數之符號觀下圖更明.



§32 **函數之週期性** 如將角之終線再轉過$4R$或$4R$之倍數,則其線仍復歸於原處;無論與時鐘之針取同一方向或反對方向而旋轉莫不皆然是故凡角增減$4R$或R之整數倍,其函數之值仍不變 卽

$$\left.\begin{aligned}\sin(\theta\pm4nR)&=\sin\theta,\\ \cos(\theta\pm4nR)&=\cos\theta,\\ \tan(\theta\pm4nR)&=\tan\theta\text{ 等}.\end{aligned}\right\}\qquad(12)$$

此中n爲正整數.

例如 $\sin375^\circ\ =\sin(375^\circ-360^\circ)\ =\sin15^\circ,$

$\sin(-15^\circ)=\sin(-15^\circ+360^\circ)=\sin345^\circ,$

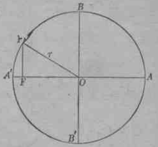
$$\cos\frac{9\pi}{4} \quad =\cos\left(\frac{9\pi}{4}-2\pi\right) \quad =\cos\frac{\pi}{4}.$$

可見負角之函數亦可變之爲正角之函數.

凡角增減$4R$時,其各三角函數之值不變故各三角函數皆曰週期函數 (periodic functions); $4R$ 爲其週期 (period). 又角增減$2R$時,其正切,餘切之值亦不變,故$4R$雖爲正切,餘切之週期,$2R$亦可爲其週期.故正切,餘切以$2R$爲其週期.

§33. **直角倍數之各函數**　一直角之各函數,已於§3中討論之.

即 $\left.\begin{array}{ll}\sin R=1, & \csc R=1,\\ \cos R=0, & \sec R=\infty,\\ \tan R=\infty, & \cot R=0.\end{array}\right\}$　(13)



當 $AOP=2R$ 時,

OP 合於 OA',

F 合於 A'.

$\therefore\ PF=0,$

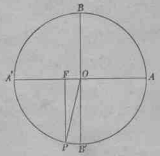
$OF=OA'=-r.$

$$\therefore\ \left.\begin{array}{ll}\sin 2R=\dfrac{PF}{OP}=\dfrac{0}{r}=0, & \csc 2R=\dfrac{r}{0}=\infty,\\ \cos 2R=\dfrac{OF}{OP}=\dfrac{-r}{r}=-1, & \sec 2R=\dfrac{r}{-r}=-1,\\ \tan 2R=\dfrac{PF}{OF}=\dfrac{0}{-r}=0, & \cot 2R=\dfrac{-r}{0}=\infty.\end{array}\right\} \quad (14)$$

當 $AOP=3R$ 時,

OP 合於 OB', F 合於 O.

$\therefore\quad PF=OB'=-r,\ OF=0.$



$$\therefore\quad \left.\begin{aligned} &\sin 3R=\frac{PF}{OP}=\frac{-r}{r}=-1,\ \csc 3R=\frac{r}{-r}=-1,\\ &\cos 3R=\frac{OF}{OP}=\frac{0}{r}=0,\quad \sec 3R=\frac{r}{0}=\infty,\\ &\tan 3R=\frac{PF}{OF}=\frac{-r}{0}=\infty,\quad \cot 3R=\frac{0}{-r}=0.\end{aligned}\right\}\qquad(15)$$

當 $AOP=4R$ 時,因 $4R$ 爲各函數之週期,故 $4R$ 之各函數等於 0° 之各函數.故從 §32, 可知

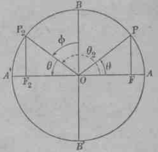
$$\left.\begin{aligned} &\sin 4R=\sin 0^\circ=0,\ \csc 4R=\csc 0^\circ=\infty,\\ &\cos 4R=\cos 0^\circ=1,\ \sec 4R=\sec 0^\circ=1,\\ &\tan 4R=\tan 0^\circ=0,\ \cot 4R=\cot 0^\circ=\infty.\end{aligned}\right\}\qquad(16)$$

依上理 n 爲任意整數時,可得次表:

	$4nR$	$(4n+1)R$	$(4n+2)R$	$(4n+3)R$
sin	0	1	0	-1
cos	1	0	-1	0
tan	0	∞	0	∞
cot	∞	0	∞	0
sec	1	∞	-1	∞
csc	∞	1	∞	-1

§34. 終線在第二象限之角之函數* 此角 θ_2 必在於 R 與 $2R$ 之間,故設 θ 與 ϕ 皆小於 R, 則 θ_2 可以下式表之:

$\theta_2 = 2R - \theta$, 或 $\theta_2 = R + \phi$.



(α) $\theta_2 = 2R - \theta$.

命 $\theta_2 = \angle AOP_2$, $\angle P_2OA' = \theta$, 作 $\angle AOP = \theta$, 令 $OP = OP_2 = r$, 則 $\triangle OPF$ $\triangle OP_2F_2$ 爲全等形. 故若 P, P_2 之座標爲 (x, y) 與 (x_2, y_2), 則 $y_2 = y$, $x_2 = -x$.

$$\left.\begin{aligned}
\sin\theta_2 &= \sin(2R-\theta) = \frac{y_2}{r} = \frac{y}{r} = \sin\theta,\\
\cos\theta_2 &= \cos(2R-\theta) = \frac{x_2}{r} = \frac{-x}{r} = -\cos\theta,\\
\tan\theta_2 &= \tan(2R-\theta) = \frac{y_2}{x_2} = \frac{y}{-x} = -\tan\theta.
\end{aligned}\right\} \quad (17)$$

* 凡終線在某象限之角常略稱曰某象限之角.

$$\csc\theta_2=\csc(2R-\theta)=\frac{1}{\sin(2R-\theta)}=\frac{1}{\sin\theta}=\quad\csc\theta,$$

$$\sec\theta_2=\sec(2R-\theta)=\frac{1}{\cos(2R-\theta)}=\frac{1}{-\cos\theta}=-\sec\theta,$$

$$\cot\theta_2=\cot(2R-\theta)=\frac{1}{\tan(2R-\theta)}=\frac{1}{-\tan\theta}=-\cot\theta.$$

是故$2R-\theta$之某函數等於θ之同函數,冠以某函數在第二象限之符號.易言之,凡鈍角之某函數,等於其補角之同函數,冠以某函數在第二象限之符號.

例　$\sin 150^\circ=\sin(180^\circ-30^\circ)=\quad\sin 30^\circ=\quad\frac{1}{2}$,

$\cos 135^\circ=\cos(180^\circ-45^\circ)=-\cos 45^\circ=-\frac{\sqrt{2}}{2}$,

$\tan 120^\circ=\tan(180^\circ-60^\circ)=-\tan 60^\circ=-\sqrt{3}$.

(b) $\theta_2=R+\phi$.

命 $R-\phi=\theta$, 則 $\sin\theta=\cos\phi$, $\cos\theta=\sin\phi$, $\tan\theta=\cot\phi$,

故
$$\left.\begin{aligned}\sin\theta_2&=\sin(R+\phi)=\sin(2R-\theta)=\quad\sin\theta=\quad\cos\phi,\\ \cos\theta_2&=\cos(R+\phi)=\cos(2R-\theta)=-\cos\theta=-\sin\phi,\\ \tan\theta_2&=\tan(R+\phi)=\tan(2R-\theta)=-\tan\theta=-\cot\phi.\end{aligned}\right\}\quad(18)$$

$$\csc\theta_2=\csc(R+\phi)=\frac{1}{\sin(R+\phi)}=\frac{1}{\cos\phi}=\quad\sec\phi,$$

$$\sec\theta_2=\sec(R+\phi)=\frac{1}{\cos(R+\phi)}=\frac{1}{-\sin\phi}=-\csc\phi,$$

$$\cot\theta_2=\cot(R+\phi)=\frac{1}{\tan(R+\phi)}=\frac{1}{-\cot\phi}=-\tan\phi.$$

即 $R+\phi$ 之某函數,等於 ϕ 之對應餘函數,冠以某函數在第二象限之符號.

例　$\sin 150^\circ=\sin(90^\circ+60^\circ)=\cos 60^\circ=\frac{1}{2}$,

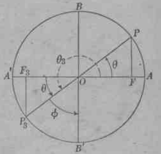
$\cos 135^\circ=\cos(90^\circ+45^\circ)=-\sin 45^\circ=-\frac{\sqrt{2}}{2}$,

$\tan 120^\circ=\tan(90^\circ+30^\circ)=-\cot 30^\circ=-\sqrt{3}$.

§35.　終線在第三象限之角之函數　此角 θ_3 必在於 $2R$ 與 $3R$ 之間.故設 θ 與 ϕ 皆小於 R,則 θ_3 可以下式表之:

$$\theta_3=2R+\theta,\text{ 或 }\theta_3=3R-\phi.$$

(a) $\theta_3=2R+\theta$.



命 $\theta_3=\angle AOP_3$,延長 P_3O 至 P,命 $OP=OP_3=r$,則 $\angle AOP=\theta$.又命 P 之座標為 (x,y),P_3 之座標為 (x_3,y_3),引 PF,P_3F_3 各 $\perp AA'$,則 $\triangle OPF$,$\triangle OP_3F_3$ 為相等,而 $y_3=-y$,$x_3=-x$.故

$$\left.\begin{aligned}\sin\theta_3&=\sin(2R+\theta)=\frac{y_3}{r}=\frac{-y}{r}=-\sin\theta,\\ \cos\theta_3&=\cos(2R+\theta)=\frac{x_3}{r}=\frac{-x}{r}=-\cos\theta,\\ \tan\theta_3&=\tan(2R+\theta)=\frac{y_3}{x_3}=\frac{-y}{-x}=\tan\theta\end{aligned}\right\}\qquad(19)$$

$$\csc\theta_3=\csc(2R+\theta)=\frac{1}{\sin(2R+\theta)}=\frac{1}{-\sin\theta}=-\csc\theta,$$

$$\sec\theta_3=\sec(2R+\theta)=\frac{1}{\cos(2R+\theta)}=\frac{1}{-\cos\theta}=-\sec\theta,$$

$$\cot\theta_3=\cot(2R+\theta)=\frac{1}{\tan(2R+\theta)}=\frac{1}{\tan\theta}=\quad\cot\theta.$$

是故 $2R+\theta$ 之某函數等於 θ 之同函數冠以該函數在第三象限之符號.

例 $\sin 204^\circ=\sin(180^\circ+24^\circ)=-\sin 24^\circ=-0.4067,$

$\cos 204^\circ=\cos(180^\circ+24^\circ)=-\cos 24^\circ=-0.9135,$

$\tan 204^\circ=\tan(180^\circ+24^\circ)=\quad\tan 24^\circ=\quad 0.4453.$

(*b*) $\theta_3=3R-\phi$.

命 $R-\phi=\theta$, 則 $\sin\theta=\cos\phi$, $\cos\theta=\sin\phi$, $\tan\theta=\cot\phi$,

故
$$\left.\begin{aligned}\sin\theta_3&=\sin(3R-\phi)=\sin(2R+\theta)=-\sin\theta=-\cos\phi,\\ \cos\theta_3&=\cos(3R-\phi)=\cos(2R+\theta)=-\cos\theta=-\sin\phi,\\ \tan\theta_3&=\tan(3R-\phi)=\tan(2R+\theta)=\quad\tan\theta=\quad\cot\phi.\end{aligned}\right\}\quad(20)$$

$$\csc\theta_3=\csc(3R-\phi)=\frac{1}{\sin(3R-\phi)}=\frac{1}{-\cos\phi}=-\sec\phi,$$

$$\sec\theta_3=\sec(3R-\phi)=\frac{1}{\cos(3R-\phi)}=\frac{1}{-\sin\phi}=-\csc\phi,$$

$$\cot\theta_3=\cot(3R-\phi)=\frac{1}{\tan(3R-\phi)}=\frac{1}{\cot\phi}=\quad\tan\phi.$$

即 $3R-\phi$ 之某函數,等於 ϕ 之餘函數,冠以某函數在第

三象限之符號

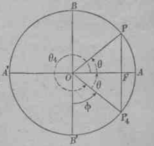
例　$\sin 204^\circ = \sin(270^\circ - 66^\circ) = -\cos 66^\circ = -0.4067,$

$\cos 204^\circ = \cos(270^\circ - 66^\circ) = -\sin 66^\circ = -0.9135,$

$\tan 204^\circ = \tan(270^\circ - 66^\circ) = \cot 66^\circ = 0.4453.$

§36　終線在第四象限之角之函數　此角 θ_4 必在於 $3R$ 與 $4R$ 間；故設 θ 與 ϕ 皆小於 R，則 θ_4 可以下式表之：

$\theta_4 = 4R - \theta$，或 $\theta_4 = 3R + \phi$.



(a) $\theta_4 = 4R - \theta$.

命 $\theta_4 = \angle AOP_4$，$\angle P_4OA = \theta$．作 $\angle AOP = \theta$，令 $OP = OP_4 = r$，則 $\triangle OPF$，$\triangle OP_4F$ 為相等；故若 P, P_4 之座標為 (x, y) 與 (x_4, y_4)，則 $y_4 = -y, x_4 = x$.

$$\left.\begin{aligned}
\sin\theta_4 &= \sin(4R-\theta) = \frac{y_4}{r} = \frac{-y}{r} = -\sin\theta,\\
\cos\theta_4 &= \cos(4R-\theta) = \frac{x_4}{r} = \frac{x}{r} = \cos\theta,\\
\tan\theta_4 &= \tan(4R-\theta) = \frac{y_4}{x_4} = \frac{-y}{x} = -\tan\theta.
\end{aligned}\right\} \tag{21}$$

$$\csc\theta_4 = \csc(4R-\theta) = \frac{1}{\sin(4R-\theta)} = \frac{1}{-\sin\theta} = -\csc\theta,$$

$$\sec\theta_4 = \sec(4R-\theta) = \frac{1}{\cos(4R-\theta)} = \frac{1}{\cos\theta} = \sec\theta,$$

$$\cot\theta_4 = \cot(4R-\theta) = \frac{1}{\tan(4R-\theta)} = \frac{1}{-\tan\theta} = -\cot\theta.$$

故 $4R-\theta$ 之某函數,等於 θ 之同函數,冠以某函數在第四象限之符號.

例 $$\sin\frac{11\pi}{6}=\sin\left(2\pi-\frac{\pi}{6}\right)=-\sin\frac{\pi}{6}=-\frac{1}{2},$$

$$\cos\frac{11\pi}{6}=\cos\left(2\pi-\frac{\pi}{6}\right)=\quad\cos\frac{\pi}{6}=\quad\frac{\sqrt{3}}{2},$$

$$\tan\frac{11\pi}{6}=\tan\left(2\pi-\frac{\pi}{6}\right)=-\tan\frac{\pi}{6}=-\frac{1}{\sqrt{3}}.$$

(b) $\theta_4=3R+\phi.$

命 $\phi=R-\theta$, 則

$$\left.\begin{aligned}\sin\theta_4&=\sin(3R+\phi)=\sin(4R-\theta)=-\sin\theta=-\cos\phi,\\ \cos\theta_4&=\cos(3R+\phi)=\cos(4R-\theta)=\quad\cos\theta=\quad\sin\phi,\\ \tan\theta_4&=\tan(\ R+\phi)=\tan(4R-\theta)=-\tan\theta=-\cot\phi.\end{aligned}\right\}\qquad(22)$$

$$\csc\theta_4=\csc(3R+\phi)=\frac{1}{\sin(3R+\phi)}=\frac{1}{-\cos\phi}=-\sec\phi,$$

$$\sec\theta_4=\sec(3R+\phi)=\frac{1}{\cos(3R+\phi)}=\frac{1}{\sin\phi}=\quad\csc\phi,$$

$$\cot\theta_4=\cot(3R+\phi)=\frac{1}{\tan(3R+\phi)}=\frac{1}{-\cot\phi}=-\tan\phi.$$

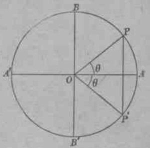
卽 $3R+\phi$ 之某函數,等於 ϕ 之對應餘函數,冠以某函數在第四象限之符號.

例 $$\sin\frac{11\pi}{6}=\sin\left(\frac{3\pi}{2}+\frac{\pi}{3}\right)=-\cos\frac{\pi}{3}=-\frac{1}{2},$$

$$\cos\frac{11\pi}{6}=\cos\left(\frac{3\pi}{2}+\frac{\pi}{3}\right)=\quad\sin\frac{\pi}{3}=\quad\frac{\sqrt{3}}{2},$$

$$\tan\frac{11\pi}{6}=\tan\left(\frac{3\pi}{2}+\frac{\pi}{3}\right)=-\cot\frac{\pi}{3}=-\frac{1}{\sqrt{3}}.$$

§37. 負角之函數　命 $-\theta=\angle AOP'$, 作 $\angle AOP=\theta$, 引 $OP=OP'=r$, 又以 (x, y), (x', y') 為 P, P' 之座標; 則 $x'=x$, $y'=-y$, 故



$$\left.\begin{aligned}\sin(-\theta)&=\frac{y'}{r}=\frac{-y}{r}=-\sin\theta,\\ \cos(-\theta)&=\frac{x'}{r}=\frac{x}{r}=\quad\cos\theta,\\ \tan(-\theta)&=\frac{y'}{x'}=\frac{-y}{x}=-\tan\theta.\end{aligned}\right\}\qquad(23)$$

$$\csc(-\theta)=\frac{1}{\sin(-\theta)}=\frac{1}{-\sin\theta}=-\csc\theta,$$

$$\sec(-\theta)=\frac{1}{\cos(-\theta)}=\frac{1}{\cos\theta}=\quad\sec\theta,$$

$$\cot(-\theta)=\frac{1}{\tan(-\theta)}=\frac{1}{-\tan\theta}=-\cot\theta.$$

故 $-\theta$ 之某函數,等於 θ 之同函數,冠以某函數在第四象限之符號.

例　$\sin(-13°25')=-\sin 13°25'=-0.2320$,

$\cos(-13°25')=\quad\cos 13°25'=\quad 0.9727$,

$\tan(-13°25')=-\tan 13°25'=-0.2385$.

§38　任意角函數之公式　各象限中之函數,與第

一象限中各函數之關係式似繁而實簡;蓋上述諸公式,均可以下列兩式包括之:

$$\left.\begin{aligned}\sin(2nR\pm\theta)&=\pm\sin\theta,\\ \cos(2nR\pm\theta)&=\pm\cos\theta,\\ \tan(2nR\pm\theta)&=\pm\tan\theta,\\ \cot(2nR\pm\theta)&=\pm\cot\theta,\\ \sec(2nR\pm\theta)&=\pm\sec\theta,\\ \csc(2nR\pm\theta)&=\pm\csc\theta.\end{aligned}\right\}\qquad(24a)$$

$$\left.\begin{aligned}\sin(\overline{2n+1}R\pm\phi)&=\pm\cos\phi,\\ \cos(\overline{2n+1}R\pm\phi)&=\pm\sin\phi,\\ \tan(\overline{2n+1}R\pm\phi)&=\pm\cot\phi,\\ \cot(\overline{2n+1}R\pm\phi)&=\pm\tan\phi,\\ \sec(\overline{2n+1}R\pm\phi)&=\pm\csc\phi,\\ \csc(\overline{2n+1}R\pm\phi)&=\pm\sec\phi.\end{aligned}\right\}\qquad(24b)$$

式中 n 為任意整數.右節之複號或+或-,視左節之函數及角所在象限而定.

例 $\sin 3523^\circ=(90^\circ\times 39+13^\circ)=-\cos 13^\circ$.

因 39 為奇數,故合於 (b).

又因第四象限之 sin, 故當取負號.

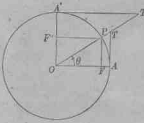
$$\tan(-2651^\circ)=\tan[90^\circ\times(-30)+49^\circ]=-\tan 49^\circ.$$

因 -30 爲偶數,故合於 (a).

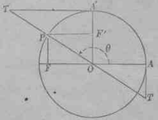
又因第四象限之 tan,故當取負號.

§39　函數之線表示法　設 $\angle AOP=\theta$, $OA=1$; O 爲中心,邊 OA 爲半徑而畫圓,截他邊於 P; 引 $OA'\perp OA$.

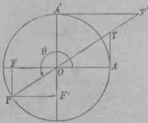
(甲)



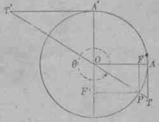
(乙)



(丙)



(丁)



$FP\perp OA$, $F'P\perp OA'$; 又自 A, A' 各作切線截 OP 之延長線於 T 及 T', 則得

$$FP=\sin\theta,\qquad OF=\cos\theta,$$

$$AT=\tan\theta,\qquad A'T'=\cot\theta.$$

$$OT = \sec\theta, \qquad OT' = \csc\theta,$$
$$FA = \text{vers}\,\theta, \qquad F'A' = \text{covers}\,\theta.$$

是故三角函數亦可以單位圓中之各線表之，舊時所謂"八線"者此也．八線既皆由圓而來，故三角函數亦稱曰圓函數(circular functions)．各線亦有正負之分，其規定同於§30；至於OT之符號，則以P在O, T之間者爲正，O在P, T之間者爲負，OT'之符號亦然(即規定OP之方向爲正，PO之方向爲負．故當OT, OT'與OP同方向時爲正，當OT, OT'與OP異方向時爲負)．例如(丙)圖θ在第三象限．

故 $\sin\theta = FP$ 爲負， $\cos\theta = OF$ 爲負，
$\tan\theta = AT$ 爲正， $\cot\theta = A'T'$ 爲正，
$\sec\theta = OT$ 爲負， $\csc\theta = OT'$ 爲負．

§40. 函數之變值 當θ之值漸增時，其各函數如何變化，茲就各象限分別討論之．

當θ從0°增至90°時，θ在第一象限，從上節(甲)圖觀之．

$\sin\theta = PF$，從0增至1，
$\cos\theta = OF$，從1減至0，
$\tan\theta = AT$，從0增至∞，
$\cot\theta = A'T'$，從∞減至0，
$\sec\theta = OT$，從1增至∞，
$\csc\theta = OT'$，從∞減至1.

當 θ 從 90° 增至 180° 時，θ 在第二象限.從上節(乙)圖觀之.

$\sin\theta = PF$，從 1 減至 0，　　$\cos\theta = OF$，從 0 減至 -1，

$\tan\theta = AT$，從 $-\infty$ 增至 0，　$\cot\theta = A'T'$，從 0 減至 $-\infty$，

$\sec\theta = OT$，從 $-\infty$ 增至 -1，$\csc\theta = OT'$，從 1 增至 ∞.

當 θ 從 180° 增至 270° 時，θ 在第三象限，從上節(丙)圖觀之.

$\sin\theta = PF$，從 0 減至 -1，　$\cos\theta = OF$，從 -1 增至 0，

$\tan\theta = AT$，從 0 增至 ∞，　$\cot\theta = A'T'$，從 ∞ 減至 0，

$\sec\theta = OT$，從 -1 減至 $-\infty$，$\csc\theta = OT'$，從 $-\infty$ 增至 -1.

當 θ 從 270° 增至 360° 時，θ 在第四象限，從上節(丁)圖觀之.

$\sin\theta = PF$，從 -1 增至 0，　$\cos\theta = OF$，從 0 增至 1，

$\tan\theta = AT$，從 $-\infty$ 增至 0，　$\cot\theta = A'T'$，從 0 減至 $-\infty$，

$\sec\theta = OT$，從 ∞ 減至 1，　$\csc\theta = OT'$，從 -1 減至 $-\infty$.

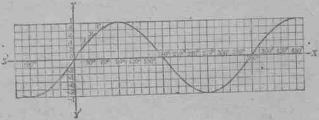
當 θ 從 360° 增至 450° 時，θ 又在第一象限，故各函數之變化與當 θ 從 0° 增至 90° 時完全相同.

綜上結果，可列表如下:

象限	I	II	III	IV
θ	$0°\to 90°$	$90°\to 180°$	$180°\to 270°$	$270°\to 360°$
$\sin\theta$	$0\to 1$	$1\to 0$	$0\to -1$	$-1\to 0$
$\cos\theta$	$1\to 0$	$0\to -1$	$-1\to 0$	$0\to 1$
$\tan\theta$	$0\to\infty$	$-\infty\to 0$	$0\to\infty$	$-\infty\to 0$
$\cot\theta$	$\infty\to 0$	$0\to -\infty$	$\infty\to 0$	$0\to -\infty$
$\sec\theta$	$1\to\infty$	$-\infty\to -1$	$-1\to -\infty$	$\infty\to 1$
$\csc\theta$	$\infty\to 1$	$1\to\infty$	$-\infty\to -1$	$-1\to -\infty$

§41. 函數之圖線　函數之變化,由上節表中觀之,尚未能一目了然.茲將各函數以圖線表其變跡如次:

用矩形座標法(§30),將角之度數爲橫座標,其函數爲縱座標依次定出各點.



正弦圖線

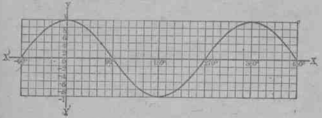
試令 $\sin x=y$,則從已知特別角之函數(§3),可得下列各對應值:

x	0°,	30°,	45°,	60°,	90°,	120°,	135°,	150°,	180°,	210°,
y	0,	.5,	.71,	.87,	1,	.87	.71,	.5,	0,	−.5,

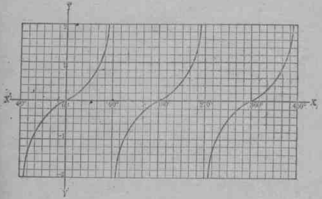
225°,	240°,	270°,	300°,	315°	330°,	360°,	390°,	……
−.71	−.87,	−1	−.87	−.71	−.5,	0,	.5	……

因得各點 $O(0°, 0)$, $A(30°, .5)$, $B(45°, .71)$, $C(60°, .87)$……等, 如圖所示連圖中各點成一曲線此線名曰正弦圖線.

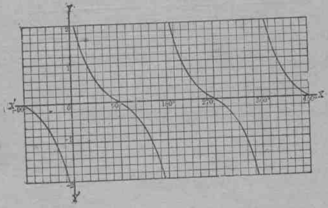
同上法可得其他各函數之圖線如次:



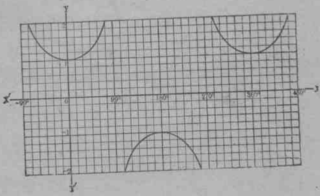
餘弦圖線



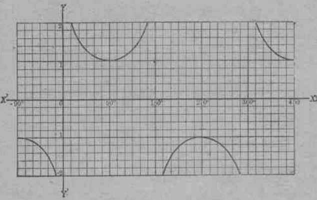
正切圖線



餘切圖線



正割圖線



餘割圖線

從以上諸圖線一望而可知以下數事:

(1) 各函數皆以360°爲週期.正切,餘切又可以180°爲週期.

(2) 正弦,餘弦之値不大於1,不小於 −1. 正割,餘割之値不能在1與 −1之間.

(3) 正弦,餘弦之値是連續的,其他各函數均不連續的從±∞一躍而至∓∞.

習題十三

1. 試定(5, 0), (0, 5), (−1, −1), (0, −1)各點之位置.

2. 試定下列各點之位置,並計算其與原點之距離.

$\left.\begin{array}{l}x=8\\y=6\end{array}\right\}$, $\left.\begin{array}{l}x=-8\\y=-6\end{array}\right\}$, $\left.\begin{array}{l}x=-8\\y=6\end{array}\right\}$, $\left.\begin{array}{l}x=8\\y=-6\end{array}\right\}$.

3. 有點距原點爲2,其橫座標爲1;試求其縱座標.

4. 有點距原點爲10,其縱座標爲$\sqrt{50}$,試求其橫座標;並以圖表之.

5. 已知$\cos A=-\frac{3}{5}$, $\tan B=-3$, $\sin\theta=\frac{1}{3}$,試畫其角.

6. 試列表計算$45°, 135°, 225°, 315°$各函數之值.

7. 試列表計算$30°, 150°, 210°, 330°$各函數之值.

8. 有$\sin\theta=\frac{1}{2}$,求小於$4R$之θ.若θ在$4R$以內而$\cos\theta=\frac{1}{2}$,則θ爲何?

9. 求$\sin 390°$, $\cos 765°$, $\tan 405°$, $\sin(-45°)$, $\cos(-30°)$, $\tan(-135°)$之值.

10. 試就$\cos\theta=\sqrt{1-\sin^2\theta}$中$\sin\theta$之變化,推測各象限內$\cos\theta$之變化.

11. 試用$\sec\theta=\sqrt{1+\tan^2\theta}$之關係,由$\tan\theta$之變化,推測第一象限內$\sec\theta$之變化.

12. 若θ在第二象限,則$\sin\theta=\sqrt{1-\cos^2\theta}$根號前之符號爲正乎?爲負乎?若$\theta$在第四象限,則又如何?

13. 若θ在第三象限,則$\sec\theta=\sqrt{1+\tan^2\theta}$之根號前當用何號?若$\theta$在第四象限,又當用何號?

14. 試以第一象限之角代替下列諸函數中之角:
$\sin 146°, \cos 235°, \tan 317°, \sin\frac{5\pi}{4}, \cos\frac{7\pi}{8}, \tan\frac{15\pi}{4}$.

15. 試以第一象限之角代替下列諸函數中之角,並將各函數改爲其餘函數:
$\tan 95°, \sin 272°, \cos 115°10', \sec\frac{2\pi}{3}, \sin\frac{28\pi}{3}, \cos\frac{7}{2}R$.

16. 試以小於45°之角代替下列諸函數中之角若函數名稱須改者改正之:
$\sin 143°15', \cos 143°15', \tan 243°10'15'', \sec 284°30'$,
$\cot 127°$.

17. 試由眞數表求下列各函數之值:
$\sin 111°30', \cos 253°12', \tan 134°, \sin 317°15', \cos 97°35'$,
$\cos 3564°, \cos(-100°)$.

18. 求$\sin\left(-27\frac{\pi}{4}\right), \sin(-150°), \tan(-5445°)$之值

19. 若$\sin\theta=0.5831$而$0<\theta<4R$試求此θ.

20. 若$\tan\theta=-4.3897$而$\sin\theta$爲正,試求此θ.

21. 若$\cos\theta=\sin 147°$,證θ之一值爲$303°$.

22. 若$\sin\theta=\cos 5\theta$,證θ有兩值爲$15°$及$75°$.

23. 已知$\sin\phi=-0.4561$;求$\tan\phi$.

24. 對於任意之θ角,試證
$\sin(\theta-R)=-\cos\theta$,　　$\cos(\theta-R)=\sin\theta$,

$$\sin(\theta-2R)=-\sin\theta,\qquad \cos(\theta-2R)=-\cos\theta,$$
$$\sin(\theta-3R)=\cos\theta,\qquad \cos(\theta-3R)=-\sin\theta.$$

25. 試作圖證 $\cos(R-\phi)=\sin\phi$, 設 ϕ 在

(a) 第一象限； (b) 第二象限； (c) 第三象限.

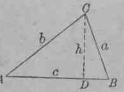
26. 試作 $\sin x+\cos x$ 之圖線

第 七 章

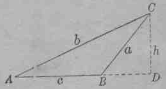
三角形之性質

§42. 正弦定律　設三角形 ABC 自頂點 C 向對邊 AB 或其延長線作垂線 $CD=h$.

(甲)



(乙)



由甲圖，　$h=b\sin A$, 又 $h=a\sin B$.

由乙圖，　$h=b\sin A$, 又 $h=a\sin(180^\circ-B)=a\sin B$.

總之，　$h=a\sin B=b\sin A$,

即　$$\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}.$$

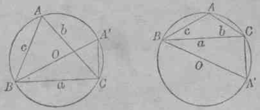
同理　$$\frac{a}{\sin A}=\frac{c}{\sin C}.$$

由此得 $$a : b : c = \sin A : \sin B : \sin C. \tag{25}$$

或 $$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C}.$$

故三角形之邊與其對角之正弦爲正比例. 此謂之**正弦定律** (law of sines).

(丙) (丁)



畫三角形 ABC 之外接圓, 自任一頂點如 B 作圓徑 $BA'=d$, 連 $A'C$, 則 $A'BC$ 爲直角三角形.

若 $A<90^\circ$, 則如丙圖,

$$\frac{a}{d} = \sin A' = \sin A.$$

若 $A>90^\circ$, 則如丁圖,

$$\frac{a}{d} = \sin A' = \sin(180^\circ - A) = \sin A.$$

故角無論銳鈍, 皆得 $d = \dfrac{a}{\sin A}$.

同理得 $$d = \frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C} \tag{26}$$

是故三角形之任一邊與其對角之正弦之比, 等於外接

圓之直徑.

§ 43. **投影定理**　由前節甲乙兩圖,得

$$AD=b\cos A.$$

由甲圖,　$DB=a\cos B.$

$$c=AD+DB=b\cos A+a\cos B. \qquad (A)$$

由乙圖,　$BD=a\cos(180^\circ-B)=-a\cos B,$

$$c=AD-BD=b\cos A-(-a\cos B)$$

$$=b\cos A+a\cos B. \qquad (B)$$

總之,
同理*

$$\left.\begin{aligned} c&=a\cos B+b\cos A.\\ a&=b\cos C+c\cos B,\\ b&=c\cos A+a\cos C.\end{aligned}\right\} \qquad (27)$$

$b\cos A=AD$ 爲 b 邊投於 AB 線上之影, $a\cos B=DB$ 爲 a 邊投於 AB 線上之影,而 BD 可作爲 $(-DB)$ 看,卽無論 (A) 式 (B) 式皆爲 $c=AD+DB$; 是故得投影定理 (projection theorem) 曰,三角形之任一邊,等於其餘二邊在此邊上之投影之代數和.

§ 44. **餘弦定律**　由 § 42 甲乙兩圖,

$$a^2=h^2+\overline{BD}^2. \qquad (C)$$

* 遞變 a, b, c 爲 b, c, a, 遞變 A, B, C, 爲 B, C, A 則由第一式可得第二式;同理由第二式可得第三式;是謂文字之輪換(cyclic substitution)

由甲圖， $DB = c - AD.$

由乙圖， $BD = AD - c.$

總之， $\overline{BD}^2 = \overline{AD}^2 - 2c \cdot AD + c^2.$

由 (C)， $a^2 = h^2 + \overline{AD}^2 - 2c\quad A\quad + c^2.$

但 $h^2 + \overline{AD}^2 = b^2, \quad AD = b \cos A.$

故
$$\left.\begin{aligned} a^2 &= b^2 + c^2 - 2\,bc \cos A. \\ b^2 &= c^2 + a^2 - 2\,ca \cos B, \\ c^2 &= a^2 + b^2 - 2\,ab \cos C. \end{aligned}\right\} \qquad (28)$$
同理

故三角形中任一邊之平方，等於餘二邊之平方和減去此二邊與其夾角餘弦之連乘積之二倍；此謂餘弦定律 (law of cosines).

別證 應用投影定理，則

$$\begin{aligned} c^2 + a^2 - b^2 &= c(a \cos B + b \cos A) \\ &\quad + a(b \cos C + c \cos B) \\ &\quad - b(c \cos A + a \cos C) \\ &= 2ac \cos B. \end{aligned}$$

$$\therefore \quad b^2 = c^2 + a^2 - 2ca \cos B.$$

§45. 斜角三角形之解法

I. 已知 a 邊及 B, C 二角，則 A 為

$$A = 180^\circ - B - C.$$

又由正弦定律得 b, c 兩邊各爲

$$b=\frac{a\sin B}{\sin A},\quad c=\frac{a\sin C}{\sin A}.$$

II. 已知二邊 b, c 及其一邊之對角如 B, 則 a 邊可由餘弦定律得之.今將(28)之第二式,作爲 a 之二次方程式而解之,得

$$a=c\cos B\pm\sqrt{b^2-c^2\sin^2 B}.$$

由上式可知若 $b>c\sin B$ 時,則 $b^2-c^2\sin^2 B>0$, 故本題有兩答;若 $b=\sin B$ 時,則 $b^2-c^2\sin^2 B=0$, 故本題有一答;若 $b<c\sin B$ 時,則 $b^2-c^2\sin^2 B<0$, 則 a 爲虛數,卽本題無答.

求得 a 後,再求 A, C, 可用正弦定律,卽

$$\sin A=\frac{a}{b}\sin B,\quad \sin C=\frac{c}{b}\sin B.$$

III. 若已知兩邊 b, c 及其夾角 A, 欲求第三邊 a; 則由餘弦公式,得

$$a=\sqrt{b^2+c^2-2bc\cos A}.$$

至於他二角,亦以正弦定律求之.

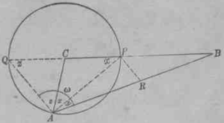
IV. 若已知三邊,欲求三角;亦由餘弦定律,得

$$\cos A=\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}\text{等}.$$

由是觀之,欲解一般三角形,有正餘弦兩定律已足用,惟餘弦定律不適於對數計算耳.

§46. 正切定律　設三角形 ABC 中 $CA<CB$, 以 C 爲

中心,CA 為半徑,而畫圓,截 CB 於 P,延長 BC,再與圓交於 Q.



命 $\angle QAB=\omega,\ \angle CAP=x,\ \angle PAB=y,\ \angle QAC=z,$

則 $\angle APC=x,\ \angle AQC=z,$

而 $x+y=A,\ x-y=B,\ x+z=90^\circ,\ x+y+z=\omega.$

解之 $x=\dfrac{1}{2}(A+B),\qquad y=\dfrac{1}{2}(A-B),$

$$z=90^\circ-\frac{1}{2}(A+B),\quad \omega=90^\circ+\frac{1}{2}(A-B).$$

由 APB, AQB 兩三角形,各應用正弦定律得

$$\frac{AB}{BP}=\frac{\sin(180^\circ-x)}{\sin y}=\frac{\sin x}{\sin y},\quad \frac{AB}{BQ}=\frac{\sin z}{\sin\omega}.$$

即 $$\frac{\mathbf{c}}{\boldsymbol{a-b}}=\frac{\sin\frac{1}{2}(\boldsymbol{A+B})}{\sin\frac{1}{2}(\boldsymbol{A-B})},\quad \frac{\mathbf{c}}{\boldsymbol{a+b}}=\frac{\cos\frac{1}{2}(\boldsymbol{A+B})}{\cos\frac{1}{2}(\boldsymbol{A-B})}\tag{29}$$

同理 $$\frac{a}{b-c}=\frac{\sin\frac{1}{2}(B+C)}{\sin\frac{1}{2}(B-C)},\quad \frac{a}{b+c}=\frac{\cos\frac{1}{2}(B+C)}{\cos\frac{1}{2}(B-C)},$$

$$\frac{b}{c-a}=\frac{\sin\frac{1}{2}(C+A)}{\sin\frac{1}{2}(C-A)},\quad \frac{b}{c+a}=\frac{\cos\frac{1}{2}(C+A)}{\cos\frac{1}{2}(C-A)}.$$

是謂對偶公式 (double formulas).

將各對之公式相除,得

$$\frac{a+b}{a-b}=\frac{\tan\frac{1}{2}(A+B)}{\tan\frac{1}{2}(A-B)}\tag{30}$$

及

$$\frac{b+c}{b-c}=\frac{\tan\frac{1}{2}(B+C)}{\tan\frac{1}{2}(B-C)},$$

$$\frac{c+a}{c-a}=\frac{\tan\frac{1}{2}(C+A)}{\tan\frac{1}{2}(C-A)}.$$

於是得**正切定律** (law of tangents) 曰,凡三角形之兩邊和與兩邊較之比,等於半對角和之正切與半對角較之正切之比.

別證　由前圖作 $PR \parallel QA$, 則 $\angle APR=90°$, 而

$$\frac{BQ}{BP}=\frac{AQ}{RP}=\frac{AQ}{AP}\bigg/\frac{RP}{AP},\tag{D}$$

$$BQ=a+b,\ BP=a-b,$$

$$\frac{AQ}{AP}=\tan x=\tan\frac{1}{2}(A+B),$$

$$\frac{RP}{AP}=\tan y=\tan\frac{1}{2}(A-B).$$

由 (D),

$$\frac{a+b}{a-b}=\frac{\tan\frac{1}{2}(A+B)}{\tan\frac{1}{2}(A-B)}.$$

對偶公式及正切定律,均便於對數計算,解第三種三角形多用之.

§47. 面積公式

(a) 已知三角形之底邊為c, 高為h, 則面積T為

$$T=\frac{1}{2}ch.$$

(b) 已知二邊 b, c, 及其夾角A, 則由§42甲乙二圖, 得 $h=b\sin A$, 代入上式,

$$T=\frac{1}{2}bc\sin A. \tag{31}$$

(c) 已知三角A, B, C, 及一邊c, 則由正弦定律, 得

$$b=\frac{c\sin B}{\sin C}.$$

代入(31),

$$T=\frac{c^2}{2}\cdot\frac{\sin A\sin B}{\sin C}. \tag{32}$$

(d) 已知三邊a, b, c, 由餘弦定律, 得

$$\cos A=\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc},$$

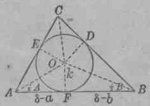
故

$$\begin{aligned}\sin A&=\sqrt{1-\cos^2 A}\\&=\sqrt{\frac{(a+b+c)(b+c-a)(c+a-b)(a+b-c)}{4b^2c^2}}\\&=\frac{1}{2bc}\sqrt{(a+b+c)(b+c-a)(c+a-b)(a+b-c)}.\end{aligned}$$

代入(31)且命半周$\frac{1}{2}(a+b+c)=s$, 則

$$T=\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}.^{*} \tag{33}$$

* 此亦謂之 Hero 公式.



(e) 已知半周 s 及內切圓之半徑 k; 命 O 為內切圓心,

則　$\triangle BOC=\frac{1}{2}ka,$

$\triangle COA=\frac{1}{2}kb,$

$\triangle AOB=\frac{1}{2}kc.$

加之,　$$T=ks. \tag{34}$$

內切圓之半徑 k 亦可以三邊表之,卽

$$k=\frac{T}{s}=\sqrt{\frac{(s-a)(s-b)(s-c)}{s}}. \tag{35}$$

§ 48. **以邊表半角函數**　由前圖,

$$AF=AE,\quad BD=BF,\quad CE=CD,$$

故　$$2s=2AF+2(BD+CD)=2AF+2a.$$

$$\therefore\quad AF=s-a.$$

$$\left.\begin{aligned}&\text{而}\quad \tan\frac{A}{2}=\frac{k}{s-a}.\\ &\text{由(35)又有}\quad \tan\frac{A}{2}=\sqrt{\frac{(s-b)(s-c)}{s(s-a)}}.\end{aligned}\right\} \tag{36}$$

同理　$$\tan\frac{B}{2}=\frac{k}{s-b}=\sqrt{\frac{(s-c)(s-a)}{s(s-b)}},$$

$$\tan\frac{C}{2}=\frac{k}{s-c}=\sqrt{\frac{(s-a)(s-b)}{s(s-c)}}.$$

又因　$\overline{AO}^2 = k^2 + (s-a)^2$

$$= \frac{(s-a)(s-b)(s-c) + s(s-a)^2}{s} = \frac{bc(s-a)}{s}, \qquad (E)$$

$$\sin\frac{A}{2} = \frac{k}{AO}, \quad \cos\frac{A}{2} = \frac{s-a}{AO}.$$

由 (E)，$$\sin\frac{A}{2} = \sqrt{\frac{(s-b)(s-c)}{bc}}, \quad \cos\frac{A}{2} = \sqrt{\frac{s(s-a)}{bc}}. \qquad (37)$$

同理　$$\sin\frac{B}{2} = \sqrt{\frac{(s-c)(s-a)}{ca}}, \quad \cos\frac{B}{2} = \sqrt{\frac{s(s-b)}{ca}},$$

$$\sin\frac{C}{2} = \sqrt{\frac{(s-a)(s-b)}{ab}}, \quad \cos\frac{C}{2} = \sqrt{\frac{s(s-c)}{ab}}.$$

$\frac{A}{2}, \frac{B}{2}, \frac{C}{2}$ 皆小於 90°，故以上各公式之根號皆為正，且各式均適於對數計算，已知三邊而求角可用之，惟角近於 90° 者，正弦無顯著之變化，角近於 0° 者，餘弦無顯著之變化；故若所求之角大於 45°，則當避用正弦公式，角小於 45°，則當避用餘弦公式；如統求三角，則又以用正切公式為簡便，蓋用 (36) 式只要檢 $s, s-a, s-b, s-c$ 四個對數，如用 (37) 式則要多檢 a, b, c 三個對數也。

習題十四

1. 試應用正弦之定律於直角三角形，且化簡所得

之式.

2. 應用餘弦定律於 $A=0°, 90°, 180°$ 等各三角形,則生如何之結果?

3. 試應用投影定理於 $A=90°, A=B$ 兩三角形.

不用對數試解下列各題:

4. $A=35°, B=75°, a=7$, 求 b, c.

5. $A=65°, b=10, a=15$, 求 B, c.

6. $A=16°, b=15, a=6$, 求其餘.

7. $a=150, b=200, C=27°\ 30'$, 求 c.

8. $a=2, b=3, c=4$, 求角.

9. 自三角形之頂點引頂角之二等分線,分對邊爲二段,則各段之比,必等於各鄰邊之比;試以正弦定律證之.

10. 試由餘弦定律導出正弦定律.

11. 試以文字輪換法,由 (31), (32) 兩公式,導出其餘諸公式.

12. 證 $\sin A=\dfrac{2}{bc}\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$.

求角何以不用此式,而用 (36), (37)?

13. 以上題 $\sin A$ 之式與 (37) 相比較,試證

$$\sin A = 2\sin\frac{A}{2}\cos\frac{A}{2}.$$

14. 試由12題之式,導出

$$\sin A : \sin B = a : b.$$

15. 證 $\frac{\sin A + 2\sin B}{\sin C} = \frac{a+2b}{c}.$

16. 證 $\frac{\sin^2 A - m\sin^2 B}{\sin^2 C} = \frac{a^2 - mb^2}{c^2}.$

17. 證 $\frac{a - c\cos B}{b - c\cos A} = \frac{\sin B}{\sin A}.$

18. 證 $\frac{\cos A}{a} + \frac{\cos B}{b} + \frac{\cos C}{c} = \frac{a^2+b^2+c^2}{2abc}.$

19. 若 $\frac{\cos A}{b} = \frac{\cos B}{a}$, 則三角形爲二等邊,或直角三角形;試證之.

20. 若 $b=c$, $A=60°$, 則三角形爲等邊;試證之.

21. 若 $\sin^2 A = \sin^2 B + \sin^2 C$, 則爲直角三角形.試證之.

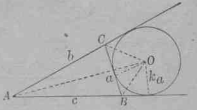
22. 若 $\sin A = 2\sin B\cos C$, 則三角形爲二等邊.試證之.

23. 以(26)與(31)兩公式相比較,證

$$T = \frac{abc}{2d}.$$

24. 設 k_a, k_b, k_c 各爲切於 a, b, c 之傍切圓之半徑,試由

$\triangle ABC=\triangle ABO+\triangle ACO-\triangle BCO$ 等之關係.



證明

$$k_a=\frac{T}{s-a},\quad k_b=\frac{T}{s-b},\quad k_c=\frac{T}{s-c}$$

25. 證 $k_a=s\tan\frac{A}{2},\ k_b=s\tan\frac{B}{2},\ k_c=s\ \tan\frac{C}{2}.$

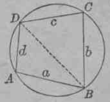
26. 證 $\frac{1}{k}=\frac{1}{k_a}+\frac{1}{k_b}+\frac{1}{k_c}.$

27. 證 $k_a+k_b+k_c-k=2D.$

28. 證 $T=s^2\tan\frac{A}{2}\tan\frac{B}{2}\tan\frac{C}{2}.$

29. 有圓內接四邊形 $ALCD$, 其邊爲 a, b, c, d. 其面積爲 Q; 證

$$Q=\tfrac{1}{2}(ad+bc)\sin A.$$



試更比較對角線之兩公式

$$k^2=a^2+d^2-2ad\cos A$$
$$=b^2+c^2-2bc\cos C,$$

而證　$\cos A = \dfrac{a^2 - b^2 - c^2 + d^2}{2(ad + bc)}$.

設　$s = \frac{1}{2}(a + b + c + d)$,

試更證　$\sin A = \dfrac{2\sqrt{(s-a)(s-b)(s-c)(s-d)}}{ad + bc}$,

及　$Q = \sqrt{(s-a)(s-b)(s-c)(s-d)}$.

第　八　章

斜角三角形之解法

§49. 斜角三角形之解法　解法已散見於§23,§45,然邊角之値,爲數過繁,則以用下法爲妙.茲更分類擧例以明之.校對用圖解法亦無不可;惟誤差小者,則不易覺察耳.

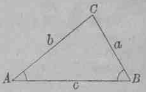
I. 已知二角一邊,如 A, B, c.

(1) 求 C.　$C=180^\circ-(A+B)$.

(2) 求 a.　$a=\dfrac{c}{\sin C}\times\sin A$.

(3) 求 b.　$b=\dfrac{c}{\sin C}\times\sin B$.

(4) 校對.　$a-b=\dfrac{c\sin\frac{1}{2}(A-B)}{\sin\frac{1}{2}(A+B)}$.



例一　$A=71^\circ13'30''$, $B=40^\circ34'15''$, $c=236.54$; 求 C, a, b.

解

$c=236.54$	$\log c=2.37388$	2.37388
$A=\ \ 71^\circ13'30''$	$\log\sin A=9.97626^*$	$\log\sin B=9.81318^*$
$B=\ \ \underline{40^\circ34'15''}$	$-\log\sin C=\underline{0.03221}$	0.03221
$A+B=111^\circ47'45''$	$\log a=2.38235$	$\log b=\underline{2.21927}$
$C=\ \ 68^\circ12'15''$	$a=241.18.$	$b=165.68.$

*此後凡對數末尾之 -10, 均略而不載,計算時須留意之.

校對　　　　$\log c = 2.37388$

$\frac{1}{2}(A-B)=15°19'37''$	$\log\sin\frac{1}{2}(A-B)=9.42214$
$\frac{1}{2}(A+B)=55°53'52''$	$-\log\sin\frac{1}{2}(A+B)=0.08195$
$a-b=75.50.$	$\log(a-b)=1.87797$
	$a-b=75.50.$

例二　$A=71°13'30''$, $B=40°34'15''$, $c=236.54$, 求面積 T.

解　因已知三角形之二角與一邊,故當用(32)式,

$$\log c = 2.37388$$

$$T=\frac{c^2\sin A\sin B}{2\sin C}\qquad \log c^2 = 2\log c = 4.74776$$

$$\log\sin A = 9.97626$$

$$\log\sin B = 9.81318$$

$$-\log\sin C = 0.03221$$

$$-\log 2 = 9.69897$$

$$\log T = 4.26838,\quad \therefore\ T = 18552.$$

II.　已知二邊及一對角,如 a, b, A.

(1)　求 B.　$\sin B=\dfrac{b\sin A}{a}.$　　(A)

(2)　求 C.　　$C=180°-(A+B).$

(3)　求 c.　　$c=\dfrac{a\sin C}{\sin A}.$

(4)　校對.　用(29)式或(30)式皆可.

由 $\sin B$ 而求 B, 通常可得鈍銳二角;究竟二角皆合理與否,則隨問題之性質而異.茲就 A 式分別言之:

(a) $A\geqslant 90^\circ$.

若 $a\leqslant b$, 則 $A\leqslant B$, 而 A, B 皆在 90° 以上;故不可解.

若 $a>b$, 則 $A>B$, 故 B 只能爲銳角;故有一解如甲圖.

(b) $A<90^\circ$.

若 $a\geqslant b$, 則 $A\geqslant B$,而 B 亦只能爲銳角;故有一解如乙圖.

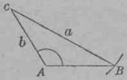
若 $a<b$, 則 $A<B$, 其結果又分三種:

(i) 若 $b\sin A<a$, 則 B 之二値皆合理;故有二解,如丙圖.

(ii) 若 $b\sin A=a$, 則 B 爲直角,卽有一解,如丁圖.

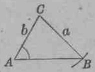
(iii) 若 $b\sin A>a$, 則 $\sin B>1$, 故不可解.

(甲)



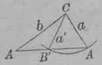
$a>b$

(乙)



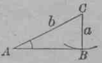
$a\geqslant b$

(丙)



$b>a>b\sin A$

(丁)



$a=b\sin A$

上述之結果不難由圖直接證明之；蓋若由C點向對邊作垂線則有$CD=b\sin A$等.學者試由圖導出其結果，而與上述比較之.

總之解之多寡,大抵可想而知；有難知者,須求$b\sin A$之值以驗之.

以$\log\sin B$驗之亦可,因

$$b\sin A \gtreqless a, \text{則} \sin B \gtreqless 1, \text{即} \log\sin B \gtreqless 0.$$

故若 $\log\sin B>0$, 則無解.

$\log\sin B=0$, 則有一解,即得直角三角形.

$\log\sin B<0$, 則有一解或二解,隨$a>$或$<b$而定；

如有二解,則第二答數B', C', c'各爲

$$B'=180^\circ-B,\qquad C'=180^\circ-(A+B')=B-A,$$

$$c'=\frac{a\sin C'}{\sin A}.$$

例一　已知$a=16$, $b=20$, $A=106^\circ$, 求其餘.

解　因$a<b$,而$A>90^\circ$,故三角形不成立.

例二　已知$a=36$, $b=80$, $A=30^\circ$,求其餘.

解　$b\sin A=80\times\frac{1}{2}=40>a$,故亦不可解.

例三　$a=72.63$, $b=117.48$, $A=80^\circ00'50''$,求其餘.

解　$a=72.63$	$-\log a=8.13888$	
$b=117.48$	$\log b=2.06997$	因 $\log\sin B>0$,
$A=80°00'50''$	$\log\sin A=\underline{9.99337}$	故無解.
	$\log\sin B=0.20222$	

例四　$a=13.2$, $b=15.7$, $A=57°13'15''$, 求其餘.

解　$a=13.2$	$-\log a=8.87943$	$c=b\cos A$
$b=15.7$	$\log b=1.19590$	$\log b=1.14590$
$\underline{A=57°13'15''}$	$\log\sin A=\underline{9.92467}$	$\log\cos A=\underline{9.7[illegible]352}$
因 $\log\sin B=0$,	$\log\sin B=0.00000$	$\log c=1.92942$
故得直角三角形.	$B=90°$,	$c=8.5$.

$\therefore\ C=32°46'45''$.

校對. 用 $a^2=(b+c)(b-c)$.

$b+c=24.2$	$\log(b+c)=1.38382$	$\log a=1.12057$
$b-c=\ 7.2$	$\log(b-c)=\underline{0.85733}$	$\underline{2}$
	$2.24115.$	$2.24114.$

例五　$a=767$, $b=242$, $A=36°53'02''$, 求其餘.

解　$a=767$	$-\log a=7.11520$	$\log a=2.88480$
$b=242$	$\log b=2.38382$	$\log\sin C=9.86970$
$\underline{A=36°53'02''}$	$\log\sin A=\underline{9.77830}$	$-\log\sin A=\underline{0.22170}$
因 $a>b$,	$\log\sin B=9.27732$	$\log c=2.97620$
且 $\log\sin B<0$,	$B=\ 10°54'58''$,	$c=946.68$
故有一解.	$\therefore\ C=132°12'00''$.	

校對. 用 (19) 式.

$$\begin{array}{l|l}
a+b=1009 & \log(a+b)=3.00389 \\
a-b=\ \ 525 & -\log(a-b)=\underline{7.27984} \\
\frac{1}{2}(A+B)=23^\circ54'00'' & \qquad\qquad 0.28373 \\
\frac{1}{2}(A-B)=12^\circ59'02'' &
\end{array}$$

$$\log\tan\frac{1}{2}(A+B)=9.64654$$

$$-\log\tan\frac{1}{2}(A-B)=\underline{0.63722}$$

$$0.28376$$

例六 $a=345.46,\ b=531.75,\ A=26^\circ47'32''$, 求其餘.

解	$\log b=2.72571$	$\log a=2.53840$	2.53840
$a<b$	$\log\sin A=9.65394$	$\log\sin C=9.97495$	9.46942
$\log\sin B<0$,	$-\log a=\underline{7.46160}$	$-\log\sin A=\underline{0.34606}$	$\underline{0.34606}$
故有二解.	$\log\sin B=9.84125$	$\log c=2.85941$	2.35388
	$B=\ 43^\circ56'00''$,	$c=723.45$ 或 225.88.	
	或 $136^\circ04'00''$.		
	$\therefore\ C=109^\circ16'28''$,		
	或 $\ 17^\circ08'28''$,		

校對. 用 (29) 之第一式.

		$\log c=2.85941$	2.35388
$\frac{1}{2}(B+A)=35^\circ21'46''$	$81^\circ25'46''$	$-\log\sin\frac{1}{2}(B+A)=0.23751$	0.00487
$\frac{1}{2}(B-A)=\ 8^\circ34'14''$	$54\ 38'14''$	$\log\sin\frac{1}{2}(B-A)=\underline{9.17327}$	$\underline{9.91143}$
$b-a=186.29.$		$\log(b-a)=2.27019$	2.27018
		$b-a=186.29.$	

III. 已知二邊及夾角,如 a, b, C.

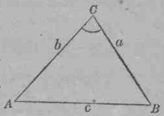
(1) 由 $A+B+C=180°$, 求 $\frac{1}{2}(A+B)$.

(2) 由正切定律,求 $\frac{1}{2}(A-B)$.

(3) 解上二方程式,得 A, B.

(4) 再由正弦定律求 c.

(5) 用對偶公式校對之.



例　$a=12.346,\ b=5.7213,\ C=65°30'10''$, 求 A, B, c.

解

$a+b=18.0673$	
$a-b=\ 6.6247$	$\log(a-b)=0.82117$
$A+B=114°29'50''$	$-\log(a+b)=8.74310$
$\frac{1}{2}(A+B)=\ 57°14'55''$	$\log\tan\frac{1}{2}(A+B)=0.19162$
$\frac{1}{2}(A-B)=\ 29°41'02''$	$\log\tan\frac{1}{2}(A-B)=9.75589$
$A=\ 86°55'57''$	$\frac{1}{2}(A-B)=29°41'02''.$
$B=\ 27°33'53''$	

$$\log b=0.75749$$
$$\log\sin C=9.95903$$
$$-\log\sin B=0.33464$$
$$\log c=1.05116$$
$$c=11.250.$$

校對 $\log c=1.05116$ $\log(a-b)=0.82117$

$\log\sin\frac{1}{2}(A-B)=\underline{9.69480}$ $\log\sin\frac{1}{2}(A+B)=\underline{9.92481}$

0.74596 0.74598

IV. 已知三邊 a b, c.

(1) 求角用公式(25), 卽

$$\tan\frac{A}{2}=\frac{k}{s-a},\quad \tan\frac{B}{2}=\frac{k}{s-b},\quad \tan\frac{C}{2}=\frac{k}{s-c}.$$

其中 $$s=\frac{a+b+c}{2},\quad k=\sqrt{\frac{(s-a)(s-b)(s-c)}{s}}.$$

(2) 校對用 $A+B+C=180°$.

例一 $a=12.653,\ b=17.213,\ c=23.106$, 求 A, B, C.

解 $s=26.486$ $-\log s=8.57698$

$s-a=13.833$ $\log(s-a)=1.14092$

$s-b=\ \ 9.273$ $\log(s-b)=0.96722$

$s-c=\ \ 3.380$ $\log(s-c)=\underline{0.52892}$

$\log k^2=1.21404$

$\log k\ =0.60702$

$\log k=0.60702$	$\log k=0.60702$	$\log k=0.60702$
$\log(s-a)=\underline{1.14092}$	$\log(s-b)=\underline{0.96722}$	$\log(s-c)=\underline{0.52892}$
$\log\tan\frac{A}{2}=9.46610$	$\log\tan\frac{B}{2}=9.63980$	$\log\tan\frac{C}{2}=0.07810$
$\frac{A}{2}=16°18'11''$	$\frac{B}{2}=23°34'21''$	$\frac{C}{2}=\ 50°07'28''$
$A=32°36'22''$.	$B=47°08'42''$.	$C=100°14'56''$

校對. $A+B+C=32°36'22''+47°08'42''+100°14'56''=180°$.

例二　求上題三角形之面積,及內切圓,傍切圓之半徑.

解　(1)　求面積用公式(33).

(2)　求內切圓之半徑用公式(35).

(3)　求傍切圓之半徑用習題十四中之24題.

(4)　校對用習題十四中之26題.

$\log s=1.42302$	$\log T=2.03004$	$T=107.16$
$\log(s-a)=1.14092$	$\log k=0.60702$	$k=4.046$
$\log(s-b)=0.96722$	$\log k_a=0.88912$	$k_a=7.747$
$\log(s-c)=0.52892$	$\log k_b=1.06282$	$k_b=11.556$
$\log T^2=4.06008$	$\log k_c=1.50112$	$k_c=31.704$

校對.

$\log\frac{1}{k}=9.39298$	$\frac{1}{k}=0.24716$
$\log\frac{1}{k_a}=9.11088$	$\frac{1}{k_a}=0.12909$
$\log\frac{1}{k_b}=8.93718$	$\frac{1}{k_b}=0.08653$
$\log\frac{1}{k_c}=8.49888$	$\frac{1}{k_c}=0.03154$

$$\frac{1}{k_a}+\frac{1}{k_b}+\frac{1}{k_c}=0.24716=\frac{1}{k}.$$

習　題　十　五

下列問題如答數未舉出,須自行校對之.

1. 有 $A=46°36'$, $B=54°18'$, $c=479$;

求 $a=354.4$, $b=396.1$, $C=79°06'$.

2. 有 $A=79°59'$, $B=44°41'$, $a=79.5$;

求 $b=56.8$, $c=66.4$, $C=55°20'$.

3. 有 $A=54°34'$, $B=43°56'$, $c=67.9$; 求 a, b, C.

4. 有 $B=78°45.6'$, $C=63°32.9'$, $a=8.875$; 求 b, c, A.

5. 有 $A=69°30.2'$, $B=66°39.4'$, $c=438.3$;

求 $a=592.7$, $b=581.0$, $C=43°50.4'$.

6. 有 $B=48°24'15''$, $C=31°13'00''$, $c=926.74$;

求 $b=1337.2$, $a=1758.9$, $A=100°22'45''$.

7. 求上題三角形之外接圓之半徑 $R=894.03$.

8. 有 $A=64°56'18''$, $B=47°29'11''$, $c=913.45$;

求 $a=895.14$, $b=728.40$, $C=67°34'31''$.

9. 求上題三角形之面積 $T=301360$.

10. 求 2 題之外接圓半徑及面積,並用習題十四中之23題以校對之.

11. 有 $a=840$, $b=485$, $A=21°31'$;

求 $B=12°14'$, $C=146°15'$, $c=1272$.

12. 有 $a=41.4$, $b=52.8$, $A=40°19'$;

求 $B=55°36'$, $C=84°05'$, $c=63.6$;

$B'=124°24'$, $C'=15°17'$, $c'=16.9$.

13. 有 $a=3.25$, $b=2.57$, $A=32°54'$; 求 B, C, c.

14. 有 $b=978.7$, $c=871.6$, $C=38°14.2'$,

求 $B=44°01.5'$, $A=97°44.3'$, $a=1395$;

$B'=135°58.5'$, $A'=5°47.3'$, $a'=142$.

15. 有 $a=342.6$, $b=745.9$, $A=43°35.6'$; 求 C, B, c.

16. 有 $a=486$, $b=347$, $C=51°36'$;

求 $A=83°15'$, $B=45°09'$, $c=383.5$.

17. 有 $a=364$, $b=640$, $C=53°14'$;

求 $A=34°38'$, $B=92°08'$, $c=513$.

18. 有 $a=875$, $b=567$, $C=34°52'$; 求 A, B, c.

19. 有 $b=145.9$, $c=39.90$, $A=92°11.3'$;

求 $B=72°40.7'$, $C=15°08.0'$, $a=152.7$.

20. 有 $c=453.9$, $a=478.1$, $B=35°37.9'$; 求 C, A, b.

21. 有 $a=51.269$, $b=14.687$, $C=62°09'24''$;

求 $A=101°32'32''$, $B=16°18'04''$, $c=46.269$.

22. 有 $a=447.45$, $b=216.45$, $C=116°30'20''$;

求面積 $T=43336$.

23. 若C爲直角,證

$$\tan\frac{1}{2}(A-B)=\frac{a-b}{a+b}$$

24. 有 $a=286$, $b=321$, $c=463$;

求 $A=37°34'$, $B=43°11'$, $C=99°15'$.

25. 有 $a=74.6$, $b=81.9$ $c=90.0$; 求 A, B, C.

26. 有 $a=3.21$, $b=3.61$, $c=4.02$;

求 $A=49°24'$, $B=58°38'$, $C=71°58'$.

27. 求上題三角形之面積,並校對之.

28. 有 $a=33.112$, $b=44.224$, $c=55.336$;

求 $A=36°45'14''$, $B=53°03'08''$, $C=90°11'38''$.

29. 有 $a=46.78$, $b=35.90$, $c=77.00$.

求面積 $T=573.91$.

30. 求上題三角形之內切圓,傍切圓,外接圓之半徑,並用 $k_a+k_b+k_c-k=2D=4R$ 以校對之.

31. 有 $a=4$, $b=5$, $c=6$; 試應用餘弦定律求各角.

32. 有圓內接四邊形 $ABCD$,

$$AB=56,\ BC=33,\ CD=16,\ DA=63;$$

求角 $A=44°43'$, $B=90°$, $C=135°14'$, $D=90°$; 及面積 $Q=1428$.

33. 三角形之兩邊爲10與6,其對角之差爲90°;試求各對角.

34. 三角形之兩角爲 $12°14'$ 及 $21°31'$, 其兩對邊之和爲1325;試證此兩邊爲840, 485.

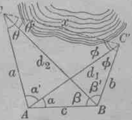
35. 已知三角形之二角為 $57°03'$ 與 $27°38'$，三邊之和為1074；試求其面積 $T=42305$.

36. 某三角形之三角之比為 $5:10:21$. 其最小之邊為3；求他二邊.

§59. 實用例題

(a) 三角形相集合之例.

四邊形 $ABC'C$ 中有 AB, $\angle CAB$, $\angle ABC'$, $\angle C'AB$, $\angle ABC$ 已知 求 CC'.



作法　命 $AB=c$, $CC'=x$, $CA=a$,

$C'B=b$, $AC'=d_1$, $BC=d_2$,

$\angle C'AB=\alpha$,　$\angle CBA=\beta$,

$\angle CAC'=\alpha'$,　$\angle CBC'=\beta'$,

$\angle ACC'=\theta$,　$\angle BCC'=\theta'$,

$\angle AC'C=\phi$,　$\angle BC'C=\phi'$.

(1)　$\triangle ABC$ 中有邊 c 及兩角 A, β 已知,故可求 d_2.

(2)　$\triangle ABC'$ 中有邊 c 及兩角 α, B 已知,故可求 b.

(3)　然則 $\triangle CBC'$ 中有二邊 d_2, b 及其夾角 $\beta'=B-\beta$* 已知,故可求 x.

*本題乃假定 A, B, C', C 四點同在一平面上；如其不然,則問題中尚要附加 CAC', CBC' 兩已知角,乃可以解.

(4) 校對 由 $\triangle ABC$, $\triangle ABC'$ 求 α, d_1. 再由 $\triangle C\cdot C'$ 求 x

實例 今欲架橋 CC' 於湖上. 先於湖畔量直線 $AB=500$ 尺,而測下記各角;求橋長 $CC'=x$ 尺.

$$\angle CAB=105°30'=A,\quad \angle C'BA=95°50'=B,$$

$$\angle C'AB=\ 35°17'=\alpha,\quad \angle CBA=47°32'=\beta.$$

解 (1) 由 $\triangle ABC$ 中,

$$\angle ACB=180°-(A+\beta)=26°58'.$$

由 (15) 式, $$d_2=\frac{c\sin A}{\sin ACB}=\frac{500\times\sin 105°30'}{\sin 26°58'}.$$

由對數表, $d_2=1062.5.$

(2) 在 $\triangle ABC'$ 中,

$$\angle AC'B=180°-(B+\alpha)=48°53'.$$

由 (15) 式, $$b=\frac{c\sin\alpha}{\sin AC'B}=\frac{500\times\sin 35°17'}{\sin 48°53'}.$$

由對數表, $b=383.35.$

(3) 在 $\triangle CBC'$ 中,

$$\frac{1}{2}(\phi'+\theta')=\frac{1}{2}(180°-B+\beta)=65°51'.$$

由 (19) 式, $$\tan\frac{\phi'-\theta'}{2}=\frac{d_2-b}{d_2+b}\tan\frac{\phi'+\theta'}{2}=\frac{679.15}{1445.85}\tan 65°51'.$$

由對數表, $\frac{1}{2}(\phi'-\theta')=46°19'55''$

由 (18) 式，　$x=(d_2-b)\cdot\dfrac{\sin\frac{1}{2}(\phi'+\theta')}{\sin\frac{1}{2}(\phi'-\theta')}=679.15\times\dfrac{\sin 65°51'}{\sin 40°19'55''}$.

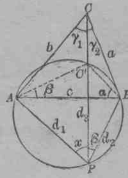
由對數表，$x=856.7$.

校對之法亦略同上，今略之.

(b) 三點問題.

已知三點 A, B, C 之相互位置，及三線 AB, BC, CA 在第四點 P 之對角，求各點與 P 之距離.

[AB 距離，在 P 視之，則 $\angle APB$ 稱曰 AB 在 P 之**對角**.]



作法　命 $AB=c$, $BC=a$, $CA=b$, AC 在 P 之對角爲 α, BC 在 P 之對角爲 β, P 與 A, B, C 之距離各爲 d_1, d_2, d_3. 通過 ABP 作一圓截 PC 或其延長線於 C'，則

$$\angle BAC'=\angle BPC=\beta,$$

$$\angle ABC'=\angle APC=\alpha.$$

(1)　$\triangle ABC'$ 中已知 c 邊及 α, β 兩鄰角，故可求得 AC'.

(2)　$\triangle ABC$ 中已知三邊，故可求得 a 之對角 A.

(3)　$\triangle ACC'$ 中已知二邊 b, AC' 及夾角 $\angle CAC'=A-\beta$，故可求得 $\angle ACC'=\gamma_1$.

(4)　$\triangle APC$ 中已知一邊 b 及兩角 α, γ_1，故可求得 d_1, d_3.

(5) 同理由 $\triangle BCC'$ 求 $\angle BCC'=\gamma_2$, 再由 $\triangle BPC$ 可得 d_2, d_3.

(6) 校對. 將(4)之 d_3 與(5)之 d_3 兩相比較.

實例 有 A, B, C 三要塞; A, B 相距 4 公里, B, C 相距 2 公里, A, C 相距 3 公里. 又有砲臺 P; AC, BC 在 P 之對角各為 $34°30'$ 及 $23°45'$. 求要塞與砲臺之距離.

解 用前圖命 $a=2$, $b=3$, $c=4$, $\alpha=34°30'$, $\beta=23°45'$, 則 d_1, d_2, d_3 即所欲求之距離.

(1) 在 $\triangle ABC'$, 應用正弦定律, 則有

$$AC'=\frac{c\sin\alpha}{\sin AC'B}=\frac{c\sin\alpha}{\sin(\alpha+\beta)}=\frac{4\sin 34°30'}{\sin 58°15'}=2.6644.$$

$$BC'=\frac{c\sin\beta}{\sin(\alpha+\beta)}=\frac{4\sin 23°45'}{\sin 58°15'}=1.8945.$$

(2) 在 $\triangle ABC$ 應用餘弦定律, 則有

$$\cos A=\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}=\frac{3^2+4^2-2^2}{2\cdot 3\cdot 4}=0.8750.$$

$$\cos B=\frac{c^2+a^2-b^2}{2ca}=\frac{4^2+2^2-3^2}{2\cdot 4\cdot 2}=0.6875.$$

$$A=28°57' \qquad\qquad B=46°34'.$$

(3) 在 $\triangle ACC'$, $\triangle BCC'$, 各應用正切定律, 則有

$$\tan\frac{AC'C-\gamma_1}{2}=\frac{b-AC'}{b+AC'}\tan\frac{AC'C+\gamma_1}{2}.$$

$$\tan\frac{BC'C-\gamma_2}{2}=\frac{a-BC'}{a+BC'}\tan\frac{BC'C+\gamma_2}{2}.$$

因　$\angle CAC'=A-\beta=5°12'$,　　$\angle CBC'=B-\alpha=12°04'$.

$$\frac{AC'C+\gamma_1}{2}=\frac{180°-5°12'}{2}=87°24'.$$

$$\frac{BC'C+\gamma_2}{2}=\frac{180°-12°04'}{2}=83°58'.$$

故　$$\tan\frac{AC'C-\gamma_1}{2}=\frac{0.3356}{5.6644}\tan 87°24'.$$

$$\tan\frac{BC'C-\gamma_2}{2}=\frac{0.1055}{3.8945}\tan 83°58'.$$

$$\frac{AC'C-\gamma_1}{2}=55°32',\quad \gamma_1=87°24'-55°32'=34°52'.$$

$$\frac{BC'C-\gamma_2}{2}=14°32',\quad \gamma_2=83°58'-14°23'=69°35'.$$

(4) 在 $\triangle APC$, $\triangle BPC$, 各應用正弦定律,則有

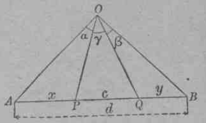
$$d_1=\frac{b\sin\gamma_1}{\sin\alpha}=\frac{3\sin 34°52'}{\sin 34°30'}=3.0277.$$

$$d_2=\frac{a\sin\gamma_2}{\sin\beta}=\frac{2\sin 69°35'}{\sin 23°45'}=4.6539.$$

又　$$d_3=\frac{b\sin CAP}{\sin\alpha}=\frac{b\sin(\alpha+\gamma_1)}{\sin\alpha}=\frac{3\sin 69°22'}{\sin 34°30'}=4.967.$$

$$d_3=\frac{a\sin(\beta+\gamma_2)}{\sin\beta}=\frac{2\sin 93°20'}{\sin 23°45'}=4.967.$$ ［校對］

(c) 應用聯立方程式之例



A, P, Q, B 四點同在一直線. AP, PQ, QB 在 O 點之對角爲 α, γ, β, 又知 $AB=d$, $PQ=c$. 求 AP 及 QB.

作法 命 $AP=x$, $QB=y$. 因題中各三角形之已知條件均不完備, 故不能次第求解. 今於 $\triangle OAP$, $\triangle OAQ$, $\triangle OQB$, $\triangle OPB$, 各應用正弦定律; 則有

$$\frac{x}{\sin\alpha}=\frac{OP}{\sin A}, \qquad (A) \qquad\qquad \frac{x+c}{\sin(\alpha+\gamma)}=\frac{OQ}{\sin A}, \qquad (B)$$

$$\frac{y}{\sin\beta}=\frac{OQ}{\sin B}, \qquad (C) \qquad\qquad \frac{y+c}{\sin(\beta+\gamma)}=\frac{OP}{\sin B}. \qquad (D)$$

以 (B) 除 (A), 以 (D) 除 (C), 得

$$\frac{x}{x+c}\cdot\frac{\sin(\alpha+\gamma)}{\sin\alpha}=\frac{OP}{OQ}, \quad \frac{y}{y+c}\cdot\frac{\sin(\beta+\gamma)}{\sin\beta}=\frac{OQ}{OP}.$$

兩兩相乘且稍整頓之, 得

$$\frac{xy}{(x+c)(y+c)}=\frac{\sin\alpha\sin\beta}{\sin(\alpha+\gamma)\sin(\beta+\gamma)}. \qquad (E)$$

由題又知 $\qquad x+y=d-c. \qquad (F)$

(E), (F) 聯立方程式中, 只含二未知數 x, y; 故可以解.

又法 令各三角形共同之高爲 h, 則其面積各如下:

$$APO=\frac{1}{2}xh=\frac{1}{2}AO\cdot PO\ \sin\alpha,$$

$$QBO=\frac{1}{2}yh=\frac{1}{2}QO\cdot BO\ \sin\beta,$$

$$PQO=\frac{1}{2}ch=\frac{1}{2}PO\ QO\cdot\sin\gamma,$$

$$ABO=\frac{1}{2}dh=\frac{1}{2}AO\cdot BO\cdot\sin(\alpha+\beta+\gamma).$$

前二式相乘,以後二式連除之,得

$$\frac{xy}{cd}=\frac{\sin\alpha\sin\beta}{\sin\gamma\sin(\alpha+\beta+\gamma)}. \qquad (G)$$

由 (G) 與 (F) 解之,亦得 x, y.

實例　A, B 兩市隔河相對,其間有小島 $PQ=1$ 公里.自河上流 O 處測得 $\angle AOP=45°35'$, $\angle QOB=25°10'$, $\angle POQ=8°28'$;又知兩市相距11公里;求河廣 AP 及 QB.

解　仍用前圖之記號;則

$$d=11,\ c=1,\ a=45°35',\ \beta=25°10',\ \gamma=8°28';$$

$$\alpha+\gamma=54°03',\quad \beta+\gamma=33°38'.$$

代入 (E) 式,　$\dfrac{xy}{(x+1)(y+1)}=\dfrac{\sin 45°35'\ \sin 25°10'}{\sin 54°05'\ \sin 33°38'}$

由對數表,　$=0.67743=k.$

由 (F) 式,　$x+y=d-c=10.$

由上兩式消 y,　$x^2-10x+\dfrac{11k}{1-k}=0.$

以k之值代之, $x^2-10x+23.10=0.$

解之, $x=3.62$ 或 $6.38.$

而 $y=6.38$ 或 $3.62.$

校對. 由(G)式求xy,與上面x,y之積比較;知兩方皆爲 $xy=23.10.$

習題十六

下列各題如答數未載在後,須自行校對之.

1. 有人沿路直行,見亭在前左方,與路成$45°$之角;再行7里後,則亭在後左方,與路成$30°$之角;問亭離路若干里?

2. 有兩人距1公里之地相對而立;同時各測飛機之高度,得$50°$與$43°$;求飛機之高.

3. 兩山與市相距爲9里與13里,自市測兩山間所含之角爲$71°40'$;求兩山之距離.

4. 有甲乙丙三島;甲乙相距71.2公里,乙丙相距28.9公里,甲丙相距60.1公里;又知丙在甲之正北,問乙在甲何方?

5. 有三角形之地面,其邊爲229, 109, 312公尺.今於其中開一最大圓形之路;試求其圓之半徑.

6. 在山麓測山頂之仰角爲25°；沿10°之山坡前行6里，再測其仰角，得37°. 求山麓至山頂之空中距離.

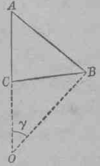
7. 隔河測對岸之塔，得仰角α；後退d尺，再測其仰角，得β 證塔高與河廣各爲

$$x=\frac{d}{\cot\beta-\cot\alpha},\ y=\frac{d\tan\beta}{\tan\alpha-\tan\beta}.$$

如 $\alpha=65°00'$，$\beta=32°00'$，$d=50$ 尺；問塔高、河廣各爲若干尺?

8. 有兩條路交叉於A，其間成28°30′之角；又有一條路與前路交叉於B及C；AB爲4.50公里，AC爲6.45公里. 有二人各乘自行車同時由A處分路出發，經交叉路後，相對而行，適相遇於BC之中央，費時25分；試求各人之速度.

9. 前題之二人若速度相同，問遇於何處?



10. 甲船以每時24里之速度向北西前進；乙船在其南以每時32里之速度同時前進，5時之後追及之.問乙船取何針路?初時兩船相距幾里?

11. 某山有三峯A,B,C；其相互距離爲$AB=c$，$BC=a$，$CA=b$. 自O處望A,C二峯在一直線，又$\angle COB=\gamma$. 試證

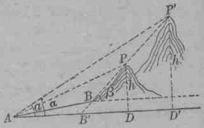
$$BO=\frac{2\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}}{b\sin\gamma}.$$

如　$a=17.15$ 公里, $b=9.32$ 公里,

$c=10.65$ 公里, $\gamma=15°35'$;

問 BO 爲若干公里?

12. 有高低二山,與平地上 A 點同在一直立面內由 A 測兩山之高度,各得 α' 與 α; 沿山坡前行若干里,觀高山適隱於低山之後,其高度爲 β. 如已知低山之高爲 h, 證高山之高爲



$$h'=h\frac{\sin\alpha'}{\sin\alpha}\cdot\frac{\sin(\beta-\alpha)}{\sin(\beta-\alpha')}.$$

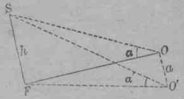
如 $\alpha=25°30'$, $\alpha'=34°20'$, $\beta=42°15'$, $h=1595$ 公尺, 求 h'.

$$\left[\frac{h'}{h}=\frac{P'B'}{PB'}=\frac{P'B'}{AB'}\cdot\frac{AB'}{PB'}\ \text{再用正弦定律.}\right]$$

13. 有旗竿 SF; 自其東方 O 處望之, 則高度爲 α; 自 O 南行 a 尺至 O' 處再望之, 則高度爲 α'. 如 F, O, O' 三點同在一水平面上,試證旗竿之高爲

$$h=\frac{a\tan\alpha\tan\alpha'}{\sqrt{\tan^2\alpha-\tan^2\alpha'}}.$$

設 $\alpha=35°27'$, $\alpha'=25°16'$, $a=200$ 尺, 試計算 h.



[自 $\triangle SFO$, $h=OF\cdot\tan\alpha$;

自 $\triangle SFO'$, $h=O'F\cdot\tan\alpha'$;

自 $\triangle OFO'$, $\overline{O'F}^2-\overline{OF}^2=a^2$; 消去 $OF, O'F$ 便得 h.]

14. 正五邊形之各邊爲12尺, 試求其面積.

15. 三角形之邊各爲17, 20, 27; 求交於最長邊之中線.

16. 同上三角形,求其最大角之二等分線之長.

17. 已知三角形之一邊 c 及二角 A, B; 試證自 A, B, C 至對邊之垂線 p_A, p_B, p_C 各爲

$$p_A=c\sin B,\quad p_B=c\sin A,$$

$$p_C=\frac{c\sin A\sin B}{\sin(A+B)}.$$

18. 圓之半徑爲 15.6, 其弓形之底邊爲 21.3, 求弓形之面積.

19. 正五邊形之各邊爲10, 求其對角線之長.

20. 正七邊形之各邊爲12, 求其對角線之長.

21. 三角形之周圍爲25, 兩角爲55° 及 65°; 試求各邊之長至小數三位止.

22.* 已知三角形之一邊 a, 他二邊之和 l, 及 a 之對角 A; 求他二角.

$\left[\cos\frac{1}{2}(B-C)=\frac{t}{a}\sin\frac{A}{2},\ \frac{1}{2}(B+C)=90^\circ-\frac{A}{2},\text{從此得}B\text{及}C.\right]$

23. 三角形之二邊及夾角各爲 13.5, 17.6, 35°16′. 今欲添削之使成同面積之正三角形;試求此正三角形之一邊.

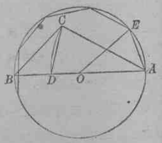
24. 如將前題之三角形,改爲同周圍之正三角形;試求此正三角形之一邊.

25. 有五邊形與正十邊形,周圍相等;試求其面積之比.如面積之和爲536平方寸,問其面積各幾何?

26. 三角形之各頂點之座標爲 (0, 0), (471.32, 0), (896.41, 230.00);求其內切圓心之座標.

27. 以圓內接正三角形之邊之半,作爲正七邊形之一邊,而畫同圓內接正七邊形;問各邊與其所對之圓心角所差幾何?

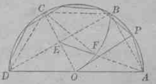
28. 圓內接正九邊形之近似畫法如下:以圓徑 AB 爲底,以同圓內接正方形之一邊 AC 及正六邊形之一邊 BC 爲邊作 ABC 三角形;又以 A 爲中心,AC 爲半徑,畫一圓弧,截圓徑



AB 於 D; 則 CD 略等於九邊形之一邊. 試問如是之邊及其圓心角有何誤差?

$$\left[CD=2AC\sin\frac{A}{2},\quad \angle AOE=2\sin^{-1}\frac{CD}{AB}\right]$$

29. 圓內接正十一邊形之近似畫法如下: 設 A, B, C, D 爲同圓內接正六邊形之相鄰四頂點; 中分 BD 於 E, 以 C 爲中心, CB 爲半徑, 畫一圓弧, 截 AE 於 F, 則 EF 略等於圓內接正十一邊形之一邊. 問所得之邊及其圓心角, 與眞正之邊角有何差異?



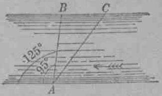
[命半徑爲 r, 則直角三角形 ABE 之二邊 AB, BE 均可以 r 表之; 故可求得 $\angle BEF$. 然則三角形 CEF 中, $\angle CEF=90^\circ+\angle AEB$, 又二邊 CE, CF 亦可以 r 表之; 故可求得 EF.]

習題十七

1. 二力同加於一點; 如二力各爲 47 斤與 52 斤, 其夾角爲 $37^\circ 27'$; 求其合力.

2. 將 100 $dyne$ 之力分解爲二, 與原力各成 $25^\circ 00'$ 及 $35^\circ 00'$ 之角; 試求其分力.

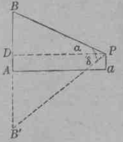
3. 有河寬360公尺;有渡船與河流作125°之角而前進,但因水流之結果,其進行之方向,實只與水流成95°之角;問此船自此岸到彼岸所航行之距離?如無水流,則其距離幾何?



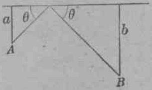
4. 求上題水流之速度.若過河時間爲5分,求此船本身之速度.

5. 設3題之船在靜水中每時能行5公里;求渡河時間及水流速度.

6. 置經緯儀於 P 點,測對岸之樹 AB,得仰角 $\alpha=47°32'$;又測水中樹影,得俯角 $\delta=54°36'$;設經緯儀高於水面 $a=4.5$ 尺,求樹之高.

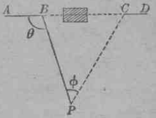


7. 有臺球 A, B 與臺之一邊相距各爲 $a=2.53$, $b=4.13$, 兩球相距爲 $c=5.84$;今欲擊 A 球使由臺邊反跳而撞於 B 球;問須從何方向擊之.



8. 欲延長 AB 直線;因 B 之前方有障礙物,乃於 B 處

望$\angle ABP=\theta$之向量$BP=a$,又於P處望$\angle BPC=\phi$之方向,引PC,更自C引CD使適成AB之延長線;然則

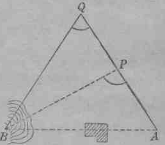


$$PC=\frac{a\sin\theta}{\sin(\theta-\phi)},$$

$$\angle PCD=180^\circ+\phi-\theta,$$

試證之.若$\theta=154^\circ$, $\phi=65^\circ$, $a=200$尺,試計算PC及$\angle PCD$.

9. B為不可到之地,在A處亦不能望見之;今欲測AB距離,特設APQ直線;在P, Q二處均可以望見B,於是作下列之觀測:



$$AP=236.7\text{ 尺},$$

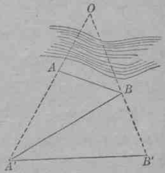
$$\angle APB=142^\circ 37.3',$$

$$PQ=215.9\text{ 尺},$$

$$\angle AQB=\ \ 76^\circ 13.8',$$

試計算AB.

10. O為不可到之地,某人在A處欲測其遠,又無測角機械;乃於其傍擇B點,又在OA延線上擇A'點,在OB



延線上擇B'點,而量

$AB=279.5$ 尺, $AA'=150$ 尺,

$BB'=250$ 尺; $BA'=315.8$ 尺,

$A'B'=498.7$ 尺; 試求 AO.

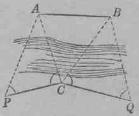
11. A, B 二地均不可到,在C處能並見之,在他處則一見一不見.今擇P, Q二處,測

$CP=425.3$ 尺, $CQ=405.4$ 尺,

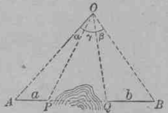
$\angle ACP=42°35.3'$, $\angle APC=37°15.4'$,

$\angle BCQ=58°04.7'$, $\angle BQC=53°14.8'$,

$\angle ACB=65°10.5'$; 試求 AB.



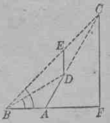
12. PQ之間爲不可到之處.今於其直線上擇A, B二點,量得$AP=a$, $BQ=b$; 又於O處測得AP, BQ, PQ之對角各爲α, β, γ; 試證$PQ=x$,可由下式計算之:



$$\frac{(a+x)(b+x)}{\sin(\alpha+\gamma)\sin(\beta+\gamma)}=\frac{ab}{\sin\alpha\sin\beta}.$$

13. 甲乙丙三家公設一井於其等距離處;但知甲乙相距25.3公尺,乙丙相距17.8公尺,甲丙相距19.4公尺;求井與各家之距離.

14. 有山其高 $CF=550$ 尺；山間有塔 ED，在平地 B 處望塔頂 E 與山頂 C 適相重，又塔頂與塔基之仰角各為 $29°27'$ 與 $15°30'$，自 B 至山麓 A 為 600 尺；求塔高及山麓至塔基之距離.



15. 連結各地點成三角網如下圖，測其間之角得

(1) $37°44'16''$，(2) $63°21'53''$，

(3) $78°53'51''$，(4) $93°41'23''$，

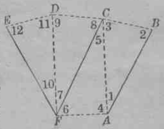
(5) $25°18'17''$，(6) $61°00'20''$，

(7) $57°31'03''$，(8) $68°10'11''$，

(9) $54°18'46''$，(10) $35°08'11''$，

(11) $101°53'06''$，(12) $42°58'43''$，

又知 $AB=4403.2$ 公尺；試計算 EF.



16. 遠方有二船各發一砲，某人測其見光至聞聲之時間得 5 秒與 7 秒，又二船與觀測者間作 $37°45'$ 之角；假定音波每秒進行 333 公尺，求二船之距離，並討論答數之精度.

17. 某人在船中，見南 $22°30'$ 東有二島適在一直線，待船向南東前進 8 公里後，見一島在北 $65°13'$ 西，一島在北

76°46′ 西;求兩島之距離.

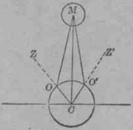
18. 一船以每時36里之速度開向北北東;又一船在其東150里,以每時45里之速度同時直往追之;問此船當取何針路,幾時追及?

19. 船之前方有一燈臺;其始因沒於水平線下,須登船桅之頂,乃可望見;待船前進45分鐘後,則在艙面亦得見之.假設地爲圓形,其半徑6368公里,桅頂與艙面各比海面高24公尺與4公尺;問此船之速度如何?

20. 登海拔 a 尺之高山,俯視海天相連之處,知視線與水平面成 θ 角,然則地直徑如下式;試證之:

$$d=\frac{2a\cos\theta}{1-\cos\theta}\text{尺}$$

21. 自 O, O' 二地同時測月 M 之天頂距離,得 $\angle ZOM=35°25'20''$ 及 $\angle Z'O'M=40°10'50''$; 如二地經度相同,緯度之差爲 $\angle ZOZ'=74°26'18''$.假定地半徑爲6367.5公里,問月離地若干公里?



第 九 章

兩角和及較之三角函數

§51. 兩角之和之正餘弦 設三角形之各邊與其對角爲 a, b, c, A, B, C，則由正弦定律，知

$$a=d\sin A,\ b=d\sin B,\ c=d\sin C.$$

又由投影定理得

$$c=a\ \mathrm{co}\ B+b\cos A.$$

以前三式中 a, b, c 之値代入上式，且去其公因子 d，便成

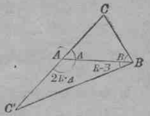
$$\sin C=\sin A\cos B+\cos A\sin B.$$

又因 $$C=180^\circ-(A+B),$$

$$\sin C=\sin(A+B).$$

故 $$\sin(A+B)=\sin A\cos B+\cos A\sin B. \qquad (38)$$

設 $B<R$，作 $C'B\perp CB$，延長 CA，使截 $C'B$ 於 C'．就 $\triangle ABC'$ 而論，



$\angle BAC'=2R-A, \angle ABC'=R-B,$

故仿 (38) 式得

$\sin(\overline{2R-A}+\overline{R-B})$

$$=\sin(2R-A)\cos(R-B)+\cos(2R-A)\sin(R-B)$$

$$-\cos(A+B)=\sin A\sin B-\cos A\cos B.$$

或 $$\cos(A+B)=\cos A\cos B-\sin A\sin B. \tag{39}$$

例 已知45°與30°各函數之值,求 $\sin 75°$ 及 $\cos 75°$

解 $\sin 75°=\sin(45°+30°)=\sin 45°\cos 30°+\cos 45°\sin 30°$

$$=\frac{1}{\sqrt{2}}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{\sqrt{2}}\cdot\frac{1}{2}=\frac{1}{4}(\sqrt{6}+\sqrt{2}).$$

$\cos 75°=\cos(45°+30°)=\cos 45°\cos 30°-\sin 45°\sin 30°$

$$=\frac{1}{\sqrt{2}}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{1}{\sqrt{2}}\cdot\frac{1}{2}=\frac{1}{4}(\sqrt{6}-\sqrt{2}).$$

上述之 A, B, 乃三角形中之角,其値本不能大於 $2R$; 然和角定理實則施諸任何二角而不謬,茲證如下:

設 $A<R$, $B<R$, 則 $A+B<2R$; 又設 $A_1=A\pm R$, 則

$$\sin A_1=\pm\cos A,\ \cos A_1=\mp\sin A.$$

由(37), $$\sin(A_1+B)=\sin(A\pm R+B)=\pm\cos(A+B)$$

$$=\pm[\cos A\cos B-\sin A\sin B]$$

$$=\pm\cos A\cos B\mp\sin A\sin B$$

$$=\sin A_1\cos B+\cos A_1\sin B.$$

同理 $$\cos(A_1+B)=\cos A_1\cos B-\sin A_1\sin A.$$

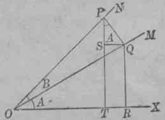
是則 A 若增減一直角爲 A_1, 和角定理仍能成立.同理 B 若增減一直角爲 B_1, 和角定理仍能成立.且 A_1 或 B_1 或

兩者又可增減一直角. 卽 A 或 B 或兩者可增減 $2R$ 而亦合. 如是遞推之, 則 (37), (38) 式中之 A, B, 可以

$$A_n = A \pm nR, \qquad B_n = B \pm mR.$$

代之而無不合; m, n 爲正整數, A_n, B_n 則任意之角也.

§ 52. 和角定理別證 命 $\angle XOM = A$, $\angle MON = B$, 則 $\angle XON = A + B$. 於 ON 上取 P 點, 引 $PT \perp OX$ 引 $PQ \perp OM$, 更引 QR OX, $QS \parallel OX$; 則 $\triangle QOR$, $\triangle QPS$ 爲相似形, 而 $\angle QPS = A$,



$$\sin(A+B) = \frac{TP}{OP} = \frac{TS+SP}{OP} = \frac{RQ}{OP} + \frac{SP}{OP}$$

$$= \frac{RQ}{OQ} \cdot \frac{OQ}{OP} + \frac{SP}{QP} \cdot \frac{QP}{OP}$$

$$= \sin A \cdot \cos B + \cos A \cdot \sin B.$$

$$\cos(A+B) = \frac{OT}{OP} = \frac{OR-TR}{OP} = \frac{OR}{OP} - \frac{SQ}{OP}$$

$$= \frac{OR}{OQ} \cdot \frac{OQ}{OP} - \frac{SQ}{QP} \cdot \frac{QP}{OP}$$

$$= \cos A \cdot \cos B - \sin A \cdot \sin B.$$

$A+B$ 雖不小於直角證之之法亦同上;但要注意各線之

正負耳.

§53. 兩角之較之正餘弦 和角定理可施諸任何二角而不謬;故今若以 $-B$ 代 B,則有

$$\sin(A-B)=\sin A\cos(-B)+\cos A\sin(-B),$$

$$\cos(A-B)=\cos A\cos(-B)-\sin A\sin(-B).$$

即 $$\sin(A-B)=\sin A\cos B-\cos A\sin B. \quad (40)$$

$$\cos(A-B)=\cos A\cos B+\sin A\sin B. \quad (41)$$

例 已知 45° 與 30° 各函數之值,求 $\sin 15^\circ$ 及 $\cos 15^\circ$.

解 $\sin 15^\circ=\sin(45^\circ-30^\circ)=\sin 45^\circ\cos 30^\circ-\cos 45^\circ\sin 30^\circ$

$$=\frac{1}{\sqrt{2}}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{1}{\sqrt{2}}\cdot\frac{1}{2}=\frac{1}{4}(\sqrt{6}-\sqrt{2}).$$

$\cos 15^\circ=\cos(45^\circ-30^\circ)=\cos 45^\circ\cos 30^\circ+\sin 45^\circ\sin 30^\circ$

$$=\frac{1}{\sqrt{2}}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{\sqrt{2}}\cdot\frac{1}{2}=\frac{1}{4}(\sqrt{6}+\sqrt{2}).$$

習題十八

1. 試用 $15^\circ=60^\circ-45^\circ$ 之關係,求 15° 之正餘弦.

2. 已知 $\sin x=\frac{3}{5}$, $\cos x=\frac{4}{5}$, $\sin y=\frac{8}{17}$, $\cos y=\frac{15}{17}$; 求 $\sin(x+y)$ 及 $\cos(x+y)$.

3. 試以 $90^\circ=60^\circ+30^\circ$ 之關係,求 90° 之正餘弦.

4. 試以 $0^\circ=30^\circ-30^\circ$ 之關係,求 0° 之正餘弦.

5. 試以和角定理及較角定理求下各式:

$\sin(90^\circ-x)$, $\cos(90^\circ+x)$, $\sin(180^\circ+x)$, $\cos(270^\circ-x)$,

$\sin(360^\circ-y)$, $\cos(45^\circ-y)$, $\sin(30^\circ+y)$, $\cos(60^\circ-y)$.

6. 試證 $\sin(A+B)+\sin(A-B)=2\sin A\cos B$,

$\sin(A+B)-\sin(A-B)=2\cos A\sin B$,

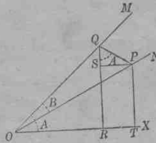
$\cos(A+B)+\cos(A-B)=2\cos A\cos B$,

$\cos(A+B)-\cos(A-B)=-2\sin A\sin B$

7. 若上題 $A=B$, 證 $\sin 2A=2\sin A\cos A$,

$\cos 2A=2\cos^2 A-1=1-2\sin^2 A$.

8. 試由右圖證明較角定理: 圖中 $\angle XOQ=A$, $\angle MON=B$, $\angle XON=A-B$, $QR\perp OX$, $QP\perp OM$, $PT\perp OX$, $\angle SQP=A$. [何故?]



9. 試證習題十六之7之答數又可書爲

$$x=\frac{a\sin\alpha\sin\beta}{\sin(\alpha-\beta)},\quad y=\frac{a\cos\alpha\sin\beta}{\sin(\alpha-\beta)}.$$

10. 試證習題十六之13之答數又可書爲

$$h=\frac{a\sin\alpha\sin\alpha}{\sqrt{\sin(\alpha-\alpha')\sin(\alpha+\alpha')}}.$$

11. 證 $\tan A \pm \tan B = \dfrac{\sin(A \pm B)}{\cos A \cos B}$,

並 $\dfrac{\tan A + \tan B}{\tan A - \tan B} = \dfrac{\sin(A+B)}{\sin(A-B)}$.

12. 證 $\sin(n+1)\theta = \sin n\theta \cos\theta + \cos n\theta \sin\theta$,

並 $\sin \overline{n^\circ + 1^\circ} = \sin n^\circ \cos 1^\circ + \cos n^\circ \sin 1^\circ$,

$\cos \overline{n^\circ + 1^\circ} = \cos n^\circ \cos 1^\circ - \sin n^\circ \sin 1^\circ$.

式中n爲任意正整數

是以若知1°之正餘弦,則2°, 3°等之正餘弦可次第計算之.

13. 證 $\cos\left(A + \dfrac{\pi}{4}\right) + \sin\left(A - \dfrac{\pi}{4}\right) = 0$,

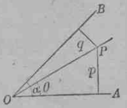
及 $\sin\left(A + \dfrac{\pi}{4}\right) + \cos\left(A - \dfrac{\pi}{4}\right) = \sqrt{2}(\sin A + \cos A)$.

14. 證

$\cos A \sin(B-C) + \cos B \sin(C-A) + \cos C \sin(A-B) = 0$,

$\sin A \sin(B-C) + \sin B \sin(C-A) + \sin C \sin(A-B) = 0$.

15 二直線OA, OB相交於O,其夾角爲α;有P點與此二直線之距離各爲p與q,試求$\angle AOP$.



16. 有三角形,由其二邊b, c及夾角A計算其面積,得T.其後發見有ϵ之誤差,試證眞正之面積爲

$$T'=T(\cos\epsilon+\sin\epsilon\cot A)$$

17　證

$$\sin(A+B)\sin(A-B)=\sin^2 A-\sin^2 B=\cos^2 B-\cos^2 A,$$

$$\cos(A+B)\cos(A-B)=\cos^2 A-\sin^2 B=\cos^2 B-\sin^2 A.$$

18.　設有任意三角x, y, z; 證

$$\sin(x+y+z)=\sin x\cos y\cos z+\sin y\cos z\cos x$$
$$+\sin z\cos x\cos y+\sin x\sin y\sin z,$$

$$\cos(x+y+z)=\cos x\cos y\cos z-\cos x\sin y\sin z$$
$$-\cos y\sin z\sin x-\cos z\sin x\sin y.$$

19.　證　$\sin(x+y-z)+\sin(x-y+z)+\sin(-x+y+z)$

$$=\sin(x+y+z)+4\sin x\sin y\sin z,$$

$$\cos(x+y-z)+\cos(x-y+z)+\cos(-x+y+z)$$

$$=4\cos x\cos y\cos z-\cos(x+y+z).$$

20.　由　$c=a\cos B+b\cos A,$

$$a=b\cos C+c\cos B,$$

$$b=c\cos A+a\cos C,$$

消去a, b, c, 可得

$$\cos^2 A+\cos^2 B+\cos^2 C+2\cos A\cos B\cos C=1;$$

試證之.更將此式作爲$\cos C$之二次方程式而解之,得

$$\cos C=-\cos A\cos B\pm\sin A\sin B.$$

雙號之負號,不適於用;[何故?]又因$C=180^\circ-(A+B)$,得

$$\cos(A+B)=\cos A\cos B-\sin A\sin B.$$

此爲(39)之又一證.

§54. 兩角和較之正切

$$\tan(A+B)=\frac{\sin(A+B)}{\cos(A+B)}=\frac{\sin A\cos B+\cos A\sin B}{\cos A\cos B-\sin A\sin B}.$$

分子分母各以$\cos A\cos B$除之,終得

$$\tan(A+B)=\frac{\tan A+\tan B}{1-\tan A\tan B}. \tag{42}$$

若易B爲$-B$,又得

$$\tan(A-B)=\frac{\tan A-\tan B}{1+\tan A\tan B}. \tag{43}$$

§55. 倍角之函數　若$B=A$,則(38),(39),(42)各成爲

$$\left.\begin{aligned}&\sin 2A=2\sin A\cos A,\\&\cos 2A=\cos^2 A-\sin^2 A\\&\qquad=1-2\sin^2 A=2\cos^2 A-1,\\&\tan 2A=\frac{2\tan A}{1-\tan^2 A}.\end{aligned}\right\} \tag{44}$$

§56. 半角之函數　將上第二式之A易爲$\frac{A}{2}$,解之,得

$$\left.\begin{aligned}&\sin\frac{A}{2}=\pm\sqrt{\frac{1-\cos A}{2}},\\&\cos\frac{A}{2}=\pm\sqrt{\frac{1+\cos A}{2}},\\\text{兩式相除,}\quad&\tan\frac{A}{2}=\pm\sqrt{\frac{1-\cos A}{1+\cos A}}.\end{aligned}\right\} \tag{45}$$

§ 57. 正弦及餘弦之化和較為積法　由 (38), (39), (40), (41), 得

$$\sin(A+B)+\sin(A-B)=\ \ 2\sin A\cos B,$$

$$\sin(A+B)-\sin(A-B)=\ \ 2\cos A\sin B,$$

$$\cos(A+B)+\cos(A-B)=\ \ 2\cos A\cos B,$$

$$\cos(A+B)-\cos(A-B)=-2\sin A\sin B.$$

更命　　$A+B=x,\qquad A-B=y,$

則　　$A=\frac{1}{2}(x+y);\ B=\frac{1}{2}(x-y);$

代入上四式,各得

$$\left.\begin{aligned}\sin x+\sin y&=\ \ 2\sin\frac{x+y}{2}\cos\frac{x-y}{2},\\ \sin x-\sin y&=\ \ 2\cos\frac{x+y}{2}\sin\frac{x-y}{2},\\ \cos x+\cos y&=\ \ 2\cos\frac{x+y}{2}\cos\frac{x-y}{2},\\ \cos x-\cos y&=-2\sin\frac{x+y}{2}\sin\frac{x-y}{2}.\end{aligned}\right\}\qquad(46)$$

上四式能將正餘弦之和較化爲積,對數計算時多用之.

例一　化 $\sin 2\phi+\sin 4\phi+\sin 6\phi$ 爲積.

解　由 (46) 第一式,

$$\sin 2\phi+\sin 4\phi=2\sin\frac{1}{2}(2\phi+4\phi)\cos\frac{1}{2}(2\phi-4\phi)$$

$$=2\sin 3\phi\cos\phi.$$

由 (44) 第一式, $\sin 6\phi=2\sin 3\phi\cos 3\phi$.

加之 $\sin 2\phi+\sin 4\phi+\sin 6\phi=2\sin 3\phi\ (\cos 3\phi+\cos\phi)$.

由 (46) 第三式 $\cos 3\phi+\cos\phi=2\cos 2\phi\cos\phi$,

故 $\sin 2\phi+\sin 4\phi+\sin 6\phi=4\sin 3\phi\cos 2\phi\cos\phi$.

例二 若 $A+B+C=180^\circ$, 證

$$\sin 2A+\sin 2B+\sin 2C=4\sin A\sin B\sin C.$$

解 $\sin 2A+\sin 2B=2\sin(A+B)\cos(A-B)$

$$=2\sin C\cos(A-B),$$

而 $\sin 2C=2\sin C\cos C$

$$=-2\sin C\cos(A+B).$$

故 $\sin 2A+\sin 2B+\sin 2C=2\sin C\ [\cos(A-B)-\cos(A+B)]$,

但 $\cos(A-B)-\cos(A+B)=2\sin A\sin B$,

故 $\sin 2A+\sin 2B+\sin 2C=4\sin A\sin B\sin C$.

習題十九

1. 已知 45° 及 30° 之正切, 試計算 75° 及 15° 之正切.

2. 已知 $\tan A=\frac{1}{2}$, $\tan B=\frac{1}{3}$, 求 $\tan(A+B)$ 及 $\tan(A-B)$.

3. 證

$$\tan(45^\circ+A)=\frac{1+\tan A}{1-\tan A},\quad \tan(45^\circ-A)=\frac{1-\tan A}{1+\tan A}$$

4. 證

$$\cot(A+B)=\frac{\cot A\cot B-1}{\cot A+\cot B},\ \cot(A-B)=\frac{\cot A\cot B+1}{-\cot A+\cot B}.$$

5. 證

$$\tan(x+y+z)=\frac{\tan x+\tan y+\tan z-\tan x\tan y\tan z}{1-\tan x\tan y-\tan y\tan z-\tan z\tan x}.$$

6. 試以 $2A$ 之各函數,表 $\sin 4A$, $\cos 4A$, $\tan 4A$.

7. 已知 30° 之各函數,試求 60° 之正弦,餘弦,正切.

8. 已知 45° 之各函數,由是試求 $22\frac{1}{2}^\circ$ 之正弦,餘弦,正切.

9. 已知 30° 之各函數,試求 15° 之正弦,餘弦,正切.

10. 試證 $\sin 3A=3\sin A-4\sin^3 A$.

11. 試證 $\cos 3A=4\cos^3 A-3\cos A$.

12. 試以 $\tan A$ 表 $\tan 3A$.　$\tan 3A=\frac{3\tan A -}{1-3\tan}$

13. 求 $\sin 18^\circ$ 及 $\cos 18^\circ$.

[命 $x=18^\circ$, 則 $2x+3x=90^\circ$, $2x=90^\circ-3x$, $\sin 2x=\cos 3x$.]

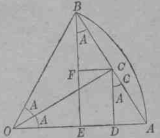
14. 設 $\tan A=t$, 試證

$$\sin 2A=\frac{2t}{1+t^2},\ \cos 2A=\frac{1-t^2}{1+t^2},\ \tan 2A=\frac{2t}{1-t^2}.$$

15. 由右圖試證

$\sin 2A = 2\sin A\cos A,$

$\cos 2A = \cos^2 A - \sin^2 A.$



16. 試由下圖證

$\sin\frac{1}{2}A = \sqrt{\frac{1}{2}(1-\cos A)},$

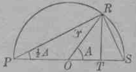
$\cos\frac{1}{2}A = \sqrt{\frac{1}{2}(1+\cos A)}.$

$$\left[\sin\frac{1}{2}A = \frac{RS}{2r},\ \overline{RS}^2 = \overline{OR}^2 + \overline{OS}^2 - 2OR\ OS\cos A.\right]$$

17. 若 $A+B+C=180°$, 證

$\tan A + \tan B + \tan C$

$= \tan A\tan B\ \text{an}\ C$



18. 解方程式 $\tan A = \frac{2\tan\frac{1}{2}A}{1-\tan^2\frac{1}{2}A}$, 而求 $\tan\frac{1}{2}A$, 且變形之, 則其結果與 (44) 之第三式同; 試證之.

19. 方程式 $a\tan x + b\cot x = c$ 可變爲

$(a-b)\cos 2x + c\sin 2x = a+b$, 試證之.

20. 證 $\sin(30°+y) + \sin(30°-y) = \cos y,$

$\sin(30°+y) - \sin(30°-y) = \sqrt{3}\sin y,$

$\cos(30°+y) + \cos(30°-y) = \sqrt{3}\cos y,$

$\cos(30°+y) - \cos(30°-y) = -\sin y.$

21. 證 $\sin 75^\circ+\sin 15^\circ=\frac{1}{2}\sqrt{6}$,

$$\sin 75^\circ-\sin 15^\circ=\frac{1}{2}\sqrt{2},$$

$$\cos 75^\circ+\cos 15^\circ=\frac{1}{2}\sqrt{6},$$

$$\cos 75^\circ-\cos 15^\circ=-\frac{1}{2}\sqrt{2}.$$

22. 下列各式試以函數之和或較表之:

$$\sin 10^\circ\cos 5^\circ,\ \cos 20^\circ\sin 10^\circ,\ \sin\frac{\theta}{2}\sin\frac{\theta}{3},$$

$$\cos\left(\frac{\pi}{4}-\theta\right)\cos\left(\frac{\pi}{4}+\theta\right).$$

23. 證 $\sin 16^\circ+\sin 14^\circ=2\sin 15^\circ\cos 1^\circ$,

$$\sin\frac{3x}{2}-\sin\frac{x}{2}=2\cos x\sin\frac{x}{2},$$

$$\sin(n+1)x+\sin(n-1)x=2\sin nx\cos x.$$

試證下列各恆等式:

24. $\frac{\sin A+\sin B}{\sin A-\sin B}=\frac{\tan\frac{1}{2}(A+B)}{\tan\frac{1}{2}(A-B)}$.

25. $\frac{\cos A+\cos B}{\cos A-\cos B}=-\cot\frac{1}{2}(A+B)\cot\frac{1}{2}(A-B)$.

26. $\frac{\sin A-\sin B}{\cos A+\cos B}=\tan\frac{1}{2}(A-B)$.

27. $\dfrac{\sin A-\sin B}{\cos A-\cos B}=-\cot\dfrac{1}{2}(A+B)$.

28. 證 $\sin(\alpha+x)\sin x=m\cos(\alpha+x)\cos x$

可變形為 $-\cos(\alpha+2x)+\cos\alpha=m[\cos(\alpha+2x)+\cos\alpha]$.

29. 證 $\dfrac{1}{2}(\cos 2x+\cos 2y)=\cos(x+y)\cos(x-y)$,

$$-\frac{1}{2}(\cos 2x-\cos 2y)=\sin(x+y)\sin(x-y).$$

30. 由上題之結果,試更證

$$\cos(x+y)\sin(x-y)+\cos(y+z)\sin(y-z)$$
$$+\cos(z+x)\sin(z-x)=0.$$

31. 證 $\sin 100^\circ+\sin 40^\circ+\sin 60^\circ=4\cos 30^\circ\sin 50^\circ\cos 20^\circ$,

$\sin 2\theta+\sin 6\theta+\sin 8\theta=4\cos\theta\cos 3\theta\sin 4\theta$.

32. 證 $\sin x+\sin(x-2)=2\sin(x-1)\cos 1$,

是卽 $\sin x=2\sin(x-1)\cos 1-\sin(x-2)$.

同理 $\cos x=2\cos(x-1)\sin 1+\sin(x-2)$,

$\cos x=2\cos(x-1)\cos 1-\cos(x-2)$,

$\cos x=-2\sin(x-1)\sin 1+\cos(x-2)$.

若已知 $(x-1)^\circ$, $(x-2)^\circ$, 1° 之正餘弦,則利用以上各式可以計算 x° 之正餘弦.

33. 假設已知 $1°$, $2°$ 之正餘弦,試計算 $3°$, $4°$, $5°$ 之正餘弦.

34. 由正弦定律求得 $\frac{a+b}{a-b}=\frac{\sin A+\sin B}{\sin A-\sin B}$ 後,再應用(46)式,可得正切定律;試證之.

35. 由正弦定律可得

$$\frac{c}{a-b}=\frac{\sin C}{\sin A-\sin B},\quad \frac{c}{a+b}=\frac{\sin C}{\sin A+\sin B},$$

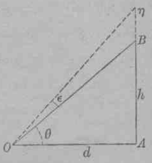
試從此導出對偶公式

$$\frac{c}{a-b}=\frac{\sin\frac{1}{2}(A+B)}{\sin\frac{1}{2}(A-B)},\quad \frac{c}{a+b}=\frac{\cos\frac{1}{2}(A+B)}{\cos\frac{1}{2}(A-B)}.$$

36. 有塔高40尺,塔頂有旗竿高50尺;問自平地上何處望之,則塔之對角等於旗竿之對角?

37. 有河寬 b 尺,離河 a 尺有塔;問由塔登高幾尺,則河之對角適成 $30°$? 本題可有二答數否?

38. 某人在 O 處,欲測同地平面上物體 AB 之高;乃量 $OA=d$,又測 $\angle AOB=\theta$,計算結果得高為 h. 後知所測 θ 有 ϵ 之誤差,遂於 h 加 η 以更正之;試證 $\eta=\frac{d\sin\epsilon}{\cos(\theta+\epsilon)\cos\theta}$.



39. 試由右圖證明(43)式.

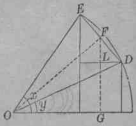
[命 $OE=OD=1$, 則

$\sin x+\sin y=2\,GF,$

$\sin x-\sin y=2\,LF,$

$\cos x+\cos y=2\,OG,$

$\cos x-\cos y=-2\,LD.$]



40. 證 $\dfrac{\tan(\alpha+x)+\tan x}{\tan(\alpha+x)-\tan x}=\dfrac{\sin(\alpha+2x)}{\sin\alpha}.$

41. 以 $2\sin\dfrac{x}{2}$ 乘

$$S=1+\cos x+\cos 2x+\cos 3x+\cdots+\cos nx$$

之各項,變積爲較;試證

$$S=\frac{\sin\dfrac{(2n+1)x}{2}+\sin\dfrac{x}{2}}{2\sin\dfrac{x}{2}}=\frac{\sin\dfrac{(n+1)x}{2}\cos\dfrac{nx}{2}}{\sin\dfrac{x}{2}}.$$

式中n爲任意正整數.下二題同.

試求下列各級數之和:

42. $\sin\alpha+\sin(\alpha+\beta)+\sin(\alpha+2\beta)+\cdots+\sin\{\alpha+(n-1)\beta\}.$

43. $\sin\alpha+\sin 3\alpha+\sin 5\alpha+\cdots+\sin(2n-1)\alpha.$

第十章

三角方程式

由角求函數之值,只得一值;由函數之值求角則不止得一角.由角求函數之法,係將所有函數化爲第一象限內相當之函數,然後檢眞數表便得,其例已屢見之矣.茲更論求角之一般公式.

§ 58. 主值 由函數值求角,可得諸角;諸角之中,有絕對值最小者,名曰**主值** (principal value);如最小者有二,一正一負,則以正者爲主值.

例如 $\sin\theta=\frac{1}{2}$, 則 $\theta=30°$, 或 $150°$, 或 $30°\pm n\cdot 360°$, 或 $150°\pm m\cdot 360°$ (m, n 爲任意正整數);其中以 $30°$ 爲最小,定爲 $\sin\theta=\frac{1}{2}$ 之主值.

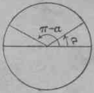
又如 $\sin\theta=-\frac{\sqrt{3}}{2}$, 則 $\theta=-60°$, 或 $-120°$, 或 $-60°\pm n\cdot 360°$, 或 $120°\pm m\cdot 360°$;而 $-60°$ 爲主值.

又如 $\cos\theta=\frac{1}{\sqrt{2}}$, 則 $\theta=+45°$, 或 $-45°$, 或 $45°\pm n\cdot 360°$, 或 $-45°\pm m\cdot 360°$;其主值爲 $45°$ 非 $-45°$.

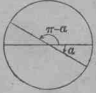
§ 59. 有正弦求角 設 k 爲已知欲由下式求 θ,

$$\sin\theta=k.$$

命 α 爲 θ 之主值,則 θ 之其餘諸值爲



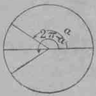
$$\begin{array}{ll}\pi-\alpha, & -\pi-\alpha,\\ 2\pi+\alpha, & -2\pi+\alpha,\\ 3\pi-\alpha, & -3\pi-\alpha,\\ 4\pi+\alpha, & -4\pi+\alpha,\\ 5\pi-\alpha, & -5\pi-\alpha,\\ 6\pi+\alpha, & -6\pi+\alpha,\\ \cdots\cdots, & \cdots\cdots,\end{array}$$



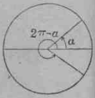
併之爲一式,成 $$\theta=n\pi+(-1)^n\alpha \tag{47}$$

式中 n 爲正負之整數.命 $n=0$,則 $\theta=\alpha$,故主值亦在其中.

§60. 有餘弦求角 設有 $\cos\theta=k$,命 α 爲 θ 之主值,則 θ 之其餘諸值如下:

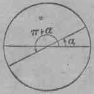


$$\begin{array}{ll}2\pi-\alpha, & -2\pi-\alpha,\\ 2\pi+\alpha, & -2\pi+\alpha,\\ 4\pi-\alpha, & -4\pi-\alpha,\\ 4\pi+\alpha, & -4\pi+\alpha,\\ 6\pi-\alpha, & -6\pi-\alpha,\\ 6\pi+\alpha, & -6\pi+\alpha,\\ \cdots\cdots, & \cdots\cdots,\end{array}$$

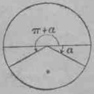


併之,得
$$\theta=2n\pi\pm\alpha. \tag{48}$$
式中n爲正負整數.

§61. **有正切求角**　設有 $\tan\theta=k$, 命α爲θ之主値,則θ之其餘諸値爲



$$\begin{array}{ll} \pi+\alpha, & -\pi+\alpha, \\ 2\pi+\alpha, & -2\pi+\alpha, \\ 3\pi+\alpha, & -3\pi+\alpha, \\ 4\pi+\alpha & -4\pi+\alpha, \\ 5\pi+\alpha, & -5\pi+\alpha, \\ \cdots\cdots, & \cdots\cdots, \end{array}$$



併之,得
$$\theta=n\pi+\alpha. \tag{49}$$
式中n爲正負之整數.

§62. **三角方程式**　方程式中含一個或數個未知角之函數者,稱曰三角方程式.

解一未知角之三角方程式之法,先擇一適當之函數表式中諸函數再以此函數作爲未知數,照代數方程式解之,然後應用上三節以求一切之角.

例一　試解 $2\sin x+\csc x=3$.

解　各函數俱以 $\sin x$表之,則爲
$$2\sin x+\frac{1}{\sin x}=3$$

視 $\sin x$ 爲未知數命之爲 s. 則有

$$2s+\frac{1}{s}=3,$$

$$2s^2-3s+1=0.$$

解之.得 $s=1$ 或 $\frac{1}{2}$,

即 $\sin x=1$ 或 $\frac{1}{2}$.

是故 x 之主値爲 $x=\frac{\pi}{2}$ 或 $\frac{\pi}{6}$.

其一切之値爲 $x=n\pi+(-1)^n\frac{\pi}{2}$, 或 $n\pi+(-1)^n\frac{\pi}{6}$

若更分析之.則爲

$$x=\frac{\pi}{2},\ \frac{5\pi}{2},\ \frac{9\pi}{2},\ \frac{13\pi}{2},\ \cdots\cdots,\ \frac{-3\pi}{2},\ \frac{-7\pi}{2},\ \frac{-11\pi}{2},\ \cdots\cdots;$$

$$x=\frac{\pi}{6},\ \frac{5\pi}{6},\ \frac{13\pi}{6},\ \frac{17\pi}{6},\ \cdots\cdots,\ \frac{-7\pi}{6},\ \frac{-11\pi}{6},\ \frac{-19\pi}{6},\ \cdots\cdots.$$

校對.

若 $\sin x=1$, 則 $\csc x=1$, 而 $2\sin x+\csc x=2\cdot1+1=3$.

若 $\sin x=\frac{1}{2}$, 則 $\csc x=2$, 而 $2\sin x+\csc x=2\cdot\frac{1}{2}+2=3$.

例二 試由方程式 $\tan\theta+3\cot\theta=4$, 求 θ.

解 命 $\tan\theta=t$, 則原方程式成爲

$$t+\frac{3}{t}=4,$$

$$t^2-4t+3=0.$$

解之，　　$t=3$ 或 1,

卽　　$\tan\theta=3$ 或 1.

於是得 θ 之主値爲

$$\theta=71°33'54'' \text{ 或 } 45°.$$

其一切之値爲　$\theta=n\cdot180°+71°33'54''$ 或 $n\cdot180°+45°$.

(n 爲任意整數)

校對．$\tan\theta=3,\ \cot\theta=\frac{1}{3},\ \tan\theta+3\cot\theta=3+3\cdot\frac{1}{3}=4.$

$\tan\theta=1,\ \cot\theta=1,\ \tan\theta+3\cot\theta=1+3\cdot1=4.$

例三　解 $\tan\phi+2\sqrt{3}\cos\phi=0.$

解

$$\tan\phi=\frac{\sqrt{1-\cos^2\phi}}{\cos\phi},$$

故

$$\sqrt{1-\cos^2\phi}+2\sqrt{3}\cos^2\phi=0.$$

移項平方又移項，得

$$12\cos^4\phi+\cos^2\phi-1=0.$$

$$\cos^2\phi=\frac{1}{4} \text{ 或 } -\frac{1}{3}.$$

$$\cos\phi=\frac{1}{2},\ -\frac{1}{2},\ \sqrt{-\frac{1}{3}},\ -\sqrt{-\frac{1}{3}}.$$

實角之餘弦不能爲虛數故後二根不合理；由前二根得

$$\phi=2n\pi\pm\frac{\pi}{3} \qquad (a)$$

$$\text{及 } \phi=2n\pi\pm\frac{2\pi}{3}. \qquad (b)$$

校對．從 (a)　$\cos\left(2n\pi\pm\frac{\pi}{3}\right)=\frac{1}{2},\ \tan\left(2n\pi\pm\frac{\pi}{3}\right)=\pm\sqrt{3},$

$\tan\phi+2\sqrt{3}\cos\phi=\pm\sqrt{3}+2\sqrt{3}\cdot\frac{1}{2}=2\sqrt{3}$ 或 0.

取雙號之負號,則上式等於0,取正號則否;於(b)亦然,故原方程式之答數為

$$\phi=2n\pi-\frac{\pi}{3}\ 及\ 2n\pi-\frac{2\pi}{3}.$$

由本題可見答數非校對不可,蓋方程式一經平方之後,往往有偽根混入其間也.然欲防偽根,亦自有法;茲更舉例以比較之.

例四 解 $\sin x+\cos x=\sqrt{2}$.

解
$$\sin x+\sqrt{1-\sin^2 x}=\sqrt{2},$$

$$\sqrt{1-\sin^2 x}=\sqrt{2}-\sin x.$$

平方又移項, $2\sin^2 x-2\sqrt{2}\sin x+1=0.$

解之,
$$\sin x=\frac{1}{\sqrt{2}}.$$

$$x=n\pi+(-1)^n\frac{\pi}{4}.$$

校對.
$$\sin\left[n\pi+(-1)^n\frac{\pi}{4}\right]=\frac{1}{\sqrt{2}},$$

$$\cos\left[n\pi+(-1)^n\frac{\pi}{4}\right]=\frac{1}{\sqrt{2}},\ 若\ n\ 為偶數;$$

$$=-\frac{1}{\sqrt{2}},\ 若\ n\ 為奇數.$$

故
$$\sin x+\cos x=\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{2}}=\sqrt{2},\ 若\ n\ 為偶數;$$

$$=\frac{1}{\sqrt{2}}-\frac{1}{\sqrt{2}}=0,\ 若\ n\ 為奇數.$$

故知n不能爲奇數,於是得原方程之解爲

$$x=2n\pi+\frac{\pi}{4}.$$

別解　欲防僞根,除非不用平方,今以$\sqrt{2}$除原式之兩邊,得

$$\frac{1}{\sqrt{2}}\sin x+\frac{1}{\sqrt{2}}\cos x=1,$$

即　$$\cos\frac{\pi}{4}\sin x+\sin\frac{\pi}{4}\cos x=1.$$

$$\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)=1. \tag{A}$$

然則$x+\frac{\pi}{4}$之主值爲$\frac{\pi}{2}$,其一切之值爲$\frac{\pi}{2}$加2π之正負整數倍,即

$$x+\frac{\pi}{4}=\frac{\pi}{2}+n\cdot 2\pi.$$

$$x=2n\pi+\frac{\pi}{4}. \tag{B}$$

若用公式(47)以解(A)式,則爲

$$x=n\pi+(-1)^n\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{4}. \tag{C}$$

驟觀之,其結果似與前異;然若遞命n爲偶數$2m$及奇數$2m+1$,代入(C)式,均得與(B)同形之式爲

$$x=2m\pi+\frac{\pi}{4}.$$

解三 因 $\sin x+\cos x=\sin x+\sin\left(\frac{\pi}{2}-x\right)$

$$=2\sin\frac{\pi}{4}\cos\left(x-\frac{\pi}{4}\right)$$

$$=2\cdot\frac{1}{\sqrt{2}}\cos\left(x-\frac{\pi}{4}\right).$$

$$\therefore\quad 2\frac{1}{\sqrt{2}}\cos\left(x-\frac{\pi}{4}\right)=\sqrt{2}.$$

$$\cos\left(x-\frac{\pi}{4}\right)=1.$$

$$x-\frac{\pi}{4}=2n\pi\pm 0.$$

$$x=2n\pi+\frac{\pi}{4}.$$

例五 方程式 $a\sin(x+\alpha)+b\cos(x+\beta)=0$ 中, a, b, α, β 皆爲常數,試求 x.

解 $\sin(x+\alpha)=\sin x\cos\alpha+\cos x\sin\alpha,$

$$\cos(x+\beta)=\cos x\cos\beta-\sin x\sin\beta.$$

代入原式而整頓之,遂成

$$\tan x=-\frac{a\sin\alpha+b\cos\beta}{a\cos\alpha-b\sin\beta}.$$

右節式中皆爲常數,故可求得 x.

校對. 此類複雜之數,以特別之數值代各常數爲便.

今設 $a=2,\quad b=1,\quad \alpha=20^\circ,\quad \beta=15^\circ,$

則
$$\frac{a\sin\alpha+b\cos\beta}{a\cos\alpha-b\sin\beta}=1.0181.$$

檢表得 $\tan 45°31'$; 故

$$x=n\pi-45°31';$$

$$x+\alpha=n\pi-25°31',\ x\ \ \beta=n\pi-30°31'.$$

將此等之值代入原方程式,得

$$2(\pm0.4308)+1(\mp0.8615)=0.$$

習題二十

求下列各題之主值及一般值:

1. $\tan\theta=2\sin\theta.$

2. $3\sin^2 x=\cos^2 x.$

3. $2\sin^2\phi=3\cos\phi.$

4. $\tan y+\cot y=2.$

試求下列各題之角在 360° 以內者:

5. $\tan^2 x+\csc^2 x=3.$

6. $\sin\theta+\cos\theta=1.$

7. $\csc x\cot x=2\sqrt{3}.$

8. $\sin^2 t-2\cos t+\frac{1}{4}=0.$

9. $3\sec^4\theta-10\sec^2\theta+8=0.$

10. $\tan x+\sec^2 x=7.$

11. $6\cos^2 x+5\sin x=7.$

12. $\sin x-\cos x=\frac{5}{2}.$

13. $\sin x+\csc x=\frac{5}{2}.$

14. $3\tan^2 x-4\sin^2 x=1.$

15. 若 $a\ \mathrm{sii}\ x+b\cos x=c$, 證 $\sin x=\frac{ac\pm b\sqrt{a^2+b^2-c^2}}{a^2+b^2}.$

16. 若 $a\tan x+b\cot x=c$, 證 $\tan x=\dfrac{c\pm\sqrt{c^2-4ab}}{2a}$.

17. 若 $\sin(\alpha+x)=m\sin x$, 證

$$\sin x=\frac{\pm\sin\alpha}{\sqrt{m^2-2m\cos\alpha+1}},\ \text{又}\ \cot x=\frac{m-\cos\alpha}{\sin\alpha}.$$

18. 若 $\sin(\alpha\pm x)\sin x=m$, 證 $\cos(\alpha\pm 2x)=\cos\alpha\mp 2m$

19. 若 $\cos(\alpha\pm x)\cos x=m$, 證 $\cos(\alpha\pm 2x)=2m-\cos\alpha$.

20. 若 $\sin(\alpha\pm x)\cos x=m$, 證 $\sin(\alpha\pm 2x)=2m-\sin\alpha$.

21. 若 $\cos(\alpha\pm x)\sin x=m$, 證 $\sin(\alpha\pm 2x)=\sin\alpha\pm 2m$.

§63. 含倍角之三角方程式

例 解方程式 $\sin 2\theta=\cos\theta$.

解一 由 (44) 第一式. $2\sin\theta\cos\theta=\cos\theta$.

移項, $\cos\theta(2\sin\theta-1)=0$,

故 $\cos\theta=0$, 或 $\sin\theta=\dfrac{1}{2}$,

$$\theta=2n\pi\pm\frac{\pi}{2}=n\pi+\frac{\pi}{2}^{*},\ \text{或}\ n\pi+(-1)^n\frac{\pi}{6}. \qquad (D)$$

將此結果代入原方程式均合.

解二 $\sin 2\theta-\cos\theta=\sin 2\theta-\sin\left(\dfrac{\pi}{2}-\theta\right)=0.$

由 (46) 第二式, $2\cos\left(\dfrac{\theta}{2}+\dfrac{\pi}{4}\right)\sin\left(\dfrac{3\theta}{2}-\dfrac{\pi}{4}\right)=0.$

---

*此可由作圖或照前節例四證其為相等.

故　$$\cos\left(\frac{\theta}{2}+\frac{\pi}{4}\right)=0,\ 或\ \sin\left(\frac{3\theta}{2}-\frac{\pi}{4}\right)=0.$$

$$\frac{\theta}{2}+\frac{\pi}{4}=2n\pi\pm\frac{\pi}{2}=n\pi+\frac{\pi}{2},\ 或\ \frac{3\theta}{2}-\frac{\pi}{4}=n\pi.$$

卽　$$\theta=2n\pi+\frac{\pi}{2},\ 或\ \frac{2}{3}n\pi+\frac{\pi}{6}. \qquad (E)$$

解三　原式卽　$\sin 2\theta=\sin\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)$,

故　$$2\theta=n\pi+(-1)^n\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right),$$

$$\theta=\frac{n\pi+(-1)^n\frac{\pi}{2}}{2+(-1)^n}. \qquad (F)$$

答數之比較.

(F) 之 n 若爲奇數,譬如 $n=2m+1$, 則

$$\theta=(2m+1)\pi-\frac{\pi}{2}=2m\pi+\frac{\pi}{2};$$

若爲偶數, 如 $n=2m$, 則

$$\theta=\frac{2m\pi+\frac{\pi}{2}}{3}=\frac{2}{3}m\pi+\frac{\pi}{6}.$$

可見 (F) 與 (E) 皆符合:

今更察 (E) 之第二式:任何整數 n 以 3 除之,非能除盡,則必剩 1 或 2; 故 n 可以 $3m$, 或 $3m+1$, 或 $3m+2$ 表之.於是由 (E) 第二式順次得

$$\theta=2m\pi+\frac{\pi}{6},\ (2m+1)\pi-\frac{\pi}{6},\ (2m+1)\pi+\frac{\pi}{2}$$

前兩式可合寫爲 $n\pi+(-1)^n\frac{\pi}{6}$;

最後式與(E)第一式合併,成 $\theta=n\pi+\frac{\pi}{2}$.

然則(E)又與(D)相符.

§ 64. 聯立三角方程式

例一 設有方程式

$$r\sin\theta=a,$$

$$r\cos\theta=b.$$

其 a 與 b 爲常數,試求 r 與 θ.

解 以第二式除第一式,得

$$\tan\theta=\frac{a}{b},$$

既得 θ,又代之於第一式,或第二式,得

$$r=\frac{a}{\sin\theta}=\frac{b}{\cos\theta}.$$

由正切求得之各角,其相差皆爲 π 之整數倍;由是而求 $\sin\theta$ 或 $\cos\theta$,各得二值,其絕對值相同,而符號相反;是故 r 亦有二值,其絕對值相同,而符號相反.

若題意僅限於正號之 r,則 $\sin\theta$ 宜取與 a 同號,而 $\cos\theta$ 宜取與 b 同號.二者之號既定,θ 所在之象限亦於是定.

別解　將所設兩方程式自乘相加,成

$$r^2=a^2+b^2;$$

由此得r.然後從下列之任一式定θ:

$$\sin\theta=\frac{a}{r},\quad \cos=\frac{b}{r}.$$

此法不如前法之佳,因不便於對數計算也.

例二　求下列方程式之r,θ,ϕ.

$$r\cos\theta\cos\phi=a,$$
$$r\cos\theta\sin\phi=b,$$
$$r\sin\theta=c.$$

解　由前二式,得　$\tan\phi=\frac{b}{a}.$

既得ϕ,復代入前二式,得

$$r\cos\theta=\frac{a}{\cos\phi}=\frac{b}{\sin\phi}.$$

由後一式與此式,照上例可求r與θ.

別解　各將三式平方而相加之,則得r爲

$$r^2=a^2+b^2+c^2;$$

代入於第三式,得θ.再由第一式或第二式得ϕ.

例三　求下方程式之r與θ:

$$r\sin(\alpha+\theta)=a,$$
$$r\sin(\beta+\theta)=b.$$

解 由(38)， $r\sin\alpha\cos\theta+r\cos\alpha\sin\theta=a.$

$$r\sin\beta\cos\theta+r\cos\beta\sin\theta=b.$$

命 $r\cos\theta=x$, $r\sin\theta=y$. 則有

$$x\sin\alpha+y\cos\alpha=a$$

$$x\sin\beta+y\cos\beta=b.$$

$$x=\frac{a\cos\beta-b\cos\alpha}{\sin\alpha\cos\beta-\cos\alpha\sin\beta}=\frac{a\cos\beta-b\cos\alpha}{\sin(\alpha-\beta)}=r\cos\theta,$$

$$y=\frac{a\sin\beta-b\sin\alpha}{\cos\alpha\sin\beta-\sin\alpha\cos\beta}=\frac{b\sin\alpha-a\sin\beta}{\sin(\alpha-\beta)}=r\sin\theta.$$

仿例一得 r 與 θ.

習題二十一

求下列各題一切之角:

1. $\cos 2x+\cos x+1=0.$
2. $\cos 5x=\sin 4x.$
3. $\sin 4x=\sin 5x$
4. $\cos 5x=\cos 4x.$
5. $\tan 5\theta=\cot 2\theta.$
6. $\sin 3x+\sin 2x+\sin x=0.$
7. $\cos x-\cos 3x=\sin 2x.$
8. $\cos 5y-\cos 3y+\sin y=0.$
9. $\cos(60^\circ-x)+\cos(60^\circ+x)=\frac{1}{3}.$
10. $\tan 2x\tan x=1.$
11. $\cos mx=\sin kx$, 其 m, k 爲已知數.

12. $\cot\phi=\tan k\phi$, 其 k 為已知數.

下列三題,試各以不同之三法解之:並證明所得答數互相一致.

13. $\cos 3x=\sin 2x$.

$$\left[\frac{1}{4}(-1+\sqrt{5})=\sin\frac{\pi}{10},\ \frac{1}{4}(-1-\sqrt{5})=\sin\left(-\frac{3\pi}{10}\right).\right]$$

14, $\cos 2\theta=\sin\theta$. 15. $\sin 3x=\cos 2x$.

下列各題 r 作為正數.

16. 有 $r\sin\theta=8.219$, $r\cos\theta=12.88$, 求 r, θ.

17. 有 $r\sin\theta=3$, $r\cos\theta=4$, 求 r, θ.

18. 有 $r\sin\theta=27.138$, $r\cos\theta=-92.692$. 求 r, θ.

19. 試解 $r\cos\theta\cos\phi=5$, $r\cos\theta\sin\phi=12$, $r\sin\theta=84$.

20. 試解 $r\cos\lambda\cos\mu=4$, $r\cos\lambda\sin\mu=5$, $r\sin\lambda=\sqrt{59}$.

21. $r\sin\left(\frac{\pi}{3}+x\right)=\sqrt{3}$, $r\sin\left(\frac{\pi}{6}+x\right)=1$, 求 r, x.

22. $r\cos(x-a)=a$, $r\sin(x+\beta)=b$; 求 r, x.

23. 解 $\cos(x-y)=\frac{1}{\sqrt{2}}$, $\sin(x+y)=\frac{\sqrt{3}}{2}$, 求 x, y 之主值及一般值.

24. 解 $\cos 2x-\cos 2y=a$, $\cos x-\cos y=b$.

25. 方程式 $\tan(x+y)=a$, $\tan x\tan y=b$ 宜如何解之?

§ 65. **對數式之答數** 解三角方程式所得之答數,

若爲多項式時,不適於對數計算;故如習題二十中15, 16, 17等題之答數,尙須變形,乃合實用.玆論變形之法如下:

例一 解 $a\sin x+b\cos x=c$.

解 以$\sqrt{a^2+b^2}$除原式,則$\sin x$與$\cos x$之係數各成爲

$$\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}},\quad \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}.$$

其値皆小於1,且其平方和適等於1,故可命之爲

$$\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}=\cos\phi,\quad \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}=\sin\phi. \tag{G}$$

由原式 $\sin x\cos\phi+\cos x\sin\phi=\dfrac{c}{\sqrt{a^2+b^2}}$,

$$\sin(x+\phi)=\frac{c}{\sqrt{a^2+b^2}}=\frac{c}{a}\cos\phi=\frac{c}{b}\sin\phi. \tag{H}$$

由(G), $$\tan\phi=\frac{b}{a}. \tag{I}$$

由(I)求ϕ,代入於(H),得x,而問題以解.設ϕ之意,在於補助問題,使能合於對數計算;此種之角名曰**補助角**(auxiliary angle).

實例 如有方程式

$$3.4537\sin x-0.9328\cos x=-1.3794,$$

則 $a=3.4537,\ b=-0.9328,\ c=-1.3794.$

b, c 爲負數,不能求其對數;今命

$$\phi' = -\phi, \qquad x' = -(x+\phi).$$

則由 (I), (H), $\tan\phi' = \dfrac{-b}{a}$, $\sin x' = \dfrac{-c}{a}\cos\phi'$.

$$\begin{array}{rlrl}
\log(-b) = & 9.96979 & \log(-c) = & 0.13969 \\
\log a = & \underline{0.53828} & -\log a = & 9.46172 \\
\log\tan\phi' = & 9.43151 & \log\cos\phi' = & \underline{9.98471} \\
\phi' = & 15°06'52'' & \log\sin x' = & 9.58612 \\
\phi = & -15°06'52''. & x' = & 22°40'48''.
\end{array}$$

ϕ 爲補助角,故任有一值已足;而 x' 則要求其一般值,即

$$x' = n\pi + (-1)^n(22°40'48'') = -x-\phi,$$

$$x = m\pi + 15°06'52'' + (-1)^{m+1}(22°40'48'').$$

校對. 由 (H), $\log(-c) = 0.13969$

$$\sin x' = \frac{-c}{-b}\sin\phi'. \qquad -\log(-b) = 0.03021$$

$$\log\sin\phi' = \underline{9.41621}$$

$$\log\sin x' = 9.58611$$

例二 解 $a\tan x + b\cot x = c$.

解 原式卽 $2a\sin^2 x + 2b\cos^2 x = 2c\sin x\cos x$

由 (44), 遂成 $c\sin 2x + (a-b)\cos 2x = a+b$.

然後仿上例解之.

例三 解 $\sin(\alpha + x) = m\sin x$.

解 $$\frac{\sin(\alpha+x)}{\sin x}=\frac{m}{1},$$

$$\frac{\sin(\alpha+x)+\sin x}{\sin(\alpha+x)-\sin x}=\frac{m+1}{m-1},$$

$$\frac{2\sin\left(x+\frac{\alpha}{2}\right)\cos\frac{\alpha}{2}}{2\cos\left(x+\frac{\alpha}{2}\right)\sin\frac{\alpha}{2}}=\frac{m+1}{m-1},$$

$$\tan\left(x+\frac{\alpha}{2}\right)=\frac{m+1}{m-1}\tan\frac{\alpha}{2}.$$

由此可求 $x+\frac{\alpha}{2}$，於是得 x.

或更命 $m=\tan\phi$,

則 $$\frac{m+1}{m-1}=-\tan\left(\phi+\frac{\pi}{4}\right)=\cot\left(\phi-\frac{\pi}{4}\right),$$

故得 $$\tan\left(x+\frac{\alpha}{2}\right)=\cot\,\phi-\frac{\pi}{4}\Big)\tan\frac{\alpha}{2},\ \tan\phi=m.$$

例四 解 $\tan(\alpha+x)\tan x=m$.

解 原式卽 $\sin(\alpha+x)\sin x=m\cos(\alpha+x)\cos x$,

$$\cos\alpha-\cos(\alpha+2x)=m[\cos(\alpha+2x)+\cos\alpha],$$

$$\cos(\alpha+2x)=\frac{1-m}{1+m}\cos\alpha,$$

卽 $$\cos(\alpha+2x)=\tan\left(\frac{\pi}{4}-\phi\right)\cos\alpha,\ \tan\phi=m.$$

由此求 $\alpha+2x$, 遂得 x.

§66. **消去法**　由聯立方程式中,消去其一個或數個未知數,謂之**消去法** (elimination). 三角方程式之消去法,依題而異;毫無一定之規則,要在善於運用代數之法術及三角之公式而已.

例一　設由下列方程式消去 ϕ.

$$\sec^3\phi = b,\quad \tan^3\phi = c.$$

解　由原式　$\sec\phi = b^{\frac{1}{3}},\quad \tan\phi = c^{\frac{1}{3}}.$

但　$$\sec^2\phi - \tan^2\phi = 1,$$

故　$$b^{\frac{2}{3}} - c^{\frac{2}{3}} = 1.$$

例二　試由下方程式消去 θ.

$$a\cos\theta + b\sin\theta = c,$$

$$d\cos\theta + e\sin\theta = f.$$

解　先將 $\cos\theta$ 與 $\sin\theta$ 作爲兩未知數而解之,得

$$\sin\theta = \frac{cd - af}{bd - ae},\quad \cos\theta = \frac{bf - ce}{bd - ae}.$$

平方相加,應用 $\sin^2\theta + \cos^2\theta = 1$ 之關係,得其結果爲

$$(bf - ce)^2 + (cd - af)^2 = (bd - ae)^2.$$

例三　試由下式消去 θ.

$$\frac{ax}{\cos\theta} - \frac{by}{\sin\theta} = c^2,\quad l\tan\theta = m.$$

解　由第二式,

$$\frac{\sin\theta}{m}=\frac{\cos\theta}{l}=\frac{\sqrt{\sin^2\theta+\cos^2\theta}}{\sqrt{m^2+l^2}}=\frac{1}{\sqrt{m^2+l^2}}.$$

$$\therefore\quad \sin\theta=\frac{m}{\sqrt{m^2+l^2}},\qquad \cos\theta=\frac{l}{\sqrt{m^2+l^2}}.$$

代入第一式，　$$\frac{ax}{l}-\frac{by}{m}=\frac{c^2}{\sqrt{m^2+l^2}}.$$

例四　試由下式消去 θ.

$$\frac{x}{a}=\cos\theta+\cos 2\theta,\qquad \frac{y}{b}=\sin\theta+\sin 2\theta.$$

解　原式即　$$\frac{x}{a}=2\cos\frac{3\theta}{2}\cos\frac{\theta}{2},\tag{J}$$

$$\frac{y}{b}=2\sin\frac{3\theta}{2}\cos\frac{\theta}{2};$$

平方相加，　$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=4\cos^2\frac{\theta}{2}.\tag{K}$$

由習題十九之11，　$$\cos\frac{3\theta}{2}=4\cos^3\frac{\theta}{2}-3\cos\frac{\theta}{2}$$

故由 (J)，　$$\frac{x}{a}=2\cos\frac{\theta}{2}\left(4\cos^3\frac{\theta}{2}-3\cos\frac{\theta}{2}\right)$$

$$=2\cos^2\frac{\theta}{2}\left(4\cos^2\frac{\theta}{2}-3\right).$$

由 (K)，　$$\therefore\quad \frac{2x}{a}=\left(\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}\right)\left(\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-3\right).$$

例五　試由下三方程式消去 θ 及 ϕ.

$$a\sin^2\theta+b\cos^2\theta=m,$$

$$b\sin^2\phi+a\cos^2\phi=n,$$

$$a\tan\theta=b\tan\phi.$$

解　由第一式，$a\sin^2\theta+b\cos^2\theta=m(\sin^2\theta+\cos^2\theta)$,

$$(a-m)\sin^2\theta=(m-b)\cos^2\theta,$$

$$\therefore\quad \tan^2\theta=\frac{m-b}{a-m}.$$

由第二式，$b\sin^2\phi+a\cos^2\phi=n(\sin^2\phi+\cos^2\phi)$,

$$\therefore\quad \tan^2\phi=\frac{n-a}{b-n}.$$

由第三式，$a^2\tan^2\theta=b^2\tan^2\phi$,

$$\therefore\quad \frac{a^2(m-b)}{a-m}=\frac{b^2(n-a)}{b-n}.$$

$$a^2(bm-b^2-mn+bn)=b^2(an-a^2-mn+am),$$

$$mab(a-b)+nab(a-b)=mn(a^2-b^2),$$

$$mab+nab=mn(a+b),$$

$$\therefore\quad \frac{1}{n}+\frac{1}{m}=\frac{1}{a}+\frac{1}{b}.$$

習題二十二

1. 若 $\cos(x+\alpha)=m\cos x$，試證 x 可由下式求之：

$$\tan\left(x+\frac{\alpha}{2}\right)=\tan\left(\frac{\pi}{4}-\phi\right)\cot\frac{\alpha}{2},\ \tan\phi=m.$$

2. 若 $\tan(x+\alpha)=m\cot x$, 證

$$\cos(\alpha+2x)=\tan\left(\frac{\pi}{4}-\phi\right)\cos\alpha,\ \tan\phi=m.$$

3. $\tan(\alpha+x)\cot x=m$ 證

$$\sin(\alpha+2x)=\cot\left(\phi-\frac{\pi}{4}\right)\sin\alpha,\ \tan\phi=m.$$

4. 求 0° 至 360° 間之角能滿足下方程式者:

$$4\sin x+3\cos x=5.$$

5. 試求 $2.76\cos\theta-2.32\sin\theta=1.91$ 之 θ.

6. 求下方程式一切之角:

$$\sqrt{3}\sin x-\cos x=\sqrt{2}.$$

7. 求下方程式一切之角:

$$(1+\sqrt{3})\tan x+(1-\sqrt{3})\cot x=2.$$

8. 求下方程式之 r 與 x:

$$r\sin(\alpha+x)=m,\ r\sin(\beta+x)=n.$$

9. 試更改下式使適於對數計算:

$$\tan x=\frac{m\sin\alpha}{1+m\cos\alpha}.$$

[以正餘弦表正切,通分,得 $\sin x=m\sin(\alpha-x)$, 再應用 §64 例三.]

10. 證 $a+b=\dfrac{a}{\cos^2\phi}$, 設 $\tan^2\phi=\dfrac{b}{a}$;

$$a-b=a\cos^2\phi,\quad \text{設 } \sin^2\phi=\frac{b}{a}.$$

用此公式,則數之和較,亦可用對數計算之.

試消去下列各題之θ:

11. $\tan\theta+\sin\theta=a,\ \tan\theta-\sin\theta=b.$

12. $\sec\theta+\tan\theta=a,\ \csc\theta+\cot\theta=b.$

13. $x=\cot\theta+\tan\theta,\ y=\sec\theta-\cos\theta.$

14. $a\sec^2\theta-b\cos\theta=2a,\ b\cos^2\theta-a\sec\theta=2b.$

15. $a\sin^2\theta+b\cos^2\theta=c,\ a\csc^2\theta+b\sec^2\theta=d.$

16. $\dfrac{x}{a}\cos\theta+\dfrac{y}{b}\sin\theta=1,\ \dfrac{ax}{\cos\theta}-\dfrac{by}{\sin\theta}=a^2-b^2.$

17. 若 $\sin(\alpha+\theta)=m,\ \sin(\alpha-\theta)=n$, 試證

$$\frac{(m+n)^2}{4\sin^2\alpha}+\frac{(m-n)^2}{4\cos^2\alpha}=1.$$

18. 若 $\cos(\theta-\alpha)=a,\ \sin(\theta-\beta)=b$, 試證

$$a^2-2ab\sin(\alpha-\beta)+b^2=\cos^2(\alpha-\beta).$$

19. 若 $\cos\theta+\sin\theta=a,\ \cos 2\theta+\sin 2\theta=b$, 證

$$(a^2-b-1)^2=a^2(2-a^2).$$

20. 若 $\cos\theta-\sin\theta=b,\ \cos 3\theta+\sin 3\theta=a$, 證

$$a=3b-2b^3$$

21. 若 $x+y=3-\cos 4\theta$, $x-y=4\sin 2\theta$, 求 x 與 y 之關係.

22. 若 $\sin(\theta+\alpha)=\sin(\theta+\beta)=a\sin 2\theta$, 試求 α 與 β 之關係.

23. 若 $x=a\cos^m\theta\cos^m\phi$, $y=b\cos^m\theta\sin^m\phi$, $z=c\sin^m\theta$, 試消去 θ 及 ϕ.

24. 試由下列之方程式消去 θ 及 ϕ.

$$\frac{ax}{\cos\theta}-\frac{by}{\sin\theta}=\frac{ax}{\cos\phi}-\frac{by}{\sin\phi}=a^2-b^2,\ \theta-\phi=\frac{\pi}{2}.$$

25. 試由下列之式消去 θ 及 ϕ:

$$\frac{x}{a}\cos\theta+\frac{y}{b}\sin\theta=\frac{x}{a}\cos\phi+\frac{y}{b}\sin\phi=1,\ \theta-\phi=2\alpha.$$

§67. 反三角函數 某數 y 爲 x 之函數,則 x 稱曰 y 之**反函數** (inverse function). 三角函數之反函數,特稱曰**反三角函數** (inverse trigonometric function),

設 $$y=\sin x,$$

則 x 稱曰 y 之**反正弦** (inverse sine). 記法用

$$x=\sin^{-1}y \text{ 或 } \operatorname{arc}\sin y.$$

同理可得反餘弦,反正切等之式.

由定義, $$\sin x=\sin(\sin^{-1}y)=y.$$

可見 sin 與 $\sin^{-1}$ 效用相反,而相消.他函數亦然.

三角函數與反三角函數,有迴異之性質;卽前者爲單值函數,而後者爲多值函數.譬如 $x=\frac{\pi}{6}$, 則 $\sin x$ 只有一値爲 $\frac{1}{2}$; 然若 $x=\frac{1}{2}$, 則 $\sin^{-1}x$ 除有 $\frac{\pi}{6}$ 之值外,尙有 $\frac{5\pi}{6}$, $\frac{13\pi}{6}$, $\frac{13\pi}{6}$ 等值.一般而論,則

同理
$$\left.\begin{aligned}\sin^{-1}x&=n\pi+(-1)^n\alpha.\\ \cos^{-1}x&=2n\pi\pm\alpha,\\ \tan^{-1}x&=n\pi+\alpha.\end{aligned}\right\}\qquad(50)$$

式中 n 爲任意整數,其 α 爲角之主值.

凡三角函數之關係,均可以反三角函數表之.

例一　試以反三角函數表下式之關係:

$$\cos 2A=1-2\sin^2 A.$$

解　命 $\sin A=m$, 則 $A=\sin^{-1}m$, 而原式成爲

$$\cos(2\sin^{-1}m)=1-2m^2,$$

卽
$$2\sin^{-1}m=\cos^{-1}(1-2m^2).$$

例二　試以反三角函數表

$$\sin(A+B)=\sin A\cos B+\cos A\sin B.$$

解　命 $\sin A=m$, $\sin B=n$,

則
$$\cos A=\sqrt{1-m^2},\ \cos B=\sqrt{1-n^2}.$$

由原式,
$$\sin(\sin^{-1}m+\sin^{-1}n)=m\sqrt{1-n^2}+n\sqrt{1-m^2},$$

卽
$$\sin^{-1}m+\sin^{-1}n=\sin^{-1}(m\sqrt{1-n^2}+n\sqrt{1-m^2}).$$

例三　試證

$$\tan^{-1}m+\tan^{-1}n=\tan^{-1}\frac{m+n}{1-mn}.$$

解　命 $\tan^{-1}m=A,\ \tan^{-1}n=B;$

則　$$m=\tan A,\quad n=\tan B:$$

代入原式，$A+B=\tan^{-1}\dfrac{\tan A+\tan B}{1-\tan A\tan B},$

即　$$\tan(A+B)=\frac{\tan A+\tan B}{1-\tan A\tan B}$$

此式爲眞故原式亦眞.

例四　求 $\tan^{-1}\frac{1}{2}+\tan^{-1}\frac{1}{3}$ 之值.

解　$$\tan\left(\tan^{-1}\frac{1}{2}+\tan^{-1}\frac{1}{3}\right)=\frac{\tan\left(\tan^{-1}\frac{1}{2}\right)+\tan\left(\tan^{-1}\frac{1}{3}\right)}{1-\tan\left(\tan^{-1}\frac{1}{2}\right)\tan\left(\tan^{-1}\frac{1}{3}\right)}$$

$$=\frac{\frac{1}{2}+\frac{1}{3}}{1-\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3}}=1.$$

$$\therefore\ \tan^{-1}\frac{1}{2}+\tan^{-1}\frac{1}{3}=n\pi+\frac{\pi}{4}.$$

例五　解方程式

$$\sin^{-1}2x+\sin^{-1}3x=\cos^{-1}\left(-\frac{2}{3}\right).$$

解　$\cos(\sin^{-1}2x+\sin^{-1}3x)=-\dfrac{2}{3},$

即 $\cos(\sin^{-1}2x)\cos(\sin^{-1}3x)-\sin(\sin^{-1}2x)\sin(\sin^{-1}3x)=-\frac{2}{3}$.

$$\sqrt{1-(2x)^2}\cdot\sqrt{1-(3x)^2}-2x\cdot 3x=-\frac{2}{3}$$

解之,得 $$x=\pm\frac{1}{3}.$$

［注意］ $a<-1$ 或 $a>1$ 時, $\sin^{-1}a$ 與 $\cos^{-1}a$ 無意義; $-1<a<1$ 時, $\sec^{-1}a$ 與 $\csc^{-1}a$ 無意義;但在 $\tan^{-1}a$ 與 $\cot^{-1}a$ 中, a 可爲任何値而絕無限制.

習題二十三

1. 求下列各角之一般値:

$$\sin^{-1}\frac{1}{2},\ \cos^{-1}\frac{1}{\sqrt{2}},\ \tan^{-1}\sqrt{3},\ \cos^{-1}0,\ \sec^{-1}1,\ \tan^{-1}\infty.$$

試證下列各題假設其角皆爲主値:

2. $\tan^{-1}\frac{3}{2}-\tan^{-1}\frac{1}{5}=\frac{\pi}{4}$.

3. $\tan^{-1}m+\tan^{-1}\frac{1}{m}=\frac{\pi}{2}$.

4 $\cos^{-1}\frac{8}{17}+\cos^{-1}\frac{15}{17}=\frac{\pi}{2}$.

5. $\tan^{-1}\frac{1}{2}+\tan^{-1}\frac{1}{4}+\tan^{-1}\frac{1}{13}=\frac{\pi}{4}$.

試以反函數表下列各式:

6. $\cos(A-B)=\cos A\cos B+\sin A\sin B$.

7. $\tan 2\theta = \dfrac{2\tan\theta}{1-\tan^2\theta}$.

8. $\sin 2x = 2\sin x\cos x$.

9. $\sin 3x = 3\sin x - 4\sin^3 x$.

10. 證 $\sin^{-1}m = \cos^{-1}\sqrt{1-m^2} = \tan^{-1}\dfrac{m}{\sqrt{1-m^2}}$

$$= \sec^{-1}\frac{1}{\sqrt{1-m^2}} = \csc^{-1}\frac{1}{m} = \cot^{-1}\frac{\sqrt{1-m^2}}{m}.$$

11. 證 $\sin^{-1}\dfrac{3}{5} + \cos^{-1}\dfrac{12}{13} = \tan^{-1}\dfrac{56}{33}$.

12. 證 $2\tan^{-1}\dfrac{1}{2} + 3\tan^{-1}\dfrac{1}{3} = \tan^{-1}(-3)$.

試由下列各題求 x:

13. $\sin^{-1}2x + \sin^{-1}x = \dfrac{\pi}{3}$.

14. $\tan^{-1}(1+x) + \tan^{-1}(1-x) = \tan^{-1}\dfrac{2}{25}$.

15. $\sin^{-1}x + 2\cos^{-1}x = \tan^{-1}\sqrt{3}$.

第 十 一 章

三角函數造表法

§68. 棣美弗氏定理 (De Moivre's theorem)

設 i 爲虛數單位，卽 $i=\sqrt{-1}$, $i^2=-1$.

則 $(\cos\theta+i\sin\theta)(\cos\phi+i\sin\phi)$

$$=\cos\theta\cos\phi+i\sin\theta\cos\phi+i\sin\phi\cos\theta+i^2\sin\theta\sin\phi$$

$$=(\cos\theta\cos\phi-\sin\theta\sin\phi)+i(\sin\theta\cos\phi+\sin\phi\cos\theta)$$

$$=\cos\ \theta+\phi)+i\sin(\theta+\phi).$$

依此類推，可得

$$(\cos\theta_1+i\sin\theta_1)(\cos\theta_2+i\sin\theta_2)(\cos\theta_3+i\sin\phi_3)\cdots\cdots$$
$$(\cos\theta_n+i\sin\theta_n)$$
$$=[\cos(\theta_1+\theta_2)+i\sin(\theta_1+\theta_2)](\cos\theta_3+i\sin\theta_3)\cdots\cdots$$
$$(\cos\theta_n+i\sin\theta_n)$$
$$=[\cos(\theta_1+\theta_2+\theta_3)+i\sin(\theta_1+\theta_2+\theta_3)](\cos\theta_4+i\sin\theta_4)\cdots\cdots$$
$$(\cos\theta_n+i\sin\theta_n)$$
$$=\cos(\theta_1+\theta_2+\theta_3+\cdots\cdots+\theta_n)+i\sin(\theta_1+\theta_2+\theta_3+\cdots\cdots+\theta_n).$$

設 $\theta_1=\theta_2=\theta_3=\cdots\cdots=\theta_n=\theta$.

則此式卽爲

$$(\cos\theta+i\sin\theta)^n=\cos n\theta+i\sin n\theta. \tag{51}$$

此謂棣美弗氏定理.

§ 69 以 $\sin\theta\cos\theta$ 表 $\sin n\theta\cos n\theta$ 由上節

$$\cos n\theta+i\sin n\theta=(\cos\theta+i\sin\theta)^n. \tag{A}$$

以 $\cos\theta=c$, $\sin\theta=s$ 代其右邊,照二項定理展開之;得

$$(c+is)^n=c^n+nic^{n-1}s+\frac{n(n-1)}{\underline{|2}}i^2c^{n-2}s^2+\frac{n(n-1)(n-2)}{\underline{|3}}i^3c^{n-3}s^3$$

$$+\frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{\underline{|4}}i^4c^{n-4}s^4+\cdots\cdots.$$

因 $i^2=-1$, $i^3=-i$, $i^4=1$, $\cdots\cdots$, 故

$$(c+is)^n=c^n+nic^{n-1}s-\frac{n(n-1)}{\underline{|2}}c^{n-2}s^2-\frac{n(n-1)(n-2)}{\underline{|3}}ic^{n-3}s^3$$

$$+\frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{\underline{|4}}c^{n-4}s^4+\cdots\cdots$$

此式之實數部卽爲(A)式左邊之實數部,故等於 $\cos n\theta$;

同理其虛數部必等於 $\sin n\theta$. 故

$$\left.\begin{aligned}\cos n\theta &= c^n - \frac{n(n-1)}{\lfloor 2}c^{n-2}s^2 \\ &\quad + \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{\lfloor 4}c^{n-4}s^4 - \cdots\cdots, \\ \sin n\theta &= nc^{n-1}s - \frac{n(n-1)(n-2)}{\lfloor 3}c^{n-3}s^3 \\ &\quad + \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)(n-4)}{\lfloor 5}c^{n-5}s^5 - \cdots\cdot.\end{aligned}\right\} \quad (52)$$

若 $n=2$, 則

$$\cos 2\theta = c^2 - \frac{2(2-1)}{\lfloor 2}c^0s^2 = c^2 - s^2 = \cos^2\theta - \sin^2\theta,$$

$$\sin 2\theta = 2\,cs = 2\sin\theta\cos\theta.$$

若 $n=3$, 則

$$\cos 3\theta = c^3 - \frac{3(3-1)}{\lfloor 2}cs^2 = \cos^3\theta - 3\cos\theta\sin^2\theta$$

$$= 4\cos^3\theta - 3\cos\theta,$$

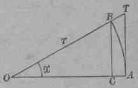
$$\sin 3\theta = 3\,c^2s - \frac{3(3-1)(3-2)}{\lfloor 3}c^0s^3 = 3\cos^2\theta\sin\theta - \sin^3\theta$$

$$= 3\sin\theta - 4\sin^3\theta.$$

§ 70. $\frac{\sin x}{x}$, $\frac{\tan x}{x}$ **之極限值**　設 $\angle AOB = x$ 弧度,而小於 $\frac{\pi}{2}$; 以角頂 O 爲中心, OA 爲半徑, 畫圓與二邊相交於

A, B,自 B 引 $BC\perp OA$ 自 A 引 $TA\perp OA$

且截 OB 於 T,



則有 $CB=r\sin x$,

弧 $AB=rx$,

$AT=r\tan x$.

三角形OAB之面積$=\frac{1}{2}OA\cdot CB=\frac{1}{2}r^2\sin x$,

扇形 OAB 之面積 $=\frac{1}{2}OA\cdot$弧 $AB=\frac{1}{2}r^2x$,

三角形OAT之面積$=\frac{1}{2}OA\cdot AT=\frac{1}{2}r^2\tan x$.

又因 $\triangle OAB<$ 扇形 $OAB<\triangle OAT$,

故 $\frac{1}{2}r^2\sin x<\frac{1}{2}r^2x<\frac{1}{2}r^2\tan x$,

$$\sin x<x<\tan x. \tag{B}$$

此式在$x<\frac{\pi}{2}$之內皆能成立.

以正値之正弦除之,得

$$1<\frac{x}{\sin x}<\frac{1}{\cos x},$$

或 $$1>\frac{\sin x}{x}>\cos x.$$

若 x 甚近於 0, 則 $\cos x$ 甚近於 1, 而 $\frac{\sin x}{x}$ 夾於 1 與 $\cos x$ 之間, 自然亦甚近於 1.

若以 $\tan x$ 除 (B) 式, 則有

$$\cos x<\frac{x}{\tan x}<1;$$

故當 x 甚近於 0, 則 $\frac{\tan x}{x}$ 亦甚近於 1.

綜上結果, 得

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1,\ \lim_{x\to 0}\frac{\tan x}{x}=1. \tag{53}$$

§ 71. 正弦餘弦正切之級數　由 (52) 式

$$\cos n\theta=\cos^n\theta-\frac{n(n-1)}{\lfloor 2}\cos^{n-2}\theta\sin^2\theta$$

$$+\frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{\lfloor 4}\cos^{n-4}\theta\sin^4\theta-\cdots\cdots,$$

$$\sin n\theta=n\cos^{n-1}\theta\sin\theta-\frac{n(n-1)(n-2)}{\lfloor 3}\cos^{n-3}\theta\sin^3\theta$$

$$+\frac{n(n-1)(n-2)(n-3)(n-4)}{\lfloor 5}\cos^{n-5}\theta\sin^5\theta-\cdots\cdots.$$

命 $n\theta=x$, 即 $n=\frac{x}{\theta}$, 則

$$\cos x=\cos^n\theta-\frac{\frac{x}{\theta}\left(\frac{x}{\theta}-1\right)}{\lfloor 2}\cos^{n-2}\theta\sin^2\theta$$

$$+\frac{\frac{x}{\theta}\left(\frac{x}{\theta}-1\right)\left(\frac{x}{\theta}-2\right)\left(\frac{x}{\theta}-3\right)}{\underline{|4}}\cos^{n-4}\theta\sin^4\theta-\cdots\cdots$$

$$=\cos^n\theta-\frac{x(x-\theta)}{\underline{|2}}\cos^{n-2}\theta\left(\frac{\sin\theta}{\theta}\right)^2$$

$$+\frac{x(x-\theta)(x-2\theta)(x-3\theta)}{\underline{|4}}\cos^{n-4}\theta\left(\frac{\sin\theta}{\theta}\right)^4-\cdots\cdots.$$

同理 $\sin x=x\cos^{n-1}\theta\frac{\sin\theta}{\theta}-\frac{x(x-\theta)(x-2\theta)}{\underline{|3}}\cos^{n-3}\theta\left(\frac{\sin\theta}{\theta}\right)^3$

$$+\frac{x(x-\theta)(x-2\theta)(x-3\theta)(x-4\theta)}{\underline{|5}}\cos^{n-5}\theta\left(\frac{\sin\theta}{\theta}\right)^5-\cdots.$$

設 x 爲常數,而 n 甚大,則 θ 必甚小;由上節知 $\frac{\sin\theta}{\theta}$ 及其各乘方之極限皆爲1;又 $\cos\theta$ 及其各乘方之極限亦皆爲1;於是上二式各成

$$\left.\begin{aligned}\cos x&=1-\frac{x^2}{\underline{|2}}+\frac{x^4}{\underline{|4}}-\frac{x^6}{\underline{|6}}+\cdots\cdots,\\ \sin x&=x-\frac{x^3}{\underline{|3}}+\frac{x^5}{\underline{|5}}-\frac{x^7}{\underline{|7}}+\cdots\cdots.\end{aligned}\right\}\tag{54}$$

此二式不論 x 之値如何,皆爲收斂.若以前式除後式,又得

$$\tan x=x+\frac{x^3}{3}+\frac{2x^5}{15}+\frac{17x^7}{315}+\cdots\cdots.\tag{55}$$

§ 72. 三角函數表之構造　任何角之函數,皆可以

小於45°之某函數表之,已如前述.實則30°至45°間之正餘弦,尙可以小於30°之角之正餘弦表之;其證如下:由(46)式,

$$\left.\begin{aligned}\sin x+\sin y &= \ \ 2\sin\frac{x+y}{2}\cos\frac{x-y}{2},\\ \cos x-\cos y &= -2\sin\frac{x+y}{2}\sin\frac{x-y}{2}.\end{aligned}\right\}\qquad (C)$$

命 $x=30^\circ+\theta,\ y=30^\circ-\theta$ 代入上式,且移項之;得

$$\begin{aligned}\sin(30^\circ+\theta)&=2\sin 30^\circ\cos\theta-\sin(30^\circ-\theta)\\ &=\cos\theta-\sin(30^\circ-\theta),\\ \cos(30^\circ+\theta)&=-2\sin 30^\circ\sin\theta+\cos(30^\circ-\theta)\\ &=-\sin\theta+\cos(30^\circ-\theta).\end{aligned}$$

設 θ 爲15°以下之各角;可見若已知小於30°之正餘弦,便可計算30°至45°間之正餘弦.例如 $\theta=5^\circ$;則有

$$\begin{aligned}\sin 35^\circ &= \ \ \cos 5^\circ-\sin 25^\circ,\\ \cos 35^\circ &= -\sin 5^\circ+\cos 25^\circ.\end{aligned}$$

然則欲造完全之三角函數表,只要先知0°至30°間之正餘弦;欲知0°至30°之正餘弦,須用(54)式.

例如欲求10°之正餘弦至小數第四位止,則命

$$x=10^\circ=\frac{\pi}{18}=0.17453.$$

由對數表, $x^2=0.03046,\quad x^3=0.00532,$

$$x^4=0.00093,\quad x^5=0.00016.$$

代入(54)式,得

$$\cos 10^\circ=1-\frac{x^2}{\underline{|2}}+\frac{x^4}{\underline{|4}}-\cdots\cdots$$

$$=1-0.01523+0.00004-\cdots\cdots$$

$$=0.98481.$$

$$\sin 10^\circ=0.17453-0.00089+0.00000-\cdots\cdots$$

$$=0.17364.$$

由截去小數尾所生之誤差,易知其小於0.00001;由截去級數末數項所生之誤差,雙方均小於

$$\frac{x^6}{\underline{|6}}+\frac{x^7}{\underline{|7}}+\frac{x^8}{\underline{|8}}+\cdots<\frac{x^6}{\underline{|6}}(1+x+x^2+\cdots)$$

$$<\frac{x^6}{\underline{|6}}\cdot\frac{1}{1-x}=0.00000005.$$

合兩種誤差,不能影響於小數第四位,故得

$$\cos 10^\circ=0.9848,\quad \sin 10^\circ=0.1736.$$

校對. $\cos^2 10^\circ+\sin^2 10=(0.9848)^2+(0.1736)^2=1.0000.$

由此例可見角在10°以內者,求其正餘弦至小數第四位止用下式可也:

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{\lfloor 2}, \quad \sin x = x - \frac{x^3}{\lfloor 3}. \tag{56}$$

茲更說明求每1′之正餘弦之法：先由正餘弦之級數(54),計算 1′之正餘弦,得

$$\sin 1' = 0.0002908882\cdots, \quad \cos 1' = 0.9999999577\cdots;$$

次設 $x=\theta+1'$ $y=\theta-1'$, 代入 (C) 式,得

$$\sin(\theta+1') = \quad 2\sin\theta\cos 1' - \sin(\theta-1'),$$

$$\cos(\theta+1') = -2\sin\theta\sin 1' + \cos(\theta-1').$$

命 $\theta=1'$, 則得

$$\sin 2' = \quad 2\sin 1'\cos 1' - \sin 0' = 0.000581776\cdots,$$

$$\cos 2' = -2\sin 1'\sin 1' + \cos 0' = 0.999999831\cdots.$$

依次命 $\theta=2', 3'$ 等, 可得 $\sin 3'$, $\cos 3'$, $\sin 4'$, $\cos 4'$ 等.

造正餘弦每10″之表,亦照上法先計算 $\sin 10''$ 及 $\cos 10''$, 然後依次應用下列兩公式:

$$\sin(\theta+10'') = \quad 2\sin\theta\cos 10'' - \sin(\theta-10''),$$

$$\cos(\theta+10'') = -2\sin\theta\sin 10'' + \cos(\theta-10'').$$

習題二十四

1. 試計算5°之正餘弦,至小數第四位止.

2. 應用上題結果,試計算5°之正餘切及正餘割.

3. 試由(56)式計算$5°$之正餘弦.

4. 計算$\sin 10''$及$\cos 10''$至小數第十位止.

試由正餘弦之級數,證明下列之關係:

5. $\sin^2 x+\cos^2 x=1$. 6. $\sin 2x=2\sin x\cos x$.

7. 求$\sec x$級數之首三項.

8. $\dfrac{\sin\theta}{\theta}=\dfrac{1349}{1350}$,則$\theta$殆等於$\dfrac{1}{15}$,試證之.

[應用正弦級數展開$\sin\theta$,且略去第三項以下.]

9. 若$\dfrac{\sin\theta}{\theta}=\dfrac{2165}{2166}$,則$\theta$殆等於$3°$,試證之.

10. 若x極小,求下列各式之極限值:

(a) $\dfrac{x-\sin x}{x^3}$. (b) $\dfrac{3\sin x-\sin 3x}{x-\sin x}$.

答　數

習　題　一

2. $\sin A=\frac{5}{13}$, $\cos A=\frac{12}{13}$, $\tan A=\frac{5}{12}$, $\csc A=\frac{13}{5}$, $\sec A=\frac{13}{12}$, $\cot A=\frac{12}{5}$. **3.** $\sin B=\frac{12}{13}$, $\cos B=\frac{5}{13}$, $\tan B=\frac{12}{5}$, $\csc B=\frac{13}{12}$, $\sec B=\frac{13}{5}$, $\cot B=\frac{5}{12}$. **4.** $\cos A=\sin B=\sin(90^\circ-A)$, $\tan A=\cot B=\cot(90^\circ-A)$, $\sec A=\csc B=\csc(90^\circ-A)$等. **5.** $\sin A=\frac{8}{17}$, $\cos A=\frac{15}{17}$, $\tan A=\frac{8}{15}$, $\sin B=\frac{15}{17}$, $\cos B=\frac{8}{17}$, $\tan B=\frac{15}{8}$. **7.** $\sin A=\frac{40}{41}$, $\cos A=\frac{9}{41}$, $\tan A=\frac{40}{9}$, $\csc A=\frac{41}{40}$, $\sec A=\frac{41}{9}$, $\cot A=\frac{9}{40}$. **8.** $\sin B=\frac{2pq}{p^2+q^2}$, $\cos B=\frac{p^2-q^2}{p^2+q^2}$, $\tan B=\frac{2pq}{p^2-q^2}$. **9.** vers $A=\frac{1}{5}$, covers $A=\frac{2}{5}$. **10.** $\sin A=\frac{7}{25}$, $\cos A=\frac{24}{25}$, $\tan A=\frac{7}{24}$, $\csc A=\frac{25}{7}$, $\sec A=\frac{25}{24}$, $\cot A=\frac{24}{7}$. **11.** $\sin 45^\circ=\cos 45^\circ=\frac{1}{\sqrt{2}}=0.707$, $\tan 45^\circ=\cot 45^\circ=1$, $\csc 45^\circ=\sec 45^\circ=\sqrt{2}=1.414$. **12.** $\sin 30^\circ=\frac{1}{2}$,

$\cos 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}$, $\tan 30^\circ = \frac{1}{\sqrt{3}}$, $\csc 30^\circ = 2$, $\sec 30^\circ = \frac{2}{\sqrt{3}} = \frac{2}{3}\sqrt{3}$, $\cot 30^\circ = \sqrt{3}$. **14.** $A = 45^\circ 35'$. **15.** $A = 48^\circ 11'$.

18.
19.

角	10°	0°	30°	40°	50°	60°	70°	80°
正弦	0.174	0.342	0.500	0.643	0.766	0.866	0.940	0.985
餘弦	0.985	0.940	0.866	0.766	0.643	0.500	0.342	0.174
正切	0.176	0.364	0.577	0.839	1.192	1.732	2.747	5.671

習　題　二

7. $A = 45^\circ$. **8.** $22^\circ 30'$. **9** $A = 7^\circ 30'$. **10.** $A = 18^\circ$ **11.** $A = 45^\circ$. **12.** $A = \frac{90^\circ}{n}$.

習　題　三

8. $\cos 15^\circ = \frac{1}{2}\sqrt{2+\sqrt{3}}$, $\tan 15^\circ = 2-\sqrt{3}$, $\sec 15^\circ = 2\sqrt{2-\sqrt{3}}$, $\csc 15^\circ = 2\sqrt{2+\sqrt{3}}$, $\cot 15^\circ = 2+\sqrt{3}$. **9.** $\frac{3}{4}$. **10.** $1+\sqrt{2}$. **11** $3\sqrt{2}+2$.

習　題　四

1. 1. **2.** $\tan A$. **3.** $\tan^2 x$. **4.** $\cos a$. **5.** $\sin y + \cos y$. **6.** $\csc\theta$. **7.** $\sin^2 x$. **8.** $1+\sin x$ **9.** $\sin\theta$. **10.** $\tan A \tan B$. **11.** $2\csc B$. **12.** $\sec A - \tan A$. **13.** 1. **14.** $\sec A \csc A$. **15.** $\tan B$. **16.** $\cos A$. **17.** 2. **18.** 0 **19.** $1+\sin A\cos A$.

20. 1. **21**. 1. **22**. x^2+y. **23**. $\sin^2 A$.

習　題　五

1. 0.4384, 0.8870, 0.4806, 1.744. **2**. 0.4384, 0.8870, 0.4806, 1.744. **3**. 0.1036, 0.4444, 0.4115, 0.5097. **4**. 1.1087, 2.3256. **5**. 29°22′, 60°38′, 62°10′, 27°50′, 25°15′30″, 60°39′30″, 60°24′30″, 25°00′36″. **8**. $a=15.5$, $b=31.4$, $B=63°45'$. **10**. 62°25′. **11**. $A=63°26'$, $B=26°34'$, $c=531.1$. **12**. $64°45'30''\pm60''$.

習　題　六

1. $b=21.45$, $c=23.66$. **2**. $B=33°15'$, $a=293$, $b=192$. **3**. $a=32.4$, $b=32.2$. **4**. $A=25°54'$, $B=64°06'$, $c=389$. **5**. $A=51°42'$, $B=38°18'$, $a=8.32$. **10**. 294. **11**. 58.78, 237.76. **14**. $A=25°13'$, $B=64°47'$, $a=2.24$. **18**. $AC=152$, $A=65°41'$. $C=46°49'$. **19**. 59.5, 35.9, 68°45′.

習　題　七

2. $4^{0.5}=2$, $3^4=81$ 等. **3**. 3, 4, 1, -3, $\frac{3}{2}$. **4**. $\log 3+\log 5$, $\log 2+\log 5-\log 3$, $\log 5-\log 3-\log 2$, $2(\log 2+\log 5)$, $\frac{1}{2}(\log 3+\log 5-\log 2)$, $\frac{1}{10}\log 2+\frac{19}{30}\log 3+\frac{2}{15}\log 5$. **5**. 0.60206, $\bar{1}.47712$,

$\bar{1}.87506$, 0.23299, 0.12224. **6**. 2, 1, 3, 0, −4, −1 **7**. 0.80277, 4.80277, $\bar{1}.80277$, 5.80277. **9**. 57, 570, 5.7, 0.57. **10**. 2.82802, 5.65604, 1.41401, 1.88535. **11**. 12, 48, 23, 8. **12**. 1.32222, 1.63202, $\bar{1}.96362$, 0.58366.

習題八

1. 3.80037, $\bar{2}.81624$. **2** 4.74472, 3.55025 **3**. $x=1.80124$, $y=65.863$. **4**. 0.80165, 6.3336. **5**. 10000. **6**. 1.63287, 2.98958. **7**. $\bar{1}.80808$, $\bar{1}.82125$, 0.80854. **8** 11位, 687. **10**. 80127. **11** 1.8371. **13**. $x=0$或2.1827 **14**. $x=\pm 2.6339$. **15**. $\log_2 10=3.3219$. **16**. 4.60518, 6.90777, −4.60518, 0.69315. **17**. $\frac{1}{2\log_{10}3}$, $\frac{1}{\log_{10}3}$. **18**. 以3除之,以2乘之.

習題九

1. 9.36502, 9.95657, 9.24779, 0.51466. **2**. 9.97866 − 10, 0.01946, 9.66437 − 10, 9.57389 − 10. **3**. 9.86928, 9.97370, 9.98186, 10.77818. **4**. $x=37°02'$, $68°18'$, $51°21'$. **5**. $x=69°59'24''$, $38°04'30''$, $55°56'15''$. **6**. $x=64°20'30''$. **7**. $x=7°18'40''$. **8** 8.36696 − 10, 8.12414 − 10, 1.75459, 8.27928 − 10. **10**. $x=0°58'17''$, $y=1°33'14''$.

習題十

1. $A=35°40'33''$, $B=54°19'27''$, $b=235.28$. **2.** $A=27°09'29''$, $c=94.530$. **3.** $b=867.5$, $c=1025.8$. **4.** $B=54°43'35''$, $a=388.26$, $b=548.90$. **5.** $A=10°02.7'$, $B=79°57.3'$, $a=6.030$. **6.** $A=124°44'28''$. $B=17°33'08''$, $c=254.97$. **7.** $a=334.7$, $B=18°33.9'$. **8.** $c=612.55$, $a=369.22$, $B=23°52.2'$. **9.** $B=49°37'38''$, $C=64°45'10''$, $c=626.13$. **10.** $A=41°24.6'$, $B=55°46.3'$, $C=82°49.1'$. **11.** $a:b:c=0.7660:0.8660:0.9397$. **12.** 1017 **13.** 13.48. **14.** 27.80 公尺. **15.** 5062.8 公尺, 1118.8 公尺. **17.** 37°39.4′ **18.** 236.59. **19.** $AC=28.365$, $BD=9.768$. **24.** 63°26′, 26°34′, 30°.

習題十一

1. 237 尺. **2.** 1.19 里. **4.** 116 尺, 317 尺. **5.** 156 尺. **6.** 28°23′. **7.** 525 公尺. **9** 167 尺. **10.** 北 58°23.8′ 東, 16.17 公里. **11.** 2292 尺, 1598 尺. **12.** 8°24′. **14** 0.098 寸. **15.** 0.183. **16** 321.2 公里. **17.** 緯距 $=569.6$ 海里 $=569.6'=9°29.6'$, 緯度 $=47°30'+9°29.6'=56°59.6'$. **18.** 每時 9.77 海里, 南 67°07′ 東 **20.** 2884 公尺, 南 63°45′ 西 **22.** 383860 公

里. **23**. 1738.1 公里. **24**. 149260000 公里, 1392300 公里.

習 題 十 二

1. 45.81°, 185.9875°, 35.5083°, 375.01305°. **2**. 16°21′, 153°09′21.6″, 64°17′08.57″. **3**. $2\pi, \frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{8}, \frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{12}$等. **4**. 10°, 18°,……, 114.6°, 28.65°, 18.23°. **6**. 第二, 第三, …, 第一, 第四. **7**. 105°, 255°. **8**. $2n\pi+\frac{\pi}{4}$. **9**. $\frac{\pi}{2}-\theta,\ -\theta$. **12**. $\frac{3\pi}{5}, \frac{3\pi}{4}, \frac{(n-2)\pi}{n}$. **14**. $14.3^\circ=\frac{1}{4}$ 度弧. **15**. $\frac{18000}{\pi}$ 尺. **17**. $\frac{100\pi}{3}$ 尺. **18**. 每秒 29.9 公里. **19**. 30°.

習 題 十 三

3. $y=+\sqrt{3}$ 或 $-\sqrt{3}$.

8. 30°, 150°; 60°, 300°. **9**. $\frac{1}{2}, \frac{1}{\sqrt{2}}, 1, \frac{-1}{\sqrt{2}}, \frac{\sqrt{3}}{2}, 1$. **14**. $\sin 34^\circ,\ -\cos 55^\circ,\ -\tan 48^\circ,\ -\sin\frac{\pi}{4}, -\cos\frac{\pi}{8}, -\tan\frac{\pi}{4}$. **15**. $-\cot 5^\circ,\ -\cos 2^\circ,\ -\sin 25^\circ 10',\ -\csc\frac{\pi}{6}, -\cos\frac{\pi}{6}, -\tan\frac{R}{2}$. **16**. $\sin 36^\circ 45, -\cos 36^\circ 45', \cot 26^\circ 49' 45'', \csc 14^\circ 30'\ -\tan 37^\circ$. **17**. 0.9304, −0.2890, −1.0355, −0.6788, −0.1320, 0.8090, −0.1736. **18**. $-\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{2}, -1$. **20**. $\theta=102^\circ 50'$. **23**. 0.5125.

習題十四

2. $A=0°$, $a^2=b^2+c^2-2bc=(b-c)^2$; $A=90°$, $a^2=b^2+c^2$; $A=180°$, $a^2=b^2+c^2+2bc=(b+c)^2$. **4**. $b=11.8$, $c=11.5$. **5**. $B=37°10'$, $c=16.2$. **6**. $B=43°33.5'$, $C=120°26.5'$, $c=18.76$; 又 $B'=136°26.5'$, $C'=27°33.5'$, $c'=10.07$. **7**. $c=98.3$. **8**. $A=28°57.3'$, $B=46°34.1'$, $C=104°28.6'$.

習題十六

1. 0.37 里. **2**. 523.2 公尺. **4**. 北 23°32′ 東或西. **5**. 28.9 公尺. **7**. 44.1 尺, 20.6 尺. **8** 每時 19.43, 14.75 公里. **9**. 離 C 處 671 公尺. **11**. 34.94 公里. **12**. 4372 公尺. **13**. 136.9 尺. **14** 247.74 方尺. **19**. 16.18. **20**. 26.96, 21.62. **23**. 6.293. **24**. 13.77. **26**. (456.7, 57.66). **29**. 圓心角及邊之誤差各為 $0°9.4'$ 及 $0.00254\times r$.

習題十七

1. 93.8 斤. **2** 48.8, 66.2 *dyne*. **3**. 361.4 公尺, 439.5 公尺. **6**. 35.77 尺. **7**. $\theta=\tan^{-1}\dfrac{a+b}{\sqrt{(a-b+c)(-a+b+c)}}$. **8**. 87.7, 91°. **9**. 441.0 尺. **11**. 336.8 尺. **13**. 12.7 公尺. **14**. 212 尺,

248 尺. **15.** $EF=\frac{AB\sin(2)\cdot\sin(4)\cdot\sin(8)\cdot\sin(11)}{\sin(3)\cdot\sin(6)\cdot\sin(9)\cdot\sin(12)}=7507.6$ 尺.

17. $\frac{8\sin 22°30'\cdot\sin 11°33'}{\sin 42°43'\cdot\sin 54°16'}=1.11$ 公里. **18.** 北 $42°21'$ 西, 3時 16.9 分.

習 題 十 八

15. $\frac{p}{q}=\frac{\sin\theta}{\sin(\alpha-\theta)}$, 故 $\tan\theta=\frac{p\sin\alpha}{p\cos\alpha+q}$.

習 題 十 九

1. $\tan 75°=\frac{\sqrt{3}+1}{\sqrt{3}-1}$, $\tan 15°=\frac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{3}+1}$. **8.** $\sin 22\frac{1}{2}°=\frac{1}{2}\sqrt{2-\sqrt{2}}$, $\cos 22\frac{1}{2}°=\frac{1}{2}\sqrt{2+\sqrt{2}}$, $\tan 22\frac{1}{2}°=\sqrt{2}-1$. **9.** $\sin 15°=\frac{1}{2}\sqrt{2-\sqrt{3}}$, $\cos 15°=\frac{1}{2}\sqrt{2+\sqrt{3}}$, $\tan 15°=2=\sqrt{3}$. **12.** $\tan 3A=\frac{3\tan A-4\tan^3 A}{1-3\tan^2 A}$.

13. $\sin 18°=\frac{\sqrt{5}-1}{4}$, $\cos 18°=\frac{\sqrt{10+2\sqrt{5}}}{4}$. **22.** $\frac{1}{2}(\sin 15° +\sin 5°)\cdots\cdots$, $\frac{1}{2}\left(\cos\frac{\pi}{2}+\cos 2\theta\right)=\frac{1}{2}\cos 2\theta$, **36.** 120 尺. **37.** $\frac{\sqrt{3}}{2}b\pm\frac{1}{2}\sqrt{3b^2-4a^2-4ab}$, 如 $b>2a$, 則有兩答數; $b<2a$, 則無答數; $b=2a$, 有一答數.

習題二十

1. 主值 0 或 $\frac{\pi}{3}$, $\theta=n\pi$ 或 $2n\pi\pm\frac{\pi}{3}$. 2. 主值 $\frac{\pi}{6}$, $x=n\pi\pm\frac{\pi}{6}$.

3. $\frac{\pi}{3}$, $\phi=2n\pi\pm\frac{\pi}{3}$. 4. $\frac{\pi}{4}$, $y=n\pi+\frac{\pi}{4}$. 5. $x=\frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}, \frac{5\pi}{4}, \frac{7\pi}{4}$. 6. $\theta=0, \frac{\pi}{2}$. 7. $x=\frac{\pi}{6}, \frac{11\pi}{6}$. 8. $t=\frac{\pi}{3}, \frac{5\pi}{3}$. 9. $\theta=\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}, \frac{5\pi}{6}, \frac{7\pi}{6}, \frac{5\pi}{4}, \frac{7\pi}{4}, \frac{11\pi}{6}$. 10. $x=63°26'04''$, $108°26'06''$, $243°26'04''$, $288°26'06''$. 11. $x=19°28'16''$, $30°$, $150°$, $160°31'44''$.

12. 無解. 13. $x=30°$, $150°$. 14. $\frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}, \frac{5\pi}{4}, \frac{7\pi}{4}$.

42. $\dfrac{\sin\left\{\alpha+\left(\frac{n-1}{2}\right)\beta\right\}\sin\frac{n\beta}{2}}{\sin\frac{\beta}{2}}$. 43. $\dfrac{\sin^2 n\alpha}{\sin\alpha}$.

習題二十一

1. $x=n\pi-\frac{1}{2}\pi$ 或 $2n\pi\pm\frac{2}{3}\pi$. 2. $x=2n\pi-\frac{1}{2}\pi$ 或 $\frac{2n\pi}{9}+\frac{\pi}{18}$.

3. $x=2n\pi$ 或 $(2n+1)\frac{\pi}{9}$. 4. $x=2n\pi$ 或 $\frac{2n\pi}{9}$. 5. $\theta=\frac{n\pi}{7}+\frac{\pi}{14}$.

6. $x=\frac{n\pi}{2}$ 或 $2n\pi\pm\frac{2\pi}{3}$. 7. $x=n\pi$ 或 $n\pi-\frac{1}{2}\pi$ 或 $n\pi+(-1)^n\frac{\pi}{6}$.

8 $y=n\pi$ 或 $\frac{1}{4}n\pi+(-1)^n\frac{\pi}{24}$. 9. $x=2n\pi\pm\cos^{-1}\frac{1}{3}=2n180°\pm70°32'$. 10. $x=n\pi\pm\frac{\pi}{6}$. 11. $x=\frac{n\pi+\frac{1}{2}\pi}{m\pm k}$. 12. $\phi=\frac{n\pi}{k+1}$

$+\frac{\pi}{2(k+1)}$. **13**. $x=2n\pi-\frac{1}{2}\pi$ 或 $\frac{2}{5}n\pi+\frac{\pi}{10}$. **14**. $\theta=2n\pi-\frac{1}{2}\pi$ 或 $\frac{2}{3}n\pi+\frac{\pi}{6}$. **15**. $x=2n\pi+\frac{1}{2}\pi$ 或 $\frac{2}{5}n\pi+\frac{\pi}{10}$. **16**. $r=15.28$, $\theta=32°33'$. **18**. $r=96.583$, $\theta=163°40'52''$. **19**. $r=85$, $\theta=81°12'$, $\phi=86°36'$. **21**. $r=2$, $x=0°$. **23**. 主值, $x=\frac{7\pi}{24}$ 或 $\frac{\pi}{24}$, $y=\frac{\pi}{24}$ 或 $\frac{7\pi}{24}$; 一般值, $x=(m+2n)\frac{\pi}{2}+(-1)^m\frac{\pi}{6}\pm\frac{\pi}{8}$, $y=(m-2n)\frac{\pi}{2}+(-1)^m\frac{\pi}{6}\mp\frac{\pi}{8}$; 其 m, n 爲任意整數. **24**. $x=2n\pi\pm\cos^{-1}\left(\frac{a+2b^2}{4b^2}\right)$, $y=2n\pi\pm\cos^{-1}\left(\frac{a-2b^2}{4b^2}\right)$.

習題二十二

4. $x=53°07'45''$. **5** $\theta=17°59.6'$, $261°55'$. **6**. $x=2n\pi+\frac{5}{12}\pi$, $(2n+1)\pi-\frac{\pi}{12}$. **7**. $x=n\pi+\frac{\pi}{4}$, $n\pi-\frac{\pi}{12}$. **8**. $\tan\left(\frac{\alpha+\beta}{2}+x\right)=\tan\left(\frac{n\pi}{4}+\phi\right)\tan\frac{\alpha-\beta}{2}$, $\tan\phi=\frac{n}{m}$. **11**. $(a^2-b^2)^2=16ab$. **12**. $ab=a+b+1$ **13**. $x^{\frac{4}{3}}y^{\frac{2}{3}}-x^{\frac{2}{3}}y^{\frac{4}{3}}=1$. **14**. $a^2-b^2=0$. **15**. $\frac{d}{a-b}+\frac{a}{b-c}+\frac{b}{c-a}=0$. **16**. $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$. **21**. $\sqrt{x}+\sqrt{y}=2$. **22** $a^2\sin^2(\alpha+\beta)=\cos^2\frac{1}{2}(\alpha-\beta)$. **23**. $\left(\frac{x}{a}\right)^{\frac{2}{m}}+\left(\frac{y}{b}\right)^{\frac{2}{m}}+\left(\frac{z}{c}\right)^{\frac{2}{m}}=1$, **24**. $2(a^2x^2+b^2y^2)^3=(a^2x^2-b^2y^2)^2(a^2-b^2)^2$. **25** $(b^2x^2+a^2y^2)\times(1+\cos 2\alpha)=2a^2b^2$.

習題二十三

1. $n\pi+(-1)^n\frac{\pi}{6}, 2n\pi\pm\frac{\pi}{4}, n\pi+\frac{\pi}{3}$, 等. **6.** $\sin^{-1}m-\sin^{-1}n$ $=\cos^{-1}[mn+\sqrt{(1-m^2)(1-n^2)}]$, 設 $m=\sin A, n=\sin B$. **7.** $2\tan^{-1}m$ $=\tan^{-1}\left(\frac{2m}{1-m^2}\right)$, 設 $m=\tan\theta$. **8.** $2\sin^{-1}m=\sin^{-1}(2m\sqrt{1-m^2})$, 設 $m=\sin x$. **9.** $3\sin^{-1}m=\sin^{-1}(3m-4m^3)$. **13.** $x=\pm\frac{\sqrt{21}}{14}$. **14.** $x=\pm5$. **15.** $x=\pm\frac{\sqrt{3}}{2}$.

習題二十四

1. $\sin 5^\circ=0.08716$, $\cos 5^\circ=0.9962$. **2.** $\sec 5^\circ=1.0038$, $\csc 5^\circ$ $=11.4737$. **4.** $\sin 10''=0.0000484814$, $\cos 10''=0.9999999988$ **7.** $\sec x=\frac{1}{\cos x}=1+\frac{x^2}{2}+\frac{5x^4}{24}+\cdots\cdots$. **10.** (a) $\frac{1}{6}$ (b) 24

漢英名詞對照表

說　明

(1) 本表按王雲五氏之四角號碼檢字法排列
(2) 單字注四角號碼及附角之號碼於本字之上
(3) 名詞除第一字四角號碼已見該名詞上面單字～用記號代表外第二字取上二角之號碼於本條之上
(4) 名詞第三字仍依號碼順序排列但不注號碼
(5) 本表每面上端首尾所注號碼係本面號碼之起訖中間所注各字係本面單字
(6) 四角號碼檢字法見下(詳細方法可參閱王雲五大辭典或王雲五小辭典)

第二次改訂四角號碼檢字法

王雲五發明

第一條　筆畫分為十種，各以號碼代表之如下：

號碼	筆名	筆形	舉例	說明	注意
0	頭	亠	言主广疒	獨立之點與獨立之橫相結合	0456789各種均由數筆合為一複筆，檢查時遇單筆與複筆並列，應儘量取複筆；如亠作0不作3，寸作4不作2，厂作7不作2，⺊作8不作32，个作9不作33。
1	橫	一ㄑ乚㇏	天土地江元風	包括橫挑和右鈎	
2	垂	丨丿亅	山月千則	包括直撇和左鈎	
3	點	丶㇏	宀ネ宀厶之衣	包括點和捺	
4	叉	十乂	草杏皮刈大猗	兩筆相交	
5	插	扌	才戈申史	一筆通過兩筆以上	
6	方	口	國鳴目四甲由	四邊齊整之形	
7	角	㇇㇆乚𠃍	羽門灰陰雪衣學罕	橫和垂相接之處	
8	八	八丷人𠂉	分頁羊余災乘疋午	八字形與其變形	
9	小	小⺌⺍忄	尖糸粦呆惟	小字形與其變形	

第二條　每字祇取四角之筆，其順序：
(一)左上角　(二)右上角　(三)左下角　(四)右下角

(例) (一)左上角……端……(二)右上角
(三)左下角……端……(四)右下角

檢查時按四角之筆形及順序，每字得四碼：

(例) 顏=[illegible]　截=[illegible]　踝=[illegible]

第三條　字之上部或下部，祇有一筆或一複筆時，無論在何地位，均作左角，其右角作0。

(例) 宣　宜　首　条　冨　宗　毋

每筆用過後，如再充他角，亦作0。

(例) 千　之　持　排　关　米　禀　時

第四條　由囗門鬥所成之字，其下角取內部之筆，但上下左右有他筆時，不在此例。

(例) 因=[illegible]　閉=[illegible]　闔=[illegible]
菌=[illegible]　瀾=[illegible]

英漢名詞對照表

A

B

C

D

E

F

G

I